ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄
ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1969

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου Διδάκτορος
καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

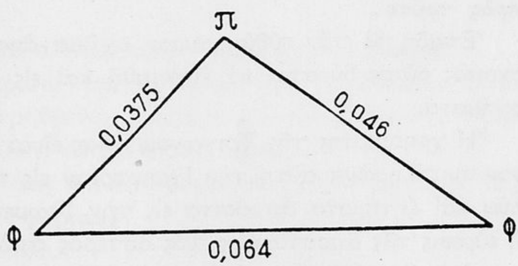
## Ε′ ΚΑΙ ΣΤ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ


ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1969

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

**1.** *Πρόβλημα.* **Δύο φάροι ἀπέχουσιν ἀλλήλων 6400 μέτρα. Κατά τινα στιγμὴν ἀπὸ τὸν ἕνα φάρον Φ ἐφάνη ὑπὸ γωνίαν $45^0$ ἡ ἀπόστασις πλοίου Π ἀπὸ τὸν ἄλλον φάρον Φ′. Τὴν αὐτὴν δὲ στιγμὴν ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τὸν Φ ἐφάνη ἀπὸ τὸν Φ′ ὑπὸ γωνίαν $30^0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ ἕκαστον φάρον τὴν στιγμὴν ἐκείνην.**

*Λύσις.* Κατασκευάζομεν τρίγωνον πφφ′ ὅμοιον πρὸς τὸ νοητὸν τρίγωνον ΠΦΦ′ ὑπὸ κλίμακα π.χ. 1 : 100 000 (σχ. 1).



Σχ. 1

Μετροῦμεν ἔπειτα τὰς πλευρὰς φπ καὶ φ′π αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ὅτι (φπ) = 0,0375 μέτ. καὶ (φ′π) = 0,046 μέτ. Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας θὰ εἶναι :

$$(\Phi\Pi) = 0{,}0375 \times 100\,000 = 3\,750 \text{ μέτρα}$$

καὶ

$$(\Phi'\Pi) = 0{,}046 \times 100\,000 = 4\,600 \text{ μέτρα}$$

**2. Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.** Ἡ προηγουμένη γραφικὴ λύσις τῶν τοιούτων προβλημάτων δίδει πολλάκις ἐξαγόμενον μὲ σημαντικὰ σφάλματα. Διότι τὰ κατασκευαζόμενα σχήματα καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως διαφόρων στοιχείων αὐτῶν δὲν εἶναι πάντοτε ἀκριβῆ ἢ ἕνεκα ἀτελείας τῶν ὀργάνων, μὲ τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται ἢ καὶ ἕνεκα ἀδεξίας χρήσεως αὐτῶν.

Τὰ σφάλματα δὲ ταῦτα εἶναι σημαντικά, ὅταν γίνωνται κατασκευαὶ γωνιῶν καὶ ἐνισχύονται, ὅταν γίνηται χρῆσις ὁμοίων σχημάτων. Ἂν π.χ. τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς φπ εὑρεθῇ μὲ σφάλμα 0,01 μέτ. ἡ εὑρεθεῖσα ἀπόστασις ( ΦΠ ) θὰ ἔχῃ σφάλμα :

$$0{,}01 \cdot 100\,000 = 1\,000 \text{ μέτρα.}$$

Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τοιούτων σφαλμάτων οἱ Μαθηματικοὶ ἐπενόησαν μέθοδον καθαρῶς λογιστικήν.

Δι' αὐτῆς δύνανται νὰ ὑπολογίζωσι τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ ἐπαρκῆ δεδομένα. Εἰς τὸ προηγούμενον π.χ. πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίζωνται ἀμέσως αἱ ζητούμεναι ἀποστάσεις ( ΦΠ ) καὶ ( Φ'Π ) χωρὶς νὰ γίνῃ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου φπφ'.

Ἡ ἔκθεσις τῶν μεθόδων τούτων ἀποτελεῖ τὸν σκοπὸν τῆς **Τριγωνομετρίας**. Ὥστε :

**Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ἂν δοθῶσιν ἐπαρκῆ στοιχεῖα πρὸς τοῦτο.**

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἀναλύεται εἰς τρίγωνα, ὁ σκοπὸς οὗτος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς πάντα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα.

Ἡ χρησιμότης τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι μεγάλη. Διότι ὄχι μόνον συμπληρώνει αὕτη τὴν Γεωμετρίαν εἰς πολλὰ ζητήματα, ἀλλὰ λύει καὶ ζητήματα ἀπρόσιτα εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως ἑνὸς ἀστέρος ἀπὸ τὴν Γῆν.

Διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὰς μεθόδους, μὲ τὰς ὁποίας ἡ Τριγωνομετρία ἐκτελεῖ τὸν σκοπόν της, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν μερικὰς προκαταρκτικὰς γνώσεις. Ταύτας ἐκθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

### ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ, ΤΟΞΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ.

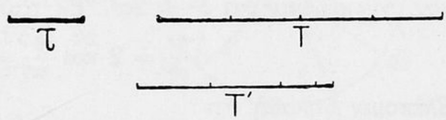
**3. Μέτρησις εὐθυγράμμου τμήματος. Λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα.

Τὸ ὡρισμένον τοῦτο εὐθύγραμμον τμῆμα λέγεται **μονάς.**

Ἀπὸ δὲ τὴν σύγκρισιν ταύτην προκύπτει εἷς ἀριθμός. Οὗτος λέγεται **μῆκος** τοῦ μετρηθέντος τμήματος καὶ φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τοῦτο.

Αἱ δὲ μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, λέγονται **μονάδες μήκους.**

Διεθνεῖς μονάδες μήκους εἶναι τὸ μέτρον καὶ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ.



Σχ. 2

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Τ (σχ. 2) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τ, ἂν ληφθῇ 4 φοράς. Δι᾽ αὐτὸ τὸ Τ λέγεται **γινόμενον** τοῦ τ ἐπὶ 4, ἤτοι εἶναι :

$$T = \tau \cdot 4 \qquad (1)$$

Τὸ δὲ τ εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ Τ.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Τ΄ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα ἴσα πρὸς τὸ τ, ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ.

Δι᾽ αὐτὸ τὸ Τ΄ λέγεται γινόμενον τοῦ τ ἐπὶ $\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$.

Εἶναι δηλαδὴ $$T' = \tau \cdot \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \qquad (2)$$

Παρατηροῦντες ὅτι : $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ καὶ $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

**Γινόμενον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὅπως ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.**

Ὁ ἀριθμὸς 4 τῆς ἄνω ἰσότητος (1) λέγεται **λόγος** τοῦ Τ πρὸς τὸ τ. Ὥστε :

**Λόγος εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο λέγεται ὁ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον εὐθύγραμμον τμῆμα διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.**

Ὁ λόγος τοῦ Τ πρὸς τὸ τ σημειοῦται οὕτω :

$$T : \tau \text{ ἢ } \frac{T}{\tau}$$

Ὁ λόγος εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα. Δύναται ὅμως νὰ εἶναι καὶ ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Οὕτως, ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ δ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, γνωρίζομεν ὅτι $\delta^2 = 2\alpha^2$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} = 2 \text{ καὶ } \frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι :

**Λόγος τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{2}$.**

**4. Μέτρησις καὶ μέτρον τόξου.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τόξον, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἓν ὡρισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς **μονὰς τῶν τόξων.**

Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης προκύπτει εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται **μέτρον** τοῦ μετρηθέντος τόξου. Οὗτος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ τόξον τοῦτο.

Τὸ μέτρον τόξου Τ σημειώνομεν συντόμως οὕτω : $(\overset{\frown}{T})$.

**5. Μονάδες τόξων.** Συνήθεις μονάδες τόξων εἶναι αἱ ἑξῆς :

*α΄) Ἡ μοῖρα* ($^{0}$), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτὰ* ($'$). Ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 *δεύτερα λεπτὰ* ($''$).

*β΄) Ὁ βαθμός,* ἤτοι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτά.* Ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 100 *δεύτερα λεπτά.* Ἓν μέτρον π.χ. 25 βαθμῶν καὶ 35 πρώτων λεπτῶν σημειοῦται οὕτως : $25^{\gamma},35$.

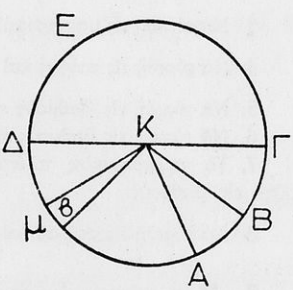
*γ΄) Τὸ ἀκτίνιον τόξον,* ἤτοι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, α θὰ εἶναι καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀκτινίου τόξου. Ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς περιφερείας εἶναι $2\pi\alpha : \alpha = 2\pi$ ἀκτίνια. Τῆς ἡμιπεριφερείας $\pi\alpha : \alpha = \pi$, τοῦ τετάρτου περιφερείας $\frac{\pi}{2}$ κ.τ.λ.

**6. Σχέσεις τῶν μέτρων τοῦ αὐτοῦ τόξου.** Ἔστωσαν δύο τόξα ΑΒ καὶ ΓΕΔ περιφερείας Κ (σχ. 3). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ ΓΕΔ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ ΑΒ, ἤτοι

$$\overset{\frown}{\Gamma E \Delta} : \overset{\frown}{AB} = 6. \qquad (1)$$

Ἂν ἡ μονὰς μ τῶν τόξων χωρῇ λ φορὰς εἰς τὸ $\overset{\frown}{AB}$, εἰς τὸ $\overset{\frown}{\Gamma E \Delta}$ θὰ χωρῇ 6λ φοράς. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$(\overset{\frown}{\Gamma E \Delta}) = 6\lambda$ καὶ $(\overset{\frown}{AB}) = \lambda$.




Σχ. 3

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

$(\overset{\frown}{\Gamma E \Delta}) = (\overset{\frown}{AB}) \cdot 6$ καὶ ἑπομένως $(\overset{\frown}{\Gamma E \Delta}) : (\overset{\frown}{AB}) = 6$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς ( 1 ) προκύπτει ἡ ἰσότης :

$\overset{\frown}{\Gamma E \Delta} : \overset{\frown}{AB} = (\overset{\frown}{\Gamma E \Delta}) : (\overset{\frown}{AB})$, ἤτοι :

**Ὁ λόγος ἑνὸς τόξου πρὸς ἄλλο ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ μέτρου τοῦ α΄ πρὸς τὸ μέτρον τοῦ β΄, ἂν ταῦτα μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

Ἔστωσαν ἤδη μ, β, α τὰ μέτρα ἑνὸς τόξου ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια $\widehat{ΓΕΔ}$ ἔχει μέτρα $180^0$, $200^Y$, π ἀκτίνια. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, θὰ εἶναι :

$$\frac{\widehat{ΑΒ}}{\widehat{ΓΕΔ}} = \frac{μ}{180}, \quad \frac{\widehat{ΑΒ}}{\widehat{ΓΕΔ}} = \frac{β}{200} \text{ καὶ } \frac{\widehat{ΑΒ}}{\widehat{ΓΕΔ}} = \frac{α}{π}$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι :

$$\frac{μ}{180} = \frac{β}{200} = \frac{α}{π} \qquad (2)$$

Διὰ τῶν σχέσεων τούτων, ἂν δοθῇ ἓν ἐκ τῶν τριῶν μέτρων τόξου, εὑρίσκομεν τὰ ἄλλα δύο. Ἂν π.χ. $μ = 54^0$, εὑρίσκομεν ὅτι $β = 54 \cdot \frac{200}{180} = 60^Y$ καὶ $α = 54 \cdot \frac{π}{180} = \frac{3π}{10}$ ἀκτίνια.

### Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου $40^0$ ἢ $30^0$.
2. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου $60^0$ ἢ $80^0$.
3. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου $50^Y$ ἢ $30^Y$.
4. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ βαθμοὺς τὸ μέτρον τόξου $\frac{3π}{2}$ ἀκτινίων.
5. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον $40^0\ 20'$.
6. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου $50^0\ 30'\ 40''$.
7. Τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Ἀθηνῶν εἶναι $37^0\ 58'\ 20''$. Νὰ ἐκτιμηθῇ τοῦτο εἰς βαθμούς.
8. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ βαθμοὺς τὸ μέτρον τόξου $\frac{5π}{8}$ ἀκτινίων.

**7. Μέτρησις καὶ μέτρον γωνίας.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὴν πρὸς μίαν ὡρισμένην γωνίαν. Αὕτη λέγεται **μονὰς τῶν γωνιῶν.**

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός. Αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τῆς μετρηθείσης γωνίας φανερώνει δὲ ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ γωνία αὕτη·

Τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ΑΒΓ γράφεται οὕτω : $(\widehat{ΑΒΓ})$. Ὡς μονὰς δὲ τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Οὕτως, ἂν μ εἶναι ἡ μονὰς τῶν τόξων (σχ. 3), μονὰς τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι ἡ γωνία β.

Ἂν μονὰς μ εἶναι ἡ μοῖρα ἢ ὁ βαθμὸς ἢ τὸ ἀκτίνιον, ἡ μονὰς β τῶν γωνιῶν θὰ λέγηται ἀντιστοίχως γωνία μιᾶς μοίρας ἢ ἑνὸς βαθμοῦ ἢ ἑνὸς ἀκτινίου.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι :

**Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (ἢ εἰς ἴσους κύκλους) εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἐκ τούτου δὲ ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι :

Ἂν ἓν τόξον ΑΒ εἶναι **διπλάσιον, τριπλάσιον** κ.τ.λ. ἄλλου τόξου μ, καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AKB}$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως **διπλασία, τριπλασία** κ.τ.λ. τῆς β (σχ. 3). Εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\widehat{AKB}}{\beta} = \frac{\widehat{AB}}{\mu} \qquad \text{ἢ} \qquad (\widehat{AKB}) = (\widehat{AB})$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι ὑπὸ τὰς προηγουμένας προϋποθέσεις :

**Τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.**

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ ἰσότητες 2 (§ 6) ἀληθεύουσι καὶ ἂν μ, β, α εἶναι μέτρα γωνίας.

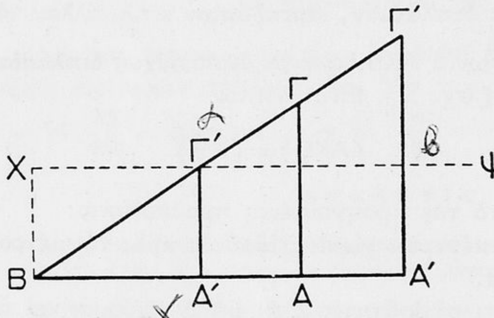
## Ἀσκήσεις

9. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.
10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἡμισείας ὀρθῆς εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.
11. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς γωνίας.
12. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν γράφει εἰς μίαν ὥραν ὁ δείκτης ἀκριβοῦς ὡρολογίου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

### 1. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΑΥΤΟΥ

**8. Λόγος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.** Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4). Ἂν ἐκ σημείου Γ′ τῆς εὐθείας ΒΓ φέρωμεν τὴν Γ′Α′ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, σχηματίζεται καὶ ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον Α′ΒΓ′ τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ τὸ ΑΒΓ τὴν αὐτὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ′ εἶναι ὅμοια, ἀληθεύει ἡ ἰσότης :




Σχ. 4

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{Α′Γ′}}{\text{ΒΓ′}} \qquad (1)$$

*Ἀντιστρόφως :* Ἂν ὁρισθῇ αὐθαιρέτως ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα Α′Γ′, ἀχθῇ δὲ εὐθεῖα ΧΨ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ΑΒ ἴσην μὲ Α′Γ′, καὶ τμηθῇ αὕτη εἰς σημεῖον Γ′ ὑπὸ περιφερείας κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΒΓ, Α′Γ′ θὰ ἀληθεύῃ ἡ (1). Τὰ τρίγωνα δὲ ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ′ θὰ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευρὰς τὰς ΑΓ, Α′Γ′, καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ′ εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ὅταν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ ἔχωσι γων. Β = γων. Β′ μὲ διαφόρους τὰς κορυφὰς Β, Β′, πάλιν ἀληθεύει ἡ (1) καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε: **Εἰς ὡρισμένην ὀξεῖαν γωνίαν Β ἀντιστοιχεῖ σταθερὸς λόγος $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ καὶ ἀντιστρόφως.**

**9. Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας.** Ὁ σταθερὸς λόγος $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ λέγεται **ἡμίτονον** τῆς ὀξείας γωνίας Β.

Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία δὲν ἀνήκῃ εἰς τρίγωνον, κατασκευάζομεν τοιοῦτον, ἂν φέρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Γενικῶς λοιπόν :

**Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.**

Τὸ ἡμίτονον γωνίας Β σημειώνομεν συντόμως οὕτως: ἡμ. Β.

**10. Γεωμετρικὴ σημασία τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας.** Ἂν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ λάβωμεν τμῆμα ΒΓ′ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα καὶ φέρωμεν τὴν Γ′Α′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 4), θὰ εἶναι $ἡμ\ B = \frac{Α'Γ'}{ΒΓ'} = (\overline{Α'Γ'})$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας εἶναι μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ἤτοι μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευράς.**

### Ἀσκήσεις

13. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν 5 μέτ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 3 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

14. Αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσι μήκη 12 μέτ. ἡ μία καὶ 9 μέτ. ἄλλη. Νὰ εὕρητε τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

15. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὕρητε τὸ ἡμίτονον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

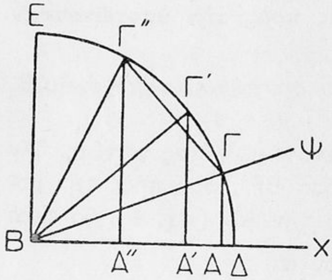
503 16. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 8 μέτ. ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

17. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ.

**11. Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας μετὰ τῆς γωνίας.** Ἔστω ὀξεῖα γωνία ΧΒΨ (σχ. 5). Ἐπὶ τῆς ΒΧ ὁρίζομεν τμῆμα ΒΔ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα μήκους καὶ γράφομεν τεταρτημόριον ΔΕ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΔ. Ἐκ τῆς τομῆς Γ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΨ φέρομεν τὴν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΧ.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι ἡμ$\widehat{X B \psi} = (\overline{A\Gamma})$. Ἂν δὲ ἡ γωνία γίνῃ $\widehat{X B \Gamma'}$, ἔπειτα $\widehat{X B \Gamma''}$ κ.τ.λ. θὰ εἶναι:

ἡμ$\widehat{X B \Gamma'} = (\overline{A'\Gamma'})$, ἡμ$\widehat{X B \Gamma''} = (\overline{A''\Gamma''})$ κ.τ.λ.


Σχ. 5

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία βαίνῃ συνεχῶς αὐξανομένη, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆς βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον.**

Ἐφ' ὅσον δὲ ἡ γωνία πλησιάζει πρὸς τὴν ὀρθήν, τὸ ἡμίτονον αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὴν μονάδα ΒΕ. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι :

$$ἡμ\ 90^0 = 1.$$

Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ μηδέν, τὸ τμῆμα ΑΓ ἐλαττούμενον καταντᾷ σημεῖον Δ. Δι' αὐτὸ δεχόμεθα ὅτι :

$$ἡμ\ 0^0 = 0.$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην συνοψίζομεν οὕτω :

$$\begin{array}{r|l} B & 0^0 \;\ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots\; 90^0 \\ ἡμ\,B & 0 \;\ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots\; 1 \end{array}$$

*Σημείωσις.* Τὸ πρὸς δεξιὰ καὶ ἄνω βέλος ($\nearrow$) δεικνύει αὔξησιν.

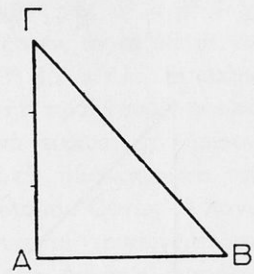
## 12. Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς.

*Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι ἡμ$B = \frac{3}{4}$. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν Β, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου, πρέπει ἡ Β νὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἀπέναντι πλευρὰν 3 μονάδων καὶ ὑποτείνουσαν 4 τοιούτων μονάδων. Οὕτως ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίζομεν τρία ἴσα διαδοχικὰ τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας. Ἔστω δὲ ΑΓ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον τμῆμα (σχ. 6).

Ἔπειτα μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τετραπλασίαν ἑνὸς τῶν ἴσων τμημάτων γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς σημεῖον Β. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΒΓ καὶ σχηματίζομεν οὕτως ὀξεῖαν γωνίαν Β, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι, εἶναι ἡμ Β $= \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{3}{4}$.



Σχ. 6

*Παράδειγμα 2ον.* Ἔστω ὅτι ἡμ ω $=$ 0,65 καὶ θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω.

Ἐπειδὴ ἡμ ω $= 0{,}65 = \frac{65}{100}$, ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ω θὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν 100 μονάδων καὶ ἀπέναντι πλευρὰν 65 τοιούτων μονάδων. Ἂν τὸ σχέδιόν μας δὲν χωρῇ τοιοῦτον τρίγωνον, κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν 100 : 10 αὐθαιρέτων μονάδων καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 65 : 10 $=$ 6,5 τοιούτων μονάδων. Ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία Β θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι εἶναι ἡμΒ $= \frac{6{,}5}{10} = 0{,}65$.

### Ἀσκήσεις

18. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν ἡμ ω $= \frac{1}{2}$.

509

19. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν ἡμ φ $= \frac{5}{6}$.
20. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἡμ χ $=$ 0,25.
21. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν ἡμ ψ $=$ 0,125.

**13.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 45⁰.**

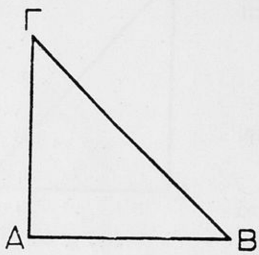
*Λύσις.* Ἂν Β $= 45^0$ (σχ. 7), τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, $\beta = \gamma$. Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ εἶναι $2\beta^2 = \alpha^2$. Ἐκ ταύτης ἕπεται κατὰ σειρὰν ὅτι :

$$2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1,\ \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}.\quad \text{Ἄρα } \textbf{ἡμ } \mathbf{45^0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

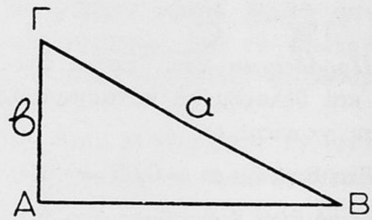
**14.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 30⁰.**

*Λύσις.* Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 8), τὸ ὁποῖον ἔχει Β = 30°. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι :

$$\beta = \frac{\alpha}{2}\cdot \quad \text{ὅθεν } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}\cdot \quad \text{Ἄρα } \textbf{ημ } \mathbf{30^0 = \frac{1}{2}}\cdot$$




Σχ. 7




Σχ. 8

**15.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 60°.**

*Λύσις.* Ἂν Γ = 60°, θὰ εἶναι Β = 30° (σχ. 8) καὶ ἑπομένως $\beta = \frac{\alpha}{2}\cdot$ Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \alpha^2$, ὅθεν $\gamma^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ Εἶναι λοιπὸν **ἡμ 60°** $= \frac{\gamma}{\alpha} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot$

Κατὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς σελίδος 14 οὕτως :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ω | 0° | ↗ | 30° | ↗ | 45° | ↗ | 60° | ↗ | 90° |
| ἡμ ω | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | 1 |

## Ἀσκήσεις

22. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 30° διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ἰσότητα ἡμ 30° $= \frac{1}{2}\cdot$

23. Ἂν δοθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους α, νὰ γραφῇ ἄλλο μήκους $\alpha\sqrt{2}$ διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ἰσότητα ἡμ 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

24. Ἂν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ Β = 60°, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\beta = \alpha\sqrt{3}$.

**16. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας.** Προηγουμένως εὕρομεν εὐκόλως τὸ ἡμίτονον τῶν γωνιῶν $30^0$, $45^0$, $60^0$. διότι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἐνεθυμήθημεν μίαν ἁπλῆν σχέσιν μεταξὺ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου διάφορον τῆς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Τοιαύτας ὅμως ἁπλᾶς σχέσεις δὲν γνωρίζομεν, ἂν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τριγώνου εἶναι τυχοῦσαι π.χ. $35^0$ ἢ $53^0$ 15′ κ.τ.λ. Ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ ἡμ $35^0$ μὲ τὴν προηγουμένην εὐκολίαν. Ἐφρόντισαν ὅμως οἱ Μαθηματικοὶ νὰ εὕρωσι τὰ ἡμίτονα διαφόρων γωνιῶν καὶ νὰ διατάξωσιν αὐτὰ εἰς πίνακας, ἀπὸ τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν τὰ ἡμίτονα, τὰ ὁποῖα θέλομεν. Οὕτως οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες ὑπὸ τὴν ἐπικεφαλίδα «Φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ» περιέχουσι μὲ προσέγγισιν 0,001 τὰ ἡμίτονα διαφόρων ὀξειῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι προχωροῦσιν ἀνὰ 30′. Δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν ὅμως εἰς τὴν περιγραφὴν καὶ χρῆσιν αὐτῶν, διότι ἀντὶ τούτων θὰ χρησιμοποιῶμεν τὸν παρατιθέμενον ἐνταῦθα πίνακα Ι. Εἰς αὐτὸν τὰ ἡμίτονα ἀναγράφονται μὲ προσέγγισιν 0,00001, καὶ αἱ γωνίαι προχωροῦσιν ἀνὰ 10′. Ἑπομένως οὗτος εἶναι ἀκριβέστερος τῶν προηγουμένων.

Εἰς τὴν α′ ἐξ ἀριστερῶν σελίδα (σελ. 18) αἱ ἀκέραιαι μοῖραι τῶν γωνιῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ στήλην καὶ βαίνουσιν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω μέχρι τῶν $45^0$.

Αἱ δεξιὰ τῆς στήλης ταύτης ἓξ ἄλλαι στῆλαι ἔχουσιν ἐπικεφαλίδας τοὺς ἀριθμοὺς 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′. Τὸ δὲ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας, π.χ. $32^0$ 20′, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 32 τῆς στήλης τῶν ἀκεραίων μοιρῶν καὶ τῆς στήλης, ἥτις ἔχει ἐπικεφαλίδα 20′. Εἶναι λοιπὸν ἡμ($32^0$ 20′) = 0,53484.

Τὰ δὲ ἡμίτονα τῶν μεγαλυτέρων τῶν $45^0$ ὀξειῶν γωνιῶν εὑρίσκονται εἰς τὴν β′ σελίδα τοῦ πίνακος (σελ. 19). Εἰς αὐτὴν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῶν μοιρῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην καὶ βαίνουσιν αὐξανόμενοι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτῆς, ἓξ ἄλλαι στῆλαι φέρουσι κάτω τοὺς ἀριθμοὺς 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′.

Τὸ ἡμ($48^0$ 30′) π.χ. εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 48 τῆς στήλης τῶν ἀκεραίων μοιρῶν καὶ τῆς στήλης, ἥτις κάτω φέρει τὸν ἀριθμὸν 30′. Εἶναι λοιπὸν ἡμ($48^0$ 30′) = 0,74896.

**ΠΙΝΑΞ Ι.** **ΗΜΙΤΟΝΟΝ**

| Μοῖραι | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | Μοῖραι |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01454 | 0,01454 | 89 |
| 1 | 0,01745 | 0,02036 | 0,02327 | 0,02618 | 0,02908 | 0,03200 | 88 |
| 2 | 0,03490 | 0,03781 | 0,04071 | 0,04362 | 0,04653 | 0,04943 | 87 |
| 3 | 0,05234 | 0,05524 | 0,05814 | 0,06105 | 0,06395 | 0,06685 | 86 |
| 4 | 0,06976 | 0.07266 | 0,07556 | 0,07846 | 0’08136 | 0,08426 | 85 |
| 5 | 0,08716 | 0,09005 | 0,09295 | 0,09585 | 0,09874 | 0.10164 | 84 |
| 6 | 0,10453 | 0,10742 | 0,11031 | 0,11320 | 0.11609 | 0,11898 | 83 |
| 7 | 0,12187 | 0,12476 | 0‘12764 | 0,13053 | 0,13341 | 0.13629 | 82 |
| 8 | 0,13917 | 0,14205 | 0,14493 | 0,14781 | 0,15069 | 0,15356 | 81 |
| 9 | 0,15643 | 0,15931 | 0,16218 | 0,16505 | 0,16792 | 0,17078 | 80 |
| 10 | 0,17365 | 0,17651 | 0.17937 | 0,18224 | 0.18509 | 0,18795 | 79 |
| 11 | 0,19081 | 0,19366 | 0,19652 | 0,19937 | 0.20222 | 0,20507 | 78 |
| 12 | 0,20791 | 0,21076 | 0,21359 | 0,21644 | 0,21928 | 0,22212 | 77 |
| 13 | 0,22495 | 0,22778 | 0,23062 | 0,23345 | 0,23627 | 0,23910 | 76 |
| 14 | 0,24192 | 0,24474 | 0,24756 | 0,25038 | 0,25320 | 0,25601 | 75 |
| 15 | 0,25882 | 0,26163 | 0,26443 | 0,26724 | 0,27004 | 0,27284 | 74 |
| 16 | 0,27556 | 0,27843 | 0,28123 | 0,28402 | 0.28680 | 0,28959 | 73 |
| 17 | 0,29237 | 0,29515 | 0,29793 | 0,30071 | 0,30348 | 0.30625 | 72 |
| 18 | 0,30902 | 0,31178 | 0,31454 | 0,31730 | 0,32006 | 0.32282 | 71 |
| 19 | 0,32557 | 0,32832 | 0,33106 | 0,33381 | 0,33655 | 0,33929 | 70 |
| 20 | 0,34202 | 0,34475 | 0,34748 | 0,35021 | 0,35293 | 0,35565 | 69 |
| 21 | 0,35837 | 0,36108 | 0,36379 | 0,36650 | 0,36921 | 0,37191 | 68 |
| 22 | 0,37461 | 0,37730 | 0,37999 | 0,38268 | 0,38537 | 0.38805 | 67 |
| 23 | 0,39073 | 0,39341 | 0,39608 | 0,39875 | 0,40141 | 0,40408 | 66 |
| 24 | 0,40674 | 0,40939 | 0,41204 | 0,41469 | 0,41734 | 0,41998 | 65 |
| 25 | 0,42263 | 0,42525 | 0,42788 | 0,43051 | 0,43313 | 0,43575 | 64 |
| 26 | 0,43837 | 0.44098 | 0,44359 | 0,44620 | 0,44880 | 0,45139 | 63 |
| 27 | 0,45399 | 0,45658 | 0,45917 | 0,46175 | 0,46433 | 0.46690 | 62 |
| 28 | 0,46947 | 0,47204 | 0,47460 | 0,47716 | 0,47971 | 0.48226 | 61 |
| 29 | 0,48481 | 0,48735 | 0,48989 | 0,49242 | 0,49495 | 0,49748 | 60 |
| 30 | 0,50000 | 0.50252 | 0,50503 | 0,50754 | 0.51004 | 0,51254 | 59 |
| 31 | 0,51504 | 0,51753 | 0,52002 | 0,52250 | 0,52498 | 0,52745 | 58 |
| 32 | 0,52982 | 0,53238 | 0,53484 | 0,53730 | 0,53975 | 0,54220 | 57 |
| 33 | 0,54464 | 0.54708 | 0,54951 | 0,55194 | 0.55436 | 0,55678 | 56 |
| 34 | 0,55919 | 0,56160 | 0,56401 | 0,56641 | 0,56880 | 0.57119 | 55 |
| 35 | 0,57358 | 0,57596 | 0,57833 | 0,58070 | 0,58307 | 0,58543 | 54 |
| 36 | 0,58779 | 0,59014 | 0,59248 | 0,59482 | 0,59716 | 0,59949 | 53 |
| 37 | 0,60182 | 0,60414 | 0,60645 | 0,60876 | 0,61107 | 0,61337 | 52 |
| 38 | 0,61566 | 0,61795 | 0,62024 | 0,62251 | 0,62479 | 0,62706 | 51 |
| 39 | 0,62932 | 0,63158 | 0,63383 | 0,63608 | 0,63832 | 0,64056 | 50 |
| 40 | 0,64279 | 0,64501 | 0,64723 | 0,64945 | 0,65166 | 0,65386 | 49 |
| 41 | 0,65606 | 0,65825 | 0,66044 | 0,66262 | 0,66480 | 0,66697 | 48 |
| 42 | 0,66913 | 0,67129 | 0,67344 | 0,67559 | 0,67773 | 0,67987 | 47 |
| 43 | 0,68199 | 0,68412 | 0,68624 | 0,68835 | 0,69046 | 0,69256 | 46 |
| 44 | 0,69466 | 0,69675 | 0,69883 | 0,70091 | 0,70298 | 0,70505 | 45 |
| 45 | 0,70711 | | | | | | |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Μοῖραι |

**ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ**

## ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

| Μοῖραι | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | Μοῖραι |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 0,99999 | 0,99998 | 0,99995 | 0,99992 | 0,99988 | 89 |
| 1 | 0,99984 | 0,99980 | 0,99973 | 0,99965 | 0,99958 | 0,99950 | 88 |
| 2 | 0,99940 | 0,99928 | 0,99917 | 0,99905 | 0,99892 | 8,99878 | 87 |
| 3 | 0,99863 | 0,99848 | 0,99831 | 0,99814 | 0,99795 | 0,99776 | 86 |
| 4 | 0,99756 | 0,99735 | 0,99714 | 0,99692 | 0,99669 | 0,99644 | 85 |
| 5 | 0,99618 | 0,99594 | 0,99567 | 0,99539 | 0,99511 | 0,99482 | 84 |
| 6 | 0,99452 | 0,99421 | 0,99389 | 0,99357 | 0,99324 | 0,99289 | 83 |
| 7 | 0,99255 | 0,99219 | 0,99182 | 0,99144 | 0,99106 | 0,99067 | 82 |
| 8 | 0,99027 | 0,98986 | 0,98944 | 0,98902 | 0,98858 | 0,98814 | 81 |
| 9 | 0,98769 | 0,98723 | 0,98676 | 0,98629 | 0,98580 | 0,98531 | 80 |
| 10 | 0,98481 | 0,98429 | 0,98378 | 0,98325 | 0,98272 | 0,98218 | 79 |
| 11 | 0,98163 | 0,98107 | 0,98050 | 0,97992 | 0,97934 | 0,97875 | 78 |
| 12 | 0,97815 | 0,97754 | 0,97692 | 0,97629 | 0,97566 | 0,97502 | 77 |
| 13 | 0,97437 | 0,97371 | 0,97304 | 0,97237 | 0,97169 | 0,97099 | 76 |
| 14 | 0,97029 | 0,96959 | 0,96887 | 0,96815 | 0,96742 | 0,96667 | 75 |
| 15 | 0,96593 | 0,96517 | 0,96440 | 0,96363 | 0,96285 | 0,96206 | 74 |
| 16 | 0,96126 | 0,96046 | 0,95964 | 0,95882 | 0,95799 | 0,95715 | 73 |
| 17 | 0,95630 | 0,95545 | 0,95459 | 0,95372 | 0,95284 | 0,95195 | 72 |
| 18 | 0,95106 | 0,95015 | 0,94921 | 0,94832 | 0,94739 | 0,94646 | 71 |
| 19 | 0,94552 | 0,94457 | 0,94361 | 0,94264 | 0,94167 | 0,94068 | 70 |
| 20 | 0,93969 | 0,93869 | 0,93769 | 0,93667 | 0,93565 | 0,93462 | 69 |
| 21 | 0,93358 | 0,93253 | 0,93148 | 0,93042 | 0,92935 | 0,92827 | 68 |
| 22 | 0,92718 | 0,92609 | 0,92499 | 0,92388 | 0,92276 | 0,92164 | 67 |
| 23 | 0,92050 | 0,91936 | 0,91822 | 0,91706 | 0,91589 | 0,91472 | 66 |
| 24 | 0,91355 | 0,91236 | 0,91116 | 0,90996 | 0,90875 | 0,90753 | 65 |
| 25 | 0,90631 | 0,90507 | 0,90383 | 0,90259 | 0,90133 | 0,90007 | 64 |
| 26 | 0,89879 | 0,89752 | 0,89623 | 0,89493 | 0,89363 | 0,89232 | 63 |
| 27 | 0,89101 | 0,88968 | 0,88835 | 0,88701 | 0,88566 | 0,88431 | 62 |
| 28 | 0,88295 | 0,88158 | 0,88020 | 0,87882 | 0,87743 | 0,87603 | 61 |
| 29 | 0,87462 | 0,87321 | 0,87178 | 0,87036 | 0,86892 | 0,86748 | 60 |
| 30 | 0,86603 | 0,86457 | 0,86310 | 0,86163 | 0,86015 | 0,85866 | 59 |
| 31 | 0,85717 | 0,85567 | 0,85416 | 0,85264 | 0,85112 | 0,84959 | 58 |
| 32 | 0,84805 | 0,84650 | 0,84495 | 0,84339 | 0,84182 | 0,84025 | 57 |
| 33 | 0,83867 | 0,83708 | 0,83549 | 0,83389 | 0,83228 | 0,83066 | 56 |
| 34 | 0,82904 | 0,82741 | 0,82577 | 0,82413 | 0,82248 | 0,82082 | 55 |
| 35 | 0,81915 | 0,81748 | 0,81580 | 0,81412 | 0,81242 | 0,81072 | 54 |
| 36 | 0,80902 | 0,80730 | 0,80558 | 0,80386 | 0,80212 | 0,80038 | 53 |
| 37 | 0,79864 | 0,79688 | 0,79512 | 0,79335 | 0,79158 | 0,78979 | 52 |
| 38 | 0,78801 | 0,78622 | 0,78442 | 0,78261 | 0,78079 | 0,77897 | 51 |
| 39 | 0,77715 | 0,77531 | 0,77347 | 0,77162 | 0,76977 | 0,76791 | 50 |
| 40 | 0,76604 | 0,76417 | 0,76229 | 0,76041 | 0,75851 | 0,75661 | 49 |
| 41 | 0,75471 | 0,75279 | 0,75088 | 0,74896 | 0,74703 | 0,74509 | 48 |
| 42 | 0,74314 | 0,74119 | 0,73924 | 0,73728 | 0,73531 | 0,73332 | 47 |
| 43 | 0,73135 | 0,72937 | 0,72737 | 0,72537 | 0,72337 | 0,72136 | 46 |
| 44 | 0,71934 | 0,71732 | 0,71529 | 0,71325 | 0,71121 | 0,70916 | 45 |
| 45 | 0,70711 | | | | | | |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Μοῖραι |

**ΗΜΙΤΟΝΟΝ**

Εἰς τὴν σελίδα ταύτην (σ. 19) δὲν ὑπάρχει στήλη, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὑποκάτω τὸν ἀριθμὸν 0′. Δι' αὐτό, διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ ἡμ $73^0$, ἀναζητοῦμεν τὸ ἡμ($72^0\ 60'$). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ}\ 73^0 = 0{,}95630.$$

Μὲ τοὺς πίνακας τούτους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἡμίτονον ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα δὲν ἀναγράφονται εἰς αὐτούς. Ὡς παράδειγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα :

*Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμ($39^0\ 17'$). Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι :

$$39^0\ 10' < 39^0\ 17' < 39^0\ 20' \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\text{ἡμ}\ (39^0\ 10') < \text{ἡμ}\ (39^0\ 17') < \text{ἡμ}\ (39^0\ 20').$$

Ἔπειτα εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι :

$\Delta = \text{ἡμ}\ (39^0\ 20') - \text{ἡμ}\ (39^0\ 10') = 0{,}63383 - 0{,}63158 = 0{,}00225.$ Βλέπομεν δηλ. ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 0,00225.

Ἂν δὲ ἡ αὔξησις τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς γωνίας γίνῃ διπλασία, ἤτοι τὸ τόξον γίνῃ $39^0\ 30'$, τὸ ἡμίτονον εἶναι 0,63608 καὶ

$$0{,}63608 - 0{,}63158 = 0{,}00450 = 0{,}00225.2,$$

ἤτοι καὶ ἡ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου διπλασιάζεται.

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι εἰς τριπλασίαν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς γωνίας ἀντιστοιχεῖ τριπλασία αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου·

Παραδεχόμεθα λοιπὸν ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν τοῦ μέτρου μιᾶς γωνίας.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὔξησιν 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἡμιτ. 0,00225.

» » 7′ » » » δ

καὶ εὑρίσκομεν $\delta = 0{,}00225 \cdot \frac{7}{10} = \frac{0{,}01575}{10} = 0{,}00157$ κατὰ προσέγγισιν.

Ἑπομένως ἡμ. $(39^0\ 17') = $ ἡμ. $(39^0\ 10') + 0{,}00157 = 0{,}63158 + 0{,}00157 = 0{,}63315.$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} &\text{ἡμ. } (39^0\ 10') = 0{,}63158 \\ \text{διὰ } \Delta = 0{,}00225 \text{ εἶναι } \delta = \frac{7}{10} \cdot 0{,}00225 = &\ \underline{0{,}00157} \\ &\text{ἡμ. } (39^0\ 17') = 0{,}63315 \end{aligned}$$

*Παράδειγμα 2ον*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ $(28^0\,34'\,30'')$.

Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμ\,(28^0\,30') = 0{,}47716$$

διὰ $\Delta = 0{,}00255$ εἶναι $\delta = 0{,}00255 \cdot \frac{4{,}5}{10} = 0{,}0011475$

$$\text{ἢ } \underline{0{,}00115}$$

$$\text{καὶ } ἡμ\,(28^0\,34'\,30'') = 0{,}47831$$

### Ἀσκήσεις

25. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(18^0\,40')$ καὶ τὸ ἡμ $(42^0\,10')$.
26. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(54^0\,30')$ καὶ τὸ ἡμ $(78^0\,40')$.
27. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$50^0$ καὶ τὸ ἡμ$80^0$.
28. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(27^0\,15')$.
29. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(46^0\,30')$.
30. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(20^0\,34'\,25'')$.
31. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(67^0\,45'\,40'')$.
32. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας ἴσης πρὸς τὰ $\frac{7}{10}$ ὀρθῆς.
33. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας ἴσης πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς.

**17. Λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας.** Εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἐμάθομεν, ὅτι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, δυνάμεθα τῇ βοηθείᾳ πινάκων νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Ἂν λοιπὸν π.χ. θέσωμεν $\chi = ἡμ\,(38^0\,52')$, θὰ εἶναι:

$$λογ\chi = λογἡμ\,(38^0\,52').$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν χ, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν λογἡμ $(38^0\,52')$. Τοῦτον δὲ εὑρίσκομεν εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας.

Οὗτοι ἔχουσι τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν εἰς τὸ ἄνω μέρος δύο παρακειμένων σελίδων, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μικρότερος τῶν $45^0$, εἰς τὸ κάτω δέ, ἂν εἶναι μεγαλύτερος τῶν $44^0$. Τὰ πρῶτα λεπτὰ ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην ἑκάστης σελίδος διὰ τὰς εἰς τὸ ἄνω μέρος ἀναγεγραμμένας μοίρας καὶ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην διὰ τὰς ἄλλας. Προχωροῦσι δὲ ταῦτα ἀπὸ λεπτοῦ εἰς λεπτὸν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω εἰς τὴν δευτέραν.

Ὁ λογάριθμος ἡμ($38^0\,52'$) εὑρίσκεται εἰς τὰς σελίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ὑπεράνω τὸν ἀριθμὸν $38^0$, καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν $52'$, τῆς ἀριστερᾶς στήλης πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς παρακειμένης στήλης, ἥτις ἔχει ἐπικεφαλίδα Ἡμ. (ἡμίτονον).

Εἶναι λοιπὸν λογάριθμος ἡμ($38^0\,52'$) $= \overline{1},79762$.

Ὁ λογάριθμος ἡμ($51^0\,18'$) εὑρίσκεται εἰς τὰς στήλας τῶν $51^0$, κάτω, καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς στήλης, ἥτις φέρει κάτω συγκεκομμένην λέξιν Ἡμ. καὶ τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν $18'$ εἰς τὴν δεξιὰν στήλην πρώτων λεπτῶν.

Εἶναι λοιπὸν λογημ($51^0\,18'$) $= \overline{1},89233$.

Πρέπει δὲ νὰ προσέξωμεν ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία ἑκάστου λογαρίθμου ἔχουσι γραφῆ εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος. Νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς μεταξὺ λογαρίθμους.

Ἂν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ἔχῃ καὶ δευτερόλεπτα, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἡμιτόνου ($38^0\,10'\,45''$). Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\begin{array}{rcccl} 38^0\,10' & < & 38^0\,10'\,45'' & < & 38^0\,11' \\ \text{ἡμ}(38^0\,10') & < & \text{ἡμ}(38^0\,10'\,45'') & < & \text{ἡμ}(38^0\,11') \text{ καὶ} \\ \text{λογημ}(38^0\,10') & < & \text{λογημ}(38^0\,10'\,45'') & < & \text{λογημ}(38^0\,11') \end{array}$$

Ἀπὸ δὲ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{λογημ}(38^0\,11') = \overline{1},79111 \\ \text{λογημ}(38^0\,10') = \overline{1},79095 \end{array}\right\} \Delta = 16 \text{ μον. τελ. δεκ. τάξ.}$$

Ἀπὸ τὸν πίνακα βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $1'$ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Εἰς αὔξησιν γωνίας κατὰ $60''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 16
» » » » $45''$ » » $\chi$

καὶ εὑρίσκομεν $\chi = 16 \cdot \frac{45}{60} = 12$ μον. τελ. δεκ. ταξ.

| 26 | |
|---|---|
| 1″ | 0,43 |
| 2 | 0,87 |
| 3 | 1,30 |
| 4 | 1,73 |
| 5 | 2,17 |
| 6 | 2,60 |
| 7 | 3,03 |
| 8 | 3,47 |
| 9 | 3,90 |

| 17 | |
|---|---|
| 1 | 0,28 |
| 2 | 0,57 |
| 3 | 0,85 |
| 4 | 1,13 |
| 5 | 1,42 |
| 6 | 1,70 |
| 7 | 1,98 |
| 8 | 2,27 |
| 9 | 2,55 |

| 16 | |
|---|---|
| 1 | 0,27 |
| 2 | 0,53 |
| 3 | 0,80 |
| 4 | 1,07 |
| 5 | 1,33 |
| 6 | 1,60 |
| 7 | 1,87 |
| 8 | 2,13 |
| 9 | 2,40 |

| 15 | |
|---|---|
| 1 | 0,25 |
| 2 | 0,50 |
| 3 | 0,75 |
| 4 | 2.00 |
| 5 | 1,25 |
| 6 | 1,50 |
| 7 | 1,75 |
| 8 | 2,00 |
| 9 | 2,25 |

| ′ | Ἡμ. | Δ | Ἐφ. | Δ | φ. | Συν. | Δ | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1,7 8934 | 16 | $\overline{1}$,8 9281 | 26 | $\overline{1}$,1 0719 | $\overline{1}$,8 9653 | 10 | **60** |
| 1 | 8950 | 17 | 9307 | 26 | 0693 | 9643 | 10 | 59 |
| 2 | 8967 | 16 | 9333 | 26 | 0667 | 9633 | 9 | 58 |
| 3 | 8983 | 16 | 9359 | 26 | 0641 | 9624 | 10 | 57 |
| 4 | 8999 | 16 | 9385 | 26 | 0615 | 9614 | 10 | 56 |
| 5 | 9015 | 16 | 9411 | 26 | 0589 | 9604 | 10 | 55 |
| 6 | 9031 | 16 | 9437 | 26 | 0563 | 9594 | 10 | 54 |
| 7 | 9047 | 16 | 9463 | 26 | 0537 | 9584 | 10 | 53 |
| 8 | 9063 | 16 | 9489 | 26 | 0511 | 9574 | 10 | 52 |
| 9 | 9079 | 16 | 9515 | 26 | 0485 | 9564 | 10 | 51 |
| **10** | 9095 | 16 | 9541 | 26 | 0459 | 9554 | 10 | **50** |
| 11 | 9111 | 17 | 9567 | 26 | 0433 | 9544 | 10 | 49 |
| 12 | 9128 | 16 | 9593 | 26 | 0407 | 9534 | 10 | 48 |
| 13 | 9144 | 16 | 9619 | 26 | 0381 | 9524 | 10 | 47 |
| 14 | 9160 | 16 | 9645 | 26 | 0355 | 9514 | 10 | 46 |
| 15 | 9176 | 16 | 9671 | 26 | 0329 | 9504 | 9 | 45 |
| 16 | 9192 | 16 | 9697 | 26 | 0303 | 9495 | 10 | 44 |
| 17 | 9208 | 16 | 9723 | 26 | 0277 | 9485 | 10 | 43 |
| 18 | 9224 | 16 | 9749 | 26 | 0251 | 9475 | 10 | 42 |
| 19 | 9240 | 16 | 9775 | 26 | 0225 | 9465 | 10 | 41 |
| **20** | 9256 | 16 | 9801 | 26 | 0199 | 9455 | 10 | **40** |
| 21 | 9272 | 16 | 9827 | 26 | 0173 | 9445 | 10 | 39 |
| 22 | 9288 | 16 | 9853 | 26 | 0147 | 9435 | 10 | 38 |
| 23 | 9304 | 15 | 9879 | 26 | 0121 | 9425 | 10 | 37 |
| 24 | 9319 | 16 | 9905 | 26 | 0095 | 9415 | 10 | 36 |
| 25 | 9335 | 16 | 9931 | 26 | 0069 | 9405 | 10 | 35 |
| 26 | 9351 | 16 | 9957 | 26 | 0043 | 9395 | 10 | 34 |
| 27 | 9367 | 16 | 1,8 9983 | 26 | 0,1 0017 | 9385 | 10 | 33 |
| 28 | 9383 | 16 | 1,9 0009 | 26 | 0,0 9991 | 9375 | 11 | 32 |
| 29 | 9399 | 16 | 0035 | 26 | 9965 | 9364 | 10 | 31 |
| **30** | $\overline{1}$,7 9415 | | $\overline{1}$,9 0061 | | 0,0 9939 | $\overline{1}$,8 9354 | | **30** |
| ′ | Συν. | | Σφ. | | Ἐφ. | Ἡμ. | | ′ |

| ′ | Ἡμ. | Δ | Ἐφ. | Δ | Σφ. | Συν. | Δ | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | $\overline{1}$,7 9415 | 16 | $\overline{1}$, 90061 | 25 | 0,0 9939 | $\overline{1}$,8 9354 | 10 | **30** |
| 31 | 9431 | 16 | 0086 | 26 | 9914 | 9344 | 10 | 29 |
| 32 | 9447 | 16 | 0112 | 26 | 9888 | 9334 | 10 | 28 |
| 33 | 9463 | 15 | 0138 | 26 | 9862 | 9324 | 10 | 27 |
| 34 | 9478 | 16 | 0164 | 26 | 9836 | 9314 | 10 | 26 |
| 35 | 9494 | 16 | 0190 | 26 | 9810 | 9304 | 10 | 25 |
| 36 | 9510 | 16 | 0216 | 26 | 9784 | 9294 | 10 | 24 |
| 37 | 9526 | 16 | 0224 | 26 | 9758 | 9284 | 10 | 23 |
| 38 | 9542 | 16 | 0268 | 26 | 9732 | 9274 | 10 | 22 |
| 39 | 9558 | 15 | 0294 | 26 | 9706 | 9264 | 10 | 21 |
| **40** | 9573 | 16 | 0320 | 26 | 9680 | 9254 | 10 | **20** |
| 41 | 9589 | 16 | 0346 | 25 | 9654 | 9244 | 11 | 19 |
| 42 | 9605 | 16 | 0371 | 26 | 9629 | 9233 | 10 | 18 |
| 43 | 9621 | 15 | 0397 | 26 | 9603 | 9223 | 10 | 17 |
| 44 | 9636 | 16 | 0423 | 26 | 9577 | 9213 | 10 | 16 |
| 45 | 9652 | 16 | 0449 | 26 | 9551 | 9203 | 10 | 15 |
| 46 | 9668 | 16 | 0475 | 26 | 9525 | 9193 | 10 | 14 |
| 47 | 9684 | 15 | 0501 | 26 | 9499 | 9183 | 10 | 13 |
| 48 | 9699 | 16 | 0527 | 26 | 9473 | 9173 | 11 | 12 |
| 49 | 9715 | 16 | 0553 | 25 | 9447 | 9162 | 10 | 11 |
| **50** | 9731 | 15 | 0578 | 26 | 9422 | 9152 | 10 | **10** |
| 51 | 9746 | 16 | 0604 | 26 | 9396 | 9142 | 10 | 9 |
| 52 | 9762 | 16 | 0630 | 26 | 9370 | 9132 | 10 | 8 |
| 53 | 9778 | 15 | 0656 | 26 | 9344 | 9122 | 10 | 7 |
| 54 | 9793 | 16 | 0682 | 26 | 9318 | 9112 | 11 | 6 |
| 55 | 9809 | 16 | 0708 | 26 | 9292 | 9101 | 10 | 5 |
| 56 | 9825 | 15 | 0734 | 26 | 9266 | 9091 | 10 | 4 |
| 57 | 9840 | 16 | 0759 | 25 | 9241 | 9081 | 10 | 3 |
| 58 | 9856 | 16 | 0785 | 26 | 9215 | 9071 | 11 | 2 |
| 59 | 9872 | 15 | 0811 | 26 | 9189 | 9060 | 10 | 1 |
| **60** | $\overline{1}$,7 9887 | | $\overline{1}$,9 0837 | | 0,0 9163 | 1,8 9050 | | **0** |
| ′ | Συν. | | Σφ. | | Ἐφ. | Ἡμ. | | ′ |

| **26** | |
|---|---|
| 1″ | 0,43 |
| 2 | 0,87 |
| 3 | 1,30 |
| 4 | 1,73 |
| 5 | 2,17 |
| 6 | 2,60 |
| 7 | 3,03 |
| 8 | 3,47 |
| 9 | 3,90 |

| **25** | |
|---|---|
| 1 | 0,42 |
| 2 | 0,83 |
| 3 | 1,25 |
| 4 | 1,67 |
| 5 | 2,08 |
| 6 | 2,50 |
| 7 | 2,92 |
| 8 | 3,33 |
| 9 | 3,75 |

| **16** | |
|---|---|
| 1 | 0,27 |
| 2 | 0,53 |
| 3 | 0,80 |
| 4 | 1,07 |
| 5 | 1,33 |
| 6 | 1,60 |
| 7 | 1.87 |
| 8 | 2,13 |
| 9 | 2,40 |

| **15** | |
|---|---|
| 1 | 0,25 |
| 2 | 0,50 |
| 3 | 0,75 |
| 4 | 1,00 |
| 5 | 1,25 |
| 6 | 1,50 |
| 7 | 1,75 |
| 8 | 2,00 |
| 9 | 2,25 |

$$\begin{aligned} \text{῞Ωστε :} \quad \text{λογήμ}(38^0\ 10') &= \bar{1},79095 \\ \text{εἰς } 45'' \quad \text{αὔξ.} &= 0,00012 \\ \hline \text{λογήμ}(38^0\ 10'\ 45'') &= \bar{1},79107 \end{aligned}$$

*Σημείωσις.* Εἰς τὰς σελίδας τῶν $6^0 - 84^0$ οἱ πίνακες οὗτοι φέρουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου μερικὰ πινακίδια.

῞Εκαστον ἀπὸ αὐτὰ φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν τῶν στηλῶν Δ. Διαιρεῖται δὲ ἕκαστον πινακίδιον εἰς δύο στήλας. Ἡ α' τούτων περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι δηλοῦσι δεύτερα λεπτά. Ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους διαφορὰς τῶν λογαρίθμων.

Οὕτως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι $\Delta = 16$ τὸ δὲ πινακίδιον μὲ ἐπικεφαλίδα 16 δηλοῖ ὅτι: Εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ $4''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 1,07 μονάδας τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ $40'' = 4'' \cdot 10$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ $1,07 \cdot 10 = 10,7$. Εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ $5''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 1,33 μ.τ.δ.τ. Ἑπομένως εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ $45'' = 40'' + 5''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ $10,7 + 1,33 = 12,03$ ἢ 12 κατὰ προσέγγισιν.

Τῇ βοηθείᾳ λοιπὸν τῶν πινακιδίων ἀποφεύγομεν τοὺς προηγουμένους ὑπολογισμοὺς τῆς αὐξήσεως τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου.

### Ἀσκήσεις

34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(12^0\ 35')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἡμ$(12^0\ 35')$.

35. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(58^0\ 40')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἡμ$(58^0\ 40')$.

36. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(34^0\ 25'\ 32'')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(34^0\ 25'\ 32'')$.

37. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(67^0\ 20'\ 40'')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(67^0\ 20'\ 40'')$.

38. ῍Αν ἡμ$\chi = \frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ χ.

39. ῍Αν ἡμω $= \frac{5}{7}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ ω.

**18. Εὕρεσις τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς.** ῎Εστω ἡμ$\chi = 0,42525$. Τὸ μέτρον τῆς γωνίας χ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὸν πίνακα I τοῦ βιβλίου τούτου σελ. (18 - 19) ὡς ἑξῆς :

Πρῶτον ἐνθυμούμεθα ὅτι ἡμ $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70711$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}42525 < 0{,}70711$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι $\chi < 45^0$ καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 0,42525 εἰς τὴν α΄ ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος τούτου. Ὄντως δὲ εὑρίσκομεν αὐτὸν εἰς τὴν στήλην τῶν 10΄ καὶ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν $25^0$. Εἶναι λοιπὸν $\chi = 25^0\,10'$.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡμ $\omega = 0{,}93190$.

Ἐπειδὴ $0{,}93190 > 0{,}70711$, θὰ εἶναι $\omega > 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,93190 εἰς τὴν β΄ σελίδα τοῦ πίνακος. Βλέπομεν δὲ ὅτι μετὰ τὸν 0,93148 δὲν εὑρίσκεται 0,93190 ἀλλ᾽ ὁ 0,93253. Εἶναι δηλ. $0{,}93148 < 0{,}93190 < 0{,}93253$ καὶ ἑπομένως $68^0\,40' < \omega < 68^0\,50'$. Ἤδη καταρτίζομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν :

Εἰς αὔξησιν ἡμιτόνου κατὰ 105 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. γων. 10΄

» » » » 42 » » » ψ

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 10 \cdot \frac{42}{105} = 4'$. Εἶναι λοιπὸν $\omega = 68^0 44'$.

Τὴν εὕρεσιν τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν, μάλιστα ἀκριβέστερον, καὶ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου τούτου. Οὕτως ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα εὑρίσκομεν ὅτι λογἡμ $\omega = \bar{1}{,}96937$. Τὸν ἀριθμὸν δὲ τοῦτον πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν εἰς τὰς στήλας τῶν ἡμιτόνων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Διὰ τὴν εὔκολον ἀνεύρεσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\text{λογἡμ}45^0 = \bar{1}{,}84949 < \bar{1}{,}96937.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι κάτω τὸ σύμβολον Ἡμ.

Οὕτως εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι $\omega = 68^0\,44'$.

Ἂν ἡμ $\chi = 0{,}772$, θὰ εἶναι λογἡμ $\chi = \bar{1}{,}88762$. Καὶ

$$\bar{1}{,}88761 < \bar{1}{,}88762 < \bar{1}{,}88772.$$

Οὕτω βλέπομεν, ὅτι $\Delta = 11$ καὶ $\delta = 1$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{11}{1} = \frac{60''}{\psi}$ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{60''}{11} = 5'',45$.

Ἑπομένως $\chi = 50^0\,32'\,5'',45$.

Ἀπὸ τὸν πίνακα Ι τοῦ βιβλίου τούτου (σελ. 18 - 19) εὑρίσκομεν $χ = 50^0\ 32'\ 3'',24$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ὀλίγον διάφορον τοῦ προηγουμένου. Αἰτία τούτου εἶναι ὅτι εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὰ τόξα προχωροῦσι ἀνὰ 1', ἐν ᾧ εἰς τὸν πίνακα Ι ταῦτα προχωροῦσι ἀνὰ 10'. Οἱ πρῶτοι λοιπὸν πίνακες εἶναι ἀκριβέστεροι τοῦ Ι. Δι' αὐτό, ὅταν ἐπιδιώκωμεν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, πρέπει νὰ προτιμῶμεν νὰ ἐργαζώμεθα μὲ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας.

### Ἀσκήσεις

40. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $ημ\,χ = 0,4$.
41. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν $ημ\,ω = \frac{3}{5}$.
42. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν $ημ\,φ = \frac{1}{2}$.
43. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $ημ\,χ = 0,35$.
44. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν $ημ\,ψ = 0,48$.

## 2. ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**19. Δύο σχέσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.** Ἔστω ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὑποτείνουσαν (ΒΓ) = α καὶ καθέτους πλευρὰς (ΑΓ) = β καὶ (ΑΒ) = γ (σχ. 9).

Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἡμῖν ἰσότητας:

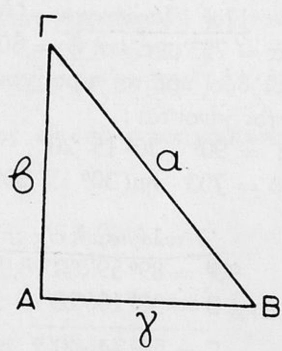
$$ημB = \frac{AΓ}{BΓ} = \frac{β}{α} \text{ καὶ } ημ\,Γ = \frac{AB}{BΓ} = \frac{γ}{α}$$

εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{β} &= \mathbf{α \cdot ημ\,B} \\ \text{καὶ}\quad \mathbf{γ} &= \mathbf{α \cdot ημ\,Γ} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(1)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.**




Σχ. 9

**20. Στοιχεῖα τριγώνου. Ἐπίλυσις τριγώνου.** Τὰ διάφορα στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου διακρίνομεν εἰς **κύρια** καὶ εἰς **δευτερεύοντα** στοιχεῖα.

Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὰ κύρια στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου. Ὅλα τὰ ἄλλα, π.χ. ὕψη, διάμεσοι, ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας κ.τ.λ., εἶναι δευτερεύοντα στοιχεῖα.

**Ἐπίλυσις τριγώνου λέγεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων στοιχείων τριγώνου, ἂν δοθῶσιν ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ.**

Διὰ τῆς ἐπιλύσεως δηλαδὴ τῶν τριγώνων, ἐκπληροῦται ὁ σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας (§ 2).

*Σημείωσις.* Διὰ τῶν μεθόδων τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίζωνται καὶ δευτερεύοντα στοιχεῖα τῶν τριγώνων. Πρέπει ὅμως νὰ ἀναφέρωνται ρητῶς ποῖα τούτων ζητοῦνται.

## Α΄. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**21.** *Πρόβλημα I.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ, π.χ. ἡ Β.**

*Ἐπίλυσις.* Εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Γ ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος

$$\Gamma = 90^0 - B.$$

Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀπὸ τὰς ἰσότητας :

$$\beta = \alpha \cdot \text{ἡμ}\, B \text{ καὶ } \gamma = \alpha \cdot \text{ἡμ}\, \Gamma.$$

Τέλος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

*1ον Παράδειγμα.* Ἂν π.χ. εἶναι :

$\alpha = 753$ μέτ. καὶ $B = 30^0\,15'\,20''$, οἱ δύο πρῶτοι προηγούμενοι τύποι γίνονται :

$\Gamma = 90^0 - 30^0\,15'\,20''$,

$\beta = 753 \cdot \text{ἡμ}(30^0\,15'\,20'')$

*Γνωστά,* α, Β — *ἄγνωστα στοιχεῖα* Γ, β, γ, Ε

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$\Gamma = 90^0 - B,\ \beta = \alpha\text{ἡμ}B,$

$\gamma = \alpha\text{ἡμ}\Gamma,\quad E = \frac{1}{2}\beta\gamma.$

*Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.*

$$\begin{aligned} 90^0 &= 89^0\,59'\,60'' \\ B &= 30^0\,15'\,20'' \\ \hline \Gamma &= 59^0\,44'\,40'' \end{aligned}$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς β*

$$\text{λογ}\beta = \text{λογ}753 + \text{λογημ}(30^0\,15'\,20'')$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}753 &= 2{,}87679 \\ \text{λογημ}(30^0\,15'\,20'') &= \bar{1}{,}70231 \\ \text{λογ}\beta &= 2{,}57910 \\ \beta &= 397{,}4 \text{ μέτ.} \end{aligned}$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς γ*

Ἡ ἰσότης $\gamma = \alpha\text{ἡμ}\,\Gamma$ γίνεται $\gamma = 753\ \text{ἡμ}(59^0\,44'\,40'')$

καὶ ἑπομένως $\quad λογγ = λογ\,753 + λογημ\,(59^0\,44'\,40'')$

$$λογ\,753 = 2{,}87679$$

$$λογημ\,(59^0\,44'\,40'') = \overline{1}{,}93641$$

$$λογγ = 2{,}81320$$

$$γ = 650{,}43 \text{ μέτ.}$$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε*

$$Ε = \frac{1}{2}βγ, \qquad λογΕ = λογβ + λογγ - λογ2.$$

$$λογβ = 2{,}57910$$

$$λογγ = 2{,}81320$$

$$\text{ἄθρ.} = 5{,}39230$$

$$λογ2 = 0{,}30103$$

$$λογΕ = 5{,}09127$$

$$Ε = 123\,386{,}11 \text{ τετρ. μέτρα}$$

*2ον Παράδειγμα.* Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει $α = 1465$ μέτρα καὶ $Β = 53^0\,26'\,30''$

*Ἐπίλυσις.* Κατὰ τὰ προηγούμενα, οἱ τύποι ἐπιλύσεως εἶναι $\quad Γ = 90^0 - Β, \quad β = αημΒ, \quad γ = αημΓ \qquad (1)$

*Ὑπολογισμὸς τῆς Γ*

$$90^0 = 89^0\,59'\,60''$$

$$Β = 53^0\,26'\,30''$$

$$Γ = 36^0\,33'\,30''$$

*Ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν β καὶ γ*

Αἱ δύο τελευταῖαι ἰσότητες τῶν (1) γίνονται : $\quad β = 1465 \cdot ημ\,(53^0\,26'\,30'')$

$$γ = 1465 \cdot ημ\,(36^0\,33'\,30'') \qquad (2)$$

Ἤδη δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἀλλὰ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ τὸν πίνακα Ι βλέπομεν ὅτι :

$$ημ\,(53^0\,20') < ημ\,(53^0\,26'\,30'') < ημ\,(53^0\,30')$$

ἢ $\quad 0{,}80212 < ημ\,(53^0\,26'\,30'') < 0{,}80386.$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $0{,}80386 - 0{,}80212 = 0{,}000174$ καὶ

$$(53^0\,26'\,30'') - (53^0\,20') = 6'\,30'' = \frac{13'}{2}$$

Ἀπὸ δὲ τὴν διάταξιν $\quad 10' \quad 0{,}00174$

$$\frac{13'}{2} \qquad χ$$

εὑρίσκομεν : $\quad χ = 0{,}00174 \cdot \frac{13}{20} = 0{,}00113.$

$$\text{Ἑπομένως ἡμ}\,(53^0\,26'\,30'') = 0{,}80212 + 0{,}00113 = 0{,}80325.$$

Ἡ α' λοιπὸν τῶν (2) γίνεται:

$$\beta = 1465 \cdot 0{,}80325 = 1176{,}76125 \text{ μέτρα.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $(36^0\,33'\,30'') = 0{,}59564$ καὶ ἑπομένως

$$\gamma = 1465 \cdot 0{,}59564 = 872{,}6126 \text{ μέτρα.}$$

### Ἀσκήσεις

45. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 20$ μέτρα, $B = 42^0\,12'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

46. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 345$ μέτρα καὶ $\Gamma = 54^0\,20'\,45''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

47. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 1565$ μέτρα καὶ $\Gamma = 56^Y{,}25$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

48. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\alpha = 475{,}50$ μέτρα καὶ $B = \frac{3\pi}{8}$ ἀκτίνια. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

49. Ἡ διαγώνιος ΑΓ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος 0,60 μέτρα καὶ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν ΑΒ γωνίαν $38^0\,25'$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

50. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου ἔχει μῆκος 15 μέτρα, ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μὲ τὴν μικροτέραν διαγώνιον εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθῆς. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

51. Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 0,65 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τόξου $52^0\,35'$ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπ' αὐτῆς.

52. Ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 0,25 μέτρου καὶ κλίσιν $26^0\,45'\,50''$ Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

53. Δύο δυνάμεις Δ καὶ Δ' ἐνεργοῦσιν εἰς σημεῖον Α ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν 15,6 χιλιογράμμων καὶ σχηματίζει γωνίαν $35^0\,20'$ μὲ τὴν Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν δυνάμεων Δ καὶ Δ' καὶ ἡ γωνία τῆς συνισταμένης μὲ τὴν Δ'.

## Β' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**22.** *Πρόβλημα.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν π.χ. τὴν β.**

*Ἐπίλυσις.* Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος:

| | |
|---|---|
| $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ εὑρίσκομεν τὴν κάθετον πλευρὰν γ. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ἡμ $B = \frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν B καὶ ἔπειτα τὴν Γ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$. | *Γνωστά, ἄγνωστα στοιχεῖα*<br>α, β γ, B, Γ, E<br>*Τύποι Ἐπιλύσεως*<br>$\gamma^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$<br>$\text{ἡμ}B = \frac{\beta}{\alpha}$<br>$\Gamma = 90^0 - B$<br>$E = \frac{1}{2}\beta\gamma.$ |

*Παράδειγμα.* Ἔστω α = 15 964 μέτ. καὶ β = 11 465 μέτρα

*Βοηθητικὸς πίναξ*

$\alpha = 15\,964$
$\beta = 11\,465$
$\alpha + \beta = 27\,429$
$\alpha - \beta = 4\,499$

*Ὑπολογισμὸς τῆς γ*

$\gamma^2 = 27\,429.4499$, ὅθεν :

$2\text{λογ}\gamma = \text{λογ}\,27429 + \text{λογ}\,4499$ καὶ ἑπομένως :

$$\text{λογ}\gamma = \frac{\text{λογ}27\,429 + \text{λογ}4\,499}{2}$$

λογ 27 429 = 4,43821
λογ 4 499 = 3,65312
ἄθροισμα = 8,09133

λογγ = 4,04566
γ = 11 108,72 μέτρα.

*Ὑπολογισμὸς τῆς B*

Ἐκ τῆς $\text{ἡμ}B = \frac{\beta}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι :

λογἡμB = λογβ − λογα
λογβ = 4,05937
λογα = 4,20314
λογἡμB = $\bar{1}$,85623
B = 45° 54′ 15″

*Ὑπολογισμὸς τῆς Γ*

90° = 89° 59′ 60″
B = 45° 54′ 15″
Γ = 44° 5′ 45″

*Ὑπολογισμὸς τοῦ E*

Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}E = \text{λογ}\beta + \text{λογ}\gamma - \text{λογ}2.$$

λογβ = 4,05937
λογγ = 4,04566
ἄθρ. = 8,10503

ἄθρ. = 8,10503
λογ2 = 0,30103
λογE = 7,80400
E = 63 680 000 τ.μ.

## Ἀσκήσεις

54. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 15 μέτρα καὶ β = 6,4 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

55. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 165,7 μέτρα καὶ β = 74,20 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

56. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = (ΑΓ) = 5 μέτρα καὶ (ΒΓ) = 5,60 μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ.

57. Εἷς ρόμβος ἔχει πλευρὰν 8 μέτρα καὶ μικροτέραν διαγώνιον 5,30 μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου αὐτοῦ.

58. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἷς κύκλος ἀκτῖνος ρ φαίνεται ἀπὸ ἓν σημεῖον Α, ἂν (ΚΑ) = 2ρ.

59. Ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 0,75 μέτρα καὶ ὕψος 0,28 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις αὐτοῦ.

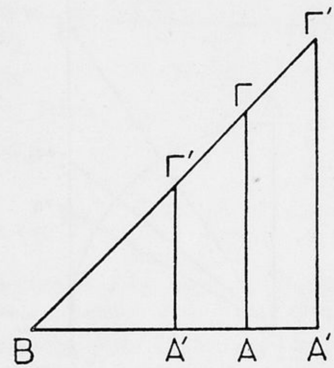
60. Εἷς κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 0,80 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ χορδῆς του, ἥτις ἔχει μῆκος 0,60 μέτρου.

61. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ μία τούτων ἔχει ἔντασιν 25 χιλιογράμμων καὶ ἡ συνισταμένη αὐτῶν 40 χιλιογρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς συνισταμένης μὲ τὰς δυνάμεις ταύτας.

## 1. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ. ΧΡΗΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

**23. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας.** Ἔστω ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 10). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ φέρομεν τὴν Γ'Α' κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΑ.

Ἂν ἐργασθῶμεν, ὅπως ἀνωτέρω ἐν § 8, βεβαιούμεθα ὅτι : Διὰ τὴν σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι : $\frac{ΑΓ}{ΒΑ} = \frac{Α'Γ'}{ΒΑ'}$, δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ σημείου Γ' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ. Καὶ ἀντιστρόφως : εἰς δοθέντα λόγον $\frac{ΑΓ}{ΒΑ}$ ἀντιστοιχεῖ σταθερὰ ὀξεῖα γωνία Β. Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{ΑΓ}{ΒΑ}$ ὀνομάζομεν **ἐφαπτομένην** τῆς ὀξείας γωνίας Β. Ὥστε :




Σχ. 10

**Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ.**

Ἡ ἐφαπτομένη γωνίας Β σημειώνεται οὕτω : ἐφΒ.

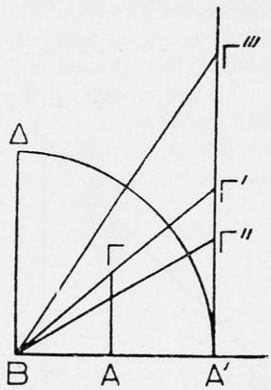
Εἶναι λοιπὸν $ἐφΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΑ}$· Ὁμοίως $ἐφΓ = \frac{ΒΑ}{ΑΓ}$·

**24. Γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας.** Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 11). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀξείας γωνίας Β αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους γράφομεν τεταρτημόριον Α'Δ. Ἂν ἐκ τοῦ Α' ὑψώσωμεν τὴν Α'Γ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ προεκτείνωμεν τὴν ΒΓ, μέχρις οὗ τμήσῃ αὐτὴν εἰς τὸ Γ', σχηματίζεται νέον ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΓ'. Κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα εἶναι $ἐφΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΑ} = \frac{Α'Γ'}{ΒΑ'}$·

Ἐπειδὴ δὲ $(BA') = 1$, θὰ εἶναι $\frac{A'\Gamma'}{BA'} = (A'\Gamma')$. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται $\dot{\epsilon}\varphi B = (A'\Gamma')$. Οὕτω βλέπομεν ὅτι :

**Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ἤτοι μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.**

**25. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μετὰ τῆς γωνίας ταύτης.** Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχ. 11 ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι :



Σχ. 11

Αὐξανομένης τῆς ὀξείας γωνίας, τὰ ἀντίστοιχα μήκη $(A'\Gamma'')$, $(A'\Gamma')$, $(A'\Gamma''')$ κ.τ.λ. βαίνουσιν αὐξανόμενα. Ἡ αὔξησις δὲ αὕτη εἶναι ταχυτάτη, ὅταν ἡ γωνία πλησιάζῃ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅτε τὰ μήκη ταῦτα δύνανται νὰ ὑπερβῶσι πάντα ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μέγαν. Τείνουσι δηλαδὴ ταῦτα εἰς τὸ ἄπειρον καὶ δεχόμεθα ὅτι:

$\dot{\epsilon}\varphi 90^0 = \infty$

Ἀντιθέτως, ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ μηδέν, τὸ τμῆμα $A'\Gamma'$ ἐλαττούμενον γίνεται σημεῖον A'. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι : $\dot{\epsilon}\varphi 0^0 = 0$.

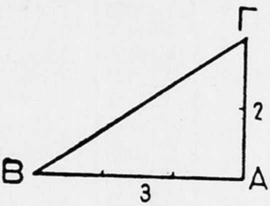
Ταῦτα συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

$$\begin{array}{r} B \\ \dot{\epsilon}\varphi B \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0^0 \; . \; . \; . \; . \nearrow . \; . \; . \; . \; 90^0 \\ 0 \; . \; . \; . \; . \nearrow . \; . \; . \; . \; \infty \end{array} \right.$$

**26. Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς.** Ἂν $\dot{\epsilon}\varphi B = 2$, πρὸς κατασκευὴν τῆς γωνίας B ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν διπλασίαν τῆς ἄλλης. Ἡ γωνία B, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς, εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη.

Ἂν $\dot{\epsilon}\varphi B = \frac{2}{3}$, πρέπει ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας A νὰ λάβωμεν δύο ἴσα διαδοχικὰ τμήματα· ἔστω δὲ ΑΓ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης τρία διαδοχικὰ τμήματα ἴσα πρὸς τὰ προηγούμενα· ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (σχ. 12). Ἂν φέρωμεν τὴν ΒΓ, σχηματίζεται ἡ ζητουμένη γωνία Β. Διότι πράγματι εἶναι :

$$\text{ἐφ}B = \frac{ΑΓ}{ΒΑ} = \frac{2}{3}.$$



Σχ. 12

Ἂν ἐφΒ $= 0{,}45 = \frac{45}{100}$, πρέπει ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχῃ 45 τμήματα καὶ ἡ ἄλλη 100, πάντα ἴσα. Ἂν τὸ σχέδιόν μας δὲν χωρῇ, λαμβάνομεν $45 : 10 = 4{,}5$ ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ $100 : 10 = 10$ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 4,5 γωνία Β εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι

$$\text{ἐφ}B = \frac{4{,}5}{10} = \frac{45}{100} = 0{,}45.$$

### Ἀσκήσεις

62. Αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσι μήκη 12 μέτρα ἡ μία καὶ 16 μέτρα ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

63. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 1,5 μέτρα, ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ 1,2 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

64. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

65. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ἔχουσα ἐφαπτομένην $\frac{1}{5}$.

66. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν ἐφ ω $= \frac{5}{6}$.

67. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἐφ χ $= 1{,}5$.

68. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ἐφ ψ $= 0{,}8$.

**27.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας $45^0$, $30^0$ καὶ $60^0$.**

*Λύσις.* α΄) Ἂν $B = 45^0$, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι ΑΒ = ΑΓ καὶ ἑπομένως $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = 1$.

ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

| Μοίραι | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | Μοίραι |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 343,77371 | 171,88540 | 114,58865 | 85,93979 | 68,75009 | 89 |
| 1 | 57,28996 | 49,10388 | 42,96408 | 38,18846 | 34,37060 | 31,24115 | 88 |
| 2 | 28,63625 | 26,43160 | 24,54176 | 22,90377 | 21,47060 | 20,20655 | 87 |
| 3 | 19,08114 | 18,07498 | 17,16934 | 16,34986 | 15,60478 | 14,92442 | 86 |
| 4 | 14,30067 | 13,72674 | 13,19688 | 12,70621 | 12,25051 | 11,82617 | 85 |
| 5 | 11,43005 | 11,05943 | 10,71191 | 10,38540 | 10,07803 | 9,78817 | 84 |
| 6 | 9,51436 | 9,25530 | 9,00983 | 8,77689 | 8,55555 | 8,34496 | 83 |
| 7 | 8,14435 | 7,95302 | 7,77035 | 7,59575 | 7,42871 | 7,26873 | 82 |
| 8 | 7,11537 | 6,96823 | 6,82694 | 6,69116 | 6,56055 | 6,43484 | 81 |
| 9 | 6,31375 | 6,19703 | 6,08444 | 5,97576 | 5,87080 | 5,76937 | 80 |
| 10 | 5,67128 | 5,57638 | 5,48451 | 5,39552 | 5,30928 | 5,22566 | 79 |
| 11 | 5,14455 | 5,06584 | 4,98940 | 4,91516 | 4,84300 | 4,77286 | 78 |
| 12 | 4,70463 | 4,63825 | 4,57363 | 4,51071 | 4,44942 | 4,38969 | 77 |
| 13 | 4,33148 | 4,27471 | 4,21933 | 4,16530 | 4,11256 | 4,06107 | 76 |
| 14 | 4,01078 | 3,96165 | 3,91364 | 3,86671 | 3,82083 | 3,77595 | 75 |
| 15 | 3,73205 | 3,68909 | 3,64705 | 3,60588 | 3,56557 | 3,52609 | 74 |
| 16 | 3,48741 | 3,44951 | 3,41236 | 3,37595 | 3,34023 | 3,30524 | 73 |
| 17 | 3,27085 | 3,23714 | 3,20406 | 3,17159 | 3,13972 | 3,10842 | 72 |
| 18 | 3,07768 | 3,04749 | 3,01783 | 2,98868 | 2,96004 | 2,93189 | 71 |
| 19 | 2,90421 | 2,87700 | 2,85023 | 2,82391 | 2,79802 | 2,77254 | 70 |
| 20 | 2,74748 | 2,72281 | 2,69853 | 2,67462 | 2,65109 | 2,62791 | 69 |
| 21 | 2,60509 | 2,58261 | 2,56046 | 2,53865 | 2,51715 | 2,49597 | 68 |
| 22 | 2,47509 | 2,45451 | 2,43422 | 2,41421 | 2,39449 | 2,37504 | 67 |
| 23 | 2,35585 | 2,33693 | 2,31826 | 2,29984 | 2,28167 | 2,26374 | 66 |
| 24 | 2,24604 | 2,22857 | 2,21132 | 2,19430 | 2,17749 | 2,16090 | 65 |
| 25 | 2,14451 | 2,12832 | 2,11232 | 2,09654 | 2,08094 | 2,06553 | 64 |
| 26 | 2,05030 | 2,03526 | 2,02039 | 2,00569 | 1,99116 | 1,97680 | 63 |
| 27 | 1,96261 | 1,94858 | 1,93470 | 1,92098 | 1,90741 | 1,89400 | 62 |
| 28 | 1,88073 | 1,86760 | 1,85462 | 1,84177 | 1,82906 | 1,81649 | 61 |
| 29 | 1,80405 | 1,79174 | 1,77955 | 1,76749 | 1,75556 | 1,74375 | 60 |
| 30 | 1,73205 | 1,72047 | 1,70901 | 1,69766 | 1,68643 | 1,67530 | 59 |
| 31 | 1,66428 | 1,65337 | 1,64256 | 1,63185 | 1,62125 | 1,61074 | 58 |
| 32 | 1,60033 | 1,59002 | 1,57981 | 1,56969 | 1,55966 | 1,54972 | 57 |
| 33 | 1,53987 | 1,53010 | 1,52043 | 1,51084 | 1,50133 | 1,49190 | 56 |
| 34 | 1,48256 | 1,47330 | 1,46411 | 1,45501 | 1,44598 | 1,43703 | 55 |
| 35 | 1,42815 | 1,41934 | 1,41061 | 1,40195 | 1,39336 | 1,38484 | 54 |
| 36 | 1,37638 | 1,36800 | 1,35968 | 1,35142 | 1,34323 | 1,33511 | 53 |
| 37 | 1,32704 | 1,31904 | 1,31110 | 1,30323 | 1,29541 | 1,28764 | 52 |
| 38 | 1,27994 | 1,27230 | 1,26471 | 1,25717 | 1,24969 | 1,24227 | 51 |
| 39 | 1,23490 | 1,22758 | 1,22031 | 1,21310 | 1,20593 | 1,19882 | 50 |
| 40 | 1,19175 | 1,18474 | 1,17777 | 1,17085 | 1,63981 | 1,15715 | 49 |
| 41 | 1,15037 | 1,14363 | 1,13694 | 1,13029 | 1,12369 | 1,11713 | 48 |
| 42 | 1,11061 | 1,10414 | 1,09770 | 1,09131 | 1,08496 | 1,07864 | 47 |
| 43 | 1,07237 | 1,06613 | 1,05994 | 1,05378 | 1,04766 | 1,04158 | 46 |
| 44 | 1,03553 | 1,02952 | 1,02359 | 1,01761 | 1,01170 | 1,00583 | 45 |
| 45 | 1,00000 | | | | | | |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Μοίραι |

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

## ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

| Μοῖραι | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | Μοῖραι |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01455 | 89 |
| 1 | 0,01746 | 0,02036 | 0,02328 | 0,02620 | 0,02910 | 0,03201 | 88 |
| 2 | 0,03492 | 0,03783 | 0,04075 | 0,04366 | 0,04658 | 0,04950 | 87 |
| 3 | 0,05241 | 0,05533 | 0,05824 | 0,06116 | 0,06408 | 0,06700 | 86 |
| 4 | 0,06993 | 0,07285 | 0,07578 | 0,07870 | 0,08163 | 0,08456 | 85 |
| 5 | 0,08749 | 0,09042 | 0,09335 | 0,09629 | 0,09923 | 0,10216 | 84 |
| 6 | 0,10510 | 0,10805 | 0,11099 | 0,11394 | 0,11688 | 0,11983 | 83 |
| 7 | 0,12278 | 0,12574 | 0,12869 | 0,13165 | 0,13461 | 0,13758 | 82 |
| 8 | 0,14054 | 0,14351 | 0,14648 | 0,14945 | 0,15243 | 0,15540 | 81 |
| 9 | 0,15838 | 0,16137 | 0,16435 | 0,16734 | 0,17033 | 0,17333 | 80 |
| 10 | 0,17633 | 0,17933 | 0,18233 | 0,18534 | 0,18835 | 0,19136 | 79 |
| 11 | 0,19438 | 0,19740 | 0,20042 | 0,20345 | 0,20648 | 0,20952 | 78 |
| 12 | 0,21256 | 0,21560 | 0,21864 | 0,22169 | 0,22475 | 0,22781 | 77 |
| 13 | 0,23087 | 0,23393 | 0,23700 | 0,24008 | 0,24316 | 0,24624 | 76 |
| 14 | 0,24933 | 0,25242 | 0,25552 | 0,25862 | 0,26172 | 0,26483 | 75 |
| 15 | 0,26795 | 0,27107 | 0,27419 | 0,27732 | 0,28046 | 0,28360 | 74 |
| 16 | 0,28675 | 0,28989 | 0,29305 | 0,29621 | 0,29938 | 0,30255 | 73 |
| 17 | 0,30573 | 0,30891 | 0,31210 | 0,31530 | 0,31850 | 0,32171 | 72 |
| 18 | 0,32492 | 0,32814 | 0,33136 | 0,33459 | 0,33783 | 0,34108 | 71 |
| 19 | 0,34433 | 0,34758 | 0,35085 | 0,35412 | 0,35739 | 0,36068 | 70 |
| 20 | 0,36397 | 0,36727 | 0,37057 | 0,37388 | 0,37720 | 0,38053 | 69 |
| 21 | 0,38386 | 0,38721 | 0,39055 | 0,39391 | 0,39727 | 0,40065 | 68 |
| 22 | 0,40403 | 0,40741 | 0,41081 | 0,41421 | 0,41763 | 0,42105 | 67 |
| 23 | 0,42447 | 0,42791 | 0,43136 | 0,43481 | 0,43828 | 0,44175 | 66 |
| 24 | 0,44523 | 0,44872 | 0,45222 | 0,45573 | 0,45924 | 0,46277 | 65 |
| 25 | 0,46631 | 0,46985 | 0,47341 | 0,47698 | 0,48055 | 0,48414 | 64 |
| 26 | 0,48773 | 0,49134 | 0,49495 | 0,49858 | 0,50222 | 0,50587 | 63 |
| 27 | 0,50953 | 0,51319 | 0,51688 | 0,52057 | 0,52427 | 0,52798 | 62 |
| 28 | 0,53171 | 0,53545 | 0,53920 | 0,54296 | 0,54673 | 0,55051 | 61 |
| 29 | 0,55431 | 0,55812 | 0,56194 | 0,56577 | 0,56952 | 0,57348 | 60 |
| 30 | 0,57735 | 0,58124 | 0,58513 | 0,58905 | 0,59297 | 0,59691 | 59 |
| 31 | 0,60086 | 0,60483 | 0,60881 | 0,61280 | 0,61681 | 0,62083 | 58 |
| 32 | 0,62487 | 0,62892 | 0,63299 | 0,63707 | 0,64117 | 0,64528 | 57 |
| 33 | 0,64941 | 0,65355 | 0,65771 | 0,66189 | 0,66608 | 0,67028 | 56 |
| 34 | 0,67451 | 0,67875 | 0,68301 | 0,68728 | 0,69157 | 0,69588 | 55 |
| 35 | 0,70021 | 0,70455 | 0,70891 | 0,71329 | 0,71769 | 0,72211 | 54 |
| 36 | 0,72654 | 0,73099 | 0,73547 | 0,73996 | 0,74447 | 0,74900 | 53 |
| 37 | 0,75355 | 0,75812 | 0,76272 | 0,76733 | 0,77196 | 0,77661 | 52 |
| 38 | 0,78125 | 0,78598 | 0,79060 | 0,79544 | 0,80019 | 0,80498 | 51 |
| 39 | 0,80978 | 0,81461 | 0,81946 | 0,82434 | 0,82923 | 0,83415 | 50 |
| 40 | 0,83910 | 0,84407 | 0,84906 | 0,85408 | 0,85912 | 0,86419 | 49 |
| 41 | 0,86929 | 0,87441 | 0,87955 | 0,88473 | 0,88992 | 0,89515 | 48 |
| 42 | 0,90040 | 0,90569 | 0,91099 | 0,91633 | 0,92169 | 0,92709 | 47 |
| 43 | 0,93252 | 0,93797 | 0,94345 | 0,94896 | 0,95451 | 0,96008 | 46 |
| 44 | 0,96569 | 0,97133 | 0,97699 | 0,98270 | 0,98843 | 0,99419 | 45 |
| 45 | 1,00000 | | | | | | |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | Μοῖραι |

## ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Ἄρα $\qquad$ $$\text{ἐφ}45^0 = 1 \qquad (1)$$

β΄) Ἂν $B = 30^0$, γνωρίζομεν ὅτι $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $4\beta^2 = \beta^2 + \gamma^2$, ὅθεν $3\beta^2 = \gamma^2$ καὶ $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{3}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται, ὅτι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ἄρα $\qquad$ $$\text{ἐφ}30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$

γ΄) Ἂν $\Gamma = 60^0$, θὰ εἶναι ἐφ$60^0 = \frac{\gamma}{\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ $B = 30^0$, θὰ εἶναι $3\beta^2 = \gamma^2$ καὶ ἐπομένως, $\frac{\gamma}{\beta} = \sqrt{3}$.

Θὰ εἶναι λοιπόν: $$\text{ἐφ}60^0 = \sqrt{3} \qquad (3)$$

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς σελ. 34 οὕτω:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | $0^0$ | ↗ | $30^0$ | ↗ | $45^0$ | ↗ | $60^0$ | ↗ | $90^0$ |
| ἐφB | 0 | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ↗ | 1 | ↗ | $\sqrt{3}$ | ↗ | $\infty$ |

**28. Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας.** Τὴν ἐφαπτομένην οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ εἰς τὰς σελ. 40 – 41 παρατιθεμένου πίνακος III. Ἡ περιγραφὴ καὶ χρῆσις αὐτοῦ εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ πίνακος I διὰ τὰ ἡμίτονα. Μόνον εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς ἀριστερᾶς σελίδος τοῦ πίνακος τούτου καὶ εἰς τὸ κάτω τῆς δεξιᾶς σελίδος ἀναγράφονται αἱ λέξεις ἐφαπτομένη ἀντὶ ἡμίτονον τοῦ I πίνακος. Ἀπὸ αὐτὸν εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι:

ἐφ $(19^0\,20') = 0{,}35085$, ἐφ $(47^0\,40') = 1{,}09770$ κ.τ.λ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν ἐφ$(35^0\,26')$, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$35^0\,20 < 35^0\,26' < 35^0\,30'$$

καὶ $\qquad$ ἐφ $(35^0\,20') <$ ἐφ$(35^0\,26') <$ ἐφ $(35^0\,30')$.

Ἐκ δὲ τῶν πινάκων βλέπομεν ὅτι:

ἐφ $(35^0\,20') = 0{,}70891$ καὶ ἐφ $(35^0\,30') = 0{,}71329$

Αἱ δὲ προηγούμεναι ἀνισότητες γίνονται:

$0{,}70891 <$ ἐφ $(35^0\,26') < 0{,}71329$.

Οὕτω διὰ $\delta = 30' - 20' = 10'$ εἶναι :

$$\Delta = 0{,}71329 - 0{,}70891 = 0{,}00438.$$

Μεθ' ὃ καταρτίζομεν τὴν διάταξιν :

$$\begin{array}{ll} 10' & 0{,}00438 \\ 6' & \quad x \end{array}$$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$x = 0{,}00438 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}002628 \text{ ἢ } 0{,}00263 \text{ κατὰ προσέγγισιν.}$$

Εἶναι λοιπὸν ἐφ $(35^0\,26') = 0{,}70891 + 0{,}00263 = 0{,}71154$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐφ$(59^0\,37'\,20'')$ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι :

$$\text{ἐφ}(59^0\,30') < \text{ἐφ}(59^0\,37'\,20'') < \text{ἐφ}(59^0\,40') \text{ ἢ}$$

$$1{,}69766 < \text{ἐφ}(59^0\,37'\,20'') < 1{,}70901.$$

Βλέπομεν οὕτως ὅτι $\Delta = 0{,}01135$ καὶ $\delta = 7'\,20'' = 7\frac{1'}{3} = \frac{22'}{3}$.

Ἐκ δὲ τῆς διατάξεως $\begin{array}{ll} 10' & 0{,}01135 \\ \frac{22'}{3} & \quad x \end{array}$

εὑρίσκομεν $x = 0{,}01135 \cdot \frac{22}{30} = 0{,}00832.$

Εἶναι λοιπὸν ἐφ$(59^0\,37'\,20'') = 1{,}69766 + 0{,}00832 = 1{,}70598$.

### Ἀσκήσεις

69. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(12^0\,30')$ καὶ ἡ ἐφ $(73^0\,40')$.
70. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(42^0\,10')$ καὶ ἡ ἐφ$(67^0\,50')$.
71. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$50^0$ καὶ ἡ ἐφ$80^0$.
72. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(18^0\,25')$ καὶ ἡ ἐφ$(53^0\,47')$
73. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(23^0\,43'\,30'')$.
74. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(48^0\,46'\,40'')$.
75. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας ἴσης πρὸς $\frac{3}{10}$ ὀρθῆς γωνίας.
76. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας ἴσης πρὸς $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς γωνίας.

**29. Λογάριθμος ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας.** Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουσι καὶ στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι τὴν συγκεκομμένην λέξιν Ἐφ. ἄνω διὰ τὰς μικροτέρας $45^0$ γωνίας καὶ κάτω διὰ τὰς ἄλλας μέχρις $90^0$.

Αὗται περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἐφαπτομένων ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα προχωροῦσιν ἀνὰ $1'$.

Ἡ εὕρεσις δὲ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης δοθείσης ὀξείας, γωνίας γίνεται ὅπως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς ( § 17 ). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογἐφ}(38^0\,22') = \bar{1},89853,$$
$$\text{λογἐφ}(51^0\,20') = 0,09680,$$
$$\text{λογἐφ}(51^0\,43') = 0,10277.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογἐφ($38^0\,51'\,42''$), παρατηροῦμεν ὅτι. λογἐφ($38^0\,51'$) $<$ λογἐφ($38^0\,51'\,42''$) $<$ λογἐφ ($38^0\,52'$) ἢ

$$\bar{1},90604 < \text{λογἐφ}(38^0\,51'\,42'') < \bar{1},90630.$$

Οὕτω δὲ βλέπομεν ὅτι διὰ $\delta = 60''$ εἶναι $\Delta = 26$ μον. τελ. δεκ. τάξ. Μετὰ ταῦτα δὲ ἐκ τῆς διατάξεως

$$\begin{array}{cc} 60'' & 26 \\ 42'' & \chi \end{array}$$

εὑρίσκομεν $\chi = 26 \cdot \dfrac{42}{60} = 18,2$ ἢ 18 μον. τελ. δεκ. τάξεως κατὰ προσέγγισιν.

Εἶναι λοιπόν :

$$\text{λογἐφ}(38^0\,51'\,42'') = \bar{1},90604 + 0,00018 = \bar{1},90622.$$

Ὅταν δὲ γνωρίζωμεν τὸν λογἐφω, εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἐφω ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τῶν ἀριθμῶν. Οὕτως ἐκ τῆς ἰσότητος λογἐφ($38^0\,51'\,42''$) $= \bar{1},90622$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}(38^0\,51'\,42'') = 0,80578.$$

### Ἀσκήσεις

77. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφ($38^0\,12'$) καὶ ὁ λογἐφ($38^0\,42'\,30''$) καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ ἐφ($38^0\,12'$) καὶ ἡ ἐφ($38^0\,42'\,30''$).

78. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφ($51^0\,23'$) καὶ ὁ λογἐφ($51^0\,35'\,28''$) καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ ἐφ($51^0\,23'$) καὶ ἡ ἐφ($51^0\,35'\,28''$).

79. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφ($41^0\,57'\,35''$) καὶ ὁ λογἐφ($48^0\,18'\,52''$) καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ ἐφ($41^0\,57'\,35''$) καὶ ἡ ἐφ($48^0\,18'\,52''$).

80. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφ$26^{\gamma},40$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ ἐφ$26^{\gamma},40$.

81. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφ $\dfrac{3\pi}{8}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ ἐφ $\dfrac{3\pi}{8}$.

82. Ἂν ἐφχ $= \dfrac{2}{5}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφχ.

83. Ἂν ἐφ ω $= 1,673$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφω.

84. Ἂν ἐφ ψ $= 0,347$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογἐφψ.

**30. Εὕρεσις τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς.** α') Ἔστω ὅτι ἐφχ $= 0{,}41763$ καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.

Ταύτην εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν πίνακα III τοῦ βιβλίου τούτου. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}41763 < 1 =$ ἐφ$45^0$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\chi < 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,41763 εἰς τὴν α' σελίδα τοῦ πίνακος τούτου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 22^0\, 40'$.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἐφω $= 1{,}92098$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέτρου τῆς ὀξείας γωνίας ω, ἀναζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 1,92098 εἰς τὴν β' σελίδα τοῦ πίνακος καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\omega = 62^0\, 30'$.

Ἂν ἐφχ $= 0{,}715$, εὑρίσκομεν εἰς τὴν α' σελίδα τοῦ πίνακος ὅτι:

$0{,}71329 < 0{,}715 < 0{,}71769$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι:

$35^0\, 30' < \chi < 35^0\, 40'$.

Εὐκόλως δὲ καταρτίζομεν τὴν διάταξιν

$$\begin{array}{ll} 0{,}00440 & 10' \\ \underline{0{,}00171} & \psi, \end{array}$$

ὅθεν $\psi = 10 \cdot \frac{171}{440} = 3'\, 53''$. Εἶναι λοιπὸν $\chi = 35^0\, 33'\, 53''$.

β') Τὸ αὐτὸ ζήτημα λύομεν καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων.

Οὕτως ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἐφχ $= 0{,}715$ εὑρίσκομεν ὅτι λογἐφχ $=$ λογ$0{,}715 = \bar{1}{,}85431$.

Πρέπει τώρα νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Δι' εὐκολίαν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄχιν ὅτι λογἐφ$45^0 =$ λογ$1 = 0$ καὶ ὅτι, ἂν $\chi < 45^0$, θὰ εἶναι ἐφχ $< 1$ καὶ λογἐφχ $< 0$. Ἂν δὲ $\chi > 45^0$ θὰ εἶναι λογἐφχ $> 0$. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀρνητικὸν λογάριθμον $\bar{1}{,}85431$ εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσιν ἄνω τὸ σύμβολον Ἐφ.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $\bar{1}{,}85407 < \bar{1}{,}85431 < \bar{1}{,}85434$

καὶ ἑπομένως: $35^0\, 33' < \chi < 35^0\, 34'$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς $\Delta = 27$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τῆς γωνίας κατὰ

60″, εἶναι δὲ δ = 24 μον. τελ. δεκ. τάξ. καταρτίζομεν τὴν διάταξιν :

27 60″

24 ψ καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 60 \cdot \frac{24}{27} = 53''$.

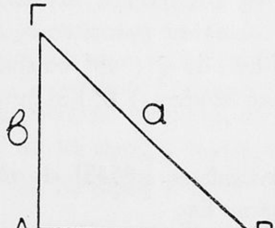
Εἶναι λοιπὸν $\chi = 35^0\, 33'53''$.

### Ἀσκήσεις

85. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν λογέφ $\chi = 1{,}89801$.
86. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ω, ἂν λογέφ $\omega = 0{,}09396$.
87. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ψ, ἂν ἐφ $\psi = 0{,}532$.
88. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν ἐφ $\chi = 1{,}103$.
89. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας θ, ἂν ἐφ $\theta = \frac{10}{8}$.
90. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας, ω, ἂν ἐφ $\omega = 2{,}194$.
91. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας, Ζ, ἂν ἐφ $Z = 0{,}923$.
92. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν ἐφ $\chi = 3{,}275$.
93. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν ἐφ $\chi = \frac{12}{5}$.

## 2. ΔΥΟ ΑΛΛΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**31. Δύο ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.** Ἐκ τῶν γνωστῶν (§ 23) ἰσοτήτων $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{BA} = \frac{\beta}{\gamma}$, $\varepsilon\varphi \Gamma = \frac{BA}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ εὑρίσκομεν ὅτι



Σχ. 13

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma\, \varepsilon\varphi B \\ \gamma &= \beta\, \varepsilon\varphi \Gamma \end{aligned} \qquad (2)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς εἰς ἐκείνην ἀντικειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.**

**32.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωσταὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ.**

*Ἐπίλυσις.* Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $\text{ἐφ}B = \frac{\beta}{\gamma}$ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β καὶ εἶτα εὐκόλως τὴν Γ.

Ἐκ δὲ τῆς $\text{ἡμ}\,B = \frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν α. Τέλος τὸ Ε εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

| *Γνωστά,* | *ἄγνωστα στοιχεῖα* |
|---|---|
| β, γ | Β, Γ, α, Ε |

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$$\text{ἐφ}\,B = \frac{\beta}{\gamma},\ \Gamma = 90^0 - B$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\beta},\ E = \frac{1}{2}\beta\gamma$$

*Παράδειγμα.* Ἔστω β = 3456 μέτρα καὶ γ = 1280 μέτρα.

*Ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ*

Ἐκ τῆς $\text{ἐφ}B = \frac{\beta}{\gamma}$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογἐφ}\,B = \text{λογ}\,\beta - \text{λογ}\,\gamma$$

$$\text{λογ}\,\beta = 3{,}53857$$
$$\text{λογ}\,\gamma = 3{,}10721$$
$$\text{λογἐφ}\,B = 0{,}43136$$
$$B = 69^0 40' 36''$$

$$90^0 = 89^0\,59'\,60''$$
$$B = 69^0\,40'\,36''$$
$$\Gamma = 20^0\,19'\,24''$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς α*

Ἐκ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}\alpha = \text{λογ}\beta - \text{λογἡμ}\,B,$$

$$\text{λογ}\,\beta = 3{,}53857$$
$$\text{λογἡμ}B = \bar{1}{,}97208$$
$$\text{λογ}\,\alpha = 3{,}56649$$
$$\alpha = 3685{,}41 \text{ μέτ.}$$

Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ (§ 21 καὶ § 22) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$E = 2\,211\,800 \text{ τ.μ.}$$

**Ἀσκήσεις**

94. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 18 μέτ. καὶ γ = 12 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

95. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 256,25 μέτ. καὶ γ = 348 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

96. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 3168,45 μέτ. καὶ γ = 2825,50 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

97. Ἡ μία διαγώνιος ρόμβου ἔχει μῆκος 3,48 μέτ. ἡ δὲ ἄλλη 2,20 μετ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

98. Ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὴν βάσιν ὀρθογωνίου εἶναι $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς διαγωνίου μὲ τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.

99. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἀπέχει 8 μέτ. ἀπὸ χορδῆς 12 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς τὴν χορδὴν ἀντιστοίχων τόξων.

100. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 940,50 τ.μ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 260,40 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τοῦτο.

101. Ἕκαστον ἀέτωμα τοῦ Παρθενῶνος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 28,35 μέτ. καὶ ὕψος 3,46 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν.

## Δ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**33.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωστὴ μία κάθετος πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.**

*Παράδειγμα.* Ἔστω ὅτι $\beta = 2347{,}5$ μέτ. καὶ $B = 51^0\,12'\,38''$.

*Ἐπίλυσις.* Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ εὐκόλως. Ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\gamma = \beta$ ἐφ $\Gamma$ εὑρίσκομεν τὴν γ. Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\beta}$ εὑρίσκομεν τὴν α. Τέλος ἀπὸ τὰς ἰσότητας $E' = \frac{1}{2}\beta\gamma$ καὶ $\gamma = \beta$ ἐφ $\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta^2\text{ἐφ}\Gamma,} \qquad (3)$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

| *Γνωστά,* | *ἄγνωστα στοιχεῖα* |
|---|---|
| β, Β | Γ,γ,α,Ε |

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$\Gamma = 90^0 - B$, $\gamma = \beta\text{ἐφ}\Gamma$

$\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$, $E = \frac{1}{2}\beta^2\text{ἐφ}\Gamma$

*Ὑπολογισμὸς τῆς Γ*

$$\begin{array}{r} 90^0 = 89^0\,59'\,60'' \\ \underline{B = 51^0\,12'\,38''} \\ \Gamma = 38^0\,47'\,22' \end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς γ*

Ἐκ τῆς $\gamma = \beta$ ἐφ $\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{array}{r} \text{λογ}\,\gamma = \text{λογ}\,\beta + \text{λογ ἐφ}\,\Gamma \\ \text{λογ}\,\beta = 3{,}37060 \\ \underline{\text{λογἐφ}\Gamma = \bar{1}{,}90511} \\ \text{λογ}\,\gamma = 3{,}27571, \\ \gamma = 1\,886{,}74 \text{ μέτ.} \end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς α*

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}\alpha = \text{λογ}\,\beta - \text{λογἡμ}B,$$

$$\text{λογ}\,\beta = 3{,}37060$$

$$\text{λογἡμ}\,B = \bar{1}{,}89179$$

$$\text{λογ}\,\alpha = 3{,}47881$$

$$\alpha = 3\,011{,}71 \text{ μέτ.}$$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε* ·

Ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta^2\,\text{ἐφ}\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}E = 2\text{λογ}\beta + \text{λογἐφ}\Gamma - \text{λογ}2.$$

$$2\text{λογ}\,\beta = 6{,}74120$$

$$\text{λογἐφ}\,\Gamma = \bar{1}{,}90511$$

$$\text{ἄθροισμα} = 6{,}64631$$

$$\text{λογ}\,2 = 0{,}30103$$

$$\text{λογ}\,E = 6{,}34528$$

$$E = 2\,214\,526{,}32 \text{ τ.μ.}$$

## Ἀσκήσεις

102. Ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\beta = 47$ μέτ. καὶ $B = 47^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

103. Ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\beta = 125$ μέτ. καὶ $\Gamma = 23^0\,45'\,22''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

104. Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 5,60 μέτ. ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν γωνίαν $25^0 34'\,44''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως, τῆς διαγωνίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

105. Μία χορδὴ κύκλου ἔχει μῆκος 1,65 μέτ., ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μὲ τὴν εἰς τὸ ἄκρον της καταλήγουσαν ἀκτῖνα εἶναι $40^0\,18'\,38''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς ταύτης καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς ταύτην ἀντιστοίχων τόξων.

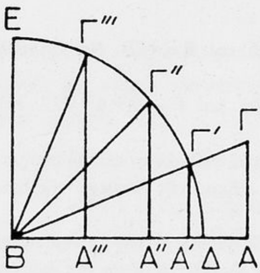
106. Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 0,80 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

107. Ἕν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει ὕψος 1,80 μέτ. καὶ κλίσιν $20^0$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

## ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

**34. Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου.** Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ Γ'Α' κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένη ἐκ τυχόντος σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ (σχ. 14).



Σχ. 14

Ἂν ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὴν § 8, βεβαιούμεθα ὅτι διὰ τὴν σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι $\frac{ΒΑ}{ΒΓ} = \frac{ΒΑ'}{ΒΓ'}$, ἤτοι ὁ λόγος $\frac{ΒΑ}{ΒΓ}$ εἶναι σταθερός.

Καὶ ἀντιστρόφως: Εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{ΒΑ}{ΒΓ}$ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη γωνία Β.

Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{ΒΑ}{ΒΓ}$ ὀνομάζομεν **συνημίτονον** τῆς γωνίας Β. Ὥστε:

**Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.**

Τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας Β σημειώνομεν οὕτω: συν Β.

Εἶναι λοιπόν: $$\text{συν}\, Β = \frac{ΒΑ}{ΒΓ}.$$

Ἂν δὲ γράψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΕ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους ΒΕ, θὰ εἶναι (ΒΓ') = 1 καὶ

$$\text{συν}\, Β = \frac{ΒΑ}{ΒΓ} = \frac{ΒΑ'}{ΒΓ'} = (ΒΑ').$$

**Εἶναι λοιπὸν τὸ συνΒ μῆκος εὐθ. τμήματος, δηλαδὴ μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.**

Ἀπὸ τὸ σχ. 14 βλέπομεν εὐκόλως ὅτι : Ἂν ἡ γωνία ΑΒΓ συνεχῶς αὐξανομένη γίνεται ΑΒΓ'', ΑΒΓ''' κ.τ.λ., τὸ συνημίτονον (ΒΑ) γίνεται ἀντιστοίχως (ΒΑ''), (ΒΑ''') κ.τ.λ.
Εἶναι δὲ (ΒΑ') 〉 (ΒΑ'') 〉 (ΒΑ''') κ.τ.λ. Ἤτοι:

**Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία βαίνῃ αὐξανομένη, τὸ συνημίτονον αὐτῆς βαίνει ἐλαττούμενον.**

Ὅταν δὲ ἡ γωνία πλησιάζῃ πρὸς τὴν ὀρθὴν ΑΒΕ, τὸ συνημίτονον αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸ μηδέν. Κατ' ἀναλογίαν λοιπὸν δεχόμεθα ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\, 90^0 = 0$

Ἀντιθέτως : Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ 0, τὸ (ΒΑ') γίνεται (ΒΔ), ἤτοι 1. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\, 0^0 = 1$.

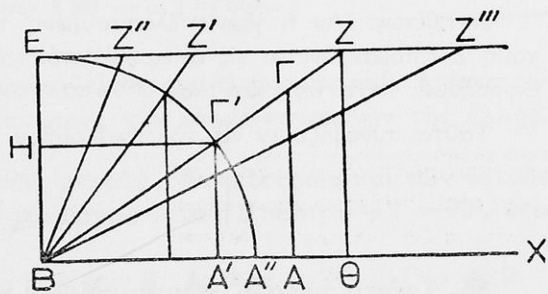
Τὴν μεταβολὴν ταύτην τοῦ συνημιτόνου γωνίας συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{array}{r} \mathrm{B} \\ \sigma\upsilon\nu\ \mathrm{B} \end{array} \left\{ \begin{array}{lcr} 0^0 \;.\;.\;.\;.\;. & \nearrow & .\;.\;.\;.\;.\; 90^0 \\ 1 \;.\;.\;.\;.\;. & \searrow & .\;.\;.\;.\;.\; 0 \end{array} \right.$$

**35. Συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας.** Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 15). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ φέρομεν τὴν Γ'Α' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅπως εἰς τὴν § 23, ὅτι διὰ σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι :

$$\frac{BA'}{A'\Gamma'} = \frac{BA}{A\Gamma}$$

Καὶ ἀντιστρόφως : Εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{BA}{A\Gamma}$ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη ὀξεῖα γωνία Β.



Σχ. 15

Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{BA}{A\Gamma}$ ὀνομάζομεν **συνεφαπτομένην** τῆς ὀξείας γωνίας Β. Τὴν συνεφαπτομένην ταύτην σημειοῦμεν οὕτω : σφ Β.

Εἶναι λοιπὸν $σφ\,Β = \frac{ΒΑ}{ΑΓ}$. Ὁμοίως $σφ\,Γ = \frac{ΑΓ}{ΒΑ}$. Ὥστε :

**Συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κάθετον πλευράν.**

Τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῆς σφ Β μανθάνομεν ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τεταρτημόριον Α''Ε μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους ΒΕ. Ἔστω δὲ Γ' ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ Ζ ἡ τομὴ τῆς ΒΓ ὑπὸ τῆς εἰς τὸ Ε ἐφαπτομένης τοῦ τεταρτημορίου. Φέρομεν ἔπειτα τὰς Γ'Α' καὶ Γ'Η καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ ΒΕ.

Ἤδη βλέπομεν εὐκόλως ὅτι : $σφ\,Β = \frac{ΒΑ'}{Α'Γ'} = \frac{ΗΓ'}{ΒΗ} = \frac{ΕΖ}{ΒΕ}$. Ἐπειδὴ δὲ ΒΕ εἶναι ἡ μονὰς μήκους ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται ὅτι $\frac{ΕΖ}{ΒΕ} = (ΕΖ)$

καὶ ἑπομένως : $σφ\,Β = (ΕΖ)$.

Ὁμοίως εἶναι $σφ\,\widehat{ΑΒΖ'} = (ΕΖ')$, $σφ\,(\widehat{ΑΒΖ''}) = (ΕΖ'')$ κ.τ.λ.

Ὥστε, ἂν ἡ γωνία βαίνῃ αὐξανομένη καὶ πλησιάζῃ νὰ γίνῃ ὀρθή, ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦται καὶ πλησιάζει πρὸς τὸ μηδέν. Κατ' ἐπέκτασιν λοιπὸν δεχόμεθα, ὅτι $σφ\,90^0 = 0$

Ἀντιθέτως: Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, ἡ τομὴ Ζ ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ε. Τοῦτ ἐκφράζομεν λέγοντες, ὅτι : $σφ\,0^0 = \infty$

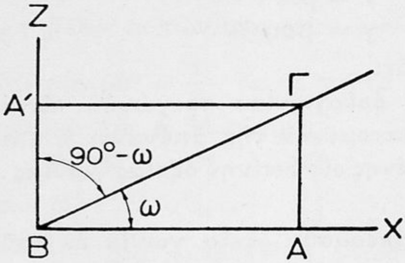
Ταῦτα συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

$$\left.\begin{array}{r} Β \\ σφ\,Β \end{array}\right\{ \begin{array}{lcr} 0^0 \;.\;.\;.\;.\;. & \nearrow & .\;.\;.\;.\;.\;. \;90^0 \\ \infty \;.\;.\;.\;.\;. & \searrow & .\;.\;.\;.\;.\;. \;0 \end{array}$$

**36. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων δύο συμπληρωματικῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς καὶ μεταξὺ ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων αὐτῶν.** α') Ἔστω μία ὀξεῖα γωνία ΧΒΓ, ἔχουσα μέτρον ω, καὶ ΓΒΖ ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς, ἥτις ἔχει μέτρον $90^0 - ω$ (σχ. 16). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτῶν φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΑ' καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΒΧ καὶ ΒΖ.

Βλέπομεν οὕτως ὅτι $ἡμ\,ω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$, $συν\,ω = \frac{ΒΑ}{ΒΓ}$,

$συν\,(90^0 - ω) = \frac{ΒΑ'}{ΒΓ}$, $ἡμ\,(90^0 - ω) = \frac{Α'Γ}{ΒΓ}$.




Σχ. 16

Ἐπειδὴ δὲ $ΑΓ = ΒΑ'$ καὶ $ΒΑ = Α'Γ$, ἕπεται ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{συν\,(90^0 - ω) = ἡμω} \\ \mathbf{ἡμ\,(90^0 - ω) = συνω} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, τὸ ἡμίτονον ἑκατέρας ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης.**

β′) Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σχ. 16 βλέπομεν ὅτι :

$$ἐφ\,ω = \frac{ΑΓ}{ΒΑ}, \qquad σφ\,ω = \frac{ΒΑ}{ΑΓ}$$

$$σφ\,(90^0 - ω) = \frac{ΒΑ'}{Α'Γ}, \quad ἐφ\,(90^0 - ω) = \frac{Α'Γ}{ΒΑ'}.$$

Ἐκ τούτων δὲ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ἐφ\,(90^0 - ω) = σφω} \\ \mathbf{σφ\,(90^0 - ω) = ἐφω} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ὥστε:

**Ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, ἡ ἐφαπτομένη ἑκατέρας ἰσοῦται πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ἄλλης.**

**37. Ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.** Ἐπειδὴ $Β + Γ = 90^0$, ἕπεται ὅτι:

$$ἡμ\,Β = συν\,Γ, \quad ἡμ\,Γ = συν\,Β, \quad ἐφ\,Β = σφ\,Γ, \quad ἐφ\,Γ = σφ\,Β.$$

Ἕνεκα τούτου αἱ γνωσταὶ (§ 19) σχέσεις :

$$β = αἡμ\,Β, \qquad γ = αἡμ\,Γ$$

γίνονται : $\mathbf{β = ασυν\,Γ, \qquad γ = ασυν\,Β}$ (6)

Ἐξ ὅλων τούτων βλέπομεν ὅτι :

**α′) Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον της ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας**

**γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.**

Ὁμοίως αἱ γνωσταὶ (§ 31) σχέσεις:

$$\beta = \gamma \text{ἐφ } B, \qquad \gamma = \beta \text{ἐφ } \Gamma$$

γίνονται:

$$\boldsymbol{\beta = \gamma \text{σφ } \Gamma, \qquad \gamma = \beta \text{σφ } B} \qquad (7)$$

Ἐξ ὅλων δὲ τούτων βλέπομεν ὅτι:

**β΄) Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.**

**38.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ἐκ τοῦ συνημιτόνου ἢ τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς.**

*Λύσις.* α΄) Ἂν π.χ. συν ω = 0,56, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἡμ Β = 0,56 (§ 12). Ἡ ὀξεῖα γωνία Γ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι ἐκ τῆς σχέσεως $B + \Gamma = 90^0$ ἕπεται ὅτι συν Γ = ἡμ Β = 0,56.

β΄) Ἂν σφ ω = 1,25, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν (§ 26) ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἐφ Β = 1,25. Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ἡ ἄλλη ὀξεῖα Γ εἶναι ἡ ζητουμένη.

### Ἀσκήσεις

108. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν συνχ $= \frac{2}{3}$.
109. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν συνω = 0,45.
110. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν συνψ = 0,34.
111. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν σφχ $= \frac{2}{5}$.
112. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν σφω = 0,6.

**39.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον καὶ ἡ συνεφαπτομένη γωνίας $45^0$, $30^0$, $60^0$.**

*Λύσις.* α΄) Ἂν $\omega = 45^0$, θὰ εἶναι καὶ $90^0 - \omega = 45^0$ (σχ. 16). Ἑπομένως ἑκατέρα τῶν γνωστῶν (4) (§ 36) ἰσοτήτων γίνεται:

$$\text{συν } 45^0 = \text{ἡμ } 45^0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡμ $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (§ 13), ἕπεται ὅτι καὶ **συν** $\boldsymbol{45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Ἐκ δὲ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων συν $30^0$ = ἡμ $60^0$, ἡμ $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ἕπεται ὅτι : $\qquad$ **συν** $\mathbf{30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Τέλος ἐκ τῶν ἰσοτήτων συν $60^0$ = ἡμ $30^0$, ἡμ $30^0 = \frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι **συν** $\mathbf{60^0 = \frac{1}{2}}$. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς § 34 οὕτω:

$$\begin{array}{r|l} B & 0^0 \ldots \nearrow \ldots 30^0 \ldots \nearrow \ldots 45^0 \ldots \nearrow \ldots 60^0 \ldots 90^0 \\ \text{συν}\, B & 1 \ldots \searrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots \searrow \ldots \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \searrow \ldots \frac{1}{2} \ldots 0 \end{array}$$

β΄) Διὰ ω = $45^0$ ἡ γνωστὴ (§ 36,5) ἰσότης ἐφ ($90^0$ – ω) = σφ ω γίνεται σφ $45^0$ = ἐφ $45^0$. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ $45^0$ = 1 (§ 27), ἕπεται ὅτι καὶ $\qquad$ **σφ** $\mathbf{45^0 = 1}$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἰσοτήτων σφ $30^0$ = ἐφ $60^0$ καὶ ἐφ $60^0 = \sqrt{3}$ (§ 27) εὑρίσκομεν ὅτι : $\qquad$ **σφ** $\mathbf{30^0 = \sqrt{3}}$

Τέλος ἐκ τῶν ἰσοτήτων σφ $60^0$ = ἐφ $30^0$ καὶ ἐφ $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (§ 27)

εὑρίσκομεν ὅτι : **σφ** $\mathbf{60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$. Κατὰ ταῦτα συμπληρώνομεν τὸν πίνακα τῆς § 35 οὕτω :

$$\begin{array}{r|l} B & 0^0 \ldots \nearrow \ldots 30^0 \ldots\ldots 45^0 \ldots \nearrow \ldots 60^0 \ldots \nearrow \ldots 90^0 \\ \text{σφ}\, B & \infty \ldots \searrow \ldots \sqrt{3} \ldots\ldots 1 \ldots \searrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \searrow \ldots 0. \end{array}$$

**40.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον δοθείσης ὀξείας γωνίας.**

*Λύσις (1ος τρόπος).* Ὁ πίναξ Ι τοῦ βιβλίου τούτου περιέχει καὶ τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα προχωροῦσιν ἀνὰ 10΄.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀκεραίων μοιρῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν α΄ στήλην τῆς β΄ σελίδος καὶ προχωροῦσιν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ $0^0$ μέχρι $45^0$. Συνεχίζονται δὲ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τῆς α΄ σελίδος ἀπὸ $45^0$ μέχρις $89^0$ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Τὸ συνημίτονον γωνίας μικροτέρας $45^0$, π.χ. $38^0$ 40΄, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τῶν $38^0$ μὲ τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὸν ἀριθμὸν 40΄.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι συν$(38^0\,40') = 0{,}78079$.

Τὸ δὲ συνημίτονον γωνίας μεγαλυτέρας $45^0$, π.χ. $51^0\,20'$, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τῶν $51^0$ καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία φέρει κάτω τὸν ἀριθμὸν $20'$. Εἶναι λοιπὸν

$$\text{συν}\,(51^0\,20') = 0{,}62479.$$

Τὸ συν$(38^0\,27'\,30'')$ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι:

$$38^0\,20' < 38^0\,27'\,30'' < 38^0\,30' \text{ καὶ ἑπομένως:}$$

$$\text{συν}(38^0\,20') > \text{συν}\,(38^0\,27'\,30'') > \text{συν}\,(38^0\,30') \text{ ἢ}$$

$$0{,}78442 > \text{συν}\,(38^0\,27'\,30'') > 0{,}78261$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $10'$ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ συνημιτόνου κατὰ

$$0{,}78442 - 0{,}78261 = 0{,}00181.$$

Κατ' ἀκολουθίαν πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $7'\,30''$ ἢ $\frac{15'}{2}$ Ἐκ τῆς διατάξεως δέ:

$10'$ $0{,}00181$

$\frac{15'}{2}$ $\psi$ εὑρίσκομεν $\psi = 0{,}00181 \cdot \frac{15}{20} = 0{,}00181 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}00136.$

Ἄρα συν$(38^0\,27'\,30'') = 0{,}78442 - 0{,}00136 = 0{,}78306.$

*(2ος τρόπος)*. Ἂν θέσωμεν π.χ. $\chi =$ συν$(38^0\,27'\,30'')$, θὰ εἶναι

$$\text{λογ}\,\chi = \text{λογσυν}(38^0\,27'\,30'').$$

Ἂν δὲ εὕρωμεν τὸν λογσυν$(38^0\,27'\,30'')$, ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸν $\chi$.

Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες, εἰς τοὺς ὁποίους περιέχονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων, περιέχουσι καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν. Εὑρίσκονται δὲ οἱ λογάριθμοι οὗτοι εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι τὴν συγκεκομμένην λέξιν **συν** δηλ. συνημίτονον, ἄνω μὲν διὰ τὰς μικροτέρας τῶν $45^0$ γωνίας, κάτω δὲ διὰ τὰς ἄλλας.

Τὰ πρῶτα λεπτὰ εὑρίσκονται εἰς τὰς αὐτὰς στήλας, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν λογσυν$(38^0\,27'\,30'')$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι :

$$38^0\,27' < 38^0\,27'\,30'' < 38^0\,28', \text{ ὅθεν}$$

$$\text{συν}(38^0\,27') > \text{συν}(38^0\,27'\,30'') > \text{συν}(38^0\,28'), \text{ καὶ}$$

$$\text{λογσυν}(38^0\,27') > \text{λογσυν}(38^0\,27'\,30'') > \text{λογσυν}(38^0\,28') \text{ ἢ}$$

$$\overline{1},89385 > \text{λογσυν}(38^0\,27'\,30'') > \overline{1},89375.$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 60'' ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου κατὰ 10 μον. τελ. δεκ. τάξ. Εἰς δὲ αὔξησιν τοῦ μέτρου κατὰ 30'' θὰ ἀντιστοιχῇ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 5 μον. τελ. δεκ. ταξ. Εἶναι λοιπὸν $\text{λογ}\,\chi = \text{λογσυν}(38^0\,27'\,30'') = \overline{1},89380$ καὶ ἑπομένως:

$$\chi = \text{συν}(38^0\,27'\,30'') = 0,78306.$$

*(3ος τρόπος).* Εὐκολώτερον λύομεν τὸ ζήτημα τοῦτο μὲ μόνον τοὺς γνωστοὺς μέχρι τοῦδε πίνακας τῶν ἡμιτόνων, ἂν εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης γωνίας. Οὕτω $\text{συν}(38^0\,40') = \text{ἡμ}(51^0\,20') = 0,78079$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $\text{συν}(38^0\,27'\,30'')$ παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ $\text{ἡμ}(51^0\,32'\,30'') = 0,78306$.

### Ἀσκήσεις

113. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{συν}(23^0\,17')$ καὶ τὸ $\text{συν}(49^0\,23')$.
114. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{συν}(35^0\,15'\,45'')$ καὶ τὸ $\text{συν}(62^0\,12'\,54'')$.
115. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{συν}\,43^{\gamma},6$ καὶ τὸ $\text{συν}\,\frac{3\pi}{8}$.

**41.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς.**

*Λύσις.* Ἔστω ὅτι $\text{συν}\,\chi = 0\ 82650$ καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.

*1ος τρόπος ἐκ τοῦ πίνακος I.* Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $0,82650 > 0,70711 = \text{συν}\,45^0$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\chi < 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,82650 εἰς τὴν β' σελίδα τοῦ πίνακος καὶ βλέπομεν ὅτι:

$$0,82741 > 0,82650 > 0,82577 \text{ ἢ}$$

$$\text{συν}(34^0\,10') > \text{συν}\,\chi > \text{συν}(34^0\,20') \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$34^0\,10' < \chi < 34^0\,20'.$$

Οὕτως εἰς ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,82741 − 0,82577 = 0,00164 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 10′. Θὰ ἀναζητήσωμεν ἤδη πόση αὔξησις τοῦ μέτρου ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,82741 − 0,82650 = 0,00091. Ἐκ τῆς διατάξεως:

$$\begin{array}{cc} 0{,}00164 & 10' \\ 0{,}00091 & \psi \\ \hline \end{array}$$

εὑρίσκομεν $\psi = 10' \cdot \frac{91}{164} = \frac{910}{164} = 5'\,33''$.

Ἑπομένως : $\chi = 34^0\,15'\,33''$.

*2ος τρόπος ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ συν χ.* Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι συνχ = 0,82650, ἕπεται ὅτι λογσυνχ = $\bar{1}{,}91724$.

Ἀναζητοῦντες τοῦτον εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων βλέπομεν ὅτι :

$$\begin{array}{lllll} \bar{1}{,}91729 & \rangle\ \bar{1}{,}91724 & \rangle & \bar{1}{,}91720 & ἢ \\ συν(34^0\,15') & \rangle\ συν\,\chi & \rangle & συν\,(34^0\,16'), & ὅθεν \\ 34^0\,15' & \langle\quad \chi & \langle & 34^0\,16' & \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἐλάττωσιν τοῦ λογ. κατὰ 9 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ 60″, καταρτίζομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

$$\begin{array}{cc} 9 & 60'' \\ 5 & \psi \\ \hline \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 60'' \cdot \frac{5}{9} = 33''$

Εἶναι λοιπόν : $\chi = 34^0\,15'\,33''$

*3ος τρόπος ἐκ τοῦ μέτρου τῆς συμληρωματικῆς γωνίας.* Ἐπειδὴ συν χ = ἡμ (90⁰ − χ), ἕπεται ὅτι :

$$ἡμ\,(90^0 - \chi) = 0{,}82650$$

Καθ' ἕνα δὲ τῶν γνωστῶν (§ 18) τρόπων εὑρίσκομεν ὅτι $90^0 - \chi = 55^0\,44'\,27''$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι :

$$\chi = (89^0\,59'\,60'') - (55^0\,44'\,27'') = 34^0\,15'\,33''.$$

## Ἀσκήσεις

116. Ἂν συνχ = 0,795, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.
117. Ἂν συνω = 0,4675, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ω.

118. Ἂν συνψ $= \frac{5}{7}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ψ.

119. Ἂν ἡμχ $= 0{,}41469$ καὶ συνψ $= 0{,}41469$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα χ + ψ

120. Ἂν ἡμχ $= 0{,}92276$ καὶ συνψ $= 0{,}67321$, νὰ ἀποδειχθῇ ἄνευ πινάκων ὅτι χ + ψ $>$ 90°.

**42.** *Πρόβλημα V.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ μέτρου αὐτῆς.**

Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν σφ( 38° 45′ 28″ ).

*Λύσις. 1ος τρόπος ἐκ τοῦ πίνακος III.* Ὁ πίναξ οὗτος περιέχει καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν μὲ διάταξιν καὶ χρῆσιν ὁμοίαν πρὸς τὴν τοῦ πίνακος I διὰ τὰ συνημίτονα.

Οὕτως, ἐπειδὴ 38° 40′ $<$ 38° 45′ 28″ $<$ 38° 50′

ἕπεται ὅτι : σφ( 38° 40′ ) $>$ σφ( 38° 45′ 28″ ) $>$ σφ( 38° 50′ )

ἢ 1,24969 $>$ σφ( 38° 45′ 28″ ) $>$ 1,24227.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 10′ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς κατὰ $1{,}24969 - 1{,}24227 = 0{,}00742$. Καταρτίζομεν λοιπὸν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

$$\begin{array}{cc} 10' & 0{,}00742 \\ 5\,\frac{28'}{60} & \psi \\ \hline \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 0{,}00742 \cdot \frac{328}{600} = 0{,}00405$

Ἑπομένως σφ( 38° 45′ 28″ ) $= 1{,}24969 - 0{,}00405 = 1{,}24564$.

*2ος τρόπος ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς συνεφαπτομένης.* Ἂν θέσωμεν χ = σφ ( 38° 45′ 28″ ), θὰ εἶναι λογχ = λογσφ ( 38° 45′ 28″ ).

Τοῦτον δὲ τὸν λογάριθμον εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς πίνακας, τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν ἕως τώρα διὰ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνημιτόνων. Ἐργαζόμεθα δὲ ἀκριβῶς ὅπως καὶ διὰ τὰ συνημίτονα, ἀλλὰ μὲ τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄνω ἢ κάτω τὴν συγκεκριμένην λέξιν Σφ, δηλαδὴ ( συνεφαπτόμεναι ).

Οὕτως εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἀνισότητας :

38° 45′ $<$ 38° 45′ 28″ $<$ 38° 46′.

σφ( 38° 45′ ) $>$ σφ( 38° 45′ 28″ ) $>$ σφ( 38° 46′ )

λογσφ ( 38° 45′ ) $>$ λογσφ( 38° 45′ 28″ ) $>$ λογσφ ( 38° 46′ )

ἢ $\qquad 0,09551 > \text{λογσφ}\ (38^0\,45'\,28'') > 0,09525$

Ἐκ δὲ τοῦ πινακιδίου 26 = (0,09551 – 0,09525) εὑρίσκομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 28″ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 8,7 + 3,47 = 12,17 ἢ 12 κατὰ προσέγγισιν. Εἶναι λοιπὸν λογ $\chi = 0,09551 - 0,00012 = 0,09539$. Ἑπομένως:

$$\chi = \text{σφ}(38^0\,45'\,28'') = 1,24563.$$

*3ος τρόπος ἐκ τῆς ἐφαπτομένης τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας.* Οὕτως, ἐπειδὴ $\text{σφ}(38^0\,45'\,28'') = \text{ἐφ}\ (51^0\,14'\,32'')$ θὰ εἶναι $\text{λογσφ}(38^0\,45'\,28'') = \text{λογἐφ}\ (51^0\,14'\,32'')$ κ.τ.λ.

**Ἀσκήσεις**

121. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\text{σφ}(15^0\,35')$ καὶ ἡ $\text{σφ}(62^0\,46')$.

122. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\text{σφ}(27^0 32'\,50'')$ καὶ ἡ $\text{σφ}(70^0\,12'\,24'')$.

123. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\text{σφ}30^{\gamma},5$ καὶ ἡ $\text{σφ}\,\frac{2\pi}{5}$

**43.** *Πρόβλημα VI.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς.** Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος III τοῦ βιβλίου τούτου ἢ τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων. Ἐργαζόμεθα δὲ ἀκριβῶς ὅπως καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος IV (§ 41) μεταχειριζόμενοι τὰς στήλας τῶν συνεφαπτομένων ἀντὶ τῶν συνημιτόνων.

Οὕτως, ἂν $\text{σφ}\,\chi = 1,47860$, θὰ εἶναι $\text{λογσφ}\,\chi = 0,16985$ καὶ $\chi = 34^0\,4'\,15''$. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν ἐφαπτομένων. Διότι $\text{ἐφ}(90^0 - \chi) = \text{σφ}\,\chi = 1,47860$ καὶ $\text{λογἐφ}(90^0 - \chi) = 0,16985$. $90^0 - \chi = 55^0\,55'\,45''$. Ἑπομένως $\chi = 34^0\,4'\,15''$:

**Ἀσκήσεις**

124. Ἂν $\text{σφ}\chi = 2,340$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.

125. Ἂν $\text{σφ}\omega = 0,892$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ω.

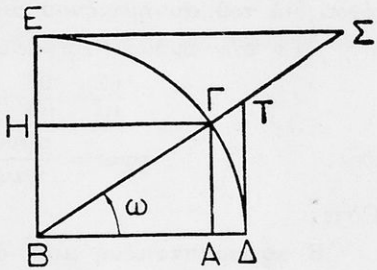
126. Ἂν $\text{σφ}\psi = \frac{15}{9}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ψ.

127. Ἂν $\text{σφ}\chi = 1,34$ καὶ $\text{ἐφ}\psi = 0,658$, νὰ ἀποδειχθῇ ἄνευ πινάκων ὅτι $\chi + \psi < 90^0$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

### 1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

**44. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας.** Τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας λέγονται **τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** τῆς γωνίας ταύτης.



Σχ. 17

**45. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας.**
α΄) Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ω τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας Β αὐτοῦ (σχ. 17). Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι :

$$(\text{ΑΓ})^2 + (\text{ΒΑ})^2 = (\text{ΒΓ})^2.$$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ (ΒΓ) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left(\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}\right)^2 = 1$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \text{ἡμ}\,\omega$ καὶ $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}} = \text{συν}\omega$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται : $(\text{ἡμ}\,\omega)^2 + (\text{συν}\omega)^2 = 1.$

Ταύτην γράφομεν συνήθως οὕτω :

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1 \qquad \textbf{(8)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς αὐτῆς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.**

β΄) Ἂς λάβωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὡς μονάδα μήκους καὶ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ ἂς γράψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΕ. Ἐμάθομεν ὅτι :

ἡμω = (ΑΓ), συνω = (ΒΑ), ἐφω = (ΔΤ) καὶ σφω = (ΕΣ). Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΤ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{(\Delta T)}{(A\Gamma)} = \frac{(B\Delta)}{(BA)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ἐφω}}{\text{ἡμω}} = \frac{1}{\text{συνω}}$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφω} = \frac{\text{ἡμω}}{\text{συνω}} \qquad \mathbf{(9)}$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι :

**Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς.**

γ΄) Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΕΣ καὶ ΒΗΓ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{E\Sigma}{H\Gamma} = \frac{BE}{BH} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{σφω}}{\text{συνω}} = \frac{1}{\text{ἡμω}}$$

ὅθεν :

$$\text{σφω} = \frac{\text{συνω}}{\text{ἡμω}} \qquad \mathbf{(10)}$$

Ὥστε :

**Ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς.**

Πλὴν τῶν σχέσεων (8), (9), (10), οὐδεμία ἄλλη σχέσις μὴ ἀπορρέουσα ἀπὸ αὐτὰς ὑπάρχει μεταξὺ τῶν 4 τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας. Διότι, ἂν ὑπῆρχε μία ἀκόμη, αὕτη μὲ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς θὰ ἀπετέλουν σύστημα 4 ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους τοὺς 4 τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ω. Λύοντες δὲ τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ὡρισμένην ἢ ὡρισμένας τιμὰς ἑκάστου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς γωνίας ω. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐμάθομεν ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας ω μεταβάλλονται, ἂν ἡ ω μεταβληθῇ.

Ἀπορρέουσιν ὅμως ἀπὸ αὐτὰς διάφοροι ἄλλαι σχέσεις. Ἂν π.χ. πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (9) καὶ (10), εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα:

$$\text{ἐφω} \cdot \text{σφω} = 1 \qquad \mathbf{(11)}$$

Αἱ ἰσότητες (8) – (11) ἀληθεύουσι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν. Βραδύτερον θὰ μάθωμεν ὅτι αὗται ἀληθεύουσι διὰ πᾶν εἶδος γωνίας. Διὰ τοῦτο αὗται λέγονται **τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες.** Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ γνωρίσωμεν καὶ ἄλλας τριγωνομετρικὰς ταυτότητας.

## Ἀσκήσεις

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

128. $ἡμ^2 ω = 1 - συν^2 ω$ καὶ $συν^2 ω = 1 - ἡμ^2 ω$.

129. $1 + ἐφ^2 ω = \dfrac{1}{συν^2 ω}$.

130. $1 + σφ^2 ω = \dfrac{1}{ἡμ^2 ω}$.

131. $σφ^2 ω - συν^2 ω = σφ^2 ω \,.\, συν^2 ω$.

132. $ἐφω + σφω = \dfrac{1}{ἡμω \cdot συνω}$.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ δύο τυχούσας ὀξείας γωνίας α καὶ β ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

133. $ἐφα \,.\, ἐφβ(σφα + σφβ) = ἐφα + ἐφβ$.

134. $σφα + σφβ = \dfrac{ἐφα + ἐφβ}{ἐφα \cdot ἐφβ}$

135. $\dfrac{σφα + σφβ}{ἐφα + ἐφβ} = \dfrac{1}{ἐφα \cdot ἐφβ}$.

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**46.** *Πρόβλημα 1.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν εἶναι γνωστὸν τὸ ἡμω.**

*Λύσις. α΄) Εὕρεσις τοῦ συνω.* Ἐκ τῆς ἰσότητος (8) (§ 45) εὑρίσκομεν ὅτι $συν^2 ω = 1 - ἡμ^2 ω$ καὶ ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{συνω = \sqrt{1 - ημ^2 ω}} \qquad \textbf{(12)}$$

Ἂν π.χ. εἶναι $ἡμω = \dfrac{4}{5}$, ἐκ τῆς (12) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$συνω = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

*β΄) Εὕρεσις τῆς ἐφω.* Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (9) (§ 45) καὶ (12) εὑρίσκομεν ὅτι : $\mathbf{ἐφω = \dfrac{ἡμω}{\sqrt{1 - ἡμ^2 ω}}}$ **(13)**

Οὕτω διὰ $ἡμω = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ἡ (13) γίνεται :

$$ἐφω = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = \sqrt{3}.$$

*γ') Εὕρεσις τῆς σφω.* Ἐκ τῶν ἰσοτήτων ( 10 ) ( § 45 ) καὶ ( 12 ) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\textbf{σφω} = \frac{\sqrt{1 - ημ^2ω}}{ημω} \qquad \textbf{(14)}$$

Οὕτω διὰ ἡμω $= \frac{1}{2}$ ἡ ( 14 ) γίνεται σφω$= \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Σημ. Αἱ τετρ. ρίζαι τῶν προηγουμένων τύπων ἐλήφθησαν θετικαί, διότι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστης ὀξείας γωνίας εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

47. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζομεν τὸ συνω.**

*Λύσις.* Ἂν ἐργασθῶμεν ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους :

$$\left.\begin{aligned} ημω &= \sqrt{1 - συν^2ω} \\ εφω &= \frac{\sqrt{1 - συν^2ω}}{συνω} \\ σφω &= \frac{συνω}{\sqrt{1 - συν^2ω}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15)}$$

Οὕτως, ἂν συνω $= \frac{3}{5}$, εὑρίσκομεν :

$$ημω = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5},\ εφω = \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4},\ σφω = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}.$$

48. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἐφω.**

*Λύσις α') Εὕρεσις τοῦ ἡμω καὶ τοῦ συνω.* Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο οὗτοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μόνοι ἄγνωστοι εἰς τὰς ἰσότητας :

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1, \qquad εφω = \frac{ημω}{συνω}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς β' εὑρίσκομεν ἡμω = συνω · ἐφω ( 1 )

Ἕνεκα δὲ ταύτης ἡ α' γίνεται :

$$συν^2ω \cdot ἐφ^2ω + συν^2ω = 1 \quad ἤ \quad (1 + ἐφ^2ω) \cdot συν^2ω = 1.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν κατὰ σειράν : καὶ

$$\mathbf{συν^2ω = \frac{1}{1 + ἐφ^2ω}} \qquad (16)$$

καὶ

$$\mathbf{συνω = \frac{1}{\sqrt{1 + ἐφ^2ω}}}, \qquad (17)$$

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνωτέρω (1) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{ἡμω = \frac{ἐφ\,ω}{\sqrt{1 + ἐφ^2ω}}} \qquad (18)$$

Οὕτως, ἂν $ἐφω = \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$συνω = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \quad καὶ \quad ἡμω = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (18) προκύπτει εὐκόλως καὶ ἡ ἰσότης:

$$\mathbf{ἡμ^2ω = \frac{ἐφ^2ω}{1 + ἐφ^2ω}} \qquad (19)$$

τῆς ὁποίας πολλάκις κάμνομεν χρῆσιν.

*β') Εὕρεσις τῆς σφω.* Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι :

$$σφω = \frac{1}{ἐφω}.$$

Οὕτως, ἂν $ἐφω = \sqrt{3}$, θὰ εἶναι $σφω = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

49. *Πρόβλημα. IV.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν σφω.**

*Λύσις. α') Εὕρεσις τοῦ συνω καὶ τοῦ ἡμω.* Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς προηγουμένως λύοντες τὸ σύστημα :

$$ἡμ^2ω + συν^2ω = 1, \quad σφω = \frac{συνω}{ἡμω}.$$

Ἀφήνομεν διὰ τοὺς μαθητὰς τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς ἐργασιας ταύτης καὶ ὑποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς ἀκόμη μέθοδον.

Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν ὅτι $ἐφω = \dfrac{1}{σφω}$. Ἕνεκα ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι ἡ (16) γίνεται : $συν^2ω = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{σφ^2ω}} = \dfrac{σφ^2ω}{1 + σφ^2ω}$,

ὅθεν

$$\mathbf{συνω = \frac{σφω}{\sqrt{1 + σφ^2ω}}} \qquad (20)$$

῾Ομοίως ἡ (19) γίνεται : $ἡμ^2ω = \dfrac{\dfrac{1}{σφ^2ω}}{1+\dfrac{1}{σφ^2ω}} = \dfrac{1}{1+σφ^2ω}$

καὶ ἑπομένως : $$\boldsymbol{ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+σφ^2ω}}}, \qquad \textbf{(21)}$$

Οὕτως, ἂν $σφω = \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad συνω = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

*β') Εὕρεσις τῆς ἐφω.* Ταύτην εὑρίσκομεν ἀμέσως ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $ἐφω = \dfrac{1}{σφω}$. Οὕτως, ἂν $σφω = \sqrt{3}$, θὰ εἶναι $ἐφω = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

### ᾿Ασκήσεις

136. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἡμω = \dfrac{2}{5}$.

137. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἡμω = \dfrac{1}{2}$.

138. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $συνω = 0,5$.

139. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $συνω = \dfrac{2}{3}$

140. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἐφω = 1$.

141. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $ἐφω = \sqrt{3}$.

142. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $σφω = 1$.

143. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $σφω = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

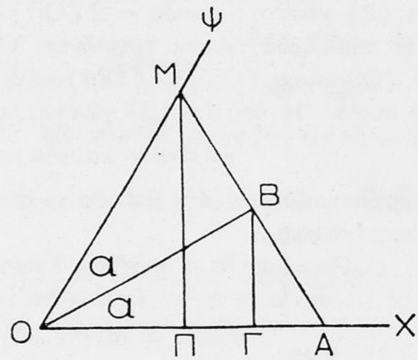
144. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω ἀληθεύει ἡ ἰσότης :

$$συν^2ω - ἡμ^2ω = \frac{1-ἐφ^2ω}{1+ἐφ^2ω}.$$

145. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ δύο τυχούσας ὀξείας γωνίας α καὶ β ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\dfrac{συν^2α - ἡμ^2β}{ἡμ^2α \cdot ἡμ^2β} = \dfrac{1-ἐφ^2α \cdot ἐφ^2β}{ἐφ^2α \cdot ἐφ^2β}$.

**50.** *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμα καὶ τὸ συνα, ὅταν 2α $<$ 90$^0$.**

*Λύσις.* Ἔστω ΧΟΨ τυχοῦσα ὀξεῖα γωνία, 2α τὸ μέτρον καὶ ΟΒ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τμήματα ΟΑ, ΟΜ ἴσα πρὸς τὴν μονάδα μήκους καὶ φέρομεν τὴν ΑΜ (σχ. 18). Αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου εἰς τὸ μέσον Β καὶ καθέτως.



Σχ. 18

Εἶναι δηλαδὴ (ΑΒ) = (ΒΜ) καὶ $(\widehat{ABO}) = (\widehat{OBM}) = 90^0$. Ἂν δὲ φέρωμεν καὶ τὰς ΜΠ, ΒΓ καθέτους ἐπὶ τὴν ΟΑ, θὰ εἶναι :

$$(\text{ΠΜ}) = 2\,(\text{ΓΒ}) \qquad (1)$$

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ προκύπτει ὅτι :

$$(\text{ΠΜ}) = (\text{ΟΜ})\ \text{ἡμ}2\alpha = \text{ἡμ}2\alpha \qquad (2)$$

Ἀπὸ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΜΒ εὑρίσκομεν ὅτι (ΓΒ) = (ΟΒ)ἡμα, (ΟΒ) = (ΟΜ)συνα = συνα καὶ ἑπομένως

$$(\text{ΓΒ}) = \text{ἡμ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha.$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ ἰσότης :

$$\textbf{ἡμ2α} = \textbf{2ἡμασυνα} \qquad (22)$$

Ἂν δὲ θέσωμεν 2α = ω, θὰ εἶναι $\alpha = \frac{\omega}{2}$ καὶ ἡ ἰσότης (22) γίνεται :

$$\text{ἡμ}\omega = 2\text{ἡμ}\frac{\omega}{2}\,\text{συν}\frac{\omega}{2} \qquad (23)$$

**51.** *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ἂν εἶναι γνωστὸν**

**τὸ ἡμα καὶ τὸ συνα ἢ ὁ εἷς μόνον ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς τούτους ἀριθμούς, ὅταν $2α < 90^0$.**

*Λύσις*. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ βλέπομεν ὅτι :

$$(ΟΠ) = (ΟΜ)συν2α = συν2α. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι $(ΟΠ) = (ΟΓ) - (ΠΓ)$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ $(ΠΓ) = (ΓΑ) = (ΟΑ) - (ΟΓ) = 1 - (ΟΓ)$,

ἡ σχέσις (2) γίνεται : $συν2α = 2(ΟΓ) - 1$ (3)

Ἐκ δὲ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΒΓ, ΟΒΜ, βλέπομεν ὅτι $(ΟΓ) = (ΟΒ)συνα$, $(ΟΒ) = (ΟΜ)συνα = συνα$ καὶ ἑπομένως : $(ΟΓ) = συν^2α$. Ἡ ἰσότης (3) γίνεται λοιπόν :

$$\mathbf{συν2α = 2συν^2α - 1} \qquad \mathbf{(24)}$$

Ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι $2συν^2α = συν^2α + συν^2α$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$συν2α = συν^2α + συν^2α - 1 = συν^2α - (1 - συν^2α)$$

Ἐπειδὴ δὲ $1 - συν^2α = ἡμ^2α$, ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{συν2α = συν^2α - ἡμ^2α} \qquad \mathbf{(25)}$$

Ἐπειδὴ δὲ $συν^2α = 1 - ἡμ^2α$, ἡ ἰσότης (25) γίνεται :

$$\mathbf{συν2α = 1 - 2ημ^2α} \qquad \mathbf{(26)}$$

Ἂν $2α = ω$, αἱ ἰσότητες (24), (25), (26), γίνονται κατὰ σειρὰν

$$\left.\begin{aligned} συνω &= 2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1 \\ συνω &= συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ συνω &= 1 - 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Διὰ τούτων ὁρίζομεν τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς ἢ μόνον τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς τούτους ἀριθμούς.

**52.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἐφα, ὅταν $2α < 90^0$.**

*Λύσις*. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας : $ἡμ2α = 2ἡμασυνα$ καὶ

$συν2α = συν^2α - ἡμ^2α$ διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ2α = \frac{2ἡμασυνα}{συν^2α - ἡμ^2α}.$$

Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους διαιρέσωμεν διὰ $συν^2α$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ἐφ2α} &= \frac{2εφα}{1 - ἐφ^2α} \\ \mathbf{ἐφω} &= \frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 - ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Αὕτη διὰ $2α = ω$ γίνεται: (τὸν δεύτερον τύπον ἄνωθεν).

**53.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ2α, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ σφα, ὅταν $2α < 90^0$.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας $συν2α = συν^2α - ἡμ^2α$

$ἡμ2α = 2ἡμασυνα$

εὑρίσκομεν ὅτι: $\dfrac{συν2α}{ἡμ2α} = \dfrac{συν^2α - ἡμ^2α}{2ἡμασυνα}$. Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους διαιρέσωμεν διὰ $ἡμ^2α$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{σφ2α} &= \frac{σφ^2α - 1}{2σφ^2α} \\ \mathbf{σφω} &= \frac{σφ^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1}{2σφ\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Αὕτη διὰ $2α = ω$ γίνεται: (τὸν δεύτερον τύπον ἄνωθεν).

### Ἀσκήσεις

146. Ἂν $ἡμ\dfrac{ω}{2} = \dfrac{1}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω.

147. Ἂν $συν\dfrac{ω}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ συνω καὶ τὸ ἡμω.

148. Ἂν $ἐφ\dfrac{ω}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφω καὶ ἡ σφω.

149. Ἂν $σφ\dfrac{ω}{2} = \sqrt{3}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφω καὶ ἡ σφω.

**54. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.** Ἡ ἰσότης $ἡμω = \dfrac{1}{2}$ δὲν ἀληθεύει διὰ πᾶσαν γωνίαν ω.

Αὕτη λέγεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.** Ἐμάθομεν δὲ ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $ω = 30^0$, ἐφ ὅσον θεωροῦμεν, ὡς μέχρι τοῦδε, ὀξείας γωνίας. Καὶ ἡ ἰσότης $3\text{ἐφ}\chi - 5 = \frac{\text{ἐφ}\chi}{2}$ (1) εἶναι τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.

Ἂν δὲ πρὸς στιγμὴν θέσωμεν $\text{ἐφ}\chi = \psi$, αὕτη γίνεται $3\psi - 5 = \frac{\psi}{2}$ (2), ἤτοι ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ ἄγνωστον ψ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ἡ (1) ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς ἄγνωστον τὴν ἐφχ. Ἂν δὲ λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν ἐφχ, ὅπως λύομεν τὴν (2) πρὸς ψ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\text{ἐφ}\chi = 2$. Ταύτην δὲ ἐμάθομεν (§ 30) νὰ λύωμεν, ἐφ' ὅσον περιοριζόμεθα εἰς ὀξείας γωνίας χ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύομεν πᾶσαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν ἀλγεβρικῆς μορφῆς μὲ ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀγνώστου γωνίας. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὅμως θὰ ἀρκούμεθα εἰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου γωνίας ἀπὸ $0^0$ μέχρις $90^0$.

### Ἀσκήσεις

150. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις $5\text{ἡμ}\chi = 3$.

151. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ω, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις $2\text{ἡμ}\omega + 1 = 2$.

152. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $9\text{συν}\chi + 2 = 17\text{συν}\chi - 2$, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι καὶ $\chi < 90^0$.

153. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6\text{ἐφ}\chi - \frac{1}{2} = \frac{12\text{ἐφ}\chi}{5} + 1$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον.

154. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\text{ἐφ}\chi + \frac{\text{ἐφ}\chi}{5} - 5 = \frac{\text{ἐφ}\chi}{4} - \frac{1}{8}$, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι $\chi < 90^0$.

Ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον $\chi < 90^0$ νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

155. $4\text{συν}^2\chi - 4\text{συν}\chi + 1 = 0$.

156. $15\text{συν}^2\chi - 22\text{συν}\chi + 8 = 0$.

157. $\frac{5\text{σφ}\chi}{2} - \frac{\text{σφ}\chi}{4} = \frac{9}{2}$.

158. $4\text{σφ}^2\chi - 20\text{σφ}\chi + 25 = 0$.

## ΠΙΝΑΞ ΤΥΠΩΝ Α' ΒΙΒΛΙΟΥ

**Σχέσεις μέτρων τόξου ἢ γωνίας :**

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$$

**Σχέσεις πλευρῶν καὶ γωνιῶν ὀρθ. τριγώνου :**

$$\beta = \alpha \acute{\eta}\mu B = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma \qquad \beta = \gamma \grave{\varepsilon}\varphi B = \gamma\sigma\varphi\Gamma$$
$$\gamma = \alpha \acute{\eta}\mu\Gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B \qquad \gamma = \beta\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma = \beta\sigma\varphi B$$

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου: $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$, $E = \frac{1}{2}\beta^2 \grave{\varepsilon}\varphi\Gamma$.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συμπληρωματικῶν γωνιῶν: $\acute{\eta}\mu(90^0 - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(90^0 - \omega) = \acute{\eta}\mu\omega$, $\grave{\varepsilon}\varphi(90^0 - \omega) = \sigma\varphi\omega$, $\sigma\varphi(90^0 - \omega) = \grave{\varepsilon}\varphi\omega$.

**Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας $0^0$, $30^0$, $45^0$, $60^0$, $90^0$,**

| γωνία τ | ἡμτ | συντ | ἐφτ | σφτ |
|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0 | 1 | 0 | $\infty$ |
| $30^0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $45^0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| $60^0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^0$ | 1 | 0 | $\infty$ | 0 |

Σχέσεις τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας,

$$\acute{\eta}\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \quad \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \frac{\acute{\eta}\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\acute{\eta}\mu\omega},$$

$$\grave{\varepsilon}\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \acute{\eta}\mu^2\omega}, \quad \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \frac{\acute{\eta}\mu\omega}{\sqrt{1 - \acute{\eta}\mu^2\omega}},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{1 - \acute{\eta}\mu^2\omega}}{\acute{\eta}\mu\omega}, \quad \acute{\eta}\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}, \quad \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}}, \quad \acute{\eta}\mu^2\omega = \frac{\grave{\varepsilon}\varphi^2\omega}{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\omega},$$

$$\acute{\eta}\mu\omega = \frac{\grave{\varepsilon}\varphi\omega}{\sqrt{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\omega}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \grave{\varepsilon}\varphi^2\omega}}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega},$$

$$\acute{\eta}\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2\omega}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sigma\varphi\omega}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2\omega}}, \quad \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega},$$

$$ἡμ.2α = ἡμασυνα, \qquad ἡμω = 2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right) συν\left(\frac{ω}{2}\right),$$

$$συν2α = συν^2α - ἡμ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ἡμ^2α$$

$$συνω = συν^2\frac{ω}{2} - ἡμ^2\frac{ω}{2} = 2συν^2\frac{ω}{2} - 1 = 1 - 2ἡμ^2\frac{ω}{2}$$

$$ἐφ2α = \frac{2ἐφα}{1-ἐφ^2α}, \qquad ἐφω = \frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)},$$

$$σφ2α = \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}, \qquad σφω = \frac{σφ^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1}{2σφ\left(\frac{ω}{2}\right)},$$

### Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α' βιβλίου

159. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας τὸ μέτρον γωνίας ἑνὸς βαθμοῦ.

160. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας τὸ μέτρον τοῦ ἀκτινίου τόξου.

161. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς μοίρας εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸ πρῶτον λεπτὸν τοῦ βαθμοῦ.

162. Ἡ μία ὀξεῖα γωνία ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $25^0 20'$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς τὸ μέτρον τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

163. Ἡ μία ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τούτων.

164. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $α=3β$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας Β αὐτοῦ.

165. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B = \frac{2π}{5}$· Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

166. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $B = 57^γ,5$.

167. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $4ἡμχ - 1 = ἡμχ + \frac{1}{2}$·

168. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν $ἐφ^2ω - 4ἐφω + 4 = 0$.

169. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν $7συν^2φ - 12συνφ + 5 = 0$.

170. Ἂν $συν(90^0 - χ) = 0{,}456$, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ.

171. Ἂν $σφ(90^0 - χ) = 2{,}50$, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ.

172. Ἂν $συν(90^0 - χ) = \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας χ.

173. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω εἶναι:

$$\frac{1}{ἡμ^2ω} + \frac{1}{συν^2ω} = \frac{1}{ἡμ^2ω \cdot συν^2ω}.$$

174. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\text{ἡμ}B + \text{συν}\Gamma}{\text{συν}B + \text{ἡμ}\Gamma} = \text{ἑφ}B$$

175. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{1}{\text{ἡμ}B} + \text{σφ}B = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

176. Ἂν $\omega + \varphi = 90^\circ$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἡμ}^2\omega + \text{ἡμ}^2\varphi$.

177. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{ἡμ}B + \text{συν}\Gamma = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

178. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{ἡμ}^2B - \text{ἡμ}^2\Gamma = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}.$$

179. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου ἔχῃ μῆκος 8 μέτρα.

180. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 0,80 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.

181. Ἓν σῶμα βάρους 25 χιλιογράμμων κυλίεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $24^\circ40'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία κινεῖ αὐτὸ καὶ ἡ πίεσις, τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα τοῦτο ἐπιφέρει ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

182. Ἓν σῶμα 20 χιλιογράμμων διήνυσεν 0,85 μέτ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $20^\circ30'40''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς βαρύτητος κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην.

183. Μία χορδὴ τόξου $56^\circ35'18''$ ἔχει μῆκος 0,68 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς.

184. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς κλίσεως αὐτοῦ.

185. Ἡ Μηχανικὴ διδάσκει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις, μὲ τὴν ὁποίαν κυλίεται ἓν σῶμα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως ω, εἶναι $981 \cdot \text{ἡμ}\omega$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἑκατοστόμετρα ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτή, ἂν τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως αὐτοῦ.

186. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν $\alpha = 1{,}35$ μέτ. καὶ $B = \frac{3\pi}{20}$ ἀκτίνια.

187. Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν $\alpha = 6{,}80$ μέτ. καὶ $\beta = 3{,}40$ μέτ.

188. Ἐκ τῆς Μηχανικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἐλευθέρας τροχαλίας εἶναι $A = 2\Delta \cdot \text{συν}\,\frac{\omega}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις δυνάμεως Δ, μὲ τὴν ὁποίαν ἰσορροποῦμεν ἀντίστασιν $A = 30 \cdot \sqrt{2}$ χιλιογράμμων διὰ μέσου ἐλευθέρας τροχαλίας, ἂν ἡ γωνία ω τῶν νημάτων αὐτῆς εἶναι $90^\circ$.

189. Αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 0,30 μέτ. ἡ μία καὶ 0,40 μέτ. ἡ ἄλλη. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

190. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $ἡμ\left(\frac{Α+Β}{2}\right) = συν\left(\frac{Γ}{2}\right)$, $ἐφ\left(\frac{Β+Γ}{2}\right) = σφ\left(\frac{Α}{2}\right)$.

191. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα: $ἡμ(90^0 - ω)συνω + συν(90^0 - ω)ἡμω$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας ω.

192. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα: $ἐφ(90^0 - ω)ἐφω$, $σφ(90^0 - ω)σφω$.

193. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{3ἐφχ - 1}{ἐφχ + 1} = 1$ διὰ $χ < 90^0$.

194. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $σφχ + \frac{1}{σφχ - 3} = 5$ διὰ $χ < 90^0$.

195. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2συνχ - 3)^2 = 8\ συνχ$ διὰ $χ < 90^0$.

196. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3 - \frac{ἡμ^4ω + 1}{ἡμ^2ω} = ἡμ^2ω$ διὰ $ω < 90^0$.

# ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΜΒΛΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

**55. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας.** α') Ἔστω ω τὸ μέτρον ἀμβλείας γωνίας. Ἡ παραπληρωματικὴ γωνία αὐτῆς ἔχει μέτρον $180^0 - \omega$ καὶ εἶναι ὀξεῖα γωνία. Κατὰ δὲ τὴν γνωστὴν (§ 50) ἰσότητα:

$$ἡμ\omega = 2ἡμ\left(\frac{\omega}{2}\right) συν\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (1)$$

εἶναι
$$ἡμ\left(180^0 - \omega\right) = 2ἡμ\left(90 - \frac{\omega}{2}\right) συν\left(90^0 - \frac{\omega}{2}\right)$$
$$= 2ἡμ\left(\frac{\omega}{2}\right) συν\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (2)$$

Ἡ ἰσότης (1) ἀπεδείχθη (§ 50), ἂν $\omega < 90^0$· ἀληθεύει ὅμως καὶ διὰ $\omega = 90^0$. Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι:

$$2ἡμ\left(\frac{\omega}{2}\right) συν\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2ἡμ45^0συν45^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$
$$= ἡμ90^0 = ἡμ\omega.$$

Τῆς ἰσότητος (2) ἀμφότερα τὰ μέλη ἔχουσιν ἔννοιαν, διότι $(180^0 - \omega) < 90^0$ καὶ $\frac{\omega}{2} < 90^0$. Τῆς ἰσότητος ὅμως (1) τὸ πρῶτον μέλος δὲν ἔχει ἔννοιαν διὰ $\omega > 90^0$. Διὰ νὰ ἀποκτήσῃ δὲ καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἔννοιαν, θὰ δεχθῶμεν ὅτι $ἡμ\omega = ἡμ(180^0 - \omega)$, ἐφ' ὅσον τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα.

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

**Ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.**

$$Π.χ. \quad ἡμ150^0 = ἡμ30^0 = \frac{1}{2}.$$

β') Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν (§ 50) ἰσότητα:

$$συνω = 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1$$

εἰς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $180^0 - ω$, εὑρίσκομεν: $συν(180^0 - ω)$

$$= 2συν^2\left(90^0 - \frac{ω}{2}\right) - 1 = 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1 = -\left(1 - 2ἡμ^2\frac{ω}{2}\right) \quad (3)$$

Ἐμάθομεν δὲ (§ 50) ὅτι, ἂν $ω < 90^0$, εἶναι:

$$\left(1 - 2ἡμ^2\frac{ω}{2}\right) = συνω \quad (4)$$

Ἀληθεύει δὲ αὕτη καὶ διὰ $ω = 90^0$, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $1 - 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 = συν90^0 = συνω$.

Σκεπτόμενοι δὲ ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἡμιτόνου ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ πρέπῃ νὰ δεχθῶμεν ὅτι:

$συν(180^0 - ω) = -συνω$ καὶ ἑπομένως: $συνω = -συν(180^0 - ω)$.

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

**Συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας λέγεται τὸ ἀντίθετον συνημίτονον τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.**

### Ἀσκήσεις

197. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $ἡμ120^0$ καὶ τὸ $συν120^0$.
198. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $ἡμ135^0$ καὶ τὸ $συν135^0$.
199. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $ἡμ(95^020')$ καὶ τὸ $συν(117^030'40'')$.
200. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $συν(125^040')$ καὶ τὸ $συν(163^015'40'')$.
201. Νὰ σχηματισθῇ ἀμβλεῖα γωνία ω, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $ἡμω = 0{,}55$.
202. Νὰ σχηματισθῇ γωνία φ, ἂν $συνφ = -\frac{3}{5}$.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

203. $\frac{ἡμx}{2} - 3ἡμx = -\frac{ἡμx}{4} - \frac{3}{8}$. 204. $6συνx + \frac{1}{2} = \frac{συνx}{4} - \frac{19}{8}$.

**56. Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἀμβλείας γωνίας ω.** α') Ἐπειδὴ $ἡμω = ἡμ(180^0 - ω)$, ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμω γίνεται ὅπως ἡ γνωστὴ ἤδη μεταβολὴ τοῦ $ἡμ(180^0 - ω)$.

Συνοψίζομεν δὲ τὴν μεταβολὴν ταύτην εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

*α') Μεταβολὴ ἡμω.*

$$\begin{array}{r|l} \omega & 90^0 \ldots \nearrow \ldots 120^0 \ldots \nearrow \ldots 135^0 \ldots \nearrow \ldots 150^0 \ldots \nearrow \ldots 180^0 \\ 180^0-\omega & 90^0 \ldots \searrow \ldots\ 60^0 \ldots \searrow \ldots\ 45^0 \ldots \searrow \ldots 30^0 \ldots \searrow \ldots\ldots 0^0 \\ \text{ἡμ}\omega=\text{ἡμ}(180^0-\omega) & 1 \ldots \searrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots \searrow \ldots \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \searrow \ldots \frac{1}{2} \ldots \searrow \ldots\ldots 0 \end{array}$$

β') Ὁμοίως, ἐπειδὴ συνω = − συν(180° − ω), ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ συνω γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γνωστῆς μεταβολῆς τοῦ συν(180° − ω). Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι: Ἀπὸ δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Οὕτω δὲ εὐκόλως καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

*β') Μεταβολὴ συνω.*

$$\begin{array}{r|l} \omega & 90^0 . \nearrow . 120^0 .. \nearrow .. 135^0 .. \nearrow .. 150^0 . \nearrow .. 180^0 \\ (180^0-\omega) & 90^0 . \searrow \ldots 60^0 \ldots \searrow \ldots 45^0 .. \searrow \ldots 30^0 \ldots \searrow \ldots\ 0^0 \\ \text{συν}(180^0-\omega) & 0 . \nearrow \ldots \frac{1}{2} .. \nearrow \ldots \frac{\sqrt{2}}{2} .. \nearrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{2} .. \nearrow \ldots 1 \\ \text{συν}\omega = -\,\text{συν}(180^0-\omega) & 0 . \searrow -\frac{1}{2} .. \searrow . -\frac{\sqrt{2}}{2} .. \searrow .. -\frac{\sqrt{3}}{2} .. \searrow \ldots -1 \end{array}$$

Ἀπὸ τὸν πίνακα τοῦτον βλέπομεν ὅτι τὸ συνημίτονον πάσης ἀμβλείας γωνίας εἶναι ἀρνητικόν.

**57. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας ω.**
α') Ἐπειδὴ 180° − ω < 90°, γνωρίζομεν ὅτι:

$$\text{ἐφ}(180^0-\omega)=\frac{\text{ἡμ}(180^0-\omega)}{\text{συν}(180^0-\omega)}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡμ(180° − ω) = ἡμω καὶ συν(180° − ω) = − συνω (§ 55), θὰ εἶναι $\text{ἐφ}(180^0-\omega)=-\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}$. Σκεπτόμενοι δὲ ὡς προηγουμένως δεχόμεθα ὅτι $\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}=\text{ἐφ}\omega$ καὶ ὅταν ω > 90°.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται ἐφ (180° − ω) = − ἐφω, ὅθεν: ἐφω = − ἐφ(180° − ω).

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

**Ἐφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας λέγεται ἡ ἀντίθετος ἐφαπτομένη τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.**

$$\text{Π.χ. ἐφ}150^0=-\,\text{ἐφ}30=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

β') Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι $\sigma\varphi(180^0 - \omega) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(180^0 - \omega)}{\acute{\eta}\mu(180^0 - \omega)} = -\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\acute{\eta}\mu\omega}$.

Σκεπτόμενοι δέ, ὡς προηγουμένως, δεχόμεθα ὅτι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\acute{\eta}\mu\omega} = \sigma\varphi\omega$ καὶ ἂν $\omega > 90^0$. Οὕτω δὲ καταλήγομεν εἰς τὴν ἰσότητα:

$$\sigma\varphi\omega = -\,\sigma\varphi(180^0 - \omega).$$

Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

**Συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας λέγεται ἡ ἀντίθετος συνεφαπτομένη τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.**

$$\text{Π.χ.}\quad \sigma\varphi 150^0 = -\,\sigma\varphi 30^0 = -\sqrt{3}.$$

### Ἀσκήσεις

205. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$135^0$ καὶ ἡ σφ$135^0$.
206. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$120^0$ καὶ ἡ σφ$120^0$.
207. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(135^0 35')$ καὶ ἡ ἐφ$(98^0 12' 30'')$.
208. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ$(154^0 20')$ καὶ ἡ σφ$(162^0 20' 45'')$.
209. Νὰ σχηματισθῇ γωνία χ, ἂν ἐφχ $= -1{,}50$.
210. Νὰ σχηματισθῇ γωνία ω, ἂν σφω $= -0{,}85$.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

211. $\dfrac{\acute{\epsilon}\varphi\chi}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{2\acute{\epsilon}\varphi\chi}{8} - \dfrac{30}{40}$.  212. $3\sigma\varphi\chi + \dfrac{\sigma\varphi\chi}{2} = 2\sigma\varphi\chi - \dfrac{3}{5}$.

**58. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ἀμβλείας γωνίας.** Ἂν σκεφθῶμεν ὅπως διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμω καὶ συνω (§ 56), καταρτίζομεν τοὺς ἑξῆς πίνακας τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφω καὶ τῆς σφω, ἂν ἡ γωνία ω βαίνῃ αὐξανομένη ἀπὸ $90^0$ ἕως $180^0$.

$$\begin{array}{r|l}
\omega & 90^0 \ldots \nearrow \ldots 120^0 \ldots \nearrow \ldots 135^0 \ldots \nearrow \ldots 150^0 \ldots \nearrow \ldots 180^0 \\
180^0 - \omega & 90^0 \ldots \searrow \ldots 60^0 \ldots \searrow \ldots 45^0 \ldots \searrow \ldots 30^0 \ldots \searrow \ldots 0^0 \\
\acute{\epsilon}\varphi(180^0 - \omega) & +\infty \ldots \searrow \ldots \sqrt{3} \ldots \searrow \ldots 1 \ldots \searrow \ldots \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ldots \searrow \ldots 0 \\
\acute{\epsilon}\varphi\omega = -\,(180^0 - \omega) & -\infty \ldots \nearrow \ldots -\sqrt{3} \ldots \nearrow \ldots -1 \ldots \nearrow \ldots -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \ldots \nearrow \ldots 0
\end{array}$$

*β΄) Μεταβολὴ τῆς σφω*

| | |
|---|---|
| $\omega$ | $90^0 \ldots \nearrow \ldots 120^0 \ldots \nearrow \ldots 135^0 \ldots \nearrow \ldots 150^0 \ldots \nearrow \ldots 180^0$ |
| $180^0-\omega$ | $90^0 \ldots \searrow \ldots 60^0 \ldots \searrow \ldots 45^0 \ldots \searrow \ldots 30^0 \ldots \searrow \ldots 0^0$ |
| $\sigma\varphi(180^0-\omega)$ | $0 \ldots \nearrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \nearrow \ldots 1 \ldots \nearrow \ldots \sqrt{3} \ldots \nearrow \ldots +\infty$ |
| $\sigma\varphi\omega = -\sigma\varphi(180^0-\omega)$ | $0 \ldots \searrow \ldots -\frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \searrow \ldots -1 \ldots \searrow \ldots -\sqrt{3} \ldots \searrow \ldots -\infty$ |

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τούτους βλέπομεν ὅτι πᾶσα ἀμβλεῖα γωνία ἔχει ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην.

**59. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας ω.** Ἀπὸ τὰς ἰσότητας ἡμω = ἡμ (180⁰ – ω) καὶ συνω = – συν(180⁰ – ω) (§ 55) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = \text{ἡμ}^2(180^0-\omega) + \text{συν}^2(180^0-\omega).$$

Ἐπειδὴ δὲ $180^0 - \omega < 90^0$, τὸ β΄ μέλος εἶναι 1 (ἰσότης 8 § 45). Εἶναι λοιπὸν καὶ διὰ πᾶσαν ἀμβλεῖαν γωνίαν ω:

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1 \qquad (1)$$

Ἐδέχθημεν δὲ χάριν τῆς γενικότητος ἀληθεῖς διὰ τὰς ἀμβλείας γωνίας καὶ τὰς ἰσότητας (9) καὶ (10) τῆς § 45, ἤτοι:

$$\text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}, \qquad \text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ἡμ}\omega} \qquad (2)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὡς ὡρίσθησαν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀμβλείας γωνίας, συνδέονται μεταξύ των μὲ τὰς αὐτὰς σχέσεις (1) καὶ (2), μὲ τὰς ὁποίας συνδέονται καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Ἂν δὲ σκεφθῶμεν, ὅπως καὶ διὰ τὰς ὀξείας γωνίας (§ 45), βεβαιούμεθα ὅτι, πλὴν τῶν σχέσεων τούτων, οὐδεμία ἄλλη σχέσις μὴ ἐξ αὐτῶν ἀπορρέουσα ὑφίσταται μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας. Ἐξ αὐτῶν ὅμως ἀπορρέουσιν πολλαὶ ἄλλαι σχέσεις ὅπως καὶ διὰ τὰς ὀξείας γωνίας. Οὕτως ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\text{ἐφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1.$$

Ἐπίσης, ἂν γνωρίζωμεν ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀμβλείας γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἄλλους. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα πως εἰς τὰς §§ 46 – 49 διὰ τὰς ὀξείας γωνίας. Μόνον πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη, ἡ συνεφαπτομένη καὶ τὸ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ ἡμίτονον εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως πρὸ τοῦ ριζικοῦ ἑκάστου σχετικοῦ τύπου πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ κατάλληλον ἐκ τῶν σημείων $+$ ἢ $-$, διὰ νὰ προκύπτῃ θετικὸν ἐξαγόμενον διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ ἀρνητικὸν δι' ἕκαστον τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Οὕτως, ἂν $90^0 < \omega < 180^0$ καὶ $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, θὰ εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{1}{2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$ Ἂν δὲ $90^0 < \omega < 180^0$ καί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$,

Θὰ εἶναι: $$\eta\mu\omega = +\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{+\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{1}{2}}{+\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Σημείωσις. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ εἰς τὰς ἀσκήσεις 128 — 135 ἀναγραφεῖσαι τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες ἀληθεύουσι καὶ δι' ἀμβλείας γωνίας καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

## Ἀσκήσεις

213. Ἂν $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $90^0 < \chi < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας χ.

214. Ἂν $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $90^0 < \varphi < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας φ.

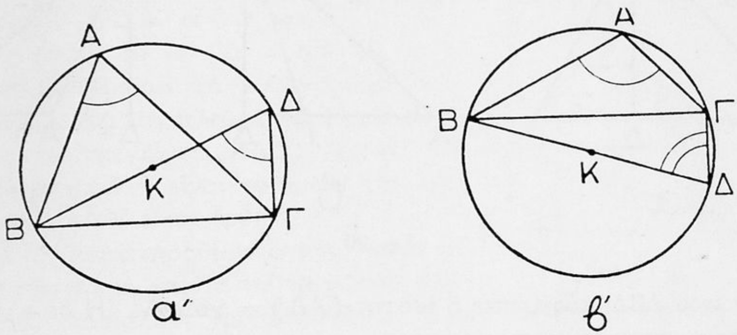
215. Ἂν $\varepsilon\varphi\psi = -1$ καὶ $90^0 < \psi < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας ψ.

216. Ἂν $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $90^0 < \omega < 180^0$ νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομεμετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας ω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

# ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

**60. Σχέσεις τῶν κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου.** α') Ἔστω ἓν τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Κ (σχῆμα 19). Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΔ




Σχ. 19

καὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι:

$$(\text{ΒΓ}) = (\text{ΒΔ})\text{ἡμ}\Delta \quad \text{ἢ} \quad \alpha = 2\,\text{R}\,\text{ἡμ}\Delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta = \text{A}$ (σχ. 19α') ἢ $\Delta + \text{A} = 180^0$ (σχ. 19β'), ἕπεται ὅτι ἡμΔ=ἡμΑ, καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha}{\text{ἡμA}} = 2\text{R}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\frac{\beta}{\text{ἡμB}} = 2\,\text{R}$ καὶ $\frac{\gamma}{\text{ἡμΓ}} = 2\,\text{R}$. Ἄρα

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\textbf{ἡμA}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\textbf{ἡμB}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\textbf{ἡμΓ}} = \mathbf{2\,R} \qquad \textbf{(30)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**1ον. Αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.**

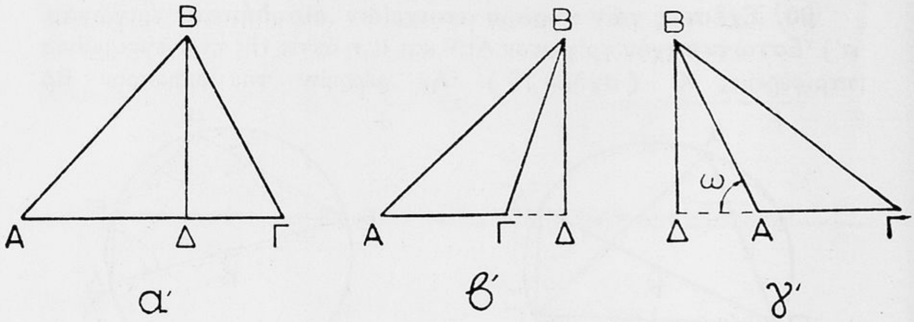
**2ον. Ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

β′) Ἔστω ΑΒΓ ἓν τυχὸν τρίγωνον καὶ ΒΔ ἓν ὕψος αὐτοῦ (σχῆμα 20). Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι:

α′) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\,(\mathrm{A\Delta})$, ἂν $\mathrm{A} < 90^0$ καὶ

β′) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\,(\mathrm{A\Delta})$, ἂν $\mathrm{A} > 90^0$.

Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν (σχῆμα 20 α′, β′,) ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου




Σχ. 20

τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ἡ ἰσότης $(\mathrm{A\Delta}) = \gamma\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}$. Ἡ δὲ α′ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων γίνεται:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} \tag{1}$$

Εἰς δὲ τὴν β′ περίπτωσιν (σχῆμα 20 γ′) εἶναι $(\mathrm{A\Delta}) = \gamma\,\sigma\upsilon\nu\,\omega = -\gamma\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}$ καὶ ἐκ τῆς β′ τῶν ἄνω ἰσοτήτων προκύπτει πάλιν ἡ (1). Εἰς πᾶσαν λοιπὸν περίπτωσιν εἶναι:

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\boldsymbol{\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}} \tag{31}$$

καὶ

$$\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

Ὥστε:

**Τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τούτων.**

γ′) Ἔστω Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 20). Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta(\mathrm{B\Delta})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{B\Delta}) = \gamma\,\eta\mu \mathrm{A}$, αὕτη γίνεται:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\beta\gamma\,\eta\mu \mathrm{A}} \tag{32}$$

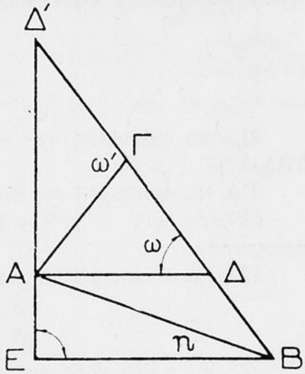
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.**

δ΄) Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΒΓ > ΑΓ ἢ $\alpha > \beta$ (σχ. 21). Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ὁρίζομεν τμήματα $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta' = \beta$· οὕτω δὲ εἶναι

$\mathrm{B}\Delta = \mathrm{B}\Gamma - \Gamma\Delta = \alpha - \beta$ καὶ

$$\mathrm{B}\Delta' = \mathrm{B}\Gamma + \Gamma\Delta' = \alpha + \beta.$$



Σχ. 21.

Ἂν δὲ φέρωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΔ΄, ἡ πλευρὰ ΑΓ γίνεται διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΔΔ΄. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμεσος αὕτη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΔ΄, ἡ γωνία ΔΑΔ΄ εἶναι ὀρθή.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία $\omega'$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦτριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΔ. Ἕνεκα τούτου δὲ εἶναι:

$$\omega' = \mathrm{A} + \mathrm{B}, \quad \omega' = 2\omega \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \omega = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \qquad (1)$$

Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΒΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι:

$$\mathrm{B} + \eta = \omega = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2}, \quad \eta = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}$$

καὶ
$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{E}\Delta'} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{B}\Delta'} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΑΒ, ΕΔ΄Β βλέπομεν ὅτι $(\mathrm{EA}) = (\mathrm{EB})\text{ἐφ}\eta = (\mathrm{EB})\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right)$ καὶ $(\mathrm{E}\Delta') = (\mathrm{EB})\text{ἐφ}(\mathrm{B} + \eta)$

$= (\mathrm{EB})\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{E}\Delta'} = \dfrac{\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2}\right)}$ καὶ ἕνεκα τῆς (2)

εἶναι:
$$\boldsymbol{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\text{εφ}\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\text{εφ}\left(\frac{A + B}{2}\right)}} \qquad \textbf{(33)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν γωνιῶν τούτων.**

### Ἀσκήσεις

217. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΒΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς 2RἡμΑἡμΓ.

218. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι: $E = 2R^2$ἡμΑἡμΒἡμΓ.

219. Ἂν ἡμ$^2$Α = ἡμ$^2$Β + ἡμ$^2$Γ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

220. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{\text{ἐφ}A}{\text{ἐφ}B}.$$

221. Εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ. Ἂν καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ καὶ φ μὲ τὴν ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γἡμω—βἡμφ=0.

222. Ἓν τρίγωνον ἔχει α=37 μέτ, β=13 μέτ, Α–Β=48°27′20″. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία Γ αὐτοῦ.

## Α′ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**61.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῶσι μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι αὐτοῦ.**

Ἔστω π.χ. ὅτι δίδεται ἡ πλευρὰ α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $B + \Gamma < 180^0$, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν.

*Ἐπίλυσις.* Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $A + B + \Gamma = 180^0$ ἕπεται ὅτι $A = 180^0 - (B + \Gamma)$.

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\beta = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A}, \qquad \gamma = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}.$$

| *Γνωστὰ στοιχεῖα* | *Ἄγνωστα στοιχεῖα* |
|---|---|
| α, Β, Γ | Α, β, γ, Ε |

Ἐπειδὴ δὲ ἡμΑ = ἡμ(Β + Γ), αὗται γίνονται :

$$\beta = \frac{\alpha \acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}, \qquad \gamma = \frac{\alpha \acute{\eta}\mu \Gamma}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$$

Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \acute{\eta}\mu A$ καὶ τῶν προηγουμένων τιμῶν τῶν β καὶ γ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha^2 \acute{\eta}\mu \mathbf{B}\, \acute{\eta}\mu \boldsymbol{\Gamma}}{2\acute{\eta}\mu \mathbf{A}} = \frac{\alpha^2 \acute{\eta}\mu \mathbf{B} \acute{\eta}\mu \boldsymbol{\Gamma}}{2\acute{\eta}\mu\,(\mathbf{B}+\boldsymbol{\Gamma})} \qquad (34)$$

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$$A = 180^0 - (B+\Gamma),$$

$$\beta = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu A} = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu \Gamma}{\acute{\eta}\mu A} = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu \Gamma}{\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$$

$$E = \frac{\alpha^2\acute{\eta}\mu B\acute{\eta}\mu\Gamma}{2\acute{\eta}\mu A} = \frac{\alpha^2\acute{\eta}\mu B\acute{\eta}\mu\Gamma}{2\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$$

Σημείωσις. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς μεταχειριζόμεθα τὸ ἡμA, ἂν $A < 90^0$ καὶ τὸ ἡμ(B + Γ), ἂν $A > 90^0$.

*Παράδειγμα.* Ἔστω $\alpha = 3475{,}6$ μέτ, $B = 27^0\ 12'\ 18''$ καὶ $\Gamma = 50^0\ 40'\ 15''$.

*Ὑπολογισμὸς τῆς A*

$$\begin{array}{rl} B &= 27^0\ 12'\ 18'' \\ \Gamma &= 50^0\ 40'\ 15'' \\ \hline B+\Gamma &= 77^0\ 52'\ 33'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 180^0 &= 179^0\ 59'\ 60'' \\ B+\Gamma &= 77^0\ 52'\ 33'' \\ \hline A &= 102^0\ \ 7'\ 27'' \end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῶν β καὶ γ*

$$\beta = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)} \qquad \gamma = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu\Gamma}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$$

$$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B - \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma),$$

$$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma - \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\alpha &= 3{,}54103 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B &= \overline{1}{,}66008 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 3{,}20211 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma) &= \overline{1}{,}99021 \\ \hline \lambda o\gamma\beta &= 3{,}21090 \\ \beta &= 1525{,}19 \text{ μέτ.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lambda o\gamma\alpha &= 3{,}54103 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma &= \overline{1}{,}88847 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 3{,}42950 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma) &= \overline{1}{,}99021 \\ \hline \lambda o\gamma\gamma &= 3{,}43929 \\ \gamma &= 2749{,}75 \end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ E.* $\qquad 2E = \frac{\alpha^2\acute{\eta}\mu B\acute{\eta}\mu\Gamma}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$

$$\lambda o\gamma(2E) = 2\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B + \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma - \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)$$

$$\begin{array}{rl} 2\lambda o\gamma\alpha &= 7{,}08206 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B &= \overline{1}{,}66008 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma &= \overline{1}{,}88847 \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 6{,}63061 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{ἄθροισμα} &= 6{,}63061 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma) &= \overline{1}{,}99021 \\ \hline \lambda o\gamma(2E) &= 6{,}64040 \\ 2E &= 4\,369\,200 \text{ τετ. μέτ.} \end{array}$$

$$E = 2\,184\,600 \text{ τετ. μέτ.}$$

## Ἀσκήσεις

223. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 5$ μέτ., $B = 25^{0}20'$ καὶ $\Gamma = 32^{0}53'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

224. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 265{,}6$ μέτ, $B = 70^{0}15'20''$ καὶ $\Gamma = 48^{0}\,44'\,40''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

225. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\beta = 2\,667{,}65$ μέτ., $A = 58^{0}15'30''$ καὶ $B = 20^{0}20'45''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

226. Ἡ διαγώνιος ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος 8 μέτ. καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας μὲ μέτρον $23^{0}\,15'$ ἡ μία καὶ $50^{0}\,25'$ ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

227. Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 0,7 μέτ. ἄγομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

228. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν $(B\Gamma) = 2{,}5$ μέτ. καὶ $A = 116^{0}\,34'46''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

229. Εἰς ἓν σημεῖον Α ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις ὑπὸ γωνίαν $64^{0}20'40''$. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν 45 χιλιογράμμων καὶ σχηματίζει μὲ τὴν μίαν συνιστῶσαν γωνίαν $48^{0}\,12'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων.

230. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 0{,}85$ μέτ. $B = 42^{0}20'$, $\Gamma = 74^{0}10'30''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΔ αὐτοῦ.

231. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτ. εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει $B = 56^{0}\,20'\,18''$ καὶ $\Gamma = 102^{0}\,10'\,24''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

## Β' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**62.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῶσι δύο πλευραὶ καὶ ἡ γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων.**

Ἔστω π.χ. ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία Α.

*Ἐπίλυσις* Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$$

Ἐκ ταύτης δὲ ὁρίζεται ἡ γωνία Β. Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν καὶ τὴν Γ διὰ τῆς ἰσότητος $\Gamma = 180^{0} - (A + B)$.

Ἔπειτα ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ καὶ ὁρίζομεν τὴν γ. Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

*1ον Παράδειγμα.* Ἔστω $\alpha = 347$ μέτ., $\beta = 260$ μέτ. καὶ $A = 35^0$.

| *Γνωστὰ* | *Ἄγνωστα* |
|---|---|
| *στοιχεῖα* | |
| α, β, Α | Β, Γ, γ, Ε, |

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$$\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}, \quad \Gamma = 180^0 - (A + B)$$

$$\gamma = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}, \quad E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma.$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς Β*

$$\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$$

$$\text{λογημ}B = \text{λογ}\beta + \text{λογημ}A - \text{λογ}\alpha.$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\beta = & 2{,}41497 \\ \text{λογημ}A = & \bar{1}{,}75859 \\ \hline \text{ἄθροισμα} = & 2{,}17356 \\ \text{λογ}\alpha = & 2{,}54033 \\ \hline \text{λογημ}B = & \bar{1}{,}63323 \\ \hline B = & 25^0\,27'\,9'' \end{array}$$

καὶ

$$\begin{array}{rl} 180^0 = & 179^0\,59'\,60'' \\ B = & 25^0\,27'\;\;9'' \\ \hline B' = & 154^0\,32'\,51'' \end{array}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $154^0\,32'\,51'' + 35^0 = 189^0\,32'\,51'' > 180^0$, ἡ δευτέρα τιμὴ τῆς Β δὲν εἶναι δεκτή.

*Ὑπολογισμὸς τῆς Γ*

$$\begin{array}{rl} 180^0 = & 179^0\,59'\,60'' \\ A + B = & 60^0\,27'\;\;9'' \\ \text{καὶ} \quad \Gamma = & 119^0\,32'\,51'' \end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῆς γ*

Ἐκ τῆς $\gamma = \dfrac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}\gamma = \text{λογ}\alpha + \text{λογημ}\Gamma - \text{λογημ}A$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\alpha = & 2{,}54033 \\ \text{λογημ}\Gamma = & \bar{1}{,}93949 \\ \hline \text{ἄθροισμα} = & 2{,}47982 \\ \text{λογημ}A = & \bar{1}{,}75859 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = 526{,}3 \text{ μέτ.}$$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε*

Ἐκ τῆς $2E = \alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$, ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}(2E) = \text{λογ}\alpha + \text{λογ}\beta + \text{λογημ}\Gamma$$

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}\alpha = & 2{,}54033 \\ \text{λογ}\beta = & 2{,}41497 \\ \text{λογημ}\Gamma = & \bar{1}{,}93949 \\ \hline \text{λογ}(2E) = & 4{,}89479 \\ 2E = & 78\,486 \text{ τετ. μέτ.} \\ E = & 39\,243 \text{ τετ. μέτ.} \end{array}$$

*2ον Παράδειγμα.* Ἔστω ὅτι $\alpha = 300$ μέτ, $\beta = 456{,}75$ μέτ. καὶ $A = 34^0\;16'$.

Ἐργαζομενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $B = 59^0\,0'\,25'',7$ καὶ $B' = 120^0\,59'\,34'',3$. Ἐπειδὴ δὲ $B' + A < 180^0$, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ δύο αὗται τιμαὶ εἶναι δεκταί.

Εἰς ἑκάστην δὲ τούτων ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς Γ, μία τῆς γ καὶ μία τοῦ Ε. Ταύτας ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς:

*Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς Γ*

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{A} & = & 34^0\ 16' \\
\mathrm{B} & = & 59^0\ \ 0'\ 25'',7 \\
\mathrm{B}' & = & 120^0\ 59'\ 34'',3 \\ \hline
\mathrm{A}+\mathrm{B} & = & 93^0\ 16'\ 25'',7 \\
\mathrm{A}+\mathrm{B}' & = & 155^0\ 15'\ 34'',3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
180^0 & = & 179^0\ 59'\ 60'' \\
\mathrm{A}+\mathrm{B} & = & 93^0\ 16'\ 25'',7 \\ \hline
\Gamma & = & 86^0\ 43'\ 34'',3 \\
\mathrm{A}+\mathrm{B}' & = & 155^0\ 15'\ 34'',3 \\ \hline
\Gamma' & = & 24^0\ 44'\ 25'',7
\end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς γ.* Ἐκ τῆς $\gamma = \frac{\alpha \text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμA}}$, ἕπεται ὅτι:

$$\begin{array}{rcl}
\text{λογ}\gamma & = & \text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma-\text{λογἡμA} \\
\text{λογ}\alpha & = & 2,47712 \\
\text{λογἡμ}\Gamma & = & \bar{1},99929 \\ \hline
\text{ἄθροισμα} & = & 2,47641 \\
\text{λογἡμA} & = & \bar{1},75054 \\ \hline
\text{λογ}\gamma & = & 2,72587 \\
\gamma & = & 531,95 \text{ μέτ.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{λογ}\gamma' & = & \text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma'-\text{λογἡμA} \\
\text{λογ}\alpha & = & 2,47712 \\
\text{λογἡμ}\Gamma' & = & \bar{1},62171 \\ \hline
\text{ἄθροισμα} & = & 2,09883 \\
\text{λογἡμA} & = & \bar{1},75054 \\ \hline
\text{λογ}\gamma' & = & 2,34829 \\
\gamma' & = & 222,995 \text{ μέτ.}
\end{array}$$

*Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τοῦ Ε.* Ἐκ τῆς $2\mathrm{E} = \alpha\beta\text{ημ}\Gamma$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}(2\mathrm{E}) = \text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma$$
$$\text{λογ}(2\mathrm{E}') = \text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma'.$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{λογ}\alpha & = & 2,47712 \\
\text{λογ}\beta & = & 2,65968 \\
\text{λογἡμ}\Gamma & = & \bar{1},99929 \\ \hline
\text{λογ}(2\mathrm{E}) & = & 5,13609 \\
2\mathrm{E} & = & 136\ 800 \text{ τετ. μέτ.} \\
\mathrm{E} & = & 68\ 400 \text{ τετ. μέτ.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{λογ}\alpha & = & 2,47712 \\
\text{λογ}\beta & = & 2,65968 \\
\text{λογἡμ}\Gamma' & = & \bar{1},62171 \\ \hline
\text{λογ}(2\mathrm{E}') & = & 4,75851 \\
2\mathrm{E}' & = & 57\ 347,14 \text{ τ.μ.} \\
\mathrm{E}' & = & 28\ 673,57 \text{ τ.μ.}
\end{array}$$

*3ον Παράδειγμα.* Ἔστω $\alpha = 900$ μέτ, $\beta = 1\ 245$ μέτ. καὶ $\mathrm{A}=53^0\ 12'\ 20''$

*Ὑπολογισμὸς τῆς Β.*

Ἐκ τῆς $\text{ἡμB} = \frac{\beta \text{ἡμA}}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι: $\text{λογἡμB} = \text{λογ}\beta+\text{λογἡμA}-\text{λογ}\alpha.$

$$\begin{array}{rcl}
\text{λογ}\beta & = & 3,09517 \\
\text{λογἡμA} & = & \bar{1},90352 \\ \hline
\text{ἄθροισμα} & = & 2,99869
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{ἄθροισμα} & = & 2,99869 \\
\text{λογ}\alpha & = & 2,95424 \\ \hline
\text{λογἡμB} & = & 0,04445
\end{array}$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡμΒ $>$ 1, ὅπερ ἀδύνατον. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν δὲν ἔχει λύσιν.

Σημείωσις. Τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος τούτου ἐννοοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Θέτοντες $\chi = \beta\eta\mu A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\eta\mu A = 2{,}99869$, ὅθεν καὶ $\chi = \beta\eta\mu A = 996{,}98 > \alpha$. Ἄρα $\eta\mu B = \dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha} > 1$, ὅπερ ἄτοπον.

### Ἀσκήσεις

232. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha} = 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B = 90^0$.

233. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $\beta\eta\mu A > \alpha$.

234. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 95{,}6$ μέτ, $\beta = 34{,}5$ μέτ. καὶ $A = 30^0 15' 28''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

235. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 500$ μέτ. $\beta = 640$ μέτ. καὶ $A = 40^0 20' 10''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

236. Ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει (ΑΒ) $= 15{,}45$ μέτ., (ΑΓ) $= 25{,}50$ μέτ. καὶ $B = 112^0$. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

237. Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς ἓν σημεῖον ὑπὸ γωνίαν, ἔχει ἔντασιν 30,35 χιλιογράμμων. Ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει ἔντασιν 20,35 χιλιογράμμων, ἡ δὲ ἄλλη σχηματίζει μὲ τὴν συνισταμένην γωνίαν $\dfrac{2\pi}{9}$ ἀκτινίων Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς β′ δυνάμεως καὶ ἡ γωνία τῶν δυνάμεων τούτων.

## Γ′ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**63.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον, ἂν δοθῶσι δύο πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.**

Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία Γ αὐτῶν καὶ ὅτι $\alpha > \beta$.

| *Γνωστά,* | *Ἄγνωστα* |
|---|---|
| *στοιχεῖα* | |
| α, β, Γ, | Α, Β, γ, Ε |

*Ἐπίλυσις.* Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἰσότητα :

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$ καὶ ἐκ τῆς $\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{\Gamma}{2} = 90^0$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \qquad (1)$$

*Τύποι ἐπιλύσεως*

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right),\ \gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A},\ E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma.$$

Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $A-B$ καὶ ἔστω $\Delta$ ἡ τιμὴ αὐτῆς. Ἂν δὲ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$A-B=\Delta,\ A+B=180^0-\Gamma,$$

εὑρίσκομεν τὰ μέτρα A καὶ B τῶν ἀγνώστων γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Μετὰ ταῦτα ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$. Διὰ ταύτης δὲ ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος $\gamma$ τῆς ἀγνώστου πλευρᾶς.

Τέλος δὲ διὰ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

*Παράδειγμα.* Ἔστω ὅτι $\alpha=3475{,}6$ μέτ, $\beta=1625{,}2$ μέτ, $\Gamma=50^0\,40'\,15''$.

*Ὑπολογισμὸς τῶν A καὶ B*

Ἐκ τῆς $\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\text{λογ}(\alpha-\beta)+\text{λογσφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)-\text{λογ}\,(\alpha+\beta).$$

*Βοηθητικὸς πίναξ*

$\alpha=3\,475{,}6$

$\beta=1\,625{,}2$

$\alpha-\beta=1\,850{,}4$

$\alpha+\beta=5\,100{,}8$

$\Gamma=50^0\,40'\,15''$

$\frac{\Gamma}{2}=25^0\,20'\,\,7'',5$

$180^0=179^0\,59'\,60''$

$\Gamma=\,\,50^0\,40'\,15''$

$A+B=129^0\,19'\,45''$

$\text{λογ}(\alpha-\beta)=3{,}26727$

$\text{λογσφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=0{,}32472$

$\text{ἄθροισμα}=3{,}59199$

$\text{λογ}(\alpha+\beta)=3{,}\,70764$

$\text{λογἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\bar{1}{,}88435$

$\frac{A-B}{2}=37^0\,27'\,34'',\,6$

$A-B=\,\,74^0\,55'\,\,9'',\,2$

$A+B=129^0\,19'\,45''$

$2A=204^0\,14'\,54'',\,2$

$2B=54^0\,\,24'\,35'',\,8$

$A=102^0\,7'\,27'',1,\qquad B=27^0\,12'\,17'',9$

*Ὑπολογισμὸς τῆς γ*

Ἐπειδὴ $\gamma = \frac{\alpha \text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$, εἶναι: $\text{λογ}\gamma = \text{λογ}\alpha + \text{λογἡμ}\Gamma - \text{λογἡμ}A$.

*Βοηθητικὸς πίναξ*

$$
\begin{aligned}
180^0 &= 179^0\ 59'\ 60'' \\
A &= 102^0\ \ 7'\ 27'',1 \\
\hline
180^0 - A &= 77^0\ \ 52'\ 32'',9 \\
\text{ἡμ}A &= \text{ἡμ}(77^0\ 52'\ 32'',9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{λογ}\alpha &= 3,54103 \\
\text{λογἡμ}\Gamma &= \bar{1},88847 \\
\hline
\text{ἄθροισμα} &= 3,42950 \\
\text{λογἡμ}A &= \bar{1},99021 \\
\hline
\text{λογ}\gamma &= 3,43929 \\
\gamma &= 2749,75 \text{ μέτ.}
\end{aligned}
$$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ*

Ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν $2E = \alpha\beta\text{ἡμ}\Gamma$ καὶ ἑπομένως:

$$\text{λογ}(2E) = \text{λογ}\alpha + \text{λογ}\beta + \text{λογἡμ}\Gamma.$$

$$
\begin{aligned}
\text{λογ}\alpha &= 3,54103 \\
\text{λογ}\beta &= 3,21090 \\
\text{λογἡμ}\Gamma &= \bar{1},88847 \\
\hline
\text{λογ}(2E) &= 6,64040 \\
2E &= 4\,369\,200 \text{ τετ. μέτρα} \\
E &= 2\,184\,600 \text{ τετ. μέτρα.}
\end{aligned}
$$

**Ἀ σ κ ή σ ε ι ς**

238. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\beta = 300$ μέτ., $\gamma = 127$ μέτ. καὶ $A = 68^0 40'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

239. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\alpha = 122,4$ μέτ., $\beta = 244,8$ μέτ. καὶ $\Gamma = 42^0 42' 42''$ Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

240. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\beta = \frac{3}{4}$ μέτ., $\gamma = \frac{5}{12}$ μέτ. καὶ $A = 40^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

241. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ὑπὸ γωνίαν $45^0 20'$. Ἡ μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μῆκος 30 μέτ. καὶ ἡ ἄλλη 15 μέτ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν, τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

242. Εἰς ἕνα κύκλον γράφομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σημείου δὲ Α τῆς περιφερείας ἄγονται αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἂν $(AB) = 2\sqrt{3}$ μέτ. καὶ $(A\Gamma) = 4$ μέτ., νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

243. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν εἰς σημεῖον Α ὑπὸ γωνίαν $56^0 30'$. Ἡ δὲ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει ἔντασιν 10 χιλιογράμμων καὶ ἡ ἄλλη 15 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ

ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτῆς μὲ τὰς συνιστώσας.

244. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\alpha = 100$ μέτ., $\beta = 79$ μέτ, $\Gamma = \frac{5\pi}{9}$ ἀκτίνια. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

245. Τὸ σχέδιον ἀγροῦ ὑπὸ κλίμακα 0,001 εἶναι τρίγωνον ἔχον $\alpha = 0{,}4$ μέτ., $\beta = 0{,}88$ μέτ. καὶ $\Gamma = 40^0 30'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

246. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 10 χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ αὐτήν. Η μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς νὰ ἔχῃ ἔντασιν 6 χιλιογράμμων καὶ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $30^0$ μὲ τὴν δοθεῖσαν.

## Δ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**64.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον, ἂν δοθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.**

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$. Ἐκ ταύτης ὁρίζομεν τὴν Α. Ἔπειτα εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ Β ἐξ ἀντιστοίχου ἰσότητος. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$.

| *Γνωστὰ* | *Ἄγνωστα στοιχεῖα* | *Τύποι ἐπιλύσεως* |
|---|---|---|
| $\alpha, \beta, \gamma$ | Α, Β, Γ, Ε | $\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, $\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$ <br> $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$. |

*Παράδειγμα.* Ἔστω $\alpha = 5$ μέτ, $\beta = 8$ μέτ, $\gamma = 10$ μέτ.

*Ὑπολογισμὸς τῆς Α*

$$\text{συν}A = \frac{8^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{139}{160}. \qquad \text{ἡμ}(90^0 - A) = \frac{139}{160}$$

$$\begin{array}{ll} \text{λογἡμ}(90^0 - A) = \text{λογ}139 - \text{λογ}\,160 & A = 90^0 - (60^0\,18'\,43'') \\ \quad \text{λογ}139 = 2{,}14301 & \quad 90^0 = 89^0\,59'\,60'' \\ \quad \text{λογ}160 = 2{,}20412 & \quad\quad 60^0\,18'\,43'' \\ \hline \text{λογἡμ}(90^0 - A) = 1{,}93889 & \quad A = 29^0\,41'\,17'' \\ \quad 90^0 - A = 60^0\,18'\,43'' & \end{array}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{25 + 100 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 10} = 0{,}61$ καὶ $B = 52^0 24'\,38''$.

Τὸ μέτρον τῆς Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε εὑρίσκουσιν ἤδη εὐκόλως οἱ μαθηταί. Ἡ Β δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως: $ἡμB = \frac{βἡμA}{α}$ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Α.

*Σημείωσις.* Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἐπίπονος, ἰδίᾳ ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί.

Β′ τρόπος. Ἂν θέσωμεν $α+β+γ=2τ$, γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὅτι $E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$. Ἀφ' ἑτέρου ἐμάθομεν (§ 60 γ′) ὅτι $E = \frac{1}{2}\, βγἡμA$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμA = \frac{2}{βγ}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}.$$

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α περιοριζόμενοι εἰς τὴν ὀξεῖαν Α. Ἐκ δὲ τῶν γνωστῶν (§ 60 α′) ἰσοτήτων: $\frac{α}{ἡμA} = \frac{β}{ἡμB} = \frac{γ}{ἡμΓ}$ εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμB = \frac{β}{α}\, ἡμA$, $ἡμΓ = \frac{γ}{α}\, ἡμA$. Διὰ τούτων δὲ ὑπολογίζομεν καὶ τὰς ἄλλας ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ. Καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι τῶν μικροτέρων πλευρῶν, εὑρεθῇ ὅτι εἶναι μικρότερον τῶν $90^0$, ἡ τρίτη γωνία πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ παραπλήρωμά της, διότι πρέπει νὰ εἶναι ἀμβλεῖα. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἀπὸ ἕνα τῶν ἀνωτέρω τύπων.

Βραδύτερον θὰ μάθωμεν καὶ ἄλλην συνήθως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην χρησιμοποιουμένην μέθοδον, τὴν κλασσικὴν λεγομένην.

### Ἀσκήσεις

247. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 8 μέτ, β = 9 μέτ, γ = 10 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο

248. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει γ = 12 μέτρα, α = 16 μέτ. καὶ διάμεσον (ΑΜ) = 20 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Β αὐτοῦ.

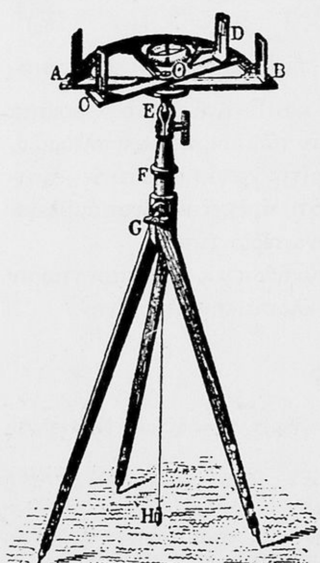
249. Τὰ μήκη α, β, γ, τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2,3, 4. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

250. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει γ = 8 μέτ, διχοτόμον (ΑΔ) = 6 μέτρα καὶ (ΒΔ) = 4 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

## ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

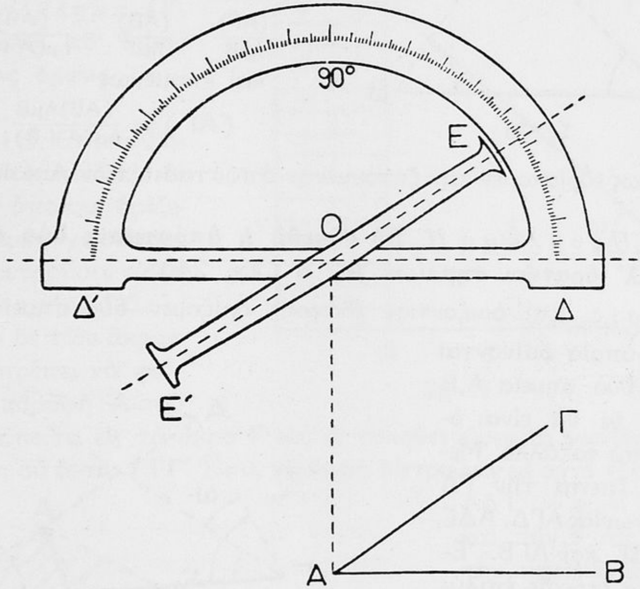
**65. Γραφόμετρον.** Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν οἱ τοπογράφοι μεταχειρίζονται ἀκριβῆ ὄργανα, τὰ ὁποῖα γενικῶς λέγονται **γωνιόμετρα**. Ἕν τοιοῦτον ἀκριβέστατον ὄργανον εἶναι ὁ **Θεοδόλιχος,** τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ μάθημα τῆς Κοσμογραφίας. Ἁπλούστερον δὲ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἶναι τὸ **Γραφόμετρον.**



Γραφόμετρον

Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλικὸν ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη καὶ ἠριθμημένη ἀπὸ $0^0$ ἕως $180^0$. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΒ αὐτοῦ στηρίζονται καθέτως ἐπὶ τὸ ἡμικύκλιον δύο στελέχη. Δύο λεπτόταται σχισμαὶ κατὰ μῆκος τῶν στελεχῶν τούτων ὁρίζουσιν ἓν ἀμετάθετον σκοπευτικὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἡμικύκλιον. Ἕτερος κανὼν CD στρεπτὸς περὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ φέρει εἰς τὰ ἄκρα του δύο στελέχη κάθετα ἐπὶ τὸν κανόνα τοῦτον. Λεπταὶ δὲ σχισμαὶ κατὰ μῆκος αὐτῶν ὁρίζουσιν ἄλλο κινητὸν σκοπευτικὸν ἐπίπεδον. Δι' ἀρθρωτικῆς βάσεως τὸ ἡμικύκλιον δύναται νὰ συμπίπτῃ μὲ οἱονδήποτε ἐπίπεδον (σχ. 22).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν γωνίαν ΒΑΓ θέτομεν τὸ ὄργανον οὕτως ὥστε τὸ ἡμικύκλιον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας, τὸ κέντρον Ο νὰ προβάλληται καθέτως εἰς τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας καὶ τό ἀμετάθετον σκοπευτικὸν ἐπίπεδον νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ τῆς γωνίας (σχ. 22). Στρέφομεν

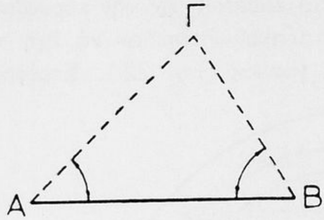



Σχ. 22

ἔπειτα τὸν κανόνα Ε′Ε περὶ τὸ κέντρον Ο, μέχρις οὗ τὸ κινητὸν σκοπευτικὸν ἐπίπεδον λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ τῆς γωνίας. Τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ ὁποῖον περιέχεται τότε μεταξὺ τῶν σκοπευτικῶν ἐπιπέδων, εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον μέτρον τῆς γωνίας ΒΑΓ.

**66.** *Π ρ ό β λ η μ α Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις προσιτοῦ σημείου Α ἀπὸ ἄλλου ἀπροσίτου ἀλλ' ὁρατοῦ σημείου Γ** (σχ. 23).

*Λ ύ σ ι ς.* Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ Α ὁρίζομεν σημεῖον Β, ἀπὸ τοῦ ὁποίου φαίνονται τὰ Α καὶ Γ καὶ εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις τῆς ἀποστάσεως ΑΒ μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας. Μετὰ τὴν μέτρησιν αὐτῆς τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανόν μας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β μετροῦμεν τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἕνκκα δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι



Σχ. 23

$$\frac{(\text{ΑΓ})}{\text{ἡμΒ}} = \frac{(\text{ΑΒ})}{\text{ἡμΓ}} = \frac{(\text{ΑΒ})}{\text{ἡμ}(\text{Α}+\text{Β})}$$

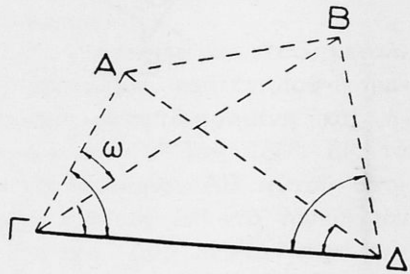
καὶ ἑπομένως

$$(\text{ΑΓ}) = \frac{(\text{ΑΒ})\,\text{ἡμΒ}}{\text{ἡμ}(\text{Α}+\text{Β})}.$$

Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν τῶν Α καὶ Γ.

**67.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων ἀλλ' ὁρατῶν σημείων Α, Β** (Σχ. 24).

*Λύσις.* Ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ὁρίζομεν δύο σημεῖα Γ, Δ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα φαίνονται καὶ τὰ δύο σημεῖα Α,Β ἕκαστον δὲ νὰ εἶναι ὁρατὸν ἀπὸ τὸ ἄλλο. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ΓΔ καὶ τὰς γωνίας ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΒΔΓ καὶ ΑΓΒ. Ἔπειτα διὰ μερικῆς ἐπιλύσεως ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΓΔ, ΒΓΔ εὑρίσκομεν τὰ μήκη (ΑΓ) καὶ (ΓΒ). Οὕτω δὲ γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καὶ τὴν γωνίαν ω. Ἐκ τούτου λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ (§ 63).

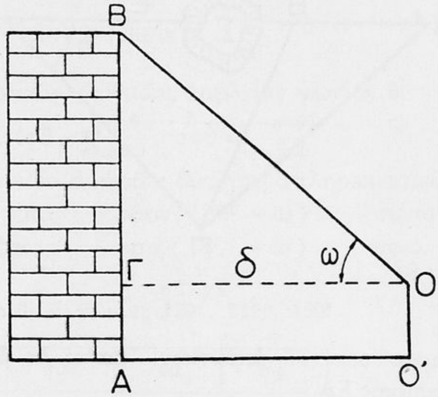


Σχ. 24

**68.** *Πρόβλημα. ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι προσιτὴ** (Σχ. 25).

*Λύσις.* Ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ πύργου ὁρίζομεν καὶ μετροῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΟ' ἔστω δὲ (ΑΟ') = δ. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα εἰς τὸ Ο' τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον ὕψους (ΟΟ') = υ καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΒΟΓ = ω τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖ-

νος ΟΒ μὲ τὴν ὁριζόντιον εὐθεῖαν ΟΓ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι (ΓΒ) = δ ἐφω καὶ ἑπομένως:
(ΑΒ) = υ + (ΓΒ) = υ + δ·ἐφω.



Σχ. 25

**69.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΑΒ ἑνὸς ὄρους** (σχ. 26).

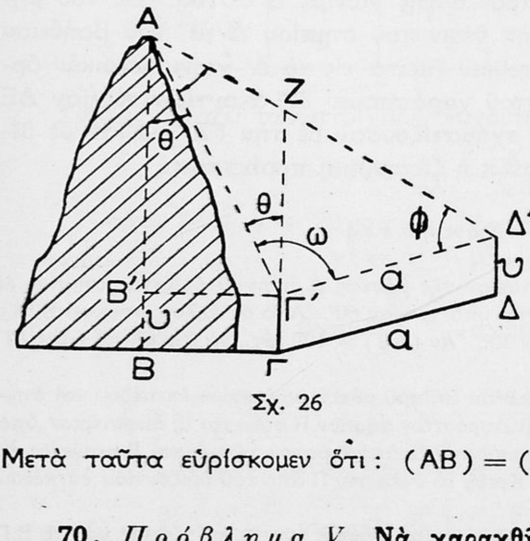
*Λύσις.* Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁρίζεται τὸ ὕψος, χαράσσομεν καὶ μετροῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ.

Ἀπὸ δὲ τῶν ἄκρων τούτου πρέπει νὰ φαίνηται ἡ κορυφὴ Α τοῦ ὄρους. Ἔπειτα εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τοποθετοῦμεν τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον, οὗ ἔστω (ΓΓ′)=υ, τὸ ὕψος. Μετροῦμεν μὲ αὐτὸ τὰς γωνίας ΑΔ′Γ′, = φ, ΑΓ′Δ′ = ω καὶ τὴν θ τῆς ΑΓ′ μὲ τὴν κατακόρυφον ΓΖ. Ἐκ τοῦ τριγώνου δὲ ΑΓ′Δ′, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$(ΑΓ') = \frac{α\,ἡμφ}{ἡμ(φ+ω)}.$$

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒ′Γ′ βλέπομεν ὅτι:

$$(ΑΒ') = (ΑΓ')\,συνθ = \frac{α\,ἡμφ\,συνθ}{ἡμ(ω+φ)}$$



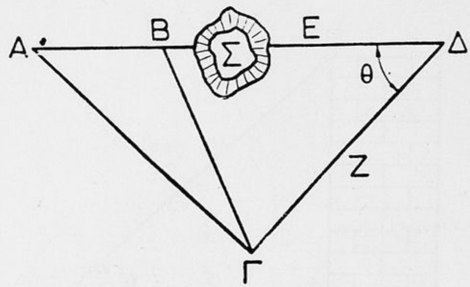
Σχ. 26

Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι: (ΑΒ) = (ΑΒ′) + υ.

**70.** *Πρόβλημα V.* **Νὰ χαραχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους**

**ἡ ὄπισθεν κωλύματος Σ προέκτασις μιᾶς εὐθείας ΑΒ** (σχ. 28).

*Λύσις.* Μετροῦμεν μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας τὴν ἀπόστασιν ΑΒ δύο σημείων τῆς δοθείσης εὐθείας. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν ὁρατὸν σῆμα εἰς σημεῖον Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνονται τὰ σημεῖα Α, Β καὶ ὁ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρος. Πρὸς τὸν χῶρον τοῦτον κατεθύνομεν εὐθεῖαν ΓΖ, τὴν ὁποίαν χαράσσομεν δι' ἀκοντίων. Ἔστω δὲ Δ ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ζητουμένης ΕΔ.




Σχ. 28

Μετροῦμεν ἔπειτα τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΖ καὶ ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ νοητοῦ τριγώνου ΑΓΔ καὶ τὸ μέτρον θ τῆς γωνίας Δ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ μήκους δὲ (ΓΔ) ὁρίζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Δ μὲ τὴν βοήθειαν τῆς μετροταινίας. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα εἰς τὸ Δ γωνιομετρικὸν ὄργανον καὶ τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ χαράσσομεν δι' ἀκοντίων εὐθεῖαν ΔΕ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ καὶ σχηματίζουσαν μὲ τὴν ΓΖ γωνίαν μὲ μέτρον θ. Ἡ ΕΔ εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη προέκτασις.

### Ἀσκήσεις

251. Εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς βάσεως Δ πύργου ὁρίζεται σημεῖον Α ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὁ πύργος φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $60^0$. Ἀπὸ δὲ ἄλλου σημείου Β τῆς εὐθείας ΔΑ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $30^0$. Ἂν (ΑΒ) = 100 μέτ., νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΔΓ τοῦ πύργου.

252. Δύο σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἀπέχουσιν ἀλλήλων 1000 μέτρα. Ἓν ἀπρόσιτον σημεῖον Π φαίνεται ἐξ ἀμφοτέρων ὑπὸ γωνίαν ὕψους $35^0$. Ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ Π ἀπὸ ἑκάστου τῶν Α καὶ Β φαίνεται ἐκ τοῦ ἄλλου ὑπὸ γωνίαν $60^0$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ Π ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῶν Α καὶ Β.

253. Τρία σημεῖα Α,Β, Γ, ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους κεῖνται ἀπ' εὐθείας καὶ τὰ Β,Γ

εἶναι ἀπρόσιτα. Ἓν τέταρτον σημεῖον Δ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους ἀπέχει 600 μέτρα τοῦ Α, φαίνεται δὲ ἐξ αὐτοῦ τὸ μὲν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν $42^0$, τὸ δὲ ΑΓ ὑπὸ γωνίαν $75^0$. Ἀπὸ δὲ τοῦ Α φαίνεται τὸ τμῆμα ΒΔ ὑπὸ γωνίαν $40^0$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως ΒΓ.

## ΠΙΝΑΞ ΤΥΠΩΝ Β΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας θ:

$$ἡμ^2θ + συν^2θ = 1,\ ἐφθ = \frac{ἡμθ}{συνθ},\ σφθ = \frac{συνθ}{ἡμθ}.$$

Σχέσεις τῶν τριγονωμετρικῶν ἀριθμῶν δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν:

$$ἡμ(180^0 - ω) = ἡμω, \qquad συν(180^0 - ω) = -συνω$$
$$ἐφ(180^0 - ω) = -ἐφω, \qquad σφ(180^0 - ω) = -σφω.$$

**Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας $120^0$, $135^0$, $150^0$**

| γωνία | ἡμ. | συν. | ἐφ. | σφ. |
|---|---|---|---|---|
| $120^0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $135^0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| $150^0$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{3}$ |

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ.

$$Α + Β + Γ = 180^0,\ \frac{α}{ἡμΑ} = \frac{β}{ἡμΒ} = \frac{γ}{ἡμΓ} = 2R,$$

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ,\quad β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυνΒ,$$
$$γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ,$$

$$Ε = \frac{1}{2}αβἡμΓ = \frac{1}{2}βγἡμΑ = \frac{1}{2}αγἡμΒ,\quad \frac{α-β}{α+β} = \frac{ἐφ\left(\frac{Α-Β}{2}\right)}{ἐφ\left(\frac{Α+Β}{2}\right)}$$

$$Ε = \frac{α^2ἡμΒἡμΓ}{2ἡμΑ} = \frac{α^2ἡμΒἡμΓ}{2ἡμ(Β+Γ)} = \frac{β^2ἡμΑἡμΓ}{2ἡμΒ} = \frac{β^2ἡμΑἡμΓ}{2ἡμ(Α+Γ)}$$
$$= \frac{γ^2ἡμΑἡμΒ}{2ἡμΓ} = \frac{γ^2ἡμΑἡμΓ}{2ἡμ(Α+Β)}$$

$$συνΑ = \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ},\quad συνΒ \ \frac{α^2+γ^2-β^2}{2αγ},\quad συνΓ = \frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ}.$$

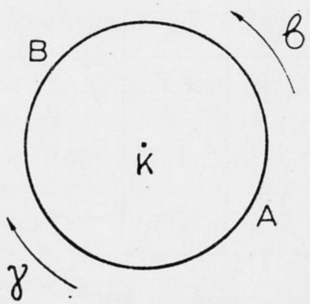
## ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

# ΓΕΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΩΝΙΑΣ Ή ΤΟΞΟΥ

**71. Θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ ἐπὶ περιφερείας.** Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Κ ἓν κινητὸν σημεῖον δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β ἢ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ γ (σχ. 28). Ἡ φορὰ τοῦ βέλους γ, καθ' ἣν κινοῦνται καὶ οἱ δεῖκται ὡρολογίου, λέγεται **ἀρνητικὴ φορά**, ἡ δὲ ἀντίθετος ταύτης φορὰ τοῦ βέλους β λέγεται **θετικὴ φορά**.




Σχ. 28

**72. Ἀνύσματα - Ἄξων.** Ἂς νοήσωμεν ὅτι ἓν κινητὸν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ εὐθείας Χ'Χ καὶ μεταβαίνει ἐκ σημείου Α εἰς ἄλλο Β αὐτῆς (σχ. 29).

Ὁ δρόμος ΑΒ, τὸν ὁποῖον διανύει, λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄνυσμα***. Τοῦτο ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Σημειώνεται δὲ οὕτως: $\overline{AB}$. Τὸ σύμβολον $\overline{BA}$ σημαίνει ἄνυσμα μὲ ἀρχὴν Β, τέλος Α καὶ φορὰν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Διακρίνομεν δὲ τὴν μίαν φορὰν ἀπὸ τὴν ἄλλην ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τῆς εὐθείας Χ'Χ ὁρίζομεν αὐθαιρέτως ἓν σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν καὶ ἓν ἄνυσμα ΟΘ. Τοῦτο λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους καὶ καλοῦμεν ἰδιαιτέρως **διευθύνον ἄνυσμα**.

Ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φορὰ ὀνομάζεται **θετικὴ φορὰ** ἐπὶ τῆς

---

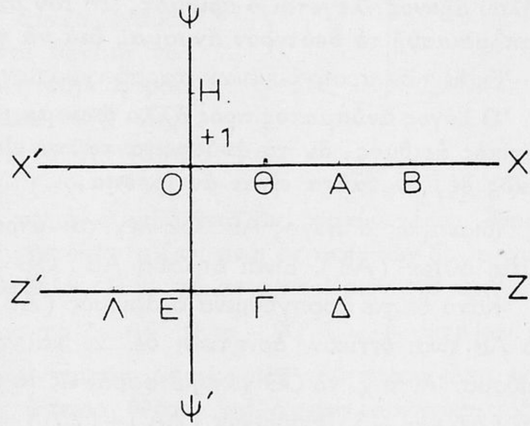
* Τὸ ἄνυσμα λέγεται συνήθως καὶ διάνυσμα.

εὐθείας Χ'Χ καὶ πάσης ἄλλης Ζ'Ζ παραλλήλου πρὸς αὐτήν. Ἡ δὲ ἀντίθετος ταύτης φορὰ λέγεται **ἀρνητικὴ φορά.**

Πᾶσα εὐθεῖα Χ'Χ ἢ Ζ'Ζ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὡρίσθη τὸ διευθύνον ἄνυσμα, λέγεται ἄξων.

Ἡ ἀρχὴ Ο διαιρεῖ τὸν ἄξονα εἰς τὸν **θετικὸν ἡμιάξονα** ΟΧ, ὅστις περιέχει τὸ ΟΘ, καὶ εἰς τὸν **ἀρνητικὸν ἡμιάξονα** ΟΧ'.

Πᾶν ἄνυσμα, π.χ. τὸ ΑΒ, ἔχον θετικὴν φορὰν λέγεται **θετικὸν ἄνυσμα.** Ἂν δὲ ἔχῃ ἀρνητικὴν φορὰν ὡς τὸ $\overline{ΔΛ}$, λέγεται **ἀρνητικὸν ἄνυσμα.**



Σχ. 29

Ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλων ἀξόνων λέγονται **ὁμόρροπα** μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν· **ἀντίρροπα** δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον φοράν.

Ἂν δὲ δύο ἢ περισσότερα ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλων ἀξόνων εἶναι ἐφαρμόσιμα, λέγονται **ὁμορρόπως ἴσα,** ἂν εἶναι ὁμόρροπα, **ἀντιρρόπως δὲ ἴσα,** ἂν εἶναι ἀντίρροπα.

Ἂν ὁ θετικὸς ἡμιάξων ΟΧ στραφῇ περὶ τὴν ἀρχὴν Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ κατὰ $90^0$, θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν ΟΨ, τὸ δὲ $\overline{ΟΘ}$ ἐπὶ τοῦ $\overline{ΟΗ}$. Τοῦτο λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος Ψ'Ψ, ὅστις περιέχει αὐτό.

**73. Μῆκος ἀνύσματος.** Τὸ ἄνυσμα ΛΔ (σχ. 29) ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἴσων πρὸς τὸ $\overline{ΑΒ}$. Λέγεται δὲ γινόμενον τοῦ ΑΒ ἐπὶ 3 εἶναι δηλαδὴ $\overline{ΛΔ}=\overline{ΑΒ}\cdot 3$. Ὁμοίως $\overline{ΔΛ}=\overline{ΒΑ}\cdot 3$. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ΔΛ λέγεται καὶ γινόμενον τοῦ ΑΒ ἐπὶ $(-3)$, ἤτοι: $\overline{ΔΛ}=\overline{ΑΒ}\cdot(-3)$. Κατὰ ταῦτα.

**Τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν εἶναι ἄνυσμα ὁμόρ-**

**ροπον πρὸς αὐτό, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, ἀντίρροπον δὲ πρὸς αὐτό, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.**

Ἕνεκα τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος $\overline{ΛΔ} = \overline{ΑΒ} \cdot 3$, ὁ 3 λέγεται λόγος τοῦ $\overline{ΛΔ}$ πρὸς τὸ $\overline{ΑΒ}$, ἤτοι $\overline{ΛΔ} : \overline{ΑΒ} = 3$. Ὁμοίως $ΔΛ : ΒΑ = +3$ καὶ $\overline{ΔΛ} : \overline{ΑΒ} = -3$. Ὥστε:

**Λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ παραλλήλου ἄξονος, λέγεται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ἄνυσμα, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.**

Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων βλέπομεν ὅτι:

**Ὁ λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα παράλληλόν του εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἂν τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι ὁμόρροπα· ἀρνητικὸς δέ, ἂν ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα.**

Ἰδιαιτέρως ὁ λόγος $\overline{ΑΒ} : \overline{ΟΘ}$ λέγεται **μῆκος** τοῦ $\overline{ΑΒ}$ καὶ σημειοῦται οὕτω: $(\overline{ΑΒ})$. Εἶναι δηλαδὴ $\overline{ΑΒ} : \overline{ΟΘ} = (\overline{ΑΒ})$.

Κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα ὁ ἀριθμὸς $(\overline{ΑΒ})$ θὰ εἶναι θετικός, ἂν τὸ $\overline{ΑΒ}$ εἶναι θετικόν, ἀρνητικὸς δέ, ἂν καὶ τὸ $\overline{ΑΒ}$ εἶναι ἀρνητικὸν ἄνυσμα. Ἂν π.χ. τὸ $\overline{ΟΘ}$ χωρῇ 3 φορὰς εἰς τὸ $\overline{ΛΔ}$, θὰ εἶναι $(\overline{ΛΔ}) = 3$ καὶ $(\overline{ΔΛ}) = -3$. Ἑπομένως $(\overline{ΛΔ}) + (\overline{ΔΛ}) = 0$.

Τὰ ἀνύσματα ΛΔ καὶ ΔΛ λέγονται **ἀντίθετα** ἀνύσματα.

**74. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου.** Ἂς νοήσωμεν ὅτι ἓν κινητὸν σημεῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἓν σημεῖον Α περιφερείας Ο καὶ κινούμενον ἐπ' αὐτῆς σταματᾷ εἰς τὸ Μ. Οὕτω τὸ κινητὸν διανύει τὸ τόξον ΑΒΜ. Ἂν δὲ κινηθῇ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ διανύσῃ ἄλλο τόξον ΑΒ'Μ ( σχ. 30 ). Κατὰ ταῦτα:

**Ἕκαστον τόξον θεωρεῖται ὡς δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ἓν κινητὸν κατά τινα φοράν.**

Χάριν τῆς γενικότητος ὀνομάζομεν τόξον καὶ τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον διανύει τὸ κινητόν. ἂν σταματήσῃ εἰς τὸ Μ κατὰ τὴν 2αν ἢ τὴν 3ην κτλ. ἄφιξιν εἰς αὐτό. Ὥστε:

**Τόξον εἶναι τυχὼν δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ἓν κινητὸν κινούμενον ἐπὶ περιφερείας κατά τινα φοράν.**

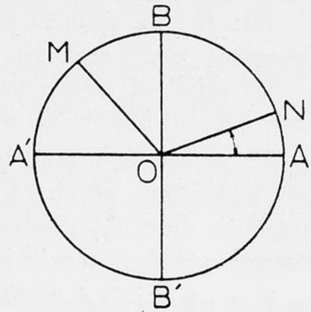
Τὸ σημεῖον Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἡ κίνησις, λέγεται **ἀρ-**

**χή**, τὸ δὲ Μ, εἰς τὸ ὁποῖον σταματᾷ, λέγεται **τέλος** τοῦ τόξου.

Ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑνὸς τόξου, λέγεται **ἀρχική**, ἡ δὲ καταλήγουσα εἰς τὸ τέλος λέγεται **τελικὴ** ἀκτὶς τοῦ τόξου.

Ἡ φορὰ τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ λέγεται καὶ **φορὰ** τοῦ διανυομένου τόξου.

Τὰ τόξα δέ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν φοράν, λέγονται **θετικὰ** τόξα· τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὴν φορὰν τόξα λέγονται **ἀρνητικὰ** τόξα. Π.χ. τὸ ΑΒΜ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ ΑΒ′Μ εἶναι ἀρνητικὸν τόξον (σχ. 30).




Σχ. 30

Ἡ μονὰς ΑΝ τῶν τόξων λαμβάνεται ὡς θετικὸν τόξον. Ἑπομένως τὰ μέτρα τῶν μὲν θετικῶν τόξων εἶναι θετικοί, τῶν δὲ ἀρνητικῶν εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. Π.χ. τὸ τεταρτημόριον ΑΒ ἔχει μέτρον $90^0$ ἢ $\frac{\pi}{2}$ ἀκτινίων, τὸ δὲ ΑΒ′ εἶναι $-90^0$ ἢ $-\frac{\pi}{2}$ ἀκτινίων.

Μετὰ τὴν γενίκευσιν ταύτην τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειρα θετικὰ καὶ ἄπειρα ἀρνητικὰ τόξα ΑΜ. Ἂν δὲ $\tau$ εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς τούτων, τὸ μέτρον, $\chi$ παντὸς ἄλλου τόξου ΑΜ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν $\tau$ προστεθῇ ἓν πολλαπλάσιον τοῦ μέτρου μιᾶς θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς περιφερείας. Θὰ εἶναι δηλαδή:

$$\chi = \tau + 360^0 k \quad \text{ἢ} \quad \chi = \tau + 400^0 k \quad \text{ἢ} \quad \chi = \tau + 2k\pi \qquad (1)$$

ἂν $k$ εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**75. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας.** Ὅταν τὸ κινητὸν σημεῖον διανύσῃ τὸ τόξον ΑΒΜ, ἡ ἀκτὶς ΟΑ στρεφομένη περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν γωνίαν ΑΟΜ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒΜ. Ὅταν δὲ τὸ κινητὸν γράψῃ τὸ τόξον ΑΒ′Μ, ἡ ΟΑ θὰ γράψῃ τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν ΑΟΜ. Καὶ ὅταν τὸ σημεῖον Μ γράψῃ τὸ τόξον ΑΒΜΒ′ΑΜ, λέγομεν χάριν τῆς γενικότητος ὅτι καὶ ἡ ΟΑ γράφει πάλιν γωνίαν βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχικὴ πλευρὰ** ἡ δὲ ΟΜ **τελικὴ πλευρὰ** πάσης τοιαύτης γωνίας. Σημειώνομεν δὲ μίαν τοιαύτην γωνίαν μὲ τὸ σύμβολον $\widehat{OA,OM}$.

Μία ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων λέγεται θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν ἡ ΟΑ γράφῃ αὐτὴν κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

Ἑπομένως αἱ θετικαὶ γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ θετικῶν τόξων αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ ἀρνητικῶν τόξων καὶ ἀντιστρόφως.

Τὸ μέτρον δὲ πάσης τοιαύτης γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (§ 7). Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἐξ ὅσων τόξων ἴσων πρὸς τὴν μονάδα ΑΝ ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ἓν τῶν τόξων ΑΜ, ἐκ τόσων γωνιῶν ΑΟΝ ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ εἰς τὸ τόξον ἐκεῖνο ΑΜ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{OA,OM}$.

**76. Ἴσα καὶ ἀντίθετα τόξα ἢ γωνίαι.** Μετὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τῶν τόξων καὶ τῶν γωνιῶν οἱ ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστοὶ ὁρισμοὶ τῆς ἰσότητος δύο τόξων ἢ δύο γωνιῶν δὲν ἐπαρκοῦσι. Τούτους γενικεύομεν ὡς ἑξῆς:.

**Δύο γωνίαι ἢ δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἴσα, ἂν ἔχωσιν ἴσα μέτρα, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

**Δύο δὲ γωνίαι ἢ δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἀντίθετα, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετα μέτρα, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

**77. Ἄθροισμα τόξων ἢ γωνιῶν καὶ διαφορὰ δύο τόξων ἢ δύο γωνιῶν.** Ἕκαστον ἀπὸ τὰ τόξα ΑΝ, ΝΒ, ΒΜ (σχ. 30) ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου. Λέγονται δὲ ταῦτα διαδοχικὰ τόξα. Ἄθροισμα δὲ αὐτῶν εἶναι τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Μ καὶ μέτρον τὸ ἄθροισμα $(\widehat{AN})+(\widehat{NB})+(\widehat{BM})$ τῶν μέτρων τῶν τόξων τούτων. Ἂν π.χ. $(\widehat{AN})=1^0$, $(NB)=89^0$, $(\widehat{BM})=30^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ τόξον ΑΒΜ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $1^0+89^0+30^0=120^0$.

Ἂν δὲ $(\widehat{AN})=361^0$, $(\widehat{NB})=89^0$, $(\widehat{BM})=390^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΜ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον

$361^0+89^0+390^0=840^0$. Καὶ ἂν $(\widehat{AN})=-359^0$, $(\widehat{NB})=449^0$, $(\widehat{BM})=-330^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἐκ τῶν τόξων AM τὸ ἔχον μέτρον $-359^0+449^0-330^0=-240^0$.

**Ἄθροισμα δὲ τυχόντων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς ἐκεῖνα.**

**Ἄθροισμα δὲ διαφόρων γωνιῶν λέγεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἂν αὗται γίνωσιν ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.**

Ἂν θεωρήσωμεν τὰ θετικὰ καὶ μικρότερα περιφερείας τόξα AB, AN, NB ( σχ. 30 ), εἶναι φανερὸν ὅτι $\widehat{AN}=\widehat{AB}-\widehat{NB}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{AN}=\widehat{AB}+\widehat{BN}$, ἕπεται ὅτι $\widehat{AB}-\widehat{NB}=\widehat{AB}+\widehat{BN}$. Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι ἡ διαφορὰ $\widehat{AB}-\widehat{NB}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ μειωτέου $\widehat{AB}$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου τόξου $\widehat{NB}$.

Ἀπὸ τοῦτο ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

**Διαφορὰ ἑνὸς τόξου ἀπὸ ἄλλο εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου.**

**Διαφορὰ δὲ γωνίας ἀπὸ ἄλλης εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἂν γίνωσιν ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.**

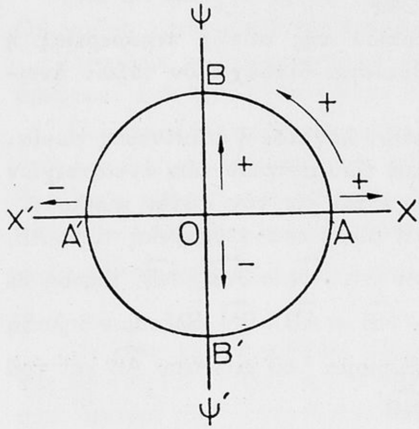
**78. Τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ πρωτεύοντες ἄξονες αὐτοῦ.** Χάριν ἁπλοποιήσεως τῶν διαφόρων ζητημάτων τὰ τόξα θεωροῦνται ὡς ἀνήκοντα εἰς περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς θεωρεῖται ὡς μονάς.

Πᾶσα τοιαύτη περιφέρεια λέγεται **τριγωνομετρικὴ περιφέρεια**. Ὁ δὲ ὑπ' αὐτῆς ὁριζόμενος κύκλος λέγεται ἐπίσης **τριγωνομετρικὸς κύκλος**.

Ἐπίσης διὰ τὴν εὐκολωτέραν συσχέτισιν τῶν τόξων καὶ τῶν στοιχείων αὐτῶν θεωροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ τόξα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν ἓν σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν αὐθαιρέτως ( σχ. 31 ).

Ἡ ἀρχικὴ ἀκτὶς OA λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος X'X. Ὁ δὲ ἄξων οὗτος λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄξων τῶν συνημιτόνων**.

Ἂν ἡ ἀκτὶς ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ Ο κατὰ $90^0$ καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀκτῖνος ΟΒ. Αὕτη λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὸ ἄξονος Ψ΄Ψ. Οὗτος δὲ λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄξων τῶν ἡμιτόνων**. Οἱ δύο δὲ οὗτοι κάθετοι ἄξονες Χ΄Χ, Ψ΄Ψ ὁμοῦ λέγονται **πρωτεύοντες ἄξονες** τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.




Σχ. 31

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι εἰς ἄλλην ἀρχὴν τόξων ἀντιστοιχεῖ ἄλλο ζεῦγος πρωτευόντων ἀξόνων.

Ἕκαστον ζεῦγος πρωτευόντων ἀξόνων διαιρεῖ τὴν τριγωνομετρικὴν περιφέρειαν εἰς 4 τεταρτημόρια. Ταῦτα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν λέγονται κατὰ σειρὰν **πρῶτον, δεύτερον, τρίτον, τέταρτον,** τεταρτημόριον. Οὕτω διὰ τὸ σύστημα πρωτευόντων τόξων Χ΄Χ, Ψ΄Ψ (σχ. 31) τὰ τεταρτημόρια ταῦτα κατὰ σειρὰν εἶναι ΑΒ, ΒΑ΄, Α΄Β΄, Β΄Α.

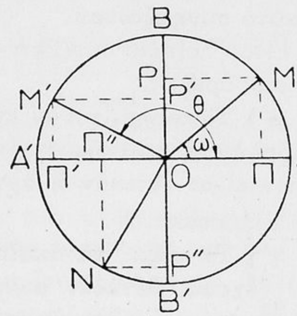
**Ἀσκήσεις**

254. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ $45^0$ ἢ $-45^0$
255. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ $30^0$ ἢ $-30^0$
256. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ $90^0$ ἢ $-90^0$
257. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ $180^0$ ἢ $270^0$

**79. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχόντος τόξου.** Α΄) Ἐμάθομεν (§ 9) ὅτι, ἂν ω (σχ. 32) εἶναι τυχοῦσα ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ, εἶναι ἡμω$=\frac{\overline{\Pi M}}{\overline{OM}}$. Ἂν δὲ $(\overline{OM})=1$, ὁ προηγουμενος ὁρισμὸς γίνεται ἡμω $=(\overline{\Pi M})$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\Pi M})=(\overline{OP})$, ἕπεται ὅτι: ἡμω $=(\overline{OP})=\overline{OP}:\overline{OB}$·

Τὸ μῆκος τοῦτο ($\overline{OP}$) ὀνομάζομεν **ἡμίτονον** καὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΑΜ τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας ἥτις ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας ω. Ἐπεκτείνομεν δὲ καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν τριγωνομετρικῆς περιφερείας. Ὥστε:



Σχ. 32

**Ἡμίτονον τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.**

Τοῦ τυχόντος τόξου ΑΜ π.χ. ἡμίτονον εἶναι ὁ ἀριθμὸς ($\overline{OP}$), ἤτοι ὁ λόγος $\overline{OP} : \overline{OB}$. Ἐπίσης ἡμίτονον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΝ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ($\overline{OP''}$), ἤτοι $\overline{OP''} : \overline{OB}$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

**α') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.**

Εἶναι λοιπὸν ἡμ $(2k\pi+\tau) =$ ἡμτ, ἂν $k$ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**β') Τὸ ἡμίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.**

Ἑπομένως :

**γ') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α' ἢ β' τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ γ' ἢ δ' τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον.**

Β') Ὁμοίως τὸν ὁρισμὸν συνω $= (\overline{O\Pi}) = \overline{O\Pi} : \overline{OM} = \overline{O\Pi} : \overline{OA}$ ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας ω καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν τριγωνομετρικῆς περιφερείας. Ὥστε.

**Συνημίτονον τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

**α′) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον.**

Εἶναι λοιπὸν συν$(2k\pi + \tau)$ = συν$\tau$, ἂν $k$ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**β′) Τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.**

Ἑπομένως :

**γ′) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α′ ἢ δ′ τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὸν συνημίτονον. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β′ ἢ γ′ ἔχουσιν ἀρνητικὸν συνημίτονον.**

**80. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχούσης γωνίας.** Προηγουμένως εἴπομεν ὅτι οἱ γνωστοὶ ὁρισμοὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας ω συμπίπτουσι κατ' ἐπέκτασιν μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς τῶν ἀντιστοίχων τόξων.

Τὴν σύμπτωσιν ταύτην γενικεύομεν δίδοντες τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς:

**α′) Ἡμίτονον τυχούσης γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.**

**β′) Συνημίτονον τυχούσης γωνίας λέγεται τὸ συνημίτονον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.**

Διὰ τοὺς λόγους τούτους ,ὅσα θὰ μάθωμεν διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων, ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς αὐτά.

### Ἀσκήσεις

258. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $35^0, -35^0, 127^0, -127^0, 348^0, -348^0, 205^0, -205^0$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖα ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

259. Νὰ διακρίνητε ποῖαι ἀπὸ τὰς γωνίας $175^0, -175^0, 292^0, -292^0, 100^0, -100^0$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖαι ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

260. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $\frac{\pi}{5}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$ $\frac{11\pi}{7}$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖα ἀρνητικὸν συνημίτονον.

261. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον καὶ θετικὸν συνημίτονον. Εἰς ποῖον δὲ τὰ ἔχοντα ἀρνητικοὺς καὶ τοὺς δύο τούτους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

262. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον καὶ ἀρνητικὸν συνημίτονον. Εἰς ποῖον δὲ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον καὶ θετικὸν συνημίτονον.

263. Νὰ εὕρητε τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῶν τόξων ἢ τῶν γωνιῶν $405^0 (= 360^0 + 45^0)$, $750^0 = (360^0 \times 2 + 30^0)$, $510^0 = (360^0 + 150^0)$.

**~~81.~~ Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου ἢ γωνίας.** α') Ἄς παρακολουθήσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀνύσματος ΟΡ ( σχ. 32 ) ἢ τοῦ ΠΜ ὁμορρόπως ἴσου πρὸς αὐτό, ὅταν τὸ πέρας Μ τόξου ΑΜ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Οὕτως εὐκόλως σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου τόξου τ, ἂν τοῦτο βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$.

$$\begin{array}{l|lllllllll}
\tau & 0^0 & \nearrow & 90^0 & \nearrow & 180^0 & \nearrow & 270^0 & \nearrow & 360^0 \\
 & 0 & \nearrow & \frac{\pi}{2} & \nearrow & \pi & \nearrow & \frac{3\pi}{2} & \nearrow & 2\pi \\
\text{ἡμτ} & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0
\end{array}$$

β') Ὁμοίως παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀνύσματος ΟΠ σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου τόξου, ἂν τοῦτο βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$.

$$\begin{array}{l|lllllllll}
\tau & 0^0 & \nearrow & 90^0 & \nearrow & 180^0 & \nearrow & 270^0 & \nearrow & 360^0 \\
 & 0 & \nearrow & \frac{\pi}{2} & \nearrow & \pi & \nearrow & \frac{3\pi}{2} & \nearrow & 2\pi \\
\text{συντ} & 1 & \searrow & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 & \nearrow & 1
\end{array}$$

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς $360^0$, τὸ πέρας Μ αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὰ αὐτὰ κατὰ σειρὰν σημεῖα. Ἑπομένως τὸ ἡμίτονον λαμβάνει τὰς εἰς τὸν ἀνωτέρω α' πίνακα ἀναγραφομένας τιμὰς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Τὸ δὲ συνημίτονον λαμβάνει τὰς εἰς τὸν β' πίνακα τιμὰς κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πινάκων βλέπομεν ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ **ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου** εἶναι 1, ἡ δὲ ἐλαχίστη $-1$.

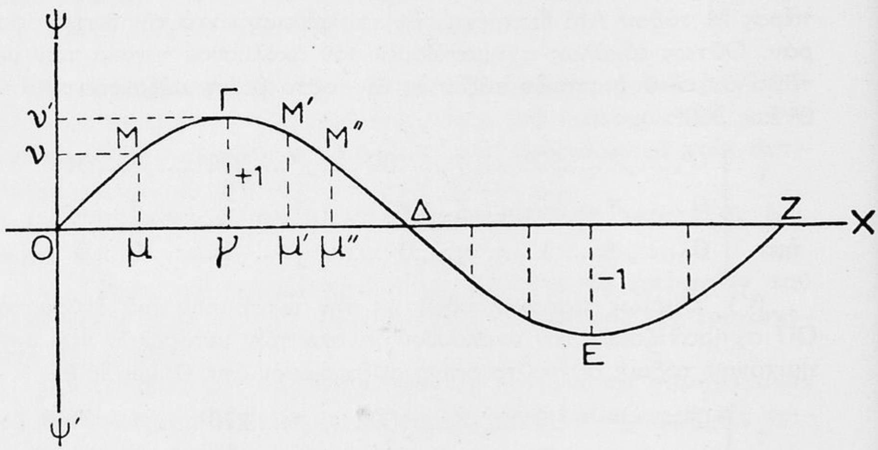
**Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ δι' ἀρνητικὰ τόξα, ἤτοι εἶναι γενικόν..**

**82. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας.** Τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου τόξου αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν δύο καθέτους ἄξονας Χ'Χ, Ψ'Ψ τεμνομένους εἰς τὸ σημεῖον Ο ( σχ. 33 ).

Ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ ὁρίζομεν ἄνυσμα Ομ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος $(\overset{\frown}{AM})$. Ἐπὶ δὲ τοῦ ΟΨ ὁρίζομεν ἄλλο ἄνυσμα Ον ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ $(\overset{\frown}{AM})$.

Ἔπειτα ἐκ τῶν ἄκρων μ καὶ ν τῶν ἀνυσμάτων τούτων φέρομεν



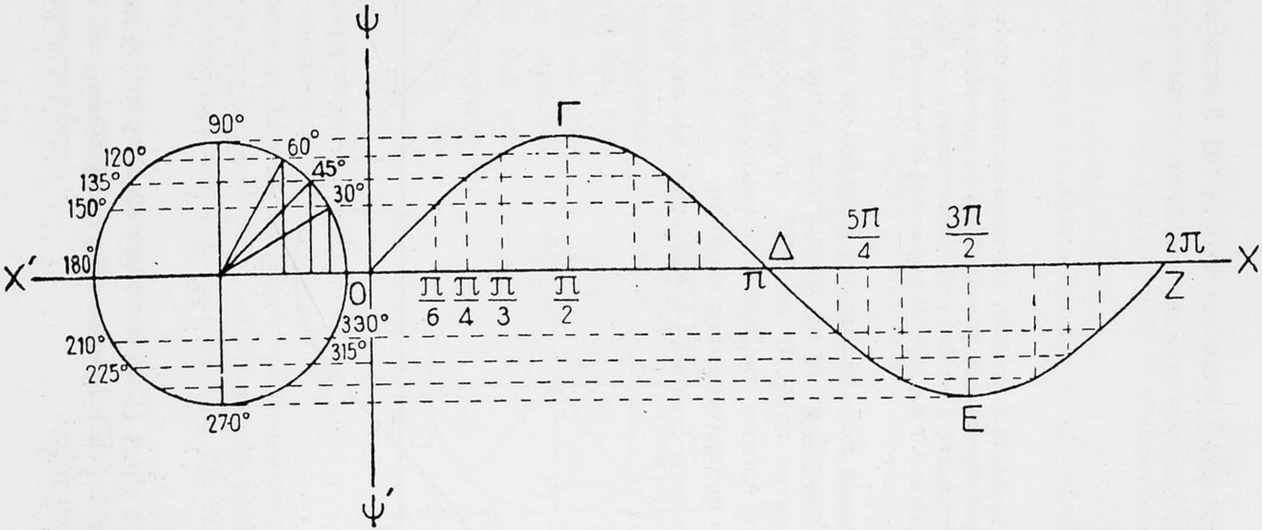

Σχ. 33

εὐθείας καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς ἄξονας Χ'Χ, Ψ'Ψ. Αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν $(\overline{O\mu}) = (\overset{\frown}{AM})$ καὶ $(\overline{O\nu}) =$ ἡμ $(\overset{\frown}{AM})$.

Ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως μὲ ἄλλα τόξα, ὁρίζομεν σειρὰν ἄλλων σημείων Γ, Μ', Μ'', Δ, Ε, Ζ κ.τ.λ., ὅπως λεπτομερέστερον φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 34 σελὶς 107.

Πάντα τὰ σημεῖα ταῦτα ἀποτελοῦσι μίαν καμπύλην ΟΓΔΕΖ, ἥτις λέγεται ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.

Παρατηροῦντες ὅτι $(\overline{\mu M})$ ἢ $(\overline{O\nu})$ εἶναι ἡμίτονον τοῦ τόξου,


Ψ
Ψ′
X′
X
O
Γ
Δ
E
Z
90°
60°
45°
30°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
270°
315°
330°
π/6
π/4
π/3
π/2
π
5π/4
3π/2
2π

Σχ. 34

ὅπερ ἔχει μῆκος ($\overline{O\mu}$), ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ($\overline{M\mu}$) μετὰ τοῦ ($\overline{O\mu}$) δεικνύει πῶς μεταβάλλεται τὸ ἡμίτονον τόξου μετὰ τοῦ τόξου.

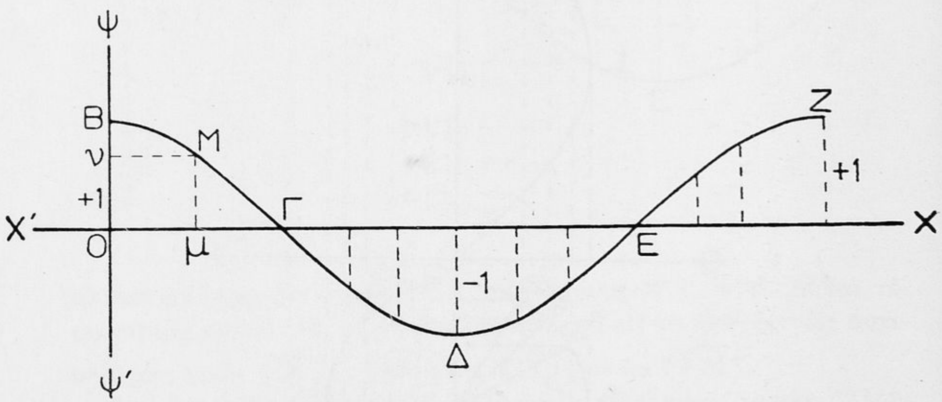
### Ἀσκήσεις

264. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου τόξου, ἂν τοῦτο ἐλαττοῦται ἀπὸ $0^0$ ἕως $-360^0$. Νὰ ἐπεκταθῇ δὲ καταλλήλως ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.

265. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς παραστάσεως $1 +$ ἡμχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

**83. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου τόξου.** Ἂν ἐργασθῶμεν μὲ τὰ συνημίτονα διαφόρων τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ $0^0$ καὶ $360^0$, ὅπως προηγουμένως εἰργάσθημεν διὰ τὰ ἡμίτονα, ὁρίζομεν τὴν καμπύλην ΒΓΔΕΖ (σχ. 25). Αὕτη λέγεται **συνημιτονοειδὴς** καμπύλη.

Παρατηροῦντες ὅτι ($\overline{\mu M}$) ἢ ($\overline{O\nu}$) εἶναι τὸ συνημίτονον τόξου,




Σχ. 35

τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ($\overline{O\mu}$) ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ (μΜ) μετὰ τοῦ ($\overline{O\mu}$) δεικνύει πῶς μεταβάλλεται τὸ συνημίτονον τόξου μετὰ τοῦ τόξου.

**Ἀσκήσεις**

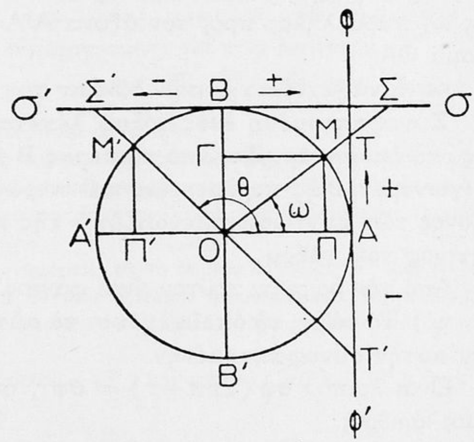
266. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ἂν τὸ τόξον βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $-360^0$. Νὰ ἐπεκταθῇ δὲ ἀντιστοίχως ἡ συνημιτονοειδὴς καμπύλη.

267. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς παραστάσεως $-1+$ συνχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

## 84. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχόντος τόξου.

Α΄) Ἐμάθομεν ὅτι διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω εἶναι ἐφω$=\dfrac{\overline{\Pi M}}{\overline{O\Pi}}=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$(σχ. 36). Ἂν δὲ $(\overline{OA})=1$, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς γίνεται ἐφω$=(\overline{AT})$

Τὴν εὐθεῖαν φ΄φ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΤ, ὀνομάζομεν **ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων**. Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Β΄Β ἔχει διευθύνον ἄνυσμα τὸ ΟΒ. Τὸν δὲ προηγούμενον ὁρισμὸν τῆς ἐφω ἐπεκτείνομεν καὶ διὰ τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας ω καὶ διὰ πᾶν ἐν γένει τόξον τριγωνομετρικῆς περιφερείας, θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ $0^0$. Ὥστε:



Σχ. 36.

**Ἐφαπτομένη τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τὸ τόξον καὶ πέρας τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.**

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι:

**α΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.**

Εἶναι λοιπὸν ἐφ$(2k\pi+\tau)$ = ἐφτ, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**β΄) Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ΑΜ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΑΤ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.**

Ἑπομένως :

**γ΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ γ΄ τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην.**

Β΄) Ὁμοίως τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν σφω = $(\overline{\text{ΒΣ}})$ ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ $0^0$.

Πρὸς τοῦτο τὴν εὐθεῖαν σ΄σ ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καλοῦμεν **ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων.** Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Α΄Α ἔχει τὸ αὐτὸ διευθῦνον ἄνυσμα ΟΑ.

Κατὰ τὰ λεχθέντα λοιπὸν δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

**Συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πέρας Β τοῦ α΄ τεταρτημορίου τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καὶ περατοῦται εἰς τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶναι φανερὰ τὰ ἑξῆς:

**α΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.**

Εἶναι λοιπὸν σφ $(2k\pi+\tau)$ = σφτ, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**β΄) Ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΒΣ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.**

Ἑπομένως :

**γ΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ γ΄ τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὴν συνεφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον ἔχουσι ἀρνητικὴν συνεφαπτομένην.**

**85. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας.** Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας ω (σχ. 36) συμπίπτει ἀντιστοίχως μὲ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τοῦ ἀντιστοίχου τόξου. Διὰ νὰ εἶναι ἡ σύμπτωσις αὕτη γενική, δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

**Ἐφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν ἡ γωνία αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.**

**Συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ συνεφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ἡ γωνία γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.**

Κατὰ ταῦτα πᾶν ὅ,τι γνωρίζομεν ἢ θὰ μάθωμεν διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τῶν τόξων ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην τῶν γωνιῶν.

### Ἀσκήσεις

268. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $68^0, -68^0, 135^0, -145^0, 300^0, 125^0$ ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην καὶ ποῖα ἀρνητικήν.

269. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $\frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{7}, \frac{5\pi}{9}$ ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην καὶ ποῖα ἀρνητικήν.

270. Νὰ ὁρίσητε τὰ τεταρτημόρια, εἰς τὰ ὁποῖα λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ θετικὴν συνεφαπτομένην. Καὶ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀρνητικοὺς καὶ τοὺς δύο τούτους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

271. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ θετικὸν ἡμίτονον ἢ συνημίτονον. Καὶ ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ ἀρνητικὸν ἡμίτονον ἢ συνημίτονον.

272. Νὰ εὕρητε τὴν ἐφ $(360^0k + 45^0)$ καὶ τὴν σφ $(360^0k + 30^0)$, ἂν $k$ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

273. Νὰ εὕρητε τὴν ἐφ $(2k\pi + \frac{\pi}{3})$ καὶ τὴν σφ $(2k\pi + \frac{\pi}{3})$, ἂν $k$ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

**86. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου.** Παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τοῦ $(\overline{AT})$ καὶ τοῦ $(\overline{B\Sigma})$ (σχ. 36), ὅταν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου ΑΜ διαγράφῃ τὸ α′ καὶ β′ τεταρτημόριον, καταλήγομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις εἶναι σύμπτυξις τῶν γνωστῶν πινάκων (§ § 25, 35, 58).

$$\begin{array}{r} \\ \tau \\ \\ \text{έφτ} \\ \text{σφτ} \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0^0 \ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots 90^0 \ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots 180^0 \\ 0 \ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \nearrow \ldots\ldots \pi \\ 0 \ldots\ldots \nearrow \ldots + \infty \mid - \infty \ldots \nearrow \ldots\ldots 0 \\ \infty \ldots\ldots \searrow \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \searrow \ldots\ldots -\infty \end{array}\right.$$

Ἂν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὸ γ′ τεταρτημόριον, ὁ ἀριθμὸς ( $\overline{AT}$ ) βαίνει αὐξανόμενος μέχρι τοῦ $+\infty$, μεταπηδᾷ πάλιν εἰς τὸ $-\infty$ εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Β′, ἐξακολουθεῖ αὐξανόμενος καὶ γίνεται 0, ὅταν τὸ Μ εὑρεθῇ εἰς τὴν ἀρχὴν Α.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς ( $\overline{B\Sigma}$ ) μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$, εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Α′. Ἔπειτα δὲ ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενος ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην κίνησιν τοῦ Μ. Ἐκ πάντων τούτων προκύπτει ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

$$\begin{array}{r} \\ \tau \\ \\ \text{έφτ} \\ \text{σφτ} \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0^0 \ldots \nearrow \ldots 90^0 \ldots \nearrow \ldots 180^0 \ldots \nearrow \ldots 270^0 \ldots \nearrow \ldots 360^0 \\ 0 \ldots \nearrow \ldots \frac{\pi}{2} \ldots \nearrow \ldots \pi \ldots \nearrow \ldots \frac{3\pi}{2} \ldots \nearrow \ldots 2\pi \\ 0 \ldots \nearrow . + \infty \mid - \infty \nearrow \ldots 0 \ldots \nearrow \ldots + \infty \mid - \infty . \nearrow \ldots 0 \\ \infty \ldots \searrow \ldots 0 \ldots \searrow \ldots - \infty \mid + \infty . \searrow \ldots 0 \ldots \searrow \ldots - \infty \end{array}\right.$$

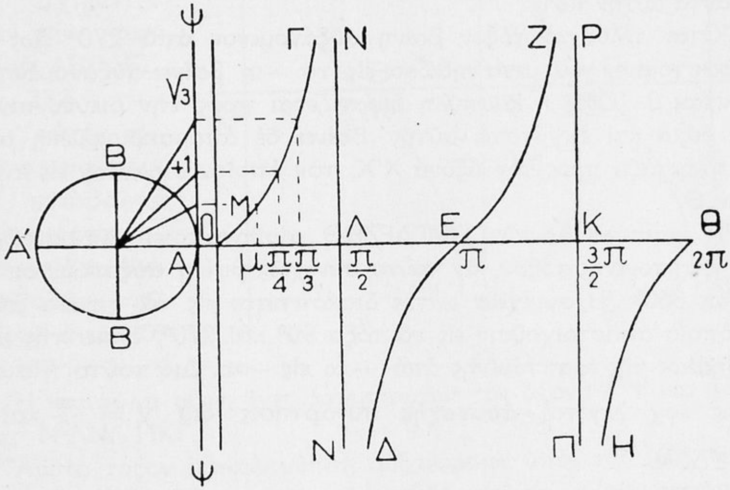
Ἂν δὲ τὸ τόξον τ ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς $360^0$, τὸ πέρας Μ αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰν θέσεις, ἕκαστος δὲ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἐφτ καὶ σφτ λαμβάνει τὰς προηγουμένας τιμὰς αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

**87. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης τόξου.** Τὴν προηγουμένως σπουδασθεῖσαν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ′Χ ( σχ. 37 ) ὁρίζομεν ἄνυσμα ΟΛ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος $\frac{\pi}{2}$ τεταρτημορίου τριγωνομετρικῆς περιφερείας, ἄνυσμα ΟΕ μήκους π, ἄλλο ΟΚ μήκους $\frac{3\pi}{2}$ καὶ ἄλλο ΟΘ μήκους 2π.

Εἰς τυχὸν τόξον μήκους ($\overline{O\mu}$) $< \frac{\pi}{2}$ ἀντιστοιχεῖ ἄνυσμα μΜ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ Χ καὶ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου τούτου. Ἂν δὲ τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $90^0$, τὸ μῆκος του βαίνει αὐξανόμενον ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ἄκρον μ τοῦ ἀνύσματος Ομ ἀπὸ τοῦ Ο πλησιάζει πρὸς τὸ Λ καὶ συμπίπτει μὲ αὐτό, ἂν τὸ τόξον γίνῃ $90^0$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0




Σχ. 37

ἕως $+\infty$, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα μΜ βαίνουσιν αὐξανόμενα ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$. Τὰ ἄκρα δὲ Μ αὐτῶν ἀποτελοῦσι καμπύλην ΟΜΓ, ἥτις συνεχῶς ἀπομακρύνεται τῶν ἀξόνων Χ′Χ, Ψ′Ψ καὶ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν′ΛΝ χωρὶς νὰ συναντᾷ αὐτὴν ποτέ.

Ἂν δὲ τὸ τόξον ὑπερβῇ κατ᾽ ἐλάχιστον τὰς $90^0$, τὸ μῆκος του γίνεται κατ᾽ ἐλάχιστον μεγαλύτερον τοῦ $(\overline{ΟΛ})$ καὶ τὸ μ ἐμφανίζεται δεξιὰ τοῦ Λ καὶ ἐγγύττατα αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ εἰς τὸ $-\infty$, τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΟΨ′ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Χ′Χ, ἐγγύτατα τῆς εὐθείας Ν′ΛΝ καὶ δεξιὰ αὐτῆς. Ἔπειτα τοῦ τόξου αὐξανομένου ἀπὸ $90^0$ ἕως $180^0$ ἡ ἀρνητικὴ ἐφαπτομένη του βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0. Τὰ δὲ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ ἀποτελοῦσι καμπύλην ΔΕ. Αὕτη συνεχῶς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν Ν'ΛΝ καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Χ'Χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Τοῦ τόξου δὲ αὐξανομένου ἀπὸ $180^0$ ἕως $270^0$ ἡ ἐφαπτομένη του βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$. Ἑπομένως ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται τῶν εὐθειῶν Ν'ΛΝ, Χ'Χ καὶ ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΠΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ'Χ εἰς τὸ Κ χωρὶς ὅμως νὰ συναντᾷ αὐτὴν ποτέ.

Ὅταν τέλος τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $270^0$ ἕως $360^0$ ἡ ἐφαπτομένη του μεταπηδῶσα εἰς τὸ $-\infty$ βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0. Ὅθεν ἡ καμπύλη ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΚΠ, δεξιὰ καὶ ἐγγύτατα αὐτῆς· βαίνει δὲ ἀπομακρυνομένη αὐτῆς καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Χ'Χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Ἡ καμπύλη λοιπὸν ΟΜΓΔΕΖΗΘ αἰσθητοποιεῖ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου, ἂν τοῦτο συνεχῶς βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$. Ἡ συνέχεια αὐτῆς διακόπτεται εἰς τὰ σημεῖα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ τόξα $90^0$ καὶ $270^0$, ἕνεκα τῆς μεταπηδήσεως τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ $+\infty$ εἰς $-\infty$. Διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις ἐφχ λέγεται **ἀσυνεχὴς** συνάρτησις διὰ $\chi = \frac{\pi}{2}$ καὶ διὰ $\chi = \frac{3\pi}{2}$.

Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι Ν'ΛΝ καὶ ΠΚΡ λέγονται ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης ταύτης.

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς $360^0$, οἱ κλάδοι τῆς προηγουμένης καμπύλης ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

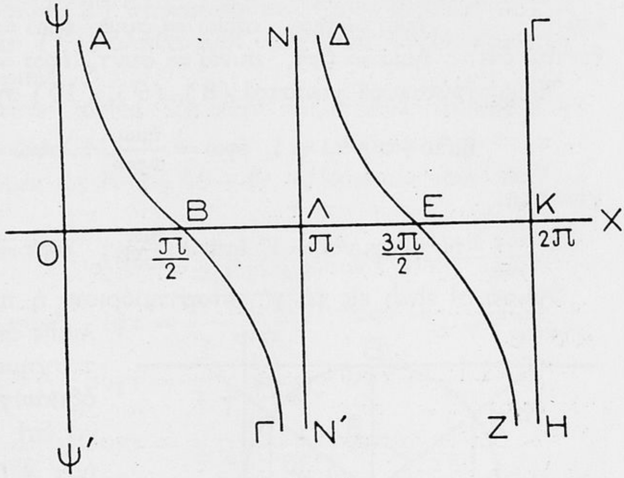
### Ἀσκήσεις

274. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως - $360^0$. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

275. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{2}$ ἐφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

**88. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συνεφαπτομένης τόξου.** Ἂν ἐργασθῶμεν διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης, ὅπως προηγουμένως διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης, σχηματίζομεν τὴν καμπύλην ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 38).

Δι᾽ αὐτῆς αἰσθητοποιοῦμεν τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης τόξου διὰ μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$.




Σχ. 38

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει ἀσύμπτωτον τὸν ἄξονα Ψ΄Ψ καὶ τὰς εὐθείας Ν΄ΛΝ, ΗΚΓ.

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς $360^0$, οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης ἐπαναμαλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

### Ἀσκήσεις

276. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς σφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $-360^0$. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτή.

277. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως 2 σφχ, ἂν τὸ χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $0^0$ ἕως $360^0$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτή.

**89. Διατήρησις τῶν σχέσεων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν οἱουδήποτε τόξου ἢ γωνίας.** Ἔστω τ τὸ μέτρον ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 39). Ἂν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ αὐτοῦ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου

ΑΜ. Ἔστω δὲ ε τὸ μέτρον αὐτοῦ καὶ $\tau = 2k\pi + \varepsilon$, ἂν k εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\varepsilon$, $\text{συν}\tau = \text{συν}\varepsilon$, $\text{ἐφ}\tau = \text{ἐφ}\varepsilon$, $\text{σφ}\tau = \text{σφ}\varepsilon$,
καὶ $\text{ἡμ}\omega = \text{ἡμ}\varepsilon$, $\text{συν}\omega = \text{συν}\varepsilon$, $\text{ἐφ}\omega = \text{ἐφ}\varepsilon$, $\text{σφ}\omega = \text{σφ}\varepsilon$
ἕπεται ὅτι: $\text{ἡμ}\omega = \text{ἡμ}\tau$, $\text{συν}\omega = \text{συν}\tau$, $\text{ἐφ}\omega = \text{ἐφ}\tau$, $\text{σφ}\omega = \text{σφ}\tau$

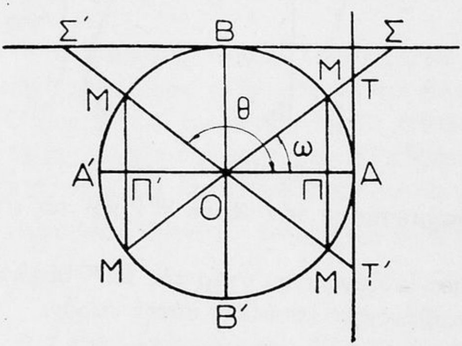
Ἕνεκα τούτων αἱ γνωσταὶ (8), (9), (10) σχέσεις:

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1, \quad \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}, \quad \text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ἡμ}\omega}$$

γίνονται:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1, \quad \text{ἐφ}\tau = \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}, \quad \text{σφ}\tau = \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} \qquad (1)$$

Ἂν τὸ Μ εἶναι εἰς τὸ γ΄ τεταρτημόριον, ἡ προέκτασις τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου τ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἥτις βαίνει ἐπὶ τόξου ε. Εἶναι δὲ $\text{ἡμ}\tau = (\overline{\Pi'M}) = -(\overline{\Pi M}) = -\text{ἡμ}\varepsilon$, $\text{συν}\tau = (\overline{O\Pi'}) = -(\overline{O\Pi}) = -\text{συν}\varepsilon$, $\text{ἐφ}\tau = (\overline{AT}) = \text{ἐφ}\varepsilon$ καὶ $\text{σφ}\tau = (\overline{B\Sigma}) = \text{σφ}\varepsilon$.




Σχ. 93

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = \text{ἡμ}^2\varepsilon + \text{συν}^2\varepsilon, \quad \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau} = \frac{\text{ἡμ}\varepsilon}{\text{συν}\varepsilon}, \quad \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} = \frac{\text{συν}\varepsilon}{\text{ἡμ}\varepsilon}.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἀληθεύουσιν αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1) διὰ τὸ τόξον ε, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1, \quad \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau} = \text{ἐφ}\varepsilon = \text{ἐφ}\tau, \quad \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} = \text{σφ}\varepsilon = \text{σφ}\tau,$$

ἤτοι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες (1).

Ἂν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ β΄ τεταρτημόριον, ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τοῦ τόξου τ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ἀμβλεῖαν γωνίαν θ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν (§ 59) ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1, \quad \text{ἐφ}\theta = \frac{\text{ἡμ}\theta}{\text{συν}\theta}, \quad \text{σφ}\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ἡμ}\theta} \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ ἡμτ $= (\overline{\Pi'M}) =$ ἡμθ, συντ $= (\overline{O\Pi'}) =$ συνθ,

ἐφτ $= (\overline{AT'}) =$ ἐφθ, σφτ $= (\overline{B\Sigma'}) =$ σφθ.

Ἐκ τούτων καὶ τῶν (2) προκύπτουσιν πάλιν αἱ (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ (1) ἀληθεύουσι καὶ ὅταν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ δ' τεταρτημόριον.

Ἀληθεύουσι λοιπὸν αὗται διὰ πᾶν τόξον ΑΜ, ἑπομένως καὶ διὰ πᾶσαν γωνίαν $\widehat{OA,OM}$.

Ἂν δὲ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν § § 46 – 49, εὑρίσκομεν τοὺς ἀκολούθους τύπους:

α') $\text{συντ} = \pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}$, $\text{ἐφτ} = \dfrac{\text{ἡμτ}}{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}}$, $\text{σφτ} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\text{τ}}}{\text{ἡμτ}}$.

β') $\text{ἡμτ} = \pm\sqrt{1-\text{συν}^2\text{τ}}$, $\text{ἐφτ} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\text{τ}}}{\text{συντ}}$, $\text{σφτ} = \dfrac{\text{συντ}}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\text{τ}}}$.

γ') $\text{ἡμτ} = \dfrac{\text{ἐφτ}}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}}$, $\text{συντ} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\text{τ}}}$, $\text{σφτ} = \dfrac{1}{\text{ἐφτ}}$.

δ') $\text{ἡμτ} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{σφ}^2\text{τ}}}$, $\text{συντ} = \dfrac{\text{σφτ}}{\pm\sqrt{1+\text{σφ}^2\text{τ}}}$, $\text{ἐφτ} = \dfrac{1}{\text{σφτ}}$.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν δὲ ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ ριζικοῦ ἑκάστου τύπου, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον. Οὕτως, ἂν $90^0 < \text{τ} < 180^0$, θὰ εἶναι ἡμτ $> 0$, οἱ δὲ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ ἀρνητικοί. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἀρνητικὰ ἐξαγόμενα ἐκ τῶν τύπων α', πρέπει πρὸ τῶν ριζικῶν αὐτῶν νὰ θέτωμεν τὸ –. Οὕτως, ἂν ἡμτ $= \dfrac{1}{2}$, εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν ὅτι : $\text{συντ} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{ἐφτ} = \frac{\dfrac{1}{4}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{σφτ} = \frac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}}{\dfrac{1}{4}} = -\sqrt{3}.$$

Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ εἶναι ἡμτ $= \dfrac{1}{2} > 0$ καὶ $0^0 < \text{τ} < 90^0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τ εἶναι θετικοί. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἐκ τῶν α' θετικὰ ἐξαγόμενα, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν θετικὰς τὰς ρίζας αὐτῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν $\text{συντ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{ἐφτ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{σφτ} = \sqrt{3}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὸ σημεῖον ἑκάστου ριζικοῦ καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις. Ἐξηγεῖται δὲ οὕτω στοιχειωδῶς ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου πρὸ ἑκάστου ριζικοῦ εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων.

## Ἀσκήσεις

278. Ἂν ἡμω $= \frac{3}{5}$ καὶ $90^0 < ω < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου ω.

279. Ἂν ἡμω $= -\frac{4}{5}$ καὶ $180^0 < ω < 280^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

280. Ἂν συνω $= \frac{1}{2}$ καὶ $90^0 < ω < 180^0$ νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

281. Ἂν συνω $= \frac{3}{5}$ καὶ $270^0 < ω < 360^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

282. Ἂν ἐφω $= \frac{2}{5}$ καὶ $540^0 < ω < 630^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

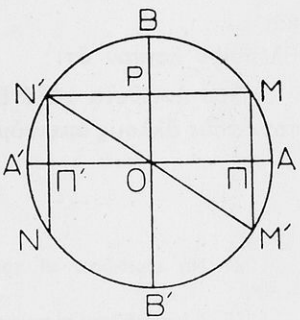
283. Ἂν σφτ $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $810^0 < τ < 900^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

## ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΩΝ ΔΙ' ΑΠΛΗΣ ΣΧΕΣΕΩΣ

**90. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο ἀντιθέτων τόξων.** Ἔστω ἓν τόξον ΑΜ (σχ. 40) θετικὸν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας.

Ἂν δὲ ΑΜ' εἶναι τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ, θὰ εἶναι $\widehat{M'A} = \widehat{AM}$ καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ ΜΜ' τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΑ'. Τὰ δὲ ἄκρα Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΑ'.



Σχ. 40

Ἂν δὲ ἓν τόξον ΑΑ'Ν εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας καὶ μικρότερον περιφερείας, καὶ τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ ΑΑ'Ν' θὰ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας καὶ μικρότερον περιφερείας.

Ἐπειδὴ δὲ $|(\widehat{AA'N})| = |(\widehat{AA'N'})|$ καὶ $|(ABA')| = |(\widehat{AB'A'})|$, ἕπεται δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ὅτι $|(\widehat{A'N})| = |(\widehat{A'N'})|$.

Τὰ ἀντίρροπα λοιπὸν τόξα Α'Ν καὶ Α'Ν' ὡς ἀπολύτως ἴσα εἶναι ἀντίθετα. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ μικρότερα ἡμιπεριφερείας, τὰ ἄκρα αὐτῶν Ν καὶ Ν' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν Α'Α.

Ἂν τέλος ἓν τόξον ΑΜ περιέχῃ κ θετικὰς περιφερείας καὶ μέρος ΑΜ μικρότερον περιφερείας, τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ τόξον ΑΜ' θὰ περιέχῃ κ ἀρνητικὰς περιφερείας καὶ ἓν μέρος ΑΜ' ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου ΑΜ. Τὰ ἄκρα λοιπὸν Μ καὶ Μ' θὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΑ' κατὰ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι:

**Ἂν δύο ἀντίθετα τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχήν, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀρχὴν αὐτῶν.**

**91.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο ἀντιθέτων τόξων.**

*Λύσις.* Ἔστωσαν ΑΜ καὶ ΑΜ′ (σχ. 40) δύο ἀντίθετα τόξα, τ δὲ καὶ $-\tau$ τὰ μέτρα αὐτῶν. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ χορδὴ Μ′Μ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς Α′Α, ἤτοι εἶναι $(\overline{\mathrm{M'\Pi}}) = (\overline{\mathrm{\Pi M}})$ καὶ ἑπομένως $(\overline{\mathrm{\Pi M'}}) = -(\overline{\mathrm{\Pi M}})$.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}(-\tau) = (\overline{\mathrm{\Pi M'}})$ καὶ $\text{ἡμ}\tau = (\overline{\mathrm{\Pi M}})$,
ἕπεται ὅτι: $\quad \text{ἡμ}(-\tau) = -\text{ἡμ}\tau$
Εἶναι δὲ καὶ $\text{συν}(-\tau) = (\overline{\mathrm{O\Pi}}) = \text{συν}\tau$, δηλ. $\text{συν}(-\tau) = \text{συν}\tau$
Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι: $\text{ἐφ}(-\tau) = -\text{ἐφ}\tau$
καὶ $\text{σφ}(-\tau) = -\text{σφ}\tau$

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμ}(-\tau) &= -\textbf{ἡμ}\tau \\ \textbf{συν}(-\tau) &= \textbf{συν}\tau \\ \textbf{ἐφ}(-\tau) &= -\textbf{ἐφ}\tau \\ \textbf{σφ}(-\tau) &= -\textbf{σφ}\tau \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(36)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Δύο ἀντίθετα τόξα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.**

### Ἀσκήσεις

284. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $-30^0$, $-45^0$, $-60^0$.

285. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων:
$\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

286. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα:
α′) $\text{συν}(-\tau)\cdot\text{συν}\tau + \text{ἡμ}^2\tau$ β′) $\text{σφ}(-\tau)\cdot\text{ἐφ}\tau + 1$.

287. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα:
α′) $\text{ἡμ}(-\tau)\cdot\text{σφ}\tau + \text{συν}\tau$ β′) $\text{συν}(-\tau)\cdot\text{ἐφ}(-\tau) + \text{ἡμ}\tau$.

288. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τόξον τ εἶναι:
$\text{ἡμ}\tau \ \text{ἡμ}(-\tau) + \text{συν}^2\tau = 1 - 2\text{ἡμ}^2\tau$.

**92. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο παραπληρωματικῶν τόξων.** Δύο τόξα λέγονται **παραπληρωματικά**, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν θετικὴν ἡμιπεριφέρειαν.

Ἂν ἑπομένως ἓν τυχὸν τόξον AM ἔχῃ μέτρον τ μοίρας, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ θὰ ἔχῃ μέτρον $180^0 - τ$. Ἐπειδὴ δὲ $180^0 - τ = (-τ) + 180^0$, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶναι ἄθροισμα τοῦ τόξου AM′ ἀντιθέτου τοῦ δοθέντος τόξου AM καὶ μιᾶς θετικῆς ἡμιπεριφερείας M′ABN′, ἤτοι λήγει εἰς σημεῖον N′ συμμετρικὸν τοῦ M′ πρὸς τὸ κέντρον O (σχ. 40). Ἐπειδὴ δὲ $N'\widehat{M}M' = 1$ ὀρθή, ἡ χορδὴ MN′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν MM′ καὶ ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὴν A′A. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Ἂν δύο παραπληρωματικὰ τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν A, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι ἄκρα μιᾶς χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον A′A.**

**93.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο παραπληρωματικῶν τόξων.**

Ἔστω AM ἓν τυχὸν τόξον καὶ τ τὸ μέτρον αὐτοῦ. Τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ τόξον ἔχει μέτρον $180^0 - τ$ καὶ κατὰ τὰ προηγούμενα λήγει εἰς τὸ σημεῖον N′ συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς τὸν ἄξονα B′B (σχ. 40). Ἑπομένως ἡμ$(180^0 - τ) = (\overline{OP})$ καὶ συν$(180^0 - τ) = (\overline{OΠ'})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{OP})$ = ἡμτ, ἕπεται ὅτι ἡμ$(180^0 - τ)$ = ἡμτ. Ἕνεκα δὲ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων OΠM′ καὶ OΠ′N′ εἶναι OΠ′ = OΠ καὶ ἑπομένως $(\overline{OΠ'}) = -(\overline{OΠ})$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν ἰσοτήτων συν$(180^0 - τ) = (\overline{OΠ'})$, συντ $= (\overline{OΠ})$ προκύπτει ἡ ἰσότης συν$(180^0 - τ) = -$συντ.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι :} & \textbf{ἡμ}(180^0-τ) = \textbf{ἡμ}τ \\ \text{καὶ} & \textbf{συν}(180^0-τ) = -\textbf{συν}τ \\ \text{Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :} & \textbf{ἐφ}(180^0-τ) = -\textbf{ἐφ}τ \\ \text{καὶ} & \textbf{σφ}(180^0-τ) = -\textbf{σφ}τ \end{array}\right\} \quad \textbf{(36)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Δύο παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.**

Ἀληθεύει δὲ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ τυχούσας παραπληρωματικὰς γωνίας. Ἑπομένως αἱ ἰσότητες (§ 55 καὶ § 57) εἶναι γενικαί.

## 'Ασκήσεις

289. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $\pm 120^0$, $\pm 135^0$ $\pm 150^0$.

290. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
ἡμ $(180^0 - \tau)$ ἡμτ — συν $(180^0 - \tau)$ συντ.

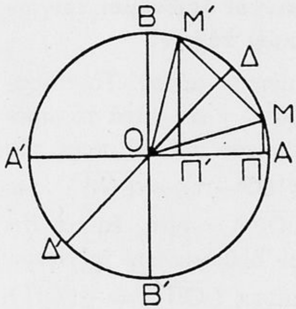
291. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: ἐφ $(\pi - \tau)$ σφτ — σφ $(\pi - \tau)$ ἐφτ.

292. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

ἐφ $(180^0 - \tau)$ συντ. — σφ $(180^0 - \tau)$ἡμτ, ἂν ἡμτ $= \dfrac{1}{2}$ καὶ $0^0 < \tau < 90^0$

293. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις:— σφ $(\pi - \tau)$ ἡμτ — ἐφ $(\pi - \tau)$συντ

**94. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο συμπληρωματικῶν τόξων.** Δύο τόξα λέγονται **συμπληρωματικά**, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα ἓν θετικὸν τεταρτημόριον.



Σχ. 41α

Ἑπομένως, ἂν τυχὸν τόξον ΑΜ (σχ. 41 α) ἔχῃ μέτρον τ, τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ ΑΜ' θὰ ἔχῃ μέτρον $90^0 - \tau$.

Ἂν δὲ Δ' εἶναι τὸ μέσον τοῦ α' τεταρτημορίου, θὰ εἶναι :

$$\tau = (\overset{\frown}{AM}) = (\overset{\frown}{A\Delta}) + (\overset{\frown}{\Delta M})$$

$$\text{ἢ} \quad \tau = 45^0 + (\overset{\frown}{\Delta M}).$$

Ἑπομένως $(\overset{\frown}{AM'}) = 90^0 - \tau = 45^0 - (\overset{\frown}{\Delta M})$ ἢ $(\overset{\frown}{AM'}) = 45^0 + (\overset{\frown}{M\Delta})$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\overset{\frown}{AM'}) = (\overset{\frown}{A\Delta}) + (\overset{\frown}{\Delta M'}) = 45^0 + (\overset{\frown}{\Delta M'})$, ἕπεται ὅ ὅτι $\overset{\frown}{M\Delta} = \overset{\frown}{\Delta M'}$. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΜΜ' τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διαμέτρου Δ'Δ, τὰ δὲ σημεῖα Μ,Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς αὐτήν. Ὥστε:

**Ἂν δύο συμπληρωματικὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν Α, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διχοτομεῖ τὸ α' θετικὸν τεταρτημόριον ΑΒ.**

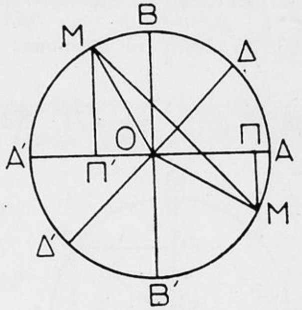
**95.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο συμπληρωματικῶν τόξων.**

*Λύσις.* Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 41 β) καὶ ἡμτ $= (\overline{\Pi M})$, συντ $= (\overline{O\Pi})$. (1)

Κατὰ τὰ προηγούμενα τὸ τόξον $90^0 - τ$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ' συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΔΔ'. Θὰ εἶναι δὲ

$$ἡμ(90^0 - τ) = (\overline{Π'Μ'}), \quad συν(90^0 - τ) = (\overline{ΟΠ'}) \qquad (2)$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\overset{\frown}{ΑΜ} = \overset{\frown}{Μ'Β}$ ἕπεται ὅτι $Α\hat{Ο}Μ = Β\hat{Ο}Μ' = Ο\hat{Μ}Π'$ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟΠΜ, ΟΠ'Μ' εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο Π'Μ' = ΟΠ, ΟΠ' = ΠΜ. Ἂν δὲ τὰς πλευρὰς ταύτας θεωρήσωμεν ὡς ἀνύσματα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μήκη $(\overline{Π'Μ'})$ καὶ $(\overline{ΟΠ})$ εἶναι ὁμόσημα, ἐπίσης δὲ ὁμόσημα εἶναι καὶ τὰ $(\overline{ΟΠ'})$ καὶ $(\overline{ΠΜ})$. Εἶναι λοιπὸν καὶ $(\overline{Π'Μ'}) = (\overline{ΟΠ})$, $(\overline{ΟΠ'}) = (\overline{ΠΜ})$.



Σχ. 41β

Ἕνεκα δὲ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (1) καὶ (2) αὗται γίνονται :

$$ἡμ(90^0 - τ) = συντ, \quad συν(90^0 - τ) = ἡμτ$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{array}{l} ἡμ(90^0 - τ) = συντ, \quad συν(90^0 - τ) = ἡμτ \\ ἐφ(90^0 - τ) = σφτ, \quad σφ(90^0 - τ) = ἐφτ \end{array}\right\} \quad (37)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

**Ἂν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου καὶ ἡ ἐφαπτομένη ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἄλλου.**

### Ἀσκήσεις

294. Ἂν $ἡμω = \frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ συν $(90^0 - ω)$.

295. Ἂν $Β + Γ = 90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $συν^2Β + συν^2Γ = 1$.

296. Ἂν $Α + Β + Γ = 180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$ἡμ\frac{Α+Β}{2} = συν\frac{Γ}{2}, \quad ἐφ\frac{Α+Β}{2} = σφ\frac{Γ}{2},$$

$$συν\frac{Β+Γ}{2} = ἡμ\frac{Α}{2}, \quad σφ\frac{Α+Γ}{2} = ἐφ\frac{Β}{2},$$

297. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $ἐφ(90^0 - α) \cdot ἐφα$ καὶ τῆς $σφ(90^0 - α) \cdot σφα$.

298. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: ἡμ$(90^0-\alpha)$συνα$+$συν$(90^0-\alpha)$ἡμα

299. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)\text{ἐφ}\tau-\text{σφ}\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)\text{σφ}\tau.$$

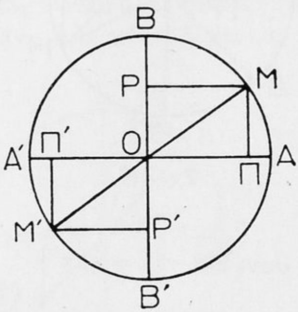
300. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμ$(90^0+\tau)=$ συντ καὶ συν$(90^0+\tau)=-$ἡμτ.

301. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐφ$(90^0+\tau)=-$σφτ καὶ σφ$(90^0+\tau)=-$ἐφτ.

302. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ$(90^0+\tau)$ἡμτ $+$ συν$(90^0+\tau)$ συντ.

303. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα: $\text{σφ}\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\text{σφ}\omega-\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\text{ἐφ}\omega.$

**96.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο τόξων, τὰ ὁποῖα διαφέρουσι κατὰ 180⁰.**



Σχ. 42

*Λύσις.* Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 42) Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΜΟΜ′, τὸ ἄθροισμα $180^0+\tau$ εἶναι μέτρον ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα ΑΜ′. Εἶναι δὲ ἡμ $(180^0+\tau)=(\overline{\Pi'M'})=-(\overline{\Pi M})$, συν$(180^0+\tau)=(\overline{O\Pi'})=-(\overline{O\Pi})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\Pi M})=$ ἡμτ καὶ $(\overline{O\Pi})$ $=$συντ,

ἕπεται ὅτι: **ἡμ$(180^0+\tau)=-$ἡμτ**

καὶ **συν$(180^0+\tau)=-$συντ**

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι: **ἐφ$(180^0+\tau)=$ ἐφτ**

καὶ **σφ$(180^0+\tau)=$ σφτ** **(38)**

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Ἂν δύο τόξα διαφέρουσι κατὰ 180⁰, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.**

**Ἀσκήσεις**

304. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $225^0$ $210^0$, $240^0$.

305. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $-225^0$, $-210^0$, $-240$.

306. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ $(180^0 + \tau)$ ἡμτ + συν $(180^0 + \tau)$συντ.

307. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον ἐφ$(\pi + \tau)$ σφτ καὶ τὸ σφ $(\pi + \tau)$ ἐφτ.

308. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἐφ $(\pi + \tau)$ σφτ − σφ $(\pi + \tau)$ ἐφτ.

309. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ $(\pi + \tau)$ συν$(\pi - \tau)$+συν$(\pi+\tau)$ἡμ$(\pi - \tau)$.

310. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορά:

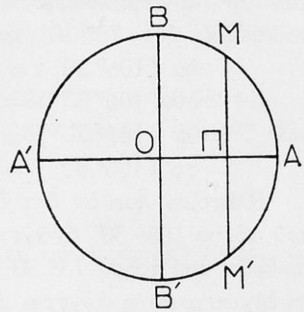
ἐφ$(180^0 + \omega)$ σφ$(90^0 + \omega)$ − ἐφ $(180^0 - \omega)$ σφ$(90^0 - \omega)$.

**97.** *Πρόβλημα V.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἄθροισμα $360^0$.**

*Λύσις.* Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 43) καὶ χ τὸ μέτρον ἄλλου τόξου ΑΜ′. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\chi + \tau = 360^0$ καὶ ἑπομένως:

$$\chi = 360^0 - \tau = (-\tau) + 360^0.$$

Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μέτρα $360^0 - \tau$ καὶ $-\tau$, ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα. Διὰ τοῦτο δὲ ἔχουσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Θὰ εἶναι λοιπὸν (§ 91):



Σχ. 43

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}(360^0 - \tau) &= -\text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}(360^0 - \tau) = \text{συν}\tau, \\ \text{ἐφ}(360^0 - \tau) &= -\text{ἐφ}\tau, \quad \text{σφ}(360^0 - \tau) = -\text{σφ}\tau. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

**Ἂν δύο τόξα ἔχωσιν ἄθροισμα $360^0$, ταῦτα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.**

### Ἀσκήσεις

311. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $300^0$, $315^0$, $330^0$.

312. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $-300^0$, $-315^0$, $-330^0$.

313. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\etaμ(360^0 - α)ημ(-α) + συν(360^0 - α)\,συν(-α).$$

314. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορά :

$$εφ(360^0 - α)σφ(180^0 + α) - σφ(360^0 - α)\,εφ(180^0 - α).$$

315. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$ημ(2π - τ)συν\left(\frac{π}{2} + τ\right) + συν(2π - τ)ημ\left(\frac{π}{2} + τ\right).$$

98. **Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.** α΄) Ἔστω τόξον $106^0\ 30'$, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ $90^0$ καὶ $180^0$. Θέλομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτοῦ. Ἐπειδὴ οἱ πίνακες, τοὺς ὁποίους ἐμάθομεν, δὲν περιέχουσι τόξα μεγαλύτερα τῶν $90^0$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν τὸ παραπληρωματικὸν τοῦ τόξου, ἤτοι $73^0\ 30'$, καὶ ἐνθυμούμεθα ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ημ(106^0\,30') &= \phantom{-}ημ(73^0\,30') = \phantom{-}0{,}95882\\
συν(106^0\,30') &= -συν(73^0\,30') = -0{,}28402\\
εφ(106^0\,30') &= -εφ(73^0\,30') = -3{,}37594\\
σφ(106^0\,30') &= -σφ(73^0\,30') = -0{,}29621
\end{aligned}
$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου $106^0\ 30'$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου $73^0\ 30'$, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ $0^0$ καὶ $90^0$. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται **ἀναγωγὴ τοῦ τόξου $106^0\,30'$ εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.**

β΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξου περιεχομένου μεταξὺ $180^0$ καὶ $270^0$, π.χ. τοῦ $203^0\ 20'$. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ $180^0$ καὶ εὑρίσκομεν τόξον $23^0 20'$. Ἔπειτα δέ, κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 96), εὑρίσκομεν ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ημ(203^0\,20') &= -ημ(23^0\,20') = -0{,}39608\\
συν(203^0\,20') &= -συν(23^0\,20') = -0{,}91822\\
εφ(203^0\,20') &= \phantom{-}εφ(23^0\,20') = \phantom{-}0{,}43136\\
σφ(203^0\,20') &= \phantom{-}σφ(23^0\,20') = \phantom{-}2{,}31826
\end{aligned}
$$

γ΄) Ἂν τόξον περιέχηται μεταξὺ $270^0$ καὶ $360^0$, π.χ. τὸ $297^0\ 10'$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν ὅτι $360^0 - (297^0\ 10') = 62^0\ 50'$ καὶ ἐφαρμόζομεν τὰς γνωστὰς (§ 97) ἰσότητας. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ημ(297^0\,10') &= -ημ(62^0\,50') = -0{,}88968\\
συν(297^0\,10') &= \phantom{-}συν(62^0\,50') = \phantom{-}0{,}45658
\end{aligned}
$$

$$\text{ἐφ}\,(297^0\,10') = -\,\text{ἐφ}\,(62^0\,50') = -\,1{,}94858$$
$$\text{σφ}\,(297^0\,10') = -\,\text{σφ}\,(62^0\,50') = -\,0{,}51319$$

δ') Ἂν τόξον ὑπερβαίνῃ τὰς $360^0$, π.χ. τὸ τόξον $1197^0\,30'$, ἡ ἀναγωγὴ γίνεται ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $1197^0\,30' = 360^0 \cdot 3 + 117^0\,30'$. Ἑπομένως:

$$\text{ἡμ}\,(1197^0\,30') = \text{ἡμ}\,(117^0\,30') = \text{ἡμ}\,(62^0\,30') = 0{,}88701$$
$$\text{συν}\,(1197^0\,30') = \text{συν}\,(117^0\,30') = -\,\text{συν}(62^0\,30') = -\,0{,}46175$$
$$\text{ἐφ}\,(1197^0\,30') = \text{ἐφ}\,(117^0\,30') = -\,\text{ἐφ}\,(62^0\,30') = -\,1{,}92098$$
$$\text{σφ}\,(1197^0\,30') = \text{σφ}\,(117^0\,30') = -\,\text{σφ}\,(62^0\,30') = -\,0{,}52057$$

ε') Ἂν τὸ τόξον εἶναι ἀρνητικόν, ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους τῆς § 91 καὶ ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων Οὕτως εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι:

$$\text{ἡμ}\,(-98^0\,20') = -\,\text{ἡμ}\,(98^0\,20') = -\,\text{ἡμ}\,(81^0\,40') = -\,0{,}98944,$$
$$\text{συν}\,(-98^0\,20') = \text{συν}\,(98^0\,20') = -\text{συν}(81^0\,40') = -\,0{,}14493 \text{ κτλ.}$$

## Ἀσκήσεις

316. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $132^0\ 40'$ καὶ τοῦ τόξου $108^0\ 25'$.

317. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $202^0\ 20'$ καὶ τοῦ $228^0\ 45'$.

318. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $285^0\ 50'$ καὶ $305^0 35'$

319 Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $820^0\ 40'$ καὶ $1382^0 25'$

320. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $-\,(167^0\ 20')$, $-\,(265^0\ 10')$ καὶ $-\,(298^0\ 15')$

321. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $-\,(467^0\ 50')$, $-\,(2572^0\ 35')$ καὶ $-\,(2724^0\ 30')$.

322. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ$95^0$ + ἡμ$265^0$.

323. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐφ$642^0$ + ἐφ$978^0$.

324. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα συν $820^0$ + συν $280^0$.

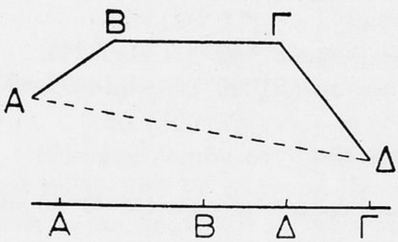
50

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′

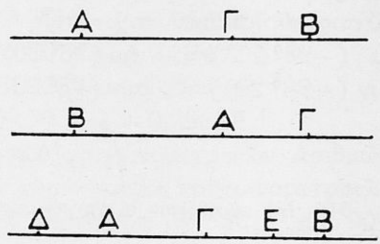
## 1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

**99. Διαδοχικὰ ἀνύσματα καὶ συνισταμένη αὐτῶν.** Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου (σχ. 44). Ταῦτα λέγονται **διαδοχικὰ** ἀνύσματα.

Τὸ ἄνυσμα ΑΔ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν Α τοῦ α′ ἀνύσματος



Σχ. 44



Σχ. 45

ΑΒ, τέλος δὲ τὸ τέλος Δ τοῦ τελευταίου ΓΔ. Τὸ ΑΔ λέγεται **συνισταμένη** ἢ **γεωμετρικὸν ἄθροισμα** τῶν ἀνυσμάτων τούτων.

Τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ (σχ. 44) εἶναι ὁμόρροπα καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος. Ἑπομένως τὰ μήκη $(\overline{\mathrm{AB}})$, $(\overline{\mathrm{B\Gamma}})$, $(\overline{\mathrm{A\Gamma}})$ εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι: $(\overline{\mathrm{AB}}) + (\overline{\mathrm{B\Gamma}}) = (\overline{\mathrm{A\Gamma}})$ (1)

Ἂν δὲ τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (σχ. 45), θὰ εἶναι:

$$(\overline{\mathrm{A\Gamma}}) + (\overline{\mathrm{\Gamma B}}) = (\overline{\mathrm{AB}}).$$

Ἂν δὲ εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $(\overline{\mathrm{B\Gamma}})$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\overline{\mathrm{A\Gamma}}) + (\overline{\mathrm{\Gamma B}}) + (\overline{\mathrm{B\Gamma}}) = (\overline{\mathrm{AB}}) + (\overline{\mathrm{B\Gamma}}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\mathrm{\Gamma B}}) + (\overline{\mathrm{B\Gamma}}) = 0$, προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ.

Ἂν δὲ καὶ ἄλλα σημεῖα Δ, Ε κ.τ.λ. κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὲ τὰ Α, Β, Γ, θὰ εἶναι :

$$(\overline{\text{ΑΒ}}) + (\overline{\text{ΒΓ}}) + (\overline{\text{ΓΔ}}) = (\overline{\text{ΑΓ}}) + (\overline{\text{ΓΔ}}) = (\overline{\text{ΑΔ}}),$$

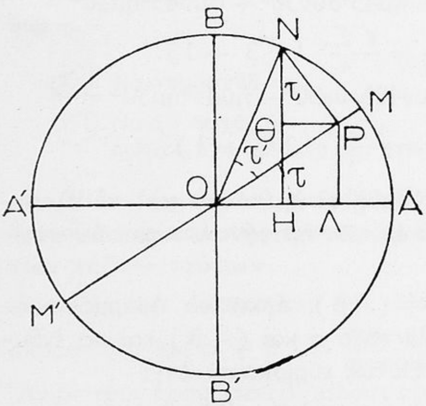
$$(\overline{\text{ΑΒ}})+(\overline{\text{ΒΓ}})+(\overline{\text{ΓΔ}})+(\overline{\text{ΔΕ}}) = (\overline{\text{ΑΔ}})+(\overline{\text{ΔΕ}})=(\overline{\text{ΑΕ}})$$

κ.τ.λ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

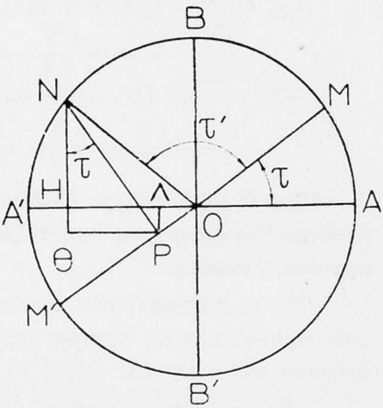
**Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.**

**100.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων ἐκ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου αὐτῶν.**

Ἔστω α τὸ μέτρον ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ καὶ β τί μέτρον ἑνὸς ἐκ τῶν τόξων ΜΝ (σχ. 46). Ἄθροισμα τούτων εἶνα ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΝ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον α+β.



(α′)



(β′)

Σχ. 46

Θέλομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμ(α + β) καὶ τὸ συν(α + β), ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμα, συνα, ἡμβ, συνβ.

*Λύσις.* Θεωροῦμεν ὡς ἄξονα τῶν σηνημιτόνων τὸν Α′Α διὰ τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ τὸν Μ′Μ διὰ τὰ τόξα ΜΝ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΝΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Μ′Μ, τὰς ΝΗ, ΡΛ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Α′Α καὶ τὴν ΡΘ παράλληλον πρὸς αὐτόν.

Ἂν δὲ τ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OA,OM}$ καὶ τ′ τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OM,ON}$, θὰ εἶναι:

$$\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha, \qquad \text{συν}\tau = \text{συν}\alpha$$

$$\text{ἡμ}\beta = \text{ἡμ}\tau' = (\overline{PN}), \qquad \text{συν}\beta = \text{συν}\tau' = (\overline{OP}).$$

Γνωρίζομεν δὲ ἀφ᾽ ἑτέρου ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) = (\overline{HN}) = (\overline{H\Theta}) + (\overline{\Theta N}) = (\overline{\Lambda P}) + (\overline{\Theta N})$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta) = (\overline{OH}) = (\overline{O\Lambda}) + (\overline{\Lambda H}) = (\overline{O\Lambda}) - (\overline{\Theta P}) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{PN\Theta} = \widehat{AOM} = \tau$, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΡΛ, ΝΡΘ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\overline{\Lambda P}) = (\overline{OP})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta, \quad (\overline{O\Lambda}) = (\overline{OP})\text{συν}\tau = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta.$$

$$(\overline{\Theta P}) = (\overline{PN})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta, \quad (\overline{\Theta N}) = (\overline{PN})\,\text{συν}\tau = \text{ἡμ}\beta\text{συν}\alpha.$$

Ἕνεκα τούτων αἱ ἰσότητες (1) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}(\alpha+\beta) &= \text{ἡμ}\alpha \cdot \text{συν}\beta + \text{συν}\alpha \cdot \text{ἡμ}\beta \\ \text{συν}(\alpha+\beta) &= \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta - \text{ἡμ}\alpha \cdot \text{ἡμ}\beta \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Π.χ. $\text{ἡμ}75^0 = \text{ἡμ}(45^0 + 30^0) = \text{ἡμ}45^0\text{συν}30^0 + \text{συν}45^0\text{ἡμ}30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1).$$

$\text{συν}75^0 = \text{συν}(45^0 + 30^0) = \text{συν}45^0\text{συν}30^0 - \text{ἡμ}45^0\text{ἡμ}30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

**101.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν.**

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς προηγουμένους τύπους διὰ τὰ τόξα α καὶ $(-\beta)$ καὶ νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὰς ἰσότητας τῆς § 91. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}(\alpha-\beta) &= \text{ἡμ}\alpha\text{συν}(-\beta) + \text{συν}\alpha\text{ἡμ}(-\beta) \\ &= \text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\text{ἡμ}\beta, \\ \text{συν}(\alpha-\beta) &= \text{συν}\alpha\text{συν}(-\beta) - \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}(-\beta) \\ &= \text{συν}\alpha\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Π.χ. $\text{ἡμ}15^0 = \text{ἡμ}(45^0 - 30^0) = \text{ἡμ}45^0\text{συν}30^0 - \text{συν}45^0\text{ἡμ}30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}15^0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1)$.

## Ἀσκήσεις

325. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ $(\alpha+\beta)$, ἂν ἡμ$\alpha = \frac{3}{5}$, συν$\beta = \frac{4}{5}$ καὶ $0^0 < \alpha < 90^0$, $0^0 < \beta < 90^0$.

326. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ$(\alpha+\beta)$ + ἡμ$(\alpha-\beta)$, ἂν ἡμ$\alpha = \frac{3}{5}$ καὶ συν$\beta = \frac{4}{5}$.

327. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα συν$(\alpha+\beta)$ + συν$(\alpha-\beta)$, ἂν συν$\alpha = \frac{5}{8}$ καὶ συν$\beta = -\frac{2}{9}$.

328. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἡμ$(\alpha+\beta)$ − ἡμ$(\alpha-\beta)$, ἂν ἡμ$\beta = \frac{5}{6}$, συν$\alpha = \frac{2}{5}$.

329. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ συν$(\alpha-\beta)$ − συν$(\alpha+\beta)$ ἂν ἡμ$\alpha = 0{,}4$, ἡμ$\beta = \frac{3}{4}$.

330. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{2\text{ἡμ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)} = \text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta$.

331. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
$\text{ἡμ}^2(\alpha+\beta) + \text{ἡμ}^2(\alpha-\beta) = 2(\text{ἡμ}^2\alpha\,\text{συν}^2\beta + \text{ἡμ}^2\beta\,\text{συν}^2\alpha)$.

**102.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων τούτων.**

*Λύσις.* Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (40) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ἐφ}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta}$

Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β΄ μέλους αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συναςυνβ, εὑρίσκομεν :

$$\text{ἐφ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{ἐφ}\alpha + \text{ἐφ}\beta}{1 - \text{ἐφ}\alpha\,\text{ἐφ}\beta}$$

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν ταύτην διὰ τὰ τόξα α καὶ (−β) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}(\alpha-\beta) = \frac{\text{ἐφ}\alpha - \text{ἐφ}\beta}{1 + \text{ἐφ}\alpha\,\text{ἐφ}\beta} \qquad (42)$$

## Ἀσκήσεις

332. Ἂν ἐφ$\alpha = 2$, ἐφ$\beta = 1{,}5$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(\alpha+\beta)$ καὶ ἡ ἐφ$(\alpha-\beta)$.
333. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$75^0$ καὶ ἡ ἐφ$15^0$. Ἐκ τούτων δὲ ἡ σφ$75^0$ καὶ ἡ σφ$15^0$.

334. Ἂν Α,Β,Γ, εἶναι γωνίαι τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
α′) ἐφΑ + ἐφΒ + ἐφΓ = ἐφΑἐφΒἐφΓ.
β′) σφΑσφΒ + σφΒσφΓ + σφΓ σφΑ = 1.

335. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $ἐφ(45^0 - ω) = \frac{συνω - ἡμω}{συνω + ἡμω}$.

336. Ἂν $α + β + γ = 90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
α′) ἐφαἐφβ + ἐφβἐφγ + ἐφγἐφα = 1.
β′) σφα + σφβ + σφγ = σφασφβσφγ.

337. Νὰ ὁρισθῇ ἡ σφ(α + β) καὶ ἡ σφ(α–β) συναρτήσει τῶν σφα καὶ σφβ.

## 2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

103. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α ἐκ τοῦ ἡμα καὶ τοῦ συνα ἢ μόνον ἐκ τοῦ ἑνὸς τούτων.**

*Λύσις.* α′) Ἂν εἰς τὴν γνωστὴν (40) ἰσότητα :

$$συν(α + β) = συνασυνβ - ἡμαἡμβ$$

θέσωμεν α ἀντὶ β, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$συν2α = συν^2α - ἡμ^2α \qquad (1)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνα καὶ τὸ ἡμα. Π.χ. ἂν $συνα = \frac{1}{2}$, $ἡμα = \frac{\sqrt{3}}{2}$, θὰ εἶναι :

$$συν2α = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

β′) Ἐπειδὴ δὲ $ἡμ^2α = 1 - συν^2α$, ἡ (1) γίνεται :

$$συν2α = 2συν^2α - 1 \qquad (2)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α, ἂν γνωρίζωμεν μόνον τὸ συνα. Οὕτως, ἂν $συνα = \frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι :

$$συν2α = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

γ′) Ὁμοίως ἐκ τῆς (1) καὶ τῆς $συν\,α = 1 - ἡμ^2α$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$συν2α = 1 - 2ἡμ^2α. \qquad (3)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α ἀπὸ μόνον τὸ ἡμα. Οὕτω διὰ $ἡμα = \frac{\sqrt{3}}{2}$ εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι $συν2α = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

Ἐμάθομεν λοιπὸν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{συν2α = συν^2α - ἡμ^2α,\ συν2α = 2συν^2α - 1} \\ \mathbf{συν2α = 1 - 2ἡμ^2α} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(43)}$$

104. *Πρόβλημα V.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α ἐκ τοῦ ἡμα καὶ τοῦ συνα ἢ μόνον ἐκ τοῦ ἡμα.**

*Λύσις.* α′) Ἡ ἰσότης ἡμ(α + β) = ἡμασυνβ + ἡμβσυνα διὰ β = α γίνεται: **ἡμ2α = 2ἡμασυνα.**

Ἂν π.χ. $ἡμα = \frac{1}{2}$, $συνα = \frac{\sqrt{3}}{2}$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμ2α = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

β′) Ἐπειδὴ $συνα = \pm\sqrt{1 - ἡμ^2α}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $\mathbf{ἡμ2α = \pm 2ἡμα\sqrt{1 - ἡμ^2α}}$.

Διὰ ταύτης ὁρίζομεν τὸ ἡμ2α ἀπὸ μόνον τὸ ἡμα. Πρέπει ὅμως νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον 2α, διὰ νὰ θέτωμεν τὸ κατάλληλον ἀπὸ τὰ σημεῖα ±.

Π.χ. ἂν $ἡμα = \frac{\sqrt{3}}{2}$, καὶ $90^0 < 2α < 180^0$, θὰ εἶναι $ἡμ2α > 0$ καὶ ἑπομένως ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται $ἡμ2α = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ἂν ὅμως $180^0 < 2α < 270^0$, θὰ εἶναι $ἡμ2α < 0$, ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται $ἡμ2α = -2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι:

$$\mathbf{ἡμ2α = 2ἡμασυνα,\quad ἡμ2α = \pm 2ἡμα \cdot \sqrt{1 - ἡμ^2α}} \qquad (44)$$

*Σημείωσις.* Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἂν τὸ δοθὲν ἡμα εἶναι θετικόν, τὸ τόξον α θὰ λήγῃ εἰς τὸ α′ ἢ τὸ β′ τεταρτημόριον. Ἂν δὲ εἶναι $α = 360^0k + τ$ καὶ τὸ μικρότερον περιφερείας τόξον τ θὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ α. Ἐπειδὴ δὲ $2α = 360^0\, 2k + 2τ$, θὰ εἶναι ἡμ2α = ἡμ2τ. Καί, ἂν μὲν $0^0 < τ < 90^0$, θὰ εἶναι $0^0 < 2τ < 180^0$, ἑπομένως $ἡμ2τ > 0$ καὶ $ἡμ2α > 0$. Ἂν δὲ $90^0 < τ < 190^0$, θὰ εἶναι $180^0 < 2τ < 360^0$, ἑπομένως $ἡμ2τ < 0$ καὶ $ἡμ2α < 0$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἡμα εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $ἡμ2α > 0$ ἢ $ἡμ\,2α < 0$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἐξήγησις καὶ ἂν $ἡμα < 0$.

105. *Πρόβλημα VI.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α ἐκ τῆς ἐφα.**

*Λύσις.* Ἡ ἰσότης $ἐφ(α + β) = \frac{ἐφα + ἐφβ}{1 - ἐφαἐφβ}$ διὰ β = α γίνεται:

$$\mathbf{ἐφ2α = \frac{2ἐφα}{1 - ἐφ^2α}} \qquad (45)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἐφ2α ἐκ τῆς ἐφα. Ἂν π.χ. εἶναι ἐφα $= \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ2α $= \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$.

*Παρατήρησις.* Ἂν εἰς τὰς ἰσότητας (43), (44) (45) θέσωμεν 2α = ω καὶ ἑπομένως $α = \frac{ω}{2}$, αὗται γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} συνω &= συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1 = 1 - 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἡμω &= 2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)συν\left(\frac{ω}{2}\right) = \pm 2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)\sqrt{1 - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \\ ἐφω &= \frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 - ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

### Ἀσκήσεις

338. Ἂν συνα $= \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α καὶ τὸ συν2α.

339. Ἂν ἐφα $= \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α.

340. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐφ$(45^0 + α)$ − ἐφ$(45^0 - α) = 2$ἐφ2α.

341. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι σφ2α $= \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}$.

342. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι σφα − ἐφα = 2σφ2α.

343. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμ2α $= \frac{2}{ἐφα + σφα}$.

18/4/72

**106.** *Πρόβλημα VII.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω ἐκ τῆς ἐφ$\left(\frac{ω}{2}\right)$.**

*Λύσις.* Γνωρίζομεν ὅτι $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = συνω$. Ἐπειδὴ δὲ $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1$, ἕπεται ὅτι:

$$συνω = \frac{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}.$$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega} &= \frac{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \\ \boldsymbol{\dot{\eta}\mu\omega} &= \frac{2\dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (\,47\,)$$

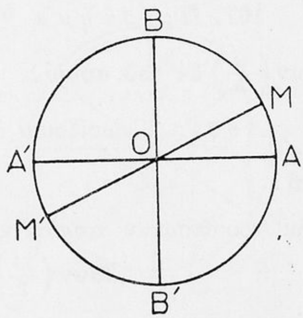
Ὁμοίως ἀπὸ τὴν $\dot{\eta}\mu\omega = 2\dot{\eta}\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$

εὑρίσκομεν ὅτι :

Ἂν π.χ. $\dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \text{ καὶ } \dot{\eta}\mu\omega = \frac{2\,.\,\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι οἱ δύο τύποι ( 47 ) εἶναι ρητοὶ πρὸς $\dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ ἑκάστην τιμὴν τῆς $\dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$ προκύπτει μία μόνον τιμὴ τοῦ συνω καὶ μία τοῦ ἡμω. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς : Ἂν Μ εἶναι τὸ πέρας ἑνὸς τόξου τ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\dot{\varepsilon}\varphi\tau = \dot{\varepsilon}\varphi\,\frac{\omega}{2}$ τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ κέντρον Ο ( σχ. 48 ).



Σχ. 48

Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν θὰ εἶναι $\frac{\omega}{2} = 360^0\,k + \tau = 2k\,180^0 + \tau$, εἰς δὲ τὴν β′ περίπτωσιν θὰ εἶναι $\frac{\omega}{2} = (2k+1)180^0 + \tau$. Δηλαδὴ τὸ $\frac{\omega}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ τ καὶ ἑνὸς πολλαπλασίου τῶν $180^0$ ἀρτίου εἰς τὴν α′ περίπτωσιν καὶ περιττοῦ εἰς τὴν β′. Συγχωνεύοντες τὰ δύο ταῦτα πολλαπλάσια εἰς ἓν $180^0.\lambda$, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\omega}{2} = 180^0\lambda + \tau$, ἔνθα λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἄρτιος ἢ περιττός. Ἐκ ταύτης προκύπτει ἡ ἰσότης $\omega = 360^0.\lambda + 2\tau$. Ἀπὸ ταύτην βλέπομεν ὅτι πᾶν τόξον ω, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, περατοῦται εἰς ἓν ὡρισμένον σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ 2τ. Ἑπομένως ἕκαστος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τοῦ ω ἔχει μίαν τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. 18/4/72

### Ἀσκήσεις

344. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{3}{5}$.

345. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1{,}5$.

346. Ἂν $\left|\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right| < 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι συνω > 0.

347. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμω > 0, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) > 0$ καὶ ἡμω < 0, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) < 0$.

348. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1 + \text{ἐφ}\alpha \cdot \text{ἐφ}\,2\alpha = \frac{1}{\text{συν}2\alpha}$.

25/4/72

## 3. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΗΜΙΣΕΟΣ ΤΟΞΟΥ

**107.** *Πρόβλημα VIII.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ τὸ $\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω.**

*Λύσις.* Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= 1. \\ \text{καὶ} \quad \text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \text{συνω} \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Ἂν προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{2\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 + \text{συνω}} \qquad \mathbf{(48)}$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συνω}}{2}}$.

Ἂν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς α' τῶν (1) ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β', εὑρίσκομεν ὅτι: $\mathbf{2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \text{συνω}}$ **(49)**

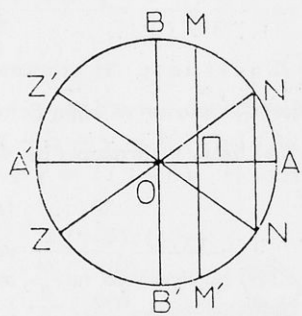
Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συνω}}{2}}$. Διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\mathbf{\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συνω}}{2}}, \quad \text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συνω}}{2}}} \qquad \mathbf{(50)}$$

εὑρίσκομεν τὸ ἡμ$\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ τὸ συν$\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνω καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$. Π.χ. ἂν συνω $= \frac{1}{2}$ καὶ $270^0 < \frac{\omega}{2} < 360^0$, θὰ εἶναι: ἡμ$\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ καὶ συν$\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου εἰς τοὺς τύπους (50) ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἂν συνω $= (\overline{\text{ΟΠ}})$ (σχ. 48), τὸ τόξον ω θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ′. Ἂν δὲ $(\widehat{\text{ΑΜ}}) = \tau$, θὰ εἶναι $(\widehat{\text{ΑΜ}})' = -\tau$ καὶ $\omega = 360^0 k + \tau$ εἰς τὴν α′ περίπτωσιν, $\omega = 360^0 k - \tau$ εἰς τὴν β′ περίπτωσιν. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\omega}{2} = 180^0 k \pm \frac{\tau}{2}$. Καὶ ἂν τὸ τόξον $\frac{\tau}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ν, μέσον τοῦ $\widehat{\text{ΑΜ}}$, τὸ $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Ν ἢ εἰς τὸ Ν′, συμμετρικὸν τοῦ Ν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, δι᾽ ἀρτίας τιμὰς τοῦ k καὶ εἰς τὸ Ζ ἢ Ζ′, ἀντιστοίχως συμμετρικὰ τῶν Ν καὶ Ν′ πρὸς τὸ κέντρον, διὰ περιττὰς τιμὰς τοῦ k. Ἂν δὲ τὸ $\frac{\tau}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ζ, τὸ $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Ζ ἢ Ζ′ δι᾽ ἀρτίας τιμὰς τοῦ k καὶ εἰς τὸ Ν ἢ Ν′ διὰ περιττὰς τιμὰς αὐτοῦ. Ὅθεν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$ ἄλλο σημεῖον θὰ ἔχῃ, ὅταν τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ν, καὶ ἄλλο, ὅταν λήγῃ εἰς τὸ Ζ. Ὁμοίως ἕκαστος τούτων ἄλλο σημεῖον θὰ ἔχῃ διὰ $\frac{\omega}{2}$ λῆγον εἰς τὸ Ν′ καὶ ἄλλο διὰ $\frac{\omega}{2}$ λῆγον εἰς τὸ Ζ′.



Σχ. 48

**108.** *Πρόβλημα IX.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω.**

*Λύσις.* Ἀπὸ τὰς προηγουμένας εὑρεθείσας ἰσότητας:

$$2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega, \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu\omega$$

διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} \qquad (51)$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}} \qquad (52)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἐφ$\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνω καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$. Ἂν π.χ. εἶναι συνω $= \frac{1}{2}$ καὶ $0^0 < \frac{\omega}{2} < 90^0$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2-1}{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

*Σημείωσις.* Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ δύναται νὰ λήγῃ εἰς τὸ Ν ἢ τὸ Ζ εἰς μίαν περίπτωσιν καὶ εἰς τὸ Ν′ ἢ τὸ Ζ′ εἰς ἄλλην περίπτωσιν ( σχ. 48 ), ὡς ἀνωτέρω ( § 107 ) ἐξηγήθη.

25/4/42

### Ἀσκήσεις

349. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ $\frac{\omega}{2}$, συν $\frac{\omega}{2}$, ἐφ $\frac{\omega}{2}$, ἂν συνω $= \frac{1}{4}$ καὶ $0^0 < \frac{\omega}{2} < 90^0$.

350. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^0\ 30'$.

351. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $15^0$.

352. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $7^0\ 30'$.

353. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου $\frac{\omega}{2}$, ἂν συνω $= \frac{2}{3}$ καὶ $270^0 < \frac{\omega}{2} < 360^0$.

354. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου $\frac{\omega}{2}$, ἂν εἶναι συνω $= -0{,}5$ καὶ $0^0 < \frac{\omega}{2} < 90^0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

## 1. Η ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

**109.** *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος ἑκάστης γωνίας τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

*Λύσις.* Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰσότητα $2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \text{συν}\omega$ εἰς τὴν γωνίαν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \text{συν}A \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς γνωστῆς (31 § 60) ἰσότητος $\alpha_2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ ἡ (1) γίνεται :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{2\beta\gamma} =$$

$$\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)}{2\beta\gamma} \qquad (2)$$

Ἂν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς $2\gamma$, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha + \beta - \gamma = 2(\tau-\gamma)$. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν $2\beta$, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha - \beta + \gamma = 2(\tau-\beta)$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (2) γίνεται :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{4(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{2\beta\gamma} = \frac{2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

Ἐκ ταύτης δέ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $0^0 < \frac{A}{2} < 90^0$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}} \qquad (53)$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $2\text{συν}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 + \text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \qquad (54)$$

Π.χ. ἂν $\alpha = 4$ μέτ, $\beta = 5$ μέτ, $\gamma = 6$ μέτ, θὰ εἶναι :

$2\tau = 15$, $\tau = \frac{15}{2}$, $\tau - \alpha = \frac{7}{2}$, $\tau - \beta = \frac{5}{2}$, $\tau - \gamma = \frac{3}{2}$ καὶ

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}{5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{1}{4\cdot 2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}}{5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{15\ 7}{4\cdot 5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{7}{4\cdot 2}}=\sqrt{\frac{14}{4\cdot 4}}=\frac{1}{4}\sqrt{14}.$$

κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}},\quad \text{συν}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\beta)}{\alpha\gamma}}$$

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\alpha\beta}},\quad \text{συν}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

**110.** *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμίσεος ἑκάστης γωνίας τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

*Λύσις.* Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων :

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\quad \text{συν}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι : $\textbf{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\alpha)}}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\textbf{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\beta)}}$

$$\left.\begin{aligned}\textbf{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\alpha)}}\\ \textbf{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\beta)}}\\ \textbf{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\tau\ (\tau-\gamma)}}\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(55)}$$

## 2. ΤΡΕΙΣ ΑΛΛΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**111.** *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

*Λύσις.* Γνωρίζομεν (§ 60γ΄) ὅτι $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\text{ἡμ}A$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}A=2\text{ἡμ}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{A}{2}$, αὕτη γίνεται $E=\beta\gamma\text{ἡμ}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{A}{2}$. Ἀπὸ αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὰς προηγουμένας (§ 109) εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ $\text{ἡμ}\frac{A}{2}$ καὶ τοῦ $\text{συν}\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

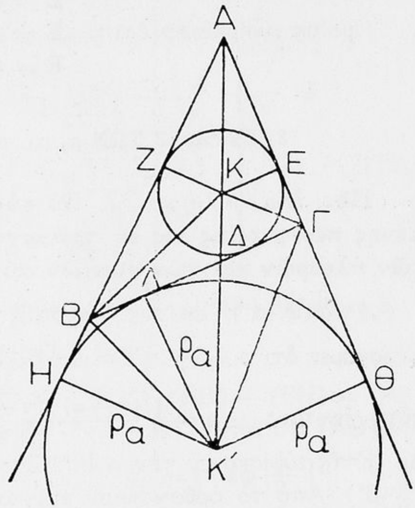
$$\mathbf{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}\qquad \textbf{(56)}$$

Π.χ. τὸ προηγούμενον (§ 109) τρίγωνον ἔχει:

$$E = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{7} \text{ τετ. μέτρα.}$$

**112.** *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτό.**

*Λύσις.* Ἂν Κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΓΚ, διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία τρίγωνα (σχ. 49). Εἶναι λοιπὸν Ε = (ΚΑΒ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΑ) (1) Ἐπειδὴ δὲ (ΚΑΒ) $= \frac{1}{2}$(ΑΒ) · (ΚΖ) $= \frac{1}{2}$ γρ., (ΚΒΓ) $= \frac{1}{2}$ αρ, (ΚΓΑ) $= \frac{1}{2}$ βρ, ἡ (1) γίνεται: $E = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho$.




Σχ. 49

Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῆς ρ καὶ τῶν πλευρῶν του. Συνήθως ὅμως δίδομεν εἰς αὐτὴν ἁπλουστέραν μορφήν, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{E} = \tau\rho \qquad (57)$$

**113.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος μιᾶς τῶν παρεγγεγραμένων περιφερειῶν εἰς αὐτό.**

*Λύσις.* Ἔστω Κ΄ τὸ κέντρον καὶ $\rho_\alpha$, ἡ ἀκτὶς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, ἥτις εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας Α αὐτοῦ (σχ. 49). Ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας Κ΄Α, Κ΄Β, Κ΄Γ, βλέπομεν ὅτι: Ε = (Κ΄ΑΒ) + (Κ΄ΑΓ) — (Κ΄ΒΓ) (1)

Ἐπειδὴ $(K'AB) = \frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(K'H) = \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha$, $(K'A\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha$, $(K'B\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha$, ἡ (1) γίνεται : $E = \frac{1}{2}\rho_\alpha(\beta + \gamma - \alpha)$.

• Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς $\rho_\alpha$. Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\beta + \gamma - \alpha = 2(\tau - \alpha)$, δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν ἁπλουστέραν μορφήν :

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\tau - \alpha)\rho_\alpha, \\ \mathbf{E} &= (\tau - \beta)\rho_\beta \\ \mathbf{E} &= (\tau - \gamma)\rho_\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

### 3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ $\rho$, $\rho_\alpha$, $\rho_\beta$ $\rho_\gamma$, ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**114.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του ἢ ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.**

*Λύσις.* α') Ἐκ τῆς γνωστῆς (57 § 112) ἰσότητος $E = \tau\rho$ εὑρίσκομεν ὅτι $\rho = \frac{E}{\tau}$. Ἐπειδὴ δὲ $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ αὕτη γίνεται :

$$\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \qquad (59)$$

Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν ρ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

β') Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΕ (σχ. 49) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$(KE) = (AE)\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $2(AE) + 2(B\Delta) + 2(\Gamma\Delta) = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ καὶ $2(B\Delta) + 2(\Gamma\Delta) = 2\alpha$, ἕπεται ὅτι $(AE) = \tau - \alpha$.

Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται :

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

καὶ

$$\left.\begin{aligned} \rho &= (\tau - \alpha)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) \\ \rho &= (\tau - \beta)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right) \\ \rho &= (\tau - \gamma)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Ἂν δὲ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\rho = (\tau - \alpha)\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}},$$

ἤτοι πάλιν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (59).

**115.** *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του ἢ ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτοῦ.**

*Λύσις.* α') Ἀπὸ τὴν γνωστὴν (58) ἰσότητα $E = (\tau - \alpha\ \rho_\alpha$ εὑρίσκομεν ὅτι $\rho_\alpha = \frac{E}{\tau - \alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

αὕτη γίνεται: $\rho_\alpha = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)}}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\rho_\beta = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{(\tau-\beta)}}$ **(61)**

καὶ $\rho_\gamma = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)}}$

β') Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚ'Θ (σχ. 49) βλέπομεν ὅτι:

$$(K'\Theta) = (A\Theta)\cdot \text{ἐφ}\,\frac{A}{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΘ) + (ΑΗ) = (ΑΓ) + (ΓΘ) + (ΑΒ) + (ΒΗ) = (ΑΓ) + (ΓΛ) + (ΑΒ) + (ΒΛ) ἢ 2(ΑΘ) = β + γ + α = 2τ, ἕπεται ὅτι (ΑΘ) = τ.

Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται: $\rho_\alpha = \boldsymbol{\tau}\cdot \textbf{ἐφ}\,\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\rho_\beta = \boldsymbol{\tau}\cdot \textbf{ἐφ}\,\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}$, $\rho_\gamma = \boldsymbol{\tau}\cdot \textbf{ἐφ}\,\frac{\mathbf{\Gamma}}{\mathbf{2}}$ (2)

Δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ἀκτῖνας ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων (55) εὑρίσκομεν πάλιν τὰς ἰσότητας (61).

## 4. ΜΙΑ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

**116.** *Πρόβλημα* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

*Ἐπίλυσις.* Ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους (55) ὁρίζονται οἱ ἄγνωστοι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$ καὶ ἐκ τούτων ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα μέτρα Α,Β,Γ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ταχύτερον ὅμως γίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ ὡς ἑξῆς :

Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι $\rho = (\tau - \alpha)$ ἐφ $\frac{A}{2}$· Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι : ἐφ $\frac{A}{2} = \frac{\rho}{\tau - \alpha}$· Ὁμοίως εἶναι ἐφ $\frac{B}{2} = \frac{\rho}{\tau - \beta}$, ἐφ $\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\tau - \gamma}$.
Ἂν λοιπὸν ὑπολογισθῇ ἀρχικῶς ὁ λογρ, εὑρίσκονται εὐκόλως οἱ λογάριθμοι τῶν α' μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ εἶτα οἱ ἄγνωστοι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$. Οὕτως ἐκ τῆς ἰσότητος (59) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογρ} = \frac{\text{λογ}(\tau-\alpha) + \text{λογ}(\tau-\beta) + \text{γογ}(\tau-\gamma) - \text{λογτ}}{2}$$

Ἂν π.χ. εἶναι $\alpha = 4$ μέτ, $\beta = 5$ μέτ, $\gamma = 6$ μέτ, εὑρίσκομεν ὅτι :

| | |
|---|---|
| λογ(τ − α) = 0,54407 | ἄθροισμα = 1,11810 |
| λογ(τ − β) = 0,39794 | λογτ = 0,87506 |
| λογ(τ − γ) = 0,17609 | διαφορὰ = 0,24304 |
| ἄθροισμα = 1,11810 | λογρ = 0,12152 |

*Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Α.*

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{A}{2}\right) = \text{λογρ} - \text{λογ}(\tau - \alpha),$$

λογρ = 0,12152
λογ(τ − α) = 0,54407

$\text{λογἐφ}\left(\frac{A}{2}\right) = \overline{1},57745$

$\frac{A}{2} = 20^o42'17'',37$

$A = 41^o24'34'',74$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Β.*

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{B}{2}\right) = \text{λογρ} - \text{λογ}(\tau - \beta)$$

λογρ = 0,12152
λογ(τ − γ) = 0,39794

$\text{λογἐφ}\left(\frac{B}{2}\right) = \overline{1},72358$

$\frac{B}{2} = 27^o53'8''$

$B = 55^o46'16''$

*Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Γ.*

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \text{λογρ} - \text{λογ}(\tau - \gamma)$$

λογρ = 0,12152
λογ(τ − γ) = 0,17609

$\text{λογἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \overline{1},94543$

$\frac{\Gamma}{2} = 41^o24'34'',6 \qquad \Gamma = 82^o49'9'',2$

*Δ ο κ ι μ ή*

$180^o = 179^o59'60''$

$A + B + \Gamma = 179^o59'59'', 94$

λάθος = 0'',06

*Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ*

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$2\lambda o\gamma E = \left[\lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \lambda o\gamma(\tau-\gamma)\right] + \lambda o\gamma\tau$$

ἄθροισμα ἐντὸς ἀγκυλῶν = 1,11810

λογτ = 0,87506

2λογΕ = 1,99316

λογΕ = 0,99658

Ε = 9,92125 τετ. μέτ.

**Ἀσκήσεις**

355. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 8$ μέτ, $\beta = 9$ μέτ, $\gamma = 10$ μέτ.

356. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς $\alpha = 347$ μέτ, $\beta = 247$ μέτ, $\gamma = 147$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ δὲ καὶ ἡ $\rho_\alpha$ αὐτοῦ.

357. Ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\tau - \alpha = 5{,}5$ μέτ. καὶ $A = 24^0\, 43'\, 46''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρ αὐτοῦ.

358. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\rho_\alpha$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΚΕ καὶ ΑΚ΄Θ ( σχ. 49 ).

359. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $E = \tau(\tau - \alpha)$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον. Καὶ ἀντιστρόφως.

360. Ἕν τρίγωνον ἔχει περίμετρον 36 μέτ. καὶ $\rho_\alpha = \frac{6}{5}\sqrt{15}$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α.

**117. Διάφοροι ἄλλαι μορφαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου.** Ἐμάθομεν μέχρι τοῦδε τοὺς ἑξῆς τύπους, σχετικοὺς μὲ τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ :

$$E = \frac{\alpha^2 \eta\mu B . \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu A},\quad E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},\quad E = \tau\rho,$$

$$E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma.$$

Πλὴν τούτων, ἀξιοσημείωτοι μορφαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι καὶ αἱ ἀκόλουθοι :

α΄) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$, $\beta = 2R\eta\mu B$, $\gamma = 2R\eta\mu\Gamma$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{E = 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma} \qquad (63)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς $\alpha = 2R$ἡμ$A$ προκύπτει ὅτι ἡμ$A = \frac{\alpha}{2R}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E = \alpha R ἡμ B ἡμ Γ} \\ &\mathbf{E = \beta R ἡμ A ἡμ Γ} \\ &\mathbf{E = \gamma R ἡμ A ἡμ B} \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

β') Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τοῦ β' μέλους διὰ $\tau(\tau-\alpha)$ εὑρίσκομεν ὅτι : $E = \tau(\tau-\alpha)\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$, ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι:

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E = \tau(\tau-\alpha)ἐφ\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &\mathbf{E = \tau(\tau-\beta)ἐφ\left(\frac{B}{2}\right)} \\ &\mathbf{E = \tau(\tau-\gamma)ἐφ\left(\frac{Γ}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

γ') Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $E = \tau\rho$, $E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha$, $E = (\tau-\beta)\rho_\beta$, $E = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι :

$$E^4 = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\cdot\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma E^2.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $E^2 = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$ καὶ ἑπομένως :

$$\mathbf{E = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}} \quad (66)$$

δ') Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (62) εὑρίσκομεν ὅτι :

$\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = \tau^3 ἐφ\frac{A}{2}ἐφ\frac{B}{2}ἐφ\frac{Γ}{2}$, ὅθεν $\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = \rho\tau^3 ἐφ\frac{A}{2}ἐφ\frac{B}{2}ἐφ\frac{Γ}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = E^2$ καὶ $\rho\tau = E$, ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{E = \tau^2 ἐφ\frac{A}{2}ἐφ\frac{B}{2}ἐφ\frac{Γ}{2}} \quad (67)$$

ε') Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ἡμ$A$ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$2E = \beta\gamma ἡμA, \quad 2E\cdot\frac{\alpha}{ἡμA} = \alpha\beta\gamma.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{ἡμA} = 2R$, αὕτη γίνεται $4ER = \alpha\beta\gamma$ καὶ ἑπομένως

$$\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}} \quad (68)$$

**118.** *Πρόβλημα* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του.**

*Λύσις.* Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (69)$$

## Ἀσκήσεις

361. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $A = 53^0\ 7'\ 48''$, $B = 67^0\ 22'\ 48''$, $R = 8{,}125$ μέτ.

362. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 13$ μέτ. $A = 53^0 7'\ 48''$, $\Gamma = 59^0\ 29'\ 24''$.

363. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 37$ μέτ, $R = 20{,}04$μ, $B = 18^0\ 55'\ 29''$, $\Gamma = 93^0\ 41'\ 44''$.

364. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\tau = 21$ μέτ, $\tau - \alpha = 8$μ, $A = 53^0\ 7'\ 42''$.

365. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\tau = 160$ μέτ, καὶ $\rho = 11{,}28$ μέτ.

366. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\rho = 9{,}6$ μέτ, $\rho_\alpha = 50$ μέτ, $\rho_\beta = 12{,}5$ μέτ, $\rho_\gamma = 12{,}5$μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

367. Ἓν τρίγωνον ἔχει $E = 8169$ τετ. μέτρα, $A = 77^0\ 19'\ 10''$, 6, $B = 5^0\ 43'\ 29''$, 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

368. Ἓν τρίγωνον ἔχει $E = 1200$ τετ. μέτρα, $\alpha = 101$ μέτ, $\beta = 29$ μέτ. καὶ $\tau = 125$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $R$ αὐτοῦ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

## ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

**119. Χρησιμότης τῆς τροπῆς παραστάσεων εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{1 - συνx}{1 + συνx}$, ἂν $_\wedge = 18^0\,42'$.

Ἂν καλέσωμεν ψ τὴν ζητουμένην τιμήν, θὰ εἶναι :

$$ψ = \frac{1 - συν(18^0\,42')}{1 + συν(18^0\,42')}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ $συν(18^0 42')$ καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὸ β' μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος. Ἐπειδὴ δὲ $λογσυν(18^0 42') = λογἡμ(71^0 18') = \overline{1},97645$, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν ὅτι $συν(18^0 42') = 0,94722$. Ἑπομένως $ψ = \frac{1 - 0,94722}{1 + 0,94722} = \frac{0,05278}{1,94722} = 0,02711$.

Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν (51 § 108) ὅτι $\frac{1 - συνx}{1 + συνx} = ἐφ^2\left(\frac{x}{2}\right)$, βλέπομεν ὅτι $ψ = ἐφ^2(9^0 21')$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $λογψ = 2λογἐφ(9^0 21') = \overline{2},43314$ καὶ ἑπομένως : $ψ = 0,02711$.

Βλέπομεν οὕτως ὅτι κατὰ τὸν β' τρόπον εὑρέθη τὸ ζητούμενον μὲ ὀλιγωτέρας πράξεις. Κατωρθώθη δὲ τοῦτο, διότι ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀντικατεστάθη μὲ τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν $ἐφ^2(9^0 21')$, τῆς ὁποίας ὁ λογάριθμος εὑρέθη δι' ἀμέσου ἐφαρμογῆς τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τοῦ λογαρίθμου δυνάμεως.

Διὰ τοῦτο ἡ τελευταία αὕτη παράστασις λέγεται **λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.**

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπομεν ὅτι εἶναι πολὺ χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν νὰ τρέπωμεν παραστάσεις εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους καὶ λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἀκόλουθα θὰ ἐκθέσωμεν πῶς γίνεται ἡ τροπὴ αὕτη τῶν συνηθεστέρων τριγωνομετρικῶν παραστάσεων.

**120.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἡμΑ ± ἡμΒ.**

*Λύσις.* Ἐμάθομεν (§ § 100, 101) ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)=\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$
$$\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)+\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta \tag{1}$$

Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰδίας ἰσότητας, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)-\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha \tag{2}$$

Τώρα θέτομεν $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha=\frac{A+B}{2}$ καὶ $\beta=\frac{A-B}{2}$. Αἱ ἰσότητες λοιπὸν (1), (2) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{ἡμA+ἡμB=2ἡμ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right)}\\ \text{καί: }&\mathbf{ἡμA-ἡμB=2ἡμ\left(\frac{A-B}{2}\right)συν\left(\frac{A+B}{2}\right)}\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

Τούτων δὲ τὰ β' μέλη εἶναι προφανῶς λογιστὰ διὰ τῶν λογαρίθμων.

**121.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}$.**

*Λύσις.* Ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἰσότητας εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\frac{2\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)}=$$

$$\frac{\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)}\cdot\frac{\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\text{σφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{σφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\text{ἡμ}A - \text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B} = \frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (71)$$

**122.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις $1 \pm$ ἡμA.**

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $1 =$ ἡμ$90^0$, ἕπεται ὅτι :

$$1 + \text{ἡμ}A = \text{ἡμ}90^0 + \text{ἡμ}A = 2\text{ἡμ}\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) \qquad (72)$$

Ταύτης τὸ β' μέλος εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Δίδομεν ὅμως εἰς αὐτὸ καὶ δύο ἀκόμη μορφάς. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) + \left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = 90^0$$

καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\text{συν}\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = \text{ἡμ}\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)$.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται :

$$1 + \text{ἡμ}A = 2\text{ἡμ}^2\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) = 2\text{συν}^2\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) \qquad (73)$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

$$1 - \text{ἡμ}A = 2\text{ἡμ}^2\left(45^0 - \frac{A}{2}\right) = 2\text{συν}^2\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) \qquad (74)$$

**123.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις συνA $\pm$ συνB.**

*Λύσις.* Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἰσότητας :

$$\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta$$
$$\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta$$

ἐργαζόμενοι ὡς ἐν § 120 εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}A + \text{συν}B &= 2\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \text{καὶ}\quad \text{συν}A - \text{συν}B &= -2\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ &= 2\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{B-A}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

**124.** *Πρόβλημα V.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις $1 \pm$ συνA.**

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $1 =$ συν$0^0$, ἕπεται ὅτι :

$$1 + \sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu 0^0 + \sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{0+A}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{0-A}{2}\right)$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) \cdot$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $1 - \sigma\upsilon\nu A = 2\acute{\eta}\mu^2\left(\frac{A}{2}\right) \cdot$

Σημείωσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰς ἰσότητας ταύτας ἀνεύρομεν καὶ ἄλλως (§ 107).

### Ἀσκήσεις

369. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\acute{\eta}\mu(38^0\,16') + \acute{\eta}\mu(52^0\,24')$ χωρὶς νὰ εὑρεθῶσι προηγουμένως οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.

370. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $\acute{\eta}\mu(64^0\,40'\,20'') - \acute{\eta}\mu\,(28^0\,16'\,8'')$ χωρὶς νὰ εὑρεθῇ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος.

371. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\sigma\upsilon\nu\,(18^0\,46'\,54'') + \sigma\upsilon\nu(40^0\,24'\,12'')$ χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.

372. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ διαφορὰ $\sigma\upsilon\nu\,(34^0\,16'\,36'') - \sigma\upsilon\nu\,(58^0\,18'\,44'')$.

373. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις $1 \pm \acute{\eta}\mu(26^0\,22'\,40'')$.

374. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις $1 \pm \sigma\upsilon\nu\,(32^0\,50'\,34'')$.

375. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις $\acute{\eta}\mu 490^0 \pm \acute{\eta}\mu\,350^0$.

376. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\acute{\eta}\mu B + \acute{\eta}\mu\Gamma = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) \text{ καὶ ὅτι } \acute{\eta}\mu B - \acute{\eta}\mu\Gamma = \sqrt{2}\,\acute{\eta}\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right).$$

377. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sqrt{2}\,\acute{\eta}\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right)$$

378. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha.$$

379. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\omega + 2\sigma\upsilon\nu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 3\omega = 4\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

380. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$$\acute{\eta}\mu\alpha + \acute{\eta}\mu 5\alpha.$$

**125.** *Πρόβλημα VI.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἐφΑ ± ἐφΒ.**

*Λύσις.* α') Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\grave{\epsilon}\varphi A = \frac{\acute{\eta}\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}$, $\grave{\epsilon}\varphi B = \frac{\acute{\eta}\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$

εὑρίσκομεν ὅτι : $\grave{\epsilon}\varphi A + \grave{\epsilon}\varphi B = \frac{\acute{\eta}\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} + \frac{\acute{\eta}\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\acute{\eta}\mu A\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu A\acute{\eta}\mu B.}{\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B}$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ ἡμ(Α+Β), ἕπεται ὅτι :

β') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \text{ἐφ}A + \text{ἐφ}B &= \frac{\text{ἡμ}(A+B)}{\text{συν}A \cdot \text{συν}B} \\ \text{ἐφ}A - \text{ἐφ}B &= \frac{\text{ἡμ}(A-B)}{\text{συν}A \cdot \text{συν}B} \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

**126.** *Πρόβλημα VII.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις 1 ± ἐφΑ.**

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $1 = \text{ἐφ}45^0$, ἕπεται ὅτι :

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} 1 + \text{ἐφ}A &= \text{ἐφ}45^0 + \text{ἐφ}A = \frac{\text{ἡμ}(45^0+A)}{\text{συν}45^0 \; \text{συν}A} = \frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^0+A)}{\text{συν}A} \\ 1 - \text{ἐφ}A &= \frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^0-A)}{\text{συν}A} \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

## Ἀσκήσεις

381. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐφ(42⁰ 30′) + ἐφ(34⁰ 40′) καὶ ἡ διαφορὰ ἐφ(36⁰ 45′) − ἐφ (11⁰ 45′).

382. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 1 + ἐφ (120⁰ 30′) καὶ ἡ διαφορὰ 1 − ἐφ(18⁰ 20′).

383. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐφ1120⁰ + ἐφ3635⁰.

384. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἐφ(−25⁰ 42′) − ἐφ(−45⁰).

385. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$\text{ἐφ}\,B + \text{ἐφ}\Gamma = \frac{2}{\text{ἡμ}2B}.$$

386. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$\text{ἐφ}B - \text{ἐφ}\Gamma = \frac{2\text{ἡμ}(B-\Gamma)}{\text{ἡμ}2B}.$$

387. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις σφ Α + σφ Β.

388. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\frac{\text{ἐφ}A + \text{σφ}B}{\text{σφ}A + \text{σφ}B}$.

389. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἐφ}\,\frac{5\pi}{3} + \text{ἐφ}\,\frac{3\pi}{8}$ καὶ ἡ διαφορὰ
$$\text{ἐφ}\,\frac{4\pi}{3} - \text{ἐφ}(268^0\,12').$$

**127.** *Πρόβλημα VIII.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἡμΑ ± συνΒ.**

*Λύσις.* Παρατηροῦμεν ὅτι συνΒ = ἡμ(90⁰ − Β) καὶ ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (70 § 120). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} ἡμ\mathbf{A} + συν\mathbf{B} &= 2ἡμ\left(\frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2} + 45^{\circ}\right)συν\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2} - 45^{\circ}\right) \\ ἡμ\mathbf{A} - συν\mathbf{B} &= 2ἡμ\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2} - 45^{\circ}\right)συν\left(\frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{2} + 45^{\circ}\right) \end{aligned}\right. \qquad (78)$$

**Ἀσκήσεις**

390. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ(18^0\,12'\,40'') + συν(24^0\,20'\,30'')$.
391. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $ἡμ(72^0\,24') - συν(106^0\,30'\,42'')$.
392. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ\frac{3\pi}{8} + συν\frac{2\pi}{5}$ καὶ ἡ διαφορὰ

$$ἡμ\frac{4\pi}{7} - συν\frac{2\pi}{7}$$

393. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ1925^0 + συν\,930^0$ καὶ ἡ διαφορὰ $συν\,1128^0 - ἡμ\,1656^0$.

**128. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας.** Πολλαὶ παραστάσεις γίνονται λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων μὲ τὴν χρῆσιν βοηθητικῆς γωνίας. Αἱ συνηθέστεραι μορφαὶ τοιούτων παραστάσεων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

α΄) *Παραστάσεις τῆς μορφῆς* $\alpha + \beta$. Αὗται γίνονται λογισταὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

1ον. Εἶναι φανερὸν ὅτι $\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἐφ^2\omega$, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha + \beta = \alpha(1 + ἐφ^2\omega) = \frac{\alpha}{συν^2\omega}$

2ον. Ἂν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἐφ\omega$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + ἐφ\omega) = \alpha\sqrt{2}\cdot\frac{ἡμ(45^0 + \omega)}{συν\omega} \quad (\S\ 126).$$

3ον. Ἂν εἶναι $\beta < \alpha$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = συν\omega$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + συν\omega) = 2\alpha συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

β΄) *Παραστάσεις τῆς μορφῆς* $\alpha - \beta$, *ἂν* $\alpha > \beta$. Εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ θέτομεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἡμ^2\omega$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha - \beta = \alpha(1 - ἡμ^2\omega) = \alpha\, συν^2\omega.$$

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θέσωμεν $\frac{\alpha}{\beta} = συν\omega$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\alpha - \beta = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega) = 2\alpha\acute{\eta}\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

γ') *Παραστάσεις τῆς μορφῆς αἡμχ ± βσυνχ.* Ἐξάγοντες τὸν α ἐκτὸς παρενθέσεως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha\acute{\eta}\mu\chi \pm \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha\left(\acute{\eta}\mu\chi \pm \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\chi\right).$$

Ἔπειτα θέτομεν $\frac{\beta}{\alpha} = \grave{\epsilon}\varphi\omega = \frac{\acute{\eta}\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha\acute{\eta}\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha\,\frac{\acute{\eta}\mu\chi\sigma\upsilon\nu\omega \pm \acute{\eta}\mu\omega\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\alpha\acute{\eta}\mu(\chi \pm \omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

δ') *Παραστάσεις τῆς μορφῆς* $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Ἐπειδὴ $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$ ἔπεται ὅτι $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \grave{\epsilon}\varphi^2\omega$, αὕτη (§ 89) γίνεται :

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha\sqrt{1 + \grave{\epsilon}\varphi^2\omega} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

ε') *Παραστάσεις τῆς μορφῆς* $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, *ἂν* $\alpha > \beta$. Εἰς τὴν ἰσότητα $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ θέτομεν $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \sigma\upsilon\nu^2\omega$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega} = \alpha\acute{\eta}\mu\omega.$$

### Ἀσκήσεις

394. Ἂν λογα = 3,35892, λογβ = 2,75064, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α + β καὶ ἡ διαφορὰ α − β, χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β.

395. Ἂν λογχ = 1,27964 καὶ λογψ = 0,93106, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{\chi - \psi}{\chi + \psi}$.

396. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως : $\sqrt{2} + 2\acute{\eta}\mu\chi$ · διὰ $\chi = 48^0\ 15'\ 40''$.

397. Νὰ εὑρεθῇ ὀξεῖα γωνία χ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι: $\grave{\epsilon}\varphi\chi = \sqrt{2} + \acute{\eta}\mu 20^0$.

**129. Τροπὴ γινομένου τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον συν75⁰ . συν15⁰, θέτομεν $\chi = \sigma\upsilon\nu 75^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 15^0$.

Ἔπειτα λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ εὑρίσκομεν :

$$\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 75^0 + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 15^0 = \bar{1},39794.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 0{,}25$.

Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν ὅτι :

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta),$$

εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\chi = \sigma\upsilon\nu 90^0 + \sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{1}{2} \text{ καὶ ἑπομένως } \chi = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ὁμοίως, ἂν $\psi = \eta\mu(67^0 30') \,.\, \eta\mu(22^0 30')$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\psi = 2\eta\mu(67^0 30') \cdot \eta\mu(22^0 30') = \sigma\upsilon\nu 45^0 - \sigma\upsilon\nu 90^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ}$$

ἑπομένως $\psi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι εἶναι χρήσιμος ἡ μετατροπὴ γινομένων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἀθροίσματα ἢ διαφορὰς τοιούτων.

Αἱ συνηθέστεραι τοιαῦται μετατροπαὶ γίνονται κατὰ τοὺς ἀκολούθους γνωστοὺς τύπους :

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \\ 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \\ 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta) \\ 2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha &= \eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

## Ἀσκήσεις

398. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα:
$\sigma\upsilon\nu(67^0\,30')\,\sigma\upsilon\nu(22^0\,30')$ καὶ $\eta\mu 15^0 \cdot \eta\mu 75^0$.

399. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\eta\mu(82^0\,30')\,\sigma\upsilon\nu(37^0\,30')$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(52^0\,30')\,\eta\mu(7^0\,30')$.

400. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις :
$\eta\mu 7\chi - 2\eta\mu\chi\,(\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi + \sigma\upsilon\nu 6\chi)$.

401. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις:
$\eta\mu\, 13\chi - 2\eta\mu 2\chi(\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 7\chi + \sigma\upsilon\nu 11\chi)$.

402. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις.
$\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma) + \eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha) + \eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

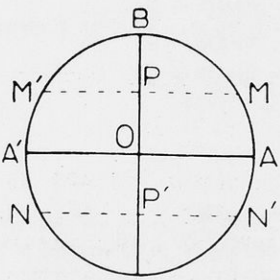
Α' τετράμηνο

## 1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**130. Ὁρισμὸς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.** Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = ἡμ$35^0$ ἀληθεύει διὰ $\chi = 35^0$ καὶ διὰ $\chi = 180^0 - 35^0 = 145^0$. Ἐπειδὴ δὲ ἡμ$(360^0 + 35^0)$ = ἡμ$35^0$ καὶ ἡμ$(360^0 + 145^0)$ = ἡμ$35^0$, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 360^0 k + 35^0 \\ \text{καὶ διὰ}\quad \chi &= 360^0 k + 145^0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός. Π.χ. διὰ $k = 1$, εὑρίσκομεν $\chi = 395^0$ καὶ $\chi = 505^0$ κ.τ.λ.




Σχ. 50

Μὲ οὐδεμίαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ χ ἀληθεύει· διότι, ἂν Μ καὶ Μ' (σχ. 50) εἶναι τὰ πέρατα τῶν τόξων $35^0$ καὶ $145^0$, θὰ εἶναι ἡμ$35^0$ = ἡμ$145^0$ = (ΟΡ). Πᾶν δὲ τόξον λῆγον εἰς ἄλλο σημεῖον Ν ἔχει ἡμίτονον (ΟΡ') ≠ (ΟΡ).

Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = ἡμ$35^0$ λέγεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.** Οἱ δὲ τύποι (1) ἀποτελοῦσι την λύσιν αὐτῆς.

Καὶ αἱ ἐξισώσεις 2ἡμχ = 1, συνχ + ἡμχ = 1, ἐφχ − 3 = 3σφχ εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις. Ὥστε:

**Μία ἐξίσωσις λέγεται τριγωνομετρική, ἂν περιέχῃ ἕνα τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀγνώστου τόξου ἢ γωνίας καὶ δὲν ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου.**

**Λύσις δὲ τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τύπου ἢ τύπων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους μόνον εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ταὐτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.**

**131. Εἴδη τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.**

*α΄) Ἁπλαῖ τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.* Οὕτως ὀνομάζονται αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι τὰς ἀκολούθους μορφάς :

$$\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}\chi = \text{συν}\tau, \quad \text{ἐφ}\chi = \text{ἐφ}\tau, \quad \text{σφ}\chi = \text{σφ}\tau,$$

$$\text{ἡμ}\chi = \alpha, \quad \text{συν}\chi = \alpha, \quad \text{ἐφ}\chi = \alpha, \quad \text{σφ}\chi = \alpha$$

ἢ καὶ τοιαύτας :

$$\text{ἡμ}\,(2\chi + 5^0) = \text{ἡμ}52^0, \quad \text{συν}\,(2\chi + 12^0) = \text{συν}\left(\frac{\chi}{2} - 30^0\right),$$

$$\text{ἐφ}\left(2\chi - \frac{\pi}{2}\right) = \text{ἐφ}\left(\chi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ κ.τ.λ.}$$

β΄) Ἡ ἐξίσωσις $5\text{συν}\chi + \frac{1}{2} = 3\text{συν}\chi + \frac{3}{2}$ ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς ἄγνωστον τὸ συνχ. Αὕτη λυομένη πρὸς συνχ γίνεται $\text{συν}\chi = \frac{1}{2}$, ἤτοι γίνεται ἁπλῆς μορφῆς.

γ΄) Ὑπάρχουσι τέλος καὶ πολυπλοκώτεραι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτοῦ. Τοιαῦται π.χ. εἶναι αἱ $\text{συν}2\chi - \text{συν}\frac{\chi}{2} = 0{,}924$, $\text{ἐφ}2\chi - \text{ἡμ}\chi = 0$ κ.τ.λ.

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ μάθωμεν πῶς λύονται αἱ ἁπλούστεραι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

**132. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς.**
α΄) Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = ἡμτ ἀληθεύει διὰ $\chi = \tau$, διὰ $\chi = 180^0 - \tau$ ἢ διὰ $\chi = 360^0k + \tau$ καὶ διὰ $\chi = 360^0k + 180^0 - \tau$, ὡς ἐξηγήσαμεν προηγουμένως (§ 130). Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο πρῶται τιμαὶ τοῦ χ προέρχονται ἐκ τῶν δύο τελευταίων τύπων διὰ $k = 0$, ἕπεται ὅτι τὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀποτελοῦσιν οἱ τύποι :

$$\chi = 360^0k + \tau \text{ καὶ } \chi = 360^0k + 180^0 - \tau.$$

ἢ εἰς ἀκτίνια $\chi = 2k\pi + \tau$ καὶ $\chi = (2k + 1)\,\pi - \tau$.

Ἡ ἐξίσωσις $\text{ἡμ}\chi = \frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}30^0$ καὶ ἀληθεύει διὰ

$\chi = 360^0k + 30^0$ καὶ διὰ $\chi = 360^0k + 180^0 - 30^0 = 360^0k + 150^0$

ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ καὶ διὰ $\chi = (2k + 1)\,\pi - \frac{\pi}{6}$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἡμχ = 0,45139, εὑρίσκομεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων ὅτι 0,45139 = ἡμ(26⁰50′).

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται· ἡμχ = ἡμ(26⁰50′) καὶ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 360^0 k + 26^0 50'.$$

καὶ διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 - (26^0 50') = 360^0 k + 153^0\ 10'$.

Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = 0, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἡμχ = ἡμ0⁰ καὶ ἡμχ = ἡμ180⁰. Ἀληθεύει ἑπομένως διὰ $\chi = 360^0 k + 0^0$ καὶ διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 - 0^0$

ἢ $\chi = 180^0 . 2k$ καὶ $\chi = 180^0(2k + 1)$.

Αὗται συγχωνεύονται εἰς τὴν $\chi = 180^0\lambda$ ἢ $\chi = \lambda\pi$, ἂν λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β′) Ἡ ἐξίσωσις συνχ = συντ ἀληθεύει διὰ χ = τ. Ἐπειδὴ δὲ συν(−τ) = συντ, ἀληθεύει καὶ διὰ χ = −τ. Κατ᾽ ἀκολουθίαν ἀληθεύει γενικῶς διὰ

$$\chi = 360^0 k \pm \tau \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } \chi = 2k\pi \pm \tau.$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\text{συν}\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἐνθυμούμεθα ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}45^0$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\text{συν}\chi = \text{συν}45^0 = \text{συν}\frac{\pi}{4}$. Ἀληθεύει δὲ διὰ

$$\chi = 360^0 k \pm 45^0 \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } \chi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὴν ἐξίσωσιν συνχ = 0,94832, εὑρίσκομεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων ὅτι 0,94832 = συν(18⁰30′).

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται συνχ = συν(18⁰30′) καὶ ἀληθεύει διὰ $\chi = 360^0 k \pm (18^0 30')$.

γ′) Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ = ἐφτ ἀληθεύει προφανῶς διὰ χ = τ καὶ γενικῶς διὰ $\chi = 360^0 k + \tau$. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ(180⁰ + τ) = ἐφτ, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἐφχ = ἐφ(180⁰ + τ) καὶ ἀληθεύει γενικῶς διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 + \tau = 2 \cdot 180^0 k + 180^0 + \tau = 180^0(2k + 1) + \tau$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\chi = 360^0 k + \tau = 180^0 \cdot 2k + \tau$, δυνάμεθα νὰ συμπτύξωμεν τοὺς δύο τύπους εἰς τὸν $\chi = 180^0\lambda + \tau$ ἢ εἰς ἀκτίνια $\chi = \lambda\pi + \tau$, ἂν λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ = 1 = ἐφ45⁰ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 180^0\lambda + 45^0 \text{ ἢ διὰ } \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐφχ $= 2{,}56064$, εὑρίσκομεν πρῶτον ἀπὸ τοὺς πίνακας ὅτι $2{,}56064 =$ ἐφ$(68^0 40' 5'')$.

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν γίνεται ἐφχ $=$ ἐφ$(68^0 40' 5'')$ καὶ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 180^0\lambda + 68^0 40' 5''.$$

δ') Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ $=$ σφτ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{1}{\text{ἐφχ}} = \frac{1}{\text{ἐφτ}}$ ἢ ἐφχ $=$ ἐφτ καὶ ἔχει τὰς ρίζας αὐτῆς.

## Ἀνακεφαλαίωσις

α') Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ $=$ ἡμτ ἀληθεύει διὰ
$\chi = 360^0 k + \tau$ καὶ διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 - \tau$.
ἢ διὰ $\chi = 2k\pi + \tau$ καὶ διὰ $\chi = (2k+1)\pi - \tau$.

β') Ἡ ἐξίσωσις συνχ $=$ συντ ἀληθεύει διὰ
$\chi = 360^0 k \pm \tau$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $\chi = 2k\pi \pm \tau$.

γ') Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ $=$ ἐφτ ἀληθεύει διὰ
$\chi = 180^0\lambda + \tau$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $\chi = \lambda\pi + \tau$.

δ') Ἡ ἐξίσωσις σφχ $=$ σφτ ἀληθεύει διὰ
$\chi = 180^0\lambda + \tau$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $\chi = \lambda\pi + \tau$.

## Ἀσκήσεις

403. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
ἡμχ $=$ ἡμ$23^0$, συνχ $=$ συν$15^0$, ἐφχ $=$ ἐφ$54^0$, σφχ $=$ σφ $(37^0\, 20')$.

404. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
ἡμχ $=$ ἡμ $\frac{3\pi}{8}$, συνχ $=$ συν $\frac{\pi}{5}$, ἐφχ $=$ ἐφ $\frac{7\pi}{12}$, σφχ $=$ σφ $\frac{4\pi}{9}$.

405. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
ἡμχ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, συνχ $= \frac{1}{2}$, ἐφχ $= -1$, σφχ $= 0$.

406. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις :
ἡμχ $= 0{,}75$, συνχ $= 0{,}825$, ἐφχ $= 1{,}125$, σφχ $= 0{,}895$.

407. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
συνχ $=$ συν$\left(\frac{\chi}{2} - \pi\right)$, ἐφ $\left(\frac{\chi}{3} - \frac{3\pi}{8}\right) =$ ἐφ $2\chi$.

408. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
σφ$\left(\frac{2\chi}{5} + 30^0\right) =$ σφ $\left(\frac{\chi}{3} + 30^0\right)$, ἡμ $(2\chi + 50^0) =$ ἡμ $(\chi + 25^0)$.

**133. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ἀλγεβρικῆς μορφῆς πρὸς ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀγνώστου τόξου ἢ γωνίας.** Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις :

$$2\text{συν}χ + 3 = \frac{\text{συν}χ}{2} + \frac{15}{4}.$$

Ἂν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς συνχ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\text{συν}χ = \frac{1}{2} = \text{συν}60^0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει διὰ

$$χ = 360^0 k \pm 60^0 \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } χ = 2kπ \pm \frac{π}{3}.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}^2χ - (1 + \sqrt{3})\,\text{ἐφ}χ + \sqrt{3} = 0$. Ἂν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν ἐφχ, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}χ = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow \sqrt{3} \end{array}$$

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων :

$$\text{ἐφ}χ = 1 \text{ καὶ } \text{ἐφ}χ = \sqrt{3} \text{ ἢ } \text{ἐφ}χ = \text{ἐφ}\frac{π}{4} \text{ καὶ } \text{ἐφ}χ = \text{ἐφ}\frac{π}{3}.$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$χ = λπ + \frac{π}{4} \text{ καὶ } χ = λπ + \frac{π}{3}.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς αὐτόν, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἁπλῶν ἐξισώσεων.

### Ἀσκήσεις

409. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
$10\text{συν}χ - 1 = 6\text{συν}χ + 1$, $2\text{συν}^2χ - 3\text{συν}χ + 1 = 0$.

410. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$3\text{ἡμ}χ + 2 = 7\text{ἡμ}χ - 2, \quad \text{ἡμ}^2χ - \frac{3\text{ἡμ}χ}{2} \quad \frac{1}{2} = 0.$$

411. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$(\text{ἐφ}χ - 1)^2 - \text{ἐφ}^2χ = -3, \quad \text{ἐφ}^2χ - 3\text{ἐφ}χ = \sqrt{3}(\text{ἐφ}χ - 3).$$

412. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$\text{σφ}χ\,(\text{σφ}χ - 3) + 1 = 5\,(\text{σφ}χ - 3), \quad \text{ἐφ}χ + \frac{3\text{ἐφ}χ - 1}{5} = 1 - \frac{5\text{ἐφ}χ - 16}{3}.$$

413. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$(2\text{συν}\chi - 3)^2 - 8\text{συν}\chi = 0, \qquad \frac{1}{\text{ἡμ}^2\chi} - \frac{2}{\text{ἡμ}\chi} + 1 = 0.$$

**134. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μορφῆς διαφόρου τῶν προηγουμένων.** Ἡ λύσις τῶν τοιούτων ἐξισώσεων δὲν δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς γενικὸν κανόνα ἕνεκα τῆς μεγάλης ποικιλίας αὐτῶν. Θὰ περιορισθῶμεν λοιπὸν εἰς μερικὰ παραδείγματα ἀπὸ τὰ ἁπλούστερα.

*Παράδειγμα 1ον.* **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἡμχ — συνχ = 0.**
*Λύσις. α' τρόπος.* Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$\text{ἡμ}\chi = \text{συν}\chi \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \text{συν}\chi.$$

Ἑπομένως (§ 132) ἀληθεύει διὰ $\chi = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \chi \quad \text{καὶ} \quad \chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \chi.$$

Ἐκ τῆς α' τούτων προκύπτει $\chi = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (1). Ἐκ δὲ τῆς β' προκύπτει $0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $k = \frac{1}{4}$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ k μόνον ἀκεραίας τιμὰς πρέπει νὰ λαμβάνῃ. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει μόνον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ παρεχομένην ὑπὸ τῆς (1).

*β' τρόπος.* Γνωρίζομεν ὅτι : $\text{ἡμ}\chi - \text{συν}\chi = \text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$ $= 2\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)\text{συν}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \text{ἡμ}0^0$. Ἀληθεύει δὲ (§ 132 α') διὰ $\chi - \frac{\pi}{4} = \lambda\pi$, ὅθεν $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$.

*γ' τρόπος.* Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἦτο συνχ = 0, θὰ ἦτο καὶ ἡμχ = 0. Αἱ δύο ὅμως αὗται ἐξισώσεις δὲν συναληθεύουσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ χ. Διότι τόξα, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι συνχ = 0, εἶναι τὰ λήγοντα εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β' τῆς περιφερείας. Διὰ ταῦτα δὲ εἶναι ἡμχ = ± 1. Εἶναι λοιπὸν συνχ ≠ 0, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{ἡμχ}{συνχ} = 1$ ἢ $ἐφχ = 1 = ἐφ\frac{\pi}{4}$. Ἑπομένως (§ 132 γ'), ἀληθεύει διὰ $χ = λ\pi + \frac{\pi}{4}$.

*Παράδειγμα 2ον.* **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ἡμχ = συν2χ$.**

*Λύσις. α' τρόπος.* Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $συν\left(\frac{\pi}{2} - χ\right) = συν2χ$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\frac{\pi}{2} - χ = 2k\pi \pm 2χ$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$χ = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} = \frac{(1-4k)\pi}{6} \quad καὶ \quad χ = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

*β' τρόπος.* Γνωρίζομεν (§ 103) ὅτι $συν2χ = 1 - 2ἡμ^2χ$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2ἡμ^2χ + ἡμχ - 1 = 0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $ἡμχ = -1 = ἡμ\frac{3\pi}{2}$ καὶ ἂν $ἡμχ = \frac{1}{2} = ἡμ\frac{\pi}{6}$.

Οὕτω τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο τελευταίων ἁπλῆς μορφῆς ἐξισώσεων.

*Παράδειγμα 3ον.* **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ἐφχ = σφ\left(\frac{χ}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$**

*Λύσις.* Παρατηροῦμεν ὅτι $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{χ}{2}\right) + \left(\frac{χ}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι $σφ\left(\frac{χ}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = ἐφ\left(\frac{\pi}{4} - \frac{χ}{2}\right)$ Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν γίνεται $ἐφχ = ἐφ\left(\frac{\pi}{4} - \frac{χ}{2}\right)$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν

$$χ = λ\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{χ}{2}, \quad ὅθεν \; χ = \frac{(4λ + 1)\pi}{6}.$$

*Παράδειγμα 4ον.* **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2ἡμ^2χ - συν^2χ = 2$**

*Λύσις.* Ἐπειδὴ $ἡμ^2χ = 1 - συν^2χ$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$2(1 - συν^2χ) - συν^2χ = 2 \; ἢ \; συν^2χ = 0.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $συνχ = 0 = συν\frac{\pi}{2}$ καὶ ἑπομένως

$$χ = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{(4k \pm 1)\pi}{2}.$$

*Παράδειγμα 5ον.* **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :**

$$\mathbf{4συνχ - 8συν\left(\frac{χ}{2}\right) + 6 = 0.}$$

*Λύσις.* Ἐπειδὴ συνχ $= 2\text{συν}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$4\text{συν}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 4\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right) + 1 = 0.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει διὰ συν $\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} =$ συν $\frac{\pi}{3}$ καὶ ἑπομένως:

$$\frac{\chi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k\pm 1)\pi}{3}, \text{ ὅθεν } \chi = \frac{(6k\pm 1)2\pi}{3}.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι καὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς γνωστῶν καὶ καταλλήλων ἑκάστοτε σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν διαφόρων τόξων.

### Ἀσκήσεις

414. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$\text{ἡμ}\frac{\chi}{2} = \text{συν}\chi, \quad \text{ἡμ}\chi = \text{συν}\frac{\chi}{3}, \quad \text{ἐφ}\chi = \text{σφ}\frac{\chi}{4}.$$

415. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$\text{ἡμ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 0$, $2\text{συν}\chi - 3\text{ἡμ}^2\chi = -2$.

416. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις: $3\text{ημ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 1$, $\text{συν}2\chi - \text{συν}^2\chi = 0$.

417. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{3\text{ἡμ}\chi - \text{συν}\chi}{\text{ἡμ}\chi + \text{συν}\chi} = 1$.

418. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}(\chi + 60^0) + \text{σφ}(60^0 - 3\chi) = 0$.

**135. Μία κλασσικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.** Ὑπάρχουσι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι λύονται μὲ εἰδικοὺς τρόπους ἐξαρτωμένους ἀπὸ τὴν μορφὴν ἑκάστης. Ἀπὸ αὐτὰς ἁπλούστεραι καὶ συνηθέστερον ἀπαντώμεναι εἶναι αἱ ἔχουσαι ἢ λαμβάνουσαι μίαν τῶν μορφῶν $\mathbf{α\text{ἡμ}\chi \pm β\text{συν}\chi = γ}$.

Ταύτας λύομεν ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῶν διὰ α καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις:

$$\text{ἡμ}\chi \pm \frac{β}{α}\text{συν}\chi = \frac{γ}{α}.$$

Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{β}{α} = \text{ἐφ}ω = \frac{\text{ἡμ}ω}{\text{συν}ω}$ (ω βοηθητικὸς ἄγνωστος), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$ἡμχ \pm \frac{ἡμω}{συνω} \cdot συν\,χ = \frac{γ}{α} \cdot$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν :

$$ἡμχσυνω \pm ἡμωσυνχ = \frac{γ}{α} συνω, \text{ ἢ } ἡμ(χ \pm ω) = \frac{γ}{α} συνω \qquad (1).$$

Ἂν δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $ἐφω = \dfrac{β}{α}$ εὕρωμεν μίαν τιμὴν τοῦ ω, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰς (1) πρὸς ἄγνωστον τόξον $(χ \pm ω)$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3ἡμχ + \sqrt{3}συνχ = 3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$ἡμχ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot συνχ = 1.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = ἐφ\dfrac{π}{6}$, αὕτη γίνεται κατὰ σειράν :

$$ἡμχ + \frac{ἡμ\frac{π}{6}}{συν\frac{π}{6}} συνχ = 1, \quad ἡμχσυν\frac{π}{6} + ἡμ\frac{π}{6} συνχ = συν\frac{π}{6}$$

$$ἡμ\left(χ + \frac{π}{6}\right) = ἡμ\frac{π}{3} \cdot$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$χ + \frac{π}{6} = 2kπ + \frac{π}{3} \quad \text{καὶ} \quad χ + \frac{π}{6} = (2k+1)π - \frac{π}{3} \text{ κτλ.}$$

### Ἀσκήσεις

419. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3}ἡμχ + συνχ - 1 = 0$.

420. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ἡμχ - συνχ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

421. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν3χ + ἡμ3χ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

422. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sqrt{2}}{συνχ} - 1 = ἐφχ$.

423. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4ἡμχ + 5συνχ = 6$.

## 2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**136.** *Πρόβλημα I.* **Τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ὀξείας γωνίας**

**ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν ὀξειῶν τούτων γωνιῶν.**

*Λύσις.* Τὰ ζητούμενα μέτρα Β καὶ Γ πρέπει νὰ ταὐτοποιῶσι τὰς δύο ἐξισώσεις : $B+\Gamma=90^0$, ἡμΒ = 2ἡμΓ.

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἕνεκα τῆς α' ἐξισώσεως εἶναι ἡμΓ = συνΒ. Ἡ δὲ β' ἐξίσωσις γίνεται ἡμΒ = 2συνΒ. Ἐπειδὴ δὲ συνΒ $\neq 0$, αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν ἐφΒ=2. Τῇ βοηθείᾳ δὲ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἐφ}B = \text{ἐφ}(63^0 26'5'',7).$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $B = 180^0\lambda + 63^0 26'5'',7$. Ἐπειδὴ δὲ $0^0 < B < 90^0$, πρέπει νὰ εἶναι $\lambda = 0$ καὶ ἑπομένως

$$B = 63^0 26'5'';7 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = 90^0 - (63^0 26'5'',7) = 26^0 33'54'',3.$$

**137.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσι δύο γωνίαι τριγώνου τῶν ὁποίων τὰ ἡμίτονα ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ καὶ διαφορὰν $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$**

*Λύσις.* Ἂν χ καὶ ψ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ζητουμένων γωνιῶν, θὰ εἶναι:

$$\text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{καὶ } \text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Ἂν πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους τὸ ἡμχ καὶ ἡμψ, τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς τοὺς ἀγνώστους τούτους. Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας προσθέτομεν καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν ταύτας κατὰ μέλη. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$2\text{ἡμ}\chi = \sqrt{2},\ 2\text{ἡμ}\psi = 1 \quad \text{ἢ τὸ}$$

$$\text{ἡμ}\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{4}, \qquad \text{ἡμ}\psi = \frac{1}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{6}$$

Ἡ πρώτη τούτων ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ καὶ διὰ } \chi = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4},$$

$$\text{ἡ δὲ β' διὰ } \psi = 2k'\pi + \frac{\pi}{6} \text{ καὶ διὰ } \psi = (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Συνδυάζοντες ἕκαστον τύπον διὰ τὸν χ μὲ ἕκαστον διὰ τὸν ψ εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους γενικὰς λύσεις :

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \psi &= 2k'\pi + \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned} \chi &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \\ \psi &= 2k'\pi + \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \psi &= (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\}(2) \qquad \left.\begin{aligned} \chi &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \\ \psi &= (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\}(4)$$

Ἐπειδὴ ὅμως χ καὶ ψ εἶναι μέτρα γωνιῶν τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι $\chi + \psi < \pi, \chi > 0, \psi > 0$.

Ἀπὸ τὸ ζεῦγος (1) εὑρίσκομεν λοιπὸν δεκτὰς τιμὰς $\chi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$ διὰ $k = k' = 0$. Ἀπὸ τὸ (2) οὐδεμίαν δεκτήν, ἀπὸ τὸ (3) εὑρίσκομεν $\chi = \frac{3\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$ καὶ ἀπὸ τὸ (4) οὐδεμίαν.

**138. Τριγωνομετρικὰ συστήματα.** Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουσ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστημάτων μὲ μίαν τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν. Τὰ τοιαῦτα συστήματα λέγονται τριγωνομετρικὰ συστήματα. Τὰ προηγούμενα λοιπὸν συστήματα (§ § 136, 137) εἶναι τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ὥστε :

**Τριγωνομετρικὸν σύστημα λέγεται πᾶν σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν.**

Τὰ ἁπλούστερα καὶ συνηθέστερα τριγωνομετρικὰ συστήματα ἔχουσι δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους. Ταῦτα διακρίνομεν εἰς δύο εἴδη.

Τὸ α′ εἶδος περιέχει μόνον μίαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἀλγεβρική. Τοιοῦτον π.χ. εἶναι τὸ σύστημα τῆς § 136.

Τὸ β′ εἶδος περιέχει δύο τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις ὅπως τὸ σύστημα τῆς § 137.

**139. Λύσις τριγωνομετρικοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.** Διὰ τὴν λύσιν τοιούτου συστήματος δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἕνα ἄγνωστον διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως (§ 136) ἢ τῆς προσθέσεως (§ 137). Συνηθέστερον ὅμως λύομεν τὰ τοιαῦτα συστήματα μὲ εἰδικὰ τεχνάσματα τὰ ὁποῖα, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν μορφὴν τῶν συστημάτων. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα:

*Παράδειγμα 1ον.* **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :**

$$\chi - \psi = 15^0, \ \text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

*Λύσις.* Ἐπειδὴ ἐκ τῆς α' ἐξισώσεως γνωρίζομεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀγνώστων, θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο ἐνθυμούμεθα ὅτι:

$$\text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = 2\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2}\,\text{συν}\,\frac{\chi-\psi}{2}.$$

Ἡ β' λοιπὸν ἐξίσωσις γίνεται:

$$2\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2}\,\text{συν}\,(7^0\,30') = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

ὅθεν:
$$\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2} = \frac{2,4142}{4\text{συν}\,(7^0 30')}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $\text{λογἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2} = \bar{1},78445$ καὶ ἐκ ταύτης

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right) = \text{ἡμ}\,(37^0 30').$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $\frac{\chi+\psi}{2} = 360^0 k + (37^0\,30')$ καὶ ἂν

$\frac{\chi+\psi}{2} = 360^0 k + 180^0 - (37^0\,30') = 360^0 k + 142^0\,30'$.

Ἄρα $\chi+\psi = 720^0 k + 75^0$ καὶ $\chi+\psi = 720^0 k + 285^0$.

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο ἀλγεβρικῶν συστημάτων:

$$\begin{array}{l|l} \chi-\psi = 15^0 & \chi-\psi = 15^0 \\ \chi+\psi = 720^0 k + 75^0 & \chi+\psi = 720^0 k + 285^0 \end{array}$$

Ἐκ τοῦ α' τούτων εὑρίσκομεν : $\chi = 360^0 k + 45^0$

$\psi = 360^0 k + 30^0$ (1)

Ἐκ δὲ τοῦ β' εὑρίσκομεν : $\chi = 360^0 k + 150^0$

$\psi = 360^0 k + 135^0$ (2)

Οὕτω διὰ $k = 0$ ἐκ μὲν τῶν (1) εὑρίσκομεν $\chi = 45^0$, $\psi = 30^0$, ἐκ δὲ τῶν (2) εὑρίσκομεν $\chi = 150^0$, $\psi = 135^0$ κ.τ.λ.

*Παράδειγμα 2ον.* **Νὰ λυθῇ τό σύστημα :**

$$\chi+\psi = 90^0, \ \text{ἡμ}\chi \cdot \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

*Λύσις.* Θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\chi-\psi$ ἀπὸ τὴν β' ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2\eta\mu\chi\eta\mu\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ $2\eta\mu\chi\eta\mu\psi = \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi) - \sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)$ ἢ ἕνεκα τῆς α′ $2\eta\mu\chi\eta\mu\psi = \sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)$, ἡ (1) γίνεται :

$$\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu\, 30^0.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $\chi - \psi = 360^0k \pm 30^0$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν συστημάτων.

$$\chi+\psi = 90^0, \quad \chi-\psi = 360^0k + 40^0 \text{ καὶ}$$
$$\chi+\psi = 90^0, \quad \chi-\psi = 360^0k - 30^0.$$

Ἐκ τοῦ α′ τούτων εὑρίσκομεν.

$$\chi = 180^0k + 60^0, \quad \psi = -180^0k + 30^0$$

Ἐκ δὲ τοῦ β′ εὑρίσκομεν $\chi = 180^0k + 30^0$, $\psi = -180^0k + 60^0$.

Οὕτω διὰ $k = 0$ ἐκ τῆς α′ λύσεως εὑρίσκομεν $\chi = 60^0$, $\psi = 30^0$ ἐκ τῆς β′, $\chi = 30^0$, $\psi = 60^0$. Διὰ $k = 1$ ἐκ τῆς α′ εὑρίσκομεν $\chi = 240^0$, $\psi = -150^0$ καὶ ἐκ τῆς β′, $\chi = 210^0$, $\psi = -120^0$ κ.τ.λ.

*Παράδειγμα 3ον.* **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :**

$$\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\psi = 1 + \sqrt{3}, \quad \varepsilon\varphi\chi \cdot \varepsilon\varphi\psi = \sqrt{3}.$$

Λύσις. Ἂν πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους τὴν ἐφχ καὶ ἐφψ, οὗτοι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$k^2 - (1+\sqrt{3})k + \sqrt{3} = 0$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν : $k = \frac{(1+\sqrt{3}) \pm (\sqrt{3}-1)}{2} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ 1 \end{cases}$

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων:

$\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$, $\varepsilon\varphi\psi = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ καὶ

$\varepsilon\varphi\chi = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$, $\varepsilon\varphi\psi = \sqrt{3} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$

Λύοντες τὸ α′ εὑρίσκομεν $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}$, $\psi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$, ἐκ δὲ τοῦ β′ τἀνάπαλιν $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$, $\psi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}$.

Οὕτω διὰ $\lambda = 0$ εἶναι $\chi = \frac{\pi}{3}$, $\psi = \frac{\pi}{4}$ ἢ τἀνάπαλιν $\chi = \frac{\pi}{4}$

$\psi = \frac{\pi}{3}$. Διὰ $\lambda = 1$ εἶναι $\chi = \frac{4\pi}{3}$, $\psi = \frac{5\pi}{4}$ καὶ τἀνάπαλιν $\chi = \frac{5\pi}{4}$, $\psi = \frac{4\pi}{3}$ κ.τ.λ.

*Παράδειγμα 4ον.* **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\eta\mu^2\chi + \dot{\epsilon}\varphi^2\psi = \frac{3}{2},\quad \eta\mu\chi\dot{\epsilon}\varphi\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Λύσις.* Διπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς β′ καὶ προσθέτοντες ἔπειτα κατὰ μέλη μὲ τὴν α′ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$(\eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\psi)^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2}$. Δι' ἀφαιρέσεως δὲ τῶν ἰδίων ἐξισώσεων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$(\eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{2}$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$(\eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\psi) = \pm\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi = \pm\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Οὕτω δὲ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\chi &= \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi &= \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\psi &= -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi &= \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\psi &= \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi &= -\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \eta\mu\chi + \dot{\epsilon}\varphi\psi &= -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \eta\mu\chi - \dot{\epsilon}\varphi\psi &= -\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τοῦ α′ τούτων εὑρίσκομεν $2\eta\mu\chi = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ καὶ $2\dot{\epsilon}\varphi\psi = 2$

Ἐκ τούτων δὲ ἔπεται ὅτι: $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4}$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\psi = 1 = \dot{\epsilon}\varphi\frac{\pi}{4}$

Ἄρα
$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2k + \frac{\pi}{4} \\ \psi &= \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \chi &= (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} \\ \psi &= \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\}$$

Οὕτω πρὸς ἄσκησιν ἂς λύσωσιν οἱ μαθηταὶ καὶ τὰ ἄλλα τρία συστήματα.

### Ἀσκήσεις

424. Νὰ λυθῇ τὸ στύστημα $\chi + \psi = 75^0$, ἡμχ − ἡμψ $= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

425. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 60^0$, συνχ + συνψ = 0.

426. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 30^0$, $\dfrac{\text{ἡμχ}}{\text{ἡμψ}} = \sqrt{3}$.

427. Νὰ λυθῇ τὸ σύστηαμ :

$$\text{συνχ} - \text{συνψ} = -\frac{1}{2}, \quad \text{συνχ} + \text{συνψ} = \frac{1}{2}.$$

428. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\text{ἡμχ} + \sqrt{3}\,\text{συνψ} = 1, \ \text{ἡμχ} + \text{συνψ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

429. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\text{συνχ} + \text{συνψ} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \ \text{συνχ} \cdot \text{συνψ} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

430. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi + \psi = 90^0$, $\dfrac{\text{ἐφχ}}{\text{ἐφψ}} = 3$.

431. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 15^0$, συνχ · συνψ $= \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

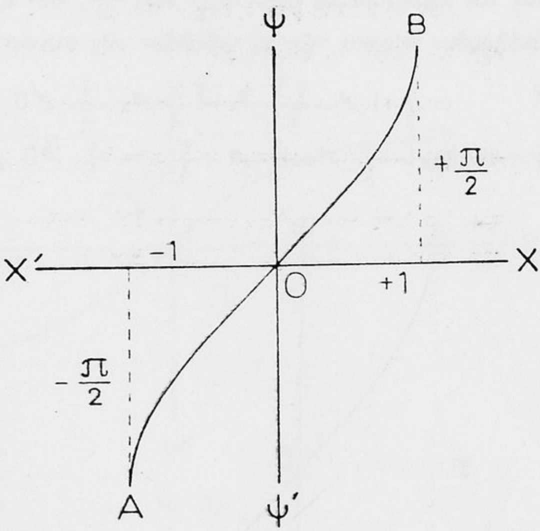
432. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 30^0$, ἐφχ . ἐφψ = 1.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

### ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**140.** **α') Ἡ συνάρτησις τόξημχ.** Ἐμάθομεν ὅτι ἕκαστος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τόξου μεταβάλλεται μεταβαλλομένου τοῦ τόξου. Ἕκαστος λοιπὸν τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τόξου εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου.

Οὕτως ἂν χ = ἡμψ, ὁ χ εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου ψ. Ὁ δὲ ψ λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή. *Ἀντιστρόφως:* Ἂν ὁ χ μεταβάλληται καὶ τὸ τόξον ψ μεταβάλλεται, ἤτοι καὶ τοῦτο εἶναι συνάρτησις τοῦ χ. Δηλ. τὸ τόξον εἶναι συνάρτησις τοῦ ἡμιτόνου του. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἡμίτονον εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ τὸ τόξον ψ ἡ συνάρτησις. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι:



Σχ. 51

**Τὸ ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἡμίτονον τὸν ἀριθμὸν χ ἢ συντομώτερον ψ εἶναι τόξον ἡμιτόνου χ.**

Τοῦτο παριστάνομεν διὰ τῆς ἰσότητος ψ = τόξημχ. (1)

Αὐτὴ ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως ἡμψ.

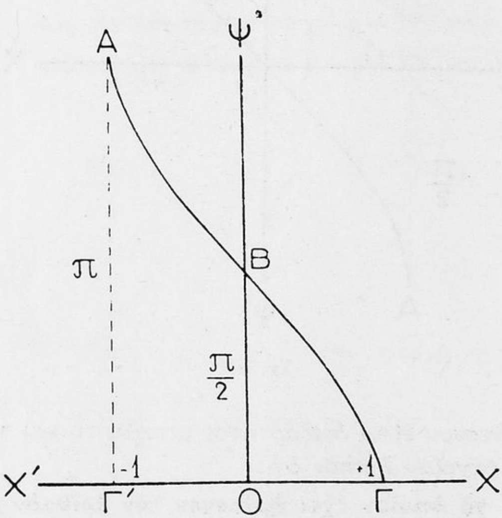
Μεταξὺ τῶν δύο συναρτήσεων ψ καὶ ἡμψ ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σπουδαία διαφορά. Ἡ συνάρτησις ἡμψ λαμβάνει μίαν ὡρισμένην τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ τόξου ψ.

Ἀντιστρόφως: Εἰς ἑκάστην τιμὴν α τοῦ χ ἀπὸ $-1$ ἕως $+1$ τὸ τόξον ψ λαμβάνει ἀπείρους τιμάς. Ἂν δὲ τ εἶναι μία τιμὴ τοῦ τόξου ψ, δηλαδὴ ἂν ἡμτ = α, αἱ τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ρίζαι τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ἡμψ = ἡμτ, ἤτοι:

$$\psi = 2k\pi + \tau \text{ καὶ } \psi = (2k+1)\pi - \tau.$$

Ἂν χάριν ἁπλότητος ἐκ τῶν ἀπείρων τιμῶν θεωρήσωμεν μόνον τὰς περιεχομένας ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$, καταρτίζομεν εὐκόλως τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως ψ μετὰ τοῦ χ.

$$\begin{array}{l} \chi \\ \psi = \text{τόξημ}\chi \end{array} \left\} \begin{array}{l} -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow -\frac{1}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow \frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow \frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow 1 \\ -\frac{\pi}{2} \nearrow -\frac{\pi}{3} \nearrow -\frac{\pi}{4} \nearrow -\frac{\pi}{6} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{6} \nearrow \frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{3} \nearrow \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$



Σχ. 52

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΟΒ (σχ. 51).

**141. β') Ἡ συνάρτησις τόξσυνχ.** Ἂν συνψ = χ, ὁ χ εἶναι συνάρτησις τοῦ ψ λαμβάνουσα μίαν ὡρισμένην τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ψ.

*Ἀντιστρόφως*: Τὸ τόξον ψ εἶναι συνάρτησις τοῦ χ, δηλ. τοῦ συνψ. Λέγομεν δὲ ὅτι ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει **συν**ημίτονον τὸν ἀριθμὸν χ **καὶ** συντομώτερον, ψ = τόξσυνχ.

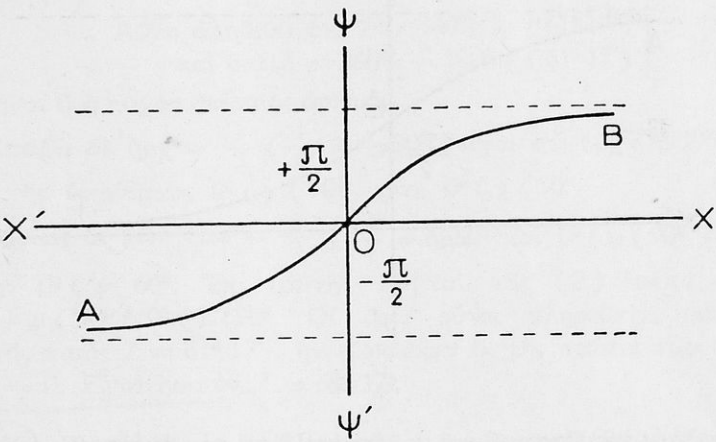
Ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος τῆς χ,** δηλ. τοῦ συνψ, καὶ λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀπὸ $-1$ ἕως $+1$.

Ἂν δὲ θεωρήσωμεν μόνον τὰς ἀπὸ 0 ἕως π τιμὰς αὐτῆς, καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

$$\begin{array}{l} \chi \\ \psi = \text{τόξσυν}\chi \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccccc} -1 & \nearrow & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \nearrow & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \nearrow & -\frac{1}{2} & \nearrow & 0 & \nearrow & \frac{1}{2} & \nearrow & \frac{\sqrt{2}}{2} & \nearrow & \frac{\sqrt{3}}{2} & \nearrow & 1 \\ \pi & \searrow & \frac{5\pi}{6} & \searrow & \frac{3\pi}{4} & \searrow & \frac{2\pi}{3} & \searrow & \frac{\pi}{2} & \searrow & \frac{\pi}{3} & \searrow & \frac{\pi}{4} & \searrow & \frac{\pi}{6} & \searrow & 0 \end{array} \right.$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ (σχ. 52).

**142.** γ′) **Ἡ συνάρτησις τόξεφχ.** Ὁμοίως ἐκ τῆς εφψ = χ




Σχ. 53

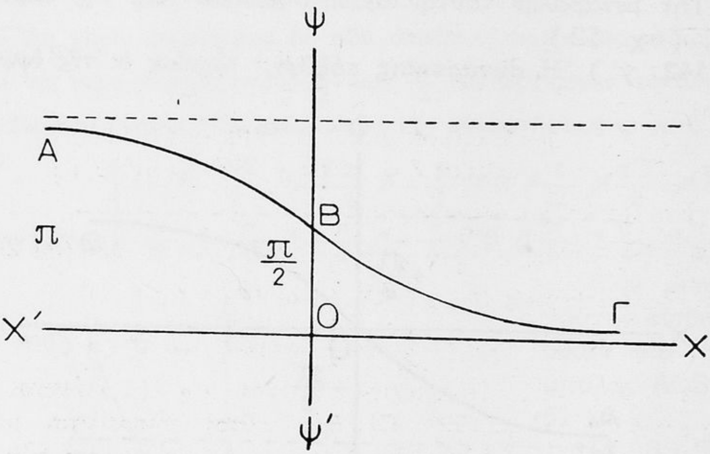
ἕπεται ὅτι ψ = τόξεφχ, ἤτοι ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐφαπτομένην τὸν ἀριθμὸν χ.

Ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς χ,** δηλαδὴ τῆς ἐφψ. Καὶ ἡ συνάρτησις αὕτη λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι᾽ ἑκάστην τιμὴν α τοῦ χ. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν μόνον τὰς μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{2}$ τιμὰς αὐτῆς, καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

$$\begin{array}{l} \chi \\ \psi = \text{τόξεφ}\chi \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} -\infty \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot -1 \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot 0 \cdot\cdot & 1 \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot & +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot -\frac{\pi}{4} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot 0 \cdot\cdot & \frac{\pi}{4} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot & \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΟΒ ( σχ. 53 ).

**143**. δ′ ) **Ἡ συνάρτησις τόξσφχ.** Τέλος ἐκ τῆς σφψ = χ ἕπεται ὅτι ψ = τόξσφχ, ἤτοι ἡ ψ εἶναι ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς χ, δηλ. τῆς σφψ. Καὶ ἡ συνάρτησις αὕτη ψ λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν α τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. Θεωροῦντες




Σχ. 54

ἐκ τούτων τὰς μεταξὺ 0 καὶ π καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| | |
|---|---|
| χ | $-\infty \cdot\cdot \nearrow \cdot\cdot\cdot -1 \cdot\cdot \nearrow \cdot\cdot 0 \cdot\cdot \nearrow \cdot\cdot 1 \cdot\cdot \nearrow \cdot\cdot +\infty$ |
| ψ= τόξσφχ | $\pi \cdot\cdot \searrow \cdot\cdot \frac{3\pi}{4} \cdot\cdot \searrow \cdot\cdot \frac{\pi}{2} \cdot\cdot \searrow \cdot\cdot \frac{\pi}{4} \cdot\cdot \searrow \cdot\cdot 0$ |

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ (σχ. 54).

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**144**. *Πρόβλημα 1.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τόξημχ + τόξημψ ἂν τὰ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενα τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.**

*Λύσις.* Θέτομεν Ζ =τόξήμχ+τόξήμψ, τόξήμχ=α, τόξήμψ=β. Ἑπομένως Ζ = α+β, ἡμα=χ, ἡμβ=ψ. Ἐκ τῆς α' τούτων εὑρίσκομεν: ἡμΖ = ἡμασυνβ + ἡμβσυνα = $\chi\sqrt{1-\psi^2}+\psi\sqrt{1-\chi^2}$. Ἑπομένως

$$Z = \text{τόξήμ}(\chi\sqrt{1-\psi^2}+\psi\sqrt{1-\chi^2}).$$

Ἂν π.χ. Ζ=τόξήμ $\frac{1}{3}$ + τόξήμ $\frac{2}{3}$ καὶ θέσωμεν χ = τόξήμ $\frac{1}{3}$, ψ = τόξήμ $\frac{2}{3}$, θὰ εἶναι Ζ = χ+ψ, ἡμΖ=ἡμχσυνψ+ἡμψσυνχ = $\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{5}+\frac{4}{9}\sqrt{2} = 0{,}87699 =$ ἡμ $(61^0\ 17')$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Αὕτη ἀληθεύει διὰ } Z = 360^0k + (61^0\ 17') \\ &\text{καὶ διὰ } Z = 360^0k + 180^0 - (61^0\ 17') \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ ἡμχ = $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ = ἡμ$30^0$, ἕπεται ὅτι ἡμχ < ἡμ$30^0$καὶ ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως $0^0 < \chi < 90^0$, εἶναι $0^0 < \chi < 30^0$ (2)

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἡμψ = $\frac{2}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ = ἡμ$60^0$ καὶ $0^0 < \psi < 90^0$ ἕπεται ὅτι $0^0 < \psi < 60^0$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (2) ἕπεται ὅτι $0^0 < \chi+\psi < 90^0$ ἢ $0^0 < Z < 90^0$. Οἱ ὅροι οὗτοι πληροῦνται μόνον ὑπὸ τῆς τιμῆς Ζ = $61^0\ 17'$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) διὰ k = 0. Εἶναι λοιπὸν Ζ = $61^0\ 17'$.

**145** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τόξήμχ—τόξήμψ ἂν τὰ ἐν αὐτῇ τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, χωρὶς νὰ εὑρεθῇ χωριστὰ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς.**

*Λύσις.* Ὡς προηγουμένως, θέτομεν Ζ = τόξήμχ − τόξήμψ τόξήμχ = α, τόξήμψ = β καὶ βλέπομεν ὅτι:

$$Z = \alpha - \beta,\quad \text{ἡμ}\alpha = \chi,\quad \text{ἡμ}\beta = \psi,$$

$$\text{ἡμ}Z = \text{ἡμασυνβ} - \text{συναἡμβ} = \chi\sqrt{1-\psi^2} - \psi\sqrt{1-\chi^2}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν τὸ Ζ. Οὕτως, ἂν Ζ = τόξήμ $\frac{2}{5}$ − τόξήμ $\frac{1}{5}$ καὶ θέσωμεν τόξήμ $\frac{2}{5}$ = χ, τόξήμ $\frac{1}{5}$ =ψ, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$Z = \chi - \psi,\ \text{ἡμ}\chi = \frac{2}{5},\ \text{ἡμ}\psi = \frac{1}{5},$$

$$ἡμZ = ἡμχσυνψ - ἡμψσυνχ = \frac{2}{5}\sqrt{1-\frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\sqrt{1-\frac{4}{25}}$$

$$= \frac{2}{25}\sqrt{24} - \frac{1}{25}\sqrt{21} = \frac{4}{25}\sqrt{6} - \frac{1}{25}\sqrt{21} = \frac{5,21535}{25} = 0,20861 =$$

ἡμ($12^0\,2'\,26'',44$). Καὶ ἐπειδὴ $0^0 < χ - ψ < 90^0$, ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐννοοῦμεν ὅτι $Z = χ - ψ = 12^0\,2'\,26'',44$.

**146.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι τόξεφ $\frac{1}{5}$ + τόξεφχ = $\frac{\pi}{4}$.**

*Λύσις.* Θέτομεν τόξεφ $\frac{1}{5} = ψ$, τόξεφχ = Z καὶ εὑρίσκομεν εφψ $= \frac{1}{5}$, εφZ = χ. Ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται: $ψ + Z = \frac{\pi}{4}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι

$$ἐφ(ψ + Z) = 1, \quad \frac{ἐφψ + ἐφZ}{1 - ἐφψἐφZ} = 1 \text{ ἢ } \quad \frac{\frac{1}{5} + χ}{1 - \frac{χ}{5}} = 1.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι: $χ = \frac{2}{3}$.

## Ἀσκήσεις

433. Νὰ εὑρεθῇ τόξον χ μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, διὰ τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις τόξημ0,4 = χ ἢ τόξσυν0,6 = χ ἢ τόξεφ2 = χ.

434. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τόξημ0,15 − τόξημ0,12 διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

435. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι τόξημχ + 2τόξημ $\frac{2}{5}$ = τόξημ1, ἂν τὰ τόξα ταῦτα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ τόξον $\frac{\pi}{2}$.

436. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι

$$τόξημ \frac{μ^2 - ν^2}{μ^2 + ν^2} = τόξσυν \frac{2μν}{μ^2 + ν^2}.$$

437. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι

$$τόξημ\sqrt{\frac{χ}{χ + α}} = τόξ\,ἐφ\sqrt{\frac{χ}{α}}.$$

438. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{τόξήμ}\frac{1}{4} + \text{τόξήμ}\frac{1}{5} = \text{τόξήμ}\frac{\sqrt{15}+\sqrt{24}}{20}.$$

439. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\text{τόξήμ}\frac{1}{3} + \text{τόξ ήμ}\chi = \frac{\pi}{4}.$$

440. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\text{τόξήμ}\chi + \text{τόξσυν}\sqrt{1-\chi^2} = 0.$$

441. Ἂν $\text{τόξ ήμ}\frac{\chi}{\sqrt{5}} + \text{τόξήμ}\frac{\psi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\chi^2+\psi^2=5$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

442. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B = \frac{3\pi}{8}$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

443. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $60^{\gamma},54$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

444. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4}$ κατὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ λ.

445. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων: $\frac{[(-1)^{\nu}\cdot 3+1]\pi}{3}$ κατὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ν.

446. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τριπλασία τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν ὀξειῶν τούτων γωνιῶν.

447. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ=ΑΓ καὶ εἶναι $2\text{ήμ}2A = \sqrt{3}$. Νὰ ὁρισθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

448. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\alpha = \upsilon,4$ μέτ. καὶ $\Gamma = 2B$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

449. Ἂν $0^0 < \tau < 90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{ήμ}\tau = \frac{(\text{χορδ}2\tau)}{2}$.

450. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι $\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5})$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ $18^0$ καὶ συν $18^0$.

451. Δύο εὐθεῖαι Οχ καὶ Οψ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν $25^0\ 20'$. Ἓν ἄνυσμα ΟΑ τοῦ ἄξονος Οψ ἔχει μῆκος 0,15 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα Οχ.

452. Ἓν ἄνυσμα ΟΒ ἄξονος Οψ ἔχει μῆκος 0,24 μέτ. καὶ προβολὴν μήκους 0,12 μέτ. ἐπὶ ἄλλον ἄξονα Οχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν ἀξόνων τούτων.

453. Νὰ ὁρισθῶσι τὰ σημεῖα τριγωνομετρικῆς περιφερείας, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λήγωσι τόξα χ, διὰ νὰ εἶναι $\text{εφ}\chi = 4\text{σφ}\chi$.

454. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$ἡμ(2k\pi + \chi) = συν\chi$ καὶ $ἐφ[(2k+1)\pi + \chi] = σφ\chi$.

455. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ἐφ\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) = συν\chi$.

456. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$ἡμ\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) συν\tau + συν\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) ἡμ(-\tau).$$

457. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$ἐφ\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) ἡμ\omega + σφ\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) συν\omega = ἡμ\omega + συν\omega.$$

458. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ\,(270^0 - \tau) = σφ\tau$, $σφ\,(270^0 - \tau) = ἐφ\tau$, $ἡμ(270^0 + \tau) = -συν\tau$, $συν(270^0 + \tau) = ἡμ\tau$, $ἡμ(270^0 - \tau) = -συν\tau$, $συν(270^0 - \tau) = -ἡμ\tau$.

459. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$ἡμ\,(270^0 - \omega)\, συν(90^0 + \omega) - συν\,(270^0 + \omega)\, ἡμ\,(90^0 - \omega).$$

460. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἐφ282^0 + ἐφ258^0$.

461. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $συν\frac{5\pi}{9} + συν\frac{14\pi}{9}$.

462. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $συν(\alpha+\beta)\, συν(\alpha-\beta) = συν^2\alpha - ἡμ^2\beta$. καὶ ὅτι: $ἡμ(\alpha+\beta)\, ἡμ\,(\alpha-\beta) = ἡμ^2\alpha - ἡμ^2\beta$.

463. Ἂν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$συν^2\alpha + συν^2\beta + συν^2\gamma + 2συν\alpha συν\beta συν\gamma = 1.$$

464. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ἐφ\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) + σφ\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{συν\alpha}$.

465. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ^2\,(45^0 - \alpha) = \frac{1 - ἡμ2\alpha}{1 + ἡμ2\alpha}$.

466. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\frac{ἐφ2\alpha}{1 + ἐφ\alpha \cdot ἐφ2\alpha} = ἡμ2\alpha$.

467. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ\frac{\omega}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + ἐφ^2\omega}}{ἐφ\omega}$.

468. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{ἡμ\alpha + ἡμ3\alpha + ἡμ5\alpha}{συν\alpha + συν3\alpha + συν5\alpha}$

469. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$1 + ἐφ^2\tau$ καὶ ἡ παράστασις $\frac{ἡμ^2\alpha - ἡμ^2\beta}{(συν\alpha + συν\beta)^2}$.

470. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $σφ^2\alpha - ἐφ^2\alpha$.

471. Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις $(ἡμA + ἡμB)^2 + (συνA + συνB)^2$.

472. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{2ἡμ\alpha - ἡμ2\alpha}{2ἡμ\alpha + ἡμ2\alpha} = ἐφ^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

473. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{συν\alpha} + \frac{1}{ἡμ\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\,συν(45^0 - \alpha)}{ἡμ2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\,ἡμ\,(45^0 + \alpha)}{ἡμ2\alpha}.$$

474. Νὰ εὑεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

$1 \pm \text{ἐφ}5^0$ καὶ τῆς $\dfrac{\text{ἐφ}42^0 + \text{ἐφ}25^0}{\text{σφ}42^0 + \text{σφ}\,25^0}$.

475. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις: $\text{σφ}x = \dfrac{1}{2}$, $\text{ἡμ}x = -\dfrac{5}{6}$, $\text{συν}x = -\dfrac{6}{10}$.

476. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ παραστάσεις:

$$\frac{\text{ἡμ}(80^0\,15') - \text{ἡμ}\,(48^0\,25')}{\text{ἡμ}(80^0\,15') + \text{ἡμ}(48^0\,25')} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1 + \text{ἡμ}(48^0\,15'\,30'')}{1 - \text{ἡμ}(48^0\,15'\,30'')}.$$

477. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι:

$$\text{ἐφ}\frac{B}{2} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}.$$

478. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{ἐφ}\;2B = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}.$$

479. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{συν}(B - \Gamma) = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}.$$

480. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{συν}2B = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

481. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$E = \frac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ}\;(2B).$$

482. Εὐθύγραμμον τμῆμα σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ΒΓ σχηματίζει γωνίαν $20^0$ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κατώτερον ἄκρον Β αὐτῆς. Μία ἁμαξοστοιχία διανύει αὐτὸ εἰς 3′ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἄκρου Γ ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐκεῖνο ἐπίπεδον.

483. Ἡ Μηχανικὴ διδάσκει ὅτι ἓν σῶμα διανύει διάστημα $\frac{1}{2}\gamma t^2$ εἰς t δεύτερα λεπτὰ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως ω καὶ ὅτι $\gamma = 981\text{ἡμ}\omega$ δακτύλους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $29^0\;25'$, ἂν τοῦτο διανύηται εἰς 2 δευτερόλεπτα ὑπό τινος σώματος.

484. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $A = 30^0$, $B = 135^0$, $\gamma = 80$ ἑκατ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος (ΓΔ) αὐτοῦ.

485. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B = 60^0$, $\Gamma = 45^0$ καὶ ὕψος (ΑΔ) = 5 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

486. Μία πλευρὰ στέγης, εἶναι τριγωνικὴ μὲ κλίσιν $25^0$. Ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει μῆκος 4,30 μέτ. καὶ εἶναι ὁριζόντιος. Ἡ δὲ κορυφὴ ἀπέχει 1,80 μέτ. ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρᾶς ταύτης τῆς στέγης.

487. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν μία κατακόρυφος ράβδος μήκους 2,15 μέτ. ρίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους σκιὰν 6,45 μέτ.

488. Μία κλίμαξ ἔχει 10 βαθμίδας. Ἑκάστη τούτων ἔχει πλάτος 0,30 μέτ. καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ὑπερκειμένην 0,18 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τῆς κλίμακος ταύτης πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

489. Ἕν κεκλιμένον οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις (ΑΒ) = 25 μέτ, (ΑΔ) = 15 μέτ. Ἡ βάσις ΑΒ αὐτοῦ εἶναι ὁριζόντιος, ἡ δὲ ἀπέναντι πλευρὰ ΓΔ κεῖται 9 μέτ. ὑψηλότερον τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ οἰκοπέδου τούτου.

490. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\dot{\eta}\mu\frac{A}{2}}.$$

491. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι:

$$\frac{\dot{\eta}\mu(A-B)}{\dot{\eta}\mu(A+B)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}.$$

492. Νὰ γίνῃ λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ ἄθροισμα: ἡμ2Α + ἡμ2Β + ἡμ2Γ, ἂν Α, Β, Γ, εἶναι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

493. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$$

494. Ἂν ἡμΑ = 2ἡμΒσυνΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

495. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς αὐτοῦ.

496. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον δύο προσκειμένων πλευρῶν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

497. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 8 μέτρ. εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει $A = 35^0\,15'$, $B = 75^0\,30'$. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

498. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς καθέτου τομῆς πλαγίου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 20, 16, 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μέτρα τῶν διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ τετράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος τούτου.

499. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τούτου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἀληθεύῃ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ πᾶν ἄλλο εὐθύγ σχῆμα.

500. Ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου ΚΑΒ ἔχει μῆκος α μέτ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκμὴ ΚΑ μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΓ.

501. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $B = 90^0 + \Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\beta^2 + \gamma^2 = 4R^2$.

502. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα 9ἐφχ + ἐφψ = 4, 2σφχ + 4σφψ = 1.

503. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφ2χ = 3ἐφχ.

504. Ἕν ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 0,50 μέτ. καὶ ἀπομακρύνεται τῆς κατακορύφου ΟΑ κατὰ γωνίαν $2^0\,10'$ εἰς νέαν θέσιν ΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν θέσεων Α καὶ Β τοῦ σφαιριδίου.

505. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατόπτρου καὶ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν εἰσέρχεται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν παρατηρητοῦ. Ὁ ὀφθαλμὸς

οὗτος ἀπέχει 0,38 μέτ. ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ἡ δὲ ἐπ' αὐτὸ προβολή του ἀπέχει 0,15 μέτ. ἀπὸ τὸ σημεῖον προσπτώσεως τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς προσπτώσεως τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος.

506. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως ἀπεσταγμένου ὕδατος $4^0$Κ πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\frac{4}{3}$. Φωτεινὴ ἀκτὶς εἰσδύει ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τοιοῦτον ὕδωρ προσπίπτουσα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν $38^0\ 12'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως αὐτῆς.

507. Ἡ διαθλαστικὴ γωνία διαφανοῦς τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι $90^0$. Φωτεινὴ μονόχρους ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν $60^0$ ἐξέρχεται διὰ τῆς ἄλλης ἕδρας ὑπὸ γωνίαν διαθλάσεως $60^0$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος πρὸς τὸν ἀέρα.

508. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς παραλλήλου τῆς Γῆς εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ παραλλήλου τούτου.

509. Πλοῖον Π πλέον πρὸς τὰ Ν—Α ἐφάνη κατά τινα στιγμὴν ἐκ σημείου Ο τῆς ἀκτῆς πρὸς τὰ Ν—Δ καὶ εἰς ἀπόστασιν (ΟΠ) = 30 χιλιόμ. Μετὰ ἰσοταχῆ πλοῦν 3 ὡρῶν, ἐφάνη πρὸς νότον εἰς θέσιν Π'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ἀπόστασις (ΟΠ').

510. Παρατηρητὴς ὕψους 1,65 μέτ. ἱστάμενος εἰς τὴν ὄχθην λίμνης εἶδε κατά τινα στιγμὴν ἀεροπλάνον εἰς ὕψος $44^0\ 30'$ ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ ὀφθαλμοῦ του. Τὴν αὐτὴν δὲ στιγμὴν εἶδε τὸ εἴδωλον τοῦ ἀεροπλάνου ἐντὸς τῆς λίμνης εἰς βάθος $45^0\ 30'$ ὑπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου τὴν στιγμὴν ἐκείνην.

511. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{τόξεφ}\alpha + \text{τόξεφ}\beta = \text{τόξεφ}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, ἂν τὰ ἐν αὐτῇ ἀναφερόμενα τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

512. Ἂν $\text{ἡμ}A = \text{ἡμ}B$ καὶ $\text{συν}A = \text{συν}B$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - B = 2k\pi$, ἂν k εἶναι μηδὲν ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

513. Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\chi = \alpha\text{συν}\omega, \quad \psi = \beta\text{ἡμ}\omega.$$

514. Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων: $\chi\text{συν}\omega = \alpha$, $\psi\text{έφ}\omega = \beta$. Ἔπειτα δὲ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων: $\chi = \alpha\text{συν}^3\omega$, $\psi = \beta\text{ἡμ}^3\omega$.

515. Ἂν εἶναι $\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B = \text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}B$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left(\text{συν}\frac{A-B}{2} - \text{ημ}\frac{A+B}{2}\right)^2 = 1.$$

516. Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΒΔ) : (ΔΓ) = ἡμΓ : ἡμΒ.

517. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $A = \frac{\pi}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

Ἂν δὲ $A = \frac{2\pi}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta$.

518. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $B = 25^0\ 30'$ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος $(A\Delta) = 20$ μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

519. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν $\alpha = 10$ μέτ. καὶ $\beta + \gamma = 12$ μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

520. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $2\tau = 35$ μέτ, $B = 45^0$, $\Gamma = 30^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

521. Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 12 ἑκατ. Ἑκάστη δὲ πλευρὰ τῆς πυραμίδος εἶναι 20 ἑκατ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας πρὸς τὴν βάσιν.

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

**147. Ἡ τριγωνομετρία ἐν σχέσει πρὸς τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Ἄλγεβραν.**

α') Ἀπὸ τὴν μελέτην τοῦ στοιχειώδους τούτου βιβλίου Τριγωνομετρίας ἐμάθομεν ὅτι ἡ Τριγωνομετρία ἔχει ὡς κύριον σκοπὸν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου ἐξ ἐπαρκῶν δεδομένων εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις.

Ἐπιτυγχάνει δὲ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ τούτου διὰ τῆς ἐπινοήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας, δι' ὧν κατορθώνει νὰ εὑρίσκῃ σχέσεις καὶ μεταξὺ ἑτεροειδῶν στοιχείων τῶν τριγώνων, π.χ. μεταξὺ πλευρῶν καὶ γωνιῶν κτλ.

Καὶ ἡ Γεωμετρία διδάσκει σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου, ἀλλὰ ἑκάστη τοιαύτη σχέσις συνδέει ὁμοειδῆ στοιχεῖα, π.χ. $Α+Β+Γ = 180^0$, $α^2 = β^2 + γ^2$. Κατὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ Τριγωνομετρία ὑπερέχει τῆς Γεωμετρίας καὶ εἰς τοῦτο ἀκριβῶς ὀφείλεται ἡ ἐπιτυχία τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας.

Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν ἡ Τριγωνομετρία ἀναχωρεῖ ἀπὸ γεωμετρικῶν ἀληθειῶν. Πολλάκις δὲ διὰ τὴν ἀνεύρεσιν σχέσεων μεταξὺ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἄλλων στοιχείων αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν γεωμετρικὰς γνώσεις. Οὕτω διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἰσότητος $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ$ στηρίζεται ἐπὶ τῆς γενικεύσεως τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, τὴν ὁποίαν δανείζεται ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν.

Ἀλλὰ καὶ ἀμεταβλήτους γεωμετρικὰς ἀληθείας χρησιμοποιεῖ ἡ Τριγωνομετρία διὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τοῦ σκοποῦ της εἰς διαφόρους περιπτώσεις. Π.χ. διὰ τὴν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν α καὶ β πλὴν τῆς τριγωνομετρικῆς σχέσεως $β = αήμΒ$, χρησιμοποιεῖ καὶ τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις $Β+Γ = 90^0$, $α^2 = β^2+γ^2$ καὶ $Ε = \frac{1}{2}βγ$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ Τριγωνομετρία εἶναι ἐπέκτασις τῆς Γεωμετρίας, τὴν ὁποίαν συμπληρώνει συντελοῦσα οὕτως εἰς τὴν λύσιν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἡ Γεωμετρία ἠδυνάτει νὰ λύσῃ ἄνευ τῆς ἐπεκτάσεώς ταύτης. Ἡ ἐπέκτασις δὲ αὕτη εἶναι φυσικὸν νὰ συντελῇ εἰς τὴν ἐπέκτασιν καὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐφαρμογῶν. Οὕτω δὲ ἡ Τριγωνομετρία εὑρίσκει πολλαπλᾶς ἐφαρμογὰς οὐ μόνον εἰς καθαρῶς γεωμετρικὰ ζητήματα, ἀλλὰ καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας, π.χ. τὴν Φυσικήν, Μηχανικήν, Γεωδαισίαν, Ἀστρονομίαν.

β') Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Αἱ σχέσεις λοιπὸν μεταξὺ πλευρῶν τριγώνου καὶ γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἀλγεβρικαὶ σχέσεις. Διὰ τοῦτο πολλοὶ ἀπὸ τοὺς μετασχηματισμοὺς αὐτῶν γίνονται κατὰ κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ. Ὥστε ἡ Τριγωνομετρία χρησιμοποιεῖ καὶ τὰς ἀναγκαίας εἰς αὐτὴν ἀλγεβρικὰς γνώσεις. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως δὲ ταύτης ἡ Τριγωνομετρία ἀποτελεῖ ἐφαρμογὴν τῆς Ἀλγέβρας.

**184. Σύντομος ἱστορικὴ ἐξέλιξις τῆς τριγωνομετρίας.** Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἡ Τριγωνομετρία ἐφαρμόζεται πλὴν ἄλλων καὶ εἰς τὴν Ἀστρονομίαν. Ἡ σπουδὴ μάλιστα τῆς Ἀστρονομίας ὑπῆρξεν ἡ πρώτη ἀφορμὴ τῆς δημιουργίας τῆς Τριγωνομετρίας.

Οὕτως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀστρονόμοι **Ἀρίσταρχος** (3ος αἰὼν π.Χ.) καὶ **Εὔδοξος** (400 π.Χ.), ἀναφέρονται ὡς ἀσχοληθέντες μὲ τριγωνομετρικὰ ζητήματα τῆς σφαιρικῆς ἰδίᾳ Τριγωνομετρίας, ζητήματα χρήσιμα εἰς αὐτοὺς διὰ τὰς ἀστρονομικὰς ἐργασίας των. Ὑπάρχει μάλιστα καὶ γνώμη ὅτι πρῶτος ὁ Εὔδοξος συνέταξε τριγωνομετρικὸν πίνακα.

Μετ' αὐτοὺς πρῶτος ὁ μέγιστος ἀστρονόμος τῆς ἀρχαιότητος **Ἵππαρχος** (2ος αἰὼν π.Χ.) μετεχειρίσθη τριγωνομετρικὰς μεθόδους κατὰ τοὺς πολυαρίθμους ὑπολογισμούς, εἰς τοὺς ὁποίους ἦγον αὐτὸν αἱ ἀστρονομικαὶ ἀσχολίαι του.

Εἰς τὸν Ἵππαρχον ἀποδίδεται μία πραγματεία **«Περὶ τῶν χορδῶν τῶν τόξων κύκλου»**, εἰς 12 βιβλία. Αὕτη κατ' οὐσίαν εἶναι τριγωνομετρικὴ πραγματεία, διότι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο τὰς χορδὰς τῶν διπλασίων τόξων, ἤτοι διπλᾶ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν τόξων.

Ὁ **Πτολεμαῖος** (2ος αἰὼν μ.Χ.) εἰς τὴν **Μαθηματικὴν Σύνταξιν** ἀναγράφει πίνακα τῶν μηκῶν τῶν χορδῶν τούτων ἀνὰ 15'.


ΙΠΠΑΡΧΟΣ

Μέγας Ἕλλην ἀστρονόμος. Ἐγεννήθη ἐν Νικαίᾳ τῆς Βιθυνίας, ἀλλ' ἐξετέλει τὰς παρατηρήσεις του εἰς τὴν νῆσον Ρόδον. Διὰ τοῦτο δὲ ἐθεωρήθη ὡς καταγόμενος ἐκ Δωδεκανήσου.

῾Ο πίναξ οὗτος ἀποδίδεται ὑπό τινων εἰς τὸν Ἵππαρχον. Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον τοῦ Πτολεμαίου ευρίσκεται ἡ πρώτη διασωθεῖσα μέχρις ἡμῶν τριγωνομετρικὴ πραγματεία.

Καὶ ὁ ᾿Αλεξανδρινὸς μαθηματικὸς **Μενέλαος** (1ος αἰὼν μ.Χ.) φέρεται ἀσχοληθεὶς εἰς ζητήματα σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας δι᾿ ἀστρονομικοὺς ἐπίσης σκοπούς.

῾Η ἀντικατάστασις τῶν χορδῶν διὰ τῶν ἡμιτόνων ἐγένετο κατ᾿ ἄλλους μὲν τὸν 15ον αἰῶνα μ.Χ. ὑπὸ τοῦ Βαυαροῦ **Purbach,** κατ᾿ ἄλλους δὲ 5 αἰῶνας ἐνωρίτερον ὑπὸ τοῦ Πρίγκιπος τῆς Συρίας **Mohamet-ben-Geber,** ὅστις εἶναι γνωστὸς μὲ τὸ λατινικὸν ὄνομα **Albatégnius.**

῾Ο **Purbach** συνέταξε τὸν πρῶτον ἐν Εὐρώπῃ τριγωνομετρικὸν πίνακα. Τὸν πίνακα τοῦτον ἐτελειοποίησεν ὁ Γερμανὸς ἀστρονόμος **Jean Muller** (1436 - 1476 μ.Χ.), ὁ ἐπονομαζόμενος **Regiomontanus.** Οὗτος εἰσήγαγε καὶ τὴν χρῆσιν τῆς ἐφαπτομένης καταρτίσας καὶ σχετικὸν πίνακα διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πολυαρίθμων ὑπολογισμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους μετεχειρίζετο αὐτήν.

Αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐργασίαι αὐτοῦ μόλις κατὰ τὸ ἔτος 1539 ἐδημοσιεύθησαν μὲ τὸν τίτλον **«Περὶ παντοειδῶν τριγώνων»** εἰς 5 βιβλία. Ἦτο δὲ ἡ πραγματεία αὕτη μία πλήρης Τριγωνομετρία.

Σπουδαιοτάτην ὤθησιν εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν καὶ διαμόρφωσιν τῆς Τριγωνομετρίας ἔδωσεν ὁ Γάλλος **Francois Viète** (1540 – 1603 μ.Χ.). Οὗτος διὰ τής ἀγχινοίας του διεῖδε τὸ ἐσφαλμένον τοῦ Πτολεμαϊκοῦ συστήματος καὶ ἐπεχείρησε νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτό. ᾿Εδημοσίευσε λοιπὸν ἓν ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον **«Harmonicum Celesten»,** τὸ ὁποῖον θεωρεῖται σήμερον πεπλανημένον. Διὰ νὰ φθάσῃ ὅμως ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπὸν ἔπρεπε πρὸ πάσης ἄλλης ἐργασίας νὰ ἀναμορφώσῃ τὴν Τριγωνομετρίαν. Οὕτω κατὰ τὸ 1579 ἐδημοσίευσεν ἓν ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον **«Μαθηματικὸς Κανών».** Εἰς αὐτὸ περιέχονται πίνακες ἐκτενέστεροι τῶν ἕως τότε ὑπαρχόντων καὶ κατάλληλοι κανόνες διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων. Οἱ πίνακες τοῦ ἔργου τούτου διὰ πρώτην φορὰν περιέχουσι τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν ἀνὰ λεπτόν. Εἰς ἄλλο ἔργον βραδύτερον ἀπέδειξε τύπους διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐπιπέδων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων μὲ πολυάριθμα ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

FRANÇOIS VIÈTE

Ὁ **Viète** ἀπήλλαξε τὴν Τριγωνομετρίαν σχοινοτενῶν ἐκφωνήσεων καὶ ἀπέδειξε τύπους γενικοὺς καὶ συντόμους, οἱ ὁποῖοι καὶ ἤδη χρησιμοποιοῦνται. Ἰδιαιτέρως δὲ ἡ σφαιρικὴ Τριγωνομετρία τὰ μέγιστα ὠφελήθη ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ **Viète**.

Εἰς νεώτερον τρίτον ἔργον του ἔδωκε νέους τύπους, ὑπελόγισε τὸ ἡμ( νχ ), συν( νχ ), ἐφ( νχ ) συναρτήσει ἀντιστοίχως τοῦ ἡμχ, συνχ, ἐφχ καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς χορδῆς τόξου νχ συναρτήσει τῆς χορδῆς τόξου χ.

Εἶναι ὅθεν ἐκ τούτων φανερὸν ὅτι ὁ **Viète** ἀνεμόρφωσε τελείως τὴν Τριγωνομετρίαν τῆς ἐποχῆς του.

Ἐπίκαιρον δὲ θεωροῦμεν νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ **Viète** εἶναι πατὴρ τῆς νεωτέρας Ἀλγέβρας, διότι αὐτὸς εἰσήγαγεν εἰς αὐτὴν τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων.

Κατὰ τὸ 1610 ὁ **Barthélemy Pitiscus** ἐξέδωκε πίνακα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων ἀνὰ 10'' καὶ μὲ 16 δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ πίναξ οὗτος θεωρεῖται ὡς ἓν τῶν ἀξιοθαυμάστων μνημείων τῆς ἀνθρωπίνης ὑπομονῆς. Χρησιμεύει δὲ οὗτος καὶ σήμερον ἀκόμη διὰ τὸν ἔλεγχον τῶν συνήθων πινάκων.

Εὐθὺς δὲ ὡς ἐπενοήθησαν οἱ λογάριθμοι, ἐφηρμόσθησαν καὶ εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμούς. Κατὰ δὲ τὸ ἔτος 1626 μ.Χ. ἐξεδόθησαν εἰς Παρισίους οἱ πρῶτοι λογαριθμικοὶ πίνακες μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία.

Κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 17ου αἰῶνος ὁ Ὀλλανδὸς γεωμέτρης **Snellius** ὑπέδειξε καὶ πρῶτος ἐφήρμοσε μέθοδον διὰ τὴν μέτρησιν μεσημβρινοῦ τόξου. Αὕτη εἶναι γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα **Τριγωνισμὸς** καὶ ἀποτελεῖ μίαν τῶν ἀξιοθαυμάστων ἐφαρμογῶν τῆς Τριγωνομετρίας. Ἄνευ αὐτῆς καὶ τῶν ἀκριβῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐφαρμογῆς της ὑπὸ τοῦ Γάλλου **Picard**, ἴσως ὁ Νεύτων δὲν θὰ ἔφθανεν εἰς τὸν νόμον τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.

Βραδύτερον μὲ τὴν τεραστίαν ἀνάπτυξιν τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καὶ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν, αὕτη ἔλαβεν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ προΐδῃ. Αἱ δὲ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς καὶ εἰς αὐτὸν ἀκόμη τὸν κύκλον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν εἶναι πολυαριθμόταται.

# ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'



ΕΠΙΛΟΓΟΣ



ΕΞΩΦΥΛΛΟΝ: ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗ ΛΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

500




ΕΚΔΟΣΙΣ ΙΓ΄. 1970 (Ι) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 50.000 – ΣΥΜΒΑΣΙΣ 1962 / 13-1-1970

*Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : Ἰω. Καμπανᾶς Α.Ε. Φιλαδελφείας 4 - ΑΘΗΝΑΙ*

ΟΕ
ΔΒ