λίον

τρίας

τι ικου τ

Ἰωάν ου Θ. Γ

Α. Δ. ΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ ἐν Ἀθήναις Γυμνασίῳ τῆς Φιλεκπ. Ἑταιρείας

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
Τῶν μαθητῶν τῆς Α΄ καὶ Β΄ τάξ. τοῦ Γυμνασίου.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.—ΑΘΗΝΑΙ
4—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—4
1932

Α. Δ. ΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ ἐν Ἀθήναις Γυμνασίῳ τῆς Φιλεκπ. Ἑταιρείας

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν τῆς Α΄ καὶ Β΄ τάξ. τοῦ Γυμνασίου.

ἀποφ.
...αιδείας
...Αὐγούστου
1932

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε. - ΑΘΗΝΑΙ
4 — ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — 4
1932

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν ἁπλουστέρων στερεῶν σωμάτων.

Ι. Κύβος.

§ 1. **Σῶμα** λέγεται πᾶν ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει χῶρον τινὰ π.χ. ὁ πίναξ ἡ γομολάστιχα, τὸ βιβλίον κτλ. εἶναι σώματα.

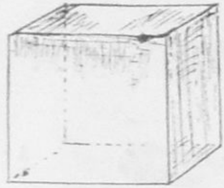
Ὁ χῶρος τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν σῶμα λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος. Εἰς τὸ παιγνίδιον τῶν κύβων ὁ κύβος, κοινῶς ζάρι (α), εἶναι σῶμα. Τὸ σχῆμα τοῦ σώματος τούτου λέγεται κύβος. Σχῆμα κύβου ἔχουν πολλάκις τὰ κιβώτια, οἱ ἀρωματικοὶ σάπωνες κ.λ. ἄλλα ἀντικείμενα.

α

§ 2. Ὅλον τὸ ἐξωτερικὸν μέρος ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον φαίνεται ἢ ἐγγίζομεν λέγεται ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη, δηλαδὴ ἀπὸ ἓξ ἐπιφανείας, ἑκάστη τῶν ὁποίων λέγεται ἕδρα· ὥστε ὁ κύβος ἔχει ἓξ ἕδρας.

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται ἀνὰ δύο· ἡ γραμμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ συνάντησις δύο ἑδρῶν λέγεται ἀκμὴ τοῦ κύβου· ὥστε ὁ κύβος ἔχει δώδεκα ἀκμάς.

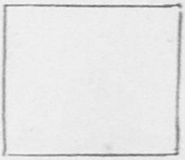
§ 3. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κύβον (τὸ σχῆμα 1 παριστᾷ κύ-

βον) ἐπὶ φύλλου χάρτου καὶ ἰχνογραφήσωμεν τὴν ἕδραν

σχ. 1

ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ χάρτου, θὰ ἴδω-
μεν, ὅτι ἡ ἕδρα ἔχει τὸ σχῆμα 2, τὸ ὁ-
ποῖον λέγεται τετράγωνον.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τούτου θέ-
σωμεν ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ κύβου τὴν
μίαν κατόπιν τῆς ἄλλης, θὰ ἴδωμεν, ὅτι
ἑκάστη ἐφαρμόζει ἐπὶ αὐτοῦ ἀκριβῶς
ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἕ-
δραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.

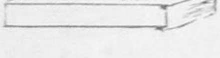
§ 4. Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου βλέπομεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· ὥστε ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.

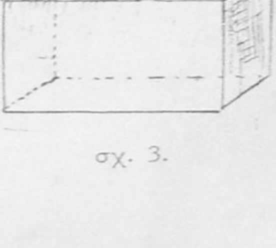

σχ. 2.

§ 5. Τὸ ἀνωτέρω σῶμα ἐξητάσθη μόνον ὡς πρὸς τὸ σχῆμα αὐτοῦ· οὕτως ἐξετάζοντες σῶμά τι, καλοῦμεν αὐτὸ γεωμετρικὸν σῶμα ἢ στερεόν. Ὅθεν, ὁ κύβος εἶναι στερεὸν ἔχον ἓξ ἕδρας ἴσας.

II. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

§ 6. Ἐὰν λάβωμεν ὀπτόπλινθον, κοινῶς τοῦβλον (β) παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει ἓξ ἕδρας καὶ δώδεκα ἀκμάς· προσέτι, ὅτι μόνον αἱ ἀπέναντι αὐτῆς ἕδραι εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαί. Τὸ σῶμα τοῦτο ὡς πρὸς τὸ σχῆμα αὐτοῦ ἐξεταζόμενον λέγεται Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι α) τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι στερεὸν ἔχον ἓξ ἕδρας ἀνὰ δύο ἴσας· β) αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ ἀκμαί· γ) αἱ 12 ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ 4 ἴσαι. Αἱ πλάκες τοῦ κοινοῦ σάπωνος, αἱ γομολάστιχες, τὰ κυτία τῶν σιγάρων, τὰ κιβώτια τῶν πετρελαιοδοχείων κλπ. ἔχουσι σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 3).

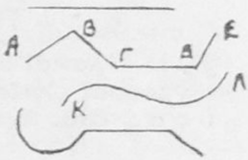

β


σχ. 3.

Περὶ γραμμῶν.

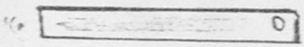
§ 7. **Εἴδη γραμμῶν.** Τρία εἴδη γραμμῶν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν εἰς διάφορα ἀντικείμενα· τὴν εὐθεῖαν, τὴν τεθλασμένην καὶ τὴν καμπύλην γραμμὴν (σχ. 4).

Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν κατασκευάζομεν διὰ τοῦ κανόνος (σχ. 5), ὅστις συνήθως εἶναι λεπτὴ ἐπιμήκης σανίς, ὡς ἑξῆς: θέτομεν τὸν κανόνα ἐπὶ φύλλου χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ σύρομεν τὸ μολυβδοκόνδυλον κατὰ μῆκος αὐτοῦ· θὰ ἔχωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν· τοιαύτην εὐθεῖαν παριστᾷ νῆμα τεταμένον.



σχ. 4.

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ δύναται ν' ἀποτελῆται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν· πχ. ἡ γραμμὴ Α Β Γ Δ Ε (σχ. 4) εἶναι τεθλασμένη· ὥστε τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας χωρὶς ὅλη νὰ εἶναι εὐθεῖα.



σχ. 5.

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα· πχ. ἡ γραμμὴ ΚΛ (σχ.4) εἶναι καμπύλη γραμμή· ἐπίσης νῆμα μὴ τεταμένον παρουσιάζει σχῆμα καμπύλης γραμμῆς.

§ 8. Εἰς τ' ἀνωτέρω τρία εἴδη γραμμῶν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τὴν γραμμήν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλην καὶ εὐθεῖαν ἢ τεθλασμένην· ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται μικτὴ γραμμὴ ὥστε:

σχ. 6.

μικτὴ γραμμὴ λέγεται ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ εὐθεῖαν καὶ καμπύλην.

§ 9. Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς λέγονται σημεῖα· σημεῖον ἐπίσης εἶναι καὶ ἡ τομὴ δύο εὐθειῶν. Τὸ σημεῖον παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος διὰ μιᾶς στιγμῆς· πλησίον δὲ αὐτοῦ θέτομεν γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου· πχ τὸ σημεῖον Α. Ὥστε σημεῖον λέγεται τὸ ἄκρον γραμμῆς. Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὀνομάζομεν διὰ δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα θέτομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς· πχ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 6).

§ 10. **Ἀσκήσεις γραφικαί.** 1) Γράψατε τρία σημεῖα, ἑνώσατε τὸ ἓν μὲ τὰ δύο ἄλλα καὶ ὀνομάσατε τὴν σχηματιζομένην γραμμήν.

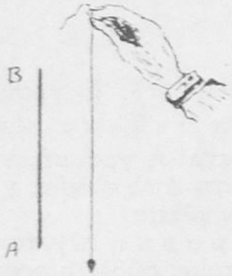
2) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας μίαν εὐθεῖαν, μίαν καμπύλην καὶ μίαν τεθλασμένην.

3) Λάβετε δύο σημεῖα ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας καὶ γράψα
μίαν εὐθεῖαν τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος.

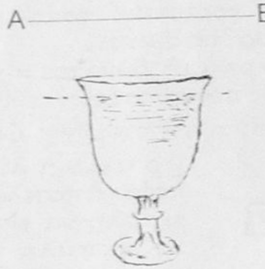
4) Μὲ τὸν κανόνα γράψατε τρεῖς εὐθείας γραμμάς, αἵτιν
νὰ διέρχωνται δι᾽ ἑνὸς σημείου Α.

Περὶ εὐθείας γραμμῆς.

§ 11. Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου
να γραμμαὶ εὐθεῖαι. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται α) κατακ
ρυφος, ὅταν ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμ
(σχ. 7), β) ὁριζο
τία ὅταν ἔχῃ τ
διεύθυνσιν τῆς ἐ
φανείας τοῦ ἠρεμοῦ
τος ὕδατος (σχ.
καὶ γ΄) πλαγί
ὅταν δὲν εἶναι οὔ
ὁριζοντ α οὔτε κ
τακόρυφος.



σχ. 7.



σχ. 8.

§ 12. Ἀσκήσε
1) Δείξατε εἰς τ
κύβον ἢ εἰς τὸ δ
μάτιον εὐθείας κατακορύφους καὶ ὁριζοντίας.

2) Γράψατε διὰ τοῦ κανόνος εὐθείας κατακορύφους, ὁριζ
τίας καὶ πλαγίας.

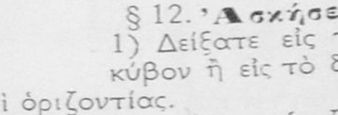
3) Γράψατε δύο σημεῖα καὶ δι᾽ αὐτῶν σύρατε τρεῖς γρ
μάς, μίαν εὐθεῖαν, μίαν τεθλασμένην καὶ μίαν καμπύλην.

4) Γράψατε τέσσαρα σημεῖα οὕτως, ὥστε ταῦτα νὰ εὑ
σκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

§ 13. **Ἰδιότης τῆς εὐθείας.** Ἐὰν λάβωμεν σημεῖον
Α καὶ δι᾽ αὐτοῦ σύρωμεν διαφόρους εὐθείας γραμμὰς β
πομεν, ὅτι δι᾽ ἑνὸς σημείου δυνάμεθα νὰ σ
ρωμεν ὅσας θέλωμεν εὐθείας.

Ἐὰν μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β (σχ. 9) σύρομεν μίαν
θεῖαν ΑΒ, μίαν τεθλασμένην καὶ
μίαν καμπύλην, βλέπομεν,

α) ὅτι μεταξὺ δύο σημείων μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν.



σχ. 9.

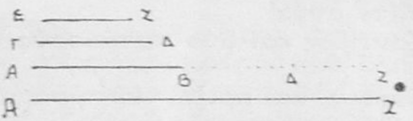
β) ὅτι δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν διεύθυνσιν μιᾶς εὐθείας.

γ) ὅ τ ι ἡ ε ὐ θ ε ῖ α ε ἶ ν α ι ὁ σ υ ν τ ο μ ώ τ ε ρ ο ς δ ρ ό μ ο ς μ ε τ α ξ ὺ δ ύ ο σ η μ ε ί ω ν·

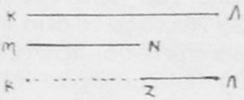
δ) ὅτι τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, τὴν ὁποῖαν φέρομεν μεταξὺ δύο σημείων, δυνάμεθα νὰ τὴν προεκτείνωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς.

§ 14. **Ἰσότης καὶ ἀνισότης εὐθειῶν.** Δύο εὐθεῖαι λέγομεν, ὅτι εἶναι ἴ σ α ι, ἐάν, ὅταν θέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, συμπέσουν τὰ ἄκρα αὐτῶν· ἐὰν ὅμως τῶν εὐθειῶν δὲν συμπέσουν τὰ ἄκρα, ὁπότε ἡ εὐθεῖα εἶναι μέρος τῆς ἄλλης, τότε λέγομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἄ ν ι σ ο ι. Τοιαῦται εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΚΛ καὶ ΜΝ (σχ. 11).

§ 15. **Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθειῶν.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας, πχ. τὰς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ (σχ.10) καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, προεκτείνομεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν κατὰ συνέχειαν τμήματα ἴσα πρὸς τὰς δύο ἄλλας, δηλαδὴ τὸ ΒΔ=ΓΔ καὶ τὸ ΔΖ=ΕΖ· ἡ οὕτω προκύπτουσα



σχ. 10.



σχ. 11.

εὐθεῖα ΑΖ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ.

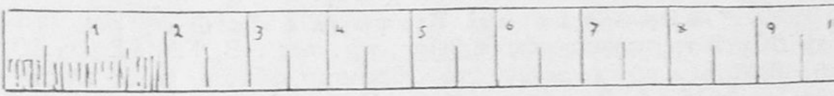
Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἀνίσους εὐθείας, πχ. τὰς ΚΛ καὶ ΜΝ (σχ.11 καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας ΚΛ τμῆμα ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν ΜΝ· τὸ ὑπολοιπόμενον μέρος εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν ΚΛ καὶ ΜΝ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΛ.

§ 16. Διὰ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (σχ. 12) σύρομεν μίαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ κανόνος· τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων λέγεται ἀ π ό σ τ α σ ι ς τῶν σημείων τούτων· ἐὰν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων, πρέπει νὰ μετρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἑνώνει τὰ δύο ταῦτα σημεῖα, δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς εὐθείας.

σχ. 12.

9

§ 17. **Μέτρησις εὐθείας.** Ἡ συνήθης μονὰς μήκου εἶναι τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 παλάμας, ἑκά στη δὲ παλάμη εἰς 10 δακτύλους καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰ 10 γραμμάς. Διὰ τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας χαράττομεν ἐπ φύλλου χάρτου μεταχειριζόμεθα τὸ ὑποδεκάμετρον, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ἓν δέκατον τοῦ μέτρου (σχ. 13)· ἐπίσης τὸ διπλοῦ ὑποδεκάμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει 20 δακτύλους ἢ τὸ τριπλοῦ μὲ 30 δακτύλους. Διὰ μεγαλύτερα μήκη μεταχειριζόμεθα τ μέτρον, τὸ δεκάμετρον ἔχον 10 μέτρα, τὸ χιλιόμετρον ἢ στά διον ἔχον 1000 μ. καὶ τὸ μυριάμετρον ἔχον 10000 μέτρα.



σχ. 13.

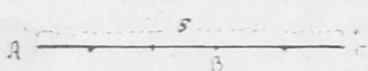
§ 18. **Ἀσκήσεις γραφικαί.** 1) Ἐκτιμήσατε τὸ μῆκος μιᾶ ἀκμῆς τοῦ θρανίου καὶ μετρήσατε αὐτό.

2) Χαράξατε δύο εὐθείας ὁριζοντίους καὶ δύο κατακορύφου ἑκάστην δύο δακτύλων.

3) Ἐκτιμήσατε τὰς κατακορύφους καὶ ὁριζοντίας γραμμὰ ἑνὸς κύβου καὶ μετρήσατε ἀκριβῶς ταύτας.

4) Γράψατε δύο εὐθείας τὴν μίαν δώδεκα γραμμῶν καὶ τὴ ἄλλην διπλασίαν ταύτης.

5) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν τριῶν δακτύλων καὶ μίαν δύ δακτύλων· ἔπειτα γράψατ τρίτην εὐθεῖαν ἴσην μὲ τ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλω (σχ. 14) βλέπομεν, ὅτι τ ἄθροισμα δύο εὐ θειῶν εἶναι γραμμ εὐθεῖα· σημειοῦμεν δὲ τοῦ το ὡς ἑξῆς : ΑΒ+ΒΓ=ΑΓ.



σχ. 14.

6) Γράψατε δύο εὐθείας τὴν μίαν 5 δακτ. καὶ τὴν ἄλλη 3 δακτ. καὶ εὕρετε τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

7) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν εὐθεῖαν μήκους 3 παλα μῶν, ἀποκόψατε ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς δύο τμήματα 4 δακτ καὶ 7 δακτύλων καὶ μετρήσατε τὸ μέσον τμῆμα τῆς εὐθείας

Περὶ διαστάσεων τῶν στερεῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ γραμμῶν.

§ 19. Εἰς τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε, καὶ ἐν γένει εἰς ἕκαστον σῶμα, διακρίνομεν τ ρ ε ῖ ς κ υ-ρ ί α ς δ ι ε υ θ ύ ν σ ε ι ς, κατὰ τὰς ὁποίας ἐκτείνεται τοῦτο καὶ τὰς ὁποίας καλοῦμεν δ ι α σ τ ά σ ε ι ς. Τὸ μ ῆ κ ο ς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, τὸ π λ ά τ ο ς ἐκ τῶν ἔμπροσθεν πρὸς τὰ ὄπισθεν, καὶ τὸ ὕψος (ἢ βάθος) ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι ὁ κύβος καταλήγει εἰς ἕδρας, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὴ ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶναι μέρος τοῦ σώματος, διότι δὲν δύναται ν' ἀποσπασθῇ αὐτοῦ, τῆς λείπει μία διάστασις, ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια ἔχει δ ύ ο δ ι α σ τ ά σ ε ι ς, μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίσης εἴδομεν, ὅτι ἑκάστη ἕδρα περιορίζεται ὑπὸ γραμμῶν· ἑ ά-στη δὲ γραμμὴ εἶναι ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν, ἀλλὰ δὲν εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας, διότι τῆς λείπει τὸ πλάτος· ἤτοι ἡ γραμμὴ ἔχει μόνον μ ί α ν δ ι ά σ τ α σ ι ν, τὸ μῆκος.

Περὶ ἐπιφανειῶν.

§ 20. Ἐὰν θέσωμεν ἐπὶ μιᾶς ἕδ-ας τοῦ κύβου τὸν κανόνα καὶ στρέψωμεν αὐτὸν καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ἕδρας εἰς ἑκάστην νέαν θέσιν αὐτοῦ· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸν πίνακα. Η τοιαύτη ἐπιφάνεια λέγεται ἐπίπεδος· ὅθεν:

Ἐ π ί π ε δ ο ς ἐ π ι φ ά ν ε ι α (ἢ ἐ π ί π ε δ ο ν) λ έ γ ε-τ α ι π ᾶ σ α ἐ π ι φ ά ν ε ι α ἐ π ὶ τ ῆ ς ὁ π ο ί α ς ὁ κ α-ν ὼ ν ἐ φ α ρ μ ό ζ ε ι ἀ κ ρ ι β ῶ ς κ α θ' ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε δ ι ε ύ θ υ ν σ ι ν. Αἱ ἕδραι τοῦ πα-αλληλεπιπέδου, οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων κτλ. εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἢ ἐπίπεδα.

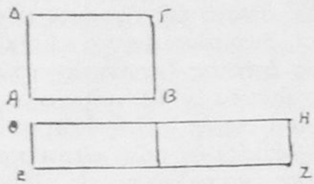
§ 21. **Τεθλασμένη ἢ πολυεδρική** λέγεται μία ἐπιφάνεια, ἐὰν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδα· τοιαύτη ἐπιφάνεια εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου κτλ

§ 22. **Καμπύλη** λέγεται μία ἐπιφάνεια, ὅταν οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδον· οὕτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τοῦ ᾠοῦ, εἶ αι καμπύλαι ἐπιφάνειαι.

§ 23. **Μικτὴ** λέγεται μία ἐπιφάνεια, ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην ἐπιφάνειαν· τοιαύτη ἐπιφάνεια πχ. εἶναι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου κλπ.

§ 24. **Ἐπίπεδον σχῆμα** λέγεται τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας· οὕτως ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου ἢ τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα.

§ 25. Δύο ἐπίπεδα σχήματα λέγονται ἴσα, ἐὰν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν· οὕτως ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἐπίπεδα σχήματα ἴσα.



σχ. 15.

Δύο ἐπίπεδα σχήματα λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ α, ὅταν διαιρούμενα καταλλήλως, ἐφαρμόζουν τὰ μέρη αὐτῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθησαν. Οὕτω τὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ (σχ. 15) εἶναι ἰσοδύναμα.

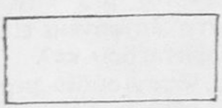
III. Κύλινδρος.

§ 26. Τὸ κινητήριον ἔμβολον ἀτμομηχανῆς (ἢ τὸ ἔμβολον ὑδραντλίας ἢ ὁ ἄξων περιστρεφομένου τροχοῦ ἁμάξης) εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον ὡς πρὸς τὸ σχῆμα αὐτοῦ ἐξεταζόμενον λέγεται κ ύ λ ι ν δ ρ ο ς.

Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουσι πολλὰ ἀντικείμενα πχ. ὁ σωλὴν θερμάστρας, τὸ κυλινδρικὸν κυτίον, οἱ κάλυκες τῶν ὀβίδων, τῶν φυσιγγίων κτλ.

σχ. 16.

Ὁ κύλινδρος (σχ. 16) ἔχει τρεῖς ἐπιφανείας, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ἐπίπεδοι καὶ λέγονται β ά σ ε ι ς, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι καμπύλη καὶ λέγεται κ υ ρ τ ὴ ἐ π ι φ ά ν ε ι α τοῦ κυλίνδρου· ἐπὶ ἑκάστης βάσεως αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ σύρωμεν εὐθεῖαν ἢ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα κατὰ πᾶσαν διεύθυνσιν· ἐπὶ τῆς καμπύλης ὅμως ἐπιφανείας του μόνον κατὰ μ ί α ν δ ι ε ύ θ υ ν σ ι ν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα.



σχ. 17.

Ἐὰν τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καλύψωμεν διὰ φύλλου χάρτου καὶ ἔπειτα ἐκτυλίξωμεν αὐτό, βλέπομεν, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει τὸ σχῆμα 17. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν.

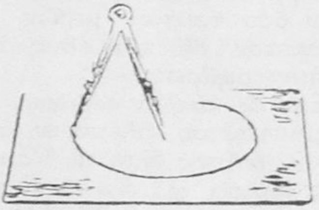
Κύκλος.

§ 27. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κύλινδρον ἐπὶ φύλλου χάρτου οὕτως, ὥστε νὰ στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς ἐκ τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ σύρωμεν τὸ μολυβδοκόνδυλον περὶ τὴν βάσιν ταύτην, θὰ σχηματισθῇ μία κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ (σχ. 18), ἡ ὁ-ὁποία λέγεται περιφέρεια. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον (Κ), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς αὐτῆς καὶ λέγεται κέντρον τῆς περιφερείας. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς περιφερείας λέγεται κύκλος (σχ. 19).

σχ. 18.

Κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται τὸ κέντρον τῆς περιφερείος του. Τὴν περιφέρειαν κύ‹λου χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ

σχ. 19.

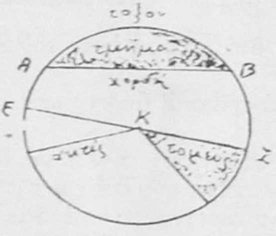


σχ. 20.

χάρτου διὰ τοῦ διαξήτου (σχ. 20). Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου μὲ ἀκτῖνα πχ. 2 δακτ., ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τῶν δύο σκελῶν του νὰ εἶναι 2 δάκτυλοι.

§ 28. **Ἀσκήσεις.** 1) Γράψατε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 2 δακτ. καὶ δείξατε τὸ κέντρον, τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

2) Ἀναζητήσατε κύκλους καὶ περιφερείας εἰς διάφορα ἀντικείμενα.



σχ. 21.

3) Τί διαφέρει ὁ κύκλος τῆς περιφερείας;

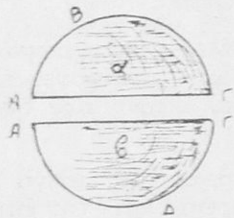
§ 29. Ἐὰν γράψωμεν μίαν περιφέρειαν (σχ. 21) καὶ ἑνώσωμεν τὸ κέντρον αὐτῆς μὲ σημεῖα τῆς περιφερείας δι' εὐθειῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται καλοῦνται ἀκτῖνες· ὅθεν, ἀκτὶς κύκλου λέγεται πᾶσα εὐ:εῖα, ἥτις ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας του· πᾶσα δὲ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ περατοῦται εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας του, λέγεται δ ι ά μ ε τ ρ ο ς τοῦ κ ύ κ λ ο υ. Πχ. ἡ ΕΚΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ.

§ 30. Ἐὰν εἰς κύκλον ἐκ χάρτου γράψωμεν μίαν διάμετρον καὶ τμήσωμεν αὐτὸν κατὰ μῆκος τῆς διαμέτρου ταύτης, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ προκύπτοντα δύο μέρη α καὶ β (σχ. 22) ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς, ἐὰν θέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· ἐπίσης ἐφαρμόζουν καὶ τὰ δύο τόξα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ δ ι ά μ ε τ ρ ο ς δ ι α ι ρ ε ῖ τ ὸ ν κ ύ κ λ ο ν κ α ὶ τ ὴ ν π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α ν α ὐ τ ο ῦ ε ἰ ς δ ύ ο ἴ σ α μ έ ρ η. Ἕκαστον τῶν δύο τούτων μερῶν τοῦ κύκλου λέγεται ἡμικύκλιον, ἕκαστον δὲ τῶν δύο ἴσων τόξων τῆς περιφερείας λέγεται ἡμιπεριφέρεια.

§ 31. Ἐὰν εἰς κύκλον φέρωμεν ἀκτῖνας καὶ διαμέτρους καὶ μετρήσωμεν ταύτας, βλέπομεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος, ἐπίσης ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι.

Ὅθεν: π ᾶ σ α ι α ἱ ἀ κ τ ῖ ν ε ς τ ο ῦ κ ύ κ λ ο υ ε ἶ ν α ι ἴ σ α ι.



σχ. 22.

§ 32. Τόξον λέγεται πᾶν τμῆμα τῆς περιφερείας.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται χ ο ρ δ ὴ αὐτοῦ (σχ. 21). Τ μ ῆ μ α κ ύ κ λ ο υ λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Τ ο μ ε ὺ ς κ ύ κ λ ο υ λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου· εἰς τὸ σχῆμα 21 τομεὺς εἶναι τὸ ΚΓΖ.

§ 33. **Ἀσκήσεις Γραφικαί.** 1) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου μὲ πόσας ἀκτῖνας ἰσοῦται;

2) Γράψατε δύο κύκλους τὸν ἕνα μὲ ἀκτῖνα 2 δακτ. καὶ τὸν ἄλλον μὲ ἀκτῖνα 3 δακτύλων.

3) Γράψατε δύο κύκλους μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον ἀλλὰ μὲ διαφόρους ἀκτῖνας· οἱ δύο οὗτοι κύκλοι λέγονται ὁ μ ό κ ε ν τ ρ ο ι.

4) Γράψατε δύο κύκλους μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα (α=2 δακτ.), ἀλλὰ μὲ διάφορα κέντρα· ἀποκόψατε τὸν ἕνα καὶ ἐπιθέσατέ τον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, βλέπετε, ὅτι ἐφαρμόζουν ἤτοι εἶν[illegible] ἴσοι.

Ὅθεν: κ ύ κ λ ο ι μὲ ἴ σ α ς ἀ κ τ ῖ ν α ς ε ἶ ν α ι ἴ σ ο ι.

5) Γράψατε μίαν περιφέρειαν καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου αὐτῆς φέ-

ρατε δύο χορδάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· ἐὰν μετρήσωμεν ταύτας, τί παρατηροῦμεν;

6) Κατασκευάσατε κύκλον ἐκ χάρτου καὶ ἀποκόψατε ἐξ αὐτοῦ ἓν τμῆμα κύκλου.

7) Γράψατε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα τριῶν δακτύλων· πόση εἶναι ἡ διάμετρος αὐτῆς;

§ 34. **Διαίρεσις τῆς περιφερείας.** Τὴν περιφέρειαν ἑκάστου κύκλου διαιροῦμεν εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν μοίρας· ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι:

1) ἡ μοῖρα εἶναι τὸ 1/360 τῆς περιφερείας·

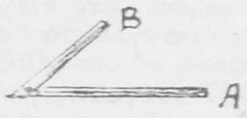
2) τὸ 1/4 τῆς περιφερείας ἔχει 90 μοίρας, τὰς ὁποίας συντόμως γράφομεν 90°.

3) ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας εἶναι 180°. Ἑκάστην μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγομεν πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον πάλιν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγομεν δεύτερα λεπτὰ τῆς μοίρας· τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦμεν μὲ μίαν ὀξεῖαν, τὰ δὲ δεύτερα μὲ δύο ὀξείας· οὕτω γράφοντες 8° 15′ 25″ ἀπαγγέλλομεν 8 μοῖραι 15 πρῶτα καὶ 25 δεύτερα λεπτά.

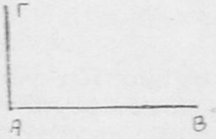
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ γωνιῶν.

§ 35. **Ὁρισμὸς γωνίας.** Λαμβάνομεν δύο κανόνας Α καὶ Β καὶ συναρμόζομεν αὐτοὺς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον διὰ καρφίδος (σχ. 23)· ἐὰν στρέψωμεν τὸν ἕνα, κρατοῦντες τὸν Α ὁριζόντιον, σχηματίζονται διάφορα σχήματα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται γωνίαι. Ἐν γένει δὲ γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ δὲν ἀποτελοῦσι εὐθεῖαν.



σχ. 23.



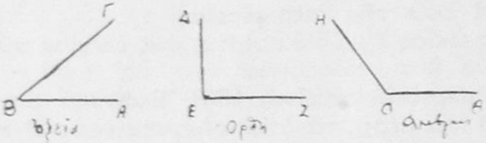
σχ. 24.

Οὕτω τὰ σχήματα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΟΘ (σχ.25) λέγονται γωνίαι.

Εἰς τὴν γωνίαν τῶν δύο κανόνων (σχ.23), ὅταν ὁ στρεφόμενος κανὼν Β λάβῃ θέσιν κατακόρυφον, τότε ἡ σχηματιζομένη γωνία λέγεται ὀρθή.

Τὴν ὀρθὴν γωνίαν κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος μὲ δύο εὐθείας ΓΑ καὶ ΑΒ (σχ. 24), αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἐξ ἑνὸς σημείου (Γ) καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὁριζόντιος, ἡ δὲ ἄλλη κατακόρυφος. Αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΓΒ λέγονται π λ ε υ ρ α ὶ τῆς γωνίας, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Α τῶν πλευρῶν λέγεται κ ο ρ υ φ ὴ τῆς γωνίας.

§ 36. **Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία.** Ἐὰν ἡ γωνία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, ὡς ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 25), λέγεται ὀ ξ ε ῖ α. Ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα, λέγεται ἀ μ β λ ε ῖ α. Πχ. ἡ γωνία ΗΟΘ(σχ.26) εἶναι ἀμβλεῖα· ὥστε:

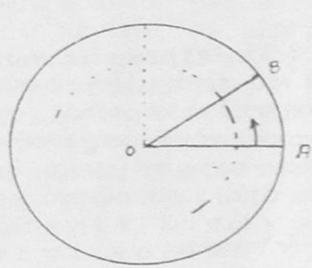


Σχ. 25.

Ὀ ξ ε ῖ α γ ω ν ί α λ έ γ ε τ α ι π ᾶ σ α γ ω ν ί α μ ι κ ρ ο τ έ ρ α τ ῆ ς ὀ ρ θ ῆ ς.

Ἀ μ β λ ε ῖ α γ ω ν ί α λ έ γ ε τ α ι π ᾶ σ α γ ω ν ί α μ ε γ α λ υ τ έ ρ α τ ῆ ς ὀ ρ θ ῆ ς.

Μὲ τὴν γωνίαν τῶν δύο κανόνων (σχ. 23) δυνάμεθα στρέφοντες τὸν ἕνα νὰ σχηματίσωμεν γωνίαν ὀξεῖαν, ἀμβλεῖαν καὶ ἐν γένει διαφόρους γωνίας. Τὴν γωνίαν ἀπαγγέλλομεν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς π χ. λέγομεν ἡ γωνία Β, ἡ γωνία Ε· ἀλλὰ καὶ μὲ τρία γράμματα, ὅτε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἀπαγγέλλεται δεύτερον· πχ. λέγομεν ἡ γωνία ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΟΘ.

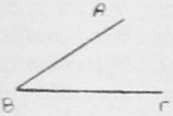


σχ. 26.

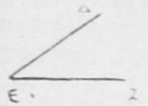
§ 37. **Μέγεθος γωνιῶν.** Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι μὲ τὴν γωνίαν τῶν κανόνων σχηματίζομεν διαφόρους γωνίας· ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι γωνία τις γίνεται, ἐὰν μία εὐθεῖα (ΟΑ) περιστραφῇ μέχρι τινὸς περὶ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς τὸ Ο. (σχ. 26) ὁπότε ἡ νέα θέσις αὐτῆς (ΟΒ), μετὰ τῆς ἀρχικῆς θὰ σχηματίζῃ γωνίαν· ὅσον δὲ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ περιστροφὴ τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνία· ἑπομένως ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς περιστροφῆς, δηλαδὴ ἀ π ὸ τ ὸ ἄ ν ο ι γ μ α καὶ οὐχὶ ἀ π ὸ τ ὸ μ ῆ κ ο ς τῶν πλευρῶν ὁρίζεται τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν.

Ἐὰν ἡ στροφὴ τῆς ΟΑ ἐξακολουθήσῃ, ὥστε νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν της θέσιν, τότε ἡ περιστροφὴ εἶναι πλήρης, τὸ δὲ ἄκρον αὐτῆς Α διαγράφει περιφέρειαν.

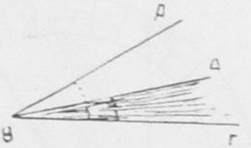
§ 38. **Σύγκρισις γωνιῶν.** Εἴπομεν, ὅτι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της· ἑπομένως, ἐ ὰ ν δ ύ ο γ ω ν ί α ι ἔ χ ω σ ι τ ὸ α ὐ τ ὸ ἄ ν ο ι γ μ α, ε ἶ ν α ι ἴ σ α ι. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν δέ, ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσι τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι ἴσαι, θέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ κορυφαί των, ἔπειτα νὰ συμπέσῃ ἡ μία πλευρὰ τῆς μιᾶς γωνίας μὲ μίαν πλευρὰν τῆς ἄλλης· ἐὰν τότε καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραί των συμπέσουν, αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Π χ.



σχ. 27.



σχ. 28.

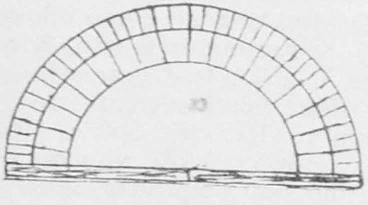


σχ. 29.

αἱ γωνίαι ΑΒΓ (σχ. 27) καὶ ΔΕΖ (σχ. 28).

Ἐὰν ὅμως ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς γωνίας πέσῃ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς ἄλλης γωνίας, τότε αἱ γωνίαι θὰ εἶναι ἄνισοι πχ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ (σχ. 29)· γράφομεν δὲ οὕτω ΑΒΓ > ΔΒΓ.

§ 39. **Μέτρησις γωνιῶν. Μοιρογνωμόνιον.** Τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δύναται νὰ μετρηθῇ, ἐὰν αὕτη συγκριθῇ μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν· πχ. λέγομεν, ὅτι μία ὀξεῖα γωνία εἶναι τὸ τρίτον ἢ τὸ πέμπτον τῆς ὀρθῆς. Τὸ λάσμα τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς, ὅταν μάλιστα ἡ μετρουμένη γωνία εἶναι μικρά. Διὰ τοῦτο ὡς μονάδα μετρήσεως λαμβάνομεν γωνίαν μιᾶς μοίρας, δηλαδὴ τὴν γωνίαν, ἥτις περιέχεται 90 φορὰς εἰς τὴν ὀρθήν.



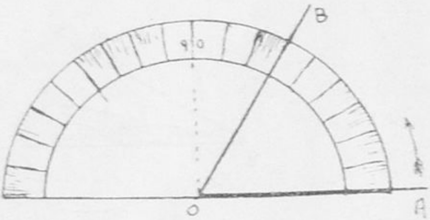
σχ. 30.

Διὰ τὴν μέτρησιν ταύτην μεταχειριζόμεθα ὄργανον, τὸ ὁποῖον καλεῖται μοιρογνωμόνιον ἢ ἀναγωγεὺς (σχ. 30). Τοῦτο εἶναι μεταλλικὸν ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς 180 ἴσα μέρη ἤτοι εἰς 180 μοίρας.

Εἰς τὸ μέσον τῆς διαμέτρου του ἡ μικρὰ ἐγκοπὴ δεικνύει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ ἥμισυ τοῦ ὁποίου εἶναι τὸ μοιρογνωμόνιον.

Αἱ 180 μοῖραι τοῦ μοιρογνωμονίου ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς γωνίας τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου, ἡ μία πλευρὰ ἡ ΑΟ, ἡ δὲ ἄλλη ἡ ἀκτὶς ἡ διερχομένη διὰ τῆς 1^0, 2^0, 3^0 κτλ.

§ 40 Ἵνα μετρήσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου μίαν γωνίαν, ἔστω τὴν ΑΟΒ (σχ.31), θέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, ἡ δὲ διάμετρος ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας· τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ θὰ συναντήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Β. Ὁ ἀριθμὸς πχ. τῶν 42^0, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, δεικνύει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας· οὕτως, ἂν ἀντιστοιχῇ ὁ ἀριθμὸς 50, λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία εἶναι 50 μοιρῶν.



σχ. 31.

Ἐὰν ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ μετρήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, τότε ἡ μία κάθετος πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν 90στὴν μοῖραν· ὥστε μία ὀρθὴ γωνία εἶναι 90^0.

§ 41. **Ἀσκήσεις ἀριθμητικαὶ καὶ γραφικαί.** 1) Συγκρίνατε ὀρθὰς γωνίας πρὸς ἀλλήλας κατὰ τὸ μέγεθος· τί συμπεραίνετε ;

2) Μετρήσατε διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὰς γων. τοῦ σχ.25.

3) Κατασκευάσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ μοιρογνωμονίου γωνίας 30^0, 75^0, 160^0 μοιρῶν.

4) Μία γωνία εἶναι τὸ 1/6 τῆς ὀρθῆς, ἄλλη τὸ 1/3 καὶ τρίτη τὸ 1/15 τῆς ὀρθῆς. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη;

5) Γράψατε μίαν γωνίαν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν· μετρήσατέ τας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου· ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ ποία ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς;

6) Ἐὰν μία γωνία εἶναι $56^0 40'$, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ διπλασία τη; καὶ ποίου εἴδους εἶναι ἡ νέα γωνία ;

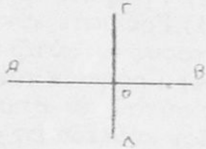
7) Μία γωνία εἶναι 15^0, ἄλλη 30^0 καὶ τρίτη 45^0· τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη;

8) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία, ἥτις εἶναι τὰ 2)3 τῆς ὀρθῆς;

9) Μὲ ποῖον κλασματικὸν μέρος τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἡ γωνία τῶν 72 μοιρῶν (ἢ 36).

Ὀρθαὶ γωνίαι καὶ κάθετοι εὐθεῖαι.

§ 42. Ὅταν μία εὐθεῖα ὡς ἡ ΑΒ συναντᾷ ἄλλην τὴν ΔΓ (σχ. 32) καὶ σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τέσσαρας γωνίας ἴσας, τότε αἱ μὲν εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαί· οὕτως αἱ γωνίαι ΑΟΓ, ΓΟΒ, ΑΟΔ εἶναι ὀρθαί, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ κάθετοι. Ἐκ τούτου ἔχομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας:

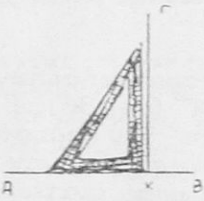


σχ. 32.

Ὀ ρ θ ὴ γ ω ν ί α λ έ γ ε τ α ι ἡ γ ω ν ί α, τ ῆ ς ὁ π ο ί α ς α ἱ π λ ε υ ρ α ὶ ε ἶ ν α ι κ ά θ ε τ ο ι π ρ ὸ ς ἀ λ λ ή λ α ς.

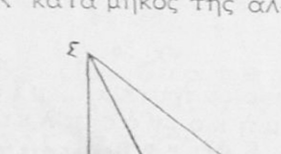
§ 43. Τὴν ὀρθὴν γωνίαν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ διὰ τοῦ γνώμονος (σχ. 33), τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἑξῆς· θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας.

σχ. 33.



σχ. 34.

Διὰ τοῦ γνώμονος ἐπίσης φέρομεν εὐθείας καθέτους. Ἐὰν πχ. θέλωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 34) νὰ φέρωμεν ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον, θέτομεν τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ διὰ τῆς γραφίδος σύρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΚ κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος, τότε ἡ ΓΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· τὸ δὲ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος συναντᾷ τὴν ΑΒ, λέγεται π ο ῦ ς τῆς καθέτου.



σχ. 35.

§ 44. **Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας.** Ἐὰν ἀπὸ σημείου Σ κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ.35) σύρωμεν διὰ τοῦ γνώμονος κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὴν ΣΚ, ἡ κάθετος αὕτη λέγεται ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Σ φέρωμεν καὶ ἄλλας εὐθείας, τὰς ΣΔ, ΣΒ, αὗται λέγονται πλάγιαι. Μετρῶντες ταύτας, βλέπομεν, ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς πλαγίας, τὰς ὁποίας φέρομεν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν· ἐπίσης, ὅτι ἀπὸ ἓν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας μίαν μόνον κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν.

§ 45. **Ἀσκήσεις.** 1) Μετρήσατε τὰς γωνίας τοῦ γνώμονός σας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

2) Γράψατε τρεῖς γωνίας ὀρθὰς εἰς διαφόρους θέσεις.

3) Γράψατε κύκλον μὲ ἀκτῖνα 2 δακτ. (α=2) καὶ δύο διαμέτρους ἐν αὐτῷ καθέτους πρὸς ἀλλήλας.

4) Γράψατε τμῆμα εὐθείας ἴσον μὲ τρεῖς δακτύλους· λάβετε ἐπ' αὐτοῦ ἓν σημεῖον Σ καὶ σύρατε διὰ τοῦ γνώμονος εὐθεῖαν κάθετον ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὸ Σ.

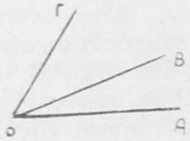
5) Τί εἴδους γωνίαν σχηματίζουσιν οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου, ὅταν δεικνύουν τὴν 3ην, 1ην καὶ 4ην ὥραν;

6) Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ 1/6 τῆς περιφερείας; ἐπίσης τὸ 1/3, τὸ 1/4 καὶ 1/8 αὐτῆς;

7) Λάβετε τμῆμα εὐθείας ΑΒ καὶ εἰς τὰ ἄκρα φέρετε καθέτους.

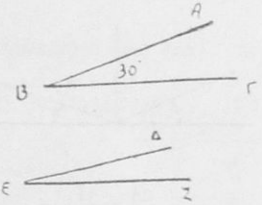
8) Κατασκευάσατε διαφόρους γωνίας καὶ ἐκτιμήσατε μόνον διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τὸ μέγεθος ἑκάστης· εἶτα δὲ μετρήσατε ταύτας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

§ 46. **Γωνίαι ἐφεξῆς.** Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰς γωνίας ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ (σχ. 36), βλέπομεν, ὅτι αὗται ἔχουσι τὴν κορυφὴν (Ο) κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΟΒ, τὰς δὲ ἄλλας πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς: αἱ δύο αὗται γωνίαι θὰ λέγωνται ἐφεξῆς· ὁμοίως ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι αἱ γωνίαι τῶν σχημάτων 38 καὶ 39. Ὥστε, ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.



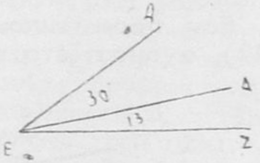
σχ. 36.

§ 47. **Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν.** Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν π. χ. τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 37) εἶναι γωνία, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, ἐὰν θέσωμεν τὴν μίαν γωνίαν παρὰ τὴν ἄλλην οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ κορυφαί των καὶ μία πλευρὰ τῆς Β νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Ε· το ουτοτρόπως θὰ ἔχουν τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν (σχ. 38), θὰ σχηματί ωσι δὲ τὴν γωνίαν ΑΕΖ, ἥτις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.

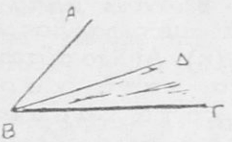


σχ. 37.

§ 48. **Ἡ διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν,** πχ. τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ (σχ.39) εἶναι ἐπίσης γωνία, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, ἐὰν θέσωμεν τὴν μικροτέραν ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας οὕτως, ὥστε νὰ



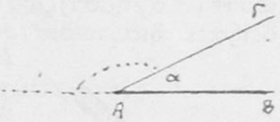
σχ. 38.



σχ. 39,

ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τῆς μικροτέρας νὰ πίπτῃ ἐντὸς τῆς μεφαλυτέρας γωνίας.

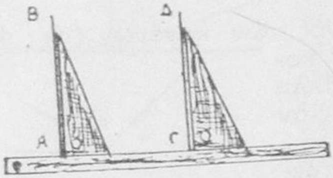
§ 49. **Γωνίαι παραπληρωματικαί.** Ἐὰν προεκτείνωμεν μίαν πλευρὰν ΑΒ τῆς γωνίας α (σχ. 40), τότε σχηματίζεται μία νέα γωνία β, ἥτις λέγεται π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ ὴ τῆς δοθείσης γωνίας α. Ἡ δοθεῖσα καὶ ἡ παραπληρωματική της ἔχουσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς· αἱ δύο δὲ γωνίαι ὁμοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς· ὅθεν δ ύ ο π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ α ὶ γ ω ν ί α ι ἔ χ ο υ σ ι ν ἄ θ ρ ο ι σ μ α δ ύ ο ὀ ρ θ ά ς· γράφομεν δὲ οὕτω $\alpha+\beta=2$ ὀρθάς



σχ. 40.

Σημείωσις. Μία ὀξεῖα γωνία ἔχει παραπληρωματικὴν μίαν ἀμβλεῖαν καὶ ἀντιστρόφως.

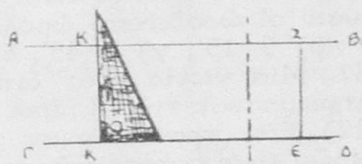
§ 54. **Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων.** Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν δύο ἢ περισσοτέρας παραλλήλους εὐθείας, ὡς ἐν τῷ σχήματι 46 φαίνεται. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τοῦ κανόνος, διότι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλαι αἱ κάθετοι ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.



σχ. 46.

§ 55. Ἐὰν χαράξωμεν δύο παραλλήλους πχ. τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 47) καὶ διὰ τοῦ γνώμονος φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην παράλληλον. Ὅθεν πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

§ 56. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν καὶ ἄλλας καθέτους ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ μετρήσωμεν τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων τμήματα τῶν καθέτων ΚΚ καὶ ΕΖ βλέπομεν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν καθέτων τούτων (ΚΚ, ΖΕ) παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος.



σχ. 47.

§ 57. **Ἀσκήσεις γραφικαί.** 1) Γράψατε δύο κατακορύφους παραλλήλους καὶ δύο ὁριζοντίας, αἵτινες νὰ ἀπέχωσιν ἀλλήλων 5 γραμμάς.

2) Γράψατε τρεῖς πλαγίας παραλλήλους (3 δακτ. ἑκάστην) καὶ δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας.

3) Γράψατε εὐθεῖαν καὶ ἀπὸ δύο σημεῖα αὐτῆς ἀπέχοντα δύο δακτύλους φέρατε καθέτους· αὗται τί εἶναι μεταξύ των;

4) Γράψατε εὐθεῖαν καὶ ἐκ σημείου ἀπέχοντος ταύτης 3 δα-

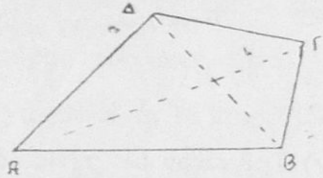
κτύλους φέρατε παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων;

5) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν καὶ διαιρέσατε ταύτην δι'εὐθειῶν παραλλήλων εἰς τέσσαρα μέρη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Περὶ εὐθυγράμμων σχημάτων.

§ 58. **Ὁρισμοί. Εὐθύγραμμον σχῆμα** καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμὰς (σχ. 48)· οὕτως, αἱ ἕδραι τοῦ κύβου τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα διότι εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι περατούμενα εἰς εὐθεία γραμμάς.



σχ. 48.

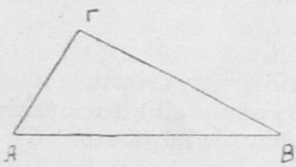
Πλευραὶ τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ εὐθεῖαι, εἰς τὰς ὁποίας τοῦτο περατοῦται· οὕτω τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 48) ἔχει πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν (ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ) λέγεται π ε ρ ί μ ε τ ρ ο ς αὐτοῦ.

Κ ο ρ υ φ α ὶ αὐτοῦ λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του.

Δ ι α γ ώ ν ι ο ς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο κορυφάς του χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά· εἰς τὸ (σχ. 48) αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι διαγώνιοι. Τὸ ἁπλούστερον τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων εἶναι τὸ τρίγωνον.

α΄. Τρίγωνα.

§ 59. **Ὁρισμοί.** Τ ρ ί γ ω ν ο ν καλεῖται εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς τρεῖς εὐθείας γραμμὰς αἵτινες τέμνονται ἀνὰ δύο (σχ. 49). Εἰς τὸ τρίγωνον ἔχομεν γωνίας καὶ εὐθείας γραμμάς, τὰς ὁποίας καλοῦμεν πλευράς· αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι λέγονται σ τ ο ι χ ε ῖ α τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ.

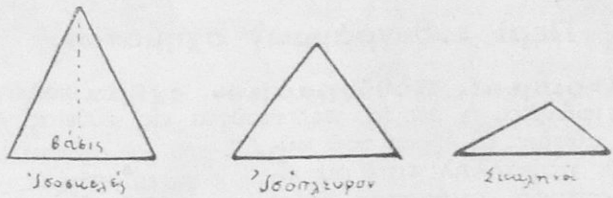


σχ. 49.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τρίγωνα μὲ κανόνας—ἐκ ξύλου ἢ ἐκ χαρτονίου—θὰ ἔχωμεν τὰ ἑπόμενα εἴδη τριγώνων (σχ 50).

α) Τρίγωνον μὲ τρεῖς ἴσας πλευράς, τὸ ὁποῖον λέγομεν ἰσόπλευρον.

β) Τρίγωνον μὲ δύο ἴσας πλευρὰς (σκέλη) καὶ τὴν τρίτην ἄνισον, ἰσοσκελές.

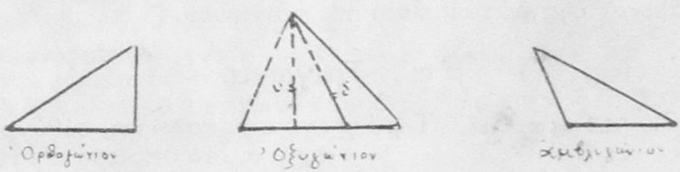


σχ. 50.

γ) Τρίγωνον μὲ τρεῖς ἀνίσους πλευράς, ἀνισόπλευρον ἢ σκαληνόν.

§ 60. Κατασκευάσατε τρίγωνα (σχ. 51) ἔχοντα α) τρεῖς ὀξείας γωνίας — ὀξυγώνιον — β) μίαν ὀρθὴν καὶ δύο ὀξείας — ὀρθογώνιον — γ) μίαν ἀμβλεῖαν καὶ δύο ὀξείας — ἀμβλυγώνιον. Οὕτως ἔχομεν τρίγωνα ὀξυγώνια, ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον ἡ πλευρὰ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας λέγεται ὑποτείνουσα.



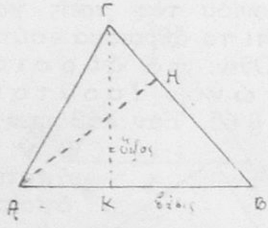
σχ. 51.

§ 61. Κατασκευάσατε τὰ ἑξῆς ἓξ εἴδη τριγώνων:

1) Ἰσόπλευρον. 2) Ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον. 3) Ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον. 4) Σκαληνόν. 5) Σκαληνὸν ὀρθογώνιον. 6) Σκαληνὸν ἀμβλυγώνιον.

§ 62. **Βάσις** τριγώνου λέγεται ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· ἡ δὲ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφὴ τῆς γωνίας καλεῖται κορυφὴ τοῦ τριγώνου.

Ἐὰν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 52) λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ἀπόστασις (ΓΚ) (§ 10) τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν βάσιν καλεῖται ὕψος τοῦ τριγώνου. Ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ΒΓ, ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ΑΗ.



σχ. 52.

§ 63. **Ἀσκήσεις.** 1) Πόσα εἴδη τριγώνων ἔχομεν ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ ὡς πρὸς τὰς γωνίας αὐτῶν.

2) Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 3 μ. πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

3) Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 18 μέτρ. Πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ;

4) Κατασκευάσατε τὰ τρίγωνα τοῦ σχ. 51 καὶ φέρετε τὰ ὕψη αὐτῶν.

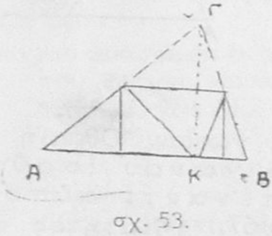
5) Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 12 μέτρα· ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ 2 μέτρα· πόση εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν ;

6) Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 14 μέτρα μία δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 5 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως;

7) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 17 μέτρα, ἡ δὲ μία τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν εἶναι 5μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης;

8) Ἀμβλυγωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν βάσις του εἶναι 8 μέτρα, μία δὲ τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν 5 μέτρα· πόση εἶναι ἡ περίμετρος του;

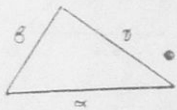
§ 64. **Ἰδιότητες τριγώνων.** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἐκ χάρτου (σχ. 53) καὶ φέρομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ ΓΚ. Ἐὰν ἀναδιπλώσωμεν τὰς γωνίας του, ὥστε αἱ κορυφαὶ τῶν τριῶν γωνιῶν του νὰ συμπέσουν εἰς τὸν πόδα Κ τῆς καθέτου, βλέπομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἀποτελεῖ δύο



σχ. 53.

γωνίας ὀρθάς· ἐπίσης, ἐὰν μετρήσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 2 ὀρθαὶ ἤτοι Α+Β+Γ=180°, Ὅθεν: τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

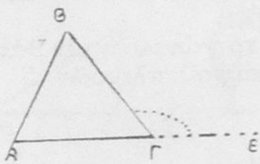
§ 65. Ἐὰν λάβωμεν τρίγωνον (σχ. 54) μὲ πλευρὰς α, β, γ, βλέπομεν, ὅτι αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ ἀποτελοῦσι μίαν τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς τεθλασμένης, ὅταν ἔχωσι τὰ αὐτὰ ἄκρα, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν β καὶ γ τοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῆς τρίτης πλευρᾶς α. Τὸ αὐτὸ ὅμως συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν α καὶ β, μὲ τὴν πλευρὰν γ.



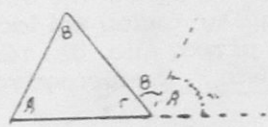
σχ. 54.

Ὅθεν: τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.

§ 66. Ἐὰν προεκτείνωμεν μίαν πλευρὰν τριγώνου τινός, ἔστω τοῦ ΑΒΓ (σχ. 55), σχηματίζεται ἡ γωνία ΒΓΕ, ἥτις λέγεται ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἐκ χάρτου ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ· ἐὰν ἀποκόψωμεν τὰς γωνίας αὐτοῦ Α καὶ Β καὶ θέσωμεν τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΓΕ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 56, βλέπομεν, ὅτι αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι (ἐσωτερικαὶ) ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τῆς ἐξωτερικῆς, ἰσοῦνται μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν.



σχ. 55.

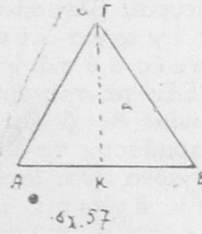


σχ. 56.

Ὅθεν: ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίας.

§ 67. **Ἰδιότητες ἰσοσκελοῦς τριγώνου.** Λαμβάνομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 57), τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 3 δακτ. καὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ἴσας μὲ 4 δακτ.

φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ἤτοι τὸ ὕψος ΓΚ, καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τούτου κόπτομεν τὸ τρίγωνον· οὕτως ἔχομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ ΑΓΚ καὶ ΒΚΓ. Ἐὰν τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐπιθέσωμεν καταλλήλως, βλέπομεν, ὅτι ἐφαρμόζουν· ἐξ οὗ συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:



σχ. 57.

1) Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους του εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα.

2) Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Β, ὅταν ἐφαρμόσωμεν τὰ τρίγωνα, συνάγομεν ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

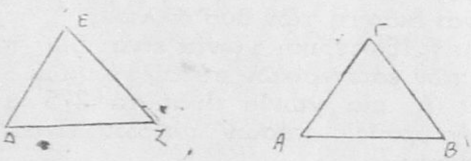
3) Ὅτι τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν τριγώνων ΑΓΚ καὶ ΒΚΓ ἡ ΚΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚ, ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ γωνία ΚΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓΚ, θὰ ἔχωμεν:

4) Ὅτι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς του εἰς δύο ἴσας γωνίας.

5) Ὅτι τὸ ἰσόπλευρον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

§ 68. **Σημείωσις.** Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 57) τὸ ὕψος ΓΚ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (τὴν βάσιν), τὸ δὲ σημεῖον Γ τῆς καθέτου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΓ, διότι εἶναι ΑΓ=ΒΓ συνάγομεν, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου, ἥτις φέρεται εἰς τὸ μέσον μιᾶς εὐθείας ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς.

§ 69. **Ἰσότης τριγώνων.** Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ χάρτου δύο τρίγωνα ὡς τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τοῦ (σχ. 58), ὥστε νὰ ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἀνὰ μίαν, ἤτοι τὴν ΑΒ=ΔΖ τὴν ΑΓ=ΔΕ καὶ τὴν ΒΓ=ΕΖ καὶ θέ-



σχ. 58

σωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ ἴσαι αὐτῶν πλευραί, βλέπομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα· ὅθεν: δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Ἐὰν τὰ τρίγωνα ἔχωσιν τὴν πλευρὰν ΑΒ=ΔΖ καὶ τὰς γωνίας Α=Δ καὶ Β=Ζ καὶ ἐπιθέσωμεν ταῦτα, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα αὐτῶν στοιχεῖα, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, Ὅθεν: δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκειμένας γωνίας ἴσας.

Ἐὰν ἐπίσης κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωσι τὴν Α=Δ καὶ τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν τούτων ἴσας, ἤτοι τὴν ΑΓ=ΔΕ καὶ ΑΒ=ΔΖ καὶ ἐπιθέσωμεν ταῦτα καταλλήλως, βλέπομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα: Ὅθεν: δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.

§ 70. **Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.** 1) Γράψατε ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ μετρήσατε διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὰς ὀξείας αὐτοῦ γωνίας. Πόσον μοιρῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν ;

2) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου, καὶ τί συμπεραίνετε ἐξ αὐτοῦ ;

3) Ἡ μία τῶν ὀξειῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 40°. Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ ἄλλαι ;

4) Διατί εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον αἱ δύο ὀξεῖαι αὐτοῦ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν;

5) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως εἶναι 60°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν;

6) Ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν;

7) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν εἶναι 20° Πόσων εἶναι ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων;

8) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι 50°· πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἐσωτερικῶν αὐτοῦ γωνιῶν ;

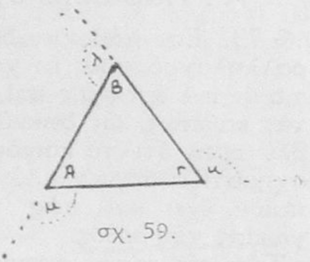
9) Σκαληνοῦ τριγώνου ἡ μία γωνία εἶναι τὰ 2/5 τῆς ὀρθῆς, ἡ ἄλλη τὸ 1/3 τῆς ὀρθῆς πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ;

10) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ μία τῶν ἐξωτερικῶν αὐτοῦ

γωνιῶν εἶναι 30°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

11) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι 65°· πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων αὐτοῦ γωνιῶν;

12) Ἰσοσκελοῦς καὶ ἀμβλυγωνίου τριγώνου ἡ ἀμβλεῖα αὐτοῦ γωνία εἶναι 120°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων αὐτοῦ γωνιῶν.

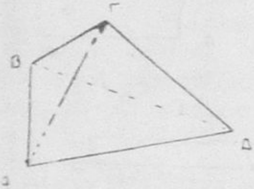


σχ. 59.

13) Τριγώνου τινὸς ΑΒΓ (σχ.59) κατασκευάζομεν τὰς ἐξωτερικὰς αὐτοῦ γωνίας· δείξατε, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθὰς ἤτοι κ+λ+μ=4 ὀρθάς.

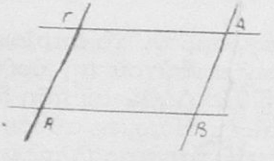
β΄. Τετράπλευρα.

§ 71. Τὰ τ ε τ ρ ά π λ ε υ ρ α εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα περιοριζόμενα ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν γραμμῶν, τὰς ὁποίας καλοῦμεν πλευράς. Γ ω ν ί α ι τοῦ τετραπλεύρου λέγονται αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματιζόμεναι· κ ο ρ υ φ α ὶ δὲ αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. Οὕτως εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 60) πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ σχήματος. Δ ι α γ ώ ν ι ο ι αὐτοῦ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ, π ε ρ ί μ ε τ ρ ο ς δὲ ἡ ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ.



σχ. 60.

§ 72. Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ δύο ἄλλων παραλλήλων εὐθειῶν (σχ. 61), σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον καλεῖται παραλληλόγραμμον· ὥστε π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο ν λ έ γ ε τ α ι τὸ τ ε τ ρ ά π λ ε υ ρ ο ν, τ ο ῦ ὁποίου αἱ ἀ π έ ν α ν τ ι π λ ε υ ρ α ὶ ε ἶ ν α ι π α ρ ά λ λ η λ ο ι.

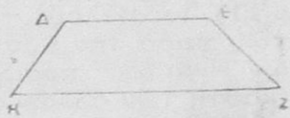


σχ. 61.

Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ἔχῃ μόνον δύο ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους λέγεται, τ ρ α π έ ζ ι ο ν· οὕτω τὸ ΔΕ=ΖΗ (σχ. 62) εἶναι τραπέζιον, διότι δύο μόνον ἀπέναντι πλευραί του ΔΕ, ΗΖ εἶναι παράλληλοι.

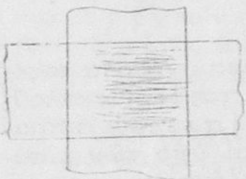
Α΄. Παραλληλόγραμμα.

§ 73. Ἐὰν λάβωμεν δύο ταινίας παραλληλογράμμους ἐκ χάρτου τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ ἐπιθέσωμεν αὐτὰς καθέτως, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 63) βλέπομεν, ὅτι τὸ κοινὸν αὐτῶν μέρος σχηματίζει παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

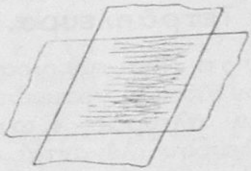


σχ. 62.

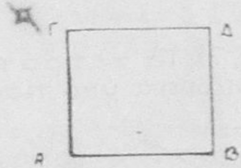
Ἐὰν τὰς αὐτὰς ταινίας ἐπιθέσωμεν σταυροειδῶς (σχ. 64). βλέπομεν, ὅτι τὸ κοινὸν αὐτῶν μέρος σχηματίζει παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ μὴ ὀρθάς.



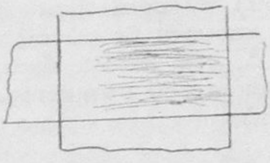
σχ. 63.



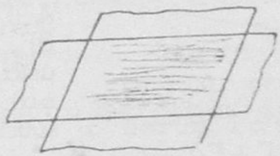
σχ. 64.



σχ. 67.



σχ. 65.



σχ. 66.

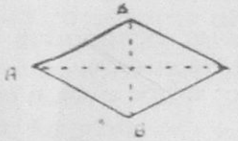
§ 74. Λάβωμεν ἤδη δύο ταινίας διαφόρου πλάτους καὶ ἐπιθέσωμεν αὐτὰς καθέτως, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 65), σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας αὐτοῦ ὀρθάς, τὰς δὲ προσκειμένας πλευρὰς ἀνίσους. Ἐὰν τὰς αὐτὰς ταινίας ἐπιθέσωμεν σταυροειδῶς (σχ. 66), σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ γωνίαι διάφοροι τῆς ὀρθῆς.

Οὕτως ἔχομεν τέσσαρα εἴδη παραλληλογράμμων:

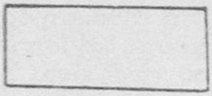
1ον. Τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ γωνίαι ὀρθαὶ (σχ. 67).

2ον. Τὸν ῥόμβον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ γωνίαι διάφοροι τῆς ὀρθῆς (σχ. 68).

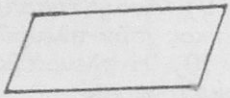
3ον. Τὸ Ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμε-



σχ. 68.



σχ. 69.



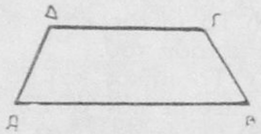
σχ. 70.

ναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαὶ (σχ. 69).

4ον. Τὸ πλάγιον ἢ ῥομβοειδὲ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαὶ (σχ. 70).

§ 75. Εἰς ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα βάσις λαμβάνεται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι παραλλήλου πλευρᾶς αὐτοῦ.

Εἰς τὸ τραπέζιον αἱ παράλληλοι αὐτοῦ πλευραὶ λέγονται βάσεις, ἡ δ ἀπόστασις αὐτῶν ὕψος.



σχ. 71.

Ἐὰν τὸ τραπέζιον ἔχῃ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του ἴσας, λέγεται ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Οὕτως, εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον (σχ. 71), ΑΒΓΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ ΑΔ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ λέγονται βάσεις.

§ 76. **Ἀσκήσεις ἀριθμ. καὶ γραφικαί.** 1) Κατασκευάσατε τετράγωνον καὶ ῥόμβον καὶ εὕρετε κατὰ τί διαφέρουν.

2) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον καὶ ῥομβοειδὲς καὶ εὕρετε κατὰ τί ὁμοιάζουν καὶ κατὰ τί διαφέρουν.

3) Κατασκευάσατε τραπέζιον και ἕτερον ἰσοσκελὲς καὶ φέρατε τὰ ὕψη αὐτῶν.

4) Κατασκευάσατε τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον· λάβετε μίαν βάσιν εἰς ἕκαστον· ποία πλευρὰ θὰ εἶναι τὸ ὕψος;

5) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν 3 δακτ. καὶ φέρατε εἰς τὸ ἄκρον

αὐτῆς κάθετον μήκους 3 δακτ., συμπληρώσατε τὸ σχῆμα εἰς ἓν τετράγωνον, χαράξατε τὰς διαγωνίους του καὶ ὑπολογίσατε τὴν περίμετρόν του.

6) Γράψατε τραπέζιον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

7) Γράψατε ῥομβοειδὲς μὲ δύο πλευρὰς 3 καὶ 2 δακτ. καὶ γωνίαν 50 μοιρῶν.

8) Τετράγωνον ἔχει περίμετρον 20 μέτρων· πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς;

9) Ἀναζητήσατε ἐν τῇ αἰθούσῃ ὀρθογώνια· ἐκτιμήσατε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν καὶ ὑπολογίσατε τὴν περίμετρον.

10) Ἡ πλευρὰ ῥόμβου τινὸς εἶναι 3 μέτρα· πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

11) Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὰ μήκη τῶν πλευρῶν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 3 καὶ 4 μέτρα· πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

12) Γράψατε ἰσοσκελὲς τραπέζιον, φέρατε τὰς διαγωνίους του καὶ μετρήσατε αὐτάς· τί παρατηρεῖτε;

13) Ἐκτιμήσατε καὶ μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ δαπέδου τῆς αἰθούσης τοῦ σχολείου, πρὸς δὲ τούτοις ὑπολογίσατε τὴν περίμετρόν του.

14) Νὰ ἐκτιμήσητε καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσητε:

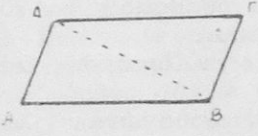
α) Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος μαυροπίνακος καὶ εἶτα τὴν περίμετρόν του.

β) Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος διαφόρων βιβλίων καὶ ἔπειτα τὴν περίμετρον αὐτῶν.

15) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου· πόση εἶναι ἡ περίμετρος, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι 17 μ. τὸ δὲ ὕψος του 12 μέτρων;

Β΄. Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.

§ 77. Λαμβάνομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 72) καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΒΔ, ὁπότε σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα. Διότι, ἐὰν κόψωμεν αὐτὸ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου του καὶ ἐπιθέσωμεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ καταλλήλως, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουν, ἤτοι εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ ἔχωμεν ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ, ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι Α=Γ. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι:

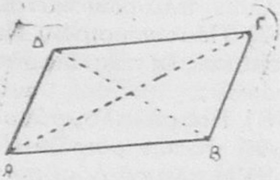


σχ. 72.

α) Ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.

β) Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

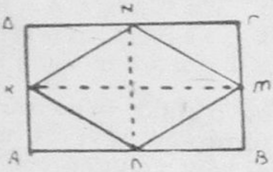
§ 78. Ἐὰν εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 73) φέρωμεν τὰς διαγωνίους του, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μία τέμνει τὴν ἄλλην εἰς τὸ Ο. ἐὰν δὲ μετρήσωμεν τὰ δύο τμήματα ΟΔ καὶ ΟΒ, βλέπομεν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα· ἐπίσης καὶ τῆς ἄλλης τὰ δύο τμήματα ΑΟ καὶ ΟΓ εἶναι ἴσα· ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.



σχ. 73.

Τὸ σημεῖον (ο) τῆς τομῆς τῶν δύο διαγωνίωνλέγεται κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

§ 72. Λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 74) καὶ ἑνοῦμεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Τὸ νέον σχῆμα ΚΛΜΝ, τοῦ ὁποίου διαγώνιοι εἶναι αἱ ΚΜ καὶ ΛΝ εἶναι ῥόμβος· διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι καὶ μεταξύ των ἴσαι· ἐὰν δὲ μετρήσωμεν διὰ τοῦ γνώμονος τὰς γωνιας τὰς ὁποίας σχηματιζουσιν αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου, βλέπομεν, ὅτι αὗται (ἤτοι αἱ ΚΟΝ, ΚCΜ, ΜΟΛ ΚΟΛ) εἶναι ὀρθαί· ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι:



σχ. 74.

αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου τέμνονται καθέτως.

§ 79. **Ἀσκήσεις.** 1) Ἀναφέρατε μίαν ἰδιότητα κοινὴν α΄) τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, β΄) τοῦ ῥόμβου καὶ τετραγώνου.

2) Ποῖον μῆκος ἔχει ὀρθογώνιος αἴθουσα ἔχουσα περίμετρον 158 μέτρα, ἐὰν τὸ πλάτος της εἶναι 30 μέτρων;

3) Ἐὰν εἰς ῥόμβον φέρωμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, σχηματίζονται τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια· διατί;

4) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ῥομβοειδές, αἱ δὲ προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 5 καὶ 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τοῦ ῥομβοειδοῦς.

5) Μία τῶν διαγωνίων τετραγώνου εἶναι 0,60 μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν τεσσάρων ἡμιδιαγωνίων αὐτοῦ.

6) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 56 μέτρων ἡ μία τῶν πλευρῶν του 8 μέτρ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

7) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῆς διασταυρώσεως τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραγώνου;

8) Παραλληλογράμμου τινὸς μία γωνία εἶναι 60°. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων αὐτοῦ γωνιῶν.

9) Ἡ πλευρὰ ῥόμβου τινὸς εἶναι 3,2 μέτρα· πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

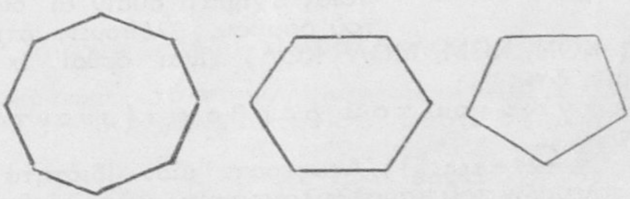
10) Συγκρίνατε τὸ τετράγωνον μὲ τὸν ῥόμβον καὶ εὕρετε τὰς κοινὰς αὐτῶν ἰδιότητας.

11) Ἑνὸς τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ παραλληλόγραμμον διὰ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ, αἱ πλευραὶ εἶναι 2, 4, 5 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

12) Αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ ἡμιδιαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι· διατί;

γ΄. Πολύγωνα.

§ 80. **Ὁρισμός.** Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον σχῆμα περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμὰς περισσοτέρας τῶν τεσσάρων, λέγεται *πολύγωνον*. Ἀναλόγως δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν του λέγεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ἑπτάγωνον κλπ. (σχ. 75).



σχ. 75.

Περίμετρος τοῦ πολυγώνου λέγεται, ὡς εἴδομεν (§ 58) τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Κυρτὸν λέγεται τὸ πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ προεκτεινομένη ἀφήνῃ τὸ σχῆμα πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

Διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν δύο κορυφὰς αὐτοῦ μὴ διαδοχικάς.

§ 81. **Ἰδιότης τῶν γωνιῶν πολυγώνου.** Πᾶν πολύγωνον διαιρεῖται διὰ τῶν διαγωνίων του, ἃς φέρομεν ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν του, εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν του ἠλαττωμένος κατὰ 2.

Οὕτως, εἰς τὸ τετράπλευρον ἔχομεν δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι (2×2) 4 ὀρθαί.

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸν 4. Οὕτω, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του (2×5) καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4, ἤτοι 6 ὀρθαί· ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου εἶναι $2 \times 8 = 16 - 4 = 12$ ὀρθαί.

Ὅθεν: τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσας δίδει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ 4.

§ 82. **Κανονικὰ πολύγωνα.** Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον πᾶσαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἐπίσης πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ· τὸ τοιοῦτον τρίγωνον λέγεται κανονικόν· κανονικὸν τετράπλευρον εἶναι τὸ τετράγωνον. Γενικῶς: πολύγωνον λέγεται κανονικόν, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς πλευρὰς καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

§ 83. **Ἀσκήσεις.** 1) Εἰς κύκλον γωνία ἐγγεγραμμένη καὶ ἐπίκεντρος βαίνουσιν ἐπὶ τόξου 120°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία;

2) Εἰς κύκλον ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τόξου 60°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἡμίσεος τόξου.

3) Κατασκευάσατε ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς κύκλον, ἥτις νὰ βαίνῃ ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας. Πόσων μοιρῶν εἶναι αὕτη;

4) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, ἥτις βαίνει ἐπὶ τόξου τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

5) Ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τόξου, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἐφ' οὗ καὶ ἡ ἐπίκεντρος.

6) Ποῖον ἐκ τῶν τριγώνων εἶναι κανονικόν;

7) Μὲ πόσας γωνίας ὀρθὰς ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πενταγώνου, ἑξαγώνου, δεκαγώνου;

8) Κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν 2,5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος του;

9) Ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι 50 μέτρα· πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ;

10) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ὅταν ἡ περίμετρός του εἶναι 60 μέτρα;

11) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 4 ὀρθαί. Ποίου εἴδους πολύγωνον εἶναι;

12) Πολυγώνου τινὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 8 ὀρθαί. Τί πολύγωνον εἶναι;

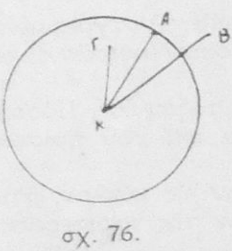
13) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου, ἐὰν ἡ περίμετρος του εἶναι 60 μέτρα;

14) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου, ὀκταγώνου καὶ δεκαγώνου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

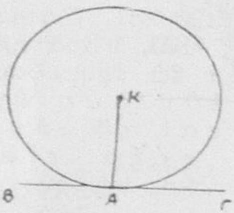
Κύκλος καὶ εὐθεῖα.

§ 84. Ἐὰν λάβωμεν κύκλον Κ (σχ. 76) καὶ σημεῖον τι ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τότε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἡ ΚΒ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ΚΑ. Ἐὰν τέλος τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τότε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος.



σχ. 76.

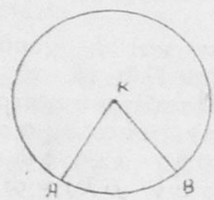
§ 85. Ἐὰν ὐθεῖα τέμνῃ τὴν περιφέρειαν κύκλου εἰς δύο σημεῖα, χωρὶς νὰ εἶναι διάμετρος, λέγεται τ έ μ ν ο υ σ α. (Γράψατε μίαν τέμνουσαν καὶ εὕρετε τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα δὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, τότε ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος. Ἐὰν τέλος ἡ εὐθεῖα ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (σχ. 77) τότε ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγεται *ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας*, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Α λέγεται *σημεῖον ἐπαφῆς*.



σχ. 77.

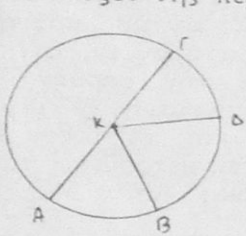
§ 86. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης περιφερείας φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα, βεβαιούμεθα διὰ τοῦ γνώμονος ἢ διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ὅτι αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς ἐφαπτομένης γωνίαν ὀρθήν. Ὅθεν: *ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἥτις καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.*

§ 87. **Ἐπίκεντρος γωνία καὶ ἀντίστοιχον τόξον.** Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (σχ. 78) φέρωμεν δύο ἀκτῖνας, αὗται σχηματίζουν τὴν γωνίαν ΑΚΒ, ἥτις λέγεται ἐπίκεντρος. Γενικῶς: *ἐπίκεντρος λέγεται ἡ γωνία, ὅταν ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι ἀκτῖνες αὐτοῦ.*



σχ. 78.

Τὸ τόξον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας λέγεται ἀντίστοιχον τόξον τῆς ἐπικέντρου ΑΚΒ.

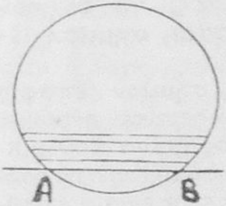


σχ. 79.

§ 88. **Ἰσότης τόξων καὶ ἐπικέντρων γωνιῶν.** Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου Κ (σχ. 79) δύο τόξα ἴσα τὸ ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ σχηματίσωμεν τὰς ἀντιστοίχους ἐπικέντρους γωνίας ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ. Ἐὰν στρέψωμεν τὴν ἐπίκεντρον ΑΚΒ περὶ τὸ Κ, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα τόξα, βλέπομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς γωνίας ΔΚΓ.

Ὅθεν: ἴσα τόξα ἀνήκοντα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἔχουσιν ἴσας ἐπικέντρους γωνίας.

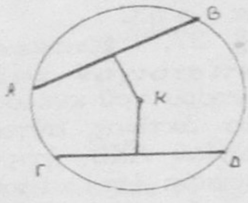
Καὶ ἀντιστρόφως: ἐὰν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΑΚΒ=ΓΚΔ καὶ στρέψωμεν τὴν ΔΚΓ περὶ τὸ σημεῖον Κ, ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΚΒ, παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα θὰ ἐφαρμόσουν· ὥστε, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἐὰν δύο ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα εἶναι ἴσα. Αἱ προτάσεις αὗται ἰσχύουσι καὶ ὅταν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι.



σχ. 80.

§ 89. **Σύγκρισις χορδῶν.** Ἐὰν λάβωμεν τέμνουσαν ΑΒ (σχ. 80) καὶ ὑποθέσωμεν ταύτην κινουμένην παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, βλέπομεν, ὅτι τὸ ἐντὸς τῆς περιφερείας μέρος τῆς τεμνούσης—ἡ χορδὴ—αὐξάνει, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλαττοῦται, καὶ ἡ χορδὴ γίνεται μεγίστη, ὅταν ἔλθῃ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι:

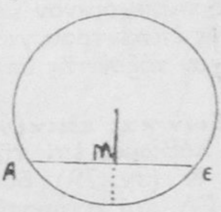
√ α) μία χορδὴ εἶναι τόσον μεγαλιτέρα ἄλλης, ὅσον ὀλιγώτερον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (σχ. 81).√



σχ. 81.

√ β) ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ τοῦ κύκλου.

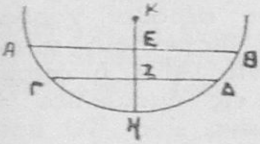
§ 90. Ἐὰν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κύκλου Κ (σχ. 82) φέρωμεν τὴν χορδὴν αὐτοῦ ΑΕ καὶ διὰ τοῦ γνώμονος φέρωμεν ἐπ' αὐτὴν κάθετον ἐκ τοῦ κέντρου, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κάθετος αὕτη διαιρεῖ τὴν χορδὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, προεκτεινομένη δὲ μέχρι τῆς περιφερείας διαιρεῖ καὶ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη· πράγματι, μετροῦντες ταῦτα εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι ΑΜ=ΜΕ· ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι:



σχ. 82.

πᾶσα ἀκτὶς κάθετος ἐπὶ χορδὴν διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὸ τόξον αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

§ 91. **Τόξα μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν περιεχόμενα.** Ἂς λάβωμεν δύο παραλλήλους χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 83) καὶ διὰ τοῦ γνώμονος ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ἀκτῖνα ἐπ' αὐτάς· ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω (§ 90) ἡ κάθετος αὕτη θὰ διαιρῇ τὰ τόξα ΑΗΒ καὶ ΓΗΔ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἤτοι θὰ ἔχωμεν



σχ. 83.

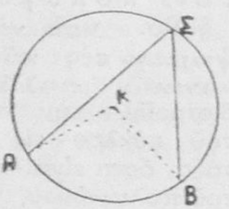
τόξον ΑΗ=τόξον ΗΒ

ὁμοίως τόξον ΓΗ=τόξον ΗΔ ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῶν ἴσων τὰ ἴσα εὑρίσκομεν τόξον ΑΓ=τόξον ΒΔ

Ὅθεν: τόξα κύκλου περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν εἶναι ἴσα.

Περὶ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

§ 92. Ἐὰν ἀπὸ σημεῖον Σ περιφερείας φέρωμεν δύο χορδὰς ΣΑ καὶ ΣΒ (σχ. 84) σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΣΒ, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ δὲ πλευραί της εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου· ἡ γωνία αὕτη λέγεται ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η ε ἰ ς κ ύ κ λ ο ν. Τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, εἶναι τὸ τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου αὕτη βαίνει καὶ λέγεται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν τ ό ξ ο ν τ ῆ ς ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η ς γ ω ν ί α ς.

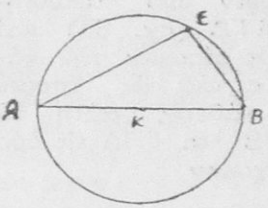


σχ. 84.

§ 93. **Ἐπίκεντρος καὶ ἐγγεγραμμένη.** Εἰς κύκλον Κ (σχ. 84) γράφομεν μίαν ἐγγεγραμμένην γωνίαν καὶ μίαν ἐπίκεντρον οὕτως, ὥστε αὗται νὰ βαίνωσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐὰν μετρήσωμεν ταύτας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπίκεντρος εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης.

Ὅθεν: ἡ ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς γ ω ν ί α ε ἶ ν α ι δ ι π λ α σ ί α τ ῆ ς ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η ς, ὅ τ α ν α ὗ τ α ι β α ί ν ω σ ι ν ἐ π ὶ τ ο ῦ α ὐ τ ο ῦ τ ό ξ ο υ. Οὕτως, εἰς τὸ σχῆμα 84 ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐγγεγραμμένης ΑΣΒ.

§ 94. Λαμβάνομεν κύκλον Κ (σχ. 85), φέρομεν τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΚΒ καὶ ἔκ τινος σημείου (Ε) τῆς περιφερείας του φέρομεν χορδὰς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου· οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΕΒ, ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἡ γωνία αὕτη μετρουμένη εἶναι 90 μοιρῶν, ἤτοι ὀρθή.



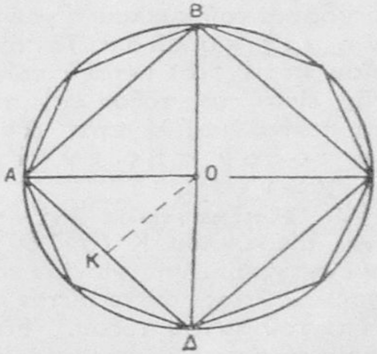
σχ. 85.

Ὅθεν: **πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή.**

Ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα.

§ 95. **Ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον** λέγεται ἓν πολύγωνον, ἐὰν αἱ μὲν κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί του εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου (σχ. 86). Εἰς τὰ ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται **ἀπόστημα τοῦ καν. πολυγώνου.**

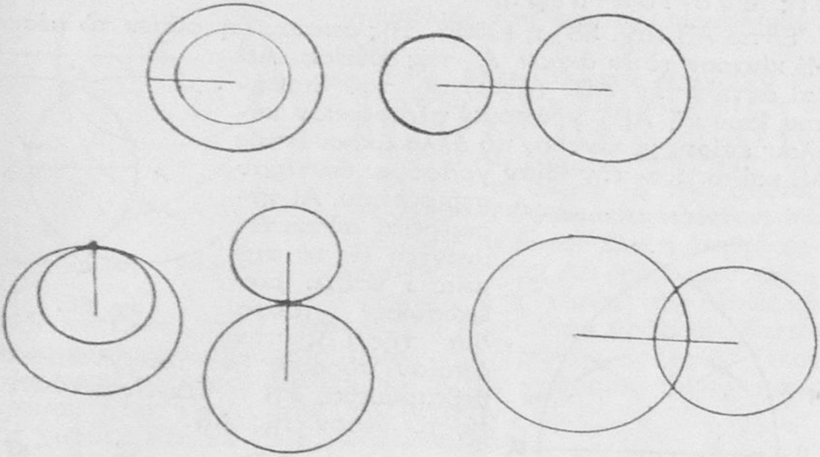
§ 96. **Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον,** διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τόσα ἴσα τόξα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον θὰ ἐγγράψωμεν· ἔπειτα φέροντες τὰς χορδὰς τῶν ἴσων τόξων, ἔχομεν τὸ ζητούμενον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι κανονικόν, διότι, ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας ὡς χορδὰς ἴσων τόξων, καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ὡς βλέπομεν μετροῦντες ταύτας.



σχ. 86.

Θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.

§ 97. Ἐκ τῶν σχημάτων (87) φαίνεται, ὅτι δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας πέντε θέσεις. Ἐν πρώτοις, ὅταν αἱ περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν, ἔχομεν δύο θέσεις, καθ' ὅσον ἡ μία δύναται νὰ κεῖται ἐντὸς ἢ



σχ. 87.

ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν κοινὸν σημεῖον πάλιν δύο θέσεις εἶναι δυναταί· ἢ ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς ἢ ἐφάπτονται ἐντός. Ἐὰν τέλος αἱ περιφέρειαι ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα ἔχομεν μίαν θέσιν, καθ' ἣν αἱ περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

Γεωμετρικὰ προβλήματα.

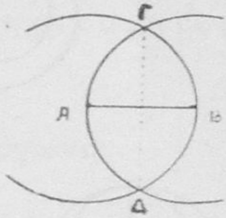
§ 98. **Γεωμετρικὰ προβλήματα** καλοῦμεν τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων τὴν λύσιν ἐπιτυγχάνομεν τῇ βοηθείᾳ τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, τοῦ γνώμονος, τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος.

Διὰ νὰ λύσωμεν γεωμετρικὸν πρόβλημα, ἐκτελοῦμεν διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ διαβήτου διαφόρους κατασκευάς, τὰς ὁποίας λέγομεν γεωμετρικάς. Αἱ λύσεις τῶν ἑπομένων προβλημάτων θὰ γίνουν διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν.

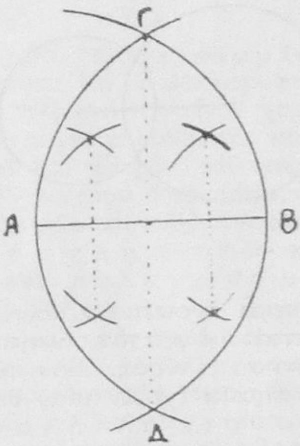
Διαίρεσις εὐθείας.

§ 99. **Πρόβλημα 1ον.** Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 88) ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὸ μέσον. Μὲ κέντρον τὸ ἓν ἄκρον Α τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ (ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον τῇ ΑΒ) γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ ἄλλο ἄκρον Β τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν. Αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐὰν ἑνώσωμεν ταῦτα διὰ τῆς ΓΔ, τὴν ὁποίαν σύρομεν διὰ τοῦ γνώμονος, βεβαιούμεθα, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



σχ. 88.



σχ. 89.

§ 100. **Πρόβλημα 2ον.** Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

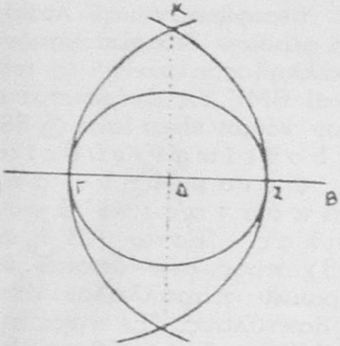
Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος διαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 89) εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, διαιροῦμεν ἓν ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Οὕτως, ἔχομεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διῃρημένην ἀκριβῶς εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

Χάραξις καθέτων καὶ παραλλήλων.

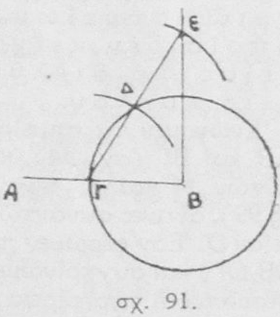
§ 101. **Πρόβλημα 3ον.** Εἰς ἓν σημεῖον δοθείσης εὐθείας νὰ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπ' αὐτην. Ἔστω Δ τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 90) ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν κάθετον. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Δ τμήματα ἴσα καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖ φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ Δ διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος.



σχ. 90.

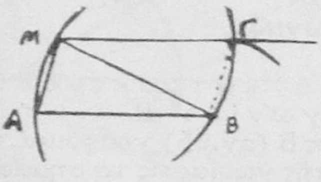
§ 102. **Πρόβλημα 4ον.** Νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς τὸ ἄκρον δοθείσης εὐθείας.

Ἔστω ΑΒ (σχ. 91) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν κάθετον. Μὲ κέντρον τὸ ἄκρον Β καὶ ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πρώτην εἰς τὸ Δ. Τέλος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν τρίτην περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΓΔ εἰς τὸ Ε. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΕΒ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος, ὡς βεβαιούμεθα διὰ τοῦ γνώμονος.



σχ. 91.

Σημείωσις. Ἵνα βεβαιωθῶμεν ὅτι εὐθεῖα τις ὡς ἡ ΔΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΑΒ (σχ. 90) λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Δ ποδὸς τῆς καθέτου ἀποστάσεις ἴσας (ΔΓ=ΔΖ)· ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Ζ καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΓ γράφομεν δύο περιφερείας. Ἐὰν αὗται τέμνωνται ἐπὶ τῆς ΚΔ, τότε ἡ ΚΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.



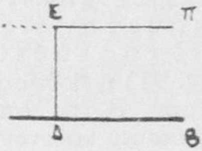
σχ. 92.

§ 103. **Πρόβλημα 5ον.** Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ν' ἀχθῇ παράλληλος ἔκ τινος σημείου Μ κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν πλαγίαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΑΒ (σχ.92) τὴν ΜΒ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Α· ὁμοίως μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν περιφέρειαν καὶ λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΒΓ ἴσην τῇ ΑΜ· φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΜΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΒΜ καὶ ΒΜΓ ὡς ἀνήκουσαι εἰς ἴσους κύκλους καὶ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι ἴσαι (§ 88).

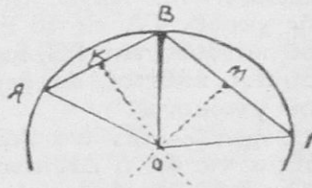
§ 104. **Πρόβλημα 6ον.** Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ εἰς ὡρισμένην ἀπὸ ταύτης ἀπόστασιν ν' ἀχθῇ παράλληλος. Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα (σχ. 93) πρὸς τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ φέρωμεν παράλληλον ἀπέχουσαν δύο δακτύλους. Ἐκ τινος σημείου Δ τῆς ΑΒ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν (προβλ. 3ον) μήκους δύο δακτύλων, τὴν ΔΕ. Εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Ε ὑψοῦμεν ἄλλην κάθετον (προβλ. 4ον) τὴν ΕΠ· αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος· διότι δύο κάθετοι (ΔΒ, ΕΠ) ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ΕΔ) εἶναι παράλληλοι (§ 54).



σχ. 93.

§ 105. **Πρόβλημα 7ον.** Διὰ τριῶν σημείων Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου.

Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα δι' εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 94), καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν Μ καὶ Κ ὑψοῦμεν καθέτους (§ 99), αἵτινες συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, καὶ συγκρίνωμεν αὐτὰς βλέπομεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· ἑπομένως ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ ἢ τὴν ΟΓ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ.

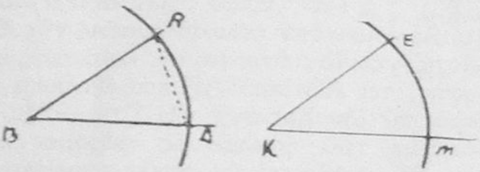


σχ. 94.

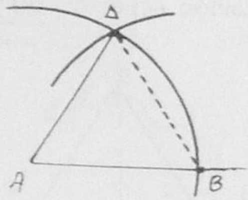
Κατασκευὴ γωνιῶν.

§ 106. **Πρόβλημα 8ον.** Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν Β.

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Β (σχ.95) γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Δ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ ἄκρον Κ τυχούσης εὐθείας καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν εὐθεῖαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Μ (σχ. 95). Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ΑΔ, γράφομεν τόξον τέμνον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΚΕ καὶ ἡ σχηματιζομένη γωνία ΕΚΜ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν Β διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΕΚΜ καὶ ΑΒΔ τῶν ἴσων κύκλων



σχ. 95.



σχ. 96.

εἶναι ἴσαι, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας χορδάς.

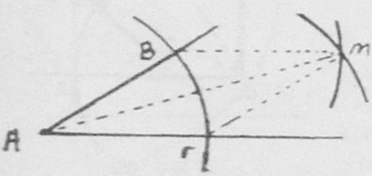
Πρακτικῶς περὶ τούτου βεβαιούμεθα μετροῦντες τὰς γωνίας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

§ 107. **Πρόβλημα 9ον.** Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 60°.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α τυχούσης εὐθείας (σχ.96) καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ὁμοίως μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ κέντρον τὸ Β γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν πρώτην καὶ τὸ Δ. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΑΔ καὶ ἡ σχηματιζομένη γωνία ΔΑΒ εἶναι 60° Διότι τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσόπλευρον ἑπομένως καὶ ἰσογώνιον (§ 67, 5), ὥστε ἑκάστη γωνία αὐτοῦ εἶναι 60° ἤτοι τὸ 1/3 τῶν 2 ὀρθῶν.

Διαίρεσις γωνιῶν.

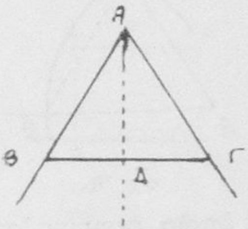
§ 108. **Πρόβλημα 10ον.** Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσας γωνίας.



σχ. 97.

α') Διὰ τοῦ διαβήτου. Ἔστω ΒΑΓ ἡ δοθεῖσα γωνία (σχ. 97). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α αὐτῆς γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· ἔπειτα μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ· φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΑΜ, ἥτις διαιρεῖ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ. Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΓΜ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας (§ 69).

Σημείωσις. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις διαιρεῖ γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας λέγεται διχοτόμος τῆς γωνίας.



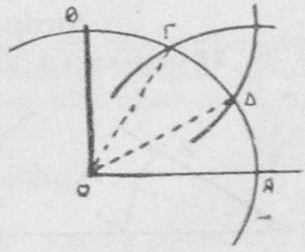
σχ. 98.

β') Διὰ τοῦ γνώμονος. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας ἴσα μήκη ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἑνοῦμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῆς ΓΒ (σχ. 98). Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος φέρομεν ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετον ἐκ τοῦ σημείου Α, τὴν ΑΔ. Ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ, διότι αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἴσαι.

Σημείωσις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν γωνίαν εἰς 2, 4, 8, κτλ. γωνίας ἴσας. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας· ἔπειτα διχοτομοῦμεν ἑκάστην νέαν γωνίαν.

§ 109. **Πρόβλημα Ποv.** Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἔστω ΑΟΒ (σχ. 99) ἡ ὀρθὴ γωνία· ἣν διαιροῦμεν ὡς ἑξῆς. Γράφομεν τρία τόξα κύκλων μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Τὸ πρῶτον μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὥστε νὰ τέμνῃ τὰς πλευράς της ἔστω εἰς τὰ Α καὶ Β. Τὸ δεύτερον μὲ κέντρον τὸ Α, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον εἰς τὸ Γ. Τὸ δὲ τρίτον μὲ κέντρον τὸ Β τέμνον τὸ πρῶτον εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἑνοῦμεν τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Γ, Δ καὶ ἔχομεν τὴν ὀρθὴν διῃρημένην εἰς τρεῖς γωνίας ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ.



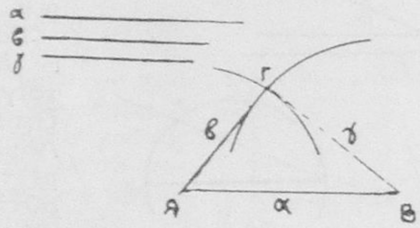
σχ. 99.

Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον ΟΒΔ ὡς ἰσόπλευρον ἔχει τὴν γωνίαν ΔΟΒ ἴσην μὲ 60°· ἑπομένως ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ὀρθῆς ἤτοι 30°. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΟΓ ἔχομεν τὴν γωνίαν ΑΟΓ ἴσην μὲ 60°. ἄρα καὶ τὴν ΓΟΒ ἴσην μὲ 30°.

Κατασκευαὶ τριγώνων.

§ 110. **Πρόβλημα 12ον.** Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι. Γράφομεν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 100) ἴσην μὲ τὴν μεγαλυτέραν τῶν δοθεισῶν α. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν β γράφομεν τόξον κύκλου· ἔπειτα ἄλλην περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν γ. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Γ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται τὰ δύο τόξα μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας, ἤτοι ΑΒ=α, ΓΒ=γ, ΑΓ=β.

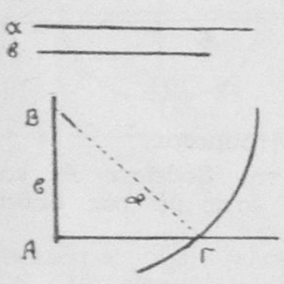


σχ. 100.

Σημείωσις. α΄) Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου, πρέπει ἑκάστη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι τὸ κατασκευαζόμενον τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσόπλευρον, ἑπομένως διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἰσόπλευρον, ὅταν ἔχωμεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ.

§ 111. **Πρόβλημα 13ον.** Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (α) καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ (β).

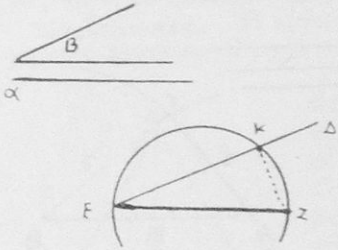


σχ. 101.

Γράφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΓ (σχ. 101) καὶ ἐπὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν μῆκος (ΑΒ) ἴσον μὲ τὸ β· εἶτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν (α) γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ Γ. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν

ΒΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

§ 112. **Πρόβλημα 14ον.** Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν.

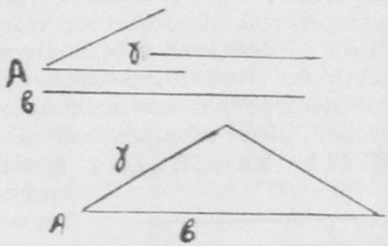


σχ. 102.

Ἔστω α ἡ ὑποτείνουσα καὶ Β μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου (σχ.102) τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ΕΖ ἴσην μὲ τὴν α καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Ε κατασκευάζομεν γωνίαν (πρόβλ. 8ον) ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Β, τὴν ΔΕΖ· ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου ἄκρου Ζ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΔ, τὴν ΚΖ· τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΕΚΖ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

§ 113. **Πρόβλημα 15ον.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένη γωνία.

Ἔστω Α (σχ. 103) ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ β, γ αἱ δοθεῖσαι πλευραί. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α (προβλ. 8ον)· ἔπειτα ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν μήκη ἴσα πρὸς τὰς β καὶ γ, ἤτοι ΑΓ=γ καὶ ΑΒ=β· ἔπειτα φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



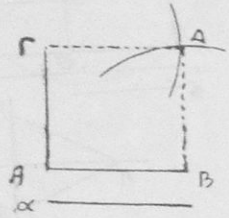
σχ. 103.

Διότι ἔχει τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περιεχούσας τὴν ΒΑΓ ἴσας μὲ τὰς δοθείσας β καὶ γ.

Κατασκευὴ τετραπλεύρων.

§ 114. **Πρόβλημα 16ον.** Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ (α).

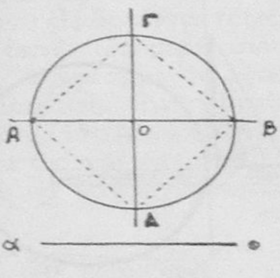
Γράφομεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α (σχ. 104)· εἰς τὸ σημεῖον Α ὑψοῦμεν κάθετον ἴσην μὲ τὴν α (προβλ. 3ον) τὴν ΑΓ. Μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὡς κέντρα καὶ ἀκτῖνα τὴν α γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ ΓΔ καὶ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



σχ. 104.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ δύο διαστάσεις α καὶ β, κάμνομεν ὁμοίαν κατασκευὴν λαμβάνοντες τὰς δύο καθέτους ἴσας μὲ τὰς διαστάσεις α καὶ β.

§ 115. **Πρόβλημα 17ον.** Νὰ κατασκευασθῇ, τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ διαγώνιος α. Ἔστω α ἡ δοθεῖσα διαγώνιος. Γράφομεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας (σχ.105), καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν (ο) καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου (α) γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει τὰς καθέτους εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

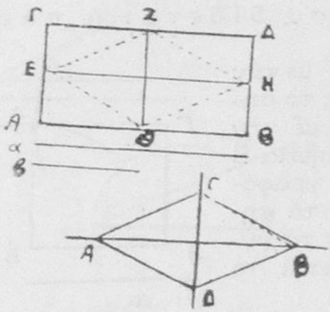


σχ. 105.

Ἐὰν ἑνώσωμεν ταῦτα δι' εὐθειῶν, ἔχομεν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει γωνίας ὀρθάς, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἡμικύκλιον (§.94) καὶ πλευρὰς ἴσας, τὰς χορδὰς ἴσων τόξων· εἶναι δὲ τὸ ζητούμενον, διότι ἑκάστη διαγώνιος αὐτοῦ ὡς διάμετρος τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

§ 116. **Πρόβλημα 18ον.** Νὰ κ τασκευασθῇ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι (α καὶ β).

α΄ τρόπος. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 106) μὲ διαστάσεις τὰς δοθείσας διαγωνίους (α καὶ β). Εὑρίσκομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ, τὰ ὁποῖα ἑνώνωμεν καὶ ἔχομεν τὸν ῥόμβον ΕΖΗΘ.



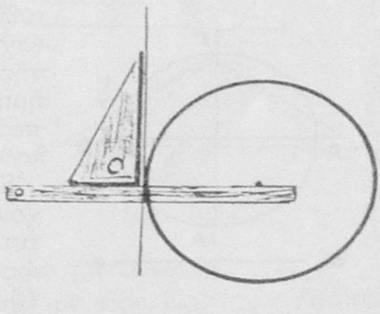
σχ. 106.

β΄ τρόπος. Χαράσσομεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως αὐτῶν ο λαμβάνομεν μήκη ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης διαγωνίου. Ὁμοίως ἐπὶ τῆς καθέτου εὐθείας λαμβάνομεν τμήματα ΟΓ καὶ ΟΔ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου β. Φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὰς εὐθείας ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ καὶ ΔΑ καὶ ἔχομεν τὸν ζητούμενον ῥόμβον ΑΒΓΔ.

Χάραξις ἐφαπτομένων.

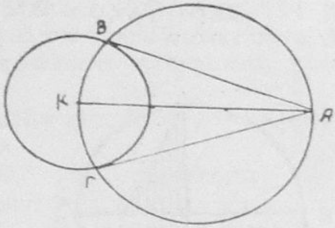
§117. **Πρόβλημα 19ον.** Δοθείσης περιφερείας ν᾽ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἴς τι σημεῖον αὐτῆς.

Ἔστω Α τὸ σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ (σχ. 107). Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Α, φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Α ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΑΒ. Αὐτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη, ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος (§ 86).


σχ. 107.

§118. **Πρόβλημα 20ον.** Ν᾽ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ(σχ.108) καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον τὸ Α. Ἑνώνωμεν τὸ κέντρον Κ τῆς περιφερείας μετὰ τοῦ Α διὰ τῆςΚΑ. Ἐπὶ τῆς ΚΑ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες εἶναι ἐφαπτόμεναι. Διότι ἡ γωνία ΚΒΑ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι γωνία ὀρθὴ (§ 94)· ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ, ἑπομένως ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΑΓ.



σχ. 108.

Ὅθεν: ἀπὸ σημείου κειμένου ἐκτὸς περιφερείας κύκλου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας.

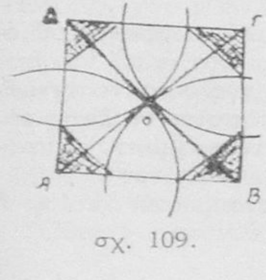
Κατασκευὴ κανονικῶν πολυγώνων.

§ 119. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν πολύγωνον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα μέρη καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διαδοχικῶς ἀνὰ δύο (§ 96).

Οὕτω, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν τετράγωνον, ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κλπ., ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ νὰ συνδέσωμεν ἀνὰ δύο διαδοχικῶς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως· τὸ προκῦπτον σχῆμα θὰ εἶναι τετράγωνον.

Ἐὰν ἕκαστον τῶν τεσσάρων τόξων τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα τόξα, θὰ ἔχωμεν τὴν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη· συνδέοντες ἀνὰ δύο διαδοχικῶς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν κανονικὸν ὀκτάγωνον κτλ. Ἐπίσης διαιροῦντες τὴν περιφέρειαν εἰς τρία, ἀκολούθως εἰς ἕξ, εἶτα εἰς δώδεκα ἴσα μέρη, θὰ ἔχωμεν τὰ ἀντίστοιχα κανονικὰ πολύγωνα.

Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω μεθόδου δυνάμεθα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὰ πολύγωνα, ὡς βλέπομεν ἀκολούθως.

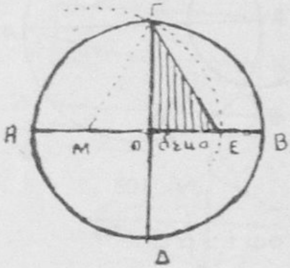


σχ. 109.

§ 120. **Πρόβλημα 21ον.** Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον.

Κατασκευάζομεν τετράγωνον ΒΓΔΑ (σχ. 109) καὶ φέρομεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ ΑΓ, ΒΔ. Μὲ κέντρον ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα ἥμισυ τῆς διαγωνίου (ΟΑ=ΟΓ=ΟΒ=ΟΔ) γράφομεν ἡμιπεριφερείας, τὸ αἵτινες τέμνουσι τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, καὶ οὕτως ἔχομεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

§ 121. **Πρόβλημα 22ον.** Νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.



σχ. 110.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς πέντε ἴσα τόξα καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτοῦ. Λαμβάνομεν περιφέρειαν καὶ γράφομεν δύο διαμέτρους καθέτους πρὸς ἀλλήλας ΑΒ, ΓΔ (σχ. 110). Μὲ κέντρον τὸ μέσον Μ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΓ γράφομεν τόξον περιφερείας κύκλου, τὸ ΓΕ, καὶ φέρομεν διὰ τοῦ κανόνος τὴν χορδὴν ΓΕ.

Οὕτως, ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΟΕ, τοῦ ὁποίου ἡ ΓΕ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου ἡ δὲ ΟΕ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα διαδοχικά, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην μὲ τὴν ΓΕ, καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν, ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον.

Ἀσκήσεις γεωμετρικῶν κατασκευῶν.

1) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο προσκειμένας πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.

2) Γράψατε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 4 δακτύλων καὶ διαιρέσατε αὐτὴν εἰς δώδεκα ἴσα μέρη. Ἐὰν ἑνώσετε τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως κατὰ σειρὰν ἀνὰ 2, ποῖον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον σχηματίζετε;

3) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ εἶναι 2 καὶ 3 δακτ.

4) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος τριῶν δακτύλων ἐγγράψατε τετράγωνον καὶ κατασκευάσατε ὀκτάγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰς κορυφάς του ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου (πρόβλημα 21).

5) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι 9 δακτ.

6) Γράψατε περιφέρειαν κύκλου μὲ ἀκτῖνα 2 δακτ. καὶ δύο διαμέτρους καθέτους πρὸς ἀλλήλας· ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ τέσσαρα ἄκρα τῶν διαμέτρων καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν (2 δακτ.) γράψατε περιφερείας. Ἐὰν ἑνώσετε διαδοχικῶς ἀνὰ δύο τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ δοθεῖσα περιφέρεια, ποῖον κανονικὸν πολύγωνον θὰ ἔχετε;

7) Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία εἰς τέσσαρας ἴσας γωνίας (πρόβλημα 10ον β΄).

8) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 120° (9ον πρόβλημα).

9) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν διαγώνιον καὶ μίαν πλευράν.

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς δοθείσης πλευρᾶς φέρομεν κάθετον (πρόβλ. 4ον). Μὲ τὸ ἄλλο δὲ ἄκρον ὡς κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὴν διαγώνιον γράφομεν περιφέρειαν· οὕτως ἔχομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

10) Δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, νὰ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ κάθετον καὶ παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

11) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ ἔχωσι μήκη τρεῖς, τέσσαρας καὶ πέντε δακτύλους.

12) Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 3 δακτ. καὶ σημεῖον ἀπέχον τοῦ κέντρου 6 δακτ. Ν᾽ ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Α΄. Μέτρησις τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

√ § 122. **Μονάδες ἐπιφανείας.** Τὰ εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι, ὡς εἴδομεν, ἐπιφάνειαι, ἑπομένως διὰ τὴν μέτρησιν αὐτῶν, ἔχομεν ἀνάγκην μονάδος ἐπιφανείας. Ὡς τοιαύτη μονὰς χρησιμεύει τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν τεσσάρων ἴσων πλευρῶν εἶναι ἓν μέτρον. Τὸ τετράγωνον τοῦτο λέγεται τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ὸ ν μ έ τ ρ ο ν (τμ.). Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι αἱ ἑξῆς·

α΄) ἡ τετραγωνικὴ παλάμη = 1/100 τοῦ τ.μ.
β΄) ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος = 1/100 τῆς τ. παλάμης.
γ΄) ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ = 1/100 τοῦ τ. δακτύλου.

Ὅθεν 1 τμ. = 100 τπ. = 10000 τδ. = 1000000 τ. γραμμαί.

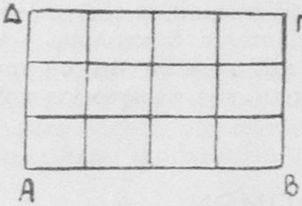
Διὰ μεγαλυτέρας ἐκτάσεις λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ σ τ ρ έ μ μ α, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τετράγ. μέτρα.

Συνήθως πρὸς μέτρησιν οἰκοπέδων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς, δηλαδὴ τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι εἷς τεκτονικὸς πῆχυς (0,75 μετρ.).

§ 123. **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν (τὸ δάπεδον τῆς αἰθούσης), συγκρίνομεν ταύτην μὲ μίαν μονάδα ἐπιφανείας, ἔστω μὲ τὸ τετραγ. μέτρον, καὶ εὑρίσκομεν πόσα τετραγωνικὰ μέτρα αὐτὴ περιέχει. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ ὁποῖος μετρᾷ ποσάκις ἡ μονὰς ἐπιφανείας περιέχεται εἰς τὴν μετρουμένην ἐπιφάνειαν καλεῖται ἐ μ β α δ ό ν.

Ὅθεν: ἐ μ β α δ ὸ ν ἐ π ι φ α ν ε ί α ς κ α λ ε ῖ τ α ι ὁ ἀ ρ ι θ μ ό ς, ὅ σ τ ι ς π ρ ο κ ύ π τ ε ι ἐ κ τ ῆ ς μ ε τ ρ ή σ ε ω ς α ὐ τ ῆ ς.

§ 124. **Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ἔστω τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 111), μετροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.



σχ. 111.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μέτρα ἡ δὲ ΑΔ 3 μέτρα. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ, βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον χωρίζεται εἰς ἴσα ὀρθογώνια· ὁμοίως ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ, βλέπομεν, ὅτι ἕκαστον τῶν τεσσάρων ἴσων ὀρθογωνίων, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη τὸ ΑΒΓΔ, διαιρεῖται εἰς τρία τετράγωνα· ἑπομένως τὸ δοθὲν ΑΒΓΔ διηρέθη εἰς 12 τετράγωνα. Ἐπειδὴ δ' ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι τετραγωνικὸν μέτρον, ἕπεται, ὅτι τὸ δοθὲν ΑΒΓΔ περιέχει 12 τετραγωνικὰ μέτρα, ἤτοι ἔχει ἐμβαδὸν 12 τμ.

Ἀλλὰ τὰ 12 τετρ. μέτρα εὑρίσκομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4 ἐπὶ 3 καὶ τὸ γινόμενον 12 ὀνομάσωμεν τετραγωνικὰ μέτρα. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 5 μετρ. καὶ ὕψος 4 μέτρα, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (5×4), καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 20 παριστᾷ τὸ ἐμβαδόν.

Ὅθεν: τ ὸ ἐ μ β α δ ὸ ν ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ ἰ σ ο ῦ τ α ι μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ β καὶ υ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $E = \beta \times \upsilon$.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ὀρθογώνιον ἔχῃ βάσιν 7,5 μ. καὶ ὕψος 3,4 μ. τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E = \beta \times \upsilon = 7{,}5 \times 3{,}4 = 25{,}5$ τετραγ. μέτρα.

§ 125. **Ἀσκήσεις.** 1) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 15,5 μέτρ. τὸ δὲ ὕψος 3,4 μέτρ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κήπου ἔχοντος σχῆμα ὀρθογωνίου, ἐὰν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ μὲν βάσις 20,4 μέτρ. τὸ δὲ ὕψος 8,2 μέτρων;

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αἰθούσης, ἥτις ἔχει μῆκος 5,65 μ. καὶ πλάτος 4,20 μ.

4) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τινὸς εἶναι 12 τμ., ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι 4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \beta \times \upsilon$ ὑποθέτοντες τὸ Ε διαιρετέον, τὸ β διαιρέτην καὶ τὸ υ πηλίκον ἔχομεν $\upsilon = E/\beta$ ἤτοι: τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ διὰ τῆς βάσεώς του. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι $12/4 = 3$ μέτρα.

5) Προαύλιον σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει ἐμβαδὸν 60 τετρ. μέτρα· ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι 12 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

6) Πόση εἶναι ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 60 τμ. καὶ ὕψος 12 μέτρα;

Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \beta \times \upsilon$ λαμβάνομεν (ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν 4), ὅτι $\beta = E/\upsilon$ ἤτοι:

ἡ βάσις ὀρθογωνίου εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ διὰ τοῦ ὕψους του. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι ἡ βάσις εἶναι 60/12 ἤτοι 5μ.

7) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 84μ., τὸ πλάτες αὐτοῦ εἶναι 30 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ οἰκοπέδου;

8) Αἴθουσα, τῆς ὁποίας τὸ ὀρθογώνιον δάπεδον ἔχει ἐμβαδὸν 30 τμ., ἔχει πλάτος 5 μέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος αὐτῆς;

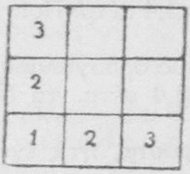
9) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μαυροπίνακος, ὅστις ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 4,50 μ. καὶ πλάτος τὸ 1/3 τοῦ μήκους του.

10) Διάδρομος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει ἐμβαδὸν 78 τμ.

Ἐὰν στρωθῇ διὰ τάπητος πλάτους 1 1/2 μέτρου, πόσα μέτρα χρειάζονται;

11) Δωμάτιον σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 6 μ. καὶ πλάτος 5 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 2,5 μ. καὶ πλάτος 0,12 μέτρ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται; γ

§ 126. **Ἐμβαδὸν τετραγώνου.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου (σχ. 112), παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος· ἐπομένως, ἐὰν ἡ πλευρά του εἶναι 3 μέτρα τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι 3×3=9 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὁμοίως ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου τινὸς εἶναι 5 μέτρα, τὸ τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 5×5=25 τμ.



σχ. 112.

Ὅθεν: *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς πλευρᾶς του ἐφ' ἑαυτήν.*

§ 127. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 3,4 μέτρ.

2) Δάπεδον αἰθούσης ἔχει σχῆμα τετραγώνου μὲ πλευρὰν 6,5 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγωνικοῦ προαυλίου ἔχοντος περίμετρον 44 μέτρα.

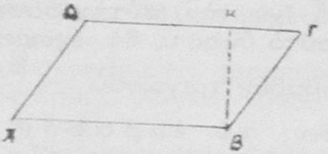
4) Ἡ περίμετρος ἀγροῦ ἔχοντος σχῆμα τετραγώνου εἶναι 60 μέτρα· ποῖον τὸ ἐμβαδόν του;

5) Τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον 60 μετρ. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 10 μέτρα, κατὰ πόσον διαφέρουσι τὰ ἐμβαδά των;

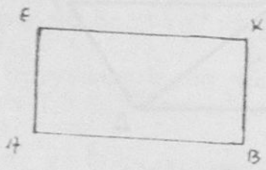
6) Τετράγωνον ἔχει περίμετρον 40 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος ὀρθογωνίου, ἐὰν ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ μῆκος 20 μ.

7) Πόσον διαφέρουν τὰ ἐμβαδὰ δύο τετραγώνων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἔχει περίμετρον 40 μέτρων τὸ δὲ ἄλλο διπλασίαν;

§ 128. **Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.** Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 113)· φέρομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ ΒΚ καὶ ἀποκόπτομεν τὸ τρίγωνον ΚΒΓ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο μεταφέρομεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ παραλληλογράμμου οὕτως, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ, ὅτε τὸ ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΚΕ (σχ. 114), τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ δοθέν.



σχ. 113.



σχ. 114.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΕΑΒΚ εἶναι (§ 124) τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΑΒ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΒΚ, ἤτοι ΑΒ×ΒΚ· ἄρα τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ὅθεν:

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ.113) ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 3,7 μέτρ. τὸ δὲ ὕψος ΒΚ εἶναι 2,45 μέτρ. θὰ ἔχωμεν ἐμβαδὸν Ε=3,7×2,45=9,065 τετρ. μέτρα.

§ 129. **Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 4,05 μέτρα καὶ ὕψος 1,05 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 22,5 τετρ. μ. καὶ βάσιν 7,5 μετρ. (ἴδε ἄσκησιν 4 τῆς § 125).

3) Παραλληλόγραμμον ἔχει ἐμβαδὸν 25,2 τετρ. μέτρα καὶ ὕψος 4 μ. Πόση εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ;

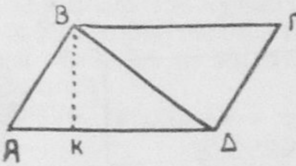
4) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 25 μ. καὶ 23 μ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον τιμᾶται τὸ οἰκόπεδον, ἐὰν τὸ τετρ. μέτρον πωλῆται πρὸς 60 δραχμάς.

5) Οἰκόπεδον σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει ἐμβαδὸν 360 τετρ. μέτρα· ἡ πρόσοψις αὐτοῦ εἶναι 18 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ βάθος αὐτοῦ;

§ 130. **Ἐμβαδὸν τριγώνου.** Ἐξετάσαντες τὰς ἰδιότητας τῶν παραλληλογράμμων (§ 77.α) εἴδομεν, ὅτι πᾶν παραλληλόγραμμον ὡς τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 115) διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διαγωνίου του εἰς δύο ἴσα τρίγωνα (ΑΓΔ=ΒΔΓ)· ἐπομένως τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου μετὰ τοῦ ὁποίου ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἄρα:

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διὰ β καὶ διὰ υ τὸ ὕψος (ΒΚ) αὐτοῦ, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν β καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ, θὰ ἔχωμεν

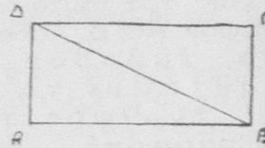


σχ. 115.

$$\text{ἐμβαδὸν τριγώνου} = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$$

ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

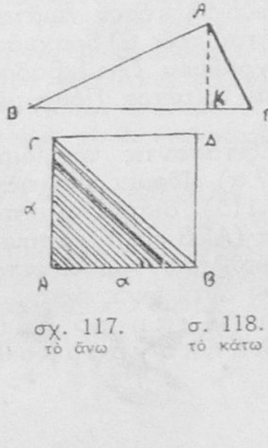
§ 131. **Παρατηρήσεις.** 1) Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον (σχ. 116) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ.ΑΔ}{2}$ ἤτοι: τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς αὐτοῦ γωνίας.



σχ. 116.

2) Ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (σχ. 117) ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ, ὅτε τὸ ὕψος του εἶναι ἡ κάθετος ΑΚ, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΟΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι· τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. ἤτοι

$$Ε = \frac{ΒΓ.ΑΚ}{2}$$



σχ. 117. τὸ ἄνω σ. 118. τὸ κάτω

3) Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ὅτε αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{\alpha \times \alpha}{2}$ ἤτοι $Ε = \frac{\alpha^2}{2}$. Ὄντως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχῆμα 118).

§ 132. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 3,15 μ. καὶ ὕψος 1,03 μ.

2) Οἰκόπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ βάσιν 120 μ. καὶ ὕψος 70 μ., πωλεῖται πρὸς 40 δρ. τὸ τ. μέτρον. Πόσον ἀξίζει;

3) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ εἶναι 7,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

4) Τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τριγώνου τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 16. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{\beta\times\upsilon}{2}$ λαμβάνομεν, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 2 ἀμφότερα τὰ ἴσα, $2E=\beta\times\upsilon$.

5) Διατί δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα;

6) Τρίγωνόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 10 τ.μ. καὶ βάσιν 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ)

Λύσις. Ἐὰν τῆς ἰσότητος $2E=\beta\times\upsilon$ λάβωμεν τὸ 2E ὡς διαιρετέον, θὰ ἔχωμεν $\frac{2E}{\beta}=\upsilon$, ἤτοι:

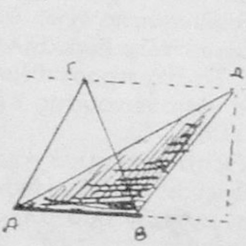
τὸ ὕψος τριγώνου τινὸς εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ διαιρέσωμεν διὰ τῆς βάσεώς του.

7) Ἀγρὸς τριγωνικὸς ἔχει ἐμβαδὸν 615 τ.μ. καὶ βάσιν 20,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου;

8) Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς εἶναι 10 τ.μ. τὸ δὲ ὕψος του 4μ. Πόση εἶναι ἡ βάσις του;

Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος $2E=\beta\times\upsilon$ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ β, λαμβάνομεν $\beta=\frac{2E}{\upsilon}$, ἤτοι:

ἡ βάσις τριγώνου τινὸς εὑρίσκεται, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ὕψους του.



σχ. 119.

9) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μία τῶν ἴσων καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 45 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

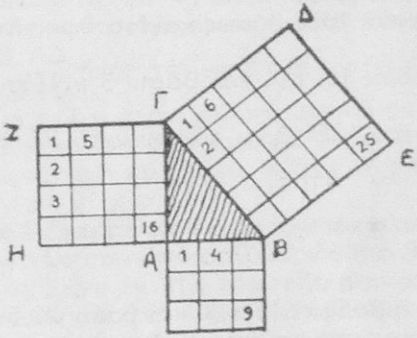
10) Διατί τὰ τρίγωνα τοῦ σχήματος 119, ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἰσοδύναμα; (δηλ. ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά).

11) Δύο οἰκόπεδα ἔχουσιν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀλλὰ τὸ σχῆμα τοῦ ἑνὸς εἶναι τριγωνικόν, τοῦ δὲ ἄλλου τετραγωνικόν· κατὰ πόσον διαφέρουσι τὰ ἐμβαδά των;

12) Δύο τρίγωνα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν, ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου. Πόσον διαφέρουσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν;

Περὶ τετραγώνου κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου.

§ 133. Εἴδομεν ἀνωτέρω εἰς τὴν μέτρησιν τῶν εὐθυγρ. σχημάτων ὅτι ἡ σύγκρισις τῶν ἐπιφανειῶν μᾶς ἔδωσε σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰς διαστάσεις αὐτῶν. Θὰ ἴδωμεν ἤδη μίαν σπουδαίαν ἰδιότητα αὐτῶν, ἥτις παρουσιάζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.



σχ. 120.

Λαμβάνομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 120) διὰ τὸ ἁπλούστερον δὲ ἔστωσαν αἱ μὲν πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ 3 μ. ἡ μία καὶ 5 μ. ἡ ἄλλη, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΓ ἴση μὲ 5 μέτρα (μονάδες μήκους). Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνον (προβλ. 16).

Ἐκ τοῦ σχήματος βλέπομεν ὅτι, τὸ τετράγωνον ΒΓΔΕ τῆς ὑποτεινούσης ἔχει ἐμβαδὸν 25 τμ. τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι τὸ μὲν 16 τμ. τὸ δὲ 9 τμ. Ταῦτα προστιθέμενα δίδουσιν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης (25 τμ.)· ἤτοι ἔχομεν $25 = 16 + 9$ ἢ $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἤτοι

$$ΒΓΕΔ = ΑΓΗΖ + ΑΒΚΘ$$

ἢ συντόμως $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2$

Οὕτως ἔχομεν τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα:
Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

§ 134. **Ἐφαρμογή.** 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα (χ) τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 μ. καὶ 4 μ.

ἔχομεν $\chi^2=3^2+4^2$ ἤτοι $\chi^2=25$· ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο μελῶν εὑρίσκομεν $\chi=\sqrt{25}$ ἢ $\chi=5$ μ. ἤτοι ζητουμένη ὑποτείνουσα εἶναι 5 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κάθετος πλευρὰ (β) τοῦ ὀρθ. τριγώνου, οὗτινος ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι 8 μ. ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρὰ 4 μ.

Ἔχομεν $\chi^2+4^2=8^2$ ἐξ ἧς $\chi^2=64-16$ ἤτοι $\chi^2=48$· ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi=\sqrt{48}=6{,}9$ μ.

§ 135. **Ἀσκήσεις.** 1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 8 μ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα 10 μ. Πόση εἶναι ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ; (ἀπ. 10 μ.).

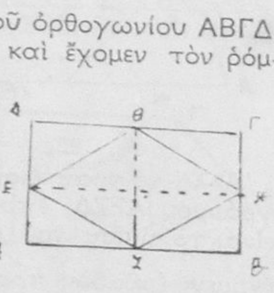
2) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 8 μ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα 10 μ. Πόση εἶναι ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ; (6 μ.).

3) Τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 4 μ. Πόση εἶναι ἡ διαγώνιος αὐτοῦ; (5,6).

4) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5 μ. μία δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 4 μ. Πόση εἶναι ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτοῦ;

§ 136. **Ἐμβαδὸν ῥόμβου.** Ὁ ῥόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εὑρίσκεται ὡς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, (σχ. 121) τὰ ὁποῖα ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν καὶ ἔχομεν τὸν ῥόμβον ΕΖΗΘ, τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΕΗ, ΘΖ. Οὕτως ἔχομεν τὸν ῥόμβον διηρημένον εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς ὀκτώ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο καὶ πρὸς ἄλληλα ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας (§ 69).



σχ. 121.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου. Ἀλλ' ὡς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ἴσας πρὸς αὐτὰς διαγωνίους τοῦ ῥόμβου, ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐμβαδὸν } ΕΖΗΑ = \frac{ΑΒΓΔ}{2} = \frac{ΕΗ \times ΘΖ}{2}.$$

Ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

§ 137. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἡ μὲν 4,5 μετ. ἡ δὲ ἄλλη 3,75 μέτρ.

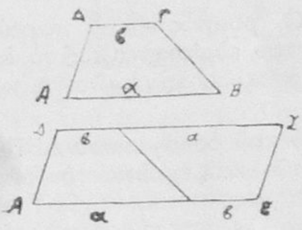
2) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἡ βάσις εἶναι 0,80 μέτρ. τὸ δὲ ὕψος 0,40 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

3) Αἱ διαγώνιοι ῥόμβου τινὸς εἶναι ἡ μὲν 6 μέτρ. ἡ δὲ 4 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις ἴσας πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ῥόμβου.

4) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 50 μέτρα, ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ 10 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου.

5) Τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου τινὸς εἶναι 4 τετρ. μέτρα· ἡ μία τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εἶναι 2 μ. Πόσον εἶναι ἡ ἄλλη;

§ 138. **Ἐμβαδὸν τραπεζίου.** Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 122) τοῦ ὁποίου παριστῶμεν τὰ μήκη τῶν βάσεων διὰ τοῦ α καὶ β. Ἐὰν εἰς τοῦτο προσαρμόσωμεν ἄλλο ἴσον μὲ τὸ δοθὲν (ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα) οὕτως, ὥστε ἡ βάσις α τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι προέκτασις τῆς βάσεως β τοῦ ἄλλου, τότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον (ΑΕΖΔ), τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ἡ (ΑΕ) α+β καὶ ὕψος τὸ υ. Τοῦ παραλληλογράμμου τούτου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι (α+β)×υ.



σχ. 122.

Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΖΔ, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, ἤτοι ἔχομεν ἐμβαδὸν τραπεζίου $ΑΒΓΔ = \frac{(α+β)υ}{2}$.

Ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι 8μ. ἡ ἄλλη 4μ. τὸ δὲ ὕψος 5 μ. τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{8+4}{2}.5$ ἤτοι 30 τετρ. μέτρα.

§ 139. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι 30 μέτρ. καὶ 22 μ., τὸ δὲ ὕψος 14,6 μέτρα.

2) Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ἄμπελος σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο βάσεις εἶναι 70 μ. καὶ 45 μ. τὸ δὲ ὕψος 35 μ.;

3) Οἰκοπέδου ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 150 τετρ. μέτρα, αἱ δὲ βάσεις 40 μ. καὶ 20 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας βάσεως διὰ Β, τῆς μικροτέρας διὰ β καὶ τὸ ὕψος διὰ υ, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν $E=\frac{(B+\beta)}{2}\upsilon$

ἢ $2E=(B+\beta).\upsilon$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\upsilon=\frac{2.\ E}{(B+\beta)}$, ἤτοι:

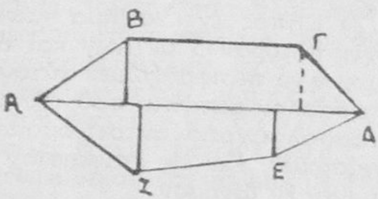
τὸ ὕψος τραπεζίου εὑρίσκομεν, ἐὰν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεών του.

4) Οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου ἔχει ἐμβαδὸν 17000 τμ. τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ εἶναι 400 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

5) Ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου ἐπωλήθη ἀντὶ 9720 δρ. πρὸς 60 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον. Γνωρίζοντες, ὅτι αἱ δύο παράλληλοι βάσεις εἶναι 125 μετρ. καὶ 45 μ. ἡ ἄλλη, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

6) Αὐλὴ ἔχουσα τραπεζίου σχῆμα, ἔχει ἐμβαδὸν 962,85 τ. μέτρα· ἡ μεγαλυτέρα βάσις αὐτοῦ εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας, ἥτις εἶναι 30 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου τούτου.

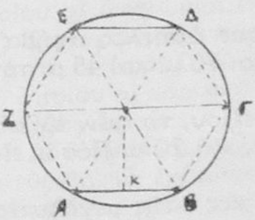
§ 140. **Ἐμβαδὸν πολυγώνου.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ



σχ. 123.

ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου, ἔστω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 123), διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα καὶ τετράπλευρα τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδά. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τούτων δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

§ 141. Ἐὰν τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ διαιροῦμεν δι᾽ εὐθειῶν, ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰς κορυφάς του, εἰς τρίγωνα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Οὕτω, τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 124) διαιρεῖται εἰς ἓξ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας πλευράς. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνός, ἔστω τοῦ ΑΟΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{ΑΒ.ΟΚ}{2}$ (§ 129)· τοῦτο ἐξαπλασιάζομεν καὶ ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, δηλ.



σχ. 124.

$$ΑΒΓΔΕΖ = \frac{6.ΑΒ.ΟΚ}{2}.$$

Ἀλλὰ 6.ΑΒ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, ΟΚ δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ· ἐμβ. καν. πολυγ $= \frac{\text{περίμ.} \times \text{ἀπόστ.}}{2}$ ὅθεν:

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι 2,5 μέτρ. ἡ δὲ πλευρά του 4 μέτρ. ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι 4×5 ἤτοι 20 μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κανον. πενταγώνου εἶναι 20×2,52/2 ἤτοι 25 τετρ. μέτρα.

Ἀσκήσεις. 1) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 22 μ. καὶ 45,5 μέτρ. Ἐὰν ἀγοράσωμεν τοῦτο πρὸς 65 δρ. τὸ τετραγ. μέτρον, πόσον θὰ πληρώσωμεν;

2) Κῆπος ἔχει σχῆμα κανονικοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 5 μέτρων καὶ ἀπόστημα 3,60 μέτρα· ἐὰν θέλωμεν νὰ περιφράξωμεν αὐτὸν διὰ πασσάλων θέτοντες ἕκαστον πάσσαλον κατόπιν τοῦ ἄλλου εἰς ἀπόστασιν 2,50 μ., πόσοι πάσσαλοι χρειάζονται; ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ πόσα δένδρα θὰ φυτεύσωμεν, ἐὰν εἰς ἐπιφάνειαν ἑκάστου τετραγ. μέτρου φυτεύσωμεν ἓν δένδρον.

3) Ἠγόρασέ τις ἀγρὸν ἔχοντα σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 105 μέτρ. ἡ δὲ ἄλλη 67 καὶ τὸ ὕψος 54,5

μετρ. Πόσον θὰ πληρώσῃ, ἐὰν τὸ τετραγ. μέτρον πωλῆται πρὸς 85 λεπτά;

4) Διὰ τὴν πλακόστρωσιν αὐλῆς ἐχούσης σχῆμα ῥόμβου ἐχρησιμοποιήθησαν πλάκες, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶχεν ἐμβαδὸν 0,12 τετρ. μ. Νὰ εὑρεθῇ πόσαι πλάκες ἐχρειάσθησαν, ἐὰν αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου εἶναι ἡ μὲν 6 μέτρα ἡ δὲ ἄλλη 3,20.

5) Δωμάτιον μήκους 4,20 μέτρ. καὶ πλάτους 3,75 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 1,60 καὶ πλάτος 0,15 μετρ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται;

6) Ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου μήκους 125 μέτρα, πλάτους δὲ 20 μ., ἀνταλλάσσεται μὲ λειβάδιον σχήματος τριγωνικοῦ καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ μὲ τὸν ἀγρόν. Ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος μὲ τὴν βάσιν τοῦ ἀγροῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀξία τοῦ ἀγροῦ πρὸς 2,30 δρ. τὸ τετραγ. μέτρον.

Β΄ Μέτρησις κύκλου.

Α΄. Μέτρησις περιφερείας κύκλου.

§ 142. Κύκλος τις κατασκευάζεται, ἐὰν δοθῇ ἡ ἀκτὶς ἢ ἡ διάμετρος αὐτοῦ· ἑπομένως τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος του ἢ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ. Ἐὰν θέλωμεν ν᾿ ἀποφύγωμεν τὴν δυσκολίαν τῆς μετρήσεως μιᾶς περιφερείας δι᾿ εὐθείας πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Περιβάλλομεν τὴν περιφέρειαν κύκλου τινὸς (ἢ κυλίνδρου) διὰ χαρτίνης ταινίας ἢ νήματος μόνον ἅπαξ, ἔπειτα θέτομεν τὴν ταινίαν ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας καὶ μετροῦμεν ταύτην· ἐὰν τὸ εὑρεθὲν μῆκος τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 3,14...... Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δηλοῖ ποσάκις ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου αὐτοῦ.

Ἐὰν τὴν διαίρεσιν (μέτρησιν) ταύτην ἐπαναλάβωμεν εἰς οἱονδήποτε κύκλον, θὰ εὕρωμεν πάντοτε πηλίκον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3,14...... Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι :

τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὅλους τοὺς κύκλους.

Τὸ πηλίκον τοῦτο 3,14...... εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος π.

§ 143. Ἐὰν διὰ Μ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς καὶ διὰ α τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, ὅτε ἡ διάμετρός του παρίσταται διὰ 2α, ἔχομεν $M:2\alpha=\pi$ ἢ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως $M=2\alpha\pi$.

Ὅθεν: τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14.....

§ 144. **Ἐφαρμογή.** 1) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος περιφερείας ἐχούσης ἀκτῖνα 4 μ. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $2\times4\times3{,}14$· ἤτοι 25,12 μέτρα.

2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 4,10 μ. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τοῦ Μ διὰ τοῦ 2α δίδει πηλίκον π, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $M:\pi=2\alpha$, ἤτοι:

ἡ διάμετρος κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του διαιρεθῇ διὰ τοῦ 3,14.

ὥστε ἔχομεν ὅτι, ἡ διάμετρος εἶναι $4{,}10:3{,}14=1{,}30$ μ., ἑπομένως ἡ ἀκτὶς 0,65 μ.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 60° ἀνήκοντος εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 4 μέτρων. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $2\pi\times4$ ἤτοι 25,12 μ ἀντιστοιχεῖ δὲ εἰς 360°.

Οὕτως ἔχομεν τόξον 360° ἔχει μῆκος 25,12μ.

» 1° » » $\frac{25{,}12}{360}$

» 60° » » $\frac{25{,}12}{360}\times60$ ἤτοι 4,186 μ.

Ἀσκήσεις. 145. Τροχὸς ἔχει ἀκτῖνα 0,5 μετρ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

2) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τροχοῦ τινος εἶναι 2,57 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ;

3) Ἡ περιφέρεια ἡμισφαιρίου τῆς γῆς εἶναι 40.000.000 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ πόση ἡ διάμετρος τῆς γῆς;

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 36° ἀνήκοντος εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 1 μ. (Απ. 0,628).

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 30°, ἐὰν ἡ περιφέρεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, ἔχῃ ἀκτῖνα 2 μ.

6) Ἡ περιφέρεια κυκλικῆς πλατείας ἔχει μῆκος 25,30 μέτρου. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος τῆς πλατείας;

7) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου, ὅστις ἔχει διάμετρον 1,75 μετρα;

8) Οἱ τροχοὶ διτρόχου ἁμάξης ἔχουσιν ἀκτῖνα 0,65 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διέτρεξεν ἡ ἅμαξα, ἐὰν οἱ τροχοὶ ἔκαμον 150 στροφάς.

9. Ἡ περιφέρεια κυκλικοῦ ἱπποδρόμου ἔχει ἀκτῖνα 20 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ποσάκις ἱππεὺς πρέπει νὰ διατρέξῃ αὐτήν, ἵνα διανύσῃ 1256 μέτρα.

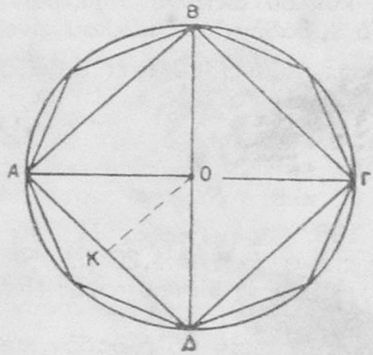
10) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 120°, ἐὰν ἡ περιφέρεια εἰς ἣν ἀνήκει ἔχῃ διάμετρον 10 μέτρων;

Ἐμβαδὸν κύκλου.

§ 146. Ἐὰν εἰς κύκλον ἀκτῖνος α ἐγγράψωμεν κανονικὸν τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 125), τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται (§ 126), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ· ἤτοι: ἐμβαδ. πολυγώνου $=$

$$= \text{περίμετρος}\ \frac{\times \text{ΟΚ}}{2} \qquad (\text{Β}).$$

Ἐὰν ἤδη ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν (ὀκτάγωνον), βλέπομεν ὅτι, ἡ μὲν ἐπιφάνειά του γίνεται μεγαλυτέρα καὶ πλησιάζει πρὸς τὴν τοῦ κύκλου, ἐπίσης ἡ περίμετρος τοῦ ὀκταγώνου πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ἀπόστημα ΟΚ πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



σχ. 125.

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν νὰ ἐγγράφωμεν διαδοχικῶς κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν συνεχῶς διπλασιαζόμενον καὶ ὑπολογίζομεν ἑκάστοτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, θὰ ἔλθῃ προφανῶς στιγμὴ καθ᾽ ἣν τοῦτο θὰ διαφέρῃ ἐλάχιστον (ἀνεπαίσθητον) τοῦ κύκλου, ὡς συνάγεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εὕρωμεν, ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου (Β) ἀντικαταστήσωμεν τὴν μὲν περίμετρον μὲ τὴν περιφέρειαν (2πα) τὸ δὲ ἀπόστημα ΟΚ μὲ τὴν ἀκτῖνα (α), ὅτε ἔχομεν:

$$\text{ἐμβ. κύκλου} = \text{περιφέρεια} \times \frac{\alpha}{2} \text{ ἢ ἐμβ. κύκλου} = 2\pi\alpha \times \frac{\alpha}{2} \qquad (\Gamma)$$

ἤτοι: τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (Γ) ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν τὸν τύπον ἐμβ$=\pi \ldots \alpha^2$ ἤτοι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζομεν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14.

§ 147. **Ἐφαρμογαί.** 1) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 4 μ. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $2\times3{,}14\times4$. τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος 2 καὶ ἔχομεν ἐμβ. κύκλου $=2\times3{,}14\times4\times2=50{,}24$ τετρ. μέτρα.

2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 60° κύκλου ἀκτῖνος 3 μέτρων.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $\pi.\alpha^2=2{,}14\times9=28{,}26$ τ.μ.

ὥστε τομεὺς 360° ἔχει ἐμβαδὸν 28,26 τ.μ.

» 1° » » $\dfrac{28{,}23}{360}$

» 60° » » $\dfrac{28{,}23\times60}{360}$ ἤτοι 4,71 τ. μέτρ.

§ 148. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα 1,20 μ.

2) Ἡ ἀκτὶς δίσκου τινὸς εἶναι 0,12. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δίσκου;

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλ. τομέως 36° κύκλου ἀκτῖνος 1 μέτρου. (ἀπ. 0,314 τ.μ.)

4) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶναι 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

5) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλ. τομέως 38° κύκλου ἀκτῖνος 5 μέτρων. (ἀπ. 8,29 τμ.).

6) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας δίσκου εἶναι 1,88 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

7) Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς μιᾶς περιφερείας, ἥτις ἔχει μῆκος 47,12 μέτρων;

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοκέντρων κύκλων, οἵτινες ἔχουν ἀκτῖνας 6 μ. καὶ 3 μ.

9) Ἐπιπλοποιὸς πρόκειται νὰ κατασκευάσῃ κυκλικὴν τράπεζαν διὰ ὀκτὼ ἄτομα. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τὸ ἀναλογοῦν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου ἀτόμου ἐκανονίσθη 0,65 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ πόση θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς τραπέζης.

Προβλήματα.

1) Οἰκόπεδον τριγωνικοῦ σχήματος πωλεῖται πρὸς 220 δρ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ, γνωρίζοντες, ὅτι τὸ τρίγωνον ἔχει βάσιν 45,60 μ. καὶ ὕψος 15 μ.

2) Θέλομεν νὰ ἐπενδύσωμεν τάπητα σχήματος ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 4,50 μ. καὶ 5,60 μ. Πόσα μέτρα ὑφάσματος θὰ χρειασθοῦν, ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 0,80 μέτρων;

3) Κῆπος τριγωνικὸς ἐπωλήθη πρὸς 54 δρ. τὸ τετραγ. μέτρον· ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι 136 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του γνωρίζοντες, ὅτι ὁ κῆπος ἐπωλήθη ἀντὶ 3672 δραχμῶν.

4) Τροχὸς ποδηλάτου κάμνει 45 στροφὰς εἰς ἕκαστον λεπτὸν τῆς ὥρας· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος, τὸ ὁποῖον θὰ διατρέξῃ εἰς 3 ὥρ. 8′, ἐὰν ἔχῃ ἀκτῖνα 0,72 μ.

5) Ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν πλευρῶν εἶναι τὰ 4/5 τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτὴν πλευρᾶς ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 540 μέτρα, πωλεῖται πρὸς 50 δρ. τὸ τετραγ. μέτρον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον πωλεῖται ὁ ἀγρός.

Σημείωσις. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 150 μ. καὶ 120 μ.

6) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος κανονικοῦ ὀκταγώνου, οὗτινος ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 5,24 μ.

7) Τραπεζίου τινὸς αἱ βάσεις εἶναι 135 μ. καὶ 79 μ., τὸ δὲ ὕψος 40 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν καὶ βάσιν 120 μέτρα.

8) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνειαν 39 τετραγ. μέτρα καὶ βάσιν 8 μέτρα.

9) Ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου ἔχει ἐμβαδὸν 962,85 τετρ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν παραλλήλων αὐτοῦ, ἐὰν τὸ μὲν ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 24,50 μέτρ. μία δὲ βάσις αὐτοῦ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

10) Λειβάδιον ἀκανονίστου σχήματος ἐχωρίσθη εἰς τὰ ἑξῆς σχήματα διὰ νὰ μετρηθῇ: α′) εἰς τραπέζιον μὲ βάσεις 90μ. καὶ 76 μ., ὕψος δὲ 30 μέτρων· β′) εἰς τρίγωνον μὲ βάσιν 90 μ. καὶ ὕψος 49 μέτρων· γ′) ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον 76 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ λειβαδίου εἰς τετρ. μέτρα.

11) Αἴθουσα ἔχουσα μῆκος 6 μ καὶ πλάτος 4,20 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τάπητος τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1,20 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ α΄) πόσα μέτρα θὰ χρειασθῶμεν· β΄) πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ τάπης, ἐὰν πωλῆται πρὸς 240 δραχμ. τὸ μέτρον.

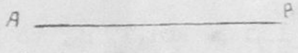
12) Κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει περίμετρον 266 μ. πωλεῖται δὲ πρὸς 450 τὸ τετραγ. μέτρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ κήπου, ἐὰν τὸ μῆκος του εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πλάτους του κατὰ 35 μέτρα.

13) Πρόκειται νὰ πλακοστρωθῇ αὐλὴ ἔχουσα διαστάσεις 6,50 μ. καὶ 5,80 μ. διὰ πλακῶν τετραγωνικῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν 0,18 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαιτουμένη δαπάνη γνωρίζοντες α΄) ὅτι αἱ πλάκες τιμῶνται πρὸς 55 δρ. αἱ ἑκατόν. καὶ β΄) ὅτι ἡ ἐργασία θὰ πληρωθῇ πρὸς 40 δρ. κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

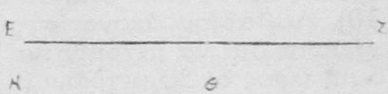
Περὶ ὁμοίων ἐπιπέδων σχημάτων.

§ 149. **Περὶ λόγου καὶ μεγεθῶν ἀναλόγων.** Ἐὰν συγκρίνωμεν δύο ὁμοειδῆ μεγέθη μεταξύ των, δυνάμεθα λαμβάνοντες τὸ ἓν ὡς μονάδα νὰ εὕρωμεν ποσάκις τοῦτο περιέχεται εἰς τὸ ἄλλο· οὕτω, συγκρίνοντες τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 126) παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΓΔ περιέχεται τετράκις εἰς τὴν ΑΒ. Τὸ πηλίκον τοῦτο λέγεται λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ καὶ σημειοῦται $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 4$.



σχ. 126.

Ἐν γένει, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν, πρέπει νὰ μετρήσωμεν ἀμφότερα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς νὰ διαιρέσωμεν μεταξύ των· τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης λέγεται λόγος. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΘ (σχ. 127) μετροῦμεν ταύτας διὰ τοῦ μέτρου καὶ τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς 6 καὶ 3 διαιροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι 2.



σχ. 127.

ἤτοι $\frac{ΕΖ}{ΗΘ} = \frac{6}{3} = 2$. Ὅθεν :

Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν διαιροῦντες ταῦτα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

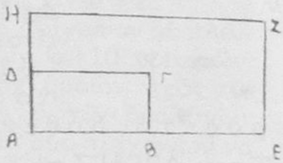
§ 150. Ὁμοίως, ἐὰν εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΙΚ καὶ ΛΜ, μετρηθεῖσαι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος ἔχουν λόγον 2, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι $\frac{ΙΚ}{ΛΜ}=2$, τότε ἔχομεν δύο λόγους ἴσους καὶ γράφομεν $\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{ΙΚ}{ΛΜ}$. Ἡ ἰσότης αὕτη, δηλαδὴ ἡ ἰσότης δύο λόγων καλεῖται ἀναλογία. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΙΚ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΗΘ καὶ ΛΜ, καθ' ὅσον ἐκ τοῦ λόγου $\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=2$ λαμβάνομεν ΕΖ=2.ΗΘ· ὁμοίως ἐκ τοῦ $\frac{ΙΚ}{ΛΜ}=2$ λαμβάνομεν ΙΚ = 2ΛΜ. Οὕτω:

δύο ἢ περισσότερα μεγέθη (εὐθεῖαι) λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἐὰν προκύπτουν ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

§ 151. Κατὰ ταῦτα τρεῖς εὐθεῖαι ἡ α=10 μ., ἡ β=8 μ. καὶ ἡ γ=6μ. λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τρεῖς ἄλλας τὰς δ=5μ, ε=4μ, καὶ ζ=3 μ. Διότι αἱ εὐθεῖαι α, β, γ προκύπτουν ἐκ τῶν δ, ε, ζ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2. Ὁ ἀριθμὸς 2 λέγεται λόγος τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν καὶ σημειοῦμεν τοῦτον ὡς ἑξῆς:

$$\frac{α}{δ}=\frac{β}{ε}=\frac{γ}{ζ}=2.$$

§ 152. **Περὶ ὁμοιότητος.** Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 128)· προεκτείνομεν τὰς διαστάσεις αὐτοῦ καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΗΖ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΕ καὶ τὸ ὕψος ΑΗ εἶναι διπλάσια τῶν τοῦ δοθέντος ΑΒΓΔ. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχυοσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ὡς ὀρθάς, καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· διότι ἡ ΑΕ=2ΑΒ, ἤτοι $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=2$. Ὁμοίως $\frac{ΑΗ}{ΑΔ}=2$. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα λέγονται ὅμοια. Ὅθεν:

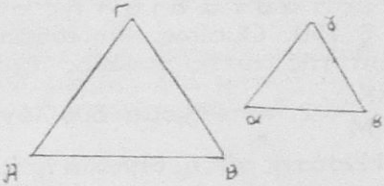


σχ. 128.

Δύο εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἀνὰ μίαν, τὰς δὲ πλευρὰς, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἀναλόγους.

Οὕτως, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ θὰ εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας (Α=α, Β=β, Γ=γ) καὶ τὰς πλευράς, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι ἀναλόγους, ἤτοι

$$\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΓ}{βγ}=\frac{ΓΑ}{γα}\ (σχ.\ 129).$$



σχ. 129.

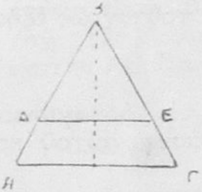
Ὁμόλογοι πλευραὶ εἰς τὰ ὅμοια σχήματα λέγονται αἱ πλευραὶ εἰς ἃς πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι.

§ 153. **Ὅμοια τρίγωνα.** Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω περιπτώσεως, καθ' ἣν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχομεν καὶ τὰς ἑπομένας.

α') Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

β') Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

§ 154. **Πρόβλημα.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓ.



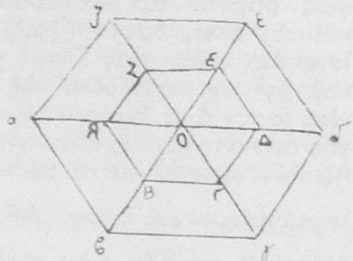
σχ. 130.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν (σχ. 130)· ἔκ τινος σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν παράλληλον τῇ βάσει τὴν ΔΕ. Σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΔΕ ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ. Διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινήν, τὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας, ὡς βεβαιούμεθα μετροῦντες ταύτας ἐπίσης καὶ τὴν Γ=Ε, ἄρα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας, εἶναι ὅμοια.

§ 155. **Πρόβλημα.** Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕΖ.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ δοθὲν πολύγωνον (σχ.131)· λαμβάνομεν σημεῖόν τι (ο) ἐντὸς αὐτοῦ καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ. Ἐὰν διπλασιάσωμεν ταύτας, θὰ ἔχωμεν τὰς οα, οβ, ογ, οδ, οε, οζ, αἵτινες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πρώτας. Διότι αὗται προέκυψαν ἐκ τῶν πρώτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2.

(§ 150)· ἑνοῦντες τὰ ἄκρα α, β, γ... λαμβάνομεν τὸ πολύγωνον αβγδεζ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕΖ. Διότι αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι, ὡς βλέπομεν μετροῦντες ταύτας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, καὶ αἱ πλειραὶ των ἀνάλογοι.


σχ. 131.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

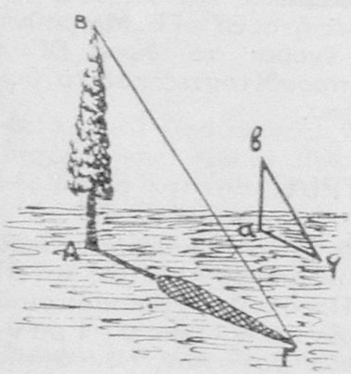
1. Δύο πολύγωνα ὅμοια ἔχουσι τὸ αὐτὸ σχῆμα, χωρὶς νὰ ἔχωσι καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος.
2. Δύο κύκλοι εἶναι πάντοτε σχήματα ὅμοια.
3. Δύο τετράγωνα εἶναι πάντοτε σχήματα ὅμοια.
4. Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι πάντοτε σχήματα ὅμοια.

§ 156. **Α΄. Ἀσκήσεις.** 1) Γράψατε δύο ὅμοια τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν νὰ εἶναι 2.

2) Γράψατε τρίγωνον καὶ κατασκευάσατε ὅμοιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι τὰ 3/4 τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος.

3) Κατασκευάσατε α΄) κανονικὸν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 δακτ· β΄) ὁμόκεντρον καν. ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος.

4) Γράψατε τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι δύο δακτ. Κατασκευάσατε ὅμοιον πρὸς αὐτὸ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τῶν δύο τετραγώνων νὰ εἶναι 1/2.


σχ. 132.

5) Γράψατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 8 γρ., 5 γρ. καὶ 10 γραμμῶν· κατασκευάσατε ὅμοιον πρὸς αὐτό, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων νὰ εἶναι 2.

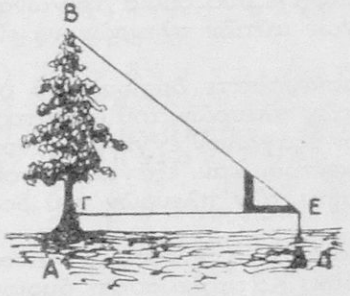
§ 157. **Β΄. Ἐφαρμογαί.** 1) Νὰ μετρηθῇ τὸ ὕψος δένδρου τῇ βοηθείᾳ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒ τὸ δένδρον καὶ ΑΓ ἡ

σκιὰ αὐτοῦ (σχ.132). Ἐμπήγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κατακορύφως ῥάβδον αβ ῥίπτουσαν σκιάν (αγ). Τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια (152), διότι ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ α ἴσας ὡς ὀρθάς, τὰς Γ καὶ γ ἴσας (διότι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΒΓ καὶ βγ σχηματίζουν, ὡς παράλληλοι, μὲ τὰς σκιὰς γωνίας ἴσας) ἄρα ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην· ἐκ τῆς ὁμοιότητος ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, ἤτοι ΑΒ:ΑΓ=αβ:αγ, κατὰ δὲ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν ΑΒ×αγ=ΑΓ×αβ, ἐξ ἧς προκύπτει $ΑΒ=\frac{ΑΓ\times αβ}{αγ}$.

Μετροῦντες ἤδη τὴν σκιὰν ΑΓ= 6μ., τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου αβ=1,20 μ. καὶ τῆς σκιᾶς αὐτῆς αγ=0,50 μ. καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν $ΑΒ=\frac{6\times 1,20}{0,50}=14,40$ μέτρα, τὸ ὕψος τοῦ δένδρου.

2) Ἡ προηγουμένη ἐφαρμογὴ ἁπλούστερον: Λαμβάνομεν γνώμονα ἰσοσκελῆ ὀρθογώνιον Ε σχ. 133 καὶ κρατοῦντες αὐτὸν διὰ τῆς χειρὸς διευθύνομεν τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ ἔλθῃ εἰς εὐθυγραμμίαν μὲ τὴν κορυφὴν Β τοῦ δένδρου, ἐνῷ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος νὰ εἶναι ὁριζοντία. Τὸ τρίγωνον ΒΓΕ καὶ ὁ ὀρθογώνιος ἰσοσκελὴς γνώμων εἶναι τρίγωνα ὅμοια, ἑπομένως καὶ τὸ ΒΓΕ εἶναι ἰσοσκελὲς ἤτοι ΒΓ=ΓΕ. Μετροῦντες τὴν ΓΕ ἔχομεν τὸ ὕψος ΒΓ· εἰς αὐτὸ προσθέτοντες καὶ τὸ ὕψος ΑΓ εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦ δένδρου.



σχ. 133.

ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑ

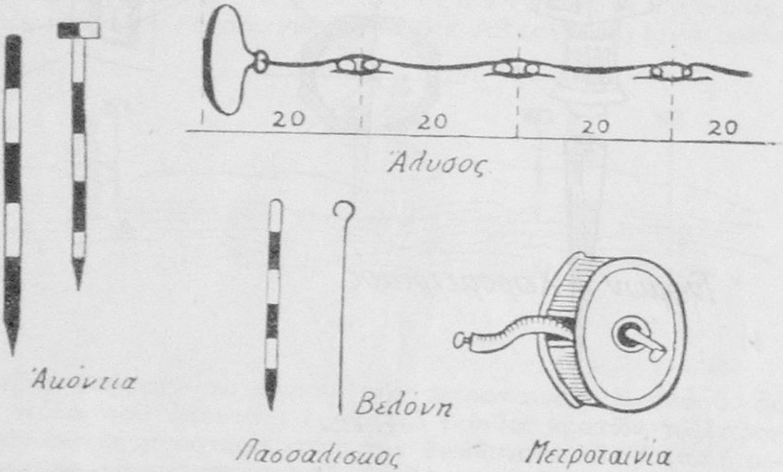
§ 158. **Ἡ Χωρομετρία** σκοπὸν ἔχει τὴν μέτρησιν μικρῶν ἐκτάσεων δηλαδὴ ἀγρῶν, οἰκοπέδων, γαιῶν κλπ. ὡς καὶ τὴν ἀπεικόνισιν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται διάφορα ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται χωρομετρικά.

Τὰ ἁπλούστερα τῶν χωρομετρικῶν ὀργάνων, τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις εἰς ἁπλὰς χωρομετρικὰς ἐργασίας, εἶναι τὰ ἑπόμενα (σχ. 134).

1. Τὰ ἀκόντια. Ταῦτα εἶναι ῥάβδοι ἐκ ξύλου καὶ κυλινδρικαὶ μήκους δύο μέτρων καὶ διαμέτρου τριῶν δακτύλων· εἰς τὸ κάτω μέρος αὐτῶν φέρουσι σιδηρᾶν αἰχμὴν διὰ νὰ ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος· εἰς δὲ τὸ ἄνω ἄκρον φέρουσιν ὀρθογώνιον πινακίδα χρώματος ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ, ἵνα διακρίνωνται ἐξ ἀποστάσεως.

2. Ἡ ἄλυσος. Αὕτη ἔχει μῆκος 10 μέτρων καὶ ἀποτελεῖται συνήθως ἐκ 50 σιδηρῶν στελεχῶν τὰ ὁποῖα συνδέονται διὰ κρίκων.

3. Ἡ μετροταινία. Αὕτη εἶναι ταινία (κορδέλλα)



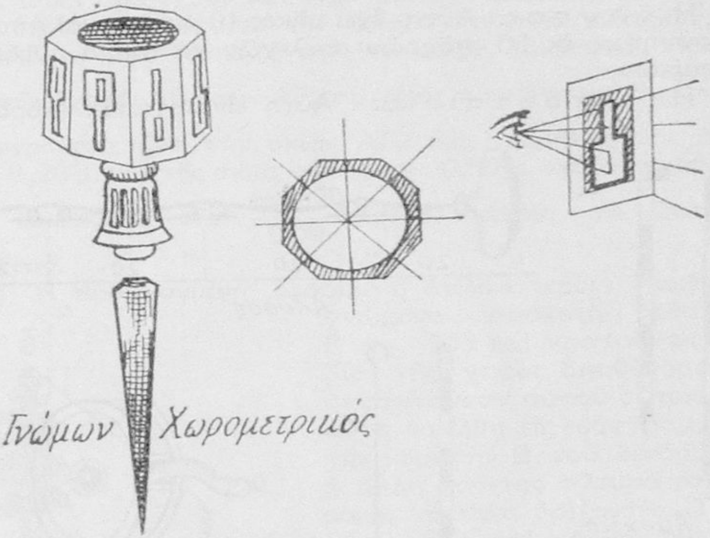
σχ. 134.

ἐκ λευκοῦ ὑφάσματος, ἡ ὁποία περιτυλίσσεται περὶ ἄξονα ἐντὸς θήκης· ἔχει δὲ μῆκος 10 ἢ 20 μέτρων καὶ εἶναι διῃρημένη εἰς μέτρα καὶ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.

4. Οἱ πασσαλίσκοι εἶναι ῥάβδοι μικραὶ κυλινδρικαὶ ἐκ ξύλου ἢ σιδήρου καὶ εἰς τὸ ἄκρον αἰχμηραί· ἔχουσι δὲ μῆκος 30—40 δακτύλων.

5. Ὁ χωρομετρικὸς γνώμων. Τὸ ὄργανον τοῦτο (σχ. 135) χρησιμεύει διὰ νὰ καθορίζωμεν μίαν κάθετον διεύθυνσιν ἐπὶ εὐθεῖαν τινα τοῦ ἐδάφους. Εἶναι δὲ κοῖλον ὀκταγωνικὸν πρῖσμα ἐκ μετάλλου. Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας αὐτοῦ ὑπάρχει σχισμὴ καὶ θυρίς, κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῆς ὁποίας

εἶναι τοποθετημένον νῆμα τεταμένον. Εἶναι δὲ οὕτω διατεθειμένον, ὥστε εἰς ἕκαστον ζεῦγος ἀντικειμένων καὶ παραλλήλων ἑδρῶν, ἡ σχισμὴ μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ νῆμα τῆς θυρίδος τῆς ἔναντι αὐτῆς ἕδρας νὰ ὁρίζωσιν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐ π ί π ε δ ο ν σ κ ο π ε ύ σ ε ω ς.



σχ. 135.

Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουσι τέσσαρα ζεύγη ἑδρῶν, ἔχομεν καὶ 4 σκοπευτικὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν ἀνὰ δύο γωνίαν 45° (σχ. 135). Τὸ ὄργανον φέρει εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ μετάλλινον κάλυμμα εἰς τὸ ὁποῖον προσαρμόζεται ῥάβδος ἀπολήγουσα εἰς σιδηρᾶν αἰχμήν, ἵνα ἐμπήγηται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος.

Χάραξις εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ μέτρησις αὐτῆς.

§ 159. **Πρόβλημα 1.** Ν ὰ χ α ρ α χ θ ῇ ε ὐ θ ε ῖ α μ ε τ α ξ ὺ δ ύ ο σ η μ ε ί ω ν δ ο θ έ ν τ ω ν ἐ π ὶ ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί ο υ ἐ δ ά φ ο υ ς.

Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ ἐδάφους (σχ. 136) ἐμπήγομεν κατακορύφως εἰς ἕκαστον σημεῖον ἓν ἀκόντιον· ἀκολούθως τοποθετούμεθα ὄπισθεν τοῦ ἀκοντίου Α καὶ σκοπεύομεν (ἐφαπτομένως) κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ· ὁδηγοῦμεν δὲ τὸν βοηθὸν (διὰ κινήσεων τῆς χειρός μας δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ) νὰ τοποθετήσῃ τρίτον ἀκόντιον ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ οὕτως, ὥστε τοῦτο νὰ ἀποκρύπτῃ τὸ Β. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τοποθετοῦμεν καὶ τέταρτον ἀκόντιον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοποθετοῦντες ὅσα ἀκόντια νομίζομεν ὅτι διευκολύνουν τὴν ἐργασίαν μας. Οὕτως ἔχομεν διάφορα σημεῖα τῆς ΑΒ, ἤτοι ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν κεχαραγμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

§ 160. **Πρόβλημα 2.** Νὰ μετρηθῇ εὐθεῖα κεχαραγμένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.

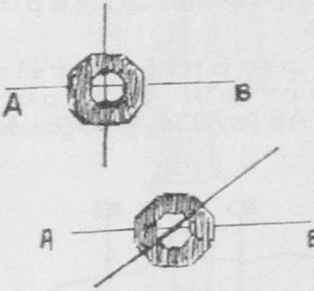
Πρὸς μέτρησιν κεχαραγμένης εὐθείας ΑΒ (σχ. 136) ἐργαζόμεθα

σχ. 136.

ὡς ἑξῆς: Θέτομεν τὸ ἄκρον τῆς μετροταινίας ἢ ἁλύσου εἰς τὸν πόδα τοῦ ἀκοντίου Α, ἐνῷ ὁ βοηθὸς κρατῶν τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς προχωρεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ. Ὅταν ἡ μετροταινία εἶναι τεταμένη, ὁ βοηθὸς τοποθετεῖ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς πασσαλίσκον ἢ βελόνην. Ἀκολούθως προχωροῦμεν, ἡγουμένου τοῦ βοηθοῦ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν ἐμπηχθεῖσαν βελόνην. Θέτομεν εἰς τὸν πόδα αὐτῆς τὴν ἀρχὴν τῆς μετροταινίας, ἐνῷ ὁ βοηθὸς προχωρεῖ καὶ τείνων τὴν ταινίαν ἢ τὴν ἅλυσον τοποθετεῖ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς δευτέραν βελόνην ἢ πασσαλίσκον. Εἶτα ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην βελόνην καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὴν δευτέραν, εἰς τὸν πόδα τῆς ὁποίας θέτομεν τὴν ἀρχὴν τῆς μετροταινίας καὶ οὕτω προχωροῦμεν, μέχρις ὅτου μετρήσωμεν τὴν κεχαραγμένην εὐθεῖαν ΑΒ.

Χάραξις καθέτων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν διὰ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος.

§ 161. **Πρόβλημα 3.** Ἐκ σημείου ληφθέντος ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.



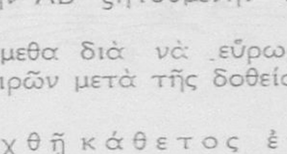
σχ. 137.

Πρὸς τοῦτο στερεοῦμεν κατακορύφως τὸν χωρομ. γνώμονα εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον. Εἶτα περιστρέφομεν αὐτόν, μέχρις ὅτου ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων διέλθει διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας. Ἀκολούθως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου τοποθετοῦμεν ἀκόντια. Οἱ πόδες τῶν ἀκοντίων τούτων καὶ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος ὁρίζουσι τὴν ἐπὶ τὴν ΑΒ ζητουμένην κάθετον.

Σημείωσις. Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ νὰ εὕρωμεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν γωνίαν 45 μοιρῶν μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ.

§ 162. **Πρόβλημα 4.** Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν ὁριζόντιον εὐθεῖαν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

Ἔστω ΑΒ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κεχαραγμένη εὐθεῖα (σχ.138). Ἐμπήγομεν εἰς τὸ σημεῖον Σ ἀκόντιον, εἶτα τοποθετοῦμεν τὸν χωρομ. γνώμονα ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ. Ἀκολούθως μεταφέρομεν τὸ ὄργανον κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ, μέχρις ὅτου τὸ ἐπὶ τοῦ Σ ἀκόντιον εὑρεθῇ εἰς τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ὁ ποῦς τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος μετὰ τοῦ ποδὸς τοῦ ἀκοντίου Σ ὁρίζουσι τὴν ἐκ τοῦ σημείου Σ ζητουμένην κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.



σχ. 138.

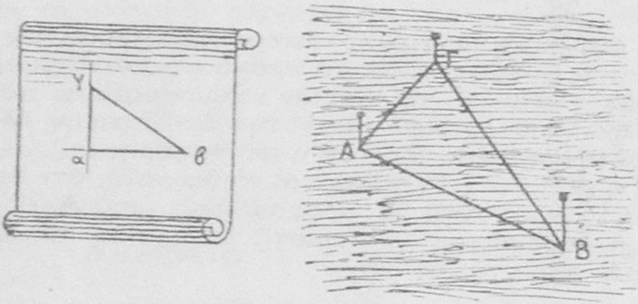
§ 163. **Πρόβλημα 5.** Ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς ὁριζοντίας εὐθείας, νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς κεχαραγμένην εὐθεῖαν.

Φέρομεν ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Σ (σχ. 138) κάθετον (πρόβλημα προηγούμενον) τὴν ΣΚ· εἶταἐκ τοῦ Σ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΣ τὴν ΣΓ (προβλημ. 3), ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων ὑπὸ κλίμακα.

§ 164. Διὰ ν'ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ χάρτου ἐπίπεδον σχῆμα, ἔστω γήπεδον ἔχον σχῆμα τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 139) εἶναι ἀνάγκη νὰ σμικρύνωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀπεικόνισις τούτου ἐπὶ τοῦ χάρτου. Προσέτι πρέπει τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχέδιον (τὸ σχεδιάγραμμα) αβγ νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον τριγωνικὸν γήπεδον ΑΒΓ, δηλαδὴ πρέπει τὸ γήπεδον καὶ τὸ σχεδιάγραμμά του νὰ ἔχωσιν ἴσας γωνίας καὶ πλευρὰς ἀναλόγους.

§ 165. Ἵνα τοῦτο κατορθώσωμεν, ἀρκεῖ νὰ διατηρήσωμεν



σχ. 139.

ἐπὶ τοῦ σχεδιαγράμματος τὰς γωνίας Α, Β, Γ τοῦ τριγωνικοῦ γηπέδου καὶ νὰ σμικρύνωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν.

Ἐὰν δὲ μία πλευρά, ἔστω ἡ αβ τοῦ σχεδιαγράμματος αβγ, εἶναι τὸ 1/100 τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγωνικοῦ γηπέδου, ἐὰν δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς αβ πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι 1/100, λέγομεν ὅτι τὸ σχεδιάγραμμα κατεσκευάσθη ὑ π ὸ κ λ ί μ α κ α 1/100.

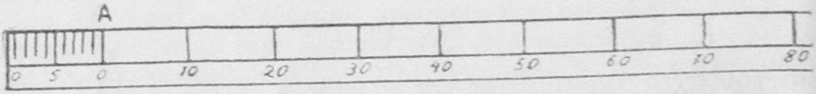
Ὁμοίως, ἐὰν ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχεδίου πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος εἶναι 1/1000, λέγομεν, ὅτι τὸ σχέδιον κατεσκευάσθη ὑ π ὸ κ λ ί μ α κ α 1/1000.

Ὁ λόγος οὗτος λέγεται *ἀριθμητικὴ κλῖμαξ*· ἤτοι: *ἀριθμητικὴ κλῖμαξ σχεδίου τινὸς λέγεται ὁ λόγος γραμμῆς τινος αὐτοῦ πρὸς τὴν ὁμόλογον γραμμὴν τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος.*

§ 166. Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000 κλπ. Ἐν γένει ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ παρίσταται ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ὁ παρονομαστὴς φανερώνει ποσάκις ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους πλευρὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁμολόγου της ἐπὶ τοῦ σχεδιαγράμματος. Πχ. ἐὰν σχέδιον ἢ χάρτης ἐγένετο ὑπὸ κλίμακα 1/10000 ἐννοοῦμεν, ὅτι μῆκος 0,01 μ. ἐπὶ τοῦ σχεδίου παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μῆκος 10000 φορὰς μεγαλύτερον, δηλαδὴ μῆκος (0,01×10000) 100 μέτρων. Ὁμοίως, ἐὰν χάρτης ἢ σχέδιον ἐγένετο ὑπὸ κλίμακα 1/5000 ἐννοοῦμεν ὅτι μῆκος γραμμῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου 1 δακτ. παριστᾷ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γραμμὴν μήκους 5000 δακτύλων ἤτοι 50 μέτρων.

§ 167. **Γραφικὴ κλῖμαξ.** Ἵνα εὐκολώτερον τὰ μήκη σχεδίου τινὸς μεταφέρωμεν εἰς τὰ πραγματικά, μεταχειριζόμεθα τὴν γραφικὴν κλίμακα, τὴν ὁποίαν κατασκευάζουσι πολλάκις εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σχεδίου παρὰ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα· εἶναι δὲ αὐτὴ μία εὐθεῖα διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη.

Οὕτως, ἡ εὐθεῖα (σχ.140) δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι παριστᾷ 90 μέτρα. Τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α, εἰς ὃ σημειοῦται ἡ ὑποδιαίρεσις 0, παριστᾷ δεκάμετρα, τὸ δὲ πρὸς τ' ἀριστερὰ παριστᾷ μέτρα.



σχ. 140.

§ 168. **Χρῆσις τῆς γραφικῆς κλίμακος.** Ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς σχέδιον ἢ χάρτην θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα· ἀκολούθως ἀποσύρομεν τὸν διαβήτην καὶ θέτομεν τὸ ἓν σκέλος αὐτοῦ εἰς τὸ μηδὲν τῆς γραφικῆς κλίμακος. Ἐὰν τὸ ἄλλο σκέλος συμπέσῃ εἰς ἀκεραίαν ὑποδιαίρεσιν, ἔστω εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 50 τῆς κλίμακος, τότε ἡ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀπόστασις εἶναι 50 μέτρα.

Ἐὰν ὅμως τὸ ἄλλο σκέλος συμπέσῃ μεταξὺ τῆς ὑποδιαιρέσεως 50 καὶ 60 ἡ ἀπόστασις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 50 μέτρων. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα μέτρα εἶναι μεγαλυτέρα, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου εἰς τὸ σημεῖον 50 καὶ βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄλλο πίπτει πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ 0. Ἐὰν πέσῃ εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 6, τότε τὸ ἐπὶ πλέον τῶν 50 μέτρων εἶναι 6 μέτρα. Οὕτως, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τῶν δύο σημείων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι 56 μ. (50+6).

§ 169. **Κατασκευὴ σχεδιαγράμματος.** Ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ ΑΒΓ (σελ. 139), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν γωνίαν, ἔστω τὴν Β=30° καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ=290 μ. ΒΓ=360 μ. ΑΓ=180 μ. ὑπὸ κλίμακα 1/10000.

Ἐπειδὴ ἡ κλῖμαξ εἶναι 1/10000 πρέπει, ἑκάστη πλευρά τοῦ σχεδιαγράμματος νὰ εἶναι δεκάκις χιλιάκις μικροτέρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ. Διαιροῦντες λοιπὸν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν διὰ 10000 λαμβάνομεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ σχεδιαγράμματος αβ=0,029 μ., βγ=0,036 καὶ αγ=0,018 μ. Γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖαν αβ μήκους 0,029 μ. καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς β κατασκευάζομεν γωνίαν 30° ἴσην τῇ γωνίᾳ Β τοῦ ἀγροῦ· ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρὰς τῆς γωνίας λαμβάνομεν τμῆμα βγ ἴσον μὲ 0,036 μ. φέρομεν τὴν αγ καὶ τὸ τρίγωνον αβγ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τοῦ ἀγροῦ, εἶναι τὸ σχεδιάγραμμα τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ ΑΒΓ.

§ 170. **Ἀσκήσεις.** 1) Χαράξατε εὐθεῖαν 8 μέτρων ὑπὸ κλίμακα 1/110.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα τριγώνουὑπὸ κλίμακα 1/100, ἐὰν αἱ πλευραί του εἶναι 2μ. 3μ. καὶ 4 μέτρα.

3) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα αὐλῆς ἐχούσης σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ διαστάσεις 8,5 μ. καὶ 6,30 μέτρα ὑπὸ κλίμακα 1/1000.

4) Ἀγροῦ τινος μᾶς δίδεται τὸ σχεδιάγραμμα ὑπὸ κλίμακα 1/1000, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ διαστάσεις 0,15 μ. καὶ 0,08 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις τοῦ ἀγροῦ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

5) Γεωγραφικὸς χάρτης ἔχει κατασκευασθῆ ὑπὸ κλίμακα 1:100000· ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων μετρηθεῖσα ἐπὶ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου εἶναι 6 δακτύλους. Ποία ἡ πραγματικὴ αὐτῶν ἀπόστασις;

6) Ἀπεικονίσατε κύκλον ἀκτῖνος 9 μέτρων ὑπὸ κλίμακα 1:500.

7) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 30 μ.

καὶ 20 μ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα αὐτοῦ ὑπὸ κλίμακα 1:500.

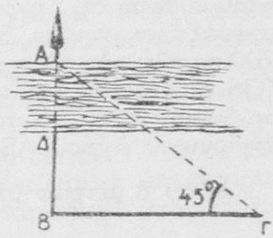
8) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ὑπὸ κλίμακα 1:50, ἐὰν ἡ πλευρά του εἶναι 2 μέτρα.

9) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου,τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 18 μετρ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμά του ὑπὸ κλίμακὰ 1:500.

10) Τὸ σχεδιάγραμμα κήπου τινὸς ὑπὸ κλίμακα 1:1000 ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ πλευρὰς 5,3 δακτ., 4, 2 δακτ. καὶ 7 δακτ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγωνικοῦ κήπου.

11) Τὸ σχεδιάγραμμα κήπου ὑπὸ κλίμακα 1:100 ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου· δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 35 δακτ. καὶ 4,7 δακτ. ἡ δὲ ὑπ'αὐτῶν σχηματισμένη γωνία εἶναι 45 μοιρῶν. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ κήπου καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

§ 171. **Ἐφαρμογή.** Νὰ μετρηθῇ τὸ πλάτος ποταμοῦ τινος ἐξ ἀποστάσεως.



σχ. 141.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θέσιν τινὰ Β (σχ.141) καὶ παρατηροῦμεν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην σημεῖον τι Α. Εἶτα χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν ΒΓ κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΑΒ· ἀκολούθως ἀναζητοῦμεν, ἐπὶ τῆς καθέτου ΒΓ, σημεῖον τι, ὥστε νὰ βλέπωμεν τὸ σημεῖον Α ὑπὸ γωνίαν 45 μοιρῶν. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τότε ἰσοσκελές· διότι Α=Γ=45° ἑπομένως εἶναι ΑΒ=ΒΓ· μετροῦντες τὴν ΒΓ ἔχομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΒ· ἐὰν ἐκ τοῦ μήκους αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὸ μῆκος ΒΔ, ἔχομεν τὸ πλάτος ΑΔ τοῦ ποταμοῦ.

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς ἐπιπεδομετρίας.

Εὐθεῖαι κάθετοι. Ἀσκήσεις γραφικαί.

1) Χαράξατε εὐθεῖαν 20 χιλιοστομέτρων καὶ ὑψώσατε κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

2) Γράψατε εὐθεῖαν 25 χιλιοστομέτρων, λάβετε σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου καταβιβάσατε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

3) Γράψατε εὐθεῖαν 25 χιλιστομέτρων, λάβετε δύο σημεῖα

ἐκτὸς αὐτῆς καὶ εὕρετε ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρίτον σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰ δύο πρῶτα.

4) Γράψατε εὐθεῖαν 30 χιλιοστομέτρων καὶ ἀπὸ σημεῖον ἀπέχον 12 χιλιοστόμετρα ἀπὸ τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας καταβιβάσατε κάθετον εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς.

Γωνίαι. Ἀσκήσεις γραφικαὶ καὶ ἀριθμητικαί.

5) Κατασκευάσατε διὰ τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος γωνίας 30, 15 καὶ 120 μοιρῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι μήκη 20 χιλιοστομέτρων.

6) Κατασκευάσατε γωνίαν 45 καὶ 135 μοιρῶν μὲ πλευρὰς 28 χιλιοστομέτρων.

σχ. 142.

7) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δύο γωνιῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 98° 15′ ἡ δὲ ἄλλη 45° 45′

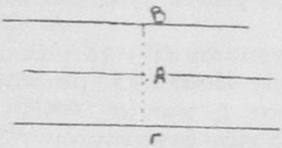
8) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία, ἥτις εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας 60° 40′.

9) Πόση εἶναι ἡ γωνία τῆς ὁποίας τὸ συμπλήρωμα εἶναι 20°.

10) Τὸ ἄθροισμα δύο προσκειμένων γωνιῶν (σχ. 142) εἶναι 146°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία Κ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦσιν τὰς δοθείσας γωνίας;

Εὐθεῖαι παράλληλοι. Ἀσκήσεις γραφικαί.

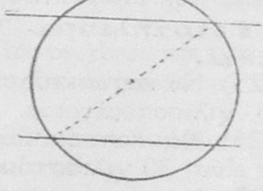
11) Γράψατε εὐθεῖαν 0,03 μετρ. καὶ εἰς ἀπόστασιν 0,012 μετρ. γράψατε παράλληλον πρὸς αὐτήν.



σχ. 143.

12) Γράψατε δύο παραλλήλους ἀπεχούσας ἀλλήλων 2 δακτ. Μεταξὺ αὐτῶν λάβετε σημεῖόν τι Α (σχ. 143). Νὰ φέρετε διὰ τοῦ σημείου Α πρῶτον εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὰς δοθείσας· ἔπειτα δύο ἄλλας εὐθείας, αἵτινες νὰ σχηματίζουν μετὰ τῶν παραλλήλων, ἡ μὲν μία γωνία 45° ἡ δὲ ἄλλη γωνίαν 60°.

13) Γράψατε δύο παραλλήλους ἀπεχούσας ἀλλήλων 0,012. Ἐκ σημείου ἰσάκις ἀπέχοντος αὐτῶν ν φέρετε πλαγία , τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον μέρος νὰ εἶναι 0,0∠4 μετρ.


σχ. 144.

Τρίγωνα. Ἀσκήσεις γραφικαὶ καὶ ἀριθμητικαί.

14) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι 32 καὶ 25 χιλιοστόμετρα, ἡ δὲ ὑπ᾽αὐτῶν περιεχομένη γωνία νὰ εἶναι 45 μοιρῶν.

15) Κατασκευάσατε τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις νὰ εἶναι 26 χιλιοστομέτρων τὸ δὲ ὕψος 36 χιλ/μέτρων.

16) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχῃ μῆκος 20 χιλιοστόμετρα ἡ δὲ ὑποτείνουσα 26 χ/μετρα.

17) Κατασκευάσατε τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν νὰ εἶναι 30 μοιρῶν.

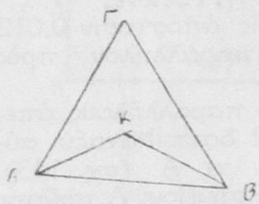
18) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν νὰ εἶναι 75° ἡ δὲ ὑποτείνουσα 24 χιλιοστομέτρων.

19) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου τινὸς εἶναι 126 μοῖραι· τόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

20) Ἡ γωνία τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 50°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς;

21) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὅταν ἡ μία γωνία τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 72 μοιρῶν;

22) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη εἰς τὴν κορυφὴν ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ εἶναι 35 μοιρῶν. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία τῆς βάσεως αὐτοῦ;



σχ. 145.

23) Ἡ μία τῶν γωνιῶν (Γ) τριγώνου τινὸς ΑΒΓ (σχ. 145) εἶναι 45 μοιρῶν. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΑΚΒ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν αὐτοῦ;

24) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 0,80 ἡ δὲ βάσις 0,30 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ;

Τετράπλευρα. Ἀσκήσεις γραφικαὶ καὶ ἀριθμητικαί.

25) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 25 χιλιοστομέτρων.

26) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ εἶναι 30 χιλιοστόμετρα τὸ δὲ ὕψος 0,022 μ.

27) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος 40 χιλιοστομέτρων.

28) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι νὰ ἔχωσι μῆκος 35 καὶ 25 χιλιοστομέτρων.

29) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ῥόμβου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ πλευρὰν 15 μέτρων.

30) Τὸ πλάτος μιᾶς θύρας τῆς αἰθούσης μας εἶναι 1,25 μέτρ. ἡ περίμετρος αὐτῆς εἶναι 6,90 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς θύρας;

31) Ὀρθογώνιον ἔχει περίμετρον 55 μέτρων· τὸ μῆκος του ὑπερβαίνει τὸ πλάτος κατὰ 2,50 μέτρ. Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου;

Περιφέρειαι. Ἀσκήσεις γραφικαὶ καὶ ἀριθμητικαί.

32) Γράψατε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 15 χιλιοστομέτρων καὶ διαιρέσατε ἕκαστον τέταρτον αὐτῆς εἰς τρία ἴσα μέρη.

33) Νὰ κατασκευασθῇ ὀκτάγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 20 χιλιοστομέτρων.

34) Τῇ βοηθείᾳ τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 34 χιλιοστομέτρων, νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον.

35) Γράψατε περιφέρειαν ἀκτῖνος 14 χιλιοστομέτρων, καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας φέρατε ἐφαπτομένην πρὸς αὐτήν.

36) Γράψατε τρεῖς περιφερείας οὕτως, ὥστε ἑκάστη νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν δύο ἄλλων.

37) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου;

38) Περιφέρεια διαιρεῖται εἰς πέντε ἴσα τόξα. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἕκαστον τῶν τόξων;

39) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κεντρικὴ (ἐπίκεντρος) γωνία κανονικοῦ ὀκταγώνου;

40) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶναι 3,6 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

41) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς εἶναι 40 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 18 μοιρῶν;

42) Τόξον κύκλου εἶναι 30 μοιρῶν. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος αὐτοῦ, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἰς ἣν ἀνήκει εἶναι 60 μέτρα;

43) Ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης μῆκος 180 μέτρα λαμβάνομεν τόξον 72 μοιρῶν. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος αὐτοῦ.

44) Ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης μῆκος 6 μέτρ. λαμβάνομεν τόξον μήκους 0,50 μ. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τοῦτο;

45) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶναι 0,60 μετρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 22 μοιρῶν;

46) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶναι 10 μέτρα, ἄλλου δὲ κύκλου ἔχοντος τὸ αὐτὸ κέντρον ἡ ἀκτὶς εἶναι 6 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 30° καὶ εἰς τοὺς δύο κύκλους;

47) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας,ἐπὶ τῆς ὁποίας τόξον 45°′ ἔχει μῆκος 14,13 μέτρ.

48) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου μιᾶς μοίρας, εἰς περιφέρειαν ἔχουσαν μῆκος 54 μέτρων;

Ὅμοια πολύγωνα. Ἀσκήσεις γραφικαί.

49) Κατασκευάσατε κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 20 χιλιοστομέτρων καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ὅμοιον, ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν του νὰ εἶναι 1/2.

50) Κατασκευάσατε δύο τετράγωνα ὅμοια, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν πλευρῶν των εἶναι 3.

51) Κατασκευάσατε πολύγωνον μὲ πέντε πλευράς, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 12 χιλιοστόμετρα· ἔπειτα ὅμοιον πρὸς αὐτὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος πλευρὰ νὰ εἶναι 6 χιλιοστόμετρα.

52) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 30 24 καὶ 26 χιλιοστόμετρα· ἔπειτα κατασκευάσατε ἐντὸς αὐτοῦ τρίγωνον ὅμοιον.

53) Κατασκευάσατε δύο ὅμοια τρίγωνα,εἰς τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι 4.

54) Δύο ὁμοίων τριγώνων ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν εἶναι 3, τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι 3, 4 καὶ 5 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου;

55) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου αἱ πλευραὶ εἶναι 20 μέτρ. καὶ 12 μετρ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα αὐτοῦ ὑπὸ κλίμακα 1:1000.

56) Τὸ σχεδιάγραμμα ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει διαστάσεις 0,45 μ. καὶ 0,28 μ. Τοῦτο ἐγένετο ὑπὸ κλίμακα 1:20000. Ποῖαι εἶναι αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις τοῦ ἀγροῦ;

Ἐμβαδὰ ἐπιπέδων σχημάτων. Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.

57) Νὰ εὑρεθῇ τὸν ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 48 μέτρ. καὶ ὕψος 13 μέτρα.

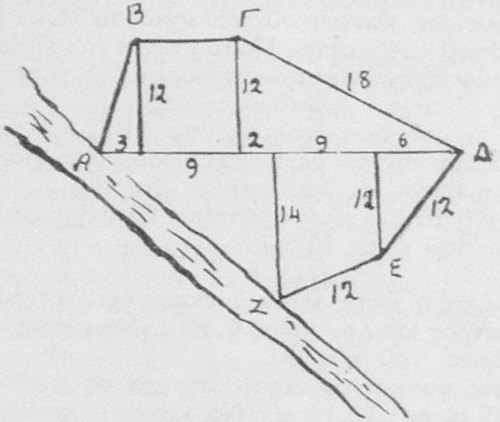
58) Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 336 τετρ. μέτρα, ἡ βάσις του 28 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ. (ἀσκ. 4 § 125).

59) Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει ἐμβαδὸν 562,48 τετρ. μέτρα καὶ ὕψος 15,80 μέτρ. Πόση εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ. (ἄσκησ. 6 § 125).

60) Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις 25 μετρ. καὶ 12 μέτρα;

61) Ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν 12 μέτρα ἔχει τὴν ἰδίαν περίμετρον (60 μ.) μὲ τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα διαφέρουσι τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τούτων σχημάτων.

62) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὸ περιφέρειαι ἔχουσιν ἀκτῖνας ἡ μία 15 μ. καὶ ἡ ἄλλη 12 μέτρ.



σχ. 146.

63) Πόσαι πλάκες χρειάζονται διὰ τὴν πλακόστρωσιν αὐλῆς σχήματος ὀρθογωνίου, ἥτις ἔχει διαστάσεις 20 μέτρ. καὶ 8 μ., ἐὰν ἑκάστη ὀρθογώνιος πλὰξ ἔχει διαστάσεις 0,25 μ. καὶ 0,25 μ;

64) Διὰ νὰ πλακοστρωθῇ διάδρομος διὰ πλακῶν σχήματος ῥόμβου θὰ χρειασθοῦν 700 πλάκες, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει διαγωνίους 0,26 μ. καὶ 0,18 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ πόση θὰ εἶναι ἡ δαπάνη, ἐὰν αἱ πλάκες στοιχίζουν 625 δραχ. ἡ δὲ τοποθέτησις αὐτῶν 60 δραχ. κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον.

65) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἴσαι πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 14,36 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;

66) Δύο τρίγωνα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἡ δὲ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλασία τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου· κατὰ πόσον διαφέρουσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν;

67) Τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 63 τετραγ. μέτρ. καὶ ὕψος τριπλάσιον τῆς βάσεως. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, (ἰδὲ § ἀσκ. 8 § 132).

68) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει ὕψος 15 μέτρ. καὶ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 20 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

69) Οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου ἔχει ἐμβαδὸν 875 τετραγ. μ. ἡ μικροτέρα βάσις αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μεγαλυτέρας ἥτις εἶναι 50 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου. (ἰδὲ ἄσκησ. 3. § 139).

70) Ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 16 μέτρα τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ 2,45 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

71) Κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν 3,5 μ. καὶ ἀπόστημα 1,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

72) Ἀγρὸς ἔχει σχῆμα πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 146)· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μὲ τὰς σημειουμένας διαστάσεις τῶν διαφόρων σχημάτων εἰς τὰς ὁποίας διηρέθη.

73) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν πλατείας, ἥτις ἔχει σχῆμα κύκλου, ἐὰν ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι 15,5 μ.

74) Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, ὅστις ἔχει ἐπιφάνειαν 1 τμ.

75) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς 6,50 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

76) Αἴθουσα κινηματογράφου σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει διαστάσεις 25 μ. καὶ 16 μέτρ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχεδιάγραμμα αὐτῆς ὑπὸ κλίμακα 1:50.

77) Κυκλικῆς πλατείας ἔχομεν τὸ σχεδιάγραμμα ὑπὸ κλίμακα 1:1000· ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ σχεδιαγράμματος εἶναι 0,01μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλατείας.

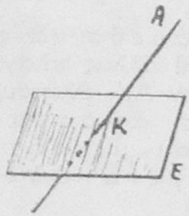
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

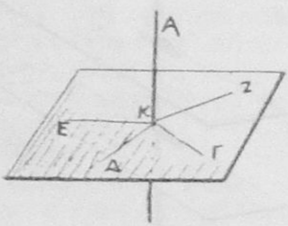
Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Στερεομετρίαν.

§ 172. **Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.** Τρεῖς θέσεις δύναται νὰ λάβῃ μία εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον· α΄) νὰ κῆται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, δηλαδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας νὰ εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου· β΄) νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἤτοι ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον νὰ μὴ συναντῶνται ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι καὶ γ΄) νὰ ἔχῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε προεκτεινομένη νὰ διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Κ (σχ. 147), ὅτε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον καὶ ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον μετ᾽ αὐτοῦ.



σχ. 147.

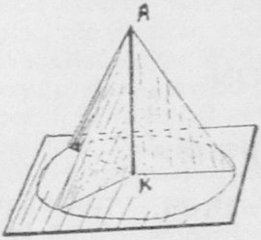
§ 173. **Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.** Ἔστω ὅτι εὐθεῖά τις συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Ε (σχ. 148) εἴς τι σημεῖον Κ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Κ, ἔστω τὰς ΚΔ, ΚΓ, ΚΖ, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε· τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς καθέτου ἐπ᾽ αὐτὸ λέγεται ποὺς τῆς καθέτου. Ὅθεν :



σχ. 148.

εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν εἶναι κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχονται διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.

Ἐὰν λάβωμεν ὀρθογώνιον γνώμονα (σχ. 149) καὶ περιστρέψωμεν αὐτὸν περὶ μίαν κάθετον αὐτοῦ πλευράν, ἔστω τὴν ΑΚ, ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ἐν τῇ περιστροφῇ της ὁρίζει ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ.



σχ. 149.

Ἡ κάθετος ΑΚ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐὰν εὐθεῖα τις συναντᾷ ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, λέγεται πλαγία. Εἰς τὸ σχῆμα 149 ἡ ΑΚ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι πλαγία· ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

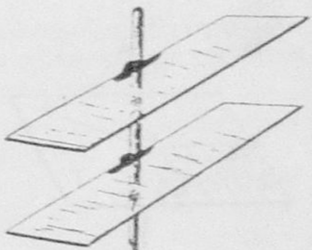
ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου μίαν κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν καὶ ἄλλας πλαγίας καὶ συγκρίνωμεν αὐτὰς πρὸς τὴν κάθετον ΑΚ, βλέπομεν, ὅτι

ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.

Α΄. Ἐπίπεδα παράλληλα.

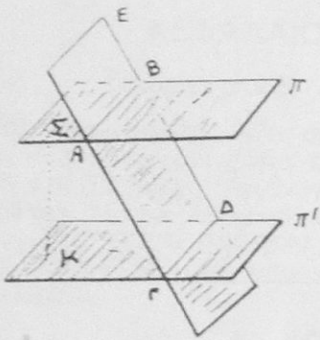
§ 174. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τοιαύτην θέσιν, ὥστε προεκτεινόμενα νὰ μὴ συναντῶνται, λέγονται παράλληλα ἐπίπεδα (σχ. 150). Οἱ ἀπέναντι τοῖχοι δωματίου τινὸς εἶναι ἐπίπεδα παράλληλα· ὁμοίως αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου, κτλ. εἶναι ἐπίπεδα παράλληλα. Αἱ μὴ παράλληλοι ἕδραι τοῦ κύβου τέμνονται κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐξ οὗ συνάγομεν, ὅτι ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.



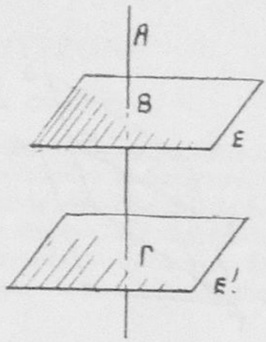
σχ. 150.

§ 175. **Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.** α΄) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα Π καὶ Π΄ (σχ. 151) τέμνωνται ὑπὸ τρίτου Ε, αἱ τομαὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Ὅθεν: αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι παράλληλοι.

β') Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Σ τοῦ ἐπιπέδου Π καταβιβάσωμεν κάθετον ΣΚ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου Π,ἡ κάθετος αὕτη λέγεται ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.Εἶναι δὲ προφανές, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι παντοῦ ἡ αὐτή. Ὅθεν: ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος.



σχ. 151.



σχ. 152,

γ') Λάβωμεν ἐπίπεδον Ε καὶ εὐθεῖαν ΑΓ διαπερῶσαν τοῦτο καὶ κάθετον ἐπ' αὐτό· ἐὰν φαντασθῶμεν τὸ ἐπίπεδον Ε κινούμενον, ὥστε νὰ μένῃ πάντοτε κάθετον τῇ εὐθείᾳ ΑΓ, τότε εἰς ἑκάστην νέαν θέσιν, ἔστω τὴν Ε', εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ε (σχ. 152).

Ὅθεν:

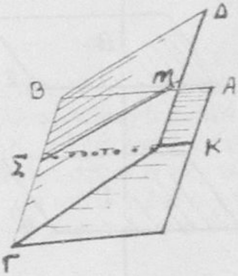
δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.

Β'. Ἐπίπεδα κεκλιμένα καὶ κάθετα.

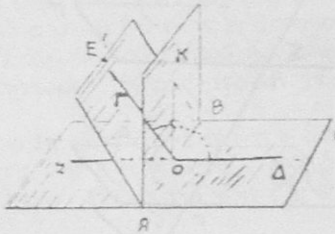
§ 176. Δύο τεμνόμεναι ἕδραι τοῦ κύβου ἀποτελοῦσι σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν δίεδρον γωνίαν τοῦ κύβου. Ὁμοίως τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα,τὰ ὁποῖα τέμνονται καὶ περατοῦνται εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν ΒΓ (σχ. 153) λέγεται δίεδρος γωνία· ὅθεν:

δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν. Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι τὴν δίεδρον λέγονται ἕδραι τῆς διέδρου γωνίας· ἡ δὲ τομὴ ΒΓ τῶν ἑδρῶν λέγεται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας.

§ 177. Ἐὰν ἀπὸ ἓν σημεῖον Σ τῆς ἀκμῆς ΒΓ τῆς διέδρου γωνίας (σχ. 153) φέρωμεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὴν ἀκμήν, ὥστε ἡ μία ΣΚ νὰ κῆται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου Α, ἡ δὲ ἄλλη ΣΜ ἐπὶ τοῦ ἄλλου Δ, σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδος γωνία ΜΣΚ, ἡ ὁποία μετρᾷ τὸ μέγεθος τῆς διέδρου γωνίας ΑΒΓΔ. Ἡ ἐπί-



σχ. 153.



σχ. 154.

πεδος αὐτη γωνία ΜΣΚ λέγεται ἀντίστοιχος γωνία τῆς διέδρου ἢ γωνία κλίσεως τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου γωνίας.

§ 178. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως δύο ἐπιπέδων εἶναι ὀρθὴ ΚΟΔ σχ. 154 τὰ ἐπίπεδα λέγονται κάθετα πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα (ΓΟΔ) τότε τὸ ἓν ἐπίπεδον λέγεται κεκλιμένον πρὸς τὸ ἄλλο.

§ 176. **Ἀσκήσεις** 1) Εὕρετε εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεώς σας ἐπίπεδα κάθετα καὶ παράλληλα.

2) Λάβετε ἐπίπεδον χαρτόνιον καὶ τοποθετήσατε αὐτὸ ἐπὶ τοῦ πίνακος οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι α΄) κάθετον, β΄) παράλληλον καὶ γ΄) κεκλιμένον εἰς τὸν πίνακα.

3) Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν δύο παραλλήλων τοίχων τοῦ δωματίου σας.

4) Πόσας διέδρους γωνίας σχηματίζουν οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου σας.

5) Μετρήσατε μίαν δίεδρον γωνίαν τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας.

6) Τοποθετήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ μολυβδοκόνδυλόν σας οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κάθετον, παράλληλον καὶ τέλος κεκλιμένον ἐπὶ τοῦ πίνακος.

7) Εἰς τὸ σχῆμα 154 εὕρετε α΄) τὰς δύο διέδρους γωνίας ἃς σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄· β΄) τὰς γωνίας κλίσεως αὐτῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν αἱ γωνίαι κλίσεως δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς συμβαίνει εἰς τὸ σχῆμα 154, αἱ δίεδροι λέγονται παραπληρωματικαί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

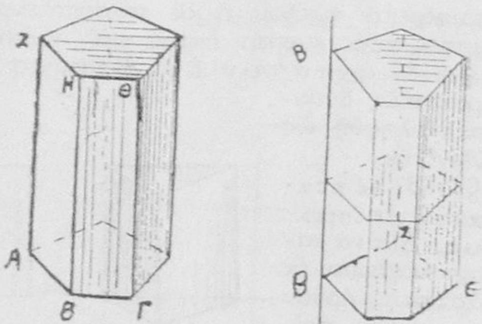
Γεωμετρικὰ στερεὰ σώματα.

§ 180. **Ὁρισμοί.** Τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα περικλείονται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων ἑδρῶν καλοῦνται π ο λ ύ ε δ ρ α. Τὰ πολύεδρα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, εἰς ἃς περατοῦνται, λέγονται τετράεδρα, πεντάεδρα, ἑξάεδρα κλπ.

Ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ. Τὰ ἁπλούστερα τῶν πολυέδρων εἶναι τὰ πρίσματα καὶ αἱ πυραμίδες.

Α΄. Πρίσματα.

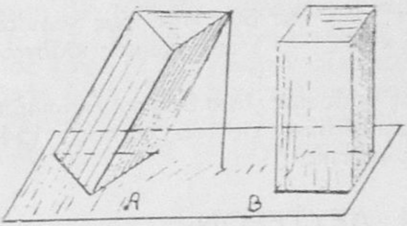
§ 181. Πρίσμα λέγεται τὸ πολύεδρον (σχ. 155), τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (ΑΒΓ...καὶ ΖΗΘ...),αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα. Αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται β ά σ ε ι ς αὐτοῦ ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν λέγεται ὕ ψ ο ς τ ο ῦ π ρ ί σ μ α τ ο ς. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι τοῦ πρίσματος, ὡς αἱ ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, κλπ. λέγονται παράπλευροι ἕδραι. Τὸ σύνολον τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἀ-



σχ. 155.

ποτελεῖ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος.

Σημείωσις α. Τὸ πρίσμα δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, ὅτι γίνεται, ὅταν εὐθύγραμμον σχῆμα ΒΓΔΕΖ (σχ. 155) ἔχον μίαν τῶν κορυφῶν του (Β) ἐπὶ εὐθείας (ΒΒ΄) κινεῖται παραλλήλως ἑαυτῷ. Ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ θέσις τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος εἶναι αἱ βάσεις τοῦ παραγομένου πρίσματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ σχηματίζουν τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρίσματος.



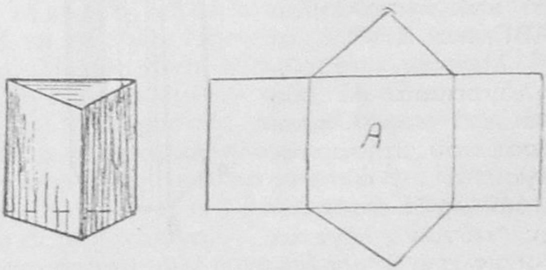
σχ. 156.

§ 182. Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνα ἢ τετράγωνα καὶ γενικῶς πολύγωνα, τὸ πρίσμα λέγεται τριγωνικόν, τετραγωνικὸν καὶ γενικῶς πολυγωνικόν. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας μετὰ τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεως, τὸ πρίσμα λέγεται ὀρθόν, ἄλλως λέγεται πλάγιον (σχ. 156).

Εἰς τὰ ὀρθὰ πρίσματα αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, εἰς δὲ τὰ πλάγια εἶναι παραλληλόγραμμα.

Σημείωσις β. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ὀρθοῦ πρίσματος διπλασιάζεται συνεχῶς, αἱ μὲν περίμετροι τῶν πολυγωνικῶν βάσεων αὐτοῦ πλησιάζουσι διαρκῶς πρὸς περιφέρειαν κύκλου ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος πρὸς κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου. Τοιοῦτον πρίσμα ἐλάχιστον διαφέρῃ τοῦ κυλίνδρου καὶ πρακτικῶς δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κύλινδρος.

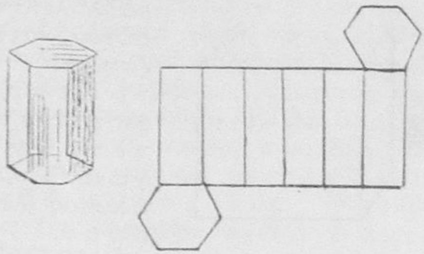
§ 183. **Κατασκευὴ πρίσματος.** Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἐκ χάρτου ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα (σχ. 157), γράφομεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ ἐπὶ φύλλου χάρτου· ἀκολούθως



σχ. 157.

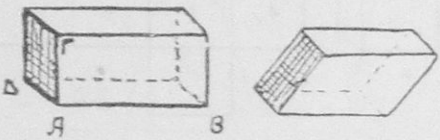
ἀποκόπτομεν τὸ σχῆμα, ὑψοῦμεν τὰ τρίγωνα καθέτως πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Α καὶ κάμπτομεν τὰ παρακείμενα ὀρθογώνια μέχρις ὅτου συναντηθοῦν· οὕτως ἔχομεν τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

Ἐὰν θέλωμεν ἑξαγωνικὸν πρίσμα νὰ κατασκευάσωμεν, γράφομεν ἐπὶ φύλλου χάρτου τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος ὡς δεικνύει τὸ σχέδιον (σχ. 158)· ἀκολούθως ἀποκόπτομεν τὸ σχῆμα τοῦτο καὶ ἐργαζόμεθα καθὼς εἰς τὴν προηγουμένην κατασκευήν.



σχ. 158.

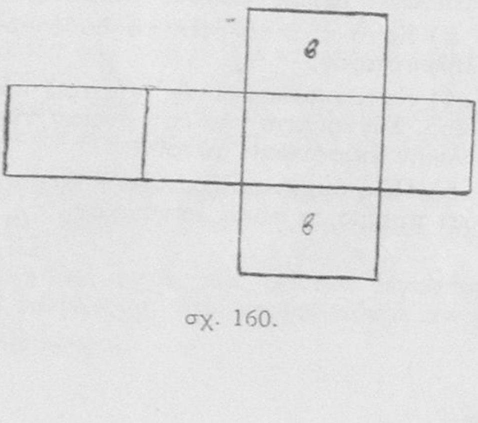
§ 184. **Παραλληλεπίπεδον.** Τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα λέγεται παραλληλεπίπεδον. Τὸ παραλληλεπίπεδον λέγεται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν, ἐὰν ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια· τοιοῦτον εἶναι τὸ σχ. 159. Συνήθως σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουσι τὰ δωμάτια, τὰ κυτία τῶν πυρείων, αἱ πλάκες τοῦ κοινοῦ σάπωνος κτλ.



σχ. 159.

Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται αἱ τρεῖς ἀκμαὶ αὐτοῦ (ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ) αἵτινες συναντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν (Α). Ἐκ τῶν διαστάσεων τούτων ἡ μία (ΑΒ) λέγεται μῆκος, ἡ ἄλλη (ΑΔ) πλάτος ἢ βάθος καὶ ἡ τρίτη (ΑΓ) ὕψος.

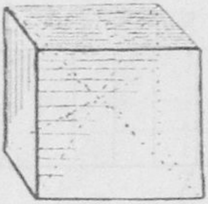
§ 185. **Κατασκευὴ παραλληλεπιπέδου.** Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, γράφομεν τὴν πα-



σχ. 160.

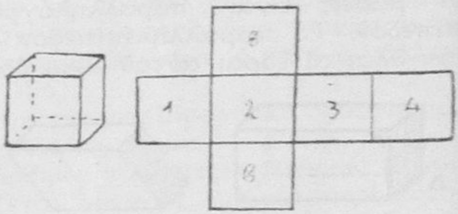
ράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ ἐπὶ φύλλου χάρτου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 160. Ἀκολούθως ἀποκόπτομεν αὐτὸ καὶ ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ πρίσματος.

§ 186. **Κύβος**. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐὰν ἔχῃ τὰς ἕδρας αὐτοῦ τετράγωνα, λέγεται κ ύ β ο ς (σχ. 161)· ὥστε, κ ύ β ο ς λ έ γ ε τ α ι τ ὸ π α ρ α λ λ η λ ε π ί π ε δ ο ν τ ο ῦ ὁ π ο ί ο υ π ᾶ σ α ι α ἱ ἕ δ ρ α ι ε ἶ ν α ι τ ε τ ρ ά γ ω ν α. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον εἶναι σχῆμα κανονικόν, διὰ τοῦτο ὁ κύβος λέγεται κ α ν ο ν ι κ ὸ ν ἑ ξ ά ε δ ρ ο ν.



σχ. 161.

§ 187. **Κατασκευὴ κύβου.** Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύβον, γράφομεν ἐπὶ φύλλου χάρτου ἓξ τετράγωνα ἴσα, ὥστε νὰ σχηματίζεται σταυρὸς (σχ. 162). Περὶ τὸ κεντρικὸν τετράγωνον (2) ὑψοῦμεν τὰ πέριξ τετράγωνα 1, 2, 4, β, ὥστε νὰ ἵστανται ταῦτα κατακορύφως· κάμπτομεν τὸ τελευταῖον (4) καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν κύβον·



σχ. 162.

§ 183. **Ἀσκήσεις.**

1) Ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι πρίσματα; διατί;

2) Ἐὰν τάμωμεν κύβον δι' ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ, ποίου εἴδους στερεὰ λαμβάνομεν;

3) Κατὰ τί διαφέρουν τὸ ὀρθογώνιον καὶ πλάγιον παραλληλεπίπεδον;

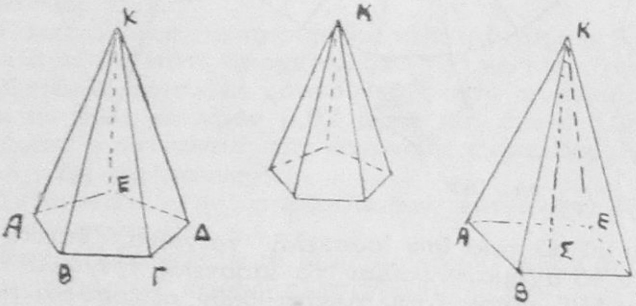
4) Κατασκευάσατε ἐκ χάρτου κύβον ἔχοντα ἀκμὴν 0,06 μέτρ. Συγκρίνατε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μιᾶς ἕδρας του πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

5) Πῶς ἀναγνωρίζομεν α') ὅτι πρίσμα τι εἶναι ὀρθόν, β') ὅτι πρίσμα τι εἶναι κανονικόν.

Β΄. Πυραμίδες.

§ 189. Τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα παριστῶσι τὰ σχ.163 λέγονται π υ ρ α μ ί δ ε ς. Ἐξετάζοντας ταῦτα, βλέπομεν, ὅτι ἡ ἕδρα ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζονται εἶναι πολύγωνον (ἑξάγωνον, πεντάγωνον)· αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ὡς βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ κορυφὴν κοινὴν ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου κειμένην. Οὕτω, τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔΕΚ, βάσις εἶναι τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ κτλ. Ἡ κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν λέγεται κ ο ρ υ φ ὴ τ ῆ ς π υ ρ α μ ί δ ο ς. Ἡ πολυγωνικὴ ἕδρα ἡ μὴ περιέχουσα τὴν κορυφὴν λέγεται β ά σ ι ς τ ῆ ς π υ ρ α μ ί δ ο ς. Ὅθεν:

π υ ρ α μ ὶ ς λ έ γ ε τ α ι τ ὸ σ τ ε ρ ε ό ν, τ ο ῦ ὁ π ο ί ο υ



σχ. 163.

μ ί α ἕ δ ρ α λ α μ β α ν ο μ έ ν η ὡ ς β ά σ ι ς ε ἶ ν α ι π ο λ ύ γ ω ν ο ν, α ἱ δ ὲ λ ο ι π α ὶ τ ρ ί γ ω ν α ἔ χ ο ν τ α κ ο ι ν ὴ ν κ ο ρ υ φ ὴ ν ἐ κ τ ὸ ς τ ῆ ς β ά σ ε ω ς κ ε ι μ έ ν η ν.

Ἡ πυραμὶς ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως αὐτῆς λέγεται τ ρ ι γ ω ν ι κ ὴ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ὴ π ε ν τ α γ ω ν ι κ ὴ κτλ.

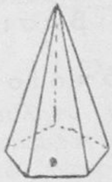
Ὕ ψ ο ς τ ῆ ς π υ ρ α μ ί δ ο ς. λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν. Οὕτως αἱ πυραμίδες τοῦ σχ. 163, ἔχουσι ὕψος τὴν ΚΣ.

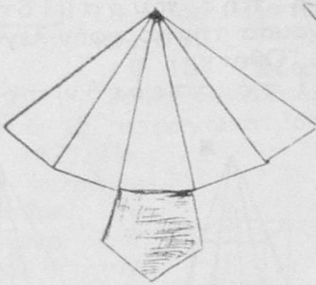
Ὅλαι αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος ἐκτὸς τῆς βάσεως λέγονται παράπλευραι ἕδραι· ἡ δὲ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν αὗται ἀποτελοῦσι, λ έ γ ε τ α ι π α ρ ά π λ ε υ ρ ο ς ἐ π ι φ ά ν ε ι α τ ῆ ς π υ ρ α μ ί δ ο ς.

Κανονική λέγεται ἡ πυραμίς, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δὲ ὕψος της διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς της.

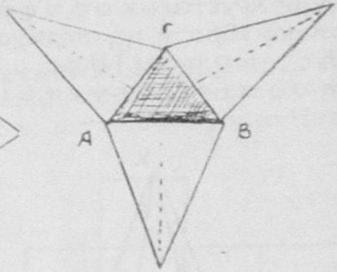
Εἰς τὴν κανονικὴν πυραμίδα αἱ ἀκμαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ἑπομένως αἱ παράπλευροι τριγωνικαὶ ἕδραι αὐτῆς εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ.

§ 190. **Κατασκευὴ πυραμίδος**. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα γράφομεν ἐπὶ φύλλου χάρτου ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 164) καὶ ἐπὶ τῶν





σχ. 165.

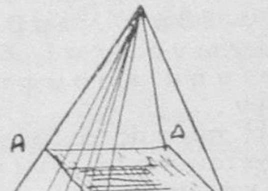


σχ. 164.

πλευρῶν αὐτοῦ τρία ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα· ἔπειτα ἀποκόπτομεν τὸ σχῆμα, ὑψοῦμεν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα περὶ τὸ κεντρικὸν ΑΒΓ, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν αἱ κορυφαί των, ὅτε ἔχομεν τὴν πυραμίδα.

Ὁμοίως πενταγωνικὴν πυραμίδα κατασκευάζομεν βοηθούμενοι ἐκ τοῦ σχήματος 165, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν βάσιν καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος.

§ 191. **Γένεσις πυραμίδος.** Ἐὰν μία εὐθεῖα ΚΑ (σχ. 166) τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἄκρον Κ μένει ἀκίνητον, ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τῶν πλευρῶν εὐθυγράμμου σχήματος, γεννᾶται στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται πυραμίς. Τὸ ἀκίνητον σημεῖον (Κ) τῆς εὐθείας



σχ. 166.

λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος, τὰ δὲ ὑπὸ τῆς κινουμένης εὐθείας ΚΑ γραφόμενα ἐπίπεδα ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ, ΔΚΑ λέγονται ἕδραι τῆς πυραμίδος. Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ ὁποίου ὀλισθαίνει ἡ ΑΚ, εἶναι ἡ βάσις τῆς πυραμίδος.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν τῆς κανονικῆς πυραμίδος συνεχῶς διπλασιάζεται, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς θὰ πλησιάζῃ διαρκῶς πρὸς περιφέρειαν κύκλου, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος πρὸς κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου. Τοιαύτη πυραμὶς ἐλάχιστον θὰ διαφέρῃ τοῦ κώνου, καὶ πρακτικῶς δύναται νὰ ληφθῇ ὡς κῶνος.

§ 192. **Ἀσκήσεις.** 1) Κατασκευάσατε ἐκ χάρτου κανονικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας ἡ βάσις καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι νὰ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ πλευρὰν 4 δακτύλων.

2) Πόσας ἀκμὰς ἔχει μία πενταγωνικὴ πυραμίς; καὶ ποία σχέσις μεταξὺ τῶν ἀκμῶν μιᾶς πυραμίδος καὶ τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της;

3) Πότε τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος πίπτει ἐκτὸς τῆς βάσεώς της, πότε ἐντὸς καὶ πότε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως;

4) Κατασκευάσατε ἐκ χάρτου κανονικὴν πυραμίδα μὲ βάσιν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν 0.02 μετρ. καὶ ἀκμὰς 0,08 μέτρ.

5) Διατί ἡ κατασκευὴ τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι προτιμοτέρα τῆς μὴ κανονικῆς;

6) Σχεδιάσατε τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ἑξαγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος.

7) Κατὰ τὶ διαφέρουν αἱ διαστάσεις τοῦ κύβου ἀπὸ τὰς διαστάσεις τυχόντος παραλληλεπιπέδου;

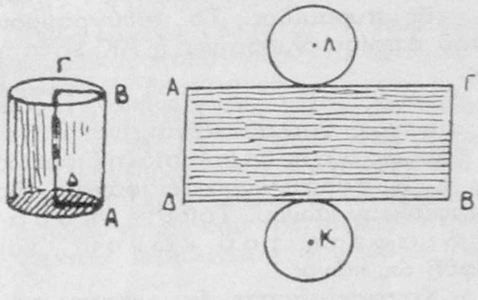
8) Πόσας διέδρους γωνίας ἔχει τὸ παραλληλεπίπεδον;

9) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως πρίσματος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.

Γ΄. Κύλινδρος.

§ 193. Ὁ κύλινδρος, τὸν ὁποῖον ἐξητάσαμεν εἰς τὸ Α΄ βιβλίον (σελ. 6 § 23) εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται, ἐὰν ὀρθογώνιον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἥτις μένει ἀκίνητος) μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ (σχ. 167) θὰ γράψουν κύκλους ἴσους, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀκίνητον πλευρὰν ΔΓ, θὰ γράψῃ καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἀκίνητος κατὰ τὴν περιστροφὴν πλευρὰ ΔΓ λέγεται ὕ ψ ο ς ἢ ἄ ξ ω ν τοῦ κυλίνδρου. Οἱ δύο ἴσοι κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ κύλινδρος λέγονται β ά σ ε ι ς αὐτοῦ.



σχ. 167.

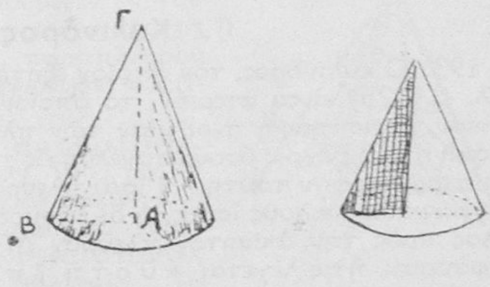
§ 194. **Ἀσκήσεις.** 1) Λάβετε δύο κυλίνδρους ἔχοντας τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἀνίσους κύκλους· περιτυλίξατε μόνον ἅπαξ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ἑκάστου διὰ φύλλου χάρτου, ἀκολούθως ἐκτυλίξατε τὰ φύλλα συγκρίνατε τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν καὶ εὕρετε πόθεν ἐξαρτᾶται τὸ μέγεθος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου τινός.

2) τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχ. 167 κατασκευάσατε κύλινδρον ἐκ χάρτου ἔχοντα ὕψος 10 δακτύλων καὶ ἀκτῖνα βάσεως 2 δακτυλ.

Δ΄. Κῶνος.

§ 195. **Ὁρισμοί.** Τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχ. 168 λέγεται κῶνος· ἐξετάζοντες τοῦτον βλέπομεν, ὅτι ἔχει μίαν κορυφήν, μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, ἥτις εἶναι κύκλος καὶ λέγεται β ά σ ι ς καὶ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται κ υ ρ τ ὴ ἐ π ι φ ά ν ε ι α τοῦ κώνου.

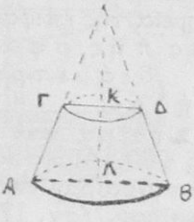
§ 196. **Γένεσις κώνου.** Ὁ κῶνος γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὡς τὸ ΑΒΓ (σχ. 168) περιστραφῇ περὶ μίαν κάθετον αὐτοῦ πλευρὰν ΑΓ, ἥτις μένει ἀκίνητος, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτοῦ θέσιν. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ τοῦ τριγώνου θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ δὲ



σχ. 168.

ἄλλη κάθετος πλευρὰ ΑΒ θὰ γράψῃ κύκλον, ὅστις λέγεται βάσις τοῦ κώνου. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ λέγεται ὕψος ἢ ἄξων τοῦ κώνου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΓ γενέτειρα τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

§ 197. Ἐὰν τὸν ὀρθὸν κῶνον τάμωμεν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, δηλ. καθέτου πρὸς τὸν ἄξονά του, τὸ μέρος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου λέγεται κόλουρος κῶνος (σχ. 169).



σχ. 169.

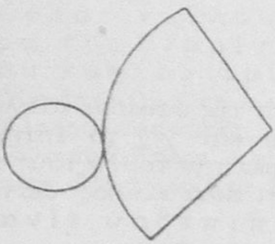
Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι αὐτοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ κέντρα τούτων, λέγεται ὕψος τοῦ κολούρου κώνου. Εἰς τὸ σχ. 169 ὕψος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἡ ΚΛ, βάσεις δὲ αὐτοῦ οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ. Τὸ σχῆμα τοῦ κολούρου κώνου ἔχουσι πολλὰ ἀντικείμενα, ὁ κάδος (γουβᾶς), τὸ ἐπικάλυμμα λάμπας (ἀμπαζούρ), ἀνθοδοχεῖα (γάστρες) κ.τ.λ.

§ 198. **Ἀσκήσεις.** 1) Σχεδιάσατε κῶνον μὲ ἀκτῖνα βάσεως 2 δακτ. καὶ ὕψος 0,04 μ.

2) Γράψατε κῶνον τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος νὰ εἶναι διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του.

3) Ἐὰν τμήσωμεν κῶνον δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, ποῖον σχῆμα θὰ ἔχῃ ἡ τομὴ αὕτη;

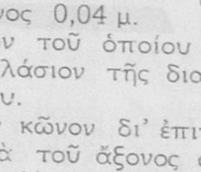
4) Ἐὰν κατασκευάσωμεν κῶνον μὲ ἀκτῖνα βάσεως 2 μέτρων καὶ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του, πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;


σχ. 170.

5) Κατασκευάσατε κῶνον ἐκ χάρτου τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχήματος 170.

Ε΄. Σφαῖρα.

§ 199. Τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχ. 171, λέγεται σφαῖρα. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτῆς καλούμενον κέντρον.



σχ. 171.

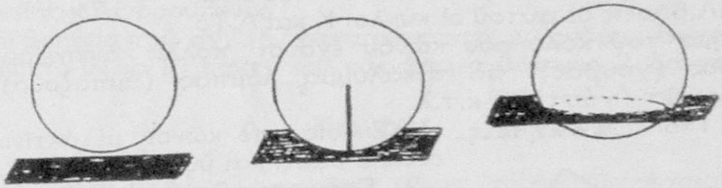
Ἀκτὶς τῆς σφαίρας, λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς.

Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, διὰ τοῦτο **πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι**· ἑπομένως καὶ **πᾶσαι αἱ διάμετροι σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.**

Σφαῖρα καὶ ἐπίπεδον.

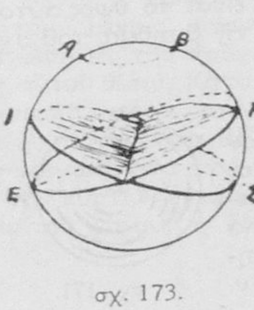
§ 200. Αἱ θέσεις τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἔχῃ ἓν ἐπίπεδον πρὸς μίαν σφαῖραν εἶναι τρεῖς α΄) τὸ ἐπίπεδον νὰ μὴ συναντᾷ τὴν σφαῖραν (σχ. 172), β΄) τὸ ἐπίπεδον νὰ ἐγγίζῃ αὐτὴν



σχ. 172.

εἰς ἓν σημεῖον, ὅτε λέγομεν, ὅτι ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ λέγεται **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** καὶ γ΄) τὸ ἐπίπεδον νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν. Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὴν τομὴν ταύτην τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου, βλέπομεν ὅτι εἶναι κύκλος· ὥστε, **πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.**

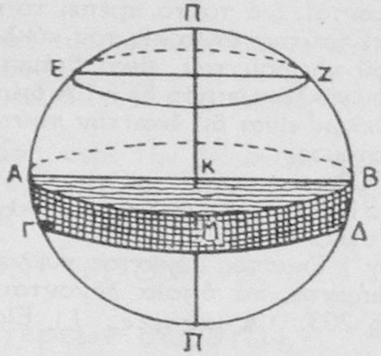
§ 201. **Κύκλοι σφαίρας.** Ὁ κύκλος, ὅστις παράγεται, ὅταν τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, λέγεται **μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.** Εἰς τὸ σχῆμα 173 μέγιστοι κύκλοι εἶναι οἱ ΙΣ καὶ ΕΚ. Ἐὰν τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ὁ παραγόμενος κύκλος ΑΒ λέγεται **μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας** Ὁ μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας εἶναι τόσον μι-



σχ. 173.

κρότερος ὅσον περισσότερον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι, οἱ ὁποῖοι παράγονται, ὅταν τὰ τέμνοντα τὴν σφαῖραν ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα· εἰς τὸ σχ. 174 παράλληλοι κύκλοι εἶναι ὁ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ.



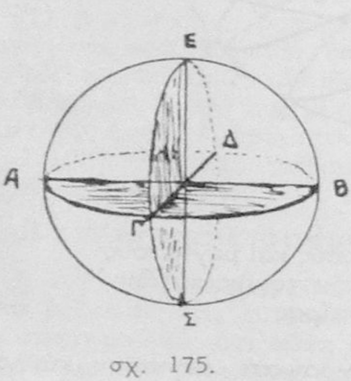
σχ. 174.

Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας, ἐὰν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον κύκλου τῆς σφαίρας, λέγεται *ἄξων τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας*. Οὕτως, εἰς τὸ σχῆμα 174 ἡ διάμετρος ΠΠ, ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒ, λέγεται ἄξων τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας. Τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος τούτου ΠΠ λέγονται *πόλοι τοῦ κύκλου σφαίρας*. Ὅθεν:

πόλοι κύκλου σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

Δύο παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας περικλείουσιν ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, τὸ ὁποῖον λέγεται *σφαιρικὴ ζώνη*.

Οἱ παράλληλοι κύκλοι λέγονται *βάσεις* τῆς σφαιρικῆς ζώνης. Εἰς τὸ σχῆμα 174 βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι οἱ παράλληλοι κύκλοι ΑΒ, ΓΔ, ὕψος δ᾽ αὐτῆς ἡ ἀπόστασις τῶν κύκλων τούτων.



σχ. 175.

§ 202. **Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κύκλου σφαίρας.** α΄) Οἱ μέγιστοι κύκλοι ΑΒΓΔ καὶ ΓΖΔΕ, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας (σχ. 175) ἔχουσι τὸ αὐτὸ κέντρον, δηλαδὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἀκτῖνα δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Ὅθεν: *Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας ἔχει κέν-*

τρον καὶ ἀκτῖνα τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

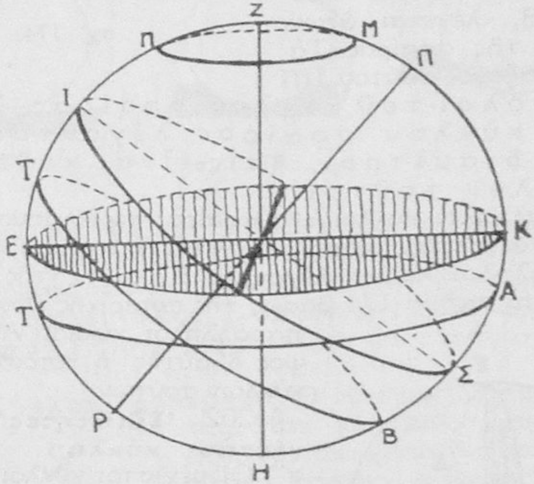
β') Οἱ μέγιστοι κύκλοι ΑΒΓΔ καὶ ΓΖΔΕ (σχ. 175), ἐπειδὴ ἔχουσι κοινὴν μόνον τὴν εὐθεῖαν ΓΑ, κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται, διὰ τοῦτο πρέπει τὸ κοινὸν αὐτῶν κέντρον νὰ κῆται ἐπὶ ταύτης· ἀλλα εἰς τὸν κύκλον ἡ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του, εἶναι διάμετρος καὶ διχοτομεῖ ὡς τοιαύτη τὸν κύκλον· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΑ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῶν δύο κύκλων εἶναι δι' ἕκαστον τούτων διάμετρος ἑπομένως καὶ διχοτόμος.

Ὅθεν:

οἱ μέγιστοι κύκλοι διχοτομοῦσιν ἀλλήλους.

γ') Ἕκαστος μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια.

§ 203. **Ἀσκήσεις.** 1) Εἰς τὴν σφαῖραν (σχ. 176) εὕ-



σχ. 176.

ρετε α') παραλλήλους κύκλους, μικροὺς καὶ μεγίστους·

β') δύο μεγίστους κύκλους καὶ τὴν τομὴν αὐτῶν·

γ') τοὺς πόλους ἑνὸς κύκλου σφαίρας·

δ') μίαν σφαιρικὴν ζώνην.

2) Σχεδιάσατε μίαν σφαῖραν· γράψατε μέγιστον κύκλον

καὶ φέρατε τοὺς παραλλήλους εἰς αὐτόν· ποίαν σχέσιν ἔχει ἡ ἀπόστασις ἑνὸς ἑκάστου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ τὸ μέγεθός των;

3) Σχεδιάσατε σφαῖραν ἀκτῖνος 2 δακτύλων καὶ γράψατε α΄) παραλλήλους κύκλους·

β΄) δύο μεγίστους κύκλους καθέτους πρὸς ἀλλήλους καὶ εὕρετε τοὺς πόλους ἑνὸς ἑκάστου·

γ΄) μίαν σφαιρικὴν ζώνην καὶ δείξατε τὰς βάσεις καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

4) Ἐὰν ἡμικύκλιον περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, τὸ παραγόμενον στερεὸν διατί εἶναι σφαῖρα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Μέτρησις τῶν στερεῶν σωμάτων.

Α΄. Μονὰς ὄγκου.

§ 204. Κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν στερεῶν σωμάτων θ' ἀσχοληθῶμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν μὲ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας αὐτῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ μὲ τὴν μέτρησιν τοῦ χώρου, τὸν ὁποῖον ταῦτα καταλαμβάνουσιν, ἤτοι μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου αὐτῶν.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου σώματός τινος εἶναι ἀναγκαία μία μονὰς ὄγκου, διὰ τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὸν χῶρον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σῶμα. Ἐκ τῆς μετρήσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει ἐκ πόσων μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ὁ μετρούμενος ὄγκος.

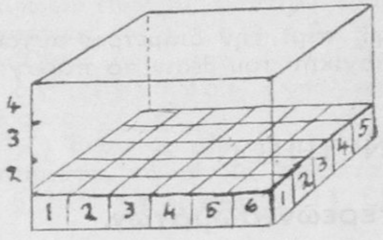
Ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ στερεοῦ, λέγεται ἐπίσης ὄγκος τοῦ σώματος.

Ὡς μονὰς ὄγκου λαμβάνεται τὸ κυβικὸν μέτρον, δηλαδὴ κύβος ἔχων ἀκμὴν ἑνὸς μέτρου, καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἤτοι ἡ κυβικὴ παλάμη=1/1000 κμ, ὁ κυβικὸς δάκτυλος =1/1000 τῆς κυβ. παλάμης, καὶ ἡ κυβικὴ γραμμὴ=1/1000 τοῦ κυβ. δακτύλου.

Β΄. Μέτρησις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

§ 205. α΄) **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων· ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τούτων θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν παραλληλεπιπέδου.

§ 206. 1) **Ὄγκος.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 117), τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι 5,6 καὶ 4 μέτρα, διαιροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς τ. μέτρα. Ἐὰν τὴν βάσιν ταύτην καλύψωμεν διὰ κυβικῶν μέτρων θὰ ἔχωμεν 30 κυβ. μέτρα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν ἓν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θὰ εἶναι 6μ., τὸ πλάτος 5 μ. καὶ τὸ ὕψος 1 μ.



σχ. 177.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον δέχεται τέσσαρα τοιαῦτα διότι ἔχει ὕψος 4 μέτρων, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 30×4 ἤτοι 120 κυβ. μέτρα. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προκύπτει καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 30 ἐπὶ τὸ ὕψος του 4. Ὅθεν:

ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων αὐτῆς, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α, β, γ τὰς διαστάσεις, θὰ ἔχωμεν ὄγκ. παραλλ.$=\alpha\times\beta\times\gamma$. Οὕτως, ὁ ὄγκος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις 5μ. 6μ. 7 μ. εἶναι (5×6×7) 210 κυβ. μέτρα.

§ 207. **Ὄγκος κύβου.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν α μέτρα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον ὅλας αὐτοῦ τὰς ἕδρας τετράγωνα· ἑπομένως καὶ τὰς διαστάσεις του ἴσας. Διὰ τοῦτο ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μίαν διάστασιν αὐτοῦ (α) τρὶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της· ἤτοι ογκ. κυβ.$=\alpha\times\alpha\times\alpha$.

Οὕτως, ἐὰν κύβος ἔχει ἀκμὴν 5 μέτρων ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 5×5×5, ἤτοι 125 κυβ. μέτρα.

§ 208. **Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.** 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 4,25 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις 3μ. 4μ. καὶ 8 μέτρα.

3) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κύβου εἶναι 24 τετρ. μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

4) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν του εἶναι 48 μέτρα;

5) Δεξαμενὴ ἔχουσα σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 8 μ. πλάτος 5,6 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς.

6) Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον 7,95 κμ. τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 6,25 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του.

7) Σωρὸς ξυλείας οἰκοδομησίμου εἶναι τακτοποιημένος εἰς σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 5,4 μ. 3,6 μ. καὶ 1,2 μ. Πόσον τιμᾶται αὕτη, ἐὰν τὸ κυβικὸν μέτρον πωλῆται πρὸς 2560 δραχμάς;

8) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου ἔχοντος ἀκμὴν 5,4 μέτρα. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

9) Κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχον ἐσωτερικὰς διαστάσεις 0,80 μ. 0,40 μ.καὶ 0.25 μ., πρόκειται νὰ πληρωθῇ διὰ πλακῶν σάπωνος τοῦ αὐτοῦ σχήματος. Πόσας πλάκας δύναται νὰ περιλάβῃ, ἐὰν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ διαστάσεις 0,12 μ. 0,06 μ. καὶ 0,05 μέτρου;

§ 209. **Εἰδικὸν βάρος σώματος.** Λαμβάνομεν κύβον ἐκ μολύβδου ἔχοντα ἀκμὴν 3 δακτύλων καὶ ζυγίζομεν αὐτόν· βλέπομεν, ὅτι τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι 307 γραμμάρια. Ἐπίσης ἐὰν λάβωμεν κύβον τῶν αὐτῶν διαστάσεων ἐκ σιδήρου, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ βάρος αὐτοῦ εἶναι 210 γραμμάρια. Λαμβάνομεν ἤδη ὕδωρ ἀπεσταγμένον καὶ θερμοκρασίας 4° Κ ἔχον τὸν αὐτὸν ὄγκον (δηλ. 27 κ. δακτύλους)· τὸ ὕδωρ τοῦτο θὰ ζυγίζῃ 27 γραμμάρια. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ βάρη ταῦτα, βλέπομεν, ὅτι ὁ μὲν ἐκ μολύβδου κύβος εἶναι 11 φορὰς περίπου βαρύτερος τοῦ ὕδατος, ὁ δὲ ἐκ σιδήρου εἶναι 8 σχεδὸν φοράς. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, οἱ ὁποῖοι δεικνύουν πόσας φορὰς εἶναι βαρύτερα τὰ διάφορα σώματα ἀπὸ ἴσον ὄγκον ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°. Κ λέγονται εἰδικὰ βάρη τῶν σωμάτων.

Ὅθεν: εἰδικὸν βάρος σώματός τινος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ σώματος εἰς γραμμάρια πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ.

§ 210. **Σχέσεις ὄγκου βάρους καὶ εἰδικοῦ βάρους ἑνὸς σώματος.** Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Β τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἰς γραμμάρια καὶ διὰ τοῦ Ο τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος, τὸ πηλίκον $\frac{B}{O}$ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον καλοῦντες Ε ἔχομεν

$E=\frac{B}{O}$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν καὶ τὸ Β εἰς γραμμ. ($B=E\times O$).

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ Ο παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, τὸ εἰδικὸν βάρος δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

Συμπέρασμα. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου τοῦ σώματος. Τοῦτο λέγεται πυκνότης τοῦ σώματος. Ὅθεν: τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος ἰσοῦται μὲ τὴν πυκνότητα αὐτοῦ.

§ 211. **Ἀσκήσεις.** 1) Τεμάχιον σιδήρου ζυγίζει 276,54 γραμμ. ἔχει δὲ ὄγκον 35 κυβ. δακτύλους. Ποῖον τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σιδήρου; (ἀπ. 7,9)

2) Τεμάχιον μαρμάρου ἔχει ὄγκον 25 κυβ. δακτ. καὶ ζυγίζει 67,5 γραμμάρια· ποῖον τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μαρμάρου; (ἀπ. 2,7)

3) Τεμάχιον μολύβδου ἔχον ὄγκον 15 κυβ. δακτ. ζυγίζει 171 γραμμάρια. Ποῖον τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μολύβδου; (ἀπ. 11,4)

4) Πόσον ζυγίζει τεμάχιον μολύβδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 15 κυβ. δακτ. γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μολύβδου εἶναι 11,4; (1,71 κιλά)

5) Τεμάχιον ξύλου ζυγίζει 7,5 κιλά· γνωρίζοντες, ὅτι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,5, νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ δοθέντος τεμαχίου.

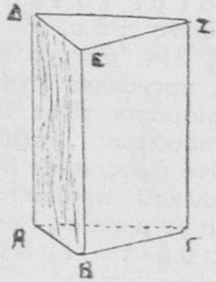
Τὰ 7,5 κιλὰ εἶναι 7500 γραμμ. Ταῦτα διαιροῦμεν διὰ 0,5 καὶ εὑρίσκομεν 15000 κυβ. δακτύλους, ἤτοι 15 κυβ. παλάμας.

6) Δοκὸς ἔχει ὄγκον 0,192 κυβ. μέτρων. Γνωρίζοντες, ὅτι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,5 νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τῆς δοκοῦ.

Τρέπομεν τὰ κυβ. μέτρα εἰς κυβ. δακτύλους, τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 0,5 (διότι $B=O\times E$) καὶ τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν γραμμαρίων τρέπομεν εἰς κιλά· οὕτως ἔχομεν τὸ βάρος τῆς δοκοῦ.

Γ΄. Μέτρησις πρίσματος.

§ 212. **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, ἔστω τοῦ ΑΒΓΔ....Κ (σχ. 178), πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν ταῦτα. Ἐὰν θέλωμεν μόνον τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ, παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια ΑΒΔΕ, ΒΓΕΖ, ΑΓΖΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁποίων δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, ἤτοι ἔχομεν:



σχ. 178.

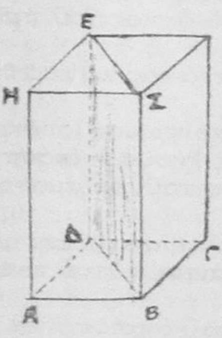
ἐμβ. παρ. ἐπιφ. $=(ΑΒ\times ΕΒ)+(ΒΓ\times ΕΒ)+(ΑΓ\times ΕΒ)$ ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος ΕΒ εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια, ἔχομεν:

Ἐμβ. παρ. ἐπιφ. $= ΕΒ\times(ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ)=ΕΒ\times$περίμετρον.

Ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος (σχ. 178) τὸ ὕψος εἶναι 4 μ., αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως εἶναι 2μ. 3μ. 4μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $4\times(2+3+4)$ ἢ $4\times 9=36$ τετρ. μέτρα.

§ 213. **Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος.** Λαμβάνομεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΔ....Ζ (σχ. 179). Ἐὰν χωρίσωμεν αὐτὸ δι᾽ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν ἀκμῶν ΒΖ, ΔΕ, λαμβάνομεν δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου· ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ ἑνὸς πρίσματος, ἔστω τοῦ ΑΒΔΕΖΗ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.



σχ. 179.

ἤτοι ὄγκ. πρ. ΑΒΔΕΖΗ $= \frac{ΑΒΓΔ\times ΖΒ.}{2}$

Ἐὰν δ᾽ ἐν αὐτῷ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ $\frac{ΑΒΓΑ}{2}$ τὸ ἴσον τοῦ ΑΒΔ, διότι τὸ τρίγωνον ναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ ἔχωμεν :

ὄγκ. πρίσμ.=ΑΒΔ×ΒΖ.

ἔνθα ΑΒΔ εἶναι ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ ΒΖ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ἑπομένως:

ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

§ 214. Ἐὰν τὸ πρίσμα εἶναι πολυγωνικόν, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ὁπότε ὁ ὄγκος τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ δὲ βάσεις των ἀποτελοῦν τὴν βάσιν τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, ἕπεται ὅτι : ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

§ 215. **Ἀσκήσεις.** 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 15,4 τετραγ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 4,5 μέτρα.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κυτίου κιμωλίας, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει διαστάσεις 0,16 μ. καὶ 0,08 μ. τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 0,11 μέτρα.

3) Τοῦ ἰδίου κυτίου μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος.

4) Τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος ἡ μὲν 8 μ. ἡ δὲ ἄλλη 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 4,5 μέτρα.

5) Πρίσμα ἔχει ὕψος 0,52 μετρ. βάσιν δὲ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 0,03 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος.

6) Τοῦ ἰδίου πρίσματος μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια.

7) Ἡ βάσις πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουσιν ἑκάστη μῆκος 1,15 μ. Πόσα κυβ. μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου, ἐὰν ἔχῃ ὕψος 0,90 μέτρα;

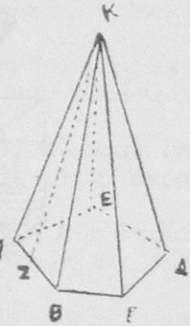
8) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν τετράγωνον, ἐὰν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 3,4720 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 1,40μ.

9) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 11,76 τετρ. μέτρα;

Δ΄. Μέτρησις πυραμίδος.

§ 216. **Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας.** Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

§ 217. **Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος.** Ἐπειδὴ εἰς τὴν κανονικὴν πυραμίδα (σχ. 180) αἱ παράπλευροι αὐτῆς ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἴσα, ἔχοντα βάσεις καὶ ὕψη ἴσα, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τριγώνων ἢ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, διότι εἶναι τόσα τρίγωνα ὅσα καὶ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως. Κατὰ ταῦτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΚΒ εἶναι $\frac{AB \times KZ}{2}$. τοῦτο πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 5, λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παρ. ἐπιφ. τῆς πυραμίδος· ἤτοι ἔχομεν



σχ. 180.

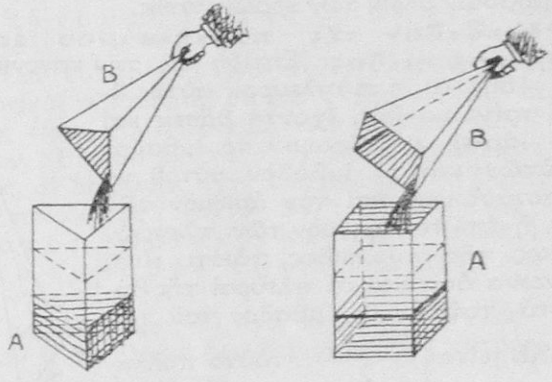
$$\text{ἐμβ. παρ. ἐπιφ. πυραμίδος} = \frac{5 \times AB \times KZ}{2}.$$

Ἀλλ' ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι $5 \times AB$· ὥστε ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. παρ. ἐπιφ. πυραμίδος} = \frac{\text{περίμετρον} \times KZ}{2},$$ ὅθεν:

τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καν. πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων αὐτῆς.

§ 218. **Ὄγκος πυραμίδος.** Ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον πυραμίδος α΄) τριγωνικῆς κατασκευάζομεν δύο δοχεῖα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐξ ὧν τὸ ἓν Α νὰ ἔχῃ σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος (σχ. 181) τὸ δὲ ἄλλο τριγωνικῆς πυραμίδος. Ἐὰν πληρώσωμεν τὸ πρισματικὸν δοχεῖον Α ὕδατος, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ χωρητικότης του εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ Β. Ἐὰν τὰ δοχεῖα ἔχωσι τὸ μὲν σχῆμα τετραγωνικοῦ πρίσματος τὸ δὲ ἄλλο τετραγωνικῆς πυραμίδος, τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ πρισματικοῦ δοχείου εἶναι τριπλασία τῆς χωρητικότητος τοῦ ἔχοντος σχῆμα πυραμίδος. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος. Εἴπομεν ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ



σχ. 181.

ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἑπομένως : ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς

$$\text{ὄγκ. πυραμίδος} = \frac{1}{3} \times υ \times B.$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ἡ βάσις πυραμίδος ἔχῃ ἐμβαδὸν 15 τμ. καὶ ὕψος 4 μετρ., ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{15 \times 4}{3} = 20$ κυβ.μετ.

§ 219. **Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.** 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας τὸ μὲν ὕψος εἶναι 7,25 μ. ἡ δὲ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 2,9 τετρ. μέτρα.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 150 μ., ὄγκον δὲ 36,250 κυβ. μέτρα. (Ἐκ τοῦ ὄγκου $= \frac{1}{3}$ β.υ. λαμβάνομεν $3 \times$ ὄγκ. $= β \times υ$ ἢ $β = \frac{3.\text{ὄγκ.}}{υ}$ ἐκ τοῦ τύπου τούτου νὰ ἐξαχθῇ κανών).

3) Πυραμὶς ἔχει ὕψος 4,62 μέτρα καὶ βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 60 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

4) Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 2,50 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, ἐὰν τὸ ὕψος ἑκάστου τριγώνου, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς, εἶναι 4,20 μ.

5) Πυραμὶς ἔχει ὄγκον 265 κυβ. μέτρα, ἐμβαδὸν δὲ βάσεως 80,4 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος; (ἐκ τοῦ ὄγ.=1/3×βυ ἤτοι υ=3×ὄγκ/β νὰ ἐξαχθῇ κανών).

6) Πυραμὶς ἔχει ὕψος 7,2 μέτρ. καὶ βάσιν τραπέζιον. α΄) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἐὰν τὸ τραπέζιον ἔχει ὕψος 1,25 μ. βάσεις δὲ 3,7 μ. καὶ 2,4 μέτρα. β΄) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

7) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἥτις ἔχει ὕψος 4,6 μ., βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3μ. καὶ 5 μέτρα.

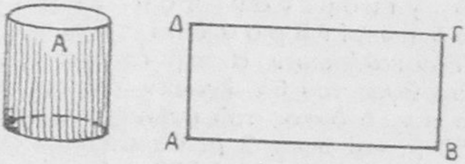
8) Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τρίγωνον ἰσόπλευρον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης, ἐὰν αἱ ἐξ αὐτῆς ἀκμαὶ ἔχωσι μῆκος ἑκάστη 1,40 μ.

9) Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ μὲν τετραγωνικὴ βάσις εἶναι 4,80 τμ. ὁ δὲ ὄγκος της 3,20 κυβ. μέτρα;

10) Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τριγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι 15 τετρ. μέτρα· τὸ ὕψος ἑκάστου τριγώνου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι 3,80 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς τῆς πυραμίδος.

Ε΄. Μέτρησις κυλίνδρου.

§ 220. **Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.** Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου Α (σχ. 182), καλύπτομεν ταύτην διὰ χάρτου ἀκριβῶς· ἀκολούθως ἐκτυλίσσομεν τὸν χάρτην ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν (ΑΒ×ΑΔ) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Τοῦ ὀρθογωνίου τούτου ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ εἶναι ἴσον τὸ ὕψος ΕΚ τοῦ κυλίνδρου· ὅθεν:

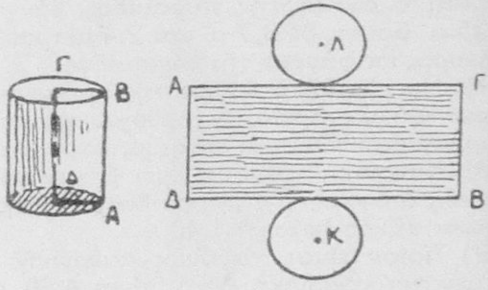


σχ. 182.

τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ ὕψος του.

Σημείωσις. Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι Ε=2πα×υ.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν κύλινδρος ἔχῃ ὕψος 4 μέτρ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,75 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι Ε= 2×π×0,75×4 = 2×3,14 × 0,75×4. = 18,84 τετρ. μέτρα.



σχ. 183.

Ἐὰν θέλωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του (ΑΒΓΔ) νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κύκλων Κ καὶ Λ, οἵτινες εἶναι βάσεις αὐτοῦ.

§ 221 **Ὄγκος κυλίνδρου.** Εἴπομεν προηγουμένως (σημ. § 177), ὅτι κανονικὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀπείρους παραπλεύρους ἕδρας ἐλάχιστον διαφέρει τοῦ κυλίνδρου, συνεπῶς δύναται πρακτικῶς νὰ ληφθῇ ὡς κύλινδρος· ἐπομένως ὁ ὄγκος κυλίνδρου θὰ εὑρεθῇ καθὼς ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ὅθεν: ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, υ τὸ ὕψος του θὰ ἔχωμεν ὄγκον=π×α×α×υ=π×α^2×υ. Οὕτω π.χ. ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,50 μ. καὶ ὕψος 2 μ. θὰ εἶναι=π×0,50×0,50×2 ἢ ὄγκος = 3,14×0,50×0,50×2=1,570 κυβ. μέτρα.

§ 222 **Ἀσκήσεις.** 1. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,40 μ. καὶ ὕψος 2,40 μέτρα.

2. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίν-

δρου, ὅστις ἔχει διάμετρον 1,60 μ. καὶ ὕψος διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του;

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 0,625 τμ. τὸ δὲ ὕψος του 0,25 μέτρα.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει ὕψος 3,60 μετρ. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι τὰ 3/4 τοῦ ὕψους του.

5) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι 12,68 τετρ. μ., ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 1,60 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (ἐκ τοῦ Ε=2., π.α.υ λαμβάνομεν Ε/2πα=υ, νὰ ἐξαχθῇ κανών).

6) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 0,48 μ. τὸ δὲ ὕψος του τριπλάσιον τῆς ἀκτῖνος.

7) Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὄγκον 190,4 κυβ. μ. καὶ ὕψος 3,4 μ. Πόσα τμ. εἶναι ἡ βάσις αὐτῆς; (ἐκ τοῦ ὄκ.=πα^2 υ λαμβάνομεν πα^2= ὄκ./υ, νὰ ἐξαχθῇ κανών).

8) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει διάμετρον 1,20 μ. καὶ ὕψος τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

9) Κυλίνδρου τινὸς ἡ μὲν περιφέρεια τῆς βάσεώς του εἶναι 6, 28 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 1,4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του (ἐκ τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του 6,28=2πα εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα α=6,28/2π καὶ ἀκολούθως τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ).

10) Κύλινδρος ἔχει περιφέρειαν βάσεως 3,14 μέτρα καὶ ὕψος διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του. Πόσα κυβ. μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

ΣΤ΄ Μέτρησις κώνου.

§ 223. **Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.** Εἴδομεν ἀνωτέρω (σημ. § 186) ὅτι πυραμὶς μὲ ἀπείρους παραπλεύρους ἕδρας ἐλάχιστον διαφέρει τοῦ κώνου, συνεπῶς δύναται πρακτικῶς νὰ ληφθῇ ὡς κῶνος. Κατὰ ταῦτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου θὰ εὑρεθῇ καθὼς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος (§ 217), δηλαδὴ πολλαπλασιάζοντες τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ τοῦ λ τὴν πλευράν του ἔχομεν:

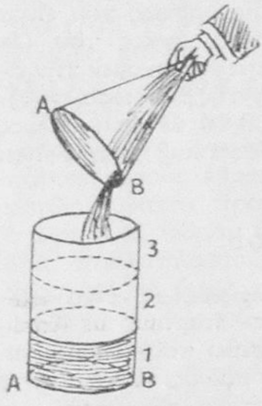
$$E = \frac{2\times\pi\times\alpha\times\lambda}{2} \text{ ἢ } E=\pi\times\alpha\times\lambda.$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ἔχωμεν κῶνον ἔχοντα πλευρὰν 4 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,75 μ., τὸ ἐμβαδὸν (Ε) τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶναι.

$$E = \frac{2\pi\times0{,}75\times4}{2} = 2\times3{,}14\times0{,}75\times2 = 9{,}42 \text{ τετρ. μέτρ.}$$

§ 224. **Ὄγκος κώνου.** Τὸν ὄγκον τοῦ κώνου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καθὼς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, καθ'ὅσον, ὡς εἴδομεν (σημ. § 191) ἡ πυραμὶς δύναται πρακτικῶς νὰ ληφθῇ ὡς κῶνος, ὅταν αἱ τριγωνικαὶ αὐτῆς ἕδραι συνεχῶς διπλασιάζωνται. Ὅθεν:

ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.



σχ. 184.

Τοῦτο καὶ πειραματικῶς δύναται νὰ δειχθῇ, ἐὰν λάβωμεν δύο δοχεῖα (σχ.184) τὸ ἓν κυλινδρικὸν καὶ τὸ ἄλλο κωνικόν, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ κωνικοῦ εἶναι τὸ τρίτον τῆς τοῦ κυλίνδρου, ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ἤτοι $\frac{1}{3}\times\beta\times\upsilon$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ.} = \frac{\pi\times\alpha\times\alpha\times\upsilon}{3} = \frac{\pi\alpha^2.\ \upsilon}{3}.$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ζητῶμεν τὴν ὄγκον κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,50 μ. καὶ ὕψος 2μ. ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι

$$= \frac{\pi\times2\times0{,}50\times0{,}50}{3} = 0{,}523 \text{ κυβ.μ.}$$

§ 225. **Ἀσκήσεις**. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως 0,64 μ. καὶ πλευρὰν 15 μ.

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 8,60 μέτρ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 2.90 μ.;

3) Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 1,40 μετρ. καὶ ἀκτὶς τῆς βάσεως 0,40 μ.;

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2,50 μέτρ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,50 μέτρ.

5) Κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 2 μετρ. καὶ ὕψος 1,4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

6) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2 μετρ. καὶ περιφέρειαν βάσεως 6,28 μ. (ἐκ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του θὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς $6{,}28=2\pi\alpha$, ἐξ ἧς $\alpha=\frac{6{,}28}{2\pi}$, ἀκολούθως τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ τέλος ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

7) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι 9,320 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ βάσις του ἔχῃ ἐμβαδὸν 3,2 τετρ. μέτρα;

Ἐκ τοῦ τύπου $\text{ὄγκ.}=\frac{1}{2}\,\pi.\alpha^2.\upsilon$ λαμβάνομεν $3\times\text{ὄγ.}=\pi\alpha^2.\upsilon$, ἐξ οὗ:

$$\frac{3\times\text{ὄγκ.}}{\pi\alpha^2}=\upsilon.$$

8) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 6,28, τὸ ὕψος διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

9) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι 12,560 κυβ. μέτρα, τὸ ὕψος αὐτοῦ 1 μέτρον. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του;

Α΄. Μέτρησις σφαίρας.

§ 226. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, καθὼς καὶ τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ἔχομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας ἐκ τῆς θεωρητικῆς Γεωμετρίας.

α΄) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου αὐτῆς, ἤτοι $E=4\times\pi\times\alpha^2$. Ἐὰν πχ. ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 2 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶναι $\pi \times 2^2$ ἢ $3,14 \times 2 \times 2 = 12,56$ τμ. Τοῦτο τετραπλασιάζοντες λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $4 \times 12,56 = 59,24$ τετρ. μ.

β΄) Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος της.

$$\text{Ὄγκ. σφαίρας} = \frac{4 \times \pi \times \alpha^2 \times \alpha}{3} = \frac{4}{3}\pi\alpha^3.$$

§ 227. **Ἀσκήσεις.** 1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 2 μετρ.

2) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,08 μετρ.

3) Σφαῖρα ἔχει διάμετρον 2,5 μετρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

4) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 6,28 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ α΄) ἡ διάμετρος αὐτῆς, β΄) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της καὶ γ΄) ὁ ὄγκος αὐτῆς.

5) Ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας εἶναι 28,42 τετραγ. μέτρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος αὐτῆς;

Προβλήματα μετρήσεως τῶν στερεῶν.

1) Κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει ἐσωτερικὰς διαστάσεις 0,80 μ., 0,40 καὶ 0,55 μ. Νὰ εὑρεθῇ α΄) Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται, ἵνα καλυφθῇ ἡ ἐσωτερικὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια. β΄) Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ ὕφασμα, ἐὰν πωλεῖται πρὸς 240 δρ. τὸ τετρ. μέτρον.

2. Τὸ ἀνωτέρω κιβώτιον πόσα τεμάχια σάπωνος δύναται νὰ περιλάβῃ, ἐὰν ἕκαστον τεμάχιον ἔχῃ σχῆμα τὸ αὐτὸ καὶ διαστάσεις 0,12 μῆκος, 0,04 πλάτος καὶ 0,06 ὕψος.

3) Θήκη δερματίνη ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τετραγώνου μὲ πλευρὰν 0,34 μ. καὶ ὕψος 0,25. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀξίζει τὸ καλύπτον αὐτὴν δέρμα, ἐὰν πωλῆται πρὸς 450 δρ. τὸ τετρ. μέτρον.

4) Αἴθουσα ἔχει μῆκος 8,30 μ. πλάτος 6,20 μ. καὶ ὕψος 4 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ ὀξυγόνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ἀέρα τῆς αἰθούσης, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἓν κυβ. μέτρον ἀέρος ζυγίζει 1,29 κιλά, τὸ δὲ βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι τὰ 6/25 τοῦ βάρους τοῦ ἀέρος.

5) Ὁδὸς ἔχουσα μῆκος 3 χιλιομέτρων καὶ πλάτος 15 μέτρων

πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σκύρων εἰς ὕψος 0,20 μ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα κυβ. μέτρα σκύρων χρειάζονται;

6) Πρὸς ἀνόρυξιν φρέατος διαμέτρου 2 μέτρων καὶ βάθους 15 μέτρ. πρέπει νὰ πληρώσωμεν 500 δρ. κατὰ κυβ. μέτρον. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐκσκαφή;

7) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 2,5 μετρ. Ἕκαστον τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς ἔχει ὕψος 5,5 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

8) Σωρὸς λίθων ἔχει σχῆμα πυραμίδος καὶ πωλεῖται πρὸς 120 δρ. τὸ κυβικὸν μ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον τιμᾶται οὗτος, ἐὰν ἡ πυραμὶς ἔχῃ ὕψος 3,5 μ. βάσιν δὲ τετράγωνον ἔχον περίμετρον 16 μέτρων.

9) Κυλινδρικὴ στήλη ἔχουσα ὕψος 3,25 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,45 μ. πρόκειται νὰ ἐλαιοχρωματισθῇ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός, ἐὰν πληρώσωμεν 90 δρ. τὸ τετρ. μέτρον;

10) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι 9,320 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του εἶναι 3,72 τετρ. μέτρα;

11) Νὰ εὑρεθῇ πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν κωνικῆς σκηνῆς, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰν 4 μ., περιφέρειαν δὲ βάσεως 12,56 μετρ., ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,30 μέτρα;

12. Πρόκειται νὰ καλύψωμεν τοὺς τοίχους μιᾶς αἰθούσης διὰ χάρτου πολυτελείας· ἡ αἴθουσα ἔχει μῆκος 4,20 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 4 μ., ἡ δὲ ταινία χάρτου πλάτους 0,65 μ. στοιχίζῃ 60 δρ. τὸ μέτρον. Πόση θὰ εἶναι ἡ δαπάνη;

13) Σφαῖρα ἔχει διάμετρον 6 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ α′) ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου αὐτῆς, β′) ἡ ἐπιφάνεια καὶ γ′) ὁ ὄγκος της.

14) Πρόκειται νὰ ἐπενδύσωμεν σφαῖραν ἔχουσαν ἀκτῖνα 5 μέτρ. διὰ μεταξίνου ὑφάσματος. Ἐὰν τὸ ὕφασμα τιμᾶται 260 δρ. τὸ τετρ. μέτρον, πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπένδυσις;

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς στερεομετρίας.

1) Κατασκευάσατε παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως νὰ εἶναι 8 καὶ 5 ἑκατοστόμετρα καὶ τὸ ὕψος 3 ἑκατ)μετρα. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

2) Κατασκευάσατε καν. ἑξαγωνικὸν πρίσμα, τοῦ ὁποίου

τὸ ὕψος νὰ εἶναι 6 ἑκατόμετρα καὶ ἑκάστη πλευρὰ τῆς βάσεως 0,02 μ. Πόσα τετραγ. μέτρα θὰ εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

3) Κύβος ἔχει ἀκμὴν 5 ἑκατοστόμετρα, δεύτερος κύβος ἔχει ἀκμὴν διπλασίαν· κατὰ πόσα τετρ. μέτρα διαφέρουν αἱ ὁλικαὶ ἐπιφάνειαι αὐτῶν;

4) Κιβώτιον σχήματος κύβου ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκμὴν 1 μετρ. Ἐὰν πληρωθῇ διὰ κυτίων κυβικοῦ σχήματος διαστάσεων 10 ἑκατοστομέτρων, πόσα κυτία δύναται νὰ περιλάβῃ·

5) Θέλομεν νὰ καλύψωμεν μὲ φύλλα χρυσωμένου χάρτου κιβώτιον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Τὸ πλάτος τοῦ κιβωτίου εἶναι 0,18 μ. τὸ μῆκος 0,30 μέτρα τὸ δὲ ὕψος εἶναι τὰ 2/3 τοῦ πλάτους. Πόσα φύλλα χάρτου θὰ χρειασθῶμεν, ἐὰν ἕκαστον φύλλον ἔχῃ ἐπιφάνειαν μιᾶς τετραγωνικῆς παλάμης;

6) Κύβος ἔχει ἀκμὴ 5 ἑκατοστόμετρα. Κατὰ πόσον αὐξάνεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ, πρῶτον, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του καί, δεύτερον, ἐὰν τριπλασιάσωμεν αὐτό.

7) Ὁ ὄγκος αἰθούσης,ἐχούσης σχῆμαὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶναι 120 κ. μέτρα· αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 5 μ. καὶ 6 μ. Ποῖον τὸ ὕψος τῆς αἰθούσης;

8)Στήλη ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος μὲ βάσιν τετράγωνον. Τὸ ὕψος αὐτῆς εἶναι 5,25 μέτρα ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεώς της 0,75 μετρ. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ τὸν ἐλαιοχρωματισμὸν αὐτῆς, ἐὰν δι' ἓν τετραγ. μέτρον ὁ ἐλαιοχρωματιστὴς ζητῇ 40 δραχ.

9)Ἡ βάσις πρίσματός τινος εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 1,15 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 0,90 μ.

10. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι 12,56 τετρ. μέτρ. τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς 2,60 μ.

11) Σωρὸς καυσοξύλων ἔχει σχῆμα πυραμίδος καὶ πωλεῖται πρὸς 620 δραχ. τὸ κυβ. μέτρον. Πόσον τιμᾶται οὗτος, ἐὰν ἡ πυραμὶς ἔχῃ ὕψος 2,30 μ., βάσιν δὲ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν πλευρῶν εἶναι 5 μ. ἡ δὲ περίμετρος 16 μέτρα.

12) Ὁ ὄγκος πυραμίδος εἶναι 12 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι 4,20 τετρ. μέτρα.

13) Ἀγροτικὴ ὁδὸς πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σκύρων εἰς ὕψος 0,15 τοῦ μέτρου. Πόσα κυβικὰ μέτρα σκύρων θὰ χρειασθῶσιν, ἐὰν ἡ ὁδὸς ἔχει μῆκος 800 μέτρ. καὶ πλάτος 12 μέτρα.

14) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 3 μέτρα καὶ περιφέρειαν βάσεως 9,42 μέτρα.

15) Νὰ εὑρεθῇ ὄγκος κυλίνδρου τινός, ὅστις ἔχει περιφέρειαν βάσεως 6,28 μ. καὶ ὕψος τριπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

16) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου τινὸς εἶναι τριπλασία τοῦ ὕψους του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ ὁ ὄγκος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως του εἶναι 1 μέτρον.

17) Κυλινδρόμυλος ἔχει περιφέρειαν 5,02 μέτρ. καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

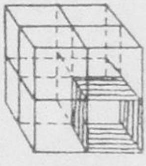
18) Ὁ ὄγκος κώνου τινὸς εἶναι 12,675 κυβ. μέτρα, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 4,25 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

19) Ἐπλήρωσέ τις 400 δρ. κατὰ κυβ. μέτρον δι᾽ἀνόρυξιν φρέατος διαμέτρου 1,50 μέτρ. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος 9 μέτρων. Πόσον ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἐκσκαφήν;

20) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 2 μέτρα. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας ἐχούσης διπλασίαν ἀκτῖνα· ἔπειτα νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὄγκοι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο σφαιρῶν.

21) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ κώνου, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 3,20 μέτρ. ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 1,80 μέτρα.

22) Σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 1 μέτρ. Ἐὰν ἐπενδύσωμεν αὐτὴν δι ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον τιμᾶται 320 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπένδυσις;



σχ. 185.

23) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι 32,25 τετρ. μέτρα, πόση εἶναι ἡ διάμετρος αὐτῆς;

24) Ἐὰν διπλασιάσωμεν ἢ τριπλασιάσωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

25) Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκμὴν ἑνὸς κύβου, ποσαπλάσιος γίνεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

26) Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκτῖνα κύκλου, ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

27) Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς διαστάσεις ὀρθογωνίου κήπου, πόση γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

28) Σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 3 ἑκατοστομέτρων, ἄλλη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 5 ἑκατοστομέτρων, ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρῶν;

29) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 12,56 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας;

30) Πόσον ζυγίζει σφαῖρα ἐκ μολύβδου, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 0,10 τοῦ μέτρου;

Σημείωσις. Τὸ βάρος τῆς σφαίρας θὰ εὑρεθῇ ἐὰν πολ/σθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου (11,35).

ΤΕΛΟΣ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ τῶν ἁπλουστέρων στερεῶν σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ γωνιῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ παραβλήλων εὐθειῶν. σελ.

Ἀσκήσεις γραφικαί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ εὐθυγράμμων σχημάτων.

α'. Τρίγωνα

Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.

β'. Τετράπλευρα

Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.

γ'. Πολύγωνα.

Ἀσκήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Κύκλος καὶ εὐθεῖα.

Ἀσκήσεις ἀριθμητικαί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Γεωμετρικὰ Προβλήματα.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ 'Εν 'Αθήναις τῇ 13|29 Αὐγούστου 1932

'Αριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως $\left\{ \frac{44229}{15213} \right.$

ΥΠΟΥΡΓΙΚΗ ΑΠΟΦΑΣΙΣ ΚΑΙ ΕΓΚΡΙΣΙΣ

Περὶ ἐγκρίσεως διδακτικῶν βιβλίων πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Μέσης ἐκπαιδεύσεως.

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΠ.

"Εχοντες ὑπ' ὄψει τὸ ἄρθρον 3 τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῆς Μέσης ἐκπαιδεύσεως, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 402 πρακτικὸν τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου, ἀποφασίζομεν, ὅπως ἐγκριθῇ ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α' καὶ Β' τάξεως τῶν γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ», βιβλίον τοῦ **Α. Μητροπούλου**, διὰ μίαν πενταετίαν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1932–33 ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅπως ὁ συγγραφεὺς συμμορφωθῇ κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπῆς.

'Ο 'Υπουργὸς

Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

ΤΙΜΗ ΔΡΑΧΜΑΣ 28.20

Βιβλιόσημον	Δρ. 7.40	'Υπουργ. ἀπόφ.	$\frac{57104}{17\|10\|1932}$
'Αναγκαστ. Δάνεια	» 2.30		
	9.70		

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15 ο)ο τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν. ("Αρθρον 6 Διατάγματος «περὶ τοῦ τρόπου τῆς διατιμήσεως διδακτικῶν βιβλίων καὶ χορηγίας ἀδείας κυκλοφορίας αὐτῶν», 14|21-10-1932).

Μπακάβης
Κρεοπώλης
Κρασάς