ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Γ.

Ἐγκεκριμένη κατὰ τὸν νέον περὶ διδακτικῶν βιβλίων νόμον 2438.

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ Φόρου Δρχ.
Βιβλιόσημον καὶ Φόρος Ἀναγ. Δανείου »
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 21 714—11—7—928
Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας 35.801—19—10—928

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & ΣΙΑΣ
81 ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81
1928

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Γ΄.

[«Ἡ ἔκτασις καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου τούτου συμφωνοῦσι πλήρως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προγράμματος. Ἡ δὲ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης εἶναι καλὴ ἀπό τε ἐπιστημονικῆς καὶ διδακτικῆς ἀπόψεως». (Ἐκ τῆς ἐκθέσεως τῶν κ. κ. κριτῶν).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΝ
Ν. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΑΝΔΡΕΟΥ ΛΟΝΤΟΥ 2

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & ΣΙΑΣ
81 ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81
1928

17330
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΤΖΑΚΑ Κ Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ Ὁδὸς Λέκα - Στοὰ Σιμοπούλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Γ΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ ἔκδοσις αὕτη παρουσιάζει μικρὰς διαφορὰς ἀπὸ τὰς δύο προηγουμένας, διότι ἡ ἐπὶ τῆς ἀναθεωρήσεως κριτικὴ ἐπιτροπεία ἠξίωσε τὴν προσθήκην μερῶν τινων εἰς τὴν ὕλην τοῦ βιβλίου.

Οὕτω περιέχει αὕτη ἐπὶ πλέον ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἐκδόσεις τὴν ἔννοιαν τῆς τεμνούσης καὶ συντεμνούσης τόξου ἢ γωνίας, τὰς σχέσεις τῶν τριγων. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων κατὰ 90^0, τὰς σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν 270^0 καὶ ὀλίγα περὶ τριγων. ἐξισώσεων καὶ συστημάτων.

Ἐπειδὴ δὲ πιθανὸν ὁ χρόνος νὰ μὴ ἐπαρκῇ διὰ τὴν διδασκαλίαν καὶ τῶν μερῶν τούτων ἐκρίναμεν καλὸν νὰ ἐκθέσωμεν ταῦτα κατὰ τρόπον μὴ ἐπηρεάζοντα τὴν λοιπὴν ὕλην τοῦ βιβλίου καὶ ἐσημειώσαμεν αὐτὰ δι᾽ ἀστερίσκου, ὥστε νὰ εἶναι εὐχερὴς ἡ παράλειψις τῆς διδασκαλίας αὐτῶν, ὁσάκις ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη ἀπαιτεῖ τοῦτο.

Ὁ συγγραφεὺς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

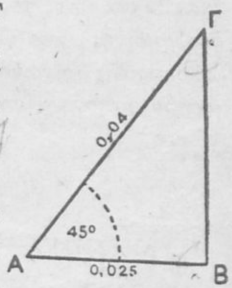
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. *Πρόβλημα Α΄.* Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς ἔχουσι μῆκος $0{,}025^{\mu}$ ἡ μὲν καὶ $0{,}04^{\mu}$ ἡ ἄλλη. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

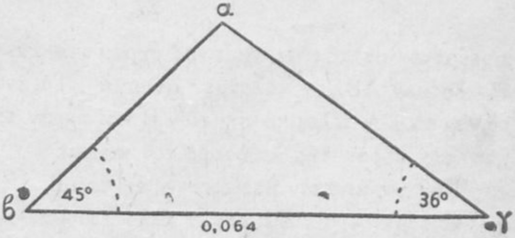
Λύσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ.1) ἔχον $A = \frac{1}{2}$ ὀρθ., $(AB) = 0{,}025^{\mu}$ καὶ $(A\Gamma) = 0{,}04^{\mu}$. Μετροῦντες εἶτα τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι $(B\Gamma) = 0{,}028^{\mu}$, $B = 95^{\circ}$ καὶ $\Gamma = 40^{\circ}$



Σχ. 1

Πρόβλημα Β΄. Τριγώνου ΑΒΓ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 6400^{μ}, αἱ δὲ παρ᾽ αὐτὴν γωνίαι εἶναι 45° ἡ μὲν καὶ 36° ἡ ἄλλη. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;

Λύσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ (Σχ. 2) τοιοῦτον ὥστε $(\beta\gamma) = 6400^{\mu} \cdot \frac{1}{100000} = 0{,}064^{\mu}$, $\beta = 45^{\circ}$ καὶ $\gamma = 36^{\circ}$· μετροῦντες εἶτα τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha\beta) = 0{,}0375^{\mu}$, καὶ $(\alpha\gamma) = 0{,}046^{\mu}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ὅμοια ἔπεται ὅτι:



Σχ. 2

$$(AB) = 0{,}0375^{\mu} \times 100000 = 3750^{\mu}$$
$$\text{καὶ } (A\Gamma) = 0{,}046 \times 100000 = 4600^{\mu}$$

§ 2. *Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.*— Ἡ γραφικὴ αὐτη μέθοδος,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

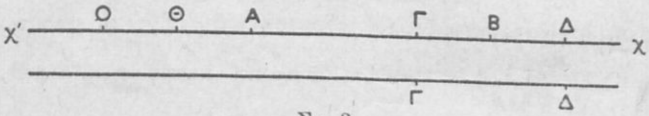
τὴν ὁποίαν μετεχειρίσθημεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προηγουμένων προβλημάτων, ἅτινα ὡς παραδείγματα ἐλάβομεν, ἄγει εἰς ἐξαγόμενα ἐνέχοντα σημαντικὰ πολλάκις σφάλματα. Ταῦτα προέρχονται τὸ μὲν ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, ὧν γίνεται χρῆσις, τὸ δὲ καὶ ἐξ ἀδεξίας τυχὸν αὐτῶν χρήσεως περὶ τὴν κατασκευὴν καὶ μέτρησιν. Ἐνισχύονται δὲ ταῦτα σημαντικῶς, ὅταν γίνηται χρῆσις ὁμοίων σχημάτων. Οὕτω π. χ. ἂν τὸ μῆκος τῆς αγ (Σχ. 2) εὑρέθη μὲ σφάλμα $\frac{1^{\mu}}{1000}$, τὸ μῆκος τῆς ΑΓ θὰ ἔχῃ σφάλμα $\frac{1}{1000} \times 100000 = 100^{\mu}$.

Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τῶν τοιούτων σφαλμάτων ἐζητήθη καὶ ἀνευρέθη μέθοδος καθαρῶς λογιστική, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζονται, μεθ' ἱκανῆς προσεγγίσεως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ δοθῶσιν. Ἡ ἔκθεσις τῆς μεθόδου ταύτης ἀποτελεῖ τὸν σκοπὸν τῆς τριγωνομετρίας. Ὥστε: Σκοπὸς τῆς τριγωνομετρίας εἶναι ὁ διὰ λογισμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα δοθῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΝΥΣΜΑΤΑ—ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΑΞΟΝΑ—ΤΟΞΑ—ΓΩΝΙΑΙ

§ 3. ***Ἄνυσμα.***— Κινητὸν σημεῖον, ὅπερ ἐπὶ εὐθείας χ΄χ (Σχ. 3)



Σχ. 3

κινούμενον μεταβαίνει ἔκ τινος σημείου Α εἰς ἄλλο Β αὐτῆς, γράφει τὸν δρόμον ΑΒ, ὃν καλοῦμεν ἄνυσμα. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α τέλος τὸ σημεῖον Β και φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἤτοι τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

Ἐὰν τὸ κινητὸν μετέβαινεν ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Α πάντοτε ἐπὶ τῆς χ΄χ κινούμενον, θὰ διέγραφεν ἄλλο ἄνυσμα, τὸ ΒΑ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Β, τέλος Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

Ὥστε. Ἄνυσμα καλεῖται τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον νοεῖται διαγραφὲν ὑπὸ σημείου κινουμένου ἐπ' αὐτῆς κατά τινα φοράν.

Εἰς ἕκαστον ἄνυσμα διακρίνομεν, κατὰ τὰ προειρημένα, ἀρχήν, τέλος καὶ φοράν· ὅταν δὲ ὀνομάζωμεν ἕκαστον ἄνυσμα, προτάσσομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς Συνήθως δὲ ὑπεράνω τῶν γραμμάτων τούτων χαράσσομεν ὁριζόντιον εὐθ. τμῆμα. Οὕτω τὸ σύμβολον $\overline{AB}$ δηλοῖ τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἀρχὴν A, τέλος B καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B.

Τὰ ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, καλοῦνται ὁμόρροπα μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, ἀντίρροπα δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον φοράν. Οὕτω τὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 3) εἶναι ὁμόρροπα, τὰ δὲ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Delta\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα ἀνύσματα.

Συνήθως τὰ ἀντίρροπα ἀνύσματα, ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἄκρα, καλοῦνται ἀντίθετα ἀνύσματα. Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{BA}$ (Σχ.3).

Ἐὰν δύο ἀνύσματα εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται ὁμορρόπως ἴσα, ἐὰν δὲ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται ἀντιρρόπως ἴσα.

§ 4. ***Μῆκος ἀνύσματος.***—Ἐὰν ἐπὶ εὐθείας $x'x$ ληφθῇ κατὰ βούλησιν ἄνυσμά τι $\overline{O\Theta}$ (Σχ. 3) ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων, εἰς ἕκαστον ἄνυσμα $\overline{\Gamma\Delta}$ ἐπ' αὐτῆς ἢ ἄλλης παραλλήλου εὐθείας κείμενον ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμός· εἶναι δὲ οὗτος ὁ λόγος $\dfrac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{O\Theta}}$, ὃν καλοῦμεν μῆκος τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ καὶ σημειοῦμεν συντέμως οὕτω $(\overline{\Gamma\Delta})$· (ὅρα εἰς Γεωμετρίαν μου § 162). Ὥστε: Μῆκος ἀνύσματος καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἀνυσμάτων.

Κατὰ συνθήκην τὸ μῆκος ἀνύσματος παρίσταται διὰ θετικοῦ μὲν ἀριθμοῦ, ἂν τοῦτο εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὴν μονάδα $\overline{O\Theta}$ τῶν ἀνυσμάτων, δι' ἀρνητικοῦ δέ, ἂν τοῦτο εἶναι ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\overline{O\Theta}$. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $(\overline{AB})=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{O\Theta}}$ εἶναι θετικὸς (Σχ. 3), ὁ δὲ $(\overline{\Delta\Gamma})=\dfrac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{O\Theta}}$ εἶναι ἀρνητικός.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα ἔχουσιν ἴσα μήκη, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ἔχουσιν ἀντίθετα μήκη, ἂν πάντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀνυσμάτων μετρῶνται. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ $(\overline{AB})$ καὶ $(\overline{BA})$ εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι $(\overline{AB})+(\overline{BA})=0$.

Τὰ ὁμόρροπα τῇ μονάδι ΟΘ ἀνύσματα καλοῦνται θετικὰ ἀνύσματα καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται θετικὴ φορά, τὰ δὲ ἀντίρροπα τῇ μονάδι ταύτῃ καλοῦνται ἀρνητικὰ ἀνύσματα καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται ἀρνητικὴ φορά.

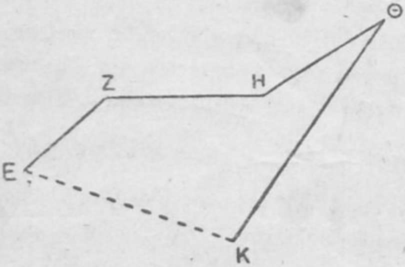
§ 5. ***Ἄξων.***—Πᾶσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς εἶναι ὡρισμένη ἡ θετικὴ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ καλεῖται ἄξων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ἄνυσμα $\overline{\text{ΟΘ}}$ ἄξονός τινος χ΄χ, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων καὶ δι' οὗ ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορὰ ἐπ' αὐτοῦ, καλεῖται διευθύνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος τούτου καὶ παντὸς ἄλλου παραλλήλου αὐτῷ.

Ἡ ἀρχὴ Ο τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ἄξονός τινος διαιρεῖ αὐτὸν εἰς δύο μέρη ἀπέραντα κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Ο. Ἐκ τούτων τὸ μὲν περιέχον τὸ διευθύνον ἄνυσμα $\overline{\text{ΟΘ}}$ καλεῖται θετικὸς ἡμιάξων, τὸ δὲ ἕτερον ἀρνητικὸς ἡμιάξων. Οὕτω Οχ (Σχ. 3) εἶναι ὁ θετικὸς ἡμιάξων καὶ Οχ΄ ὁ ἀρνητικὸς ἡμιάξων τοῦ ἄξονος χ΄χ.

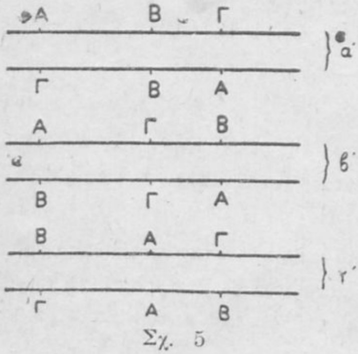
§ 6. Διαδοχικὰ ἀνύσματα, συνισταμένη αὐτῶν.— Τὰ ἀνύσματα $\overline{\text{ΑΒ}}$, $\overline{\text{ΒΓ}}$, $\overline{\text{ΓΔ}}$ (Σχ. 3), ὧν ἕκαστον (πλὴν τοῦ α΄) ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου, καλοῦνται διαδοχικὰ ἀνύσματα· τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ $\overline{\text{ΕΖ}}$, $\overline{\text{ΖΗ}}$, $\overline{\text{ΗΘ}}$, $\overline{\text{ΘΚ}}$, (Σχ. 4). Ὥστε: Δύο ἢ πλείονα ἀνύσματα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α΄) εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.



Σχ. 4

Συνισταμένη ἢ γεωμ. ἄθροισμα διαδοχικῶν ἀνυσμάτων καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου τῶν ἀνυσμάτων τούτων. Οὕτω τὸ $\overline{\text{ΕΚ}}$ εἶναι συνισταμένη τῶν $\overline{\text{ΕΖ}}$, $\overline{\text{ΖΗ}}$, $\overline{\text{ΗΘ}}$, $\overline{\text{ΘΚ}}$, (Σχ. 4),

§ 7. Σχέσις τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν. Ἔστωσαν δύο διαδοχικὰ ἀνύσματα $\overline{\text{ΑΒ}}$, $\overline{\text{ΒΓ}}$ (Σχ. 5) ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμενα ἄξονος. Ἐὰν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ (Σχ. 5, α΄) τὰ ἀνύσματα $\overline{\text{ΑΒ}}$, $\overline{\text{ΒΓ}}$, $\overline{\text{ΑΓ}}$ εἶναι ὁμόρροπα, οἱ δὲ ἀριθμοὶ ($\overline{\text{ΑΒ}}$), ($\overline{\text{ΒΓ}}$), ($\overline{\text{ΑΓ}}$) εἶναι ὁμόσημοι, ἀληθεύει ἄρα προφανῶς ἡ ἰσότης



Σχ. 5

$$(\overline{\text{ΑΒ}}) + (\overline{\text{ΒΓ}}) = (\overline{\text{ΑΓ}}). \qquad (1).$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 5. β΄), ἀληθεύει ἡ ἰσότης ($\overline{\text{ΑΓ}}$)+($\overline{\text{ΓΒ}}$)=($\overline{\text{ΑΒ}}$). Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς $(\overline{\mathrm{Β\Gamma}})$ καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\overline{\mathrm{Β\Gamma}})+(\overline{\mathrm{\Gamma Β}})=0$ (§ 4), προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ρηθεῖσα ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (Σχ. 5, γ'). Ἄρα:

Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

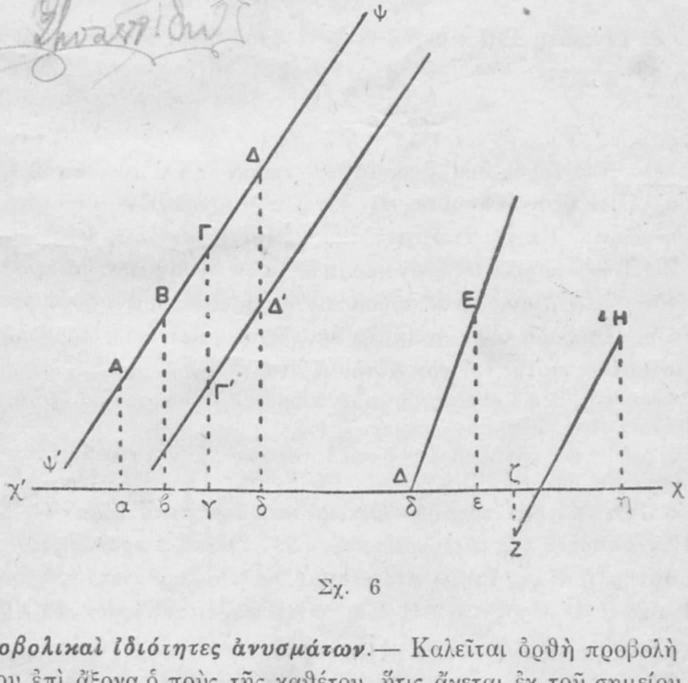
Ἀσκήσεις. 1). Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\overline{\mathrm{AB}})+(\overline{\mathrm{B\Gamma}})+(\overline{\mathrm{\Gamma A}})=0$.

2). Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπ' εὐθείας καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ $\overline{\mathrm{AB}}$, νά ἀποδειχθῇ ὅτι $(\overline{\mathrm{\Gamma A}}) + (\overline{\mathrm{\Gamma B}}) = 2\,(\overline{\mathrm{\Gamma M}})$.

3). Τῶν σημείων Α, Β, Γ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ εὐθείας καὶ Μ ὄντος τοῦ μέσου τοῦ ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\overline{\mathrm{AB}})\,(\overline{\mathrm{A\Gamma}})=(\overline{\mathrm{AM}})^2-(\overline{\mathrm{BM}})^2.$$

§ 8. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα.



Σχ. 6

Προβολικαὶ ἰδιότητες ἀνυσμάτων.— Καλεῖται ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα ὁ πούς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον. Οὕτω τοῦ σημείου Α (σχ 6) ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ'χ εἶναι τὸ σημεῖον α, τοῦ δὲ Δ ὀρθὴ προβολὴ εἶναι αὐτὸ τὸ Δ.

Ὀρθὴ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ ἄνυσμα τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄξονος τούτου, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν προβολὴν τῆς ἀρχῆς, τέλος δὲ τὴν προβολὴν τοῦ τέλους τοῦ ἀνύσματος τούτου.

Οὕτω τοῦ $\overline{AB}$ προβολὴ εἶναι τὸ $\overline{\alpha\beta}$, τοῦ $\overline{\Delta E}$ τὸ $\overline{\delta\varepsilon}$ καὶ τοῦ $\overline{ZH}$ τὸ $\overline{\zeta\eta}$ (Σχ. 6).

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας τὴν ὀρθὴν προβολὴν θέλομεν πολλάκις καλῇ καὶ ἁπλῶς προβολήν.

Α΄. Ἔστωσαν $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ δύο ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ψψ΄ (Σχ. 6) καὶ αϐ, γδ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ψψ΄ καὶ χχ΄ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Βϐ, Γγ, Δδ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἕπεται ὅτι $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, καθ᾽ ὅσον καὶ τὰ $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι τοιαῦτα, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$, $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$, ἤτοι: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}=\dfrac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\gamma\delta}}$ (2)

Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ ἀντὶ τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ τεθῇ τὸ ὁμορρόπως ἴσον αὐτῷ ἄνυσμα $\overline{\Gamma'\Delta'}$, αὕτη γίνεται

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma'\Delta'}}=\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\gamma\delta}} \qquad (3)$$

Ἄρα: Ὁ λόγος δύο ἀνυσμάτων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Β΄. Τῶν ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων ἀνυσμάτων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.

§ 9. Προβολὴ τεθλ. γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ἡ προβολὴ τῆς συνισταμένης αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Ἀσκήσεις. 4). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονας παραλλήλους εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἴσα.

5). Δεδομένων τῶν προβολῶν α καὶ ϐ ἀνύσματος $\overline{AB}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

§ 10. Μέτρον τόξου.—Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ τόξα. — Ἔστω ΑΒ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας Κ. (Σχ. 7) καὶ ἕτερον τόξον ΑΜ τῆς αὐτῆς (ἢ ἄλλης ἴσης) περιφερείας, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων. Ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΜ καλεῖται μέτρον τοῦ ΑΒ καὶ σημειοῦται συντόμως οὕτω: $(\widehat{AB})$.

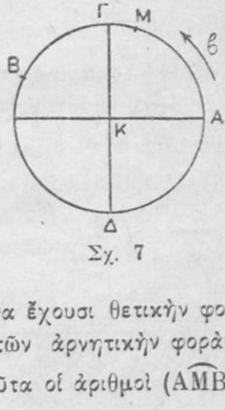
Ὥστε: Μέτρον τόξου καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν τόξων.

Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θέλομεν θεωρῇ ὡς μονάδα τόξων τὸ $\dfrac{1}{360}$ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιφερείας, ὅπερ καλεῖται μοῖρα (°)· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (″). Ἐὰν τόξον τι ἔχῃ μέτρον π. χ. 30, εἶναι εὐνόητον ὅτι γίνεται ἐκ τῆς μοίρας τριακοντάκις ληφθείσης, δι᾽ αὐτὸ λέγομεν ὅτι τὸ τόξον τοῦτο εἶναι τριάκοντα μοιρῶν (30°).

Ἕκαστον τόξον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δρόμος, ὃν διαγράφει κινητὸν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτοῦ κινούμενον καὶ τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ καταλήγει εἰς τὸ ἕτερον. Οὕτως, ἂν κινητὸν σημεῖον ἐκ τοῦ Α (Σχ. 7) ἀναχωροῦν καταλήξῃ εἰς τὸ Β ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ καὶ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους ϐ κινούμενον, εἶναι εὐνόητον ὅτι διαγράφει τὸ τόξον ΑΜΒ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Α, τέλος Β καὶ φορὰν τὴν τοῦ βέλους ϐ, ἥτις εἶναι καὶ ἡ τοῦ κινητοῦ σημείου φορά. Κατὰ ταῦτα εἰς ἕκαστον τόξον διακρίνομεν ἀρχήν, τέλος καὶ φοράν· ὅταν δὲ ὀνομάζωμεν τόξον τι, προτάσσομεν τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.



Σχ. 7

Ἡ μονὰς τῶν τόξων ΑΜ λαμβάνεται πάντοτε οὕτως ὥστε νὰ ἔχῃ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου· τὴν φορὰν ταύτην (βέλος ϐ) καλοῦμεν θετικὴν φοράν, τὴν δὲ ἀντίθετον ταύτης ἀρνητικὴν φοράν.

Κατὰ συνθήκην τὸ μέτρον τῶν τόξων, ἅτινα ἔχουσι θετικὴν φοράν, παρίσταται διὰ θετικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικὴν φορὰν ἐχόντων τόξων δι᾽ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ $(\widehat{AMB})$ καὶ $(\widehat{BMA})$ εἶναι ἀντίθετοι.

Τὰ τόξα, ἅτινα ἔχουσι θετικὴν φοράν, καλοῦνται θετικὰ τόξα, τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὴν φορὰν καλοῦνται ἀρνητικὰ τόξα.

§ 11. ***Ἴσα καὶ ἀντίθετα τόξα.***— Δύο τόξα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἴσα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν, εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι δύο ἴσα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν ἔχουσι καὶ πέρας κοινόν.

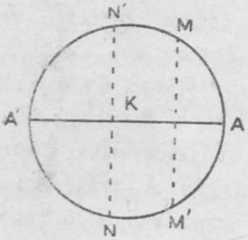
Δύο τόξα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἀντίθετα, ἐὰν τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀντίθετα. Οὕτω τὰ τεταρτημόρια $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta}$ (Σχ. 7) εἶναι τόξα ἀντίθετα.

Ἐξετάσωμεν ἤδη τίς ἡ ἀμοιβαία θέσις τῶν περάτων δύο τόξων ἀντιθέτων, ἅτινα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν καὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἔστω ΑΜ τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ΑΜ′ τὸ ἀντί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θετον αὐτοῦ (Σχ. 8). Ἐπειδὴ ταῦτα ἀπολύτως θεωρούμενα εἶναι ἴσα, τὸ Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου Μ'ΑΜ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ διάμετρος Α'ΚΑ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΜΜ'. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ ἀντίθετα τόξα ΑΜΝ καὶ ΑΜ'Ν', ὧν ἕκαστον εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτῶν ἀπολύτως θεωρουμένων μίαν ἡμιπεριφέρειαν, προκύπτουσι τόξα Α'Ν, Α'Ν', μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ ἀπολύτως ἴσα· τέμνει ἄρα ἡ Α'ΚΑ δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΝΝ'.

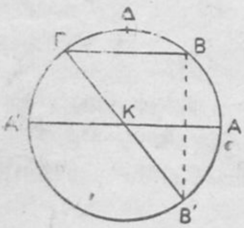


Σχ. 8

Ἄρα: Ἐὰν δύο τόξα ἀντίθετα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχωσι κοινὴν ἀρχήν, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς διερχομένην διάμετρον.

§ 12. *Διαδοχικὰ τόξα.— Ἄθροισμα τόξων.—Διαφορὰ τόξων.*—Δύο ἢ πλείονα τόξα λέγονται διαδοχικά, ἐὰν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α') εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου. Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 9).

Ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας καλεῖται τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου καὶ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τούτων. Οὕτω τῶν θετικῶν τόξων ΑΒ, ΒΔ ΔΓ (Σχ. 9) ἄθροισμα εἶναι τὸ θετικὸν τόξον ΑΓ, ὅπερ προφανῶς ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν εἰρημένων τόξων· τῶν δὲ τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἄθροισμα εἶναι τὸ Δ, οὗ μέτρον εἶναι τὸ ἄθροισμα



Σχ. 9

$(\widehat{AB}) + (\widehat{B\Gamma}) + (\widehat{\Gamma\Delta})$

Ἄθροισμα τόξων οἱωνδήποτε τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν καλεῖται τὸ ἄθροισμα τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας, διαδοχικῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσων ἐκείνοις.

Διαφορὰ δύο τόξων καλεῖται τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου τόξου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου τόξου.

§ 13. *Παραπληρωματικὰ τόξα.*—Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς θετικὴν ἡμιπεριφέρειαν. Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓΑ' (Σχ. 9), ὧν ἄθροισμα ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΒΑ'.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν τόξον τι AB εἶναι τ^{0}, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $180^{0}-\tau^{0}$. Ἐπειδὴ δὲ $180^{0}-\tau^{0}=(-\tau^{0})+180^{0}$, ἕπεται ὅτι τὸ παραπληρωματικὸν τοῦτο τόξον εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\widehat{AB'}$ (ἀντιθέτου τοῦ $\widehat{AB}$) καὶ τῆς θετικῆς ἡμιπεριφερείας $B'\widehat{B\Gamma}$· ἂν ἄρα τοῦτο ἄρχηται ἀπὸ τοῦ A, περατοῦται εἰς τὸ Γ συμμετρικὸν τοῦ B′ πρὸς τὸ κέντρον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓBB′ εἶναι ὀρθή, ἡ χορδὴ BΓ εἶναι παράλληλος τῇ AA′. Ἄρα : Τὰ πέρατα δύο τόξων παραπληρωματικῶν καὶ κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν κεῖνται ἐπὶ χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀρχῆς.

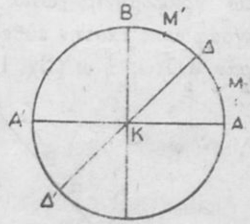
Ἀσκήσεις 6). Δεδομένης κοινῆς τινος ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $45^{0}, -45^{0}, 135^{0}, -135^{0}$.

7) Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 225^{0} καὶ -225^{0}.

8) Δεδομένης κοινῆς τινος ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $30^{0}, -30^{0}, 150^{0}, -150^{0}$.

§ 14.—*Συμπληρωματικὰ τόξα.*—Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικά, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς θετικὸν τεταρτημόριον περιφερείας.

Οὕτω τὰ θετικὰ τόξα AM καὶ MB (Σχ. 10) εἶναι συμπληρωματικά. Ἐξετάσωμεν ἤδη τίνα θέσιν ἔχουσι τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωματικῶν τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ κοινὴν ἐχόντων ἀρχήν. Ἐὰν τόξον AM εἶναι τ^{0}, τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ $\widehat{AM'}$ θὰ εἶναι $90^{0}-\tau^{0}$. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῶσι ταῦτα ἄνισα, τὸ μέτρον τοῦ μὲν θὰ εἶναι $45^{0}-\omega^{0}$, ὅτε τὸ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι $45^{0}+\omega^{0}$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τεταρτημορίου $\widehat{AB}$, δηλ. τοῦ $\widehat{A\Delta}$, μέτρον εἶναι 45^{0}, ἕπεται ὅτι τὸ μὲν $\widehat{AM}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\widehat{A\Delta}$ καὶ ἑτέρου τόξου $\widehat{\Delta M}$, ὅπερ ἔχει μέτρον $(-\omega)$, τὸ δὲ $\widehat{AM'}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\widehat{A\Delta}$ καὶ ἑτέρου τόξου $\widehat{\Delta M'}$ ὅπερ ἔχει μέτρον $+\omega$. Τὰ τόξα λοιπὸν $\widehat{\Delta M}$ καὶ $\widehat{\Delta M'}$ εἶναι ἀντίθετα (11).



Σχ. 10

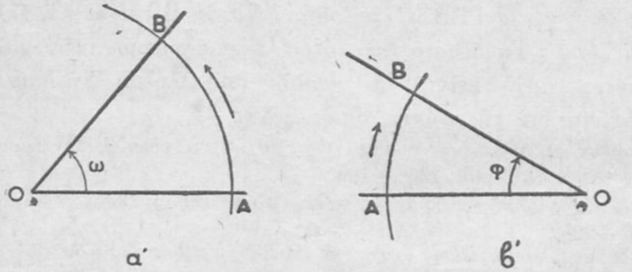
Ἄρα : Τὰ πέρατα δύο τόξων συμπληρωματικῶν, κοινὴν ἐχόντων ἀρχὴν καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κειμένων περιφερείας εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ θετικοῦ τεταρτημορίου, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὰ τόξα ἀρχήν.

Ἀσκήσεις. 9). Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων $60^{\circ}, -60^{\circ}, 240^{\circ}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

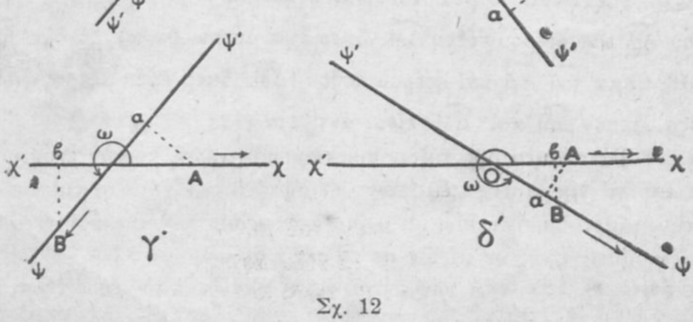
10). Δεδομένης κοινῆς τινὸς ἀρχῆς νὰ εὑρεθῇ τὸ πέρας ἑκάστου τῶν τόξων 150°,—150°, 120,—120°.

§ 15. *Γέννεσις γωνίας.—Θετικαὶ καὶ ἀρνητικαὶ γωνίαι.*— Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ (Σχ. 11), αἵτινες ἄρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἀποτελοῦσιν, ὡς γνωστόν, τὴν γωνίαν ω. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΟΑ αὐτῆς στραφῇ περὶ τὴν κορυφὴν Ο, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῶν



Σχ. 11

εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (10), μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ, θὰ διαγράψῃ τὴν γωνίαν ω. Ἡ ἀρχικὴ θέσις ΟΑ τῆς στρεφομένης εὐθείας καλεῖται ἀρχικὴ πλευρά, ἡ δὲ τελικὴ θέσις αὐτῆς καλεῖται τελικὴ πλευρὰ τῆς διαγραφείσης γωνίας. Ἡ οὕτω γραφομένη γωνία καλεῖται θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον ἡ διαγράφουσα ταύτην εὐθεῖα κινεῖται κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν. Οὕτως ἡ ω (Σχ. 11 α΄) εἶναι θετική, ἡ δὲ φ (Σχ. 11 β΄) εἶναι



Σχ. 12

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀρνητική. Εἶναι φανερὸν ὅτι τυχὸν σημεῖον Α τῆς στρεφομένης πλευρᾶς γράφει τὸ τόξον ΑΒ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς ΟΑ γραφομένην γωνίαν. Καὶ ἂν μὲν ἡ ΟΑ γράφῃ θετικὴν γωνίαν, τὸ Α γράφει θετικὸν τόξον, ἐὰν δὲ ἡ ΟΑ γράφῃ ἀρνητικὴν γωνίαν, τὸ Α γράφει ἀρνητικὸν τόξον.

§ 16 *Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων.* —Γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο τεμνομένων ἀξόνων καλεῖται ἡ γωνία, ἣν γράφει ὁ θετικὸς ἡμιάξων τοῦ ἑνὸς στρεφόμενος κατὰ θετικὴν φορὰν περὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τοῦ ἄλλου. Οὕτως, ΟΑ καὶ ΟΒ ὄντων τῶν διευθυνόντων ἀνυσμάτων τῶν ἀξόνων χ΄χ καὶ ψ΄ψ (Σχ. 12), γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων αὐτῶν εἶναι ἡ ω ἢ ἡ φ, καθ' ὅσον ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ὁ ἡμιάξων Οχ ἢ Οψ.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ διευθύνοντα ἀνύσματ $\overline{OA}$ καὶ $\overline{OB}$ τῶν ἀξόνων χ΄χ, ψ΄ψ ληφθῶσιν ἴσα καὶ προβληθῇ ἑκάτερον ἐπὶ τὸν ἕτερον ἄξονα, σχηματίζονται τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΑα καὶ ΟΒϐ, ἅτινα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως αἱ προβολαὶ Οα, καὶ Οϐ εἶναι ἀπολύτως ἴσα ἀνύσματα. Ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι ἀμφότερα ὁμόρροπα (Σχ. 12 α΄, δ΄) ἢ ἀμφότερα ἀντίρροπα (Σχ. 12 β΄, γ΄) πρὸς τὰ $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, ἕπεται ὅτι εἶναι πάντοτε $\frac{O\alpha}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O\beta}}{\overline{OA}}$, ἤτοι $(\overline{O\alpha}) = (\overline{O\beta})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ Η ΓΩΝΙΑΣ

§ 17. *Τριγωνομετρικὸς κύκλος.—Ἀρχικὴ καὶ τελικὴ ἀκτὶς τόξου.—Πρωτεύοντες ἄξονες.* — Συνήθως ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ θεωρούμενα τόξα, λαμβάνεται ὡς μονὰς τοῦ μήκους, καλεῖται δὲ ὁ τοιοῦτος κύκλος ἰδιαιτέρως τριγωνομετρικὸς κύκλος.

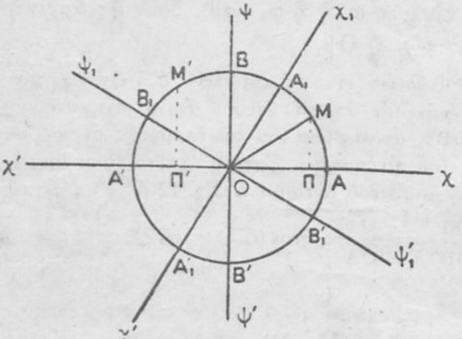
Ἔστω $\widehat{AM}$ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου Ο καὶ ΟΑ, ΟΜ αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταλήγουσαι ἀκτῖνες (Σχ. 13). Τούτων ἡ ΟΑ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου καταλήγουσα καλεῖται ἀρχικὴ ἀκτίς, ἡ δὲ ΟΜ καλεῖται τελικὴ ἀκτὶς τοῦ τόξου ΑΜ. Ἡ ἀρχικὴ ἀκτὶς λαμβάνεται πάντοτε ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος χ΄χ· ἐὰν δὲ αὕτη στραφῇ περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις οὗ διαγράψῃ ὀρθὴν γωνίαν, θέλει καταλάβῃ τὴν θέσιν ΟΒ. Αὕτη

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος ψ΄ψ, ὅστις τέμνει καθέτως τὸν χ΄χ.

Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ καλοῦνται πρωτεύοντες ἄξονες τοῦ τριγ. κύκλου πρὸς ἀρχὴν τόξων Α· εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι πρὸς ἀρχὴν τόξων A_1, ἀντιστοιχεῖ ἄλλο σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων $\chi'_1\chi_1$, $\psi'_1\psi_1$, οἵτινες ἔχουσι διευθύνοντα ἀνύσματα $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$ ὁμοίως ὁριζόμενα. Οἱ πρωτεύοντες ἄξονες ἑκάστου συστήματος διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν τοῦ τριγ. κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα, ἅτινα κατὰ σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καλοῦνται πρῶτον, δεύτερον, τρίτον, τέταρτον τεταρτημόριον.

§ 18. *Συνημίτονον τόξου.* —Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου Ο (Σχ. 13). Τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ΟΜ προβολὴ ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΠ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{\overline{O\Pi}}{\overline{OA}} = (\overline{O\Pi})$.



Σχ. 13

Τὸ μῆκος τοῦτο $(\overline{O\Pi})$ καλεῖται συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ $\overset{\frown}{AM'}$ συνημίτονον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ $\overline{O\Pi'}$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{O\Pi'}}{\overline{OA}} = (\overline{O\Pi'})$.

Γενικῶς: Συνημίτονον τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ διερχόμενον πρωτεύοντα ἄξονα.

Ὁ πρωτεύων ἄξων, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ ἀνύσματα, ὧν τὰ μήκη καλοῦνται συνημίτονα, καλεῖται διὰ τοῦτο ἄξων τῶν συνημιτόνων.

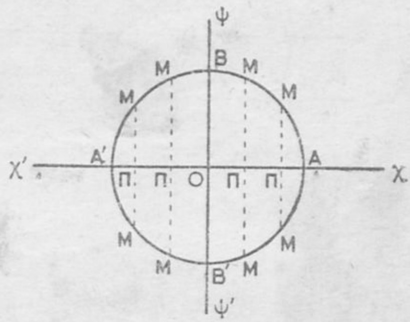
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου τόξου ἕπεται ὅτι α΄). Τὰ τόξα, ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον. β΄) Τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ τοῦ ἄξονος τούτου. Ὅθεν παντὸς τόξου περατουμένου εἰς τὸ α΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον τὸ συνημίτονον εἶναι θετικόν, ἐν ᾧ τῶν εἰς τὸ β΄ καὶ γ΄ τεταρτημόριον περατουμένων τόξων τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικόν.

ΣΗΜ. Τὸ συνημίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω συντ.

§ 19. *Μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.*—Τοῦ τόξου 0^o τελικὴ ἀκτὶς εἶναι ἡ ΟΑ, ἥτις συμπίπτει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων· συνημίτονον ἄρα τοῦ τόξου 0^o εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA}}=+1$. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου τούτου κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι τὸ τόξον βαίνει ἀπὸ 0^o αὐξανόμενον. Ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΑ΄, ὁ ποὺς Π διαγράφει συνεχῶς τὸ ἄνυσμα ΑΑ΄ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς $(\overline{O\Pi})$ ἤτοι τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου, βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον ἀπὸ $+1$ μέχρι -1, καθιστάμενον ἐν τῷ μεταξὺ 0, ὅταν $(\widehat{AM})=90^o$.



Σχ 14.

Ὅταν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α΄Β΄Α, ὁ ποὺς Μ διαγράφει τὸ ἄνυσμα Α΄Α καὶ συνεπῶς τὸ συνημίτονον βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἀπὸ -1 ἕως $+1$, καθιστάμενον πάλιν μηδέν, ὅταν $(\widehat{AM})=270^o$ (Σχ. 14). Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

τόξον	0^o. . αὐξάν . . 90^o. . αὐξ . . 180. . αὐξ. 270^o. . αὐξ. 360^o
συνημ.	$+$ 1 . . . ἐλατ 0. . . ἐλατ. . —1. . αὐξάν...0. . . αὐξ.. $+1$.

Κατὰ τὰ προειρημένα ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ συνημίτονον εἶναι $+1$, ἡ δὲ ἐλαχίστη -1. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀρνητικὰ τόξα, ὡς εὐκόλως πειθόμεθα.

§ 20. *Ἡμίτονον τόξου.*— Τῆς τελικῆς ἀκτῖνος ΟΜ τυχόντος τόξου ΑΜ (Σχ. 15) προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα ψ΄ψ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΡ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}=(\overline{OP})$. Τὸ μῆκος τοῦτο $(\overline{OP})$ καλεῖται ἡμί-

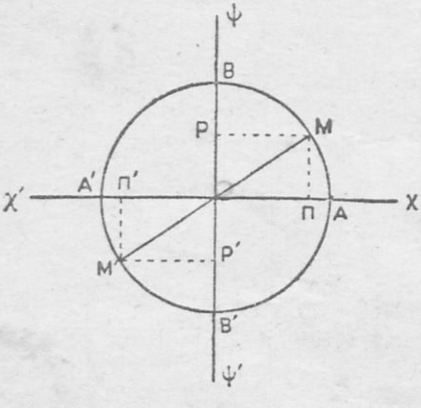
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τονον τοῦ τόξου ΑΜ· ὁμοίως τοῦ τόξου ΑΜ′ ἡμίτονον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ $\overline{\text{OP}}'$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\dfrac{\overline{\text{OP}}'}{\overline{\text{OB}}} = (\overline{\text{OP}}')$.

Γενικῶς. Ἡμίτονον τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα, ὅστις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

Ὁ πρωτεύων ἄξων ψ′ψ, ἐφ᾽ οὗ κεῖνται τὰ ἀνύσματα, ὧν τὰ μήκη καλοῦνται ἡμίτονα, καλεῖται ἄξων τῶν ἡμιτόνων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἕπεται ὅτι:



Σχ. 15.

α′ Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.

β′ Τὸ ἡμίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ᾽ ὅσον ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς αὐτοῦ ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων εἶναι ἄνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΒ τοῦ ἄξονος τούτου.

Κατὰ ταῦτα τὰ εἰς τὸ α′ καὶ β′ τεταρτημόριον καταλήγοντα τόξα ἔχουσιν ἡμίτονον θετικόν, τὰ δὲ εἰς τὸ γ′ καὶ δ′ ἔχουσιν ἡμίτονον ἀρνητικόν.

ΣΗΜ. Τὸ ἡμίτονον τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω ἡμτ.

§ 21. *Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου μετὰ τοῦ τόξου.* — Σπουδάζοντες τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμιτόνου τόξου μετὰ τοῦ τόξου, καθ᾽ ὃν τρόπον προηγουμένως (§ 19) ἐσπουδάσαμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου καταλήγομεν εὐκόλως εἰς τὰ ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι συνοψιζόμενα πορίσματα.

τόξον	0° . . αὐξάν. 90°. . . αὐξ. 180° . . αὐξ. 270°. . . αὐξ. 360°
ἡμίτονον	0 . . αὐξάν. +1 . . ἐλατ. . . 0 . . ἐλατ.—1 . . . αὐξ. . . 0

Κατὰ ταῦτα ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου εἶναι + 1 ἡ δὲ ἐλαχίστη —1. Ἰσχύει δὲ τὸ συμπέρασμα τοῦτο καὶ διὰ τὰ ἀρνητικὰ τόξα.

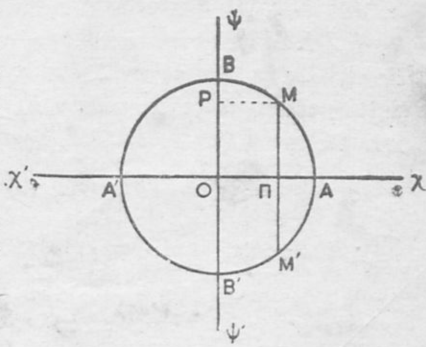
Ἀσκήσεις. 11) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως, ἣν τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.

12) Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον τόξου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 22. *Σχέσεις τοῦ ἡμιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° πρὸς τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.*—
Ἔστω Ο (Σχ. 16) τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ ΑΜ τόξον θετικὸν καὶ μικρότερον 90°, $(\overline{OP})$ τὸ ἡμίτονον καὶ $(\overline{O\Pi})$ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΠΜ πέραν τοῦ Π μέχρι τῆς περιφερείας, ὁρίζεται τὸ Μ', ὅπερ εἶναι ἀρχὴ τοῦ τόξου Μ'ΑΜ διπλασίου τοῦ ΑΜ καὶ ἔχοντος χορδὴν Μ'Μ διπλασίαν τοῦ ΠΜ. Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{OP})=(\overline{\Pi M})$, ἕπεται ὅτι $\overline{OP}) = \frac{(M'M)}{2}$ Ἄρα:

Τὸ ἡμίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.—



Σχ. 16

§ 23. *Σχέσεις τοῦ συνημιτόνου τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° πρὸς τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.*—

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° τόξου ΑΜ τὸ συνημίτονον $(\overline{O\Pi})$ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ πᾶν ἄλλο τοιοῦτον τόξον, ἕπεται γενικῶς ὅτι: Τὸ συνημίτονον τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90° ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.

Ἐφαρμογή: Κατὰ τὰ προειρημένα (§ 22,23) ἂν εἶναι $0^\circ < \mu^\circ < 90^\circ$ καὶ $\frac{360^\circ}{2\mu^\circ} = \frac{180^\circ}{\mu^\circ} = \lambda$, ἔνθα λ εἶναι ἀκέραιος, τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ τόξου μ° ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει λ πλευράς, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ τόξου μ° ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου. Οὕτως, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{360^\circ}{2.45^\circ} = \frac{180^\circ}{45^\circ} = 4$, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 45° εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ εἰς τὸν τριγ. κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ἤτοι ἡμ. $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ τόξου 45^0 ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος τοῦ εἰρημένου τετραγώνου, ἤτοι συν $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

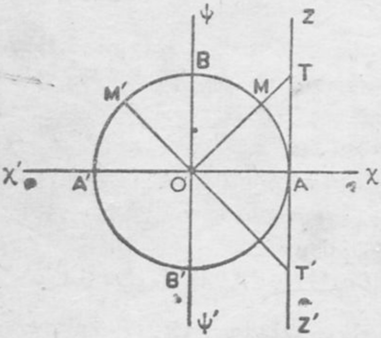
Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $30^0 = \frac{1}{2}$, ἡμ $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

συν $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συν $60^0 = \frac{1}{2}$.

Ἀσκήσεις. 13). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου 18^0.

§ 24. **Ἐφαπτομένη τόξου.**—Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον καὶ Ζ΄Ζ ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων Α ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου (Σχ. 17). Ἐὰν ἡ τελικὴ τοῦ τόξου τούτου ἀκτὶς ΟΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν Ζ΄Ζ εἰς τι σημεῖον Τ, ὁρίζεται ἐπὶ τῆς Ζ΄Ζ ἄνυσμά τι ΑΤ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{\overline{AT}}{\overline{OB}} = (\overline{AT})$. Τὸ μῆκος τοῦτο $(\overline{AT})$ καλεῖται ἐφαπτομένη τοῦ $\widehat{AM}$· ὁμοίως τοῦ $\widehat{AM'}$ ἐφαπτομένη εἶναι τὸ μῆκος τοῦ $\overline{AT'}$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{AT'}}{\overline{OB}} = (\overline{AT'})$.

Γενικῶς: Ἐφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν μὲ τὸ τόξον ἀρχὴν καὶ πέρας τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὴν ἀρχὴν ταύτην ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος.



Σχ. 17

Ἡ εὐθεῖα Ζ΄Ζ, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται τὰ ἀνύσματα, ὧν τὰ μήκη καλοῦνται ἐφαπτόμεναι τῶν τόξων, καλεῖται ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης τόξου ἕπεται ὅτι:

α΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

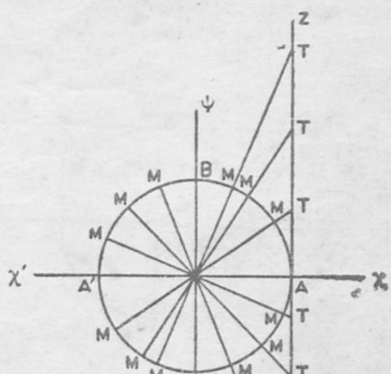
β΄) Ἡ ἐφαπτομένη τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ᾽ ὅσον τὸ ἄνυσμα, οὗ αὕτη εἶναι μῆκος, εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῷ $\overline{OB}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν τὰ εἰς τὸ α΄ καὶ γ΄ τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην, τὰ δὲ εἰς τὸ β΄ καὶ δ΄ ἀρνητικήν.

ΣΗΜ. Τὴν ἐφαπτομένην τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω ἐφτ.

§ 25. ***Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.*** — Τοῦ τόξου 0° ἡ ἀρχὴ Α καὶ τὸ τέλος Μ συμπίπτουσιν καὶ ἑπομένως $(\overline{\mathrm{AT}})$ ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ εἶναι μηδέν. Ἐὰν τὸ πέρας Μ κινῆται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἤτοι τὸ τόξον ΑΜ βαίνῃ συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 αὐξανόμενον, ἡ ἐφαπτομένη μεταβάλλεται· καὶ ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ τεταρτημόριον ΑΒ, τὸ Τ κινεῖται ἐπὶ τοῦ ΑΖ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἤτοι τὸ ἄνυσμα $\overline{\mathrm{AT}}$ βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ταχύτατα καὶ (τοῦ Μ πλησιάζοντος πρὸς τὸ Β) τὸ μῆκος τοῦ $\overline{\mathrm{AT}}$ τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι: Τοῦ τόξου τείνοντος πρὸς τὰς 90° ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον $(+\infty)$.



Σχ. 18

Ὅταν τὸ Μ ὑπερβὰν τὸ Β εἶναι ἀκόμη πολὺ πλησίον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ τόξον ἔχῃ μέτρον μεῖζον τῶν 90° κατ' ἐλάχιστον, τὸ Τ ἐπὶ τοῦ ΑΖ′ ἐμφανιζόμενον ἀπέχει τοῦ Α ἀπόστασιν πολὺ μεγάλην ἀπολύτως.

Ὥστε, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Β μεταβαῖνον ἐκ τοῦ α΄ εἰς τὸ β΄ τεταρτημόριον ἡ ἐφαπτομένη τοῦ $\widehat{\mathrm{AM}}$ μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ διακοπτομένης οὕτω τῆς συνεχείας τῶν τιμῶν αὐτῆς. Τοῦ Μ εἶτα ἀπομακρυνομένου τοῦ Β, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ $\widehat{\mathrm{AM}}$ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ $-\infty$ καὶ γίνεται μηδέν, ὅταν $(\widehat{\mathrm{AM}})=180°$. Ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὸ γ΄ τεταρτημόριον, τὸ Τ κινεῖται πάλιν ἐπὶ τοῦ ΑΖ συνεχῶς καὶ ταχύτατα ἀπομακρυνόμενον τοῦ Α, ἡ ἐφαπτομένη ἄρα τοῦ $\widehat{\mathrm{AM}}$ αὐξάνει ταχύτατα ἀπὸ τοῦ μηδενὸς καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅταν $(\widehat{AM})$ τείνῃ πρὸς τὰς 270°· καθ' ἣν στιγμὴν τὸ Μ διέρχεται διὰ τοῦ Β΄ ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ πάλιν ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ βαίνει εἶτα συνεχῶς αὐξανομένη, ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ δ΄ τεταρτημόριον, καθίσταται δὲ μηδέν, ὅταν $(\widehat{AM})=360^\circ$. Τὴν τοιαύτην τῆς ἐφαπτομένης μεταβολὴν συνοψίζομεν ὧδε :

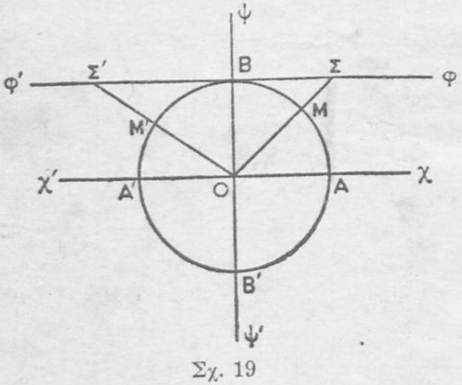
τόξον	0°	αὐξ.	90°	αὐξ.	180°	αὐξ.	270°	αὐξ.	360°
ἐφαπτ.	0	αὐξ.	$\pm\infty$	αὐξ.	0	αὐξ.	$\pm\infty$	αὐξ.	0

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐφαπτομένη τόξου δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις. 14). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως, ἣν τοῦτο κατέχει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγ. κύκλου.

15). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄνυσμα, οὗ τὸ μῆκος εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 45° καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τούτου ἰσοῦται πρὸς $+1$.

16). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται ἀπολύτως πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου τούτου καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου.



Σχ. 19

§ 26. ***Συνεφαπτομένη τόξου.*** — Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον καὶ φ΄φ ἡ εἰς τὸ πέρας τοῦ α΄ τεταρτημορίου ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου Ο (Σχ. 19). Ἐὰν ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν φ΄φ εἴς τι σημεῖον Σ, ὁρίζεται ὑπ' αὐτοῦ καὶ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Β ἄνυσμά τι $\overline{B\Sigma}$, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος $\frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{OA}}=(\overline{B\Sigma})$. Τὸ μῆκος τοῦτο $(\overline{B\Sigma})$ καλεῖται συνεφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως τοῦ $\widehat{AM'}$ συνεφαπτομένη εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος $\overline{B\Sigma'}$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{B\Sigma'}}{\overline{OA}}=(\overline{B\Sigma'})$.

Γενικῶς : Συνεφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ πέρας τοῦ α΄ τεταρτημορίου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦτο ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς τοῦ τόξου ἀκτῖνος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ εὐθεῖα φ'φ, ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ ἀνύσματα, ὧν τὰ μήκη καλοῦνται συνεφαπτόμεναι, καλεῖται ἄξων τῶν συνεφαπτομένων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συνεφαπτομένης τόξου ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

α') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.

β') Ἡ συνεφαπτομένη τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ ἄνυσμα, οὗ αὕτη εἶναι μῆκος, εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα $\overline{OA}$.

Κατὰ ταῦτα, τὰ εἰς τὸ α' καὶ γ' τεταρτημόριον περατούμενα τόξα ἔχουσι συνεφαπτομένην θετικήν, τὰ δὲ εἰς τὸ β' καὶ δ' ἀρνητικήν.

ΣΗΜ. Τὴν συνεφαπτομένην τόξου, ὅπερ ἔχει μέτρον τ, σημειοῦμεν συντόμως οὕτω σφτ.

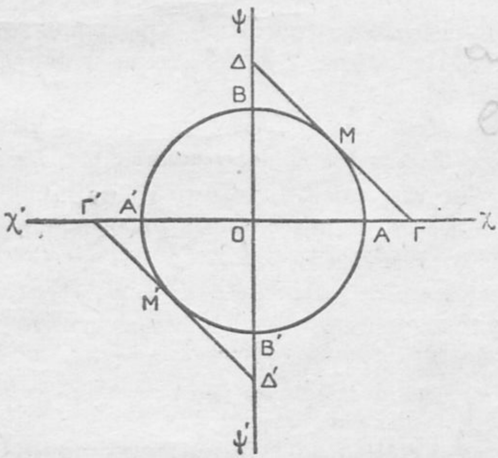
§ 27 *Μεταβολὴ τῆς συνεφαπτομένης μετὰ τοῦ τόξου.* — Σπουδάζοντες τὴν μεταβολὴν τῆς συνεφαπτομένης τόξου, ὡς ἐσπουδάσαμεν (§ 25) τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης, καταλήγομεν εἰς πορίσματα, ἅτινα συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

τόξον	0°. αὐξ.. 90°.. αὐξ.. 180°.. αὐξ.. 270°.. αὐξ. 360°
συνεφαπτ.	$+\infty$ ἐλατ...0..ἐλατ. $\mp\infty$... ἐλατ... 0.. ἐλατ...$-\infty$

Δύναται ὅθεν ἡ συνεφαπτομένη νὰ λάβῃ πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις. 17). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄνυσμα, οὗ τὸ μῆκος εἶναι συνεφαπτομένη 45° καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $+1$.

* **§ 28. *Τέμνουσα καὶ συντέμνουσα τόξου.*** — Ἔστω ΑΜ τυ-



Σχ. 20

χὸν τόξον (Σχ. 20) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εἰς τὸ πέρας Μ αὐτοῦ ἐφαπτομένη τοῦ τριγ. κύκλου τέμνει τὸν μὲν ἄξονα τῶν συνημιτόνων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἴς τι σημεῖον Γ, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ἡμιτόνων εἰς τὸ Δ. Τὸ κέντρον Ο καὶ τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουσι τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ. Τοῦ πρώτου τούτων τὸ μῆκος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{ΟΓ}}{\overline{ΟΑ}}=(\overline{ΟΓ})$, καλεῖται τέμνουσα τοῦ τόξου ΑΜ· τοῦ δὲ δευτέρου τὸ μῆκος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{ΟΔ}}{\overline{ΟΒ}}=(\overline{ΟΔ})$ καλεῖται συντέμνουσα τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΜ.

Ὁμοίως τοῦ τόξου ΑΜ′ τέμνουσα μὲν εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{ΟΓ'}}{\overline{ΟΑ}}=(\overline{ΟΓ'})$, συντέμνουσα δὲ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\overline{ΟΔ'}}{\overline{ΟΒ}}=(\overline{ΟΔ'})$.

Γενικῶς: Τέμνουσα τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τριγ. κύκλου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου.

Συντέμνουσα τόξου καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τριγ. κύκλου, τέλος δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων καὶ τῆς εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ τριγ. κύκλου.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων ἕπεται ὅτι:

α′) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν αὐτὴν συντέμνουσαν.

β′) Ἡ τέμνουσα τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ᾽ ὅσον τὸ ἄνυσμα, οὗ αὕτη εἶναι μῆκος, εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ.

Κατὰ ταῦτα, ὅσα τόξα λήγουσιν εἰς τὸ α′ ἢ δ′ τεταρτημόριον ἔχουσι τέμνουσαν θετικήν, ὅσα δὲ περατοῦνται εἰς τὸ 6′ ἢ γ′ ἀρνητικήν.

γ′) Ἡ συντέμνουσα τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ᾽ ὅσον τὸ ἄνυσμα, οὗ αὕτη εἶναι μῆκος, εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΒ.

Κατὰ ταῦτα, ὅσα τόξα περατοῦνται εἰς τὸ α′ ἢ 6′ τεταρτημόριον ἔχουσι συντέμνουσαν θετικήν, ὅσα δὲ περατοῦνται εἰς τὸ γ′ ἢ δ′ ἀρνητικήν.

ΣΗΜ. Τὴν τέμνουσαν τόξου ἔχοντος μέτρον τ σημειοῦμεν συντόμως οὕτω: τεμτ., τὴν δὲ συντέμνουσαν οὕτω: στεμτ.

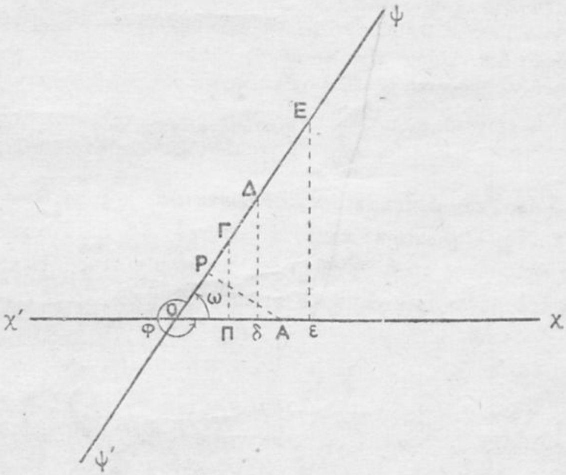
§ *29*. ***Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τριγ. γραμμαὶ τόξου.***— Τὸ συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα καὶ συντέμνουσα τόξου καλοῦνται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου τούτου. Τὰ δὲ ἀνύσματα, ὧν οὗτοι εἶναι μήκη, καλοῦνται πάντα ὁμοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ τοῦ τόξου τούτου. Πρὸς διάκρισιν ἀπ' ἀλλήλων ἑκάστη τριγ. γραμμὴ τόξου λαμβάνει τὸ ὄνομα τοῦ μήκους αὐτῆς.

§ 30. *Τριγων. ἀριθμοὶ καὶ γραμμαὶ γωνίας.* — Καλεῖται συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα καὶ συντέμνουσα γωνίας ὁ ὁμώνυμος τριγ. ἀριθμὸς ἢ γραμμὴ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (§ 15) τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου.

§ 31. *Συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο τόξων.* — Ἔστωσαν χ'χ καὶ ψ'ψ (Σχ. 21) δύο ἄξονες τεμνόμενοι εἰς τὸ Ο καὶ ἔχοντες ἴσα διευθύνοντα ἀνύσματα ΟΑ καὶ ΟΓ. Ἐμάθομεν (§ 16) ὅτι γωνία τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν ἀξόνων τούτων εἶναι ἡ ω ἢ ἡ φ, καθ' ὅσον ὡς ἀρχικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ὁ



Σχ. 21

ἡμιάξων Οχ ἢ Οψ. Κατὰ τὴν α' περίπτωσιν εἶναι συν ω=$(\overline{\text{ΟΠ}})$ κατὰ δὲ τὴν β' συνφ=$(\overline{\text{ΟΡ}})$, Ἐπειδὴ δὲ (§ 16 σημ.) εἶναι $(\overline{\text{ΟΠ}})=(\overline{\text{ΟΡ}})$, ἕπεται ὅτι συνω=συνφ, ἤτοι: Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο ἀξόνων εἶναι τὸ αὐτό, οἱασδήποτε οὔσης τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς.

§ 32. *Μῆκος τῆς ἐπὶ ἄξονα προβολῆς ἀνύσματος.* — Ἔστω ΔΕ (Σχ. 21) τυχὸν ἄνυσμα, ΟΓ τὸ διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὸ ἄξονος ψ'ψ καὶ $\overline{\text{δε}}$ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ ἕτερον ἄξονα χ'χ, ὅστις τέμνεται ὑπὸ τοῦ α' κατὰ τὸ Ο καὶ ἔχει διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ ἴσον τῷ $\overline{\text{ΟΓ}}$. Ἐπειδὴ τὰ $\overline{\text{ΔΕ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΓ}}$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, ἕπε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται (§ 8, Α΄) ὅτι $\dfrac{\overline{\delta\varepsilon}}{\overline{ΟΠ}} = \dfrac{\overline{ΔΕ}}{\overline{ΟΓ}}$, ὅθεν $\dfrac{(\overline{\delta\varepsilon})}{(\overline{ΟΠ})} = (\overline{ΔΕ})$ καὶ ἐπομένως $(\overline{\delta\varepsilon}) = (\overline{ΔΕ})(\overline{ΟΠ})$

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{ΟΠ})$=συνω=συνφ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται.

$$(\overline{\delta\varepsilon}) = (\overline{ΔΕ}).\ συνω = (\overline{ΔΕ}).\ συνφ.$$

Ἄρα : ***Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων τοῦ προβολικοῦ ἄξονος καὶ τοῦ περιέχοντος τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἄξονος.***

Ἀσκήσεις. 18). Ἄνυσμα μήκους 0,15 κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν διευθύνσεων δύο πρωτευόντων ἀξόνων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἀξόνων τούτων.

19). Ἄνυσμα μήκους 0,40μ κεῖται ἐπὶ ἄξονος, ὅστις τέμνει τὸν προβ. ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 60°. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ;

20). Ἀνύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος τέμνοντος τὸν προβ. ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 30° ἡ προβολὴ ἔχει μῆκος $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου;

§ 33. *Τόξα, ὧν δίδεται τριγωνομετρικός τις ἀριθμός.* — Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων κατέστη φανερὸν ὅτι εἰς ἕκαστον τόξον ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος τριγ. ἀριθμὸς ἐξ ἑκάστου εἴδους. Ἐξετάσωμεν ἤδη, ἂν εἰς δεδομένον τριγ. ἀριθμὸν ἀντιστοιχῇ ἢ οὔ ὡρισμένον τόξον.

Σχ. 22

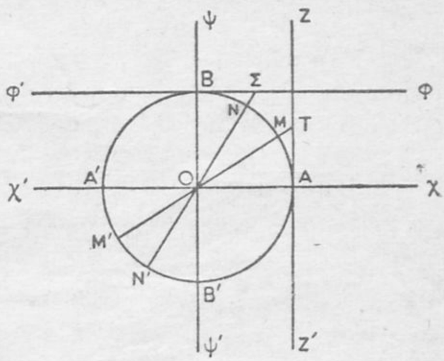
Α΄. Ἔστω ὅτι δίδεται ἀριθμός τις α μὴ ὑπερβαίνων ἀπολύτως τὴν μονάδα καὶ ζητεῖται νά εὑρεθῇ τόξον ἔχον συνημίτονον τὸ α. Ὁρίζομεν πρῶτον ἐπὶ τῆς περιφερείας τριγ. κύκλου τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἀντίστοιχον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων (Σχ. 22). Εἶτα ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ κέντρου Ο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων τὸ ἄνυσμα ΟΠ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ Π τὴν χορδὴν ΜΜ΄ κάθετον ἐπὶ τὸν χ΄χ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ εἰς τὰ ἄκρα Μ καὶ Μ΄ τῆς χορδῆς ταύτης περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὸ δεδομένον συνημίτονον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β΄. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α εἶναι ἡμίτονον, ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ψ΄ψ καὶ κατανοοῦμεν ὅτι δεδομένον ἡμίτονον $α=(\overline{OP})$ ἔχουσι τὰ εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Ν΄ περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτά. (Σχ. 22).

Γ΄. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τόξον ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς τυχόντα δεδομένον ἀριθμὸν α, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων (Σχ. 23) ἄνυσμα ΑΤ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὴν διὰ τοῦ Τ διερχομένην διάμετρον· ἂν Μ καὶ Μ΄ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, τὰ τόξα, ἅτινα περατοῦνται εἰς τὸ Μ καὶ Μ΄ καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν δεδομένην ἐφαπτομένην.

Δ΄. Ἂν ὁ δεδομένος τυχὸν ἀριθμὸς α εἶναι συνεφαπτομένη τόξου, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἄνυσμα ΒΣ ἔχον μῆκος α καὶ ἄγομεν τὴν διάμετρον ΟΣ. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὴν δοθεῖσαν συνεφαπτομένην ἔχουσι τὰ εἰς τὰ Ν καὶ Ν΄ (Σχ. 23) περατούμενα τόξα καὶ μόνον αὐτά.



Σχ. 23

Κατὰ ταῦτα τὸν δεδομένον τριγ. ἀριθμὸν ἔχουσι 4 τόξα (1), ὧν τὰ δύο θετικὰ καὶ τὰ δύο ἀρνητικὰ (ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι α ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος, ἐφ᾽ ὅσον οὗτος εἶναι ἡμίτονον ἢ συνημίτονον).

ΣΗΜ. α΄. Ἂν $α=\pm 1$ διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἢ $α=0$ διὰ τὴν ἐφ. ἢ σφ. ὁ ἀριθμὸς τῶν τόξων περιορίζεται εἰς 2.

ΣΗΜ. β΄. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὰ πέρατα τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι δεδομένην τέμνουσαν ἢ συντέμνουσαν.

Ἀσκήσεις. 21). Ὁρισθείσης τῆς κοινῆς τῶν τόξων ἀρχῆς Α νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει συνημίτονον $\frac{1}{2}$.

22). Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{3}$.

23). Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην 3.

24). Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει συνεφαπτομένην—1.

---

(1) Δὲν θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος τόξα ὑπερβαίνοντα ἀπολύτως τὴν περιφέρειαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

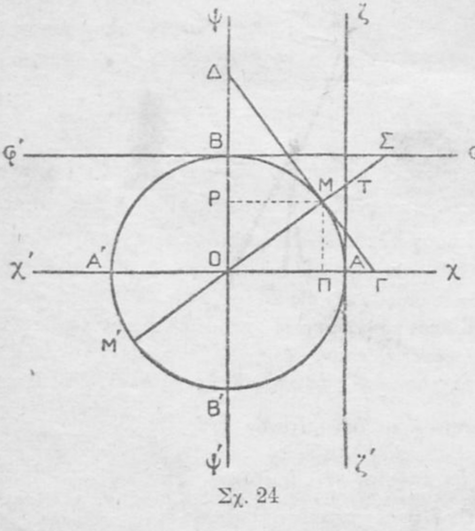
§ 34. *Σχέσεις τῶν τριγων. ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ τόξου.* — Α'. Ἔστω ΑΜ (Σχ. 24) τυχὸν τόξον ἔχον μέτρον τ καὶ $(\overline{ΟΠ})$, $(\overline{ΟΡ})$, $(\overline{ΑΤ})$, $(\overline{ΒΣ})$, $(\overline{ΟΓ})$ καὶ $(\overline{ΟΔ})$ οἱ τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ. Τοῦ τριγώνου ΟΜΠ ὄντος ὀρθογωνίου ἀληθεύει, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἡ ἰσότης $(\overline{ΟΠ})^2+(\overline{ΠΜ})^2=(\overline{ΟΜ})^2$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{ΟΠ})=$συντ, $(\overline{ΠΜ})=$ἡμτ καὶ $(\overline{ΟΜ})^2=1$, αὕτη γίνεται

$$συν^2τ+ἡμ^2τ=1. \qquad (1)$$

Ἄρα : Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι.

Β'. Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΤ καὶ ΟΠΜ ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{ΑΤ}{ΠΜ}=\frac{ΟΑ}{ΟΠ}$ ἢ $\frac{ΑΤ}{ΟΡ}=\frac{ΟΑ}{ΟΠ}$. Ἐπειδὴ δέ, ὅταν $\overline{ΑΤ}$ καὶ $\overline{ΟΡ}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ τὰ $\overline{ΟΑ}$ καὶ $\overline{ΟΠ}$ εἶναι ὁμοίως ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, οἱ λόγοι $\frac{\overline{ΑΤ}}{\overline{ΟΡ}}$ καὶ $\frac{\overline{ΟΑ}}{\overline{ΟΠ}}$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημοι· ἀληθεύει ἄρα ἡ ἰσότης αὐτῶν καὶ ὅταν οἱ ὅροι αὐτῶν λάβωσι τὸ προσῆκον ἕκαστος σημεῖον· εἶναι ἄρα καὶ



Σχ. 24

$\frac{(\overline{ΑΤ})}{(\overline{ΟΡ})}=\frac{1}{(\overline{ΟΠ})}$ ἢ $\frac{ἐφ\ τ}{ἡμ\ τ}=\frac{1}{συντ}$, ἄρα

$$ἐφτ=\frac{ἡμτ}{συντ} \qquad (2)$$

Ἤτοι : Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Γ'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΣ καὶ ΟΡΜ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$σφτ=\frac{συντ}{ἡμτ}. \qquad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤτοι : Ἡ συνεφαπτομένη τόξου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

* Δ'. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΜΓ (Σχ. 24) εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὰ ἀνύσματα ΟΠ, ΟΓ εἶναι πάντοτε ὁμόρροπα, ἀληθεύει, ὅπου δήποτε τῆς περιφερείας καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἡ ἰσότης $(\overline{ΟΓ})\cdot(\overline{ΟΠ})=(\overline{ΟΜ})^2$, ἢ τέμτ. συντ.=1, ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι

$$τεμ\,τ=\frac{1}{συντ} \qquad (α)$$

Ἄρα : Ἡ τέμνουσα τόξου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

* Ε'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΜΔ εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$στεμ\,τ=\frac{1}{ἡμτ} \qquad (β)$$

Ἄρα : Ἡ συντέμνουσα τόξου εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θὰ κάμωμεν λόγον μόνον περὶ συνημιτόνου, ἡμιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης, οἵτινες ἀναγκαιοῦσι καὶ ἀρκοῦσι διὰ τὸν σκοπὸν τῆς τριγωνομετρίας.

Ἀσκήσεις. 25). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκάστου τῶν τόξων 45^0, 30^0, 60^0.

26). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι καὶ ὁμόσημοι.

27). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1+ἐφ^2τ=\frac{1}{συν^2τ}$.

28). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1+σφ^2τ=\frac{1}{ἡμ^2τ}$.

29). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $σφ^2τ-συν^2τ=σφ^2τ.\ συν^2τ$.

30). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{σφα+σφβ}{ἐφα+ἐφβ}=\frac{1}{ἐφα.\ ἐφβ}$.

31). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων χ, δι' ἃ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\frac{ἐφχ}{σφχ}=4$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 35. *Πρόβλημα Α'. Δεδομένου τοῦ συνημιτόνου τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.*

α'. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου. — Λύοντες τὴν ἰσότητα (1) πρὸς ἡμτ. εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$ἡμτ=\pm\sqrt{1-συν^2τ} \qquad (4)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ἡμτ δεδομένου τοῦ συντ. Τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τῆς ἰσότητος (4) σημεῖον ὁρίζεται, ἂν εἶναι γνωστὸν τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ λήγει τὸ τόξον τ.

ΣΗΜ. Τὴν ὕπαρξιν τοῦ διπλοῦ σημείου ἐξηγοῦμεν εὐκόλως ἐνθυμούμενοι (§ 33 Α') ὅτι τὸ δεδομένον συνημίτονον π. χ. $(\overline{\text{οπ}})$ (Σχ. 22) ἔχουσι τὰ εἰς τὸ Μ καὶ Μ' περατούμενα τόξα, ὧν τὰ ἡμίτονα εἶναι ἀντίθετα.

β'. ***Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης.***—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (4) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\text{εφτ}=\frac{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\text{τ}}}{\text{συν τ}} \qquad (5)$$

γ'. ***Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης***.—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\text{σφτ}=\frac{\text{συντ}}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\text{τ}}} \qquad (6)$$

ΣΗΜ. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τῶν (5) καὶ (6) ἐξηγεῖται ὡς καὶ τὸ τῆς ἰσότητος (4)· ὁρίζεται δὲ τὸ σημεῖον ἐν ἑκατέρᾳ τῶν (5) καὶ (6), ἂν ὁρισθῇ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον τ.

§ 36. Πρόβλημα Β'. Δεδομένου τοῦ ἡμιτόνου τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.—Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$\text{συντ}=\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\text{τ}},\ \text{εφτ}=\frac{\text{ημτ}}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\text{τ}}},\ \text{σφτ}=\frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\text{τ}}}{\text{ημτ}} \qquad (7)$$

δι' ὧν λύεται τὸ πρόβλημα. Διὰ τὰ πρὸ τῶν ῥιζικῶν σημεῖα ἰσχύουσιν, ὅσα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα σχετικὰ εἴπομεν.

§ 37. Πρόβλημα Γ'. Δεδομένης τῆς ἐφαπτομένης τόξου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

α'. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου.— Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) τεθειμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\text{ημτ}}{\text{συντ}}=\frac{\text{εφτ}}{1}$ προκύπτει δι' ἀλλαγῆς τῶν μέσων $\frac{\text{ημτ}}{\text{εφτ}}=\frac{\text{συντ}}{1}$, ἐξ ἧς δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\text{ημ}^2\text{τ}}{\text{εφ}^2\text{τ}}=\frac{\text{συν}^2\text{τ}}{1}$. Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν εἰς ταύτην γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας $\frac{\text{ημ}^2\text{τ}}{\text{φ}^2\text{τ}}=\frac{\text{συν}^2\text{τ}}{1}=\frac{1}{1+\text{εφ}^2\text{τ}}$, ἐξ ὧν $\frac{\text{ημτ}}{\text{εφτ}}=\frac{\text{συντ}}{1}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{τ}}}$ ὅθεν

$$\text{ημτ}=\frac{\text{εφτ}}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{τ}}}\ \text{καὶ}\ \text{συντ}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\text{τ}}} \qquad (8)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων βλέπομεν ὅτι διὰ τῆς ἐφτ μόνον δὲν ὁρίζεται τελείως τὸ ἡμτ καὶ συντ· χρειάζεται πλὴν ταύτης νὰ ὁρισθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται το τόξον τ.

β'. Εὕρεσις τῆς συνεφαπτομένης.— Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) πολλαπλασιαζομένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης σφτ.ἐφτ=1,

ὅθεν
$$\sigma\varphi\,\tau = \frac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\tau} \qquad (9)$$

δι' ἧς ὁρίζεται ἡ σφτ ἐκ τῆς ἐφτ.

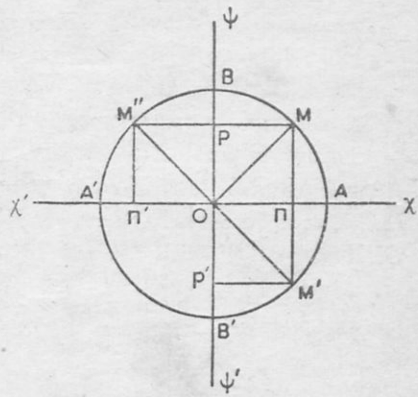
Ἀσκήσεις. 32). Εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τόξου λήγοντος εἰς τὸ γ'τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος συνημίτονον $-\frac{3}{5}$.

33). Εὑρεῖν τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμοὺς τόξου περατουμένου εἰς τὸ α' τεταρτημόριον καὶ ἔχοντος ἐφαπτομένην $\frac{3}{4}$.

34). Νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῆς συνεφαπτομένης τόξου οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

35). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta}{\text{ἡμ}^2\alpha.\ \text{ἡμ}^2\beta} = \frac{1-\text{ἐφ}^2\alpha.\ \text{ἐφ}^2\beta}{\text{ἐφ}^2\alpha.\text{ἐφ}^2\beta}$.

§ 38. Σχέσεις τῶν τριγ ἀριθμῶν τόξων ἀντιθέτων. — Ἔστω ΑΜ τυχὸν τόξον, ΑΜ' τὸ ἀντίθετόν του (Σχ. 25), τ δὲ καὶ — τ τὰ μέτρα αὐτῶν. Ἐπειδὴ (§ 11) ἡ χορδὴ ΜΜ' τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι αἱ ἀκτῖνες ΟΜ καὶ ΟΜ' ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν $\overline{\text{ΟΠ}}$ ἐπὶ τὸν χ'χ καὶ $(\overline{\text{ΠΜ}'}) = -(\overline{\text{ΠΜ}})$ ἢ $(\overline{\text{ΟΡ}'}) = -(\overline{\text{ΟΡ}})$.



Σχ. 25

Ἄρα : **συν (—τ)=συντ καὶ ἡμ(—τ)=—ἡμτ.** **(10)**

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

$$\dot{\varepsilon}\varphi(-\tau) = -\dot{\varepsilon}\varphi\tau,\quad \sigma\varphi(-\tau) = -\sigma\varphi\tau. \qquad (11)$$

Ἤτοι : Δύο τόξα ἀντίθετα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις. 36). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -45°, -30°, -60°.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 39. Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων παραπληρωματικῶν. — Ἔστω ΑΜ (Σχ. 25) τυχὸν τόξον ἔχον μέτρον τ, ΑΜ″ τὸ παραπληρωματικὸν (§ 13) αὐτοῦ, οὗ τὸ μέτρον εἶναι $180^\circ - τ$. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΜΜ″ εἶναι (§ 13) κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ψ′ψ, ἕπεται ὅτι

$$(\overline{ΟΡ}) = ημτ = ημ(180 - τ)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς $(\overline{ΡΜ''}) = (\overline{ΟΠ'})$, $(\overline{ΡΜ}) = (\overline{ΟΠ})$ καὶ $(\overline{ΡΜ''}) = -(\overline{ΡΜ})$ ἕπεται ὅτι $(\overline{ΟΠ'}) = -(\overline{ΟΠ})$ ἢ

$$συν(180^\circ - τ) = -συντ. \text{ Ὥστε :}$$

$$ημ(180^\circ - τ) = ημτ, \quad συν(180^\circ - τ) = -συντ. \qquad (12)$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

$$εφ(180 - τ) = -εφτ, \quad σφ(180 - τ) = -σφτ. \qquad (13)$$

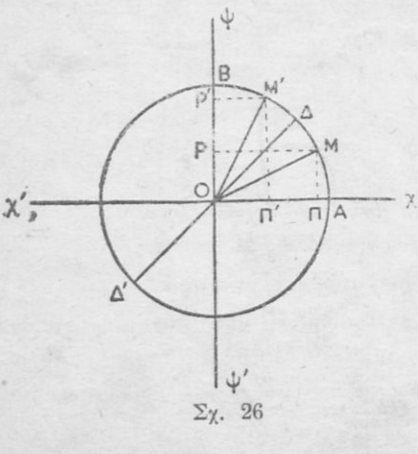
Ἄρα : Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις. 37). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 135°, 150°, 120°.

38). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -135°, -150°, -120°.

§ 40. Σχέσεις τριγ. ἀριθμῶν τόξων συμπληρωματικῶν. — Ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ α′ τεταρτημορίου ΑΒ καὶ τόξον τι ΑΜ (Σχ. 26), ὅπερ λήγει εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον καὶ ἔχει μέτρον τ· τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ ΑΜ′ ἔχει μέτρον $90^\circ - τ$ καὶ περατοῦται εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν διάμετρον Δ′ΟΔ (§ 14).

Ἐπειδὴ δὲ ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν ἡμίσεων τεταρτημορίου τόξων ΑΔ καὶ ΔΒ τῶν ἴσων ΜΔ καὶ ΔΜ′ ὑπολείπονται τόξα ΑΜ καὶ Μ′Β ἴσα, ἕπεται ὅτι γων. ΑΟΜ = γων. Μ′ΟΒ. Τὰ ὀρθογώνια ὅθεν τρίγωνα ΟΜΠ καὶ ΟΡ′Μ′ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΠΜ = Ρ′Μ′ καὶ ΟΠ = ΟΡ′.



Σχ. 26

Ἐπειδὴ δὲ ΠΜ = ΟΡ καὶ Ρ′Μ′ = ΟΠ′, ἕπεται ὅτι ΟΡ = ΟΠ′ καὶ ΟΠ = ΟΡ′. Ἀλλὰ τὰ εὐθ. τμήματα ἑκατέρας τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἀμφότερα ὁμόρροπα πρὸς τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων, ἐφ᾽ ὧν ταῦτα κεῖνται, διὰ τοῦτο δὲ τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων ἀνυσμάτων εἶναι ἴσα, ἤτοι $(\overline{ΟΠ'}) = (\overline{ΟΡ})$ καὶ $(\overline{ΟΡ'}) = (\overline{ΟΠ})$ ἢ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\textit{συν}\ (90^0-\tau)=\textit{ἡμτ καὶ ἡμ}\ (90^0-\tau)=\textit{συντ} \qquad (14).$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ ὅταν τὸ Μ λήγῃ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο τεταρτημόριον. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (14) προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

$$\textit{σφ}\ (90^0-\tau)=\textit{ἐφτ},\ \textit{ἐφ}\ (90^0-\tau)=\textit{σφτ}. \qquad (15).$$ ***Ἄρα :***

Ἐὰν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ μὲν ἡμίτονον ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον, ἡ δὲ ἐφαπτομένη πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἑτέρου,

Ἀσκήσεις. 39). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ θετικὸν καὶ μικρότερον τεταρτημορίου τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{5}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ εἶτα τὸ πέρας τοῦ συμπληρωματικοῦ του.

40). Νὰ ὁρισθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ συνημίτονόν του.

41). Ἂν τρία τόξα Α, Β, Γ (ἢ γωνίαι) ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 180^0, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$.

* **§ 41. *Σχέσεις τῶν τριγων. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων κατὰ 90⁰.***— Ἔστωσαν τ καὶ $90^0+\tau$ τὰ μέτρα δύο τοιούτων τόξων. Παρατηροῦντες ὅτι $(90^0+\tau)+(-\tau)=90^0$, συμπεραίνομεν (§ 40,38) ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \textit{ἡμ}\ (90^0+\tau)&=\textit{συν}(-\tau)=\textit{συν}\ \tau \\ \textit{συν}\ (90^0+\tau)&=\textit{ἡμ}(-\tau)=-\textit{ἡμ}\ \tau \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες :

$$\textit{ἐφ}(90^0+\tau)=-\textit{σφτ},\ \textit{σφ}\ (90^0+\tau)=-\textit{ἐφτ}. \qquad (\beta)$$

Ἀσκήσεις. 42). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 135^0, 150^0, 120^0 δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τῆς προηγουμένης § 41.

§ 42. *Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων διαφερόντων κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.*— Ἔστω ΑΜ (Σχ. 27) τόξον τι ἔχον μέτρον τ καὶ ΜΟΜ' ἡ διὰ τοῦ πέρατος αὐτοῦ διερχομένη διάμετρος· προφανῶς τὸ τόξον ΑΜΜ' ὑπερβαίνει τὸ ΑΜ κατὰ 180^0 καὶ ἔχει κατ' ἀκολουθίαν μέτρον $180^0+\tau$.

Προβαλλομένων τῶν τελικῶν αὐτῶν ἀκτίνων ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων εἶναι προφανὲς ὅτι ἡμ $(180^0+\tau)=(\overline{OP'})$, ἡμ $\tau=(\overline{OP})$, συν $(180^0+\tau)=(\overline{O\Pi'})$, συν $\tau=(\overline{O\Pi})$. (1)

Ἕνεκα δὲ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΟΜΠ, ΟΜ'Π' τὰ ἀνύσματα ΠΜ $(=\overline{OP})$ καὶ Π'Μ' $(=\overline{OP'})$ εἶναι ἐφαρμόσιμα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ $\overline{O\Pi}$, $\overline{O\Pi'}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐφαρμόσιμα ταῦτα ἀνύσματα εἶναι ἀντίρροπα, ἕπεται ὅτι : $(\overline{OP'})=-(\overline{OP})$, $(\overline{O\Pi'})=-(\overline{O\Pi})$. Παραβάλλοντες ταύτας πρὸς τὰς ἰσότητος (1) συνάγομεν ὅτι :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$ημ(180^\circ+τ)=-ημτ, \quad συν(180^\circ+τ)=-συντ \qquad (16)$$

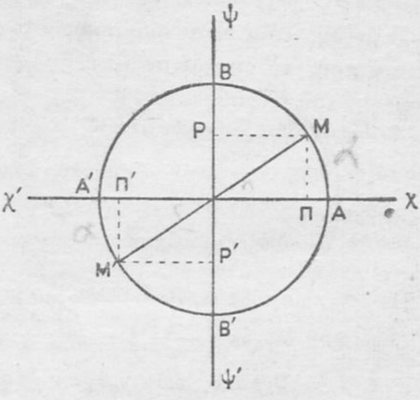
ἐξ ὧν προκύπτουσι καὶ αἱ ἰσότητες

$$εφ(180^\circ+τ)=εφτ \text{ καὶ } σφ(180^\circ+τ)=σφτ \qquad (17)$$

Ἄρα: Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ ἡμιπεριφέρειαν, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις. 43). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 225°, 210° καὶ 240°.

44). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων —225°,—210° καὶ—240°.



Σχ. 27

§ 43. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξων ἐχόντων ἄθροισμα ἢ διαφορὰν 270°. Α′. Ἔστωσαν τ καὶ 270°—τ τὰ μέτρα δύο τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἄθροισμα 270°. Παρατηροῦτες ὅτι 270°—τ=180°+(90°—τ) καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τοὺς τύπους (16 καὶ 14) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{aligned} ημ(270^\circ-τ)&=-ημ(90^\circ-τ)=-συντ, \\ συν(270^\circ-τ)&=-συν(90^\circ-τ)=-ημτ, \end{aligned} \qquad (α)$$

ἐξ ὧν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$εφ(270^\circ-τ)=σφτ, \quad σφ(270^\circ-τ)=εφτ. \qquad (β)$$

Β′. Ἔστωσαν τ καὶ 270°+τ τὰ μέτρα δύο τόξων, τὰ ὁποῖα διαφέρουσι κατὰ 270°. Παρατηροῦντες ὅτι (270°+τ)+(—τ)=270° καὶ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τοὺς προηγουμένως εὑρεθέντας τύπους (α) καὶ τὴν ἰσότητα (10) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{aligned} ημ(270^\circ+τ)&=-συν(-τ)=-συντ, \\ συν(270^\circ+τ)&=-ημ(-τ)=ημτ, \end{aligned} \qquad (γ)$$

ἐξ ὧν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$εφ(270^\circ+τ)=-σφτ, \quad σφ(270^\circ+τ)=-εφτ \qquad (δ)$$

§ 44. Σχέσεις τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο τόξων ἐχόντων ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν.— Ἔστω τόξον τι ΑΜ (Σχ. 25) ἔχον μέτρον τ καὶ ΑΜ′ ἕτερον τόξον, ὅπερ μετὰ τοῦ ΑΜ ἔχει ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, καὶ οὗ τὸ μέτρον θὰ εἶναι προφανῶς 360° — τ. Ἐπειδὴ 360°—τ= (—τ) + 360°, τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον 360° — τ, περατοῦται εἰς ὃ σημεῖον καὶ τὸ τόξον, ὅπερ ἔχει μέτρον (—τ),

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Διὰ τοῦτο μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων τούτων ὑφίστανται αἱ μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν δύο ἀντιθέτων τόξων (§ 38) ὑπάρχουσαι σχέσεις ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{l} ἡμ\,(360^{\circ}-τ)=-ἡμτ,\ συν\,(360^{\circ}-τ)=συντ \\ ἐφ\,(360^{\circ}-τ)=-ἐφτ,\ (σφ\,360^{\circ}-τ)=-σφτ \end{array}\right\} \quad (18)$$

Ἄρα : Ἐὰν δύο τόξα ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγ. ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις. 45). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 315°, 330° καὶ 300°.

46). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων —315°,—300° καὶ —330°.

§ 45. *Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον.*— Οὕτω καλεῖται ἡ ἐργασία, δι᾽ ἧς ἀνάγεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τριγ. ἀριθμῶν τυχόντος τόξου εἰς ὑπολογισμὸν τῶν τριγ. ἀριθμῶν τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου 90°. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη γίνεται ὡς ἀκολούθως.

α′) Ἔστω τόξον θετικὸν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας, π. χ. 127°. Τούτου παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ $180^{\circ}-127^{\circ}=53^{\circ}$ καὶ ὡς γνωστὸν (§ 39) εἶναι ἡμ $127^{\circ}=$ ἡμ53°, συν $127^{\circ}=-$ συν 53°

$$ἐφ\,127^{\circ}=-ἐφ\,53^{\circ},\ σφ\,127^{\circ}=-συν\,53^{\circ}$$

β′) Ἔστω τόξον 200°, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον. Ἀφαιροῦντες ἀπ᾽ αὐτοῦ 180° εὑρίσκομεν 20° καὶ ὡς γνωστὸν (§ 42) εἶναι ἡμ $200^{\circ}=-$ἡμ 20°, συν $200^{\circ}=-$ συν 20°, ἐφ $200^{\circ}=$ἐφ 20° καὶ σφ $200^{\circ}=$σφ 20°.

γ′) Ἔστω τόξον 310°, ὅπερ περατοῦται εἰς τὸ δ′ τεταρτημόριον. Ἀφαιροῦντες αὐτὸ ἀπὸ 360° εὑρίσκομεν τόξον 50° καὶ ὡς γνωστὸν (§ 44) εἶναι ἡμ $310^{\circ}=-$ἡμ 50° κλπ.

Ἐὰν τὸ δεδομένον τόξον εἶναι ἀρνητικόν, διὰ τῶν τύπων (10) καὶ (11) ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων. Οὕτω ἡμ $(-132^{\circ})=-$ ἡμ $132^{\circ}=-$ ἡμ 48°, συν $(-132^{\circ})=$ συν 132° $=-$ συν 48° κλπ.

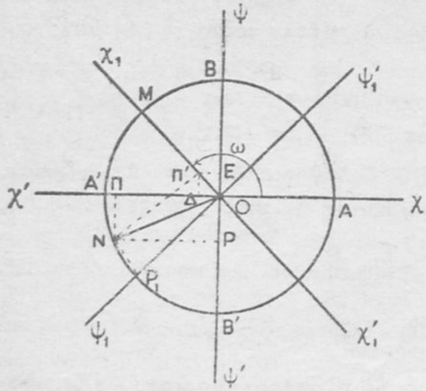
Ἀσκήσεις. 47). Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον ἕκαστον τῶν τόξων 113°,—20° καὶ 325°.

ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ Η ΓΩΝΙΩΝ

§ 46. *Εὕρεσις τοῦ συν (α+β) καὶ τοῦ ἡμ (α+β).* —Ἔστωσαν ΑΜ καὶ ΜΝ (Σχ. 28) δύο διαδοχικὰ τόξα ἔχοντα ἀντιστοί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χως μέτρα α καὶ β καὶ ἄθροισμα τὸ τόξον ΑΝ, ὅπερ ἔχει μέτρον (α+β). Ἔστωσαν δὲ ἔτι δύο συστήματα πρωτευόντων ἀξόνων, ἓν μὲν (χ′χ, ψ′ψ) ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ Α καὶ ἕτερον ($\chi_1'\chi_1$, $\psi_1'\psi_1$) ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀρχὴν τόξων τὸ Μ. Τούτων τεθέντων, ἂν Π, Ρ, Π_1, P_1 εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ Ν ἐπὶ τοὺς εἰρημένους ἄξονας, θὰ ἀληθεύωσιν (§ 18 καὶ 20) αἱ ἰσότητες: συν (α+β) = $(\overline{O\Pi})$, ἡμ (α+β)= $(\overline{OP})$, συν β= $(\overline{O\Pi_1})$, καὶ ἡμ β=$(\overline{OP_1})$.



Σχ. 28

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸν χ′χ ὡς προβολικὸν ἄξονα καὶ καλέσωμεν Δ τὴν ἐπ᾽ αὐτὸν προβολὴν τοῦ Π_1, θέλομεν ἔχει (§ 7, 8):

συν (α+β)=$(\overline{O\Pi})$=$(\overline{O\Delta})$+$(\overline{\Delta\Pi})$=προβ. $(\overline{O\Pi_1})$+προβ $(\overline{\Pi_1 N})$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ (§ 32) προβ. $(\overline{O\Pi_1})$=$(\overline{O\Pi_1})$.συνω, $(\overline{O\Pi_1})$ = συνβ κα συνω=συνα, ἕπεται ὅτι: προβ $(\overline{O\Pi_1})$=συνα. συνβ. (2)

Παρατηροῦντες εἶτα ὅτι τὰ ἀνύσματα $\Pi_1 N$ καὶ OP_1 εἶναι ὁμόρροπα συνάγομεν (§ 8) ὅτι προβ. $(\overline{\Pi_1 N})$=προβ $(\overline{OP_1})$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄνυσμα OP_1, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\psi_1'\psi_1$, οὗ ἡ θετικὴ διεύθυνσις $O\psi_1$ σχηματίζει μετὰ τῆς θετικῆς διευθύνσεως Οχ τοῦ προβ. ἄξονος χ′χ γωνίαν $\chi o \chi_1 + \chi_1 o \psi_1 = \omega + 90^o$, ἕπεται (§ 32) ὅτι προβ $(\overline{OP_1})$ = $(\overline{OP_1})$ συν $(\omega + 90^o)$, κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲ καὶ προβ $(\overline{\Pi_1 N})$=$(\overline{OP_1})$ συν $(\omega+90^o)$.

Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $(\overline{OP_1})$=ἡμβ καὶ συν $(\omega+90^o)$= ἡμ (— ω) = — ἡμω = — ἡμα, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

προβ $(\overline{\Pi_1 N})$=—ἡμα ἡμβ. (3)

Ἐὰν ἤδη ἐν τῇ ἰσότητι (1) θέσωμεν τὰς ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) παρεχομένας τιμὰς τῶν προβ $(\overline{O\Pi_1})$ καὶ προβ $(\overline{\Pi_1 N})$ εὑρίσκομεν ὅτι:

συν (α+β)=συνασυνβ—ἡμα ἡμβ. ***(19)***

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὡς προβολικὸς ἄξων ὁ ψ′ψ, ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $\chi \hat{o} \chi_1 = \psi \hat{o} \psi_1$ καὶ κληθῇ Ε ἡ ἐπ᾽ αὐτὸν προβολὴ τοῦ Π_1, θέλομεν ἔχει ὁμοίως:

ἡμ(α+β)=$\overline{OP}$=$(\overline{OE})$+$(\overline{EP})$=προβ. $(\overline{O\Pi_1})$+προβ. $(\overline{\Pi_1 N})$ (4)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ προβ $(\overline{O\Pi_1})=(\overline{O\Pi_1})$συν$(\omega-90^\circ)$=συνβ ἡμω=ἡμα συνβ καὶ προβ. $(\overline{\Pi_1 N})$=προβ $(\overline{OP_1})=(\overline{OP_1})$ συνω=συνα ἡμβ, ἡ ἰσότης (4) γίνεται :

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)=\text{ἡμα συνβ}+\text{συνα ἡμβ}. \qquad (20)$$

§ 47. *Εὕρεσις τοῦ συν(α—β) καὶ ἡμ (α—β).* Ἐφαρμόζοντες τὰς ἰσότητας (19) καὶ (20) εἰς τὰ τόξα α καὶ (—β) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰσότητας (10) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned}\text{συν}(\alpha-\beta)&=\text{συνα συνβ}+\text{ἡμα ἡμβ}\\ \text{ἡμ}(\alpha-\beta)&=\text{ἡμα συνβ}-\text{συνα ἡμβ}\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Ἀσκήσεις. 48) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκατέρου τῶν τόξων 75° καὶ 15°.

49) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : συν$(\alpha+\beta)$. συν$(\alpha-\beta)$=συν$^2\alpha$—ἡμ$^2\beta$.

50) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ἡμ$(\alpha+\beta)$. ἡμ$(\alpha-\beta)$=ἡμ$^2\alpha$—ἡμ$^2\beta$.

51) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{2\,\text{ἡμ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)}=\text{ἐφα}+\text{ἐφβ}$.

§ 48. *Εὕρεσις τῆς ἐφ(α+β) καὶ ἐφ(α—β).* Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (20) διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς ἰσότητος (19) εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ$(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{ἡμα συνβ}+\text{συνα ἡμβ}}{\text{συνα συνβ}-\text{ἡμα ἡμβ}}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους ταύτης διὰ συνα συνβ, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ἐφα}+\text{ἐφβ}}{1-\text{ἐφα. ἐφβ}} \qquad (22)$$

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν ταύτην εἰς τὰ τόξα α καὶ (—β) εὑρίσκομεν (§ 38) ὅτι

$$\text{ἐφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{ἐφα}-\text{ἐφβ}}{1+\text{ἐφα. ἐφβ}} \qquad (23)$$

Ἀσκήσεις. 52) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκατέρου τῶν τόξων 75° καὶ 15°.

53) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι α') ἐφα+ἐφβ+ἐφγ=ἐφα. ἐφβ.ἐφγ. β') σφα. σφβ+σφα σφγ+σφβ. σφγ=1.

54) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐφ $(45^\circ-\alpha)=\dfrac{\text{συνα}-\text{ἡμα}}{\text{συνα}+\text{ἡμα}}$.

55) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α') ἐφα.ἐφβ+ἐφα.ἐφγ+ἐφβ.ἐφγ=1 β') σφα. σφβ. σφγ=σφα+σφβ+σφγ.

ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ ΤΙΝΟΣ

§ 49. *Εὕρεσις τοῦ συν2α.* — Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι (19) τεθῇ α ἀντὶ β, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\text{συν}2\alpha=\text{συν}^2\alpha-\text{ἡμ}^2\alpha, \qquad (24)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συνημίτονον τοῦ 2α ἐκ τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α.

Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ ἀντὶ $ἡμ^2α$ τεθῇ $1-συν^2α$, προκύπτει ὅτι

$$συν\ 2α=2συν^2α-1 \qquad (25)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ συν2α ἐκ τοῦ συνα.

§ 50. Εὕρεσις τοῦ ἡμ2α.—Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι (20) τεθῇ α ἀντὶ β προκύπτει

$$ἡμ2α=2ἡμασυνα \qquad (26)$$

§ 51. Εὕρεσις τῆς ἐφ2α. — Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι (22) τεθῇ α ἀντὶ β προκύπτει ὅτι

$$ἐφ2α=\frac{2\ ἐφα}{1-ἐφ^2α} \qquad (27)$$

Παρατήρησις. Ἐὰν τεθῇ 2α=ω, ὅτε καὶ $α=\frac{ω}{2}$, αἱ ἰσότητες (24), (26) καὶ 27 γίνονται

$$\left.\begin{aligned} συνω&=συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)-ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἡμω&=2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)συν\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἐφω&=\frac{2\,ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Ἀσκήσεις. 56). Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $συνω=\frac{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{1+ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$ καὶ

$$ἡμω=\frac{2\ ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1+ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$$

183 57) Ὁμοίως ὅτι $1+ἐφα.\ ἐφ2α=\frac{1}{συν\ 2α}$.

58) Ὁμοίως ὅτι α') $σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$, β') σφα—ἐφα=2σφ2α.

59) Ὁμοίως ὅτι $ἡμ2α=\frac{2}{ἐφα+σφα}$.

6ʹ γν17

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

TΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΗΜΙΣΕΟΣ ΤΟΞΟΥ

§ 52. *Εὕρεσις τοῦ συν* $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ *καὶ ἡμ* $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ *ἐκ τοῦ συνω.*

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς (1,28) ἰσότητας

$συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+ἡμ^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1, συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-ἡμ^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=συνω$ εὑρίσκομεν ὅτι $2\ συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1+συν\ \omega$,

ὅθεν
$$συν\left(\frac{\omega}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+συνω}{2}} \qquad (29)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς α΄ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β΄, εὑρίσκομεν ὅτι $2\ ἡμ^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1-συνω$,

ὅθεν
$$ἡμ\left(\frac{\omega}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-συνω}{2}} \qquad (30)$$

Ἕνεκα τῆς παρουσίας τοῦ διπλοῦ σημείου αἱ ἰσότητες (29) καὶ (30) δὲν ὁρίζουσι τελείως τὸ συν $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ ἡμ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ μόνου τοῦ συν ω· ἀπαιτεῖται πλὴν τούτου νὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τόξον ω ἢ τουλάχιστον τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

§ 53. *Εὕρεσις τῆς ἐφ* $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ *ἐκ τοῦ συνω.*

—Προηγουμένως (§ 52) εὕρομεν ὅτι $2\ ἡμ^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1-συνω$ καὶ $2συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=1+συνω$. Διαιροῦντες ταύτας κατὰ τὰ μέλη κλπ. εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$ἐφ\ \frac{\omega}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνω}{1+συνω}} \qquad (31)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει τὴν ἐφ $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω, ἂν εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Ἀσκήσεις. 60). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ ἑκατέρου τῶν τόξων 15° καὶ 22° 30΄.

61). Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τόξου $\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ὅπερ λήγει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, ἂν $συνω=\frac{2}{3}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

62). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ\frac{ω}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+ἐφ^2ω}}{ἐφω}$.

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

§ *54*. ***Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων ἡμ A±ἡμB εἰς γινόμενα***.—Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων:

ἡμ (α+β)=ἡμα συνβ+ συνα ἡμβ,

ἡμ (α−β)=ἡμα συνβ−συνα ἡμβ

διὰ προθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

ἡμ (α+β)+ἡμ (α−β)=2 ἡμασυνβ. (1)

Ἐὰν δὲ τὰς αὐτὰς ἰσότητας ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι

ἡμ (α+β)−ἡμ (α−β) =2 ἡμβ συνα. (2)

Ἐὰν δὲ τεθῇ α + β = A καὶ α − β = B, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $α=\frac{A+B}{2}$ καὶ $β=\frac{A-B}{2}$, αἱ δὲ ἰσότητες (1) καὶ (2) γίνονται

$$\left.\begin{aligned} ἡμ\,A+ἡμB&=2\,ἡμ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ ἡμ\,A-ἡμB&=2\,ἡμ\left(\frac{A-B}{2}\right)συν\left(\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}\right\}\quad (32)$$

§ *55*. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν παράστασιν $\frac{ἡμA-ἡμB}{ἡμA+ἡμB}$.

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς β′ τῶν ἰσοτήτων (32) διαιρέσωμεν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α′ εὑρίσκομεν ὅτι·

$$\frac{ἡμA-ἡμB}{ἡμA+ἡμB}=\frac{ἡμ\left(\frac{A-B}{2}\right)συν\left(\frac{A+B}{2}\right)}{ἡμ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{ἡμ\left(\frac{A-B}{2}\right)}{συν\left(\frac{A-B}{2}\right)}\cdot\frac{συν\left(\frac{A+B}{2}\right)}{ἡμ\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

ὅθεν $$\frac{ἡμA-ἡμB}{ἡμA+ἡμB}=ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot σφ.\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{ἐφ\left(\frac{A-B}{2}\right)}{ἐφ\left(\frac{A+B}{2}\right)}\quad (33)$$

§ *56*. ***Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων συν A ± συν B εἰς γινόμενα***.—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων συν (α+β)=συνα συνβ−ἡμα. ἡμβ, συν (α−β)= συνα συνβ+ἡμα ἡμβ προκύπτουσι κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον αἱ ἰσότητες:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B &= 2\acute{\eta}\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\acute{\eta}\mu\left(\frac{B-A}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Ἀσκήσεις. 63) Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἰσοτήτων (34) ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $1+\sigma\upsilon\nu A=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ καὶ $1-\sigma\upsilon\nu A=2\acute{\eta}\mu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ (§ 52)

64) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\tau}{1+\sigma\upsilon\nu\tau}$

65) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\grave{\varepsilon}\varphi A \pm \grave{\varepsilon}\varphi B=\frac{\acute{\eta}\mu(A\pm B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$

66) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sigma\varphi A+\sigma\varphi B=\frac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\acute{\eta}\mu A\ \acute{\eta}\mu B}$

67) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\grave{\varepsilon}\varphi A+\grave{\varepsilon}\varphi B}{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B}=\grave{\varepsilon}\varphi A.\ \grave{\varepsilon}\varphi B.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

§ 57. ***Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων*** Dupuis. Οἱ πίνακες οὗτοι παρέχουσι μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ 0° μέχρις 90° τόξων κατὰ 1' προχωρούντων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν εἶναι ἀναγεγραμμένος ἐκτὸς τοῦ πλαισίου καὶ διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45° τόξα εἰς τὸ ἄνω μέρος ἑκάστης σελίδος, διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὸ κάτω. Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45° τόξα ἀναγράφονται εἰς τὴν α' ἐξ ἀριστερῶν στήλην, ἥτις ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα ὀξὺν τόνον ('), διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὴν α' ἐκ δεξιῶν στήλην· βαίνουσι δὲ τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς μὲν α' ἐξ ἀριστερῶν στήλης αὐξανόμενα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἀντιστρόφως δὲ τὰ τῆς ἄλλης. Ἕνεκα τῆς τοιαύτης διατάξεως οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν δύο τόξων συμπληρωματικῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς. Παντὸς τόξου μικροτέρου τῶν 45° καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγ. ἀριθμῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὴν συγκεκομένην λέξιν Sin. διὰ τὸ ἡμίτονον Tang. διὰ τὴν ἐφαπτομένην Cotg. διὰ τὴν συνεφαπτομένην καὶ Cos. διὰ τὸ συνημίτονον· παν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸς δὲ τόξου περιεχομένου μεταξὺ 45° καὶ 90° καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγ. ἀριθμῶν εὑρίσκονται ὁμοίως εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ ἕκαστος εἰς τὴν στήλην, ἥτις φέρει κάτω τὸ ὄνομα τοῦ τριγ. ἀριθμοῦ. Σημειωτέον δὲ ὅτι, ὅταν πλείονες λογάριθμοι ἔχωσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτῶν, ταῦτα γράφονται μόνον εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑκάστης στήλης, νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς ἐνδιαμέσους λογαρίθμους· ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ μεταβληθῇ τὸ ἕτερον τῶν ψηφίων τούτων, ἀναγράφεται πλήρης ὁ λογάριθμος, ὡς καὶ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ. Μετὰ τὰς στήλας τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εὑρίσκονται στῆλαι, ὧν ἑκατέρα ἐπιγράφεται διὰ τοῦ D (Difference=διαφορά), ἐν αἷς ἀναγράφονται εἰς μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ. ε'. δ. τ) αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν εἰρημένων τριγωνομ. ἀριθμῶν δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων. Ὁμοία στήλη ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν στηλῶν Tang καὶ Cotg περιέχουσα τὰς κοινὰς διαφορὰς (1) τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων.

ΣΗΜ. Ἡ δεξιὰ τῶν συνημιτόνων στήλη διαφορῶν δὲν ὑπάρχει διὰ τὰ μικρότερα 18° καὶ μεγαλύτερα 71°, καθ' ὅσον αἱ διαφοραὶ αὗται οὖσαι μικρότεραι τοῦ 5 εὑρίσκονται ταχύτατα δι' ἁπλῆς τῶν λογαρίθμων παρατηρήσεως.

Εἰς τὰς σελίδας τῶν ἀπὸ 6° ἕως 83° τόξων ὑπάρχουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ὧν ἕκαστον φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι (μεγαλυτέραν τοῦ 12) διαφορῶν καὶ διαιρεῖται εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ α' περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, οἵτινες δηλοῦσι δεύτερα λεπτά, ἡ δὲ ἄλλη εἰς μ. ε'. δ. τ. τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων τῶν τριγ. ἀριθμῶν μεταβολάς.

§ 58. *Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.* —Τοὺς λογαριθμικοὺς τριγ. πίνακας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων προβλημάτων.

Πρόβλημα Αον. — Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ὡρισμένου τριγ. ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου.

Λύσις. Ἐὰν τὸ δεδομένον τόξον δὲν ἔχῃ δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τὴν σελίδα τῶν

---

(1) Ἐπειδὴ $ἐφα = \frac{1}{σφα}$ καὶ $ἐφβ = \frac{1}{σφβ}$, ἕπεται ὅτι:
λογ ἐφα=—λογσφα καὶ λογἐφβ=—λογσφβ. Ἄρα:
λογ ἐφα—λογεφβ=λογσφβ—λογσφα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς ὁμωνύμου πρὸς τὸν τριγ. ἀριθμὸν στήλης. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι λογἡμ $(15^\circ 42')=\bar{1},43233$,

λογ ἐφ $(28^\circ 49')=\bar{1},74047$, λογσυν $(6{}^\circ 20')=\bar{1},68098$,

λογ σφ $(57^\circ 45')=\bar{1},80000$ κλπ.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ. ἡμ $(24^\circ 10' 45'')$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι $24^\circ 10' < 24^\circ 10' 45'' < 24^\circ 11'$, ἄρα καὶ (§ 21 πίναξ) ἡμ $(24^\circ 10') <$ ἡμ $(24^\circ 10' 45'') <$ ἡμ $(24^\circ 11')$ ὅθεν λογ. ἡμ $(24^\circ 10') <$ λογ. ἡμ $(24^\circ 10' 45'' <$ λογ ἡμ $(24^\circ 11')$.

Ὁ ζητούμενος ὅθεν λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ δύο λογαρίθμων ἀναγεγραμμένων εἰς τοὺς πίνακας καὶ οἵτινες διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 28 μ ε΄. δ. τ. Ἀλλ᾽ ἁπλοῦν βλέμμα ἐπὶ τῶν πινάκων πείθει ἡμᾶς ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1′ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἀρκεῖ τὸ τόξον νὰ μὴ διαφέρῃ πολὺ τοῦ $(24^\circ 10')$· δυνάμεθα, ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τῶν λογαρίθμων ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν τόξων καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει ν᾽ αὐξηθῇ ὁ λογ ἡμ. $(24^\circ 10')=\bar{1}, 61214$ διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος λογάριθμος. Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται οὕτως:

Ἀφ᾽ οὗ εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 60″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 28 μ. ε΄. δ. τ. εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 45″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ $X=28 \times \frac{45}{60}=21$ μ. ε΄. δ. τ: ὥστε

λογ. ἡμ.$(24^\circ 10' 45'') = \bar{1},61214+0,00021 = \bar{1},61235$. Τὴν αὔξησιν 21 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ταχύτερον τῇ βοηθείᾳ τοῦ πινακιδίου, ὅπερ φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν 28, ὡς ἑξῆς. Ἐπειδή, ὡς ἐκ τοῦ πινακιδίου φαίνεται, εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 4″ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 1,87 μ.ε΄δ.τ, ἕπεται ὅτι εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 40″ θ᾽ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ $1,87 \times 10=18,7$ μ.ε΄.δ.τ, εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ 5″ ἀντιστοιχεῖ ἑτέρα αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ 2,33. Ὥστε εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 45″ ἀντιστοιχεῖ ὁλικὴ αὔξησις τοῦ λογ. κατὰ

$$18,7+2,33=21,03 \text{ ἢ } 21 \text{ περίπου.}$$

Πᾶσα δὲ ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὧδε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λογ ἡμ (24°10′) $= \overline{1}, 61214$

εἰς αὔξησιν τόξου κατὰ 40″ ἀντιστ. αὔξ. λογ. κατὰ 18,7

» » » » 5″ » » » » 2,33

» » » » 45″ » » » » 21,03 ἢ 21

Ὥστε λογ. ἡμ. (24°10′45″) $= \overline{1}, 61235$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου.

Ἔστω ἔτι ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογσφ (36°54′38″). Ἐπειδὴ $36^\circ 54' < 36^\circ 54' 38'' < 36^\circ 55''$ ἕπεται (§ 27 πίναξ) ὅτι σφ $(36^\circ 54') >$ σφ $(36^\circ 54' 38'') >$ σφ $(36^\circ 55')$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν λογσφ $(36^\circ 54'') >$ λογσφ $(36^\circ 54' 38'') >$ λογσφ $(36^\circ 55')$, ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ δύο λογαρίθμων διαφερόντων κατὰ 26 μ.ε΄δ.τ. Ἤδη τῇ βοηθείᾳ καὶ τοῦ πινακιδίου 26 ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

λογ. σφ. (36°54′) =0,12446

εἰς αὔξ. τόξου κατὰ 30″ ἀντιστ. μείωσις λογ κατὰ 13

» » » » 8″ » » » » 3,47

» » » » 38″ » » » » 16,47 ἢ 16

Ὥστε λογ. σφ. (36°54′38″) =0,12430

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ὁ λογ. τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅπερ περιέχει καὶ δεύτερα λεπτά.

Ἀσκήσεις. 68) Εὑρεῖν τὸν λογἡμ. (48°12′50″).

69) Εὑρεῖν τὸν λογ συν (62°6′37″).

70) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ (34°17′46″).

71) Εὑρεῖν τὸν λογσφ (24°14′39″).

72) Εὑρεῖν τὸν λογ ἡμ (120°35′).

73) Εὑρεῖν τὸν λογ ἐφ (235°40′23″).

74) Εὑρεῖν τὸν λογ συν (320°12′20″).

§ 59. Πρόβλημα Βον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον, οὗ ὡρισμένος τριγ. ἀριθμὸς ἔχει δεδομένον λογάριθμον.

Α΄ περίπτωσις.—Ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας.—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν (τὸ ἐλ.) θετικὸν τόξον χ, δι᾽ ὃ εἶναι λογ ἡμχ$=\overline{1}, 46011$. Ἐπειδὴ λογ ἡμ. 45° =λογ συν 45°$=\overline{1}, 84949$ καὶ $\overline{1}, 46011 < \overline{1}, 84949$, ἕπεται ὅτι χ<45°· θὰ ἀναζητήσωμεν ἄρα τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας, αἵτινες ἄνω φέρουσι τὴν λέξιν Sin. Καὶ κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ $\overline{1}$, 4, εἶτα δὲ ἀναζητοῦμεν καὶ τὰ ἄλλα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων αὐξάνουσι, καθ' ἣν φορὰν καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν τῶν τόξων. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=16^\circ 46'$. Ἂν ζητῆται τόξον χ, δι' ὃ εἶναι $λογημ\chi=\overline{1},96267$, ἐπειδὴ $\overline{1},96267>\overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι $\chi>45^\circ$ καὶ ἑπομένως ἀναζητοῦμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας τῶν ἡμιτόνων κάτω· οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=66^\circ 35'$.

Ἐὰν εἶναι $λογσυν\omega=\overline{1},96893$, ἐπειδὴ $\overline{1},96893>\overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι $συν\omega>συν\,45^\circ$ καὶ ἑπομένως $\omega<45^\circ$ (§ 19)· θὰ ἀναζητήσωμεν λοιπὸν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\omega=21^\circ 25'$. Ἂν δοθῇ λογ συνημιτόνου μικρότερος τοῦ $\overline{1},84949$, θὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων κάτω. Οὕτως, ἂν $λογ\,συν\psi=\overline{1},76835$, εὑρίσκομεν ὅτι $\psi=54^\circ 5'$.

Ἔστω ἔτι ὅτι $λογεφτ=\overline{1},79776$. Ἐπειδὴ $λογεφ\,45^\circ=λογσφ\,45^\circ=0$ καὶ ὁ λογ. τῆς μὲν ἐφαπτομένης αὐξάνεται τῆς δὲ συνεφαπτομένης ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνηται ἀπὸ 0° ἕως 90°, ἕπεται ὅτι διὰ τὰ μεταξὺ 0° καὶ 45° τόξα ὁ λογάριθμος τῆς μὲν ἐφαπτομένης εἶναι ἀρνητικὸς τῆς δὲ συνεφαπτομένης θετικός, διὰ δὲ τὰ μεταξὺ 45° καὶ 90° συμβαίνει τὸ ἀντίστροφον. Κατὰ ταῦτα τοῦ δοθέντος λογ ἐφτ ὄντος ἀρνητικοῦ εἶναι $τ<45^\circ$ καὶ δέον νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦτον εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $τ=32^\circ 7'$

Ἔστω τέλος ὅτι $λογ\,σφ\chi=\overline{1},87317$. Κατὰ τὰ προειρημένα εἶναι $\chi>45^\circ$ καὶ ἑπομένως δέον ν' ἀναζητήσωμεν τὸν δοθέντα λογάριφμον εἰς τὰς στήλας τῶν συνεφαπτομένων κάτω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=53^\circ 15'$.

Β' Περίπτωσις.—Ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τοὺς πίνακας. Ἔστω ὅτι $λογ.\,ἡμ\chi=\overline{1},77127$. Ἀναζητοῦντες τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τοὺς πίνακας πειθόμεθα ὅτι

$\overline{1},77112<\overline{1},77127<\overline{1},77130$ τῶν ἄκρων λογαρίθμων ὄντων ἀναγεγραμμένων εἰς τοὺς πίνακας καὶ ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ τόξα $36^\circ 11'$ καὶ $36^\circ 12'$· ἄρα εἶναι $36^\circ 11'<\chi<36^\circ 12'$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἄκροι λογάριθμοι τῶν προηγουμένων ἀνισοτήτων διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ 18 μ.ε'.δ.τ, ὁ δὲ δοθεὶς εἶναι μείζων τοῦ $\overline{1},77112$ κατὰ 15 τοιαύτας μονάδας. Ἐπειδὴ δέ, τοῦ λογ. αὐξάνοντος κατὰ 18, τὸ τόξον αὐξάνει κατὰ 60'', ἕπεται ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ λογ κατὰ 15

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times \frac{15}{18} = 50''$. Ὥστε

$\chi = 36^0\ 11'\ 50''$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω :

Ὅταν ὁ λογ. εἶναι	$\overline{1},77112$	τὸ τόξον	εἶναι	$36^0\ 11'$
αὐξάνοντος τοῦ λογ. κατὰ	15	» »	αὐξάνει κατὰ	$50''$
ἄρα, ὅταν ὁ λογ. εἶναι	$\overline{1},77127$	» »	εἶναι	$36^0 11' 50''$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν εἶναι δεδομένος ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω ἤδη ὅτι λογ συνψ$=\overline{1},85842$. Τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι :

$\overline{1},85851 > \overline{1},85842 > \overline{1},85839$ καὶ (§ 19) $43^0 47' < \psi < 43^0 48'$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς μείωσιν τοῦ λογ κατὰ 12 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου, κατὰ 60″ εἰς μείωσιν τοῦ λογ κατὰ 9 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ $60'' \times \frac{9}{12} = 45''$ ὥστε $\psi = 43^0\ 47'\ 45''$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω :

Ὅταν ὁ λογ εἶναι	$\overline{1},85851$	τὸ τόξον εἶναι	$43^0 47'$
εἰς μείωσιν τοῦ λογ. κατὰ	9	ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τόξου κατὰ	$45''$
ἄρα εἰς λογ.	$\overline{1},85842$	» τόξον	$43^0 47' 45''$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δίδηται ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης τόξου.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ λογ. ἐφα=λογήμα—λογσυνα καὶ

λογ. ἐφβ=λογ. ἡμβ—λογ. συνβ, ἕπεται ὅτι

λογ. ἐφβ—λογ. ἐφα=(λογ. ἡμβ—λογ. ἡμα)+(λογ. συνα—λογ. συνβ)

ἤτοι ἡ διαφορὰ Δ τῶν λογαρίθμων τῆς ἐφαπτομένης δύο τόξων ἀνίσων θετικῶν καὶ μικροτέρων 90^0 ὑπερβαίνει ἑκατέραν τῶν διαφορῶν δ καὶ δ′ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων. Ἐπειδὴ δὲ λάθος ν.μ.ε′.δ.τ. συμβὰν εἰς τὸν λογάριθμον τῆς ἐφαπτομένης προξενεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60'' \times \nu}{\Delta}$, ἐν ᾧ τοιοῦτον λάθος εἰς τὸν λογ. τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος $\frac{60'' \times \nu}{\delta}$ ἢ $\frac{60'' \times \nu}{\delta'}$, ὧν ἑκάτερον μεγαλύτερον τοῦ $\frac{60'' \times \nu}{\Delta}$, ἕπεται ὅτι τόξον τι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης ἢ ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου αὐτοῦ.

§ 60. Πρόβλημα Γον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ (ἐλάχιστον) θετικὸν τόξον, οὗ ἐδόθη τριγωνομετρικὸς ἀριθμός.

Λύσις. Ἂν ἀντὶ τοῦ λογαρίθμου τριγ. ἀριθμοῦ δοθῇ αὐτὸς ὁ τριγ. ἀριθμός, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν λογάριθμον αὐτοῦ καὶ εἶτα τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τόξον, ὡς προηγουμένως. Ἂν ὅμως ὁ δοθεὶς τριγ. ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα φαίνεται.

Παραδ. α΄. — Εὑρεῖν (τὸ ἐλ) θετικὸν τόξον χ, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην -3. Τὸ τόξον $(180^\circ - \chi)$ ἔχει (§ 39) ἐφαπτομένην 3· ἄρα λογέφ $(180^\circ - \chi) =$ λογ $3 = 0{,}47712$ καὶ $180^\circ - \chi = 71^\circ\, 33'\, 54''$, ὅθεν $\chi = 108^\circ\, 26'\, 6''$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ δεδομένος τριγ. ἀριθμὸς ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ συνεφαπτομένη.

Παραδ. β΄. — Εὑρεῖν (τὸ ἐλ) θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $-\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ ἡμ$\chi < 0$, ἕπεται ὅτι $\chi > 180^\circ$· ἐὰν δὲ τεθῇ $\chi - 180^\circ = \psi$ θὰ εἶναι $0^\circ < \psi < 180^\circ$ καὶ (§ 42) ἡμ$\psi =$ ἡμ$\chi = \frac{3}{4}$, ὅθεν εὑρίσκομεν $\psi = 48^\circ\, 35'\, 25''$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi = 180^\circ + \psi = 228^\circ\, 35' 25''$.

Ἀσκήσεις. 75) Εὑρεῖν (τὸ ἐλ) θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἡμίτονον $\frac{2}{3}$.

76) Ὁμοίως τὸ ἔχον ἐφαπτομένην 3.

77) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνεφαπτομένην $\frac{1}{2}$. Ὁμοίως τὸ ἔχον ἡμίτονον $-\frac{5}{6}$.

78) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνημίτονον $-\frac{6}{10}$.

79) Ὁμοίως τὸ ἔχον ἡμίτονον $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

80) Ὁμοίως τὸ ἔχον συνεφαπτομένην $3\sqrt{3}$.

Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις.

81) ἡμ $(42^\circ\, 5')$ + ἡμ$(37^\circ\, 6'\, 57'')$.

82) ἡμ $(25^\circ\, 15'\, 30'')$ + ἡμ$(40^\circ\, 53'\, 12'')$.

83) ἡμ$(54^\circ\, 6'\, 17'')$ — ἡμ$(23^\circ\, 4'\, 9'')$.

84) συν $(21^\circ\, 15'\, 20'')$ + συν $(35^\circ\, 10'\, 40'')$.

85) συν $(12^\circ\, 16'\, 30'')$ — συν $(40^\circ\, 20'\, 24'')$.

86) $1+$συν$(35^\circ\, 15')$.

87) $1-$συν $(75^\circ\, 20' 42'')$.

88) ἐφ $(5^\circ\, 18')$ + ἐφ $(22^\circ\, 15'\, 20'')$ (ἄσκ. 65).

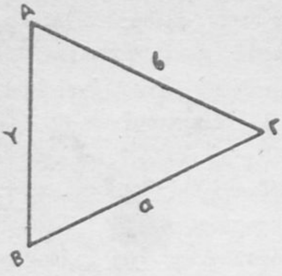
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 61. *Στοιχεῖα τριγώνου.* — Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου καλοῦνται κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ. Πᾶν δὲ ἄλλο μέγεθος (περίμετρος, διάμεσοι, ὕψη κλπ.), ὅπως δήποτε μετὰ τοῦ τριγώνου συνδεόμενον καλεῖται δευτερεῦον στοιχεῖον αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις λέγοντες ἁπλῶς στοιχεῖα τριγώνου θέλομεν νοῇ τὰ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ, περὶ ὧν ἐνταῦθα πρόκειται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σχ. 29

Συνήθως τὰς γωνίας τριγώνου παριστῶμεν καὶ ὀνομάζομεν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, ἅτινα τίθενται πλησίον τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τὰ δὲ μήκη τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν α, β, γ, (Σχ. 29).

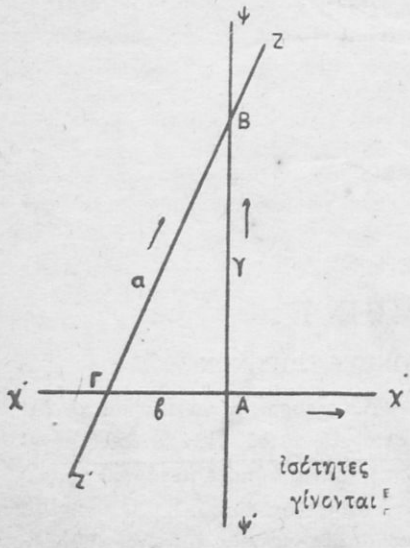
Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, θέτομεν συνήθως τὸ Α εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ α παρίσταται τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης.

§ 62. *Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.* Α΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 30) ὀρθογώνιόν τι τρίγωνον καὶ χ΄χ, ψ΄ψ, z΄z οἱ ἄξονες, ἐφ᾽ ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ θετικὴ φορὰ δηλοῦται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου βέλους. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα (§ 32) εἰς τὸ ἄνυσμα ΓΒ καὶ τὰς προβολὰς αὐτοῦ, ΓΑ καὶ ΑΒ ἐπὶ τοὺς ἄξονας χ΄χ καὶ ψ΄ψ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\beta = \alpha \text{ συν } \Gamma, \quad \gamma = \alpha \text{ συν } B. \qquad (35)$$

Ἐπειδὴ δὲ $B+\Gamma=90^\circ$ ἕπεται (§ 29,40) ὅτι συνΓ=ἡμΒ, συνΒ=ἡμΓ αἱ δὲ ἰσότητες (35) γίνονται β=αἡμΒ, γ=αἡμΓ (36)

Ἄρα: Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.



Σχ. 30

Β΄. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων β=α ἡμ Β καὶ γ=α συνΒ διαιρουμένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\beta}{\gamma}$=ἐφ Β, ὅθεν β=γ ἐφΒ. Ὁμοίως ἐκ τῶν γ=αἡμ Γ καὶ β=α συνΓ προκύπτει ἡ γ=βἐφΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ Β=σφΓ καὶ ἐφΓ=σφΒ, αἱ ἰσότητες γίνονται

β=γ ἐφ Β, γ=β ἐφ Γ
β=γ σφ Γ, γ=β σφ Β (37)

Ἄρα: Ἑκατέρα τῶν καθέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀντικειμένης ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις : 89) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι $\text{ἐφ}\frac{B}{2}=\frac{β}{α+γ}$.

90) Ὁμοίως ὅτι $\text{ἐφ } 2B=\frac{2βγ}{γ^2-β^2}$

91) Ὁμοίως ὅτι $\text{συν }(B-Γ)=\frac{2βγ}{α^2}$

§ 63. *Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου.*—Ὁ διὰ λ]σμοῦ προσδιορισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου, ὅταν ἱκανὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ δοθῶσιν, καλεῖται ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου τούτου (§ 2). Προκειμένου περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ἐπίλυσις εἶναι δυνατή, ὅταν δοθῶσι μία πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ, καθ' ὅσον ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων τούτων δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἡ γεωμετρία διδάσκει, ἄρα εἶναι τελείως ὡρισμένον τὸ τρίγωνον. Διακρίνομεν ὅθεν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθ. τριγώνων τέσσαρας περιπτώσεις, ἃς συνοψίζομεν οὕτω :

	1)	2)	3)	4)
Γνωστὰ στοιχεῖα	α,Β	β,Β	β,γ	α,β
ἄγνωστα »	β,γ,Γ,Ε	α,γ,Γ,Ε	α,Β,Γ,Ε	γ,Β,Γ,Ε

Ἡ δὲ ἐπίλυσις ἐν ἑκάστῃ περιπτώσει γίνεται ὡς ἀκολούθως.

§ 64. *Α' περίπτωσις.*—Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β. Αἱ ἰσότητες

$$Γ=90^0-B,\ β=α \text{ ἡμ } B,\ γ=α \text{ συν } B$$

ἀρκοῦσι πρὸς ὁρισμὸν τῶν στοιχείων Γ,β,γ, δι' ἐκτελέσεως τῶν εἰς τὰ β' μέλη σημειωμένων πράξεων. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται εἶτα ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}βγ$. Ἂν ὅμως θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοῦτο ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων α καὶ Β, μετασχηματίζομεν τὴν ἰσότητα ταύτην θέτοντες ἀντὶ β καὶ γ τὰς ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (36) καὶ (35) παρεχομένας τιμὰς α ἡμΒ, ασυνΒ αὐτῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $E=\frac{1}{2}\ α^2 \text{ἡμ}B \text{ συν}B=\frac{1}{4}\ α^2\cdot 2 \text{ ἡμ } B.\text{συν}B$,

ὅθεν (§ 50) $E=\frac{1}{4}α^2 \text{ ἡμ } (2B)$. (38)

Παράδειγμα.—Ἔστω $α=753^μ$, $B=30^o15'20''$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ. $90^0 = 89^0 59' 60''$

$\Gamma = 90^0 - B$ $\quad B = 30^0 15' 20''$

$\Gamma = 59^0 44' 40''$

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

$\beta = \alpha \eta\mu B$, ἄρα

$\lambda o\gamma \beta = \lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B$

$\lambda o\gamma \alpha = 2,87679$

$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ B = \overline{1},70231$

$\lambda o\gamma\ \beta = 2,57910$

$\beta = 379,4_{\mu}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma = \alpha \sigma\upsilon\nu B$ ἄρα

$\lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu B$.

$\lambda o\gamma\ \gamma = 2,87679$

$\lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu B = \overline{1},93641$

$\lambda o\gamma\ \gamma = 2,81320$

$\gamma = 650,43_{\mu}$.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε. $E = \frac{1}{4} \alpha^2 \eta\mu\ (2B)$ ἄρα

$\lambda o\gamma\ E = 2\ \lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \eta\mu\ (2B) - \lambda o\gamma\ 4$

$2B = 60^0\ 30',\ 40'$,

$2\ \lambda o\gamma\ \alpha = 5,75358$

$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ (2B) = \overline{1},93975$

ἄθροισμα $= 5,69333$

$\lambda o\gamma\ 4 = 0,60206$

$\lambda o\gamma\ E = 5,09127$

$E = 123386,11$ τ.μ.

Ἀσκήσεις. 92). Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\alpha = 142^{\mu}$ καὶ $\Gamma = 48^\circ\ 48'\ 48''$.

93). Ὀρθογωνίου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος $0,75^{\mu}$ καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν $32^\circ\ 15'$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

94). Ῥόμβου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος $7,04^{\mu}$, ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς μικροτέρας διαγωνίου εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

§ 65. Β' περίπτωσις. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ πλευρὰ Β.

Διὰ τῶν ἰσοτήτων $\Gamma = 90^0 - B$, $\gamma = \beta \sigma\varphi B$ ὑπολογίζονται τὰ στοιχεῖα Γ καὶ γ. Ἐκ δὲ τῆς $\beta = \alpha \eta\mu B$ λυομένης πρὸς α προκύπτει ἡ $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$, δι' ἧς ὁρίζεται ἡ ὑποτείνουσα. Τέλος θέτοντες ἐν τῇ ἰσότητι $E = \frac{1}{2} \beta\gamma$ ἀντὶ γ τὴν τιμὴν $\beta\sigma\varphi\ B$ αὐτῆς, εὑρίσκομεν ὅτι

$$E = \frac{1}{2} \beta^2 \sigma\varphi B, \tag{39}$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ Ε ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων β καὶ Β.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παράδειγμα. Ἔστω $\beta=2347{,}50\mu$, $B=51^{\circ}12'38''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$$90^{\circ}=89^{\circ}59'60''$$
$$B=51^{\circ}12'38''$$
$$\Gamma=38^{\circ}47'22''$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α

$\alpha=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$, ἄρα $\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma\beta-\lambda o\gamma\ \eta\mu B$

$$\lambda o\gamma\beta=3{,}37060$$
$$\lambda o\gamma\ \eta\mu B=\bar{1},89179$$
$$\lambda o\gamma\alpha=3{,}47881$$
$$\alpha=3011{,}71\mu$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma=\beta\sigma\varphi B$, $\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\sigma\varphi B$

$$\lambda o\gamma\beta=3{,}37060$$
$$\lambda o\gamma.\ \sigma\varphi B=\bar{1},90511$$
$$\lambda o\gamma\gamma=3{,}27571$$
$$\gamma=1886{,}74\mu$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$E=\dfrac{1}{2}\beta^2\sigma\varphi B$ ἄρα

$$\lambda o\gamma E=2\ \lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\sigma\varphi B-\lambda o\gamma 2$$
$$2\ \lambda o\gamma\beta=6{,}74120$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B=\bar{1},90511$$
$$\text{ἄθροισμα}=6{,}64631$$
$$\lambda o\gamma 2=0{,}30103$$
$$\lambda o\gamma E=6{,}34528$$
$$E=2214526{,}32\ \tau.\ \mu.$$

Ἀσκήσεις. 95). Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta=47^{\mu}$ καὶ $B=47^{\circ}$.

96). Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta=125\mu$ καὶ $\Gamma=23^{\circ}55'23''$.

97). Χορδή τις κύκλου ἔχει μῆκος $1{,}65\mu$, ἡ δὲ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καταλήγουσα ἀκτὶς σχηματίζει μετ' αὐτῆς γωνίαν $40^{\circ}18'38''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς καὶ τὸ μέτρον ἑκατέρου τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 66. Γ' Περίπτωσις.—Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ δύο κάθετοι πλευραί.—Ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta=\gamma\ \varepsilon\varphi B$ προκύπτει ἡ $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\beta}{\gamma}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ Β· εἶτα ἐκ τῆς $\Gamma=90^{\circ}-B$ εὑρίσκεται ἡ Γ· ἐκ δὲ τῆς $\alpha=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ ὁρίζεται ἡ α. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\dfrac{1}{2}\beta\gamma$.

Παράδειγμα.—Ἔστω $\beta=3456^{\mu}$ καὶ $\gamma=1280^{\mu}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β καὶ Γ. Ὑπολογισμὸς τῆς α.

$\varepsilon\varphi B=\dfrac{\beta}{\gamma}$ ἄρα

$\alpha=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$, ἄρα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\lambda o\gamma \varepsilon \varphi B = \lambda o\gamma \beta - \lambda o\gamma \gamma. \qquad \lambda o\gamma \alpha = \lambda o\gamma\, \beta - \lambda o\gamma \eta\mu\, B$$

$$\lambda o\gamma \beta = 3{,}53857 \qquad \lambda o\gamma\, \beta = 3{,}53857$$

$$\lambda o\gamma \gamma = 3{,}10721 \qquad \lambda o\gamma \eta\mu\, B = \overline{1}{,}97208$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi B = 0{,}43136 \qquad \lambda o\gamma\, \alpha = 3{,}56649$$

$$B = 69^{0}40'36'' \qquad \alpha = 3685{,}41\mu$$

$$90^{0} = 89^{0}59'60''$$

$$B = 69^{0}40'36''$$

$$\Gamma = 20^{0}19'24''$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma, \text{ ἄρα } \lambda o\gamma E = \lambda o\gamma \beta + \lambda o\gamma \gamma - \lambda o\gamma 2$$

$$\lambda o\gamma \beta = 3{,}53857$$

$$\lambda o\gamma\, \gamma = 3{,}10721$$

$$\text{ἄθροισμα} = 6{,}64578$$

$$\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$$

$$\lambda o\gamma E = 6{,}34475$$

$$E = 2211800 \text{ τ. μ.}$$

Ἀσκήσεις. 98) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta = 256, 25^{\mu}$ καὶ $\gamma = 348^{\mu}$.

99) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta = 48^{\mu}$ καὶ $\gamma = 36^{\mu}$.

100) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ $\beta = 2\gamma$ καὶ $\alpha = 3\mu$.

101) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ αἱ γωνίαι ῥόμβου, ὅστις ἔχει διαγωνίους $3{,}48^{\mu}$ καὶ $2{,}20^{\mu}$.

102) Τὸ κέντρον κύκλου ἀπέχει 8^{μ} ἀπὸ χορδῆς 12^{μ}. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην ἀντιστοιχούντων τόξων.

§ 67. *Δ΄ Περίπτωσις.*— Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν β.

Τὴν πλευρὰν γ ὑπολογίζομεν διὰ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως $\beta = \alpha$ συν Γ εὑρίσκομεν συν $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$· θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ συν Γ ἐν τῇ γνωστῇ (§ 52) ἰσότητι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \text{συν}\,\Gamma}{1 + \text{συν}\,\Gamma}}$ εὑρίσκομεν τὴν $\varepsilon\varphi\, \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}}$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ Γ, καὶ εὐκόλως εἶτα ἡ Β. Τέλος τὸ ἐμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαδὸν ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\beta\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$, ἂν τεθῇ ἀντὶ γ ἡ τιμὴ αὐτοῦ $\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$. Ἁπλούστερον ὅμως ὑπολογίζεται τοῦτο ἐκ τῆς $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$, ἂν προταχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς γ.

Παράδειγμα: Ἔστω $\alpha=15964^{\mu}$. καὶ $\beta=11465^{\mu}$.

Βοηθητικὸς Πίναξ

$\alpha=15964$

$\beta=11465$

$\alpha+\beta=27429$

$\alpha-\beta=\ 4499$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$\text{ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$, ἄρα

$\text{λογ ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\frac{\text{λογ}(\alpha-\beta)-\text{λογ}(\alpha+\beta)}{2}$

$\text{λογ}(\alpha-\beta)=3,65312$

$\text{λογ}(\alpha+\beta)=4,43821$

$\text{διαφορὰ}=\bar{1},21491$

$\text{λογ ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\bar{1},60745$

$\frac{\Gamma}{2}=22^{o}2'\ 51'',66$

$\Gamma=44^{o}5'\ 43'',32$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$90^{o}=89^{o}59',60''$

$\Gamma=44^{o}\ 5'\ 43'',32$

$B=45^{o}54'16'',68$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ.

$\gamma^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, ἄρα

$2\,\text{λογ}\,\gamma=\text{λογ}(\alpha+\beta)+\text{λογ}(\alpha-\beta)$

$\text{λογ}(\alpha+\beta)=4,43821$

$\text{λογ}(\alpha-\beta)=3,65312$

$2\text{λογ}\,\gamma=8,09133$

$\text{λογ}\,\gamma=4,04566$

$\gamma=11108,72^{\mu}$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε

$E=\frac{1}{2}\beta\gamma$, ἄρα

$\text{λογ}E=\text{λογ}\beta+\text{λογ}\,\gamma-\text{λογ}\,2$

$\text{λογ}\beta=4,05937$

$\text{λογ}\,\gamma=4,04566$

$\text{ἄθροισμα}=8,10503$

$\text{λογ}2=0,30103$

$\text{λογ}E=7,80400$

$E=63680000$ τμ.

ΣΗΜ. α΄. Ἡ γωνία Γ εἶναι προτιμώτερον νὰ ὑπολογίζηται διὰ τῆς ἰσότητος $\text{ἐφ}=\frac{\Gamma}{2}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}}$ ἢ διὰ τῆς $\text{συν}\,\Gamma=\frac{\beta}{\alpha}$. Πρῶτον μὲν διότι ἐκ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐφαπτομένης προσδιορίζεται ἀκριβέστερον (§ 59 Β', σημ. α') δεύτερον δὲ διότι γίνεται χρῆσις μόνον τῶν λογ (α—β) καὶ λογ (α+β), οἵτινες χρησιμοποιοῦνται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ.

ΣΗΜ. β'. Τὸ πηλῖκον $\bar{1},21491:2$ εὑρίσκομεν προσθέτοντες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ διαιρετέου—1 καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος+1˙εἶτα δὲ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸ ἀρνητικὸν καὶ χωριστὰ τὸ θετικὸν μέρος καὶ προσθέτομεν τὰ πηλῖκα. Οὕτω $\bar{1},21491:2=(-2+1,21491):2=-1+0,60745=\bar{1},60745$.

Ἀσκήσεις. 103). Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ α=25μ καὶ 6=15,25 μ.

104) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 5,60 μ, ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ 3 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

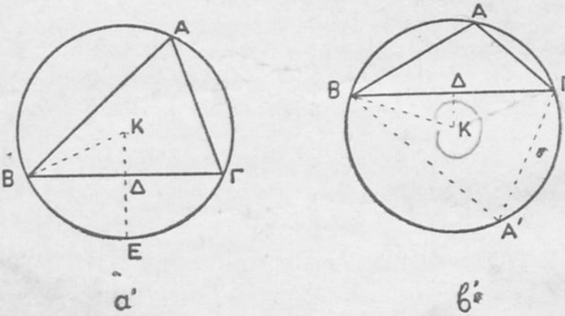
105) Ρόμβου ἡ πλευρὰ εἶναι 8μ καὶ ἡ μικροτέρα διαγώνιος 5,30 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

106) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν φαίνεται κύκλος ἀκτῖνος ρ ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου ἀπόστασιν 2ρ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 68. *Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις τῶν κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου. Α'.*—. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 31) τυχὸν τρίγωνον,



Σχ. 31

Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ. Ἡ ἐκ τοῦ Κ ἐπί τινα πλευρὰν π. χ. τὴν ΒΓ κάθετος τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Δ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΚΔ ἕπεται ὅτι

$$(\mathrm{B\Delta}) = \frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}\ \text{ἡμ}\ (\mathrm{BK\Delta}) \qquad (1)$$

Καὶ ἂν μὲν ἡ Α εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 31 α'), εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς $\frac{\mathrm{BK\Gamma}}{2} = \mathrm{BK\Delta}$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}\ \text{ἡμ}\ \mathrm{A}$. (2)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ ἡ A εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 31 β΄) καὶ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τυχὸν σημεῖον A΄, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ χορδαὶ A΄B, A΄Γ, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ABA΄Γ, οὗ ἕνεκα εἶναι $A+A'=2$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡμA=ἡμA΄=ἡμ (BKΔ). Ὥστε πάλιν ἐκ τῆς (1) προκύπτει ἡ (2), ἐξ ἧς $2P=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $2P=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$, $2P=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$. Ὅθεν

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma} \qquad (40).$$

Ἄρα: Αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν σχέσεων $\beta=\alpha$ἡμ B, $\gamma=\alpha$ἡμΓ, ἡμA=1 προκύπτει εὐκόλως ὅτι αἱ ἰσότητες (40) ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

B΄. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha=2P$ἡμA, $\beta=2P$ἡμB προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες

$$\alpha-\beta=2P\ (\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B) \text{ καὶ } \alpha+\beta=2P\ (\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B).$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτει ἡ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 55) εἶναι $\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (41)$$

Ἄρα: Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

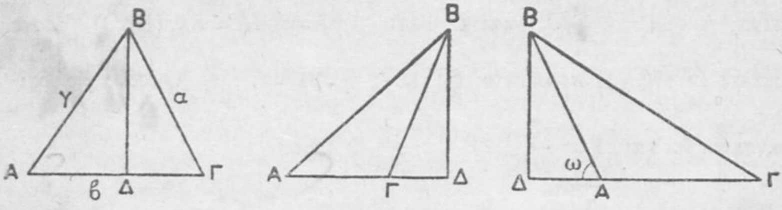
Γ΄. Ἔστω ABΓ (Σχ. 32) τυχὸν τρίγωνον καὶ BΔ τυχὸν αὐτοῦ ὕψος. Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ABΔ εἶναι (AΔ)=γ συν (ΔAB). (1).

Ἐὰν ἡ γωνία A εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 32 α΄, β΄), γων. ΔAB εἶναι αὐτὴ ἡ A τοῦ τριγώνου ABΓ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται (AΔ)=γ συν A· ἡ δὲ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀποδεικνυομένη ἰσότης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΑΓ)\,(ΑΔ)$ γίνεται $α^2=β^2+γ^2-2βγ$ συν$Α$. (2)

Ἐὰν δὲ ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 32 γ') ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Α καὶ ἑπομένως συν(ΔΑΒ)=—συνΑ, ἡ δὲ



α'　　β'　　γ'

Σχ. 32

(1) γίνονται $(ΑΔ)=-γ$ συν Α. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἐν τῇ Γεωμεμετρίᾳ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνυομένης σχέσεως $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΑΓ)\,(ΑΔ)$ προκύπτει πάλιν ἡ (2), ἥτις εἶναι οὕτω γενική. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι

$$β^2=α^2+γ^2-2αγ \text{ συν}Β,\quad γ^2=α^2+β^2-2αβ\text{συν}Γ.$$

Ὥστε μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν παντὸς τριγώνου ὑφίστανται καὶ αἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} α^2&=β^2+γ^2-2βγ.\ \text{συν}Α \\ β^2&=α^2+γ^2-2αγ.\ \text{συν}Β \\ γ^2&=α^2+β^2-2αβ.\ \text{συν}Γ \end{aligned} \qquad (42)$$

Ἄρα: Τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιασθέντος καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Δ'. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον (Σχ. 32) καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων $Ε=\frac{1}{2}β\,(ΒΔ)$ καὶ $(ΒΔ)=γ$ἡμ(ΔΑΒ) προκύπτει ἡ ἰσότης $Ε=\frac{1}{2}βγ$ἡμ(ΔΑΒ). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΑΒ εἶναι ἴση (Σχ. 32 α', β'), ἢ παραπληρωματικὴ (Σχ. 32 γ') τῆς Α, ἕπεται ὅτι ἡμ ΔΑΒ=ἡμ Α καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$Ε=\frac{1}{2}βγ\text{ἡμ } Α. \qquad (43)$$

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀσκήσεις : 107) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\frac{6+\gamma}{\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\acute{\eta}\mu\left(\frac{A}{2}\right)}$$

108) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\acute{\eta}\mu(A-B)}{\acute{\eta}\mu(A+B)}=\frac{\alpha^2-6^2}{\gamma^2}$

109) Ὁμοίως ὅτι $\frac{\alpha^2+\gamma^2-6^2}{6^2+\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\grave{\varepsilon}\varphi A}{\grave{\varepsilon}\varphi B}$.

110) Ὁμοίως ὅτι $E=2P^2$ ἡμ A ἡμB ἡμΓ.

111) Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς B τριγώνου ΑΒΓ ἀγόμενον ὕψος ἰσοῦται πρὸς 2P ἡμ A ἡμ Γ,

112) Ἐὰν $\acute{\eta}\mu^2 A=\acute{\eta}\mu^2 B+\acute{\eta}\mu^2\Gamma$, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

§ 69. *Ἐπίλυσις οἱωνδήποτε τριγώνων.* Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι τρίγωνόν τι κατασκευάζεται, ἂν δοθῶσι 3 στοιχεῖα ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτοῦ, ἀρκεῖ ἓν τοὐλάχιστον τούτων νὰ εἶναι πλευρά. Εἶναι ὅθεν κατὰ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις δυνατὴ καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου· ἐντεῦθεν προκύπτουσιν αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες περιπτώσεις ἐπιλύσεως οἱωνδήποτε τριγώνων.

§ 70. *Α΄ Περίπτωσις.* Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ α καὶ αἱ γωνίαι B καὶ Γ αὐτοῦ.

Προφανῶς, ἵνα ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει $B+\Gamma<180^\circ$. Ἐκ τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma=180^\circ$ ἕπεται ὅτι

$$A=180^\circ-(B+\Gamma),\text{ ὅθεν ὁρίζεται ἡ } A.$$

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\frac{\alpha}{\acute{\eta}\mu A}=\frac{6}{\acute{\eta}\mu B}=\frac{\gamma}{\acute{\eta}\mu\Gamma}$ προκύπτουσιν αἱ

$6=\frac{\alpha\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu A}$, $\gamma=\frac{\alpha\acute{\eta}\mu\Gamma}{\acute{\eta}\mu A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\acute{\eta}\mu A=\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)$, αὗται γίνονται

$6=\frac{\alpha\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$, $\gamma=\frac{\alpha\acute{\eta}\mu\Gamma}{\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$, δι' ὧν ὑπολογίζονναι αἱ πλευραὶ 6 καὶ γ.

Τέλος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ θέτομεν ἐν τῇ ἰσότητι

$E=\frac{1}{2}6\gamma$ ἡμ A τὰς προηγουμένως εὑρεθείσας τιμὰς τῶν 6, γ, ἡμ A

καὶ εὑρίσκομεν $E=\frac{\alpha^2\acute{\eta}\mu B\acute{\eta}\mu\Gamma}{2\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$ (44)

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha=3475{,}6^{\mu}$, $B=27^\circ 12'18''$, $\Gamma=50^\circ 40'15''$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

$$\begin{array}{rl} B=27^{\circ}12'18'' & 180^{\circ}=179^{\circ}59'60'' \\ \Gamma=50^{\circ}40'15'' & B+\Gamma=\ 77^{\circ}52'33' \\ \hline B+\Gamma=77^{\circ}52'33'' & A=102^{\circ}7'27'' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς $\beta=\dfrac{\alpha\,\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$ καὶ $\gamma=\dfrac{\alpha\,\acute{\eta}\mu\Gamma}{\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)}$

$$\lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B-\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)$$

$$\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma-\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\alpha=3,54103 & \lambda o\gamma\alpha=3,54103 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B=\overline{1},66008 & \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma=\overline{1},88847 \\ \text{ἄθροισμα}=3,20111 & \text{ἄθροισμα}=3,42950 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\,(B+\Gamma)=\overline{1},99021 & \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma=\overline{1},99021 \\ \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\ \beta=3,21090 & \lambda o\gamma\gamma=3,43929 \\ \beta=1625,18^{\mu} & \gamma=2749,75^{\mu} \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $E=\dfrac{\alpha^2\acute{\eta}\mu B\ \acute{\eta}\mu\Gamma}{2\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}$

$$\lambda o\gamma(2E)=2\ \lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu B+\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu\Gamma-\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)$$

$$\begin{array}{rl} 2\ \lambda o\gamma\alpha=7,08206 & \text{ἄθροισμα}=6,63061 \\ \lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu B=\overline{1},66008 & \lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)=1,99021 \\ \lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\Gamma=\overline{1},88847 & \lambda o\gamma\ (2E)=6,64040 \\ \text{ἄθροισμα}=6,63061 & 2E=4369200\ \tau.\ \mu. \\ & E=2184600\ \tau.\ \mu. \end{array}$$

Ἀσκήσεις. 113) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ $\alpha=1250\,\mu$, $B=28^{\circ}\ 16'$ καὶ $\Gamma=56^{\circ}\ 20'$.

114) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=333\,\mu$, $A=33^{\circ}\ 33'$ καὶ $B=55^{\circ}\ 55'$.

115) Νὰ ἐπίλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=140\,\mu$, $B=24^{\circ}\ 24'\ 24''$ καὶ $\Gamma=32^{\circ}\ 23'$.

§ 71. *Β' Περίπτωσις.*—Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία. Ἔστωσαν α, β, Γ τὰ δεδομένα στοιχεῖα καὶ $\alpha>\beta$. Ἐκ τῆς ἰσότητος (41) προκύπτει ὅτι $\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως $A+B+\Gamma=180^{\circ}$, ἔπεται ὅτι $\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{\Gamma}{2}=90^{\circ}$ καὶ $\varepsilon\varphi\,\dfrac{A+B}{2}=\sigma\varphi\,\dfrac{\Gamma}{2}$, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ ταύτης ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν $A-B$ καὶ ἔστω Δ ἡ τιμὴ αὐτῆς.

Λύοντες εἶτα τὸ σύστημα $A+B=180^\circ-\Gamma$, $A-B=\Delta$ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑκατέρας τῶν γωνιῶν A καὶ B. Μεθ' ὃ ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}$ λαμβάνομεν τὴν $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ δι' ἧς ὑπολογίζεται ἡ πλευρὰ γ. Τὸ ἐμβαδὸν τέλος ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$.

ΣΗΜ. Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $A=B$ καὶ ἑκατέρα ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\Gamma+2A=180^\circ$.

Παράδειγμα.—Ἔστω $\alpha=3475{,}6$ μ, $\beta=1625{,}2$, $\Gamma=50^\circ40'15''$.

Ὑπολογισμὸς γωνιῶν B καὶ Γ.

$$\text{ἐφ}\,\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\text{σφ}\,\frac{\Gamma}{2}$$

Βοηθητικὸς πίναξ, $\left\{\text{λογεφ}\,\frac{A-B}{2}=\text{λογ}\,(\alpha-\beta)+\text{λογ σφ}\,\frac{\Gamma}{2}-\text{λογ}\,(\alpha+\beta)\right.$

$\alpha=3475{,}6$	$\text{λογ}(\alpha-\beta)$	$=3{,}26727$
$\beta=1625{,}2$	$\text{λογσφ}\frac{\Gamma}{2}$	$=0{,}32480$
$\alpha+\beta=5100{,}8$		
$\alpha-\beta=1850{,}4$	ἄθροισμα	$=3{,}59207$
$\Gamma=50^\circ40'15''$	$\text{λογ}(\alpha+\beta)$	$=3{,}70764$
$\frac{\Gamma}{2}=25^\circ20'7'',5$	$\text{λογἐφ}\,\frac{A-B}{2}$	$=\bar{1}{,}88443$
$180^\circ=179^\circ59'60''$	$\frac{A-B}{2}$	$=37^\circ27'53''$
$\Gamma=50^\circ40'15''$	$A-B$	$=74^\circ55'46''$
$A+B=129^\circ19'45''$	$A+B$	$=129^\circ19'45''$
$180^\circ=179'59'60''$	$2A$	$=204^\circ15'31''$
$A=102^\circ7'45'',5$	$2B$	$=54^\circ23'59''$
$180^\circ-A=77^\circ52'14'',5$	A	$=102^\circ7'45'',5$
$\text{ἡμ}\,A=\text{ἡμ}\,(77^\circ52'14'',5)$	B	$=27^\circ11'59'',5$

Ὑπολογισμὸς πλευρᾶς $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$.

$\text{λογ}\gamma=\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}\Gamma-\text{λογἡμ}A$

Ὑπολογισμὸς τοῦ $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\,\Gamma$.

$\text{λογ}(2E)=\text{λογ}\alpha+\text{λογ}\beta+\text{λογἡμ}\Gamma$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λογ α	$=3,54103$	λογ α	$=3,54103$
λογ ἡμΓ	$=\bar{1},88847$	λογ β	$=3,21090$
ἄθροισμα	$=3,42950$	λογ ἡμ Γ	$=\bar{1},88847$
λογ ἡμ Α	$=\bar{1},99020$	λογ(2Ε)	$=6,64040$
λογ γ	$=3,43930$	2Ε	$=4369200$τ μ.
γ	$=2749,81$ μ.	Ε	$=2184600$τ μ.

Ἀσκήσεις. 116) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=300$ μ, $\beta=127$ μ, καὶ $\Gamma=68°40'$.

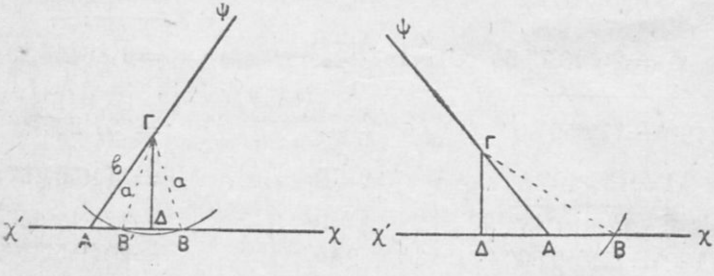
117) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ $\alpha=444,44$ μ., $\beta=888,88$ μ καὶ $\Gamma=40°44'44''$.

118) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\beta=\frac{3^{\mu.}}{4}$, $\gamma=\frac{5^{\mu}}{12}$ καὶ $A=40°$.

§ 72. Γ′ Περίπτωσις. — Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία κειμένη ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν δεδομένων πλευρῶν.

Ἔστωσαν α, β, καὶ Α τὰ δεδομένα στοιχεῖα. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\text{ἡμ}\, B=\frac{\beta\,\text{ἡμ}\,A}{\alpha}$ (1)

Ὑπολογιζομένης ἐκ ταύτης τῆς Β, εὑρίσκεται εἶτα ἡ Γ ἐκ τῆς ἰσότητος $\Gamma=180°-(A+B)$ καὶ ἡ πλευρὰ γ ἐκ τῆς $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,A}$. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τῆς $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\ \text{ἡμ}\ \Gamma$.



Σχ. 33

Διερεύνησις. Ἐὰν ψΑχ (Σχ. 33) εἶναι γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ Α, ἄνυσμά τι (ΑΓ)=β ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αψ καὶ ΓΔ ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τῆς Αχ, θὰ εἶναι προφανῶς (ΓΔ)=β ἡμ (ΓΑΔ). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΑΔ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴση ἡ παραπληρωματικὴ τῆς Α, ἕπεται ὅτι ἡμ (ΓΑΔ)=ἡμ Α καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται (ΓΔ)=βημ Α.

Τούτων τεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τρίτη κορυφὴ τριγώνου ἔχοντος τὰ δοθέντα στοιχεῖα Α, β, α, ὀφείλει νὰ εἶναι τομὴ τῆς πλευρᾶς Αχ καὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α.
Ἄρα: Ἂν α<(ΓΔ) ἢ α<β ἡμΑ, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι δὲν ὑπάρχει τοιαύτη τομή.

Ἂν α=(ΓΔ)=βἡμΑ, τὸ Δ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εἰρημένων γραμμῶν καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος, ἂν εἶναι καὶ Α<90°.

Ἐὰν α>(ΓΔ) ἢ α>βἡμΑ, ἡ εὐθεῖα χ'Αχ καὶ ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β', ὧν ἡ θέσις σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν Α ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῆς γωνίας καὶ τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν α καὶ β.

Ἐὰν Α<90°, διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους μερικωτέρας περιπτώσεις.

1ον. Ἐὰν α>β, αἱ τομαὶ Β' καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ μόνον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

2ον. Ἐὰν α=β, τὸ Β' συμπίπτει μετὰ τοῦ Α καὶ πάλιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λύει τὸ πρόβλημα.

3ον. Ἂν α<β ἀμφότεραι αἱ τομαὶ Β καὶ Β' κεῖνται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αχ καὶ ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒ'Γ ἐκπληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἤτοι ὑπάρχουσι δύο λύσεις.

Ἐὰν Α>90°, ἡ τομὴ Β' κεῖται ἐπὶ τῆς Αχ' καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ δὲν ἐκπληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, διότι ἀπέναντι τῆς α κεῖται γωνία (180°—Α)· ἡ ἄλλη τομὴ Β θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Αχ μόνον ἐὰν α>β, ὅτε ὑπάρχει μία λύσις τοῦ προβλήματος.
Τὰ πορίσματα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως συνοψίζομεν ἐν τῷ ἀκολούθῳ πίνακι.

α<βἡμΑ			οὐδεμία λύσις
α=βἡμΑ	Α<90°		μία λύσις
	Α≧90°		οὐδεμία λύσις
α>βἡμΑ	Α<90°	α≧β	μία λύσις
		α<β	δύο λύσεις
	Α>90°	α≦β	οὐδεμία λύσις
		α>β	μία λύσις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω $\alpha=300$ μ., $\beta=456,75$ μ, $A=34^\circ 16'$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν παράστασιν βἡμ A, ἵνα γνωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν λύσεων.

λογ (βἡμA)=λογβ+λογ ἡμ $A=2,41022$, ἄρα βἡμ$A=257,17$ ἤτοι $\alpha>\beta$ ἡμ A. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $A<90^\circ$ καὶ $\alpha<\beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς γωνίας B. $\text{ἡμ}B=\dfrac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$ (1)

ἄρα λογἡμB=λογβ+λογἡμA—λογα

λογβ	$=2,65968$	ἄθροισμα	$=2,41022$
λογἡμA	$=\bar{1},75054$	λογα	$=2,47712$
ἄθροισμα	$=2,41022$	λογἡμ B	$=\bar{1},93310$,

ἄρα $B=59^\circ 0' 25'',7$. Ἐπειδὴ δὲ ἡμB=ἡμ $(180^\circ-B)$, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν γωνίαν

$$B'=180^\circ-B=120^\circ\ 59'\ 34,3''.$$

Εἰς ἑκάστην δὲ τῶν τιμῶν τούτων B καὶ B' ἀντιστοιχοῦσιν ἴδιαι τιμαὶ ἑκάστου τῶν στοιχείων Γ, γ καὶ E, ἃς ὑπολογίζομεν ὧδε.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς Γ.

$A=34^\circ\ 16'$	$180^\circ=179^\circ 59' 60''$
$B=59^\circ\ 0'\ 25'',7$	$A+B=93^\circ 16'' 25'',7$
$B'=120^\circ 59'\ 34,3''$	$\Gamma_1=86^\circ 43' 34,3''$
$A+B=93^\circ 16' 25'',7$	$A+B'=155^\circ 15' 34,3''$
$A+B'=155^\circ 15' 34'',3$	$\Gamma_2=24^\circ 44' 25,7''$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς πλευρᾶς γ

$\gamma_1=\dfrac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma_1}{\text{ἡμ}A}$ ἄρα	$\gamma_2=\dfrac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma_2}{\text{ἡμ}A}$ ἄρα,
λογγ_1=λογα+λογἡμΓ_1—λογἡμA,	λογγ_2=λογα+λογἡμΓ_2—λογἡμA
λογ$\alpha=2,47712$	λογ$\alpha=2,47712$
λογ ἡμ$\Gamma_1=\bar{1},99929$	λογ ἡμ$\Gamma_2=\bar{1},62171$
ἄθροισμα$=2,47641$	ἄθρ.$=2,09883$
λογἡμ $A=\bar{1},75054$	λογ ἡμ$A=\bar{1},75054$
λογ $\gamma_1=2,72587$	λογ $\gamma_2=2,34829$
$\gamma_1=531,95$	$\gamma_2=222,995$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τοῦ ἐμβαδοῦ

$2E_1=\alpha\beta$ ἡμ Γ_1, ἄρα	$2E_2=\alpha\beta$ ἡμ Γ_2, ἄρα
λογ $(2E_1)$=λογα+λογβ+λογἡμΓ_1	λογ $(2E_2)$=λογα+λογβ+λογἡμΓ_2

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\lambda o\gamma\alpha=2,47712$	$\lambda o\gamma\alpha=2,47712$
$\lambda o\gamma\beta=2,65968$	$\lambda o\gamma\beta=2,65968$
$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma_1=\bar{1},99929$	$\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma_2=\bar{1},62171$
$\lambda o\gamma(2E_1)=5,13609$	$\lambda o\gamma(2E_2)=4,75851$
$2E_1=136800$ τ.μ.	$2E_2=57347,14$ τ.μ.
$E_1=68400$	$E_2=28673,57$ τ.μ.

Παράδειγμα 2ον.—Ἔστω ὅτι $\alpha=900^{\mu}$, $\beta=1245^{\mu}$ καὶ $A=53^{0}12'20''$.

Ὑπολογίζοντες, ὡς καὶ προηγουμένως, τὴν παράστασιν βημA εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $996,98^{\mu}$, ἤτοι $\alpha<\beta\eta\mu A$, ἄρα τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

ΣΗΜ. Ἐὰν δὲν ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν παράστασιν βημA ἀλλ' ἐπιχειρήσωμεν ἀμέσως τὸν ὑπολογισμὸν τῆς B, θέλομεν εὕρει $\lambda o\gamma\eta\mu B=0,04445$ ὅθεν $\eta\mu B>1$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀσκήσεις.— 119) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=560^{\mu}$, $\beta=840^{\mu}$, καὶ $A=40^{0}20'10''$.

120) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗ $\alpha=500^{\mu}$, $\beta=415,5^{\mu}$ καὶ $A=115^{0}$.

121) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=40^{\mu}$, $\beta=45^{\mu}$ καὶ $A=50^{0}15'$.

122) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha=23^{\mu}$, $\beta=38^{\mu}$, $B=32^{0}$.

§ 73. *Δ' περίπτωσις.* Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί.—Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ πρόβλημα τότε μόνον ἔχει λύσιν, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα (ἢ ἡ μηδεμιᾶς μικροτέρα) πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων. Ὑποθέτοντες δὲ ὅτι αἱ δεδομέναι πλευραὶ α, β, γ ἐκπληροῦσι τὸν περιορισμὸν τοῦτον θέλομεν ὑπολογίσῃ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου.

Ἐκ τῆς γνωστῆς (42) ἰσότητος $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ (1).

Ἐπειδὴ τὸ β' μέλος αὐτῆς δὲν εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων ἀναζητοῦμεν ἑτέραν ἰσότητα κατάλληλον εἰς τὸν διὰ τῶν λογαρίθμων λογισμόν. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν ἰσότητα $\varepsilon\varphi\omega=\pm\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega}}$ εἰς τὴν γωνίαν A θέτοντες πρὸ τοῦ ριζικοῦ μόνον τὸ $+$, διότι, τῆς $\dfrac{A}{2}$ οὔσης ὀξείας, ἡ ἐφ $\dfrac{A}{2}$ εἶναι θετική. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu A}{1+\sigma\upsilon\nu A}}$ (2)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν ὑπὸ τῆς (1) παρεχομένην τιμὴν τοῦ συνΑ εὑρίσκομεν ὅτι $\dfrac{1-\text{συν}\,A}{1+\text{συν}\,A}=\dfrac{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}$

$$=\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}=\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, (3) καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2α, 2β, 2γ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\beta+\gamma-\alpha=2\,(\tau-\alpha)$, $\alpha-\beta+\gamma=2\,(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2\,(\tau-\gamma)$. Ἕνεκα τούτων $\dfrac{1-\text{συν}\,A}{1+\text{συν}\,A}=\dfrac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}$, ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}}\qquad(45)$$

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

Διὰ τῶν ἰσοτήτων τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{B}{2}$ καὶ $\dfrac{\Gamma}{2}$, εἶτα δὲ ἐξ αὐτῶν καὶ αἱ Α, Β, Γ. Δυνάμεθα ὅμως εἰς τὰς ἰσότητας (45) νὰ δώσωμεν ἄλλην μορφήν, δι' ἧς τὰ μέγιστα ἐπιταχύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν. Πρὸς τοῦτο πολλαπλ)ζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸ β' μέλος τῆς α' τῶν ἰσοτήτων τούτων διὰ $(\tau-\alpha)$ καὶ εὑρίσκομεν ἐφ$\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\tau-\alpha}\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau}}$, ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\alpha}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ $\left(\dfrac{B}{2}\right)=\dfrac{\lambda}{\tau-\beta}$, ἐφ$\left(\dfrac{\Gamma}{2}\right)=\dfrac{\lambda}{\tau-\gamma}$. (46)

Διὰ τούτων ὑπολογίζονται αἱ γωνίαι $\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{\Gamma}{2}$ ἀφ' οὗ προηγουμένως ὑπολογισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ λ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐν τῇ ἰσότητι $\eta\mu^2A+\sigma\upsilon\nu^2A=1$ θέτομεν ἀντὶ συνA τὴν ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) παρεχομένην τιμὴν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι : $\eta\mu^2A=$

$$1-\frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}=$$

$$\frac{4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}=\frac{(2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\ (2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2)}{4\beta^2\gamma^2}=$$

$$\frac{[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2][\alpha^2-(\beta-\gamma)^2]}{4\beta^2\gamma^2}=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{4\beta^2\gamma^2}$$

$$=\frac{4\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta^2\gamma^2},\ \text{ἄρα ἡμ } A=\frac{2}{\beta\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}.$$

Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ἡμA θέσωμεν ἐν τῇ ἰσότητι

$E=\frac{1}{2}\ \beta\gamma\eta\mu A$, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}\quad , \qquad (47)$$

δι' ἧς ὁρίζεται τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau}}=\lambda$

καὶ $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}$ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες :

$2\lambda o\gamma\lambda=[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]-\lambda o\gamma\tau$ καὶ

$2\lambda o\gamma E=[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]+\lambda o\gamma\tau.$

Ἐκ τούτων καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ 2λογE εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ 2λογλ εὑρισκόμενον ἄθροισμα $\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)$ προστεθῇ ὁ λογ τ.

Παράδειγμα.—Ἔστω $\alpha=4562{,}30^{\mu}$, $\beta=3964^{\mu}$, $\gamma=2872{,}50^{\mu}$

Βοηθητικὸς πίναξ		Ὑπολογισμὸς τοῦ λογλ καὶ E	
α	=4562,30 μ.	λογ(τ—α)	= 3,05580
β	=3964	λογ(τ—β)	= 3,23940
γ	=2872,50	λογ(τ—γ)	= 3,45131
2τ	=11398,80	ἄθροισμα	= 9,74651
τ	=5699,40	λογ τ	= 3,75583
τ—α	=1137,10	2λογ λ	= 5,99068
τ—β	=1735,40	λογ λ	= 2,99534
τ—γ	=2826,90	2λογ E	=13,50234
		λογ E	= 6,75117
		E	=5638571,428 τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\alpha},\ \text{ἄρα}$$

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma(\tau-\alpha)$$

λογλ	$=2{,}99534$
λογ (τ—α)	$=3{,}05580$
λογ ἐφ $\left(\frac{A}{2}\right)$	$=\bar{1}{,}93954$
$\frac{A}{2}$	$=41^{\circ}1'28''$
A	$=82^{\circ}2'56''$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\beta},\ \text{ἄρα}$$

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{B}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma(\tau-\beta)$$

λογ λ	$=2{,}99534$
λογ(τ—β)	$=3{,}23940$
λογἐφ $\left(\frac{B}{2}\right)$	$=\bar{1}{,}75594$
$\frac{B}{2}$	$=29^{\circ}41'12'',4$
B	$=59^{\circ}22'24'',8$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\lambda}{\tau-\gamma}\ \text{ἄρα}$$

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\lambda o\gamma\lambda-\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma)$$

λογ λ	$=2{,}99534$
λογ (τ—γ)	$=3{,}45131$
λογ ἐφ $\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$	$=\bar{1}{,}54403$
$\frac{\Gamma}{2}$	$=19^{\circ}17'19''$
Γ	$=38^{\circ}34'38''$

Ἀσκήσεις. 123) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 8 $^{\mu}$, 9 $^{\mu}$, 10 $^{\mu}$

124) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 147$^{\mu}$, 247 $^{\mu}$, καὶ 347$^{\mu}$

125) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 7964,5$^{\mu}$, 10368,6$^{\mu}$ καὶ 5872$^{\mu}$.

126) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης Ε=τ (τ—α), τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἀντιστρόφως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ′

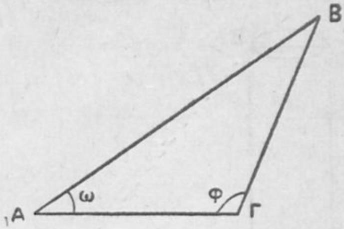
ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 74. *Πρόβλημα 1ον.*—Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις προσιτοῦ ἀπὸ ἀπροσίτου καὶ ὁρατοῦ σημείου.

Ἔστω Α τὸ προσιτὸν καὶ Β τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον, ὧν ἡ ἀπόστασις (ΑΒ) ζητεῖται (Σχ. 34).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

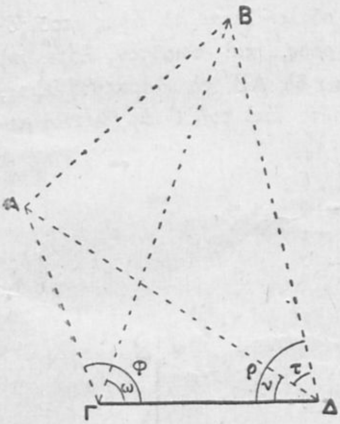
Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν σημεῖόν τι Γ καὶ τοιοῦτον ὥστε ἐξ αὐτοῦ νὰ φαίνωνται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α,Β καὶ νὰ εἶναι εὔκολος ἡ μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας μέτρησις τῆς ἀποστάσεως (ΑΓ). Μετὰ τὴν μέτρησιν ταύτης διὰ καταλλήλου γωνιομετρικοῦ ὀργάνου μετροῦμεν τὰς γωνίας ω καὶ φ καὶ εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(ΑΒ)}{ἡμφ}=\frac{(ΑΓ)}{ἡμΒ}$, ὅθεν $(ΑΒ)=\frac{(ΑΓ)\,ἡμφ}{ἡμ(ω+φ)}$.



Σχ. 34

§ 75. ***Πρόβλημα 2ον.*** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων ἀπροσίτων καὶ ὁρατῶν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β (σχ. 35) τὰ δύο σημεῖα, ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόστασις (ΑΒ). Πρὸς εὕρεσιν ταύτης ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους ἐκλέγομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα ὥστε ἀπ᾽ ἀμφοτέρων νὰ εἶναι ὁρατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἑκάτερον νὰ εἶναι ὁρατὸν ἐκ τοῦ ἑτέρου. Μετροῦμεν εἶτα τὴν ἀπόστασιν (ΓΔ) αὐτῶν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας, ὡς καὶ τὰς γωνίας ΒΓΔ=ω, ΑΓΔ=φ, ΒΔΓ=ρ, ΑΔΓ=ν καὶ ΒΔΑ=τ.



Σχ. 35

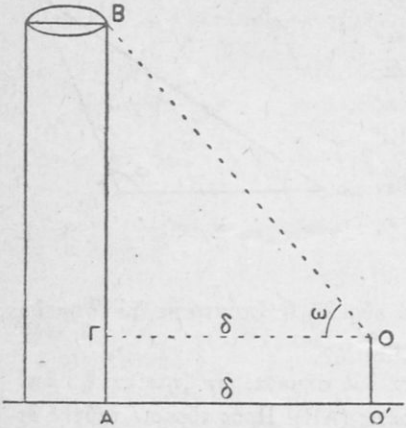
Εἶτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν $(ΑΔ)=\frac{(ΓΔ)\,ἡμφ}{ἡμ(φ+ν)}$, ἐκ δὲ τοῦ ΒΓΔ εὑρίσκομεν $(ΒΔ)=\frac{(ΓΔ)\,ἡμω}{ἡμ\,(ρ+ω)}$. Γνωρίζοντες ἤδη τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν τ ἐπιλύομεν (§ 71) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (ΑΒ).

§ 76. ***Πρόβλημα 3ον.*** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος πύργου, οὗ ἡ βάσις εἶναι προσιτή.

Ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Α (Σχ. 36) τοῦ πύργου μετροῦμεν ὁριζόντιόν τινα εὐθεῖαν ΑΟ′ καὶ ἔστω (ΑΟ′)=δ. Τοποθετοῦντες τὸ γω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

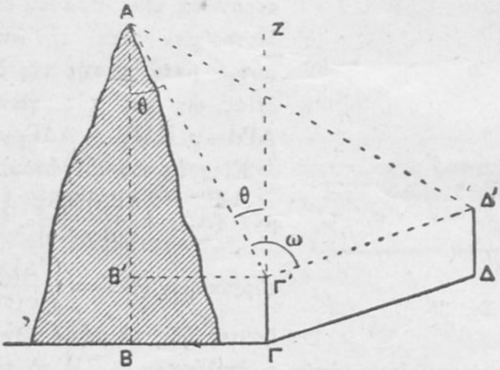
νιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Ο′ τῆς μετρηθείσης εὐθείας, μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΓΟΒ=ω (ΟΟ′ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου καὶ ΟΓ ὁριζόντιος εὐθεῖα). Μεθ᾽ ὃ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΒ λαμβάνομεν (ΓΒ)=δεφω καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος προσθέτοντες εἰς τὸ διὰ τῆς ἰσότητος ταύτης ὑπολογιζόμενον μῆκος (ΒΓ) τὸ τοῦ ὀργάνου ὕψος (ΟΟ′).



Σχ. 36

§ 77. *Πρόβλημα 4ον.*— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὄρους.

Ἔστω Α ἡ κορυφὴ τοῦ ὄρους (Σχ. 37) καὶ Γ σημεῖόν τι τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀφ᾽ οὗ λογίζεται τὸ ὕψος τοῦ ὄρους, καὶ τοιοῦτον ὥστε νὰ φαίνηται ἐξ αὐτοῦ ἡ κορυφὴ Α. Ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ἀόρατον ὕψος, ὅπερ πρόκειται νὰ εὕρωμεν. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τοῦ Γ ἀρχόμενοι με-



Σχ. 37

τροῦμεν ἐπὶ ὁμαλοῦ, ὅσον ἔνεστι, ἐδάφους εὐθεῖάν τινα ΓΔ, ἀπὸ τοῦ ἄκρου Δ τῆς ὁποίας φαίνονται ἀμφότερα τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, ἔστω δὲ α τὸ μῆκος αὐτῆς. Μετὰ τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον, οὗ τὸ ὕψος ἔστω (ΓΓ′)=(ΔΔ′) καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΑΓ′Δ′=ω καὶ ΑΔ′Γ′=φ· ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

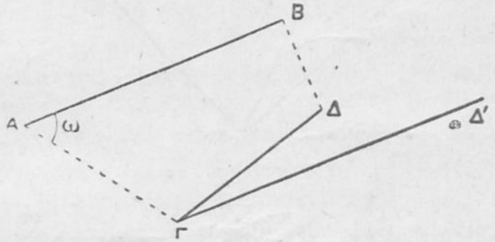
Α'ΓΔ' λαμβάνομεν εἶτα $(ΑΓ')=\frac{αημφ}{ημ\,(ω+φ)}$, δι' ἧς ὑπολογίζομεν τὴν (ΑΓ'). Εἶτα μετροῦμεν τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ ΑΓ' μετὰ τῆς κατακορύφου ΓΓ'Ζ καὶ ἔστω ὅτι ΑΓ'Ζ=θ, ὅτε καὶ ΒΑΓ'=θ.

Τέλος ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ' (Β'Γ' εἶναι νοητὴ ὁριζόντιος εὐθεῖα) εὑρίσκομεν.

$$(ΑΒ')=(ΑΓ')\,συνθ=\frac{αημφσυνθ}{ημ\,(ω+φ)}.$$

δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (ΑΒ')· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀργάνου (ΓΓ') = (ΒΒ') εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος τοῦ ὄρους.

§ 78. Πρόβλημα 5ον.—Διὰ προσιτοῦ σημείου Γ κειμένου ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἀπρόσιτον εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 38).



Σχ. 38

Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῷ 2ῳ προβλήματι (§ 75) ὑπολογίζομεν τὴν γωνίαν ΓΑΒ=ω. Εἶτα τῇ βοηθείᾳ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τοποθετουμένου εἰς τὸ Γ χαράσσομεν δι' ἀκοντίων εὐθεῖαν ΓΔ' τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι ΑΓΔ'=180°—ω. Ἡ οὕτως ὁριζομένη εὐθεῖα ΓΔ' εἶναι ἡ ζητουμένη.

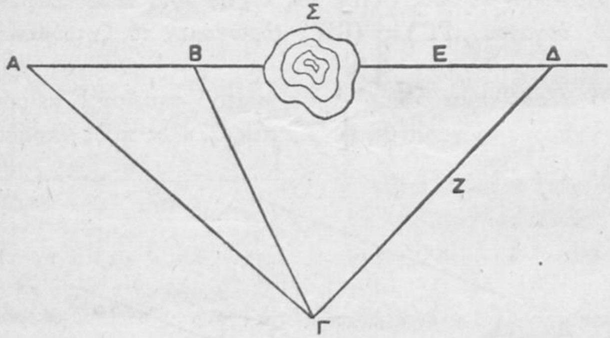
§ 79. Πρόβλημα 6ον.—Ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους νὰ χαραχθῇ προέκτασις εὐθείας ὄπισθεν κωλύματος, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν ὄπισθέν του διεύθυνσιν αὐτῆς.

Ἔστω ΑΒ (Σχ. 39) ἡ δεδομένη εὐθεῖα, Σ τὸ κώλυμα καὶ ΕΔ ἡ ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ πέραν τοῦ Σ. Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ὁρίζομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν τὴν ἀπόστασιν, μετροῦμεν μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας. Εἶτα εἰς τι σημεῖον Γ, ἀφ' οὗ φαίνονται τὰ Α καὶ Β καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρος, τοποθετοῦμεν σῆμά τι καὶ μετροῦμεν τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἐκ τούτων καὶ τῆς ΑΒ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΑΓ· εἶτα δι' ἀκοντίων χαράσσομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὐθεῖαν ΓΖ κατευθυνομένην εἰς τὸν ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρον καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς μετὰ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ ΓΖ τέμνει τὴν ἄγνωστον ἔτι προέκτασιν τῆς ΑΒ καὶ ἐπιλύσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν Δ.

Ἀρκεῖ εἶτα τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ὑπολογισθείσης πλευρᾶς ΓΔ νὰ χαράξωμεν δι' ἀκοντίων



Σχ. 39

τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ εὐθεῖαν, κειμένην, πρὸς ὃ καὶ τὸ Σ μέρος τῆς ΓΔ καὶ σχηματίζουσαν μετ' αὐτῆς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπολογισθείσῃ Δ. Ἡ οὕτω χαρασσομένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη προέκτασις τῆς ΑΒ.

Ἀσκήσεις. 127). Παρατηρητὴς βλέπει πύργον ὑπὸ γωνίαν 60°· ἐὰν δὲ ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεώς του κατὰ 100μ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζει ἡ ἀρχική του θέσις καὶ ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τοῦ πύργου διερχομένης κατακορύφου, βλέπει αὐτὸν ὑπὸ γωνίαν 30°. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου;

128). Δύο παρατηρηταὶ ἀπέχοντες ἀλλήλων 1000μ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμενοι ὁριζοντίου ἐπιπέδου βλέπουσιν ἀπρόσιτον σημεῖον ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὕψους 35°, ἐν ᾧ ἑκάτερος τούτων βλέπει τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἀπροσίτου σημείου ἀπὸ τοῦ ἄλλου παρατηρητοῦ ὑπὸ γωνίαν 60°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀπροσίτου σημείου.

129) Ἐκ τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἐπὶ εὐθείας κειμένων τὸ πρῶτον μόνον εἶναι προσιτόν. Ἀπὸ τετάρτου σημείου Δ ἀπέχοντος τοῦ Α 600μ φαίνεται ἡ μὲν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν 42°, ἡ δὲ ΑΓ ὑπὸ γωνίαν 75°, ἐν ᾧ ἀπὸ τοῦ Α φαίνεται ἡ ΒΔ ὑπὸ γωνίαν 40°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις (ΒΓ).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

* ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΤΡΙΓΩΝ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 80. *Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου.* — Γνωρίζομεν (§ 10) ὅτι ἕκαστον τόξον ΑΜ (Σχ. 40) θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν θεωρεῖται ὡς δρόμος, τὸν ὁποῖον διαγράφει κινητὸν σημεῖον ἐπ' αὐτοῦ κινού-

Σχ. 40

μενον καὶ τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἀρχῆς Α σταματᾷ εἰς τὸ τέλος Μ αὐτοῦ.

Δύναται ὅμως τὸ κινητὸν τοῦτο νὰ καταλήξῃ εἰς τὸ Μ, ἀφ' οὗ προηγουμένως διαγράψῃ ἅπαξ, δίς, τρὶς κ.τ.λ. ὁλόκληρον περιφέρειαν καὶ τὸ μεταξὺ Α καὶ Μ μέρος αὐτῆς, ὅπερ ἔχει τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ σημείου. Χάριν τῆς γενικότητος καὶ ἕκαστον τῶν δρόμων τούτων καλοῦμεν τόξον.

Ὥστε : Τόξον καλεῖται τυχὸν δρόμος, τὸ ὁποῖον διαγράφει κινητὸν σημεῖον ἐπὶ περιφερείας κατά τινα φορὰν καὶ ἐπὶ πεπερασμένον χρόνον κινούμενον.

Κατὰ ταῦτα ὑπάρχουσιν ἄπειρα τόξα ΑΜ, ἤτοι ἀρχόμενα ἐκ τοῦ Α καὶ λήγοντα εἰς τὸ Μ. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι, ἂν εἰς τὸ μέτρον τ τυχόντος τόξου ΑΜ προσθέσωμεν τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. τοῦ μέτρου θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς περιφερείας, εὑρίσκομεν τὸ μέτρον τόξου, ὅπερ ἀρχίζει ἐκ τοῦ Α καὶ περατοῦται εἰς τὸ Μ. Οὕτω $τ+360^\circ.K$, ἔνθα Κ εἶναι μηδὲν ἢ οἱοσδήποτε ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀρνητικός, εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς ἐκ τῶν τόξων ΑΜ δι' ἑκάστην ἀπὸ τὰς ῥηθείσας τιμὰς τοῦ Κ. Διατηροῦντες δὲ καὶ διὰ τὰ τόξα ταῦτα τοὺς αὐτοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριγ. ἀριθμῶν καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὰ τόξα τ καὶ $τ+360^\circ.K$ ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι :

$$\begin{aligned} &ημ(τ+360^\circ.K)=ημτ, \quad συν(τ+360^\circ.K)=συντ, \\ &εφ(τ+360^\circ.K)=εφτ, \quad σφ(τ+360^\circ.K)=σφτ, \qquad (48) \\ &τεμ(τ+360^\circ.K)=τεμτ, \quad στεμ(τ+360^\circ.K)=στεμτ : \end{aligned}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα : Ἐὰν τόξον αὐξηθῇ ἢ μειωθῇ κατὰ ἀκεραίας περιφερείας, οἱ τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ μένουσιν ἀμετάβλητοι.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἔχωμεν πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν τρόπον τῆς γεννέσεως γωνίας (§ 15) δυνάμεθα νά γενικεύσωμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας.

§ 81. *Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις*.— Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τόξα (ἢ γωνίας) x, δι' ἃ ἀληθεύει ἡ ἰσότης ἡμx=0,15.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, εὑρίσκομεν ὅτι λογήμx=$\bar{1}$,17609· ἐκ δὲ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι λογήμ(8° 37′36″,83)=$\bar{1}$,17609.

Ἄρα ἡμx=ἡμ(8°37′36″,83).

Ἐνθυμούμενοι ἤδη ὅτι τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι ἴσα ἡμίτονα, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ἡμx=ἡμ(180° – 8°37′36″,83). Κατ' ἀκολουθίαν x εἶναι 8°37′36″,83 ἢ 180°—8°37′36″,83. Ἐπειδὴ δὲ (§ 80) οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τόξου δὲν μεταβάλλονται, ἂν τοῦτο αὐξηθῇ ἢ μειωθῇ κατὰ ἀκεραίας περιφερείας, ἕπεται ὅτι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον ἔχουσιν ὅλα τὰ τόξα 360°.K+8°37′36″,83 καὶ ὅλα τὰ 360°K+180°—8°37′36″,83. Ἄρα :

$$\left.\begin{array}{l} x=360°.K+8°37'36'',83 \qquad =180°.2K+8°37'36'',83 \\ ἢ\ x=360°.K+180°-8°37'36'',83=180°.(2K+1)-8°37'36'',38, \end{array}\right\} (\alpha)$$

ἔνθα K εἶναι μηδὲν ἢ οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμὸς (θετικὸς ἢ ἀρνητικός).

Ὥστε ἡ ἰσότης ἡμx=0,15 δὲν ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἀλλὰ μόνον διὰ τιμὰς τοῦ x παρεχομένας ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (α) καὶ ὑπὸ τοὺς ῥηθέντας περιορισμούς. Λέγεται δὲ αὕτη τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις. Ὁμοίως αἱ ἰσότητες ἐφx—5σφx=1, ἐφx+ἡμx=3 κ.τ.λ. εἶναι τριγ. ἐξισώσεις.

Γενικῶς : Τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις καλεῖται πᾶσα ἰσότης, ἥτις περιέχει ἕνα ἢ πλείονας τριγ. ἀριθμοὺς τόξου ἢ τόξων καὶ δὲν ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ τόξου ἢ τῶν τόξων τούτων.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (α) εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ἀπὸ τὰ ταὐτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν ἡμx=0,15. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἰσοτήτων (α) ἀποτελεῖ τὴν λύσιν τῆς τριγ. ἐξισώσεως ἡμx=0,15.

Γενικῶς : Λύσις τριγ. ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τύπου ἢ τύπων, δι' ὧν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ἀπὸ τὰ ταὐτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝ. ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 82. *Α΄. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἁπλῆς μορφῆς.*— α΄). Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις ἡμx=ἡμτ, ἔνθα τ εἶνε γνωστὸν τόξον ἢ γωνία. Σκεπτόμενοι, ὡς ἀνωτέρω (§ 81), εὑρίσκομεν ὅτι ὅλα τὰ τόξα $360^\circ.K+\tau=180^\circ.2K+\tau$ καὶ ὅλα τὰ $360^\circ K+180^\circ-\tau=180^\circ(2K+1)-\tau$, ἔνθα Κ δύναται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, καὶ μόνον αὐτὰ ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν ἡμx=ἡμτ. Εἶναι λοιπὸν

$$x=180^\circ.2K+\tau \quad ἢ \quad x=180^\circ.(2K+1)-\tau \qquad (49)$$

Οὕτω τὴν ἐξίσωσιν ἡμx=ἡμ 30° ταὐτοποιοῦσι μόνον τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα παρέχουσιν αἱ ἰσότητες $x=180^\circ.2K+30^\circ$ καὶ

$$x=180^\circ.(2K+1)-30^\circ.$$

β΄). Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις συνx=συντ. Ἐνθυμούμενοι ὅτι (§ 38) συν(—τ)=συν τ καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς ἰσότητας (§ 48) εὑρίσκομεν ὅτι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ταὐτοποιοῦσιν ὅλα τὰ τόξα $360^\circ K+\tau$ καὶ ὅλα τὰ $360^\circ K-\tau$, ἔνθα Κ δύναται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, καὶ οὐδὲν ἄλλο πλὴν τούτων.

Ἄρα: $x=360^\circ.K+\tau$ ἢ $x=360.K-\tau$ ἢ συνεπτυγμένως

$$x=360^\circ.K\pm\tau \qquad (50)$$

Οὕτω τὴν ἐξίσωσιν συνx=συν17° ταὐτοποιοῦσι μόνον τὰ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων $x=360^\circ.K\pm17^\circ$ παρεχόμενα τόξα.

γ΄). Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις ἐφx=ἐφτ. Ἐνθυμούμενοι (§ 42) ὅτι ἐφ(180°+τ)=ἐφτ καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς ἰσότητας (48) εὑρίσκομεν ὅτι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ταὐτοποιοῦσιν ὅλα τὰ τόξα $360^\circ K+\tau=180^\circ.2K+\tau$ καὶ ὅλα τὰ

$$360^\circ.K+180^\circ+\tau=180^\circ(2K+1)+\tau.$$

Ἄρα: $x=180^\circ.2K+\tau$ ἢ $x=180^\circ(2K+1)+\tau$ ἢ συνεπτυγμένως

$$x=180^\circ.\lambda+\tau \qquad (51)$$

ἔνθα λ δύναται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Οὕτω τὴν ἐξίσωσιν ἐφx=ἐφ50° ταὐτοποιοῦσι μόνον τὰ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $x=180^\circ.\lambda+50^\circ$ παρεχόμενα τόξα.

δ΄). Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς ἡμx=α, συνx=β, ἐφx=γ, ἔνθα α, β, γ εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί, ἀνάγεται εἴς τινα τῶν προηγουμένων μορφῶν, ὡς ἡ ἐξίσωσις ἡμx=0,15 (§ 81) ἀνήχθη εἰς τὴν μορφὴν ἡμx=ἡμ (8° 37΄ 36΄΄,83). Οὕτως ἡ ἐξίσωσις ἐφx=1, ἐὰν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι 1=ἐφ45°, γίνεται ἐφx=ἐφ45° καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἀληθεύει διὰ $x=180^\circ.\lambda+45^\circ$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΗΜ. Ἡ ἐξίσωσις σφx=σφτ γράφεται καὶ οὕτω $\frac{1}{ἐφx}=\frac{1}{ἐφτ}$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐφx=ἐφτ.

Ἀσκήσεις. I). Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις ἡμx=ἡμ65°, συνx=συν40°, ἐφx=ἐφ35°, σφx=σφ20°.

II). Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις ἡμx $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, συνx $=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ἐφx=1, σφx=$\sqrt{3}$.

III). Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις ἡμx $=\frac{3}{4}$, συνx $=\frac{5}{7}$, ἐφx=3, σφx=2.

§ 83. Β΄. Τριγ. ἐξισώσεις (μὴ ἁπλῆς μορφῆς) ἕνα μόνον τριγ. ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου περιέχουσαι.— Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις 9 συνx+2=17συνx—2. Παρατηροῦντες ὅτι αὕτη ἔχει μόνον τὸ συνημίτονον τοῦ ἀγνώστου τόξου x καὶ λύοντες ταύτην πρὸς συνx εὑρίσκομεν ὅτι συνx$=\frac{1}{2}$, ἥτις εἶναι ἁπλῆς μορφῆς καὶ λύεται, καθ' ὃν προηγουμένως εἴπομεν τρόπον.

Ὁμοίως ἡ ἐξίωσις ἐφx $+\frac{ἐφx-9}{5}=4-\frac{5ἐφx-12}{3}$ λυομένη πρὸς τὴν ἐφx γίνεται ἐφx=3, ἥτις εἶναι ἐπίσης ἁπλῆς μορφῆς καὶ λύεται κατὰ τὰ γνωστά.

Ὥστε : Πᾶσα τριγ. ἐξίσωσις ἕνα μόνον τριγ. ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου τόξου περιέχουσα λαμβάνει ἁπλῆν μορφήν, ἐὰν λυθῇ πρὸς τὸν τριγωνομετρικὸν τοῦτον ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

I) $2συν^2x-3συνx+1=0$. II) $\frac{ἡμx-1}{ἡμx+1}-\frac{ἡμx+1}{ἡμx-1}=\frac{40}{21}$.

III) $\frac{ἐφ^2x+3ἐφx}{3}-\frac{ἐφ^2x+1}{2ἐφx}=\frac{ἐφ^2x-6}{12ἐφx}$.

§ 84. Γ΄ Διάφοροι ἄλλαι τριγ. ἐξισώσεις.—Πλὴν τῶν προηγουμένων εἰδῶν τριγ. ἐξισώσεων ὑπάρχουσι καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι πλείονας τριγ. ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

Παράδ. 1ον.—Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἡμx=συν2x. Ἐνθυμούμενοι ὅτι συν(90° — x) = ἡμx θέτομεν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν συν(90°—x)=συν2x, ἐξ ἧς ἕπεται (§ 82 6΄) ὅτι 90°—x=360°.K±2x. Λύοντες τὰς ἀλγεβρικὰς ταύτας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν x=30°—120°.K καὶ x=360°.K—90°.

Παράδ. 2ον.—Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφx=σφ $\left(45^0+\frac{x}{2}\right)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παρατηροῦντες ὅτι τὰ τόξα $45^0+\frac{x}{2}$ καὶ $45^0-\frac{x}{2}$ ἔχουσιν ἄθροισμα 90^0, συμπεραίνομεν (§ 40) ὅτι $\sigma\varphi\left(45^0+\frac{x}{2}\right)=\varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{x}{2}\right)$, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{x}{2}\right)$, ὅθεν (§ 82, γ') προκύπτει ὅτι $x=180^0.\lambda+45^0-\frac{x}{2}$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν ὅτι $x=120^0.\lambda+30^0$.

Ὥστε: Εἶναι δυνατὸν πολλάκις διὰ τῆς ἐφαρμογῆς γνωστῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων νὰ ἀναχθῇ ἐξίσωσίς τις εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον καὶ ἔχουσαν ἁπλῆν μορφήν.

Παράδ. 3ον.—Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=2$. Θέτοντες ἐν αὐτῇ $1-\sigma\upsilon\nu^2x$ ἀντὶ $\eta\mu^2x$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2-3\,\sigma\upsilon\nu^2x=2$, ἣν λύοντες πρὸς συνx εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu x=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu 90^0=0$, αὕτη γίνεται $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 90^0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 82 β') $x=360^0K\pm 90^0$.

Παράδ. 4ον. — Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi^2x+4\eta\mu^2x-3=0$. Ἐνθυμούμενοι (§ 37 ἰσ. 8) ὅτι $\eta\mu^2x=\frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}$ θέτομεν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν $\varepsilon\varphi^2x+\frac{4\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}-3=0$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi^2x=1$ καὶ $\varepsilon\varphi^2x=-2$, ὧν ἡ β' εἶναι προφανῶς ἀδύνατος. Τῆς α' δὲ ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων $\varepsilon\varphi x=\pm 1$, ὧν ἡ α' γράφεται καὶ $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi 45^0$, ἀληθεύει δὲ διὰ $x=180^0.\lambda+45^0$, ἡ δὲ β' γράφεται καὶ $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi(-45^0)$, ἀληθεύει δὲ διὰ $x=180^0.\lambda-45^0$.

Παράδ. 5ον. — Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\sigma\upsilon\nu x-8\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+6=0$. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον (25) εἶναι $\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $8\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-4-8\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+6=0$ ἢ $4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+1=0$, ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{1}{2}$ αὕτη γίνεται $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\sigma\upsilon\nu 60^0$, ὅθεν $\frac{x}{2}=360^0.K\pm 60^0$ καὶ $x=720^0K\pm 120^0$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε : Ὅταν τριγ. ἐξίσωσις περιέχῃ πλείονας τοῦ ἑνὸς τριγ. ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ, ἐκφράζομεν τοὺς ἐν αὐτῇ ἀγνώστους τριγ. ἀριθμοὺς συναρτήσει ἑνὸς μόνου τριγ. ἀριθμοῦ τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ πολλαπλασίου ἢ ὑποπολλαπλασίου αὐτοῦ. Οὕτως εὑρίσκομεν τριγ. ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἔχουσαν ἕνα μόνον ἄγνωστον τριγ. ἀριθμόν. (§ 83 Β′).

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις I) $ἡμ\frac{x}{2}=συνx$,

II) $3ἡμ^2x-συν^2x=1$, III) $ἐφ^2x+4ἡμ^2x-\frac{36}{5}=0$,
IV) $3ἐφ^2x-16ἡμ^2x+3=0$, V) $σφx-ἐφx=2$, VI) $ἡμ^2x-συν^2x=0$,
VII) $\frac{3ἡμx-συνx}{ἡμx+συνx}=1$, VIII) $ἐφ(x+60^\circ)+σφ(90^\circ-3x)=0$.

§ 85. *Ἀξιοσημείωτος ἐξίσωσις.* — Ἐξισώσεις τινὲς λύονται δι᾽ εἰδικῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ εἴδους ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τούτων.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $αἡμx+βσυνx=γ$ λύεται ὡς ἀκολούθως.

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ α καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $ἡμx+\frac{β}{α}συνx=\frac{γ}{α}$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{β}{α}=ἐφω$ (ω βοηθητικὸς ἄγνωστος) καὶ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $ἐφω=\frac{ἡμω}{συνω}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $ἡμx+\frac{ἡμω}{συνω}συνx=\frac{γ}{α}$, ἐξ ἧς διὰ πολ)σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ συνω προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $ἡμx\,συνω+ἡμω\,συνx=\frac{γσυνω}{α}$ ἢ $ἡμ(x+ω)=\frac{γ\,συνω}{α}$, ἥτις εἶναι ἁπλῆς μορφῆς καὶ λύεται εὐκόλως πρὸς ἄγνωστον τόξον τὸ $(x+ω)$, ἀφ᾽ οὗ προηγουμένως ὁρισθῇ μία τιμὴ τοῦ ω ἐκ τῆς ἐξισώσεως $ἐφω=\frac{β}{α}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις : I) $\sqrt{3}\,ἡμx+συνx-1=0$,
II) $ἡμx-συνx=\frac{\sqrt{2}}{2}$, III) $συν3x+ἡμ3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
IV) $2ἡμx+2συνx=1+\sqrt{3}$, V) $\frac{\sqrt{2}}{συνx}-1=ἐφx$.

§ 86. *Τριγωνομετρικὰ συστήματα.* — Ἐὰν σύστημα ἐξισώ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεων περιέχῃ μίαν ἢ πλείονας τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις καλεῖται τριγωνομετρικὸν σύστημα.

Τὰ τριγ. συστήματα κατατάσσομεν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ὑπάγομεν ὅσα μόνον τριγ. ἀριθμοὺς τῶν ἀγνώστων τόξων περιέχουσι· εἰς δὲ τὴν β′ ὑπάγονται ὅσα πλὴν τριγ. ἀριθμῶν τῶν ἀγνώστων τόξων περιέχουσι καὶ αὐτὰ τὰ τόξα.

Ἐν τοῖς ἀκολούθοις ἀναγράφομεν ἀνὰ ἓν παράδειγμα ἐξ ἑκατέρου εἴδους.

Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\text{ἡμ}x+\text{συν}y=0$, $\text{συν}x.\text{συν}y=\frac{1}{4}$. Ἐκ τῆς α′ ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\text{συν}y=-\text{ἡμ}x=\text{ἡμ}(-x)=\text{συν}(90^{0}+x)$· ἄρα $y=360^{0}.K\pm(90^{0}+x)$. Διὰ τοῦτο ἡ β′ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γίνεται $\text{συν}x.\text{συν}[360^{0}.K\pm(90^{0}+x)]=\frac{1}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}[360^{0}.K\pm(90^{0}+x)]=\text{συν}[\pm(90^{0}+x)]=\text{συν}(90^{0}+x)$, αὕτη γίνεται $\text{συν}x.\text{συν}(90+x)=\frac{1}{4}$ ἢ $\text{συν}x.\text{ἡμ}(-x)=\frac{1}{4}$, ὅθεν κατὰ σειρὰν $-\text{συν}x.\text{ἡμ}x=\frac{1}{4}$,

$$2\text{ἡμ}x\text{συν}x=-\frac{1}{2},\quad \text{ἡμ}2x=\text{ἡμ}(-30^{0}).$$

Ἄρα $2x=180^{0}.2K'-30^{0}$ ἢ $2x=180^{0}.(2K'+1)+30^{0}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $x=90^{0}.2K'-15^{0}$ ἢ $x=90^{0}.(2K'+1)+15^{0}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦσι δύο τιμαὶ τοῦ y παρεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἰσότητος $y=360^{0}.K\pm(90^{0}+x)$, ἔπεται ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα ἀληθεύει διὰ τὰς τιμάς, ἃς παρέχουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες.

α′) $x=90^{0}\,2K'-15^{0}$, $y=360^{0}.K+(90^{0}+90^{0}2K'-15^{0})$

β)′ $x=90^{0}.2K'-15^{0}$, $y=360^{0}.K-(90^{0}+90^{0}.2K'-15^{0})$

γ′) $x=90^{0}(2K'+1)+15^{0}$, $y=360^{0}K+[90^{0}+90^{0}(2K'+1)+15^{0}]$

δ′) $x=90^{0}(2K'+1)+15^{0}$, $y=360^{0}.K-[90^{0}+90^{0}.(2K'+1)+15^{0}]$

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x-y=30^{0}$, $\text{ἡμ}x+\text{ἡμ}y=1$. Ἐπειδὴ (§ 54 ἰσ. 32) εἶναι $\text{ἡμ}x+\text{ἡμ}y=2\text{ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ β' ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γίνεται $2\,\text{ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $x-y=30^0$, αὕτη γίνεται

$2\text{ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ συν $15^0=1$, ὅθεν $\text{ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2\text{συν}15^0}$· λαμβάνοντες δὲ τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν

$\text{λογ ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)=\overline{1},71403$, ὅθεν $\text{ἡμ}\left(\frac{x+y}{2}\right)=\text{ἡμ}(31^0 10' 28'',57)$

Ἄρα: $\frac{x+y}{2}=180^0.(2K+1)-31^0 10' 28''57$ ἢ $\frac{x+y}{2}=$

$180^0.2K+31^0 10' 28'', 57$, ἐξ ὧν $x+y=$

$360^0(2K+1)-62^0\,20' 57'',14$ ἢ $x+y=360^0.2K+62^0 20' 57'',14$,

Ἐπειδὴ δὲ $x-y=30^0$, ἕπεται ὅτι τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων ἀλγεβρικῶν συστημάτων

$$x-y=30^0$$
$$x+y=360^0.(2K+1)-62^0 20' 57'',14$$

καὶ

$$x-y=30^0$$
$$x+y=360^0\cdot 2K+62^0 20' 57'',14.$$

Λύοντες ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μὲν α' ἀληθεύει διὰ

$x=180^0(2K+1)-16^0 10' 28'',57$, $y=180^0(2K+1)-46^0 10' 28''57$ (α)

Τὸ δὲ β' ἀληθεύει διὰ

$x=180^0.2K+46^0\ 10'\ 28'',57$, $y=180^0.2K+16^0 10' 28'',57$ (β).

Τὸ δοθὲν ἄρα σύστημα ἀληθεύει μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν τόξων x καὶ y, τὰς ὁποίας παρέχουσιν αἱ ἰσότητες (α) καὶ (β).

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν τὰ συστήματα :

I) $\text{ἡμ}x+\sqrt{3}.\text{συν}y=1$, $\quad \text{ἡμ}x+\text{συν}y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

II) $2\text{συν}x+2\text{συν}y=1+\sqrt{2}$, $\quad 2\text{ἡμ}x+2\text{ἡμ}y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

III) $x+y=75^0$, $\quad \text{ἡμ}x+\text{ἡμ}y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

IV) $x-y=30^0$, $\quad \frac{\text{ἡμ}x.}{\text{ἡμ}y}=\sqrt{3}$

V) $x+y=\alpha$, $\quad \frac{\text{ἐφ}x}{\text{ἐφ}y}=\frac{\beta}{\gamma}$.

ΣΗΜ. Πλείονας τριγων. ἐξισώσεις καὶ τριγων. συστήματα εὑρίσκει ὁ βουλόμενος εἰς τὴν ἡμετέραν ***Εὐθύγραμμον Τριγωνομετρίαν*** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων (Κεφ. Ζον).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

130) Ἐὰν τὰ σημεῖα Ο,Α,Β κεῖνται ὁπωσδήποτε ἐπὶ ἄξονος καὶ ἕτερον σημεῖον Μ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{(\overline{AM})}{(\overline{BM})}=-\frac{\mu}{\nu}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\mu+\nu)\ (\overline{OM})=\nu\ (\overline{OA})+\mu\ (\overline{OB})$$

131) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν α καὶ β τῶν ἄκρων ἀνύσματος ΑΒ νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ, δι' ὃ εἶναι $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{1}{4}$.

132) Δεδομένων τῶν ἐπὶ ἄξονα προβολῶν τῶν κορυφῶν τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

133) Νὰ στραφῇ δεδομένον σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων θετικὴν στροφὴν κατὰ 45°.

134) Ὁμοίως κατὰ 30°.

135) Γνωστοῦ ὄντος ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι $\frac{\rho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον, εἶτα δὲ καὶ οἱ ἄλλοι τριγ. ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 36°.

136) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην 3.

137) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πέρατα τῶν τόξων, ὧν ἕκαστον ἔχει ἡμίτονον ἢ συνημίτονον $\frac{2}{3}$.

138) Ἄνυσμα μήκους $0{,}60^\mu$ κεῖται ἐπὶ ἄξονος τέμνοντος τὸν προβολικὸν ἄξονα ὑπὸ γωνίαν 30°, πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ;

139) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{εφ}\ (90^\circ+\tau)=-\ \text{σφτ}$ καὶ $\text{σφ}\ (90^\circ+\tau)=-\text{εφτ}$.

140) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $(\alpha+\beta+\gamma)$ ἐκ τῶν ὁμωνύμων τριγ. ἀριθμῶν τῶν τόξων α, β, γ.

141) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α΄) $\text{συν}\ 3\alpha=4\ \text{συν}^3\alpha-3\ \text{συν}\alpha$ β΄) $\text{ημ}\ 3\alpha=3\text{ημ}\alpha-4\text{ημ}^3\alpha$ καὶ γ΄)

$$\text{εφ}3\alpha=\frac{3\text{εφ}\alpha-\text{εφ}^3\alpha}{1-3\text{εφ}^2\alpha}.$$

142) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{ημ}\ 2\alpha=\frac{1-\text{εφ}^2(45^\circ-\alpha)}{1+\text{εφ}^2(45^\circ+\alpha)}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

143) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1 - \text{ἐφω} = \frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^\circ - \omega)}{\text{συνω}}$.

144) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις ἔχει μῆκος 80,30μ ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 20°10′35″. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ γωνίαι αὐτοῦ.

145) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗ ἡ βάσις εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

146) Ἀνύσματος ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ εἶναι 3,4μ, ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ μετὰ τοῦ προβολ. ἄξονος εἶναι 25°18′30″. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου;

147) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τόξου 40° περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 12μ.

148) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχουσι λόγον $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι ἑκατέρας μετά τινος τῶν διαγωνίων.

149) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\alpha = 2\beta\,\text{ἡμ}\,\frac{A}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο δύναται νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

150) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\beta = 47958^\mu$, $A = 88^\circ 17'$ καὶ $B = 47^\circ$.

151) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 78462^\mu$, $\beta = 4962^\mu$ καὶ $\Gamma = 12^\circ 42'$.

152) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον, οὗ $\alpha = 15642^\mu$, $\beta = 12923^\mu$ $\gamma = 8964^\mu$.

153) Πόσα τρίγωνα ἔχουσιν $\alpha = 40^\mu$, $\beta = 100^\mu$ καὶ $A = 30^\circ$;

154) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$.

155) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο προσκειμένων πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ Θ.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 11 Ἰουλίου 1928.

Ἀριθ. Πρωτ. 51714.

Πρὸς

τοὺς Ἐκδότας Δ. Τζάκαν καὶ Σ. Δελαγραμμάτικαν

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸ ἄρθρον 5 τοῦ νόμου 3438 «περὶ διδακτικῶν βιβλίων» καὶ τὴν ἀπὸ 31 Μαΐου 1928 πρᾶξιν τῆς οἰκείας ἐπὶ τῆς ἀναθεωρήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων ἐπιτροπῆς ἐγκρίνομεν διὰ τὸ ἀπὸ σήμερον μέχρι τέλους τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1930—1931 χρονικὸν διάστημα τὸ ὑφ' ὑμῶν ἐκδοθὲν καὶ ὑπὸ Νικολάου Α. Νικολάου συγγραφὲν διδακτικὸν βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον: «Στοιχεῖα Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας» πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν Γυμνασίων, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐν μελλούσῃ ἐκδόσει τοῦ βιβλίου ἐπιφέρητε τὰς ὑπὸ τῆς ἐπιτροπῆς ὑποδεικνυομένας τροποποιήσεις.

Ὁ Ὑπουργὸς

Κ. ΓΟΝΤΙΚΑΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής