ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΑ ΑΣΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1943

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΑ ΑΣΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΟΕΣΒ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1943

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὁ ἄνθρωπος ἀσχολεῖται διαρκῶς μὲ πράγματα, τὰ ὁποῖα βλέπει καὶ ἐγγίζει. Τὰ πράγματα αὐτὰ τὰ ὀνομάζομεν ὑλικὰ σώματα ἢ ἁπλῶς σώματα. Κάθε σῶμα καταλαμβάνει χῶρον. Ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν σῶμα, λέγεται ἔκτασις αὐτοῦ.

Ἐξ ἄλλου τὰ διάφορα σώματα τελειώνουν ἐξωτερικῶς κατὰ διαφόρους τρόπους· ὁ **τρόπος**, μὲ τὸν ὁποῖον τελειώνει ἐξωτερικῶς ἓν σῶμα, λέγεται σχῆμα αὐτοῦ. Τὰ περισσότερα σώματα εἰς τὴν φυσικήν των κατάστασιν ἔχουν σχῆμα **πολύπλοκον**. Εἰς πολλὰ ὅμως ἐξ αὐτῶν ὁ ἄνθρωπος δίδει σχήματα ἁπλούστερα.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ περισσότερα ἁπλᾶ σχήματα δεικνύομεν εἰς τὴν εἰκόνα 1.

2. Ἓν σῶμα ἠμποροῦμεν νὰ τὸ ἐξετάσωμεν καὶ νὰ ἴδωμεν, ἀπὸ ποίαν ὕλην εἶναι κατεσκευασμένον, ἢ τί χρῶμα ἔχει, ἢ ἂν εἶναι μαλακὸν κτλ.

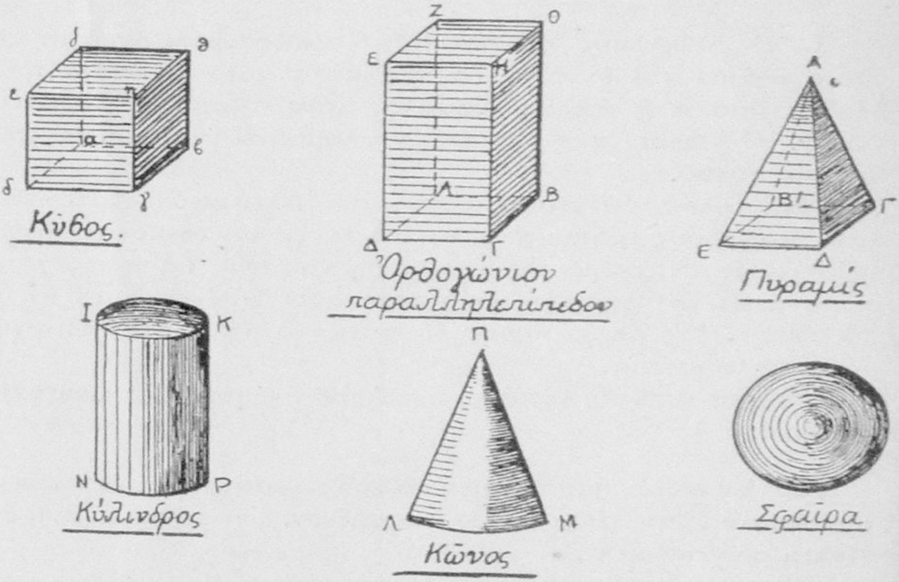
Ὅταν ὅμως ἓν σῶμα τὸ ἐξετάσωμεν, μόνον διὰ νὰ ἴδωμεν τί σχῆμα καὶ τί ἔκτασιν ἔχει, χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρῃ τίποτε ἄλλο, τὸ λέγομεν γεωμετρικὸν σῶμα ἢ στερεὸν (γεωμετρικόν).

3. Ἂς λάβωμεν τώρα ἓν οἱονδήποτε στερεόν, π. χ. τὸν κύβον, καὶ ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἔκτασίν του. Θὰ ἴδωμεν τότε, ὅτι αὕτη ἐπεκτείνεται πρὸς τὰ ἄνω, πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ πρὸς τὰ πλάγια, δηλαδὴ κατὰ **τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος, ὕψος**. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὰ κυτία τῶν σπίρτων, τὰ κιβώτια κτλ.),

ὅπως καὶ εἰς κάθε ἄλλο στερεόν, λέγομεν, ὅτι τὰ σώματα ἔχουν τρεῖς διαστάσεις.

4. Κάθε σῶμα ἔχει ἄκρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ κρατοῦμεν. Ὅλα ὁμοῦ τὰ ἄκρα, εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει ἓν σῶμα, κάμνουν τὴν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ.

Ἂν προσέξωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν στερεῶν τῆς εἰκόνος



Εἰκὼν 1

1, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι πολὺ διάφοροι ἀπὸ τὰς ἄλλας. Ὅλαι ὅμως ἔχουν σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἂν δὲ ἐξετάσωμεν τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται ἔχουν δύο διαστάσεις: μῆκος καὶ πλάτος.

Ὕψος, βάθος ἢ πάχος αἱ ἐπιφάνειαι δὲν ἔχουν.

Εἶναι λοιπὸν ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας **διάφορος** ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῶν στερεῶν.

5. Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, ὅπως καὶ ἡ τοῦ παραλλη-

λεπιπέδου, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη (λέγονται δὲ τὰ μέρη αὐτὰ ἕδραι). Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος (εἰκ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 μέρη, ἐνῷ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 μέρη καὶ ἡ τοῦ κώνου ἀπὸ 2. Ὅλα αὐτὰ τὰ μέρη ἔχουν φυσικὰ ἄκρα. Ὅλα ὁμοῦ τὰ ἄκρα, εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει μία ἐπιφάνεια, κάμνουν τὴν **γραμμήν**. Ἂν τώρα προσέξωμεν τὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ στερεὰ (εἰκ. 1), θὰ ἴδωμεν, ὅτι μερικαὶ εἶναι διάφοροι ἀπὸ τὰς ἄλλας. Ὅλαι ὅμως αἱ γραμμαὶ ἔχουν σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἂν δὲ ἐξετάσωμεν τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἔχουν μίαν διάστασιν: μῆκος. Ὥστε ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς εἶναι διάφορος καὶ ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῶν στερεῶν καὶ ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῶν ἐπιφανειῶν.

6. Ἡ ὅλη γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει μία ἕδρα τοῦ κύβου, ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 μέρη. Κάθε δὲ μέρος ἀπὸ αὐτὰ ἔχει ἄκρα. Τὰ ἄκρα γραμμῆς λέγονται **σημεῖα**. Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ἔχει οὔτε μέρη.

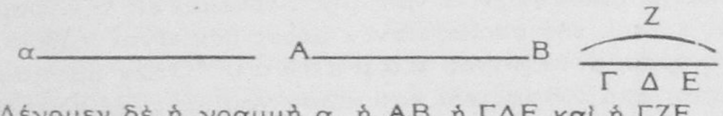
7. Τὰ σημεῖα, τὰς γραμμὰς καὶ τὰς ἐπιφανείας ἠμποροῦμεν νὰ τὰ ἐξετάσωμεν καὶ καθὲν χωριστά. Δηλαδὴ χωρὶς τὰ σώματα, ἐπάνω εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται.

Σημείωσις. Ὅταν ἔχωμεν πολλὰ σημεῖα καὶ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, γράφομεν εἰς τὸ καθὲν καὶ πλησίον του ἀπὸ ἓν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

.Α .Γ

.Β

Λέγομεν δέ: τὸ σημεῖον Α, τὸ Β, τὸ Γ. Ὁμοίως καὶ τὰς γραμμὰς διακρίνομεν μὲ γράμματα, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

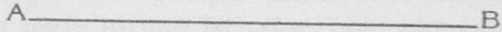


Λέγομεν δὲ ἡ γραμμὴ α, ἡ ΑΒ, ἡ ΓΔΕ καὶ ἡ ΓΖΕ.

8. Εἴδομεν λοιπὸν ἀνωτέρω, ὅτι κάθε σῶμα, κάθε ἐπιφάνεια καὶ κάθε γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν. Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν αὐτῶν, λέγεται **Γεωμετρία**.

ΓΡΑΜΜΑΙ

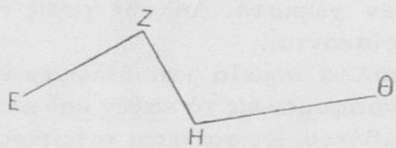
9. Εἴδη γραμμῶν.—Ἐὰν προσέξωμεν τὰς γραμμὰς τῶν στερεῶν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς ἔχουν διάφορα σχήματα. Τὸ ἁπλούστερον ὅμως σχῆμα εἶναι ὡς τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς ΑΒ, ἡ ὁποία λέγεται **ε ὐ θ ε ῖ α.**



Διὰ νὰ λάβωμεν ἡμεῖς ἓν τοιοῦτον σχῆμα, πρέπει νὰ τεντώσωμεν ἓν πολὺ λεπτὸν νῆμα.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην ἢ εἰς τὸν πίνακα εὐθεῖαν γραμμήν, χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα (κοινῶς χάρακα). Ὁ κανὼν εἶναι μία σανὶς λεπτή, ἡ ὁποία ἔχει ἀκμὰς (κόψεις) σχήματος εὐθείας γραμμῆς. Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα, εἶναι εἰς ὅλους γνωστός.

10. Ἄλλα σχήματα γραμμῶν, ποὺ παρατηροῦμεν εἰς τὰ στερεὰ (εἰκ. 1), εἶναι ὅπως τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς ΒΓΔ· αὕτη σχηματίζεται, ὅπως βλέπομεν, ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, χωρὶς νὰ



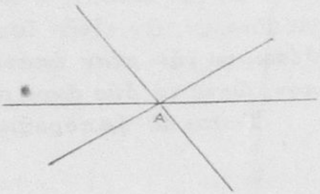
Σχ. 1

Σχ. 2

εἶναι εὐθεῖα. Αἱ γραμμαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅπως αὐτή, λέγονται **τεθλασμέναι.** Τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι καὶ ἡ ΕΖΗΘ.

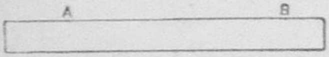
Ἄλλο διάφορον σχῆμα γραμμῆς βλέπομεν εἰς τὴν γραμμὴν ΑΜ τοῦ κώνου, τῆς ὁποίας κανὲν μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα. Αἱ τοιαῦται γραμμαὶ λέγονται **κ α μ π ύ λ α ι.** Ὅταν μία γραμμὴ ἀποτελῆται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς, λέγεται **μ ε ι κ τ ή·** π. χ. μεικτὴ γραμμὴ εἶναι ἡ τοῦ σχήματος 2.

11. Ἰδιότητες τῆς εὐθείας.—1) Ἐὰν θελήσωμεν νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τοιαύτας εὐθείας, ὅσας θέλομεν (σχ. 3). Ἐνῷ, ἂν θελήσωμεν νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μίαν μόνον τοιαύτην εὐθεῖαν ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν (σχ. 4). Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ***ἀπὸ δύο σημεῖα μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.***



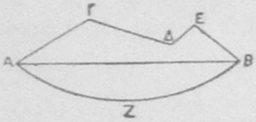
Σχ. 3

2) Ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν Α________________Β. Ἐὰν χρειασθῇ νὰ τὴν αὐξήσωμεν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ τὸ κάμωμεν. Καὶ μάλιστα καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της καὶ ὅσον θέλομεν. Ὥστε: ***Μίαν εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ τὴν αὐξήσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της, ὅσον θέλομεν, καὶ νὰ μένῃ πάντοτε εὐθεῖα.***

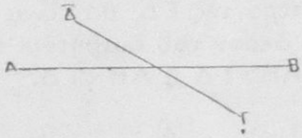


Σχ.4

3) Ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β γνωρίζομεν, ὅτι μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται. Ἄλλαι ὅμως γραμμαί, ὄχι εὐθεῖαι, ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθουν, ὅσαι θέλομεν (σχ. 5)· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμὰς αὐτάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄκρα τὰ Α καὶ Β, ἡ



Σχ. 5



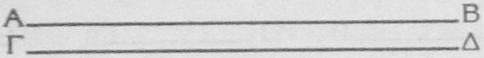
Σχ. 6

εὐθεῖα εἶναι ἡ μικροτέρα. Ὥστε: ***Ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ μικροτέρα.***

Διὰ τοῦτον δὲ τὸν λόγον ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποῖα ἑνώνει δύο σημεῖα, λέγεται **ἀπόστασις** αὐτῶν.

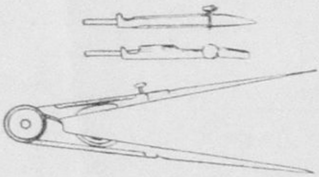
Οὕτως ἀπόστασις τῶν σημείων ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ· τῶν δὲ σημείων ΓΔ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΔ (σχ. 6).

12. Εὐθεῖαι ἴσαι καὶ ἄνισοι.—Ἔχομεν τὰς εὐθείας ΑΒ



καὶ ΓΔ, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν. Θέλομεν δηλαδὴ νὰ ἴδωμεν, ἂν εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι. ***Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ θέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ δύο ἄκρα αὐτῶν, π. χ. τὰ Α καὶ Γ, νὰ συμπέσουν.***

Τοῦτο δὲ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ κάμωμεν. Θέτομεν λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒ, ὅπως εἴπομεν προηγουμένως, καὶ ἔπειτα παρατηροῦμεν, ἂν συμπίπτουν καὶ τὰ ἄλλα ἄκρα Δ καὶ Β· ἂν δὲ συμπίπτουν, λέγομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι· τότε δὲ γράφομεν ΑΒ=ΓΔ· ἂν ὅμως δὲν συμπίπτουν, λέγομεν, ὅτι εἶναι ἄνισοι.



Σχ. 7

13. Ἡ σύγκρισις δύο εὐθειῶν, ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, γίνεται καὶ μὲ τὸν διαβήτην (σχ. 7) ὡς ἑξῆς: ἐφαρμόζομεν πρῶτον τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου εἰς τὰ ἄκρα τῆς μιᾶς εὐθείας ΑΒ. Ἔπειτα (χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου) θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον του εἰς τὸ Γ τῆς ἄλλης εὐθείας· ἂν δὲ τότε τὸ ἄλλο ἄκρον του πέσῃ εἰς τὸ Δ, αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· ἂν ὅμως πέσῃ πέραν τοῦ Δ, ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ· θὰ εἶναι δὲ ἡ ΑΒ μικροτέρα τῆς ΓΔ, ἂν τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ διαβήτου πέσῃ μεταξὺ Γ καὶ Δ. Γράφομεν δὲ τότε ΑΒ>ΓΔ ἢ ΑΒ<ΓΔ.

Π. χ.

Α____________________Β
Γ____________________Δ   ΑΒ=ΓΔ
Ε____________________Ζ
Η______________Θ   ΕΖ>ΗΘ
Ι______________Κ
Λ____________________Μ   ΙΚ<ΛΜ

14. Ἄθροισμα εὐθειῶν.—Ὑποθέτομεν, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ.

Α__________Β   Γ________Δ   Ε_______Ζ

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν (συνήθως μὲ τὸν διαβήτην) ἐπάνω εἰς μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ἓν τμῆμα αβ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ. Κατόπιν λαμ-

α β δ ζ

βάνομεν ἓν τμῆμα (συνεχόμενον) βδ ἴσον μὲ τὴν ΓΔ καὶ τέλος τὸ τμῆμα δζ ἴσον μὲ τὴν ΕΖ. Τότε ἡ εὐθεῖα αζ εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα· εἶναι δηλαδὴ ΑΒ+ΓΔ+ΕΖ=αζ.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι π.χ. τὸ διπλάσιον ἢ τὸ τριπλάσιον τῆς ΑΒ, θὰ λάβωμεν ἐπὶ μιᾶς ἄλλης εὐθείας δύο ἢ τρία τμήματα συνεχόμενα, τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ΑΒ.

15. Διαφοραὶ δύο ἀνίσων εὐθειῶν. — Ὑποθέτομεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ ἀπὸ τὴν ΑΒ.

Α Ε Β Γ Δ

Πρὸς τοῦτο θὰ κόψωμεν ἀπὸ τὴν ΑΒ ἓν τμῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς ΑΒ καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΓΔ. Ἂς εἶναι δὲ τοῦτο τὸ ΑΕ. Τότε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΕΒ, τὸ ὁποῖον ἔμεινε· ἤτοι εἶναι ΑΒ—ΓΔ=ΕΒ.

16. Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.—Ὑποθέτομεν, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ.

Α__________Β Μ___Ν

Πρὸς τοῦτο θὰ συγκρίνωμεν τὴν ΑΒ πρὸς μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΜΝ=1 δάκτυλος, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Θὰ ἴδωμεν δηλαδή, πόσας φορὰς πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ΜΝ (ἢ καὶ μέρη τῆς ΜΝ), διὰ νὰ γίνῃ ἡ ΑΒ.

Ἂν δὲ ἴδωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ γίνεται ἀπὸ τὴν ΜΝ, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν 5 φοράς, θὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ **μῆκος** τῆς ΑΒ εἶναι 5 δάκτυλοι. Ἂν δὲ μᾶς εἴπουν, ὅτι τὸ **μῆκος** τῆς ΑΒ εἶναι $5^1/_2$ δάκτυλοι, θὰ ἐννοήσωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ γίνεται, ἐὰν λάβωμεν τὸν ἕνα δάκτυλον 5 φορὰς καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Ὥστε: ***Μῆκος εὐ-***

θείας λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει, πῶς γίνεται ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη τῆς μονάδος.

17. Μονάδες μήκους.—Συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ (γαλλικὸν) μ έ τ ρ ο ν.

1 μέτρον = 10 παλάμαι.
1 παλάμη = 10 δάκτυλοι.
1 δάκτυλος = 10 γραμμαί.

Ὅταν αἱ ἀποστάσεις, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ μετρήσωμεν, εἶναι μεγάλαι, μεταχειριζόμεθα τὸ δεκάμετρον (10 μ.), τὸ ἑκατόμετρον (100 μ.) καὶ τὸ χιλιόμετρον (1000). Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειριζόμεθα τὸν τ ε κ τ ο ν ι κ ὸ ν π ῆ χ υ ν, ὁ ὁποῖος εἶναι τὰ $^{3}/_{4}$ τοῦ μέτρου.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ

18. Εἴδη ἐπιφανειῶν. Παρετηρήσαμεν, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν στερεῶν (εἰκ. 1) δὲν ὁμοιάζουν μεταξύ των. Ἂν συγκρίνωμεν π.χ. τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, θὰ ἴδωμεν μεγάλην διαφοράν. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι, ἂν λάβωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν (π.χ. τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος) καὶ τὴν θέσωμεν ἐπάνω εἰς μίαν ἕδραν τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐφαρμόζει εἰς αὐτήν, ὅπως καὶ ἂν τὴν θέσωμεν, ἐνῷ, ἂν τὴν θέσωμεν ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, θὰ ἴδωμεν ὅτι δὲν ἐφαρμόζει καθόλου. Ἐπίσης βλέπομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα εἰς ἄλλα μὲν μέρη τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου ἐφαρμόζει, ὅπως εἰς τὴν ἕδραν τοῦ κύβου, εἰς ἄλλα δὲ ἐφαρμόζει κατὰ μίαν μόνον διεύθυνσιν. Ἔπειτα ἀπὸ τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς βλέπομεν, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ξεχωρίσωμεν τὰς ἐπιφανείας εἰς δύο κ ύ ρ ι α εἴδη. Δηλαδή:

1) Εἰς τὰς ἐπιφανείας, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ. Τὰς λέγομεν δὲ ἐ π ι π έ δ ο υ ς ἢ ἁπλῶς ἐ π ί π ε δ α, καὶ

2) Εἰς τὰς ἐπιφανείας, ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἢ δὲν ἐφαρμόζει καθόλου, ἢ ἐφαρμόζει κατὰ μίαν διεύθυνσιν. Τὰς λέγομεν δὲ κ α μ π ύ λ α ς.

Εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἐπιφάνειαι ἐπίπεδοι, ἐνῷ ἡ ἐπιφάνεια π. χ. τῆς σφαίρας εἶναι καμπύλη.

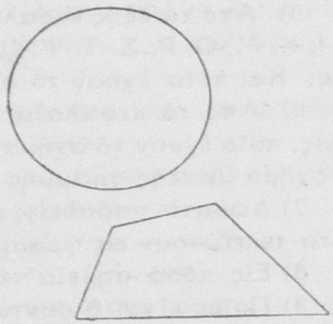
19. Ἐπιφάνεια τεθλασμένη καὶ μεικτή.— Εἴδομεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι ἐπίπεδος. Ἡ ὅλη ὅμως ἐπιφάνεια τοῦ κύβου δὲν ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι ἐπίπεδος. Τὰς ἐπιφανείας, ὅπως αὐτή, τὰς λέγομεν τεθλασμένας. Π. χ. ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι τεθλασμένη.

Τώρα, ἂν προσέξωμεν τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιπέδους ἐπιφανείας καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην.

Τὰς ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἐπιπέδους καὶ καμπύλας ἐπιφανείας, τὰς λέγομεν μεικτάς. Ὥστε αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου εἶναι μεικταί.

20. Ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου.— 1) Ἓν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἀπὸ ὅλα τὰ ἄκρα του, ὅσον θέλομεν, καὶ νὰ εἶναι πάντοτε ἐπίπεδον.

2) Ἓν ἐπίπεδον ἠμποροῦμεν νὰ τὸ θέσωμεν ἐπάνω εἰς ἄλλο ἐπίπεδον, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ἓν μόνον ἐπίπεδον.



Σχ. 8

21. Ἐπίπεδον σχῆμα.— Τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ πίνακος (τοῦ ὑελοπίνακος κ. ἄ.) ἔχει ὅλα τὰ σημεῖα του ἐπάνω εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ὁμοίως καὶ τὰ σημεῖα τῶν σχημάτων 8 εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Σχήματα, ὅπως τὰ ἀνωτέρω, λέγονται ἐπίπεδα. Ὥστε: ***Ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*** Ὑπάρχουν ὅμως καὶ σχήματα τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα δὲν εὑρίσκονται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπως π. χ. τὰ σχήματα τῆς εἰκόνος 1, τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν στερεά.

22. Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας.— Τὰ ἐπίπεδα σχήματα ἡ Γεωμετρία τὰ ἐξετάζει εἰς ἰδιαίτερον μέρος· λέγεται δὲ τοῦτο **Ἐπιπεδομετρία**· ἐνῷ τὰ στερεὰ τὰ ἐξετάζει εἰς δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον λέγεται **Στερεομετρία.**

Ἀσκήσεις.

1) Λάβετε ἕνα κύβον καὶ δείξατε τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.

2) Ἐξετάσατε ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου καὶ δείξατε τὰς δύο διαστάσεις αὐτῆς.

3) Εὕρετε τὰς διαστάσεις μιᾶς γραμμῆς τοῦ κύβου.

4) Ὁ κύβος πόσας ἕδρας ἔχει; Πόσας ἀκμὰς (δηλαδὴ εὐθείας, εἰς τὰς ὁποίας συναντῶνται ἢ τέμνονται αἱ ἕδραι;) Πόσας κορυφὰς (δηλαδὴ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ ἀκμαί;)

5) Ἀπὸ τὰ ἑξῆς κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου Α, Β, Ε, Ι, Κ, Μ, Ο, Ρ, Σ, Τ, Ψ, Ω, ποῖα ἔχουν τὸ σχῆμα εὐθείας γραμμῆς; Καὶ ποῖα ἔχουν τὸ σχῆμα τεθλασμένης;

6) Ἀπὸ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ποῖα ἔχουν τὸ σχῆμα καμπύλης γραμμῆς; Καὶ ποῖα ἔχουν τὸ σχῆμα μεικτῆς γραμμῆς;

7) Δώσατε παραδείγματα σωμάτων, τῶν ὁποίων τὰ σχήματα τελειώνουν εἰς γραμμὰς τεθλασμένας ἢ μεικτάς.

8) Εἰς πόσα σημεῖα τέμνονται (συναντῶνται) δύο εὐθεῖαι;

9) Ποῖος εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἕως τὸ Β; Ἀπὸ τοῦ Ε ἕως τὸ Γ; Μετρήσατε τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν.

.Α .Ε

.Δ

.Γ .Β

10) Νὰ γράψῃς μίαν εὐθεῖαν 4 δακτύλων, ἔπειτα δὲ νὰ γράψῃς α) κατ' ἐκτίμησιν καὶ β) διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου μίαν εὐθεῖαν 5 δακτύλων.

11) Νὰ εὕρῃς τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ

Α Β

α) κατ' ἐκτίμησιν, β) διὰ μετρήσεως.

12) Νὰ εὕρῃς α) κατ' ἐκτίμησιν, β) διὰ μετρήσεως τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ τετραδίου σου.

13) Νὰ γράψῃς εὐθείας μήκους α) 1 παλάμης, β) 5 δακτύλων καὶ γ) 35 γραμμῶν.

14) Δίδονται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ.

α

β

γ

α) Νὰ γράψῃς τέσσαρας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἀθροίσματα $α+β$, $α+γ$, $β+γ$, $α+β+γ$.

β) Νὰ γράψῃς τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαφορὰς $α-β$, $α-γ$, $β-γ$.

15) Νὰ γράψῃς δύο εὐθείας 12 δακτύλων καὶ 8 δακτύλων. Κατόπιν δὲ νὰ γράψῃς μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

16) Νὰ γράψῃς τρεῖς εὐθείας 9, 5 καὶ 12 δακτύλων. Ἔπειτα δὲ νὰ γράψῃς εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν πρώτων εὐθειῶν.

17) Νὰ γράψῃς εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι τριπλασία τῆς εὐθείας

Α Β

καὶ ἄλλην μίαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πενταπλασία αὐτῆς.

18) Νὰ γράψῃς δύο εὐθείας 15 καὶ 9 δακτύλων. Ἔπειτα δὲ νὰ γράψῃς ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

19) Δώσατε παραδείγματα ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

20) Τί ἐμάθομεν ἕως τώρα γενικῶς διὰ τὸ ἐπίπεδον;

21) Λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς ἓν ἐπίπεδον (π.χ. εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος) δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐὰν ἔπειτα γράψωμεν

τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, πῶς θὰ κεῖται ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο; (Δηλαδὴ ἐὰν θὰ εἶναι ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ ὄχι).

22) Μὲ ποῖον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ ἴδωμεν, ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος;

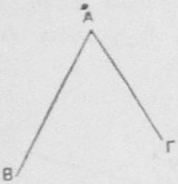
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

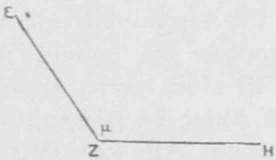
ΓΩΝΙΑΙ

23. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 9) ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, χωρὶς νὰ κάμουν μίαν μόνον εὐθεῖαν, σχηματίζεται σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **γωνία** (ἐπίπεδος). Τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζουν αἱ εὐθεῖαι, λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας, αἱ εὐθεῖαι δέ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν, λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

Οὕτως ἡ γωνία τοῦ σχήμ. 9 ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὴν ἀπαγγέλλομεν δὲ ὡς ἑξῆς: ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ἡ ΓΑΒ. Ὅπως βλέπομεν



Σχ. 9



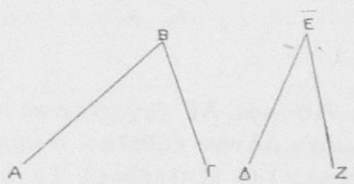
Σχ. 10

δέ, ὅταν τὴν ἀπαγγέλλωμεν μὲ τρία γράμματα, θέτομεν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

Ὁμοίως διὰ τὴν γωνίαν τοῦ σχήμ. 10 λέγομεν: ἡ γωνία Ζ ἢ ἡ ΕΖΗ ἢ ἡ ΗΖΕ. Ἐνίοτε ὅμως σημειώνομεν τὴν γωνίαν καὶ μὲ ἓν μικρὸν γράμμα, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς· λέγομεν δὲ τότε ἡ γωνία μ (σχ. 10).

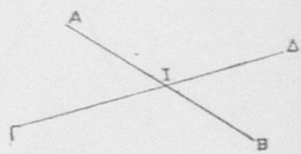
24. Ἔχομεν τὰς γωνίας ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν· θέλομεν δηλαδὴ νὰ ἴδωμεν, ἂν εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι.

Πρὸς τοῦτο θὰ λάβωμεν τὴν μίαν γωνίαν, π. χ. τὴν ΔΕΖ, καὶ θὰ τὴν θέσωμεν ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒΓ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον (σχ. 11). Ἡ κορυφὴ Ε τῆς μιᾶς γωνίας νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β τῆς ἄλλης καὶ ἡ μία πλευρὰ τῆς πρώτης γωνίας, π. χ. ἡ ΔΕ, νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῆς ἄλλης, ἐὰν δὲ ἴδωμεν, ὅτι καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΖΕ τῆς πρώτης γωνίας πίπτῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ τῆς δευτέρας, τότε θὰ εἴπωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι, ἄλλως θὰ εἶναι ἄνισοι. Καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα πλευρὰ πίπτει ἔξω ἀπὸ τὴν ἄλλην γωνίαν. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἰσότης (ἢ ἡ ἀνισότης) τῶν γωνιῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μέγεθος αὐτῶν.



Σχ. 11

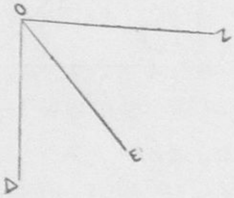
25. Γωνίαι κατὰ κορυφήν.—Ἐὰν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ι, ἡ γωνία ΑΙΓ λέγεται κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας ΒΙΔ· ἐπίσης ἡ γωνία ΓΙΒ εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας ΑΙΔ, ὅπως δὲ βλέπομεν, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΙΓ καὶ ΒΙΔ ἔχουν μόνον τὴν κορυφὴν Ι κοινήν, ἐνῷ αἱ πλευραί των εἶναι διάφοροι (σχ. 12). Τὸ αὐτὸ δὲ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΓΙΒ καὶ ΑΙΔ. Ὥστε: ***Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν σχηματίζωνται ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται καὶ ἔχουν μόνον τὴν κορυφὴν κοινήν, ἐνῷ αἱ πλευραί των εἶναι διάφοροι.***



Σχ. 12

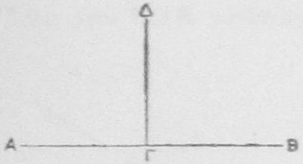
26. Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.—Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὴν γωνίαν ΑΙΓ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς γωνίας ΒΙΔ, ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφὴν αὐτῆς, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ θὰ ἴδωμεν καὶ ἂν ἀποκόψωμεν τὴν ΓΙΒ καὶ τὴν ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της ΑΙΔ. Ὥστε: ***Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

27. **Γωνίαι ἐφεξῆς.** — Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα 12 ἐξετάσωμεν τὰς γωνίας ΑΙΓ καὶ ΓΙΒ, παρατηροῦμεν, ὅτι αὗται ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Ι, τὴν πλευρὰν ΙΓ ἐπίσης κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΑΙ, ΙΒ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς κοινῆς. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰς γωνίας ΔΟΕ καὶ ΕΟΖ (σχ. 13). Δύο τοιαῦται γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς. Ὥστε: ***Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχουν τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς κοινῆς.***



Σχ. 13

28. **Ὀρθαὶ γωνίαι.** — Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν, νὰ εἶναι ἴσαι, τότε κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς λέγεται **ὀρθὴ** (σχ. 14).



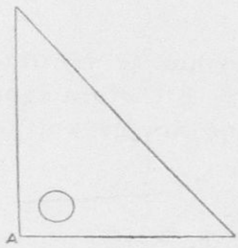
Σχ. 14

Οὕτως, ἐὰν λάβωμεν ἓν φύλλον χάρτου καὶ μίαν ἀπὸ τὰς εὐθείας, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει, σημειώσωμεν ὡς ΑΒ, ἔπειτα δέ, ἀφοῦ λάβωμεν ἓν σημεῖον αὐτῆς Γ, διπλώσωμεν τὸ φύλλον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΓ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ΓΒ, ἡ εὐθεῖα, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐδιπλώθη τὸ φύλλον, θὰ σχηματίσῃ μὲ τὴν ΑΒ δύο γωνίας ὀρθάς.

Ἐπίσης αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, τὰς ὁποίας βλέπομεν εἰς τὸν κύβον, εἰς τὸν πίνακα, εἶναι ὀρθαί.

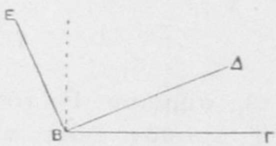
29. **Ἰδιότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.** — Ἐὰν λάβωμεν δύο ὀρθὰς γωνίας καὶ τὰς ἐφαρμόσωμεν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὥστε: ***Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

30. Γνώμων.— Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν, μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα. Ὁ γνώμων εἶναι λεπτὴ σανίς, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχ. 15 καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α. Θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην ἢ εἰς τὸν πίνακα καὶ μὲ τὸ μολύβι ἢ τὴν κιμωλίαν, τὴν ὁποίαν σύρομεν κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, γράφομεν ὀρθὴν γωνίαν.



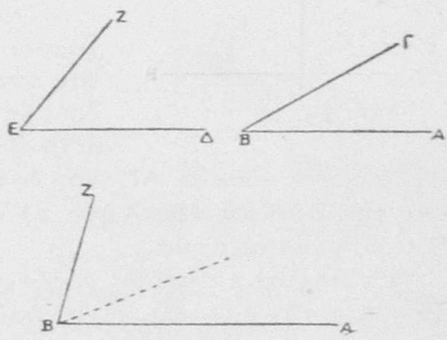
Σχ. 15

31. Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία.— Μία γωνία, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, λέγεται **ὀ ξ ε ῖ α**, ἂν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα, λέγεται **ἀ μ β λ ε ῖ α**. Οὕτως ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ΕΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 16).



Σχ. 16

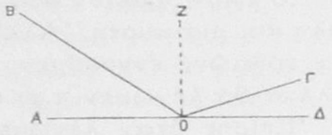
32. Ἄθροισμα γωνιῶν.— Ὑποθέτομεν, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰς γωνίας ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 17). Πρὸς τοῦτο θὰ τὰς κάμωμεν ἐφεξῆς. Ἡ δὲ γωνία ΑΒΖ, τὴν ὁποίαν κάμνουν αἱ δύο ἄκραι πλευραί, λέγεται ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολλὰς γωνίας, κάμνομεν τὴν πρώτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν, κατόπιν τὴν τρίτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν κ.ο.κ. Πάλιν ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν κάμνουν αἱ δύο ἄκραι πλευραί, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν.



Σχ. 17

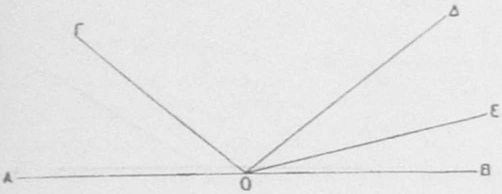
33. Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχήματος 18, θὰ

ἴδωμεν, ὅτι αἱ δύο ἄκραι πλευραὶ σχηματίζουν εὐθεῖαν καὶ ὄχι γωνίαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ***τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.*** Καὶ πράγματι, ἂν φέρωμεν τὴν ΟΖ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΑΔ ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, τὰς ΑΟΖ καὶ ΖΟΔ, παρατηροῦμεν, ὅτι γωνία ΑΟΒ + γωνία ΒΟΖ = γωνία ΑΟΖ = 1 ὀρθὴ (24)· ἐπίσης εἶναι ΖΟΓ + ΓΟΔ = ΖΟΔ = 1 ὀρθή· ἀλλὰ ΑΟΒ + ΒΟΓ + ΓΟΔ = ΑΟΖ + ΖΟΔ, ἤτοι ΑΟΒ + ΒΟΓ + ΓΟΔ = 2 ὀρθαί.



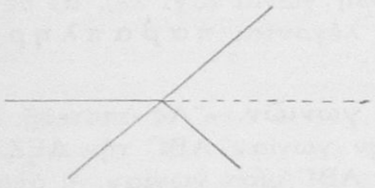
Σχ. 18

34. Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 19). Ἐὰν ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτῆς, π. χ. τὸ Ο, φέρωμεν ὅσας θέλομεν εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν, εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι.

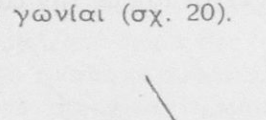


Σχ. 19

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸ ἓν σημεῖον φέρωμεν ὅσας θέλομεν εὐθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν, εἶναι 4 ὀρθαὶ γωνίαι (σχ. 20).


Σχ. 20

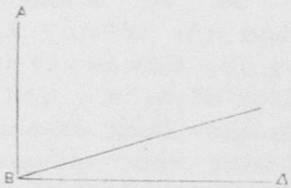
35. Κυρταὶ καὶ κοῖλαι γωνίαι.— Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι ὑπάρχουν καὶ γωνίαι μεγαλύτεραι ἀπὸ δύο ὀρθάς. Τὰς τοιαύτας γωνίας λέγομεν **κυρτάς**. Οὕτως ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ βέλος εἰς τὸ σχ. 21, εἶναι κυρτή.


Σχ. 21

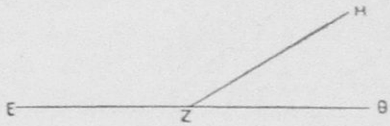
Πρὸς διάκρισιν, τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι ἀπὸ δύο ὀρθάς, τὰς λέγομεν **κοίλας**. Ὥστε, ὅταν φέρωμεν ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον δύο εὐθείας, σχηματίζονται 2 γωνίαι· μία κοίλη καὶ μία κυρτή. Ἀλλ' ἡμεῖς, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν δύο εὐθειῶν, ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν κοίλην γωνίαν αὐτῶν. Ἄλλως θὰ λέγωμεν π.χ. ἡ κυρτὴ γωνία ΑΒΓ (σχ. 17).

Ἐπίσης ὅταν λέγωμεν, ὅτι μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἐννοοῦμεν τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς καὶ μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

36. Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί.—**Συμπληρωματικαὶ** λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ



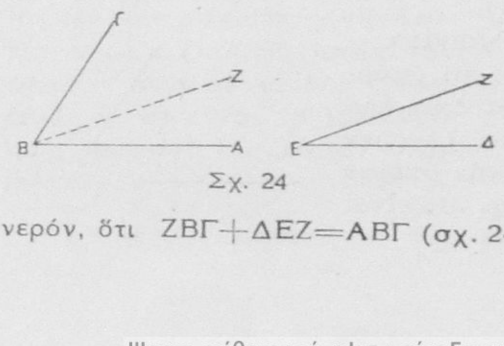
Σχ. 22



Σχ. 23

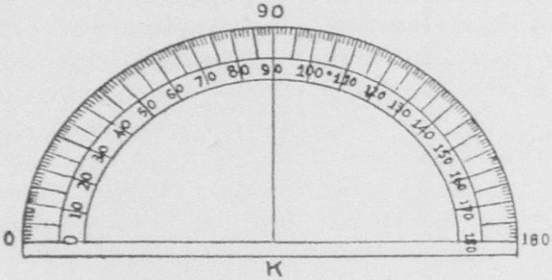
ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μία ὀρθὴ γωνία (σχ. 22), ἂν δὲ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, λέγονται **παραπληρωματικαί** (σχ. 23).

37. Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν.—Ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΓ τὴν ΔΕΖ. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὴν ΑΒΓ μίαν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κορυφὴν τὴν Β καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ (ἢ τὴν ΒΓ) καὶ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ· (πρὸς τοῦτο δὲ πάλιν θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ΔΕΖ ἐπὶ μέρους τῆς ΑΒΓ μὲ τὸν τρόπον, ποὺ φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω). Τότε ἡ γωνία, ἡ ὁποία θὰ μείνῃ, δηλαδὴ ἡ ΖΒΓ, λέγεται **διαφορὰ** τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ΖΒΓ+ΔΕΖ=ΑΒΓ (σχ. 24).



Σχ. 24

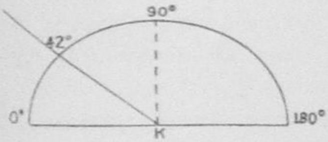
38. Μέτρησις γωνιῶν. — Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν μίαν ὡρισμένην γωνίαν ὡς μονάδα· ἔπειτα εὑρίσκομεν, πόσας φορὰς ἡ δοθεῖσα γωνία περιέχει τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία, διαιρεῖται δὲ αὕτη εἰς 90 ἴσας γωνίας, κάθε μίαν τῶν ὁποίων ὀνομάζομεν γωνίαν μιᾶς μοίρας (1°). Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (60′) καὶ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (60′′).



Σχ. 25

Συνηθέστερον ὅμως ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ μοῖρα· ἐὰν π. χ. μία γωνία περιέχῃ τὴν μοῖραν 35 φοράς, θὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μετρᾷ τὴν γωνίαν, εἶναι 35°· ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν 20 φορὰς καὶ τὸ δεύτερον 40 φοράς, θὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι 35° 20′ 40′′.

39. Αἱ γωνίαι μετροῦνται εὐκόλως δια τοῦ **μοιρογνωμονίου.** Εἶναι δὲ τοῦτο ὄργανον συνήθως ἀπὸ μέταλλον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι εὐθεῖα γραμμή (σχ. 25)· ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς Κ ἄγεται εὐθεῖα, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Κάθε δὲ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 90°· ὥστε εἰς τὸ ὄργανον αὐτὸ ὑπάρχουν σημειωμέναι 180°. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Θέτομεν τὴν κοινὴν κορυφὴν Κ τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, τὴν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ, ἡ ὁποία φέρει τὴν διαίρεσιν 0°, ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας (σχ. 26)· τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς διαιρέσεως τοῦ μοιρογνωμονίου, π. χ. ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 42· ἄρα ἡ μετρηθεῖσα γωνία εἶναι 42°.



Σχ. 26

Ἀσκήσεις.

23) Τί καλεῖται γωνία; Πότε δύο γωνίαι λέγονται ἄνισοι;

24) Διὰ ποίας γωνίας ἄνευ μετρήσεως ἠμποροῦμεν ἀμέσως νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι;

25) Δύο ἐφεξῆς γωνίαι ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἐπὶ εὐθείας. Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;

26) Δίδονται δύο γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι 30°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη;

27) Δίδονται δύο γωνίαι παραπληρωματικαὶ καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι 72°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη;

28) Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀσκήσεις 26 καὶ 27 αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

29) Ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἄγονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς 4 εὐθεῖαι. Ἀπὸ τὰς 5 δὲ γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἐσχηματίσθησαν, αἱ 4 εἶναι κατὰ σειρὰν 25°, 30°, 38°, 43°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη γωνία;

30) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγονται 5 εὐθεῖαι, ἀπὸ τὰς 5 δὲ γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἐσχηματίσθησαν, αἱ 4 εἶναι κατὰ σειρὰν 40°, 50°, 70°, 110°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη;

31) Ἀπὸ τὰς 4 γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο διασταυρούμεναι εὐθεῖαι, ἡ μία εἶναι 45°. Νὰ εὑρεθῇ, πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας 3 γωνίας.

32) Νὰ κατασκευάσῃς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν 30°. Ἔπειτα νὰ κατασκευάσῃς α) κατ' ἐκτίμησιν καὶ β) μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον γωνίαν 40°.

33) Νὰ κατασκευάσῃς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον γωνίας 35° καὶ 55° καὶ κατόπιν νὰ κατασκευάσῃς γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

34) Νὰ κατασκευάσῃς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον γωνίας 40°, 62°, 33° καὶ κατόπιν νὰ κατασκευάσῃς γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων.

35) Νὰ κατασκευάσῃς, ὁμοίως ὡς ἄνω, δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν ἄθροισμα α) 90°, β) 135°, καὶ γ) 180°.

36) Νὰ κατασκευάσῃς δύο γωνίας 75° καὶ 30° καὶ κατόπιν νὰ κατασκευάσῃς γωνίαν ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν των.

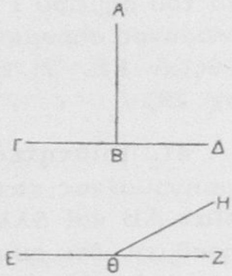
37) Νὰ κατασκευάσῃς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν διαφορὰν α) 60°, β) 90°, καὶ γ) 120°.

38) Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ Α νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ 30°.

39) Κατασκευάσατε ὁμοίως γωνίαν ΑΟΒ=36°, ἔπειτα νὰ προεκτείνητε τὴν ΑΟ μέχρι τοῦ Γ καὶ νὰ κατασκευάσητε μὲ πλευρὰν τὴν ΟΓ, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (ἢ ἡ ΟΒ), γωνίαν ΓΟΔ=36°. Κατόπιν νὰ μετρήσητε τὰς γωνίας ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ. Ἐξετάσατε ἔπειτα, τί εἴδους γραμμὴ εἶναι ἡ ΒΟΔ.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

40. Εὐθεῖαι, κάθετοι καὶ πλάγιαι.— Κάθετος λέγεται μία εὐθεῖα πρὸς ἄλλην, ὅταν τὴν συναντᾷ καὶ σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν ὀρθὰς γωνίας· ἄλλως λέγεται πλαγία. Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΗΘ. Τὸ κοινὸν σημεῖον Θ λέγεται ποῦς τῆς πλαγίας ΗΘ (σχ. 27).

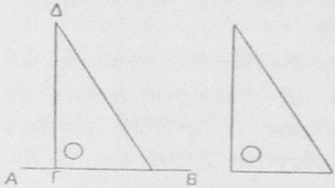


Σχ. 27

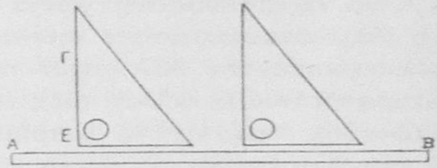
41. Κατασκευὴ καθέτων εὐθειῶν.—Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

α) Ὑποθέτομεν, ὅτι ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Γ. Τότε ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ εἰς τὸ Γ. Κατόπιν δὲ σύρομεν τὸ μολύβι ἢ τὴν κιμωλίαν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος καὶ γράφομεν τὴν ΓΔ. Τότε ἡ ΓΔ εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἐζητήθη (σχ. 28).

β) Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ζητεῖται νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἀπὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀλλ' εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος νὰ διέρχηται



Σχ. 28

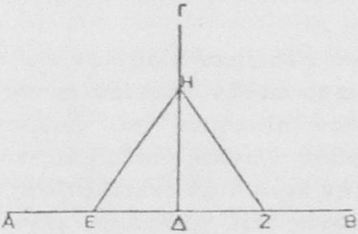


Σχ. 29

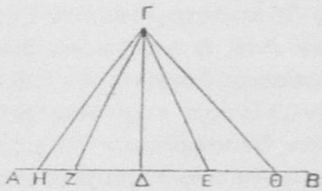
διὰ τοῦ σημείου Γ. Κατόπιν κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ γνώμονος σύρομεν τὸ μολύβι ἢ τὴν κιμωλίαν καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (σχ. 29).

41. Ἰδιότητες τῶν καθέτων.—1) Ἐὰν καὶ εἰς τὰς δύο προηγουμένας κατασκευὰς θελήσωμεν νὰ φέρωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἄλλας καθέτους διὰ τοῦ Γ ἢ ἀπὸ τοῦ Γ, παρατηροῦμεν, ὅτι συμπίπτουν μὲ τὰς ΔΓ ἢ ΕΓ. Ὥστε: ***Ἐπὶ εὐθεῖαν μίαν μόνον κάθετον ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν διὰ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπ' αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς.***

2) Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 30) καὶ κάθετον ἐπ' αὐτὴν τὴν ΓΔ· ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ Δ λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην τὰς ἴσας εὐθείας ΔΕ καὶ ΔΖ. Ἔπειτα ἀπὸ



Σχ. 30



Σχ. 31

τὸ τυχὸν σημεῖον Η τῆς ΓΔ φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΕ καὶ ΗΖ· ἂν τώρα τὰς τελευταίας αὐτὰς εὐθείας συγκρίνωμεν, παρατηρουμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι· ἀλλ' αἱ ΗΕ καὶ ΗΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Η ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ΕΖ. Εὑρίσκεται δὲ τὸ Η ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Ὥστε: ***Κάθε σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς.***

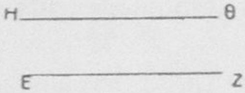
3) Ἂς λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, τὸ Γ (σχ. 31)· ἐκ δὲ τοῦ Γ ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ πλαγίας μέχρις αὐτῆς τὰς ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ κτλ. Ἐὰν ἤδη συγκρίνωμεν τὰς πλαγίας αὐτὰς πρὸς τὴν κάθετον, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας. Ἕνεκα δὲ τούτου ὁρίζομεν τὴν ΓΔ ὡς ἀπόστασιν τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ὥστε: ***Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.***

43. Εὐθεῖαι παράλληλοι.—Ἐὰν γράψωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος δύο εὐθείας, ὡς εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ σχήμ. 32, καὶ προεκτείνωμεν αὐτὰς πρὸς τὰ μέρη τοῦ Β καὶ τοῦ Δ, ἐννοοῦμεν, ὅτι θὰ συναντηθοῦν.

Ὑπάρχουν ὅμως εὐθεῖαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν, δὲν συναντῶνται. Αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι.

Ὥστε: ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.*** Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ εἶναι παράλληλοι (σχ. 33), ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ τῶν χαρακωμένων τετραδίων εἶναι παράλληλοι.

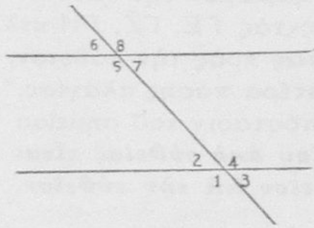
Σχ. 32



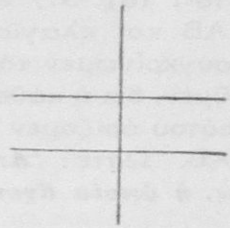
Σχ. 33

44. Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων.—Ἂν δύο παραλλήλους εὐθείας κόψωμεν μὲ τρίτην εὐθεῖαν, θὰ σχηματισθοῦν 8 γωνίαι (σχ. 34). Ἀπὸ αὐτὰς αἱ γωνίαι 2, 3, 6, 7 εἶναι ὀξεῖαι, αἱ δὲ 1, 4, 5, 8 εἶναι ἀμβλεῖαι. Ἂν τώρα συγκρίνωμεν αὐτὰς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ θὰ παρατηρήσωμεν καὶ διὰ τὰς ἀμβλείας.

Ὥστε: ***Ὅταν κόψωμεν δύο παραλλήλους μὲ τρίτην εὐθεῖαν, αἱ ὀξεῖαι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπίσης εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ αἱ ἀμβλεῖαι.***



Σχ. 34

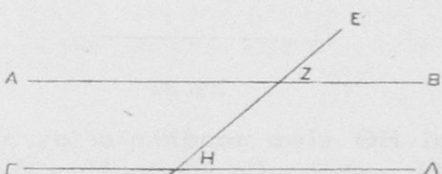


Σχ. 35

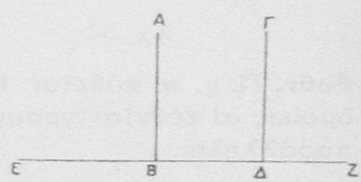
Ἂν ἡ τρίτη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ κόψῃ τὰς δύο παραλλήλους, ***εἶναι κάθετος εἰς τὴν μίαν ἀπὸ αὐτάς, θὰ εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ἄλλην παράλληλον.*** Διότι καὶ αἱ ὀκτὼ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

45. Μᾶς δίδονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ σχ. 36 καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ ἴδωμεν, ἂν εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι.

Πρὸς τοῦτο θὰ κόψωμεν αὐτὰς μὲ τρίτην εὐθεῖαν καὶ κατόπιν θὰ μετρήσωμεν τὰς ὀξείας γωνίας (ἢ τὰς ἀμβλείας). Ἐὰν δὲ



Σχ. 36



Σχ. 37

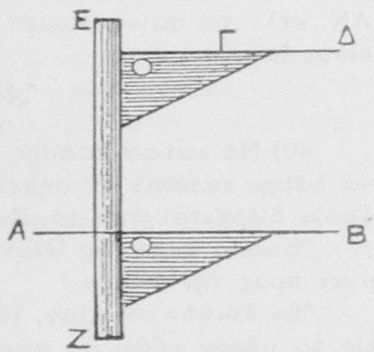
ἴδωμεν, ὅτι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι (ἢ αἱ ἀμβλεῖαι) εἶναι μεταξύ των ἴσαι, θὰ εἴπωμεν τότε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι. Ὥστε: ***Δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὅταν τέμνωνται ὑπὸ τρί-***

της καὶ σχηματίζουν τὰς 4 ὀξείας γωνίας (ἢ τὰς 4 ἀμβλείας) ἴσας μεταξύ των.

Ἀπὸ τὴν πρότασιν αὐτὴν συμπεραίνομεν καὶ τὴν ἑξῆς. ***Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλοι.*** Οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΕΖ, εἶναι παράλληλοι (σχ. 37).

46. Πρόβλημα.—***Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς Γ. Ζητεῖται δὲ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Γ.***

Πρὸς τοῦτο μᾶς χρειάζεται ὁ γνώμων καὶ ὁ κανών. Καὶ τὴν μὲν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 38). Εἰς δὲ τὴν ἄλλην κάθετον ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα ΖΕ. Κατόπιν (ἐνῷ διατηροῦμεν τὸν κανόνα ἀκίνητον) σύρομεν ἐπάνω εἰς τὸν κανόνα τὸν γνώμονα, μέχρις ὅτου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος περάσῃ ἀπὸ τὸ Γ. Τότε σύρομεν τὴν γραφίδα (τὸ μολύβι) κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς καὶ γράφομεν τὴν ΓΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΓΔ ἡ ζητουμένη παράλληλος· διότι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ (τοῦ κανόνος).

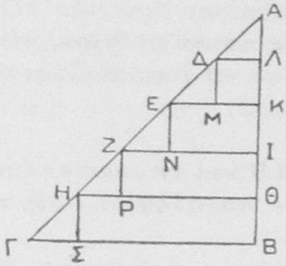


Σχ. 38

47. Διὰ τοῦ σημείου Γ μίαν μόνον παράλληλον ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν ΑΒ. Καὶ γενικῶς: ***ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, μία μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

48. Πρόβλημα.—***Νὰ διαιρέσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη.***

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς ΑΒ, π.χ. τὸ Α, φέρομεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΑΓ, ἐπάνω δὲ εἰς αὐτὴν λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην κατὰ σειρὰν 5 τμήματα ἴσα, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΓ (σχ. 39)· κατόπιν φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, τέλος δὲ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ. (Πρὸς τοῦτο δὲ κατασκευάζομεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς γωνίας ΑΔΛ, ΑΕΚ, ΑΖΙ καὶ ΑΗΘ ἴσας τὴν κάθε μίαν πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ). Αἱ παράλληλοι αὐταὶ διαιροῦν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς 5 μέρη, ΑΛ, ΚΛ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΒ. Ἂν τώρα τὰ μέρη αὐτὰ ΑΛ, ΛΚ, κτλ. τὰ συγκρίνωμεν μὲ τὸν διαβήτην, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσα.



Σχ. 39

Ἀσκήσεις.

40) Νὰ κατασκευάσῃς εἰς τὸ τετράδιόν σου τὸ σχ. 30 καὶ νὰ λάβῃς κατόπιν ἓν σημεῖον Θ ἐκτὸς ἀπὸ τὴν κάθετον ΓΔ (ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΕΖ).

Ἔπειτα φέρε τὰς ΘΕ καὶ ΘΖ, τὰς ὁποίας νὰ συγκρίνῃς τὴν μίαν πρὸς τὴν ἄλλην.

Ἓν λοιπὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἔξω ἀπὸ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον εὐθείας, πῶς ἀπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας αὐτῆς; Ἀπέχει δηλαδὴ ἴσον ἢ ἄνισον; Καὶ ποῦ ἔπρεπε νὰ λάβωμεν τὸ σημεῖον Θ, ἐὰν ἠθέλαμεν, αἱ ἀποστάσεις ΘΕ καὶ ΘΖ νὰ εἶναι ἴσαι;

41) Εἰς τὸ σχῆμα 34 γνωρίζομεν, ὅτι αἱ γωνίαι 8 καὶ 7 ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς· ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι αἱ γωνίαι 8 καὶ 4 εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν τὰς γωνίας 7 καὶ 4, πόσον ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν, καὶ πόσον ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν, ἐὰν προσθέσωμεν τὰς γωνίας 5 καὶ 2;

42) Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ δύο σημεῖα αὐτῆς Γ καὶ Δ. Νὰ φέρῃς τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, αἱ ὁποῖαι νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Τί εἶναι αἱ κάθετοι αὗται μεταξύ των;

43) Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐκτὸς

τῆς ΑΒ. Νὰ φέρῃς ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ Γ καὶ Δ τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τί εἶναι αἱ κάθετοι αὗται μεταξύ των;

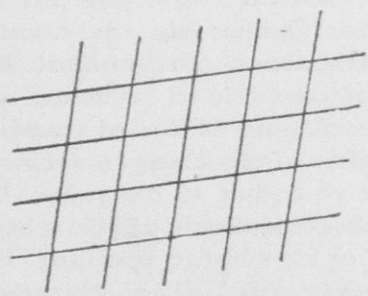
44) Δείξατε εἰς τὸν κύβον ἀκμὰς παραλλήλους. Ὑπάρχουν εἰς αὐτὸν ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι δὲν συναντῶνται, ἀλλὰ τὰς ὁποίας δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν παραλλήλους; (Εἶναι αἱ ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι δὲν εὑρίσκονται εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον).

Κατόπιν τούτου, εὕρετε πρῶτον τὰς εὐθείας τοῦ δωματίου σας, αἱ ὁποῖαι δὲν συναντῶνται, καὶ δεύτερον εὕρετε, ποῖαι ἀπὸ αὐτὰς εἶναι παράλληλοι καὶ ποῖαι ὄχι.

45) Φέρατε δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ. Κατόπιν δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας ἐφέρατε, εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

46) Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης· μία δὲ ἀπὸ τὰς 8 σχηματιζομένας γωνίας εἶναι 36°. Νὰ εὑρεθῇ, πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας 7 γωνίας.

47) Εἰς τὸ κάτωθι δίκτυον παραλλήλων εὐθειῶν νὰ εὕρῃς: α) Τί εἶναι μεταξύ των αἱ ὀξεῖαι γωνίαι. β) Τί εἶναι μεταξύ των αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι. γ) Νὰ μετρήσῃς μίαν ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτάς. Ἠμπορεῖς ἔπειτα νὰ εἴπῃς, χωρὶς μέτρησιν, πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας; δ) Νὰ εὕρῃς ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς 6 ζεύγη παραπληρωματικῶν γωνιῶν.



48) Κόπτομεν δύο εὐθείας μὴ παραλλήλους ὑπὸ τρίτης. Ἠμπορεῖτε νὰ εἴπητε, χωρὶς νὰ μετρήσητε, τί πρέπει νὰ εἶναι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι (ἢ αἱ ἀμβλεῖαι) μεταξύ των;

49) Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ· ἐκ τοῦ Α φέρατε τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 60°, κατόπιν ἐκ τοῦ Β φέρατε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (ἢ ἡ ΑΓ) εὐθεῖαν ΒΔ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ἐπίσης 60°. Δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

50) Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν, ὅταν σχηματίσετε τὴν γω-

νίαν ΒΑΓ=60°, νὰ φέρετε τὴν ΒΔ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ἡ ΑΓ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 120°. Δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

51) Δίδεται ἡ γωνία ΑΒΓ=45°. Θέλομεν δὲ ἐκ τοῦ Α νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν ΑΔ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος ἢ ἡ ΒΓ, ἀλλὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν. Ποίαν γωνίαν πρέπει τότε νὰ σχηματίζῃ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ;

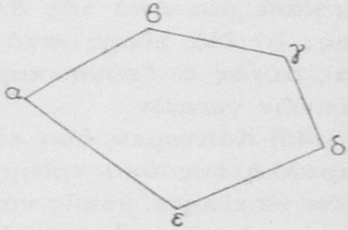
52) Ἐὰν θέλωμεν ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα ΑΔ νὰ ἀχθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΒΓ, ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ ἡ ΑΔ μετὰ τῆς ΑΒ, διὰ νὰ εἶναι ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ;

53) Διὰ ποίου ἄλλου τρόπου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου παράλληλον πρὸς εὐθεῖαν ἐκτὸς αὐτοῦ;

54) Λάβετε μίαν εὐθεῖαν καὶ διαιρέσατε αὐτὴν εἰς 3, 7 ἴσα μέρη.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

49. Εἰς τὸν κύβον μία ἕδρα τελειώνει εἰς 4 εὐθείας γραμμάς. Ὁμοίως εἰς τὴν πυραμίδα παρατηροῦμεν, ὅτι πολλαὶ ἕδραι τελειώνουν εἰς 3 εὐθείας γραμμάς. Γνωρίζομεν δέ, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἑδρῶν αὐτῶν εἶναι ἐπίπεδοι. Ὁμοίως εἰς τὸ σχῆμα 40 βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια αβγδε τελειώνει καὶ αὐτὴ εἰς εὐθείας γραμμάς. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι πολλαὶ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τελειώνουν εἰς εὐθείας γραμμάς (ἐνῷ αἱ ἐπιφάνειαι, π. χ., τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου τελειώνουν εἰς καμπύλας γραμμάς).



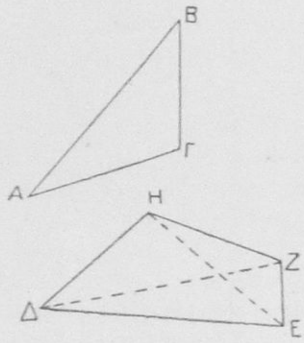
Σχ. 40

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς εὐθείας γραμμάς, λέγεται εὐθύγραμμον σχῆμα.

Ὥστε τὰ σχήματα ΑΒΓ, ΔΕΖΗ, αβγδε εἶναι εὐθύγραμμα.

Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα, λέγονται **πλευραὶ** αὐτοῦ.

Οὕτω τοῦ σχήματος ΑΒΓ πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ τοῦ ΔΕΖΗ, πλευραὶ εἶναι αἱ ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ καὶ ΗΔ (σχ. 41).



Σχ. 41

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος, λέγονται γωνίαι αὐτοῦ. Ἐπίσης καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν λέγονται κορυφαὶ τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος.

Οὕτω γωνίαι τοῦ σχήματος ΑΒΓ εἶναι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ καὶ ΓΑΒ καὶ κορυφαὶ αὐτοῦ αἱ Α, Β, Γ. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευράς, ἔχει καὶ τρεῖς γωνίας καὶ τρεῖς κορυφάς. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον ἔχει 4 πλευράς, ἔχει καὶ 4 γωνίας καὶ 4 κορυφὰς κ.ο.κ.

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς 3 πλευρὰς ὡς τὸ ΑΒΓ, λέγεται **τρίγωνον** ἢ τρίπλευρον. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς 4 πλευράς, λέγεται **τετράπλευρον.** Ἐκεῖνο δέ, ποὺ τελειώνει εἰς 5, 6 κτλ. πλευράς, λέγεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον κτλ. Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κτλ. τὰ λέγομεν γενικῶς **πολύγωνα.** Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται **περίμετρος.** Οὕτω τοῦ τετραπλεύρου ΔΕΖΗ περίμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + ΗΔ.

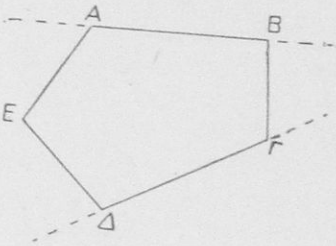
Εἰς τὸ σχῆμα ΔΕΖΗ αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΗ λέγονται **διαγώνιοι** αὐτοῦ.

Ὥστε: ***Διαγώνιος ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο κορυφὰς αὐτοῦ καὶ δὲν εἶναι πλευρὰ τοῦ σχήματος.***

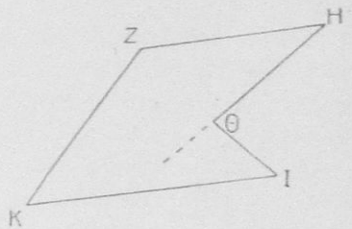
Τὰ τρίγωνα δὲν ἔχουν διαγωνίους.

Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ. Εἰς τὸ πρῶτον παρατηροῦμεν, ὅτι, οἱαδήποτε πλευρὰ καὶ ἂν προεκταθῇ, ἀφήνει ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

Ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον. Διότι ἡ



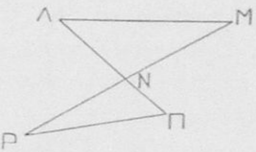
Σχ. 42



Σχ. 43

πλευρὰ ΗΘ, ἐὰν προεκταθῇ, θὰ κόψῃ τὸ σχῆμα.

Τὰ σχήματα, ὅπως τὸ ΑΒΓΔΕ, λέγονται **κυρτά.** Ὥστε τὸ ΖΗΘΙΚ δὲν εἶναι κυρτὸν σχῆμα· λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **κοῖλον.**



Σχ. 44

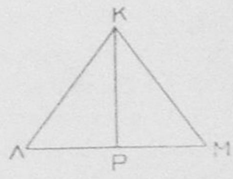
Τὸ τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα.

Ὑπάρχουν εὐθύγραμμα σχήματα, τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν ἓν μόνον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ δύο ἢ περισσότερα· ἑνοῦνται δὲ εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα 44.

Σχήματα ὅπως αὐτὰ λέγονται **σύνθετα,** ἐνῷ τὰ ἄλλα λέγονται **ἁπλᾶ.** Ἡμεῖς, ὅταν λέγωμεν εὐθύγραμμον σχῆμα, θὰ ἐννοοῦμεν ἁπλοῦν καὶ κυρτόν.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

50. Εἰς τὸ σχῆμα 31, ἂν λάβωμεν τὸ τρίγωνον ΓΔΕ καὶ συγκρίνωμεν τὰς πλευράς του διὰ τοῦ διαβήτου, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἶναι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλας. Ἓν τοιοῦτον τρίγωνον λέγεται **σκαληνόν.** Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΖ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο πλευραὶ ΓΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ εἶναι ἄνισος πρὸς αὐτάς. Ἓν τοιοῦτον τρίγωνον λέγεται **ἰσοσκελές·** ἂν δὲ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ τρίγωνον λέγεται **ἰσόπλευρον,** ὅπως εἶναι τὸ τρίγωνον ΚΛΜ (σχ. 45).



Σχ. 45

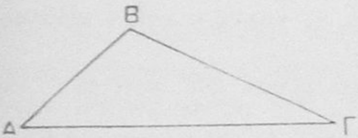
51. Διάκρισις τῶν τριγώνων ἐκ τῶν γωνιῶν των.— Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ τοῦ σχήματος 31 παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ὀρθή, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι. Τὸ τρίγωνον τοῦτο ὀνομάζομεν **ὀρθογώνιον**, τὴν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ ΓΕ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, λέγομεν **ὑποτείνουσαν**. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΘ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΕΘ εἶναι ἀμβλεῖα, ἐνῷ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι. Τὸ τρίγωνον τοῦτο λέγομεν **ἀμβλυγώνιον**. Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΕΖ εἶναι ὀξεῖαι καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον τοῦτο λέγομεν **ὀξυγώνιον**.

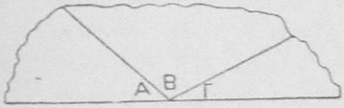
Μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου λαμβάνεται ὡς **βάσις** αὐτοῦ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τὴν κορυφήν, τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως, φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ κάθετος αὔτη λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου. Οὕτως, ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΚΛΜ ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΛΜ, ἡ ΚΡ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

Σχ. 46

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ ἄνισος πλευρά, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ.

52. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων.— 1) Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αἱ δύο ὅμως ἄλλαι πλευραὶ ὁμοῦ κάμνουν μίαν τεθλασμένην, μὲ τὰ ἴδια ἄκρα τῆς εὐθείας. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ***κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.***





Σχ. 47

2) Ἂς κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ χάρτου. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὰς τρεῖς γωνίας αὐτοῦ Α, Β, Γ καὶ κάμωμεν αὐτὰς ἐφεξῆς (ἤτοι προσθέσωμεν αὐτάς),

θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ ἄκραι πλευραὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι (§ 33). Ὥστε: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.***

Ἀσκήσεις.

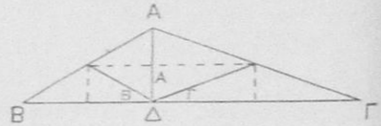
55) Κατασκευάσατε ἐκ χάρτου τρίγωνον σκαληνόν, ἰσοσκελές, ὀρθογώνιον, ἀμβλυγώνιον καὶ ὀξυγώνιον.

56) Ἑνὸς τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 5μ., 7μ. καὶ 8μ. Ποία εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

57) Εἰς τί διαιροῦνται τὰ τρίγωνα, ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς πλευράς των; Καὶ εἰς τί, ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς γωνίας των;

58) Ὑπάρχει τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ εἶναι 15μ., 25μ. καὶ 9μ.;

59) Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι κατασκευασμένον ἐκ χάρτου, ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς μεγαλυτέρας γωνίας Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ. Κατόπιν διπλώνομεν τὸν χάρτην (εἰς τρία μέρη) εἰς τρόπον, ὥστε αἱ κορυφαὶ Α, Β καὶ Γ νὰ συμπέσουν μὲ τὸ σημεῖον Δ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 48.



Σχ. 48

Τί δεικνύει ἡ κατασκευὴ αὐτή; (§ 52,2).

60) Ὑπάρχει τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι νὰ εἶναι 75°, 62°, 51°;

61) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 58° καὶ 62°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία.

62) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 27° καὶ 46°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία.

63) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 4/5 τῆς ὀρθῆς καὶ 3/5 τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

64) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 2/3 τῆς ὀρθῆς καὶ 7/8 τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

65) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη;

66) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι 50°, αἱ δὲ ἄλλαι δύο εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ αὐτάς;

67) Τριγώνου τινὸς ΑΒΓ εἶναι ἡ γωνία Α=90°. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα Β+Γ τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

68) Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

69) Ἓν τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἢ μίαν μόνον ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν γωνίαν. Διατί;

70) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι 54°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία;

71) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γωνία Α=70° καὶ γωνία Β=42°, ἡ δὲ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

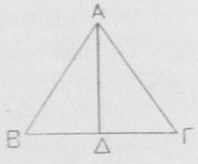
72) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην.

73) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γωνία Α=45° καὶ γωνία Γ=60°. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ μέχρι σημείου τινὸς Δ, νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΑΓΔ.

74) Ἡ γωνία ΑΓΔ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ, λέγεται ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ γίνῃ σύγκρισις τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τῆς γωνίας ΑΓΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β. Μὲ τί ἰσοῦται λοιπὸν ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου;

53. Ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.—Ἐὰν λάβωμεν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ, καὶ μετρήσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι.

Ἐπίσης, ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτῆς ΒΓ καὶ κόψωμεν τὸ ἰσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνον κατὰ μῆκος τῆς ΑΔ καὶ θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καταλλήλως, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ταῦτα θὰ ἐφαρμόσουν. Ὥστε πάλιν θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ



Σχ. 49

εἶναι ἴσαι· ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ ΑΔ διῄρεσε καὶ τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ὅτι ἐσχημάτισε μετὰ τῆς ΒΓ τὰς περὶ τὸ Δ γωνίας ἴσας. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι:

α΄) *Αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἴσαι.*

β΄) *Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφήν, διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη. Εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.*

54. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμεραίνομεν, ὅτι τὸ **ἰσόπλευρον** τρίγωνον εἶναι καὶ **ἰσογώνιον.**

Παρατηρήσεις.—Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας αὐτοῦ ἴσας. Τὸ ἰσοσκελὲς ἔχει τὰς δύο γωνίας αὐτοῦ ἴσας (τὰς παρὰ τὴν βάσιν), ἐνῷ τὸ σκαληνὸν ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἀνίσους, ἡ δὲ μεγαλυτέρα γωνία αὐτοῦ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς καὶ ἡ μικροτέρα ἀπέναντι τῆς μικροτέρας.

Ἀσκήσεις.

75) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι 40°. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ τριγώνου;

76) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως, εἶναι 4/5 τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ τριγώνου;

77) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία γωνία παρὰ τὴν βάσιν εἶναι 52°. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ τριγώνου;

78) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία γωνία παρὰ τὴν βάσιν εἶναι 3/7 τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ;

79) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ἰσοπλεύρου τριγώνου; Ἢ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι;

80) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

81) Εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ποία γωνία ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας;

82) Εἰς ἀμβλυγώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ποία γωνία ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας;

83) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἴσαι πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι 130°. Νὰ εὑρεθῇ κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου.

84) Μὲ πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β κατασκευάσατε δύο ἴσας γωνίας (50°) πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. Ἔπειτα εἰς τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον θὰ σχηματισθῇ, συγκρίνατε τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας. Ὅταν λοιπὸν ἓν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, τί τρίγωνον εἶναι;

85) Κάμετε τὴν ἰδίαν κατασκευὴν μὲ τὴν προηγουμένην· αἱ δύο ὅμως ἴσαι γωνίαι νὰ εἶναι 60°. Τότε πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία; Ἐὰν δὲ συγκρίνητε καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς μεταξύ των, τί θὰ παρατηρήσετε;

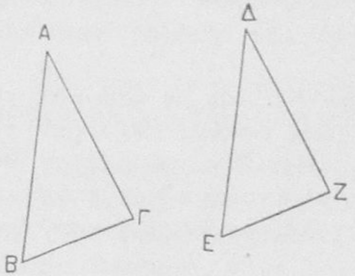
86) Τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

55. Ἰσότης τῶν τριγώνων.—Δύο τρίγωνα θὰ τὰ εἴπωμεν ἴσα, ὅταν τὰ θέσωμεν τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο καὶ ἐφαρμόσουν ἐντελῶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου (δηλαδὴ τὰ 6 στοιχεῖα αὐτοῦ) θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου. Ἤτοι ἡ μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς θὰ εἶναι ἴση πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου, ἡ δευτέρα πλευρὰ τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἴση πρὸς δευτέραν πλευρὰν τοῦ δευτέρου τριγώνου κ.ο.κ. Ἂν λοιπὸν μετρήσωμεν τὰ στοιχεῖα δύο τριγώνων καὶ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα, θὰ συμπεράνωμεν, χωρὶς νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Βεβαιούμεθα ὅμως περὶ τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἰσότητα μερικῶν μόνον στοιχείων αὐτῶν, ἤτοι ὅταν γνωρίζωμεν:

1) Ὅτι ***ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν***. Δηλαδή, ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν πλευρὰς (καὶ τὰ δύο) π.χ. 6 μέτρα, 8 μέτρα καὶ 11 μέτρα, θὰ εἶναι ἴσα.

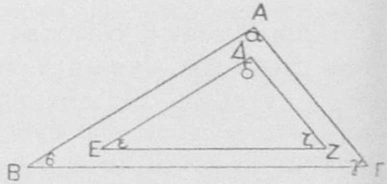
Ὥστε, ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ ΓΑ=ΖΔ, θὰ εἶναι ἴσα (σχ. 50).



Σχ. 50

2) Ὅτι ***ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο αὗται πλευραί, ἴσην.*** Δηλαδὴ ἓν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο πλευρὰς ἴσας μὲ 7 μ. καὶ 8 μ. καὶ τὴν γωνίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσην μὲ 50°, εἶναι ἴσον μὲ ἓν ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ ἔχει δύο πλευρὰς 7 μ. καὶ 8 μ. καὶ τὴν γωνίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσην μὲ 50°. Ὥστε, ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ γωνίαν ΑΒΓ=γωνίαν ΔΕΖ, εἶναι ἴσα.

3) Ὅτι ***ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς, ἴσας μίαν πρὸς μίαν.*** Δηλαδὴ ἓν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει π. χ. μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς 3 μ. καὶ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ ἄκρα της, ἴσας πρὸς 70° καὶ 60°, εἶναι ἴσον μὲ ἓν ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ αὐτὸ μίαν πλευρὰν 3 μ. καὶ τὰς γωνίας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἴσας πρὸς 70° καὶ 60°. Ὥστε, ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν ΑΒ=ΔΕ καὶ γωνίαν ΑΒΓ=γωνίαν ΔΕΖ καὶ γωνίαν ΒΑΓ=γωνίαν ΕΔΖ, εἶναι ἴσα.



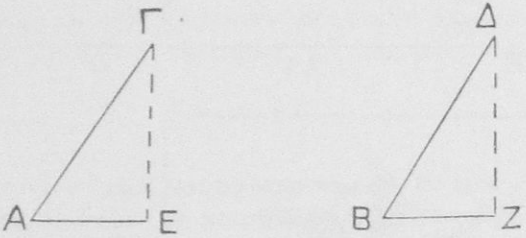
Σχ. 51

Σημείωσις.—Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μόνον τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, δὲν εἶναι ἴσα, ὡς φαίνεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 51), τὰ ὁποῖα ἔχουν α=δ, β=ε καὶ γ=ζ.

Παρατήρησις. Εἰς τὰς προηγουμένας τρεῖς περιπτώσεις τῆς § 55 παρατηροῦμεν, ὅτι α΄) Διὰ νὰ εἴπωμεν, ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι ἴσα τρία στοιχεῖα αὐτῶν. Τὸ ἓν ὅμως τοὐλάχιστον ἀπὸ αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι πλευρά. β΄) Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

56. Διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις ἁπλοποιοῦνται ὡς ἑξῆς: Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν:

1) ***Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην.*** Δηλ. ὅταν εἶναι ΒΔ=ΑΓ καὶ ΒΖ=ΑΕ (σχ. 52).



Σχ. 52

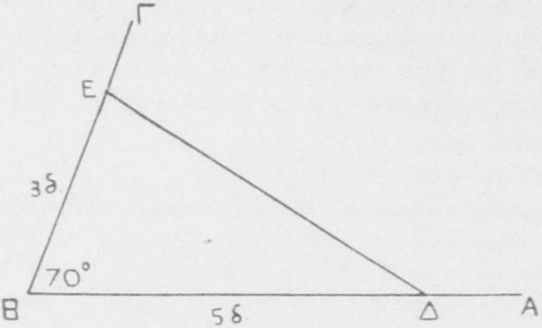
2) ***Τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.*** Δηλ. ὅταν εἶναι ΖΒ=ΕΑ καὶ ΖΔ=ΕΓ.

3) ***Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσην.*** Δηλ. ὅταν εἶναι ΒΔ=ΑΓ καὶ γωνία Δ=γωνία Γ.

57. Κατασκευὴ τριγώνων.— 1) ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς 5 καὶ 3 δακτύλους καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ πλευραὶ αὐταί, ἴσην μὲ 70°.***

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην μὲ 70° (σχ. 53). Ἔπειτα δὲ λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας αὐτῆς, π.χ. ἐπὶ τῆς ΒΑ, τὸ τμῆμα ΒΔ ἴσον μὲ 5 δακτύλους καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΒΓ τὸ τμῆμα ΒΕ ἴσον μὲ 3 δακτύλους.

Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, τὸ τρίγωνον ΒΔΕ (σχ. 53), ποὺ θὰ σχηματισθῇ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

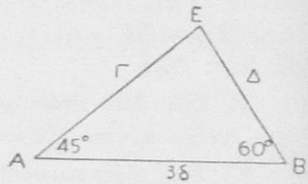


Σχ. 53.

2) ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς 3 δακτύλους καὶ γωνίας εἰς τὰ ἄκρα της ἴσας πρὸς 45° καὶ 60°.***

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν πρῶτον μίαν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην πρὸς 3 δακτύλους.

Ἔπειτα δὲ μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὰς τὰ ἄκρα της Α καὶ Β κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΔΒΑ (καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ) ἴσας πρὸς 45° καὶ 60°. Τέλος προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὸ τρίγωνον ΕΑΒ, τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη (σχ. 54), εἶναι τὸ ζητούμενον.



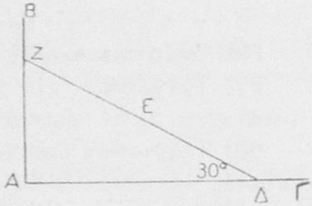
Σχ. 54

Σημείωσις.—Ἐὰν ζητηθῇ νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 3 δακτύλων π.χ., θὰ κάμωμεν τὴν ἄνω κατασκευήν, ἀλλ' αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας θὰ κατασκευάσωμεν, θὰ εἶναι 60°.

3) ***Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην μὲ 3 δακτύλους καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι εἰς τὸ ἓν ἄκρον της, ἴσην μὲ 30°.***

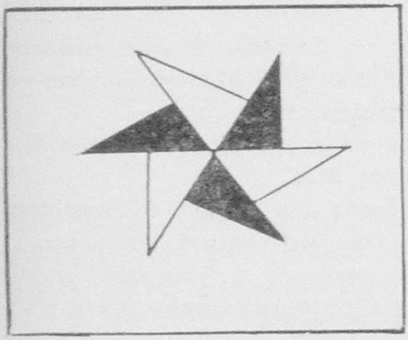
Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν ὀρθὴν γωνίαν

ΒΑΓ. Ἔπειτα δὲ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς της, π.χ. τῆς ΑΓ, λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον μὲ 3 δακτύλους, κατόπιν μὲ πλευρὰν τὴν ΑΔ καὶ κορυφὴν τὸ Δ κατασκευάζομεν (πρὸς τὸ μέρος τῆς ὀρθῆς) τὴν γωνίαν ΑΔΕ ἴσην μὲ 30°, τέλος προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΔΕ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΒ. Ἐὰν δὲ τὴν συναντήσῃ εἰς τὸ σημεῖον Ζ, τὸ τρίγωνον ΖΑΔ (σχ. 55) εἶναι τὸ ζητούμενον (θὰ ἔχῃ δὲ τοῦτο γωνίας 90°, 30°, 60°).

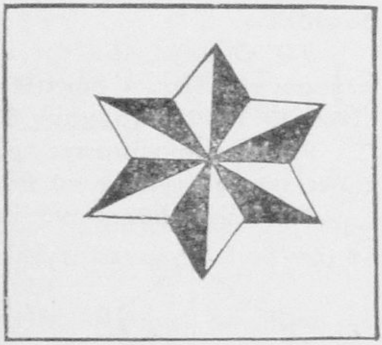


Σχ. 55

Σημείωσις.—Μὲ ὡρισμένα τρίγωνα, ὅταν τὰ τοποθετήσωμεν καταλλήλως, ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν διάφορα σχήματα πρὸς διακόσμησιν. Οὕτω μὲ 6 ἴσα τρίγωνα, ὡς τῆς ἄνω περι-



Σχ. 56



Σχ. 57

πτώσεως 3, γίνεται τὸ σχ. 56. Τὸ δὲ σχ. 57 γίνεται ἀπὸ 12 ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ γωνία τῆς κορυφῆς (ἡ ὁποία ἐδῶ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα γωνία), εἶναι 120°. Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου τοιαῦτα σχήματα.

Ἀσκήσεις.

Νὰ κατασκευασθῇ:

87) Τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι 7 καὶ 3 δάκτυλοι, ἡ δὲ γωνία τῶν πλευρῶν αὐτῶν νὰ εἶναι 42°.

88) Τρίγωνον ἰσοσκελές, εἰς τὸ ὁποῖον μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς νὰ εἶναι 5 δάκτυλοι, ἡ δὲ γωνία των νὰ εἶναι 56°.

89) Τρίγωνον ὀρθογώνιον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ νὰ εἶναι 3 καὶ 4 δάκτυλοι.

90) Τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος πλευρὰ νὰ εἶναι 3 1/2 δάκτυλοι.

91) Τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 6 δάκτυλοι καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰ ἄκρα της νὰ εἶναι 50° καὶ 75°.

92) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν 8 δακτύλων καὶ γωνίας τῆς βάσεως ἴσας μὲ 35°.

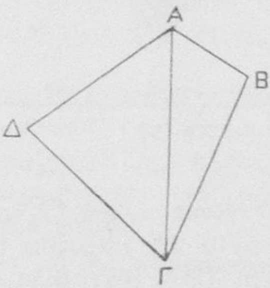
93) Ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 2,5 δακτύλων.

94) Ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ εἶναι 4 δάκτυλοι καὶ μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας νὰ εἶναι 40° (ἐδῶ ὑπάρχουν δύο περιπτώσεις).

95) Κατασκευάσατε τρίγωνα ὡς τὰ ἄνω, εἰς τὰ ὁποῖα τὰς τιμὰς τῶν στοιχείων νὰ δώσετε μόνοι σας.

96) Προσπάθησε νὰ κατασκευάσῃς ἓν σχῆμα διακοσμητικὸν μὲ δύο ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὁμοίως καὶ μὲ 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, ὡς τῆς περιπτώσεως 3 τῆς § 57.



Σχ. 58

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

58. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου. — Ἔχομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 58). Ἐὰν φέρωμεν μίαν διαγώνιον αὐτοῦ, π.χ. τὴν ΑΓ, τότε τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ.

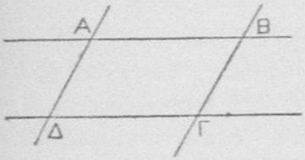
Ἀλλ' αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὁμοῦ μὲ τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ ΑΓΔ κάμνουν τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι τοῦ καθενὸς τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς γωνίας, ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ εἶναι 4 ὀρθαί. Ὥστε: ***Αἱ γωνίαι παντὸς τετραπλεύρου ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθάς.***

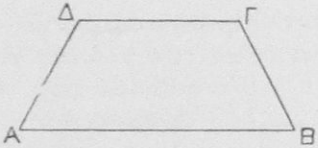
59. Εἴδη τετραπλεύρων.— 1) Ἐὰν φέρωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἔπειτα ἄλλας δύο εὐθείας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνουν τὰς πρώτας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (σχ. 59), τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ ο ν.

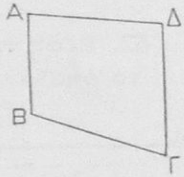
2) Ἐὰν δύο παραλλήλους εὐθείας κόψωμεν μὲ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι, σχηματίζεται τετράπλευρον,



Σχ. 59



Σχ. 60



Σχ. 61

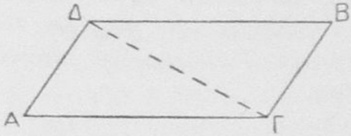
τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, λέγεται τ ρ α π έ ζ ι ο ν (σχ. 60).

3) Τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν εἶναι παράλληλοι, λέγεται σ κ α λ η ν ό ν (σχ. 61).

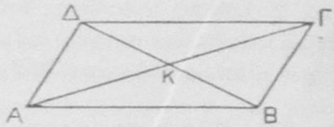
60. Ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου.— Ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (ἐκ χάρτου). Ἐὰν φέρωμεν μίαν διαγώνιον αὐτοῦ, π.χ. τὴν ΔΓ (σχ. 62), καὶ ἀποκόψωμεν τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΑΓΔ, παρατηροῦμεν διὰ τῆς ἐπιθέσεως αὐτῶν, ὅτι εἶναι ἴσα. Ἐπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ὡς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

Ὥστε: ***Κάθε παραλληλόγραμμον ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι πλευ-***

*ρὰς καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ ἴσας. **Κάθε δὲ διαγώνιος αὐτοῦ τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.***



Σχ. 62

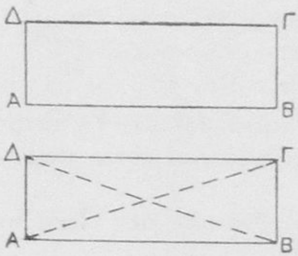


Σχ. 63

61. Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 63) φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Κ. Ἐὰν τώρα διὰ τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰ δύο τμήματα, ΑΚ καὶ ΚΓ τῆς μιᾶς διαγωνίου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσα· τὸ αὐτὸ βλέπομεν καὶ διὰ τὰ τμήματα ΒΚ καὶ ΚΔ τῆς ἄλλης διαγωνίου.

Ὥστε: ***Κάθε διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνει τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη.***

62. Εἴδη παραλληλογράμμων.—1) Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς, λέγεται ὀρθογώνιον (σχ. 64). Ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου, ἀπὸ ὅσα γνωρίζομεν, εἶναι εὔκολος. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον καὶ φέρωμεν τὰς διαγωνίους του, τὰς συγκρίνωμεν δὲ μὲ τὸν διαβήτην, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὥστε: ***Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.***

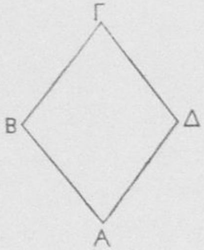


Σχ. 64

2) Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας, λέγεται ρόμβος (σχ. 65). Ἐὰν φέρωμεν μίαν διαγώνιον αὐτοῦ, τὴν ΑΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ δεικνύει, πῶς ἀπὸ δύο ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ρόμβον. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ρόμβον καὶ φέρομεν ἔπειτα τὰς δύο διαγωνίους του. Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται περὶ τὸ σημεῖον τῆς το-

μῆς των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται εἶναι ὀρθαί. Ὥστε: ***Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως.***

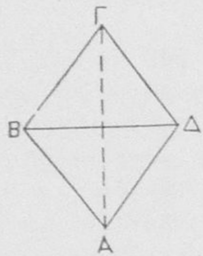
3) Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχῃ καὶ τὰς γωνίας του ὅλας ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ὅλας ἴσας, λέγεται τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν (σχ. 66). Εἶναι δηλαδὴ τὸ τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος ὁμοῦ.



Τί εἶναι λοιπὸν μεταξύ των αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου καὶ πῶς τέμνονται;

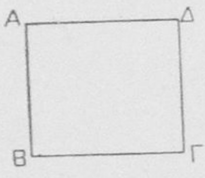
63. Ἐὰν ἓν τετράπλευρον ἔχῃ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἢ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπίσης εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὅταν κάθε διαγώνιος αὐτοῦ τέμνῃ τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἐπίσης καὶ ὅταν ἔχῃ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους.



Σχ. 65

64. Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐὰν δὲ ἔχῃ τὰς διαγωνίους του ἴσας, τέμνωνται δὲ καὶ καθέτως, τότε τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

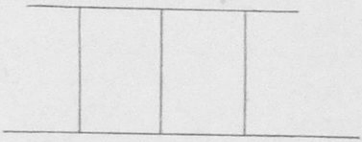


Σχ. 66

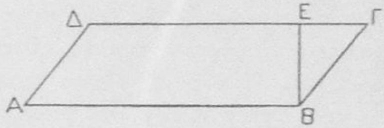
65. Ἓν τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς μὴ παραλλήλους αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας, λέγεται ἰ σ ο σ κ ε λ έ ς. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης βάσεώς του, εἶναι ἴσαι. Ἐὰν δὲ αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης βάσεως τραπεζίου, εἶναι ἴσαι, τὸ τραπέζιον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

66. Ἐὰν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν φέρωμεν καθέτους, αὗται εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (σχ. 67)· τὰ τμήματα τῶν καθέτων, τὰ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων, εἶναι ἴσα, διότι εἶναι παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων. Μία ἀπὸ τὰς καθέτους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται μεταξὺ δύο παραλλήλων, λέγεται ἀ π ό σ τ α σ ι ς τῶν παραλλήλων τούτων.

67. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου λέγεται ὕ ψ ο ς αὐτοῦ. Κάθε δὲ ἀπὸ τὰς παραλλήλους αὐτὰς πλευρὰς λέγεται β ά σ ι ς αὐτοῦ· π.χ. εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΑΒ, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ΒΕ (σχ. 68). Τοῦ τραπεζίου βάσεις λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραί του (ἄνω καὶ κάτω βάσις)· ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.



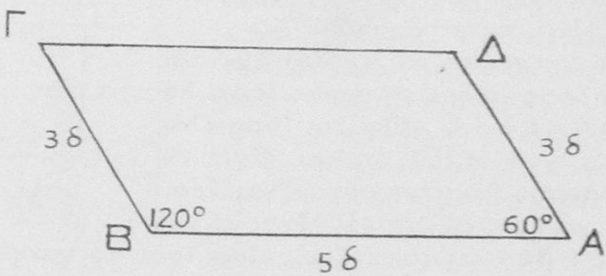
Σχ. 67



Σχ. 68

68. Κατασκευαί. — 1) ***Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς 60° καὶ δύο προσκειμένας πλευρὰς ἴσας πρὸς 3 καὶ 5 δακτύλους.***

Ἀφοῦ ἡ μία γωνία εἶναι 60°, ἡ ἀπέναντί της θὰ εἶναι ἐπίσης 60°. Ὥστε κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο γωνίας θὰ εἶναι 120°. Κατόπιν τούτων λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ 5



Σχ. 69

δακτύλους (σχ. 69). Ἔπειτα μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ μὲ κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Β (καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ) σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην μὲ 60° καὶ τὴν ΓΒΑ ἴσην μὲ 120°. Ἔπειτα ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσα τὸ καθὲν μὲ 3 δακτύλους. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

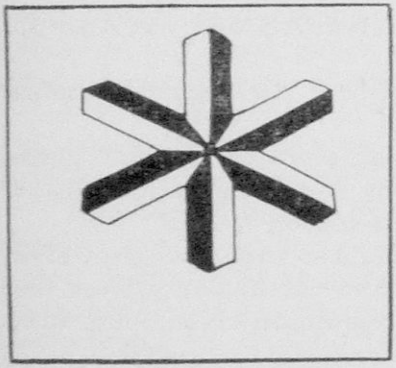
Σημείωσις.—Ἐὰν μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλο παραλληλόγραμμον (ἐκ χάρτου) καὶ τὸ θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα.

2) ***Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία βάσις νὰ εἶναι 5 δάκτυλοι· κάθε δὲ γωνία εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ εἶναι 45° καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς νὰ εἶναι 3 δάκτυλοι.***

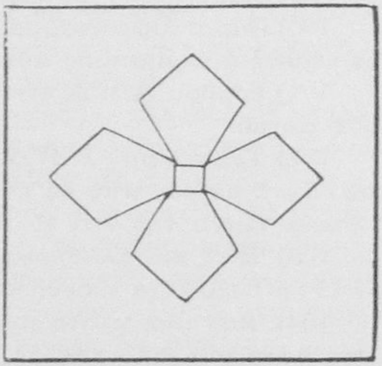
Ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου τραπεζίου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἄνω, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ (ἴσης μὲ 5 δακτύλους) θὰ κατασκευάσωμεν ἴσας γωνίας καὶ ἑκάστην 45°.

Σημείωσις α΄.—Ἐὰν κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλο τραπέζιον μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον.

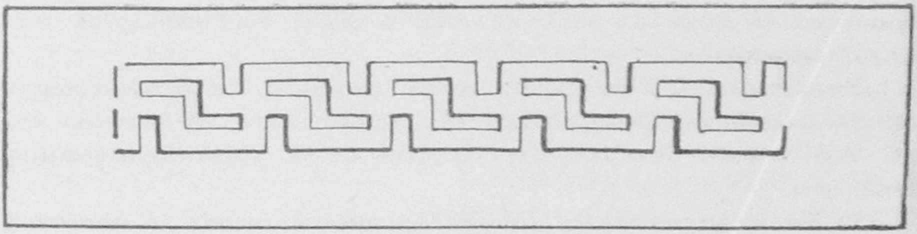
Σημείωσις β΄. — Πλεῖστα ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα κατασκευάζει ὁ ἄνθρωπος, ἔχουν σχῆμα διαφόρων εἰδῶν τῶν τετραπλεύρων, ἰδίως δὲ σχῆμα ὀρθογωνίων, τετραγώνων, ῥόμβων ἢ καὶ διαφόρων συνδυασμῶν αὐτῶν, ὡς εἶναι τὰ σχήματα 70 - 72.



Σχ. 71



Σχ. 72



Σχ. 70

'Ασκήσεις.

97) Εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι

α΄) γωνίαι Α=70°, Β=60°, Γ=100°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ Δ.

β΄) Α=Β=Γ=90°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ Δ.

γ΄) Α=Β=100°, Γ=40°. Νὰ εὑρεθῇ ἡ Δ.

δ΄) Α+Β=180°, Α=Γ, Β=50°. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ Α, Γ, Δ.

98) Εἰς ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, εἰς αὐτὸ δὲ εἶναι

α΄) Α=60°, Β=45°. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ Γ καὶ Δ.

β΄) Γ=110°, Δ=100°. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ Α καὶ Β.

99) Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων;

100) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=5μ. καὶ ΑΔ=3μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

101) Ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=3,2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

102) Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ βάσεις εἶναι αἱ ΑΒ=8 μέτρα καὶ ΓΔ=5 μέτρα· ἀπὸ δὲ τὴν κορυφὴν Δ φέρομεν παράλληλον, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ΑΕ.

103) Ἑνὸς παραλληλογράμμου μία ἀπὸ τὰς γωνίας του εἶναι α΄) 45°, β΄) 120°. Νὰ εὑρεθῇ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας του.

104) Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, τί θὰ εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας;

105) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ Ο· ἐὰν δὲ εἶναι ΟΑ=6 μ. καὶ ΟΒ=5 μ., νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

106) Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διαιροῦν αὐτὸ εἰς 4 τρίγωνα. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ταῦτα, ἀνὰ δύο ἀπέναντι, εἶναι ἴσα.

107) Νὰ φέρῃς δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ νὰ μετρήσῃς ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

108) Νὰ φέρῃς δύο παραλλήλους εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν ἀπόστασιν 4 δακτύλων.

109) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ νὰ εἶναι 4 καὶ 7 δάκτυλοι.

110) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 5 δακτύλων.

111) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ ὁποῖον δύο προσκείμεναι πλευραὶ νὰ εἶναι 5 καὶ 8 δακτύλων καὶ μία γωνία νὰ εἶναι ἴση μὲ 45°.

112) Νὰ κατασκευάσητε ἐκ χαρτονίου 4 ἴσους ρόμβους μὲ ὀξεῖαν γωνίαν 45° εἰς τὸν κάθε ρόμβον. Νὰ τοὺς τοποθετήσετε δὲ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ περικλείουν ἓν τετράγωνον.

113) Νὰ κατασκευάσητε ἐκ χαρτονίου 3 ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τραπέζια· εἰς καθὲν δὲ ἀπὸ αὐτὰ ἑκάστη γωνία εἰς τὰ ἄκρα τῆς μεγαλυτέρας βάσεως νὰ εἶναι 30°. Νὰ τὰ τοποθετήσετε δὲ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ περικλείουν ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

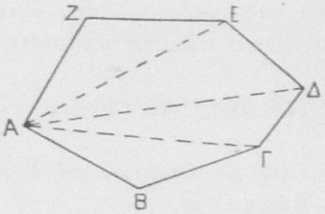
114) Κατασκευάσατε σχήματα ἀπὸ συνδυασμοὺς διαφόρων εἰδῶν παραλληλογράμμων, ἰσοσκελῶν τραπεζίων, ἰσοσκελῶν τριγώνων κ.ἄ. Πρὸς τοῦτο παρατηρήσατε τὰ σχήματα τῶν διαφόρων ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα σᾶς περιβάλλουν.

115) Εἷς ἀγρὸς μὲ σχῆμα ὀρθογώνιον πλάτους 45 μέτρων καὶ μήκους 125 μέτρων περιεφράχθη μὲ συρματόπλεγμα. Πόσον ἐστοίχισε τοῦτο, ὅταν τὸ 1 μέτρον ἀξίζει 63 δραχμάς;

116) Εἷς κῆπος μὲ σχῆμα ὀρθογώνιον μήκους 48 μέτρων καὶ πλάτους 36 μέτρων ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα ἴσα μέρη μὲ σχῆμα ὀρθογώνιον τὸ καθέν. Θέλομεν δὲ νὰ περιφράξωμεν μὲ συρματόπλεγμα καὶ τὰ τέσσαρα αὐτὰ μέρη. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θὰ ἀγοράσωμεν; Καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ, ἐὰν τὸ 1 μέτρον ἀξίζει 62,50 δραχμάς;

69. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.—Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 73). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ

Α φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους του, τὰς ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα. Ἀλλ' αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι κάμνουν τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ὅμως εἶναι δύο ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Δηλαδὴ εἶναι 6—2=4 τρίγωνα.



Σχ. 73

Ἐπειδὴ δὲ εἰς κάθε τρίγωνον αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς, ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τεσσάρων τριγώνων εἶναι 2×4=8 ὀρθαί, ἢ 2×(6—2)=12—4=8 ὀρθαί. Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν ὀκτάγωνον καὶ τὸ διαιρέσωμεν εἰς τρίγωνα μὲ τὸν ἄνω τρόπον, θὰ λάβωμεν 8—2=6 τρίγωνα. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου εἶναι 2×6=12 ὀρθαὶ ἢ 2×(8—2)=16—4=12 ὀρθαί. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του 2 καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2. Τὸ ἐξαγόμενον δέ, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, παριστᾷ ὀρθὰς γωνίας (αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα).

Τὸ ἴδιον ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν, ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον ἀφαιρέσωμεν 4.

Ἀσκήσεις.

117) Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δεκαγώνου;

118) Πόσαι ὀρθαὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαγώνου; τοῦ δεκαεξαγώνου;

119) Ἑνὸς ἑξαγώνου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτοῦ;

120) Ἑνὸς εἰκοσαγώνου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Πόσαι μοῖραι εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτοῦ;

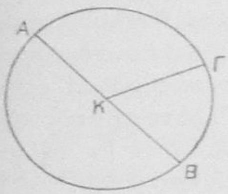
121) Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν πολύγωνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 14 ὀρθαί;

122) Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν πολύγωνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 12 ὀρθαί.

ΚΥΚΛΟΣ

70. Ἂν λάβωμεν τὸν κῶνον καὶ ἐξετάσωμεν τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία λέγεται βάσις τοῦ κώνου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὕτη τελειώνει εἰς μίαν μόνον καμπύλην γραμμήν. Τὸ σχῆμα τῆς βάσεως τοῦ κώνου λέγεται κύκλος· ἐπίσης κύκλος εἶναι καὶ τὰ σχήματα τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν τοῦ κυλίνδρου. Ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει ὁ κύκλος, λέγεται περιφέρεια αὐτοῦ. Μέσα δὲ εἰς τὴν περιφέρειαν ὑπάρχει ἓν σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς αὐτῆς ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας του.

Σχ. 74



Σχ. 75

Ὥστε: ***Κύκλος λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς μίαν καμπύλην γραμμήν· τῆς γραμμῆς δὲ αὐτῆς ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ.***

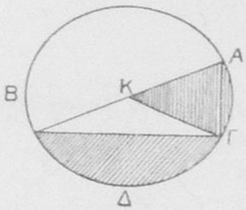
Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου.

71. Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον αὐτοῦ μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας· π.χ. ἡ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κλπ. (σχ. 75). Ὥστε, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

72. Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειώνει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν· π.χ. ἡ ΑΚΒ.

Ὥστε κάθε διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας. Ἄρα αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

73. Ἰδιότης τῆς διαμέτρου. Κατασκευάζομεν ἀπὸ χάρτην ἕνα κύκλον καὶ φέρομεν εἰς αὐτὸν μίαν διάμετρον· ἂν τώρα κόψωμεν τὸν κύκλον κατὰ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς καὶ θέσωμεν κατόπιν τὸ ἓν μέρος ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἐφαρμόζουν ἐντελῶς. Ὥστε: ***Κάθε διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη*** (ἡμικύκλια, ἡμιπεριφέρειαι).



Σχ. 76

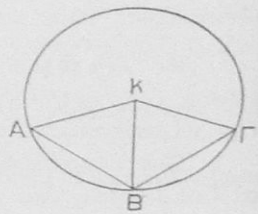
74. Τόξον, χορδή.—Ἓν μέρος τῆς περιφερείας κύκλου, π.χ. τὸ ΒΔΓ (σχ. 76), λέγεται **τόξον**, ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τόξου, λέγεται **χορδὴ** αὐτοῦ· π.χ. ἡ ΒΓ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου ΒΔΓ (ἀλλὰ καὶ τοῦ τόξου ΒΑΓ) (σχ. 76).

75. Τμῆμα, τομεύς.—Τὸ ἄνω τόξον ΒΔΓ καὶ ἡ χορδὴ ΒΓ βλέπομεν, ὅτι περικλείουν μέρος τι τοῦ κύκλου. Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται **τμῆμα** κύκλου. Ὥστε, τμῆμα κύκλου λέγεται τὸ μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείουν τόξον τι καὶ ἡ χορδή του.

Μέρος κύκλου ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν, ἂν ἀπὸ τὰ ἄκρα τόξου φέρωμεν τὰς δύο ἀκτῖνας του· π.χ. τὸ μέρος ΚΒΔΓ (σχ. 76). Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται **τομεὺς** κύκλου. Ὥστε τομεὺς κύκλου λέγεται μέρος τι αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείουν ἓν τόξον καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι φέρονται εἰς τὰ ἄκρα του.

Κάθε τομεὺς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τμῆμα· π.χ. ὁ τομεὺς ΚΒΔΓ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΚΒΓ καὶ τὸ τμῆμα ΒΔΓΒ.

76. Ἐπίκεντρος γωνία.—Ἐὰν μία γωνία ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, λέγεται **ἐπίκεντρος**, ὅπως π.χ. ἡ γωνία ΑΚΓ (σχ. 77), τὸ δὲ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λέγεται τόξον **ἀντίστοιχον** τῆς γωνίας (τὸ ΑΓ).



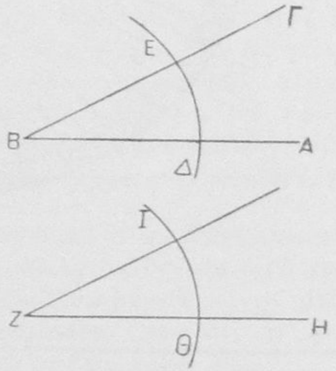
Σχ. 77

77. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ (σχ. 77) δύο ἴσα τόξα (διὰ τοῦ διαβήτου) ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ. Τότε σχηματίζονται δύο τομεῖς, οἱ ΚΑΒ καὶ ΚΒΓ. Ἂν δὲ τὸ σχῆμα εἶναι ἀπὸ χάρτην, σχίζομεν αὐτὸ κατὰ μῆκος τῆς ΚΑ καὶ κατόπιν περιστρέφομεν τὸν τομέα ΚΑΒ περὶ τὴν ΚΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΚΒΓ. Τότε θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, ἄρα καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΚΓ καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ θὰ ἐφαρμόσουν· εἶναι λοιπὸν ἴσαι. Ὥστε: ***Εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου*** (ἢ ἴσων κύκλων, δηλαδὴ κύκλων ποὺ ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας) ***βαίνουν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.***

Σημείωσις. Ἐπειδή, ὅταν τὸ Α πέσῃ εἰς τὸ Γ, ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, συνάγομεν, ὅτι ***ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου*** (ἢ ἴσων κύκλων) ***ἔχουν ἴσας χορδάς.***

78. Τώρα ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ (σχ. 77) εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως καὶ προηγουμένως, συνάγομεν, ὅτι α΄) ***ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ κύκλου*** (ἢ ἴσων κύκλων) ***βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων*** καὶ β΄) ***εἰς ἴσας χορδὰς τοῦ αὐτοῦ κύκλου*** (ἢ ἴσων κύκλων) ***ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα*** (ὅταν ὅλα εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας ἢ ὅλα μεγαλύτερα αὐτῆς).

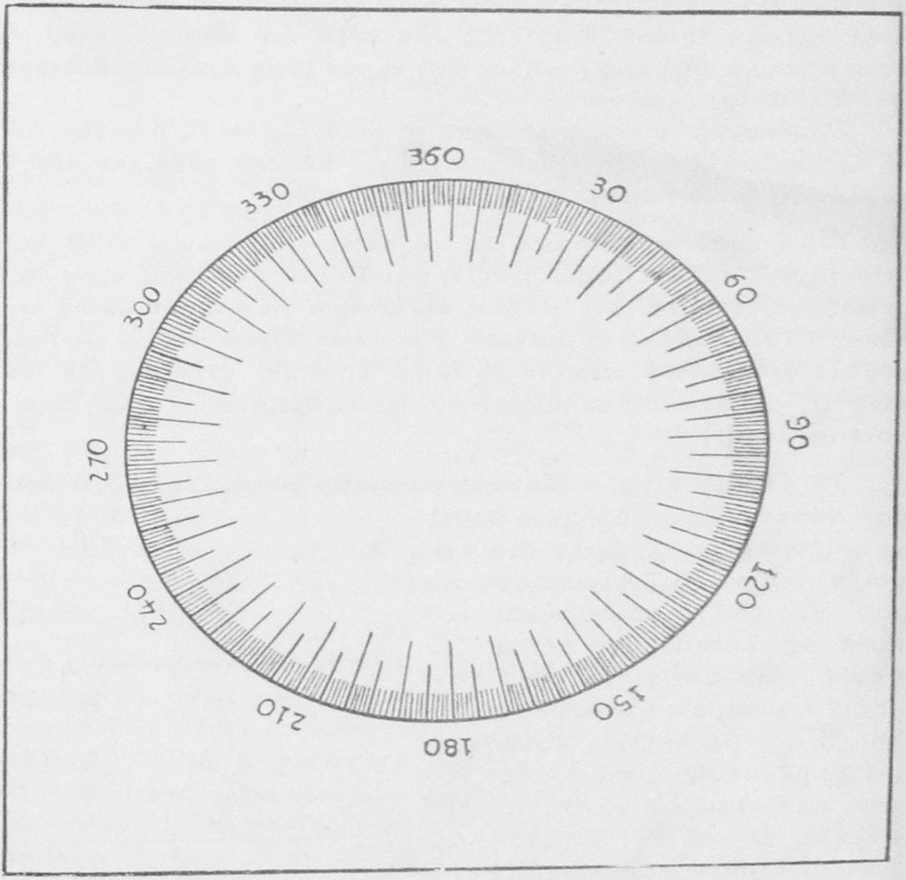
79. Πρόβλημα.— ***Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.*** Τὸ πρόβλημα τοῦτο γνωρίζομεν νὰ λύωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Ἄνευ ὅμως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος λύεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ΑΒΓ (σχ. 78). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς Β καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἔπειτα λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν ΖΗ. Μὲ κέντρον δὲ ἓν σημεῖον αὐτῆς, π.χ. τὸ Ζ, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΖΗ εἰς



Σχ. 78

ἓν σημεῖον Θ. Τέλος λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἓν τόξον ΘΙ ἴσον μὲ τὸ ΔΕ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΙ· ἡ γωνία ΙΖΘ εἶναι ἡ ζητουμένη.

80. Διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς μοίρας.— Τὸ μοιρογνωμόνιον (σχ. 25) ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου, αἱ δὲ περὶ τὸ Κ

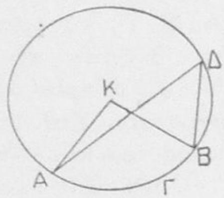


Σχ. 79

180 γωνίαι εἶναι ἐπίκεντροι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἔπεται, ὅτι τὰ τόξα, ἐπὶ τῶν ὁποίων αὗται βαίνουν, εἶναι ἴσα (§ 78). Ἡ

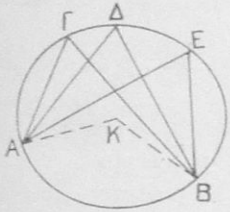
ἡμιπεριφέρεια λοιπὸν εἶναι διῃρημένη εἰς 180 ἴσα τόξα, καθὲν τῶν ὁποίων λέγεται τόξον μιᾶς μοίρας. Ὁλόκληρος λοιπὸν ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 360° (σχ. 79). Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τόξον μιᾶς μοίρας ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν 1° καὶ τἀνάπαλιν. Ἑπομένως, ἂν ἐπίκεντρος γωνία ἀντιστοιχῇ εἰς τόξον π.χ. 45°, θὰ εἶναι 45°.

81. **Ἐγγεγραμμένη γωνία.**—Ἐὰν ἀπὸ ἓν σημεῖον περιφερείας Κ, π.χ. τὸ Δ (σχ. 80), φέρωμεν δύο χορδάς, τὰς ΔΑ καὶ ΔΒ, ἡ γωνία ΑΔΒ, ἡ ὁποία σχηματίζεται, λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κύκλον Κ. Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΒΑ καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓΒ. Ὥστε: ***Ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας του, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.***



Σχ. 80

82. Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΔΒ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος ΑΚΒ (σχ. 81), ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξου. Ἐὰν τώρα κατασκευάσωμεν ἀπὸ χάρτην δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας κάθε μίαν πρὸς τὴν ΑΔΒ, τὴν δὲ γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν, θέσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΚΒ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν. Ὥστε: ***Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου.***



Σχ. 81

83. Ἂς λάβωμεν τὰς ἐγγεγραμμένας γωνίας ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ (σχ. 81)· ἀλλὰ κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΚΒ. Ἑπομένως εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ὥστε: ***Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς τὸ ἴδιον τόξον*** (ἢ εἰς ἴσα τόξα), ***εἶναι ἴσαι.***

Ἀσκήσεις

123) Νὰ γράψῃς δύο ἴσας περιφερείας.

124) Νὰ γράψῃς περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 3 δακτύλων καὶ νὰ λάβῃς ἔπειτα ἐπ' αὐτῆς ἓν τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν 5 δακτύλων.

125) Νὰ γράψῃς περιφέρειαν μὲ διάμετρον 8 δακτύλων. Ἔπειτα δὲ νὰ λάβῃς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ, τὸ πρῶτον 3 δακτ., τὸ δεύτερον 4 δακτ. καὶ τὸ τρίτον 5 δακτύλους. Ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι κανὲν ἐπὶ τῆς περιφερείας; Καὶ διατί; Τὰ ἄλλα σημεῖα ποίαν θέσιν ἔχουν ὡς πρὸς τὸν κύκλον; Τί λοιπὸν συμπεραίνομεν ἀπὸ τὴν θέσιν των;

126) Εἰς κύκλον Κ νὰ φέρῃς δύο διαμέτρους ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ καθέτους μεταξύ των· ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνῃς τὰ 4 τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει διαιρεθῆ ἡ περιφέρεια. Ἐπίσης νὰ συγκρίνῃς καὶ τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτῶν.

127) Καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω τόξα πόσων μοιρῶν εἶναι;

128) Ὅταν τὸ τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει μία ἐπίκεντρος γωνία ἢ μία ἐγγεγραμμένη γωνία, διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ κ.ο.κ., πόσον μεταβάλλεται ἡ γωνία;

129) Ἐὰν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι 30°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος;

130) Ἐὰν μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι 40°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα ἐγγεγραμμένη γωνία;

131) Μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι 60°· πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει;

132) Τὸ τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει μία ἐγγεγραμμένη γωνία, εἶναι 45°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία αὐτή;

133) Ὅταν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ εἰς ἡμιπεριφέρειαν, εἶναι ὀρθή. Κατασκευάσατε τοιαύτας γωνίας.

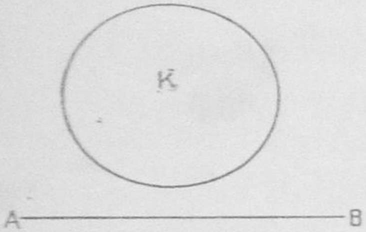
134) Ὅταν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ εἰς τόξον μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας, εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὅταν βαίνῃ εἰς τόξον μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας, εἶναι ἀμβλεῖα. Κατασκευάσατε τοιαύτας γωνίας.

135) Ἡ γωνία ΑΒΓ τῆς ἀσκήσεως 126 πόσων μοιρῶν εἶναι; Τί σχῆμα εἶναι τὸ ΑΓΒΔ;

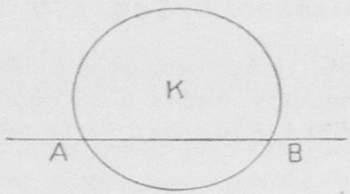
ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ

84. Ἀπὸ τὰ σχήματα 82, 83, 84 συμπεραίνομεν ὅτι:

1) Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχῃ κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν. Τότε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς περιφερείας (σχ. 82).



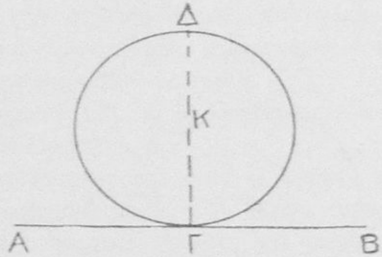
Σχ. 82



Σχ. 83

2) Μία εὐθεῖα δύναται νὰ ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν δύο κοινὰ σημεῖα· τότε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν (σχ. 83).

3) Μία εὐθεῖα δύναται, ἐξ ἄλλου, νὰ ἔχῃ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν, ὁπότε ἡ εὐθεῖα λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς περιφερείας· τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς· οὕτως ἡ ΑΒ (σχ. 84) εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον (ἐπαφῆς) Γ.



Σχ. 84

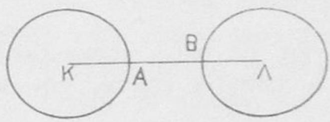
85. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ (σχ. 84) καὶ τὴν προεκτείνωμεν μέχρι τοῦ σημείου Δ, στρέψωμεν δὲ ἔπειτα τὸ σχῆμα ΔΓΑ περὶ τὴν ΓΔ, αἱ δύο ἡμιπεριφέρειαι θὰ ἐφαρμόσουν. Ἐπίσης θὰ ἐφαρμόσουν καὶ αἱ γωνίαι ΔΓΑ καὶ ΔΓΒ. Εἶναι ἑπομένως αὗται ὀρθαί, ἤτοι ἡ ΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὅθεν ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

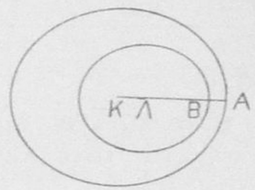
Ἀντιστρόφως δέ, κάθε εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ μία μόνον κάθετος ἄγεται ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἕπεται, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία μόνον ἐφαπτομένη. Ὥστε διὰ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην περιφερείας εἰς σημεῖόν τι αὐτῆς, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

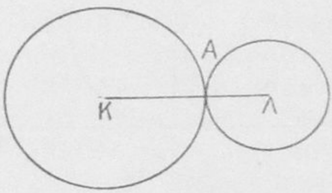
86. 1) Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ μὴ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε ἢ θὰ εὑρίσκεται ἡ μία ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης (σχ. 85) ἢ ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης (σχ. 86).



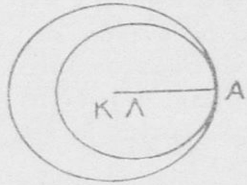
Σχ. 85



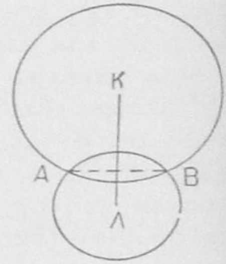
Σχ. 86



Σχ. 87



Σχ. 88



Σχ. 89

2) Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ νὰ εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε λέγομεν, ὅτι ἐφάπτονται ἐκτὸς (σχ. 87) ἢ ἐντὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 88)· καὶ

3) Ὅταν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ὁπότε τέμνονται (σχ. 8). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν, λέγεται **διάκεντρος**· ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, λέγεται **κοινὴ χορδὴ** αὐτῶν, ὅπως π.χ. ἡ ΑΒ (σχ. 89).

Ἀσκήσεις.

136) Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία κεῖται ὅλη ἐκτὸς αὐτῆς, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

137) Ὁμοίως νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν, πρὸς τὴν ἀκτῖνα της.

138) Ὁμοίως νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς ἐφαπτομένης εἰς αὐτήν, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

139) Δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ συγκριθῇ ἡ διάκεντρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν τούτων.

140) Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία περιφέρεια κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης, ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν τούτων.

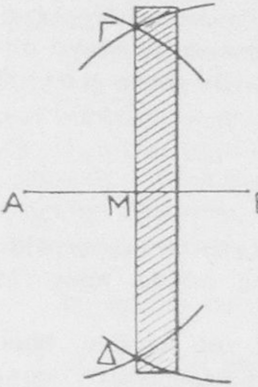
141) Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.

142) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐκτὸς ἢ ἐντός, νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐπαφῆς ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.

143) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐκτός, νὰ συγκριθῇ ἡ διάκεντρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.

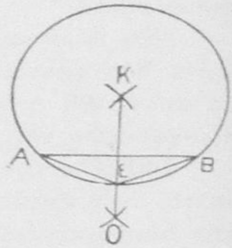
144) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐντός, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διάκεντρος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

87. Πρόβλημα.— ***Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Ζητεῖται δὲ νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.*** Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς τὰ Γ καὶ Δ (σχ. 90). Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ χρησιμοποιήσωμεν ἔπειτα τὸν γνώμονα καὶ τὸν διαβήτην, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ περὶ τὸ Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ὅτι ΑΜ=ΜΒ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΓΔ ἡ ζητουμένη κάθετος.



Σχ. 90

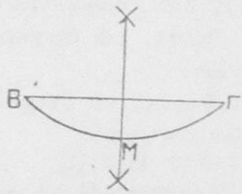
88. Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ μία χορδὴ αὐτῆς ἡ ΑΒ. Ἐὰν τώρα μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΚ γράψωμεν δύο περιφερείας, αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὸ κέντρον Κ καὶ εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον Ο (σχ. 91). Ἡ δὲ ΚΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἡ ΚΟ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε, αἱ χορδαὶ ΑΕ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσαι. Βλέπομεν δὲ τοῦτο μὲ τὸν διαβήτην· ἄλλως τε τὸ Ε εἶναι ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (§ 42, 2). Ὥστε καὶ τὰ τόξα ΑΕ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσα· ἄρα ***ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς κύκλου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ διαιρεῖ τὸ τόξον τῆς χορδῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.***



Σχ. 91

89. Πρόβλημα.— ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη*** (διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος).

α΄) Ἔστω τὸ τόξον ΒΓ (σχ. 92)· ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΓΒ καὶ κατασκευάσωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, αὕτη θὰ διαιρῇ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα (§ 88).

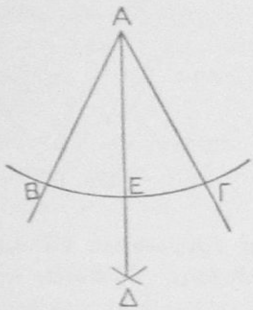


Σχ. 92

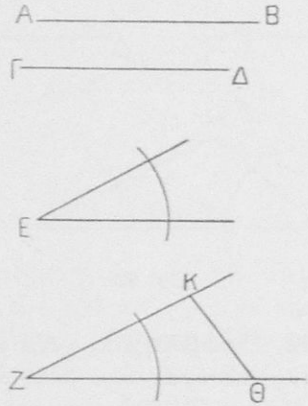
β΄) Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ (σχ. 93)· μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν τόξον ΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΑΕΔ, ἡ ὁποία διαιρεῖ καὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, τὰς ΒΑΕ καὶ ΕΑΓ.

Σημείωσις.—Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ μίαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, λέγεται διχοτόμος αὐτῆς.

90. Πρόβλημα.—***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ***



Σχ. 93



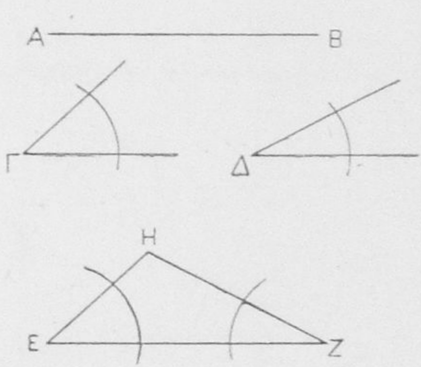
Σχ. 94

ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Ε.

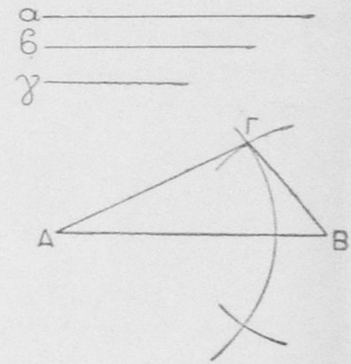
Θὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ὅπως καὶ τὸ τρίγωνον τῆς § 57, 1. Μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὴν γωνίαν τὴν ἴσην μὲ τὴν Ε θὰ τὴν κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου (§ 71). Κατασκευάζομεν δὲ οὕτω τὸ τρίγωνον ΖΘΚ (σχ. 94).

91. Πρόβλημα.—***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ γωνίας εἰς τὰ ἄκρα της ἴσας πρὸς δύο δοθείσας γωνίας Γ καὶ Δ*** ($\Gamma + \Delta < 2$ ὀρθῶν).

Τὸ ζητούμενον τρίγωνον θὰ κατασκευασθῇ ὡς τὸ τρίγωνον τῆς § 57, 2. Μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι πρὸς τὰς Γ καὶ Δ θὰ κατασκευασθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Κατασκευάζομεν δὲ οὕτω τὸ τρίγωνον ΕΖΗ (σχ. 95).



Σχ. 95



Σχ. 96

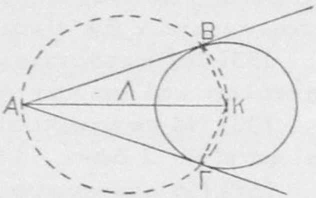
92. Πρόβλημα.—***Νὰ κατασκεασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰς πλευράς του ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας α, β, γ*** (ἡ μεγαλυτέρα α εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα β+γ, § 52, 1). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν α (σχ. 96) καὶ μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας τὰς β καὶ γ γράφομεν δύο περιφερείας. Αἱ περιφέρειαι αὐταὶ τέμνονται εἰς δύο σημεῖα. Ἂν δὲ εἰς ἓν ἀπὸ αὐτά, π.χ. τὸ Γ, φέρωμεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Σχ. 97

93. Πρόβλημα.— ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.***

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ἔπειτα τὴν ΔΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Τότε παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς Κ τὸ (σχ. 97), εἶναι δὲ ΚΑ=ΚΒ==ΚΓ (42,2). Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

94. Πρόβλημα.—***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας Κ, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς αὐτήν.*** Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ΑΚ (σχ. 98) καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέσον αὐτῆς Λ. Ἔπειτα δὲ μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αὗται εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ. Διότι, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν γνώμονα, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΚ καὶ ΑΓΚ εἶναι ὀρθαί· ἤτοι αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΒ καὶ ΚΓ· ἄλλως τε καὶ χωρὶς τὸν γνώμονα εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὀρθαί, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν εἰς ἡμιπεριφέρειαν.



Σχ. 98

Σημείωσις.—Ἐὰν συγκρίνωμεν μὲ τὸν διαβήτην τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε : ***Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς περιφέρειαν ἀπὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς εἶναι ἴσαι.***

Ἀσκήσεις.

145) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν καὶ διαιρέσατε αὐτὴν εἰς 4 ἴσα μέρη.

146) Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ὡς διαμέτρου νὰ γραφῇ περιφέρεια.

147) Κατασκευάσατε τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον δοθείσης χορδῆς.

148) Νὰ διαιρεθῇ γωνία ἢ δοθὲν τόξον εἰς 4 ἴσα μέρη.

149) Νὰ διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν δοθέντος τριγώνου.

150) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς 1 1/2 ὀρθῆς.

151) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 30° καὶ 150°.

152) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ εἶναι 4 δάκτυλοι καὶ 6 δάκτυλοι.

153) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι 5 δάκτ., 4 δάκτ. καὶ ἡ γωνία αὐτῶν 1/2 τῆς ὀρθῆς.

154) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 0,03 καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς 30° καὶ 60°. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ τρίτη γωνία ;

155) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, μὲ βάσιν 5 δακτύλων καὶ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως 90°.

156) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ εἶναι 2 δάκτ., 3 δάκτ., 4 δάκτυλοι.

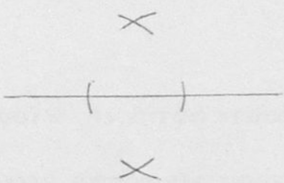
157) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ εἶναι 3 δάκτ., 4 δάκτ., 5 δάκτ. Μετρήσατε τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν.

158) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 3,5 δακτύλων.

159) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 0,08 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ.

160) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου νὰ εἶναι ΑΒ=0,05 μ., ΑΔ=0,02 μ. καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ=0,06 μ.

161) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῆς δοθείσης περιφερείας.



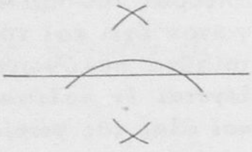
Σχ. 99

162) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ δοθὲν τόξον.

163) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δύο τμήματα ἴσα καὶ κατόπιν ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα 87 (σχ. 99).

Κατόπιν τούτων, δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου αὐτῆς Γ, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ.

164) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν ἀπὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, κάμνομεν ἓν μέρος τῆς εὐθείας χορδὴν τόξου μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα 87. Κατόπιν τούτων φέρετε ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ κάθετον ἀπὸ σημείου Γ ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 100).



Σχ. 100

165) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, ἔχον διαγώνιον δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

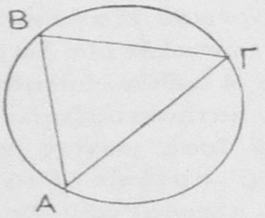
166) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς καὶ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

167) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθογώνιον, ρόμβον, τετράγωνον.

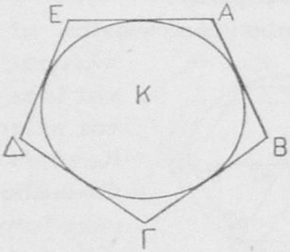
168) Κατασκευάσατε σχήματα, συνδυάζοντες διάφορα εἴδη τετραπλεύρων.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

95. Εἰς τὸ σχῆμα 101 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι χορδαί. Τὸ τρίγωνον αὐτὸ



Σχ. 101



Σχ. 102

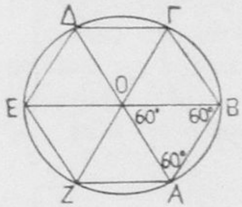
λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν. Γενικῶς δὲ ***ἓν πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς μίαν περιφέρειαν, ὅταν ὅλαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας.*** Τότε ἡ περιφέρεια λέγεται περιγεγραμμένη περὶ τὸ πολύγωνον. Ὅταν αἱ πλευραὶ πολυγώνου εἶναι ἐφαπτόμεναι περιφερείας, τὸ πολύγωνον λέγεται περιγεγραμμένον περὶ περιφέρειαν, αὕτη δὲ τότε λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον (σχ. 102).

96. Κανονικὰ πολύγωνα.—Ἀπὸ τὰ πολύγωνα, ποὺ εἴδομεν προηγουμένως, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του καὶ τὰς τρεῖς γωνίας του ἴσας. Ὁμοίως τὸ τετράγωνον ἔχει καὶ τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του ἴσας. Τὰ τοιαῦτα πολύγωνα λέγομεν κ α ν ο ν ι κ ά. Ὥστε: ***Κανονικὸν λέγεται ἓν πολύγωνον, ὅταν ἔχῃ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας ὡς καὶ ὅλας τὰς γωνίας του.***

97. Ἐγγράφομεν ἓν κανονικὸν πολύγωνον εἰς περιφέρειαν ὡς ἑξῆς. Διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς ἴσα μέρη (τόξα) καὶ τόσα ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν. Ἔπειτα δὲ φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτῶν. Τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον θὰ σχηματισθῇ μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, εἶναι κανονικόν. Διότι ἔχει καὶ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας (ὡς χορδὰς ἴσων τόξων) καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἐπίσης ἴσας (ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἴσα τόξα).

98. Τὸν τρόπον τῆς ἐγγραφῆς τετραγώνου εἰς κύκλον δίδει ἡ ἄσκησις 126. Ἤδη ***θὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς μίαν περιφέρειαν.***

Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, εἶναι 6 καὶ ἴσαι μεταξύ των· κάθε μία λοιπὸν ἰσοῦται μὲ τὸ $^1/_6$ τῶν 4 ὀρθῶν, δηλαδὴ μὲ 60°. Κατόπιν τούτων κατασκευάζομεν περὶ τὸ Ο διαδοχικῶς 6 ἴσας γωνίας καὶ κάθε μίαν ἴσην πρὸς 60°. Κατόπιν δὲ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ τῶν ἐπικέντρων τούτων γωνιῶν τέμνουν τὴν περιφέρειαν, δηλαδὴ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ (σχ. 103), ἑνοῦμεν μὲ τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. Σχηματίζεται δὲ οὕτω κανονικὸν ἑξάγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕΖ.



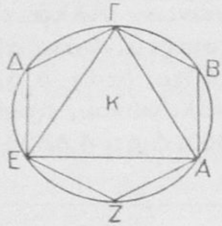
Σχ. 103

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ ἡ γωνία Ο εἶναι 60°· ἄρα κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 60°. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ***ἡ πλευρὰ ΑΒ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο.***

99. Πρόβλημα.—*Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς περιφέρειαν.*

100. Πρόβλημα.—*Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν.*

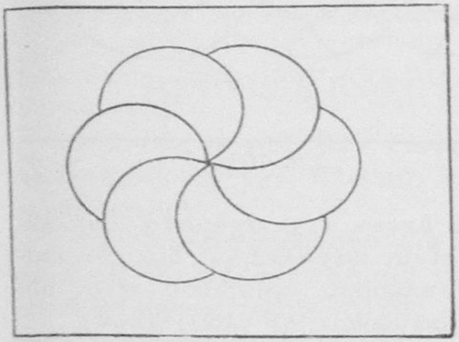
Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 104) καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ μὲ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι καθὲν ἀπὸ τὰ τόξα ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον τῆς περιφερείας.

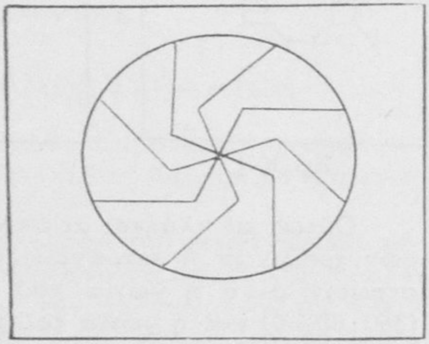


Σχ. 104

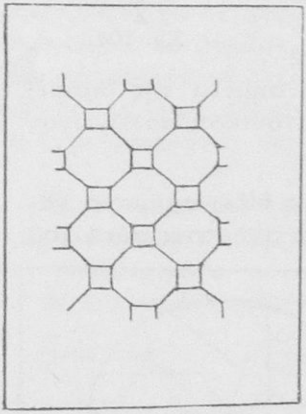
Σημείωσις. Μετὰ τὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς ἴσα μέρη, ἐὰν φέρωμεν εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἐφαπτομένας αὐτῆς, σχηματίζεται κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὴν περιφέρειαν.

101. Ὁ ἄνθρωπος εἰς πολλὰ ἀντικείμενα δίδει σχήματα κανονικῶν πολυγώνων. Καὶ τοῦτο ἢ διότι τὰ σχήματα αὐτὰ τοῦ

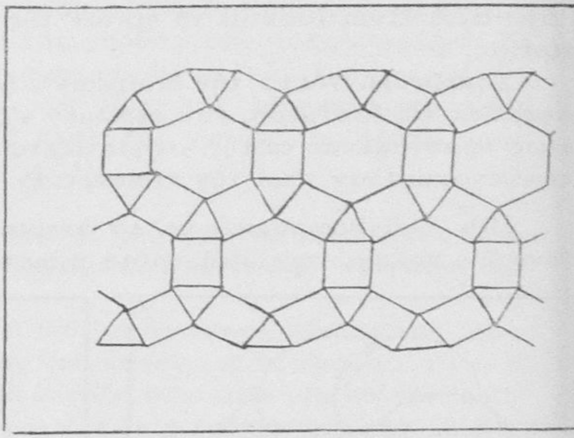

Σχ. 105


Σχ. 106

ἱκανοποιοῦν καλύτερα ἀνάγκας του πρακτικὰς ἢ διότι γίνονται οὕτως ὡραιότερα. Ἐξ ἄλλου ὁ ἄνθρωπος χρησιμοποιεῖ τὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς ἴσα μέρη, διὰ νὰ κατασκευάσῃ σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι συνδυασμοὶ περιφερειῶν καὶ τόξων διαφόρων κύκλων ἢ καὶ κανονικῶν πολυγώνων ὁμοῦ. Οὕτω τοιαῦτα σχήματα βλέπομεν εἰς τὰ σχέδια, μὲ τὰ ὁποῖα διακοσμοῦνται π.χ. τὰ ὑφάσματα, τὰ ἔπιπλα, εἰς κεντήματα κτλ. Ὁμοίως αἱ πλάκες, μὲ τὰς ὁποίας στρώνονται αἱ αὐλαί, τὰ προαύλια, οἱ διάδρομοι κτλ., ἔχουν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων. Ἀλλὰ τὰ κανονικὰ αὐτὰ πολύγωνα πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε αἱ πλάκες νὰ ἐφαρμόζουν ἐντελῶς. Γίνεται δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῆς γωνίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπου ἔχουν αἱ πλάκες, εἰσέρχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν 360. Διότι 4 ὀρθὰς ἢ 360 μοίρας πρέπει νὰ καλύπτουν αἱ πλάκες.



Σχ. 107



Σχ. 108

Οὕτως αἱ πλάκες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν π.χ. σχήματα ἰσοπλεύρων τριγώνων ἢ τετραγώνων, εἶναι κατάλληλοι διὰ τὴν ἐπίστρωσιν. Διότι ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 60° (360 : 60=6) καὶ ἡ γωνία τοῦ τετραγώνου 90° (360 : 90=4).

Τὰ σχήματα 105 - 108 (σελ. 69 καὶ 70) παρέχουν ὑποδείγματα τοιούτων σχημάτων.

Ἀσκήσεις.

169) Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

170) Νὰ περιγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

171) Νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον ἢ δωδεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

172) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας α) κανονικοῦ ἑξαγώνου, β) κανονικοῦ ὀκταγώνου, γ) κανονικοῦ δωδεκαγώνου;

173) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου;

174) Ἀφοῦ λάβητε ὑπ' ὄψιν τὸν α΄ τρόπον τῆς ἐγγραφῆς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς κύκλον καὶ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, νὰ ἐγγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

175) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν αὐλῶν, προαυλίων κτλ. ἀπὸ τὰς πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχήματα κανονικῶν πενταγώνων, ἑξαγώνων καὶ ὀκταγώνων, ποῖαι εἶναι κατάλληλοι;

176) Θέλει μία νὰ στρώσῃ τὸν διάδρομον τῆς οἰκίας της, συνδυάζουσα πλάκας μὲ σχήματα κανονικῶν ἑξαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων. Εἶναι δυνατὸν τοῦτο;

177) Νὰ κάμετε σχήματα, συνδυάζοντες περιφερείας καὶ τόξα κύκλων ὡς καὶ κανονικὰ πολύγωνα.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

102. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δηλαδὴ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ἂν διαιρέσωμεν τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἰς τὰς δέκα παλάμας της καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν προσκειμένην της πλευράν, θὰ σχηματισθοῦν δέκα ὀρθογώνια, καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ ἔχῃ βάσιν 1 παλάμην καὶ ὕψος 1 μέτρου. Ἐὰν τώρα εἰς ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ ὀρθογώνια διαιρέσωμεν καὶ τὸ ὕψος εἰς τὰς δέκα παλάμας του καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν του, αὐταί, ὅταν προεκταθοῦν, θὰ διαιρέσουν καθὲν ἀπὸ τὰ δέκα ὀρθογώνια εἰς δέκα ἄλλα ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα θὰ ἔχουν τὰς πλευράς των ὅλας ἴσας μὲ μίαν παλάμην. Ἤτοι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100

(10×10) τετραγωνικὰς παλάμας. Ὁμοίως καὶ ἡ παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Ὥστε εἶναι :

1 τ.μ.=100 τ.π.=10000 τ.δ.

1 τ.π.= 100 τ.δ.

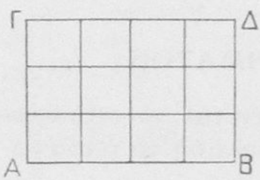
Πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον (100 τ.μ.) τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον (10000 τ.μ.) καὶ τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον (1000000 τ. μ.), ἤτοι τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν 10μ., 100μ., 1000μ.

Τὴν ἔκτασιν τῶν οἰκοπέδων μετροῦν διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ τεκτονικοῦ πήχεως (1 τ.τ.π.=9/16 τ.μ.), τὴν δὲ ἔκτασιν τῶν ἀγρῶν διὰ τοῦ στρέμματος (1 στρέμμα=1000 τ.μ.).

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν ἐπιφανείας λέγεται **ἐμβαδὸν** αὐτῆς.

103. Μέτρησις τοῦ ὀρθογωνίου.— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 109), εἰς τὸ ὁποῖον τὸ μῆκος τῆς βάσεως ΑΒ=4 μ. καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΓ=3 μ.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ νὰ ἴδωμεν, πόσας φορὰς χωρεῖ τοῦτο εἰς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον. Εὑρίσκομεν ὅμως εὐκολώτερον τὸ ζητούμενον, ὅταν ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη, ὅτε ἕκαστον μέρος θὰ ἔχῃ μῆκος ἑνὸς μέτρου. Κατόπιν διαιροῦμεν καὶ τὸ ὕψος εἰς τρία ἴσα μέρη· ἕκαστον δὲ μέρος θὰ ἔχῃ πάλιν μῆκος 1 μέτρου.



Σχ. 109

Ἔπειτα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΒ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ. Τότε τὸ ὀρθογώνιον διαιρεῖται εἰς 4×3=12 μέρη, τὰ ὁποῖα ὅλα εἶναι τετράγωνα ἴσα, μὲ πλευρὰν 1 μέτρου. Ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει τὴν μονάδα, δηλ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, 12 φοράς. Ἔχει δηλ. ἐμβαδὸν 12 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

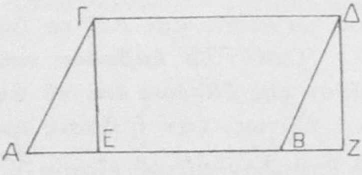
"Οθεν: ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.***

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου, εἶναι οἱοιδήποτε. Οὕτως, ἐὰν ἡ βάσις ὀρθογωνίου εἶναι 3/4 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος 2/5 αὐτοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι $3/4 \times 2/5 = 6/20$ τοῦ τ.μ.

104. Μέτρησις τοῦ τετραγώνου.—Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας, ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Π.χ. ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 4 μ. Τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $4 \times 4 = 4^2 = 16$ τ.μ. Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τὴν δευτέραν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ τὴν λέγομεν καὶ τετράγωνον.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του, ἐὰν εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ. Οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 81 τ.μ., εἶναι $\sqrt{81} = 9$ μ.

105. Μέτρησις τοῦ παραλληλογράμμου.—Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 110). Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον δὲν δύναται νὰ καλυφθῇ μὲ τετράγωνα, διὰ νὰ τὸ μετρήσωμεν, μετασχηματίζομεν αὐτὸ εἰς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ. Γίνεται δὲ αὐτὸ ὡς ἑξῆς: Φέρομεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΓΑΕ. Ἂν δὲ ἀποκόψωμεν αὐτὸ καὶ τὸ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν ΒΔΖ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι (ΕΖ).(ΕΓ), ὥστε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου εἶναι (ΕΖ).(ΕΓ)



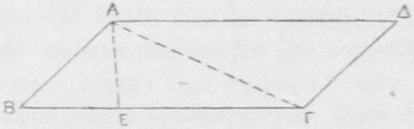
Σχ. 110

ἐπειδὴ δὲ ΕΖ=ΓΔ καὶ ΓΔ=ΑΒ, ἕπεται, ὅτι εἶναι καὶ ΕΖ=ΑΒ ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι (ΑΒ).(ΕΓ).

Ὅθεν: ***Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Σημείωσις. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἀλλὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἐφαρμόζουν ἀκέραια, λέγονται ἰσοδύναμα.

106. Μέτρησις τοῦ τριγώνου.—Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 111). Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, αἱ δύο αὗται παράλληλοι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Δ καὶ σχηματίζεται παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΓ εἶναι διαγώνιος. Αὕτη δὲ διαιρεῖ, ὡς γνωρίζομεν, τὸ παραλληλόγραμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ. Ὅθεν τὸ σχηματισθὲν παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου·



Σχ. 111

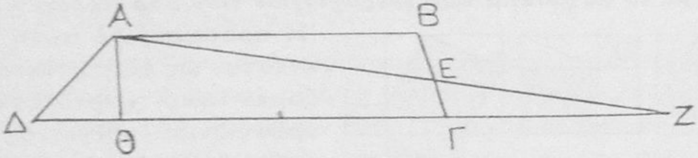
ἤτοι ἐμβαδὸν ΑΒΓ$=\frac{(ΒΓ)\cdot(ΑΕ)}{2}$· ἀλλ' ἡ ΒΓ εἶναι βάσις τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ΑΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ὅθεν: ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Οὕτως, ἐὰν ἡ βάσις τριγώνου εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ὕψος 3 μ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{5\times 3}{2}=7{,}5$ τ.μ.

107. Μέτρησις τοῦ τραπεζίου. — Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ἔπειτα, ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α καὶ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ φέρομεν τὴν ΑΕ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν, μέχρις ὅτου συναντήσῃ ἐπίσης τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐσχηματίσθησαν δὲ οὕτω δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΕ καὶ ΕΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα (§ 55,3). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΖΔ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι $\frac{(\Delta Z)\cdot(A\Theta)}{2}$. Ἀλλ' εἶναι $\Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z$ ἢ $\Delta Z = \Delta\Gamma + AB$ (ἐπειδὴ $\Gamma Z = AB$). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι $\frac{(\Delta\Gamma + AB)}{2} \cdot (A\Theta)$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος ΑΘ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι καὶ



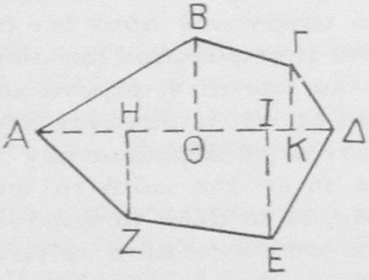
Σχ. 112

ὕψος τοῦ δοθέντος τραπεζίου, ἕπεται, ὅτι, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Οὕτως, ἐὰν αἱ βάσεις τραπεζίου εἶναι 4 καὶ 5 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 3 μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{4+5}{2} \times 3 = 4{,}5 \times 3 = 13{,}5$ τ.μ.

108. Ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος πολυγώνου.— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος πολυγώνου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

1) Ἀναλύομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, ἢ δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰς κορυφὰς των ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τριγώνου καὶ προσθέτομεν.

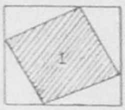


Σχ. 113

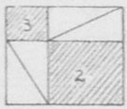
2) Ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς: Φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΑΔ (σχ. 113) καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτήν· οὕτω διαιρεῖ-

ται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς ἀπὸ τὰ σχήματα αὐτὰ καὶ προσθέτομεν

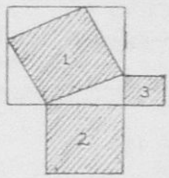
109. Πρότασις τοῦ Πυθαγόρου.—Ἐὰν ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευάσωμεν τετράγωνα, μεταξὺ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις, τὴν ὁποίαν πρῶτος εὗρεν ὁ ἀρχαῖος Ἕλλην μαθηματικὸς Πυθαγόρας· ὅτι δηλαδὴ ***τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***



Σχ. 114



Σχ. 115



Σχ. 116

Ἡ πρότασις δὲ αὐτὴ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνιον 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει καθέτους πλευράς, π.χ. 3 καὶ 4 δακτύλων, ὡς καὶ ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν $3+4=7$ δακτύλων. Κατόπιν τὰ τρίγωνα αὐτὰ θέτομεν εἰς τὸ τετράγωνον, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 114. Βλέπομεν δὲ οὕτως, ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ 4 τρίγωνα καὶ ἀπὸ ἓν ἄλλο τετράγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα κατεσκευάσαμεν. Ἔπειτα θέτομεν τὰ ἴδια τρίγωνα εἰς τὸ ἴδιον τετράγωνον τῶν 7 δακτύλων, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 115· ἀλλὰ τώρα βλέπομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτὸ δὲν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ 4 τρίγωνα καὶ ἀπὸ ἓν τετράγωνον (δηλαδὴ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης), ἀλλὰ ἀπὸ τὰ 4 τρίγωνα καὶ 2 τετράγωνα. Ἀλλ' αὐτὸ σημαίνει, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης τοῦ σχ. 114 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων τοῦ σχ. 115. Εἶναι δὲ τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς, τὸ δὲ ἄλλο τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ἡ ἄνω πρότασις.

Σημείωσις. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχει ἐμβαδὸν $3^2+4^2=9+16=25$ τ.δ. Ἑπομένως ἡ πλευρά του εἶναι $\sqrt{25}=5$ δ. (§ 104, Σημ.).

110. Τύποι ἐμβαδῶν. Ἂν ἡ βάσις ὀρθογωνίου ἢ παραλληλογράμμου παρασταθῇ διὰ τοῦ β, τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ τοῦ υ καὶ τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ Ε, ἔχομεν $E = \beta . \upsilon$.

Διὰ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς α ἔχομεν $E = \alpha^2$.

Διὰ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β καὶ τὸ ὕψος υ, ἔχομεν $E = \frac{\beta . \upsilon}{2}$.

Διὰ τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι υ καὶ αἱ δύο βάσεις Β καὶ β, ἔχομεν $E = \frac{(B + \beta) . \upsilon}{2}$.

Σημείωσις. Ἂν ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου παρασταθῇ διὰ τοῦ α καὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ διὰ τοῦ β καὶ γ, κατὰ τὴν πρότασιν τοῦ Πυθαγόρου ἔχομεν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα δὲ αὐτὴν λαμβάνομεν καὶ τὰς ἑξῆς:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \text{ καὶ } \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Τί μᾶς λέγουν λοιπὸν αἱ δύο τελευταῖαι ἰσότητες;

Ἀσκήσεις.

178) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 15 μέτρα καὶ ὕψος 8 μέτρα, β) βάσιν $5\frac{1}{2}$ μ. καὶ ὕψος $3\frac{1}{4}$ μ., γ) βάσιν 5,2 μ. καὶ ὕψος 8 παλάμας.

179) Μέτρησε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου σου, τοῦ πίνακος, τοῦ δωματίου σου καὶ εὗρε τὰ ἐμβαδά των.

180) Οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου αἱ πλευραὶ εἶναι 7 καὶ 16 τεκτ. πήχεις. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

181) Μία ἠγόρασε τάπητα σχήματος ὀρθογωνίου, πλάτους 2,8 μ. καὶ μήκους 3,5 μ. πρὸς 800 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

182) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογωνίου πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 2,5 μ. καὶ πλάτος 0,8 μ. Ἔχει δὲ τὸ δωμάτιον μῆκος 5 μ. καὶ πλάτος 3 μ. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν;

183) Ἓν οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 18,3 τετρ. πήχεις καὶ πλάτος 12, ἐπωλήθη δὲ ἀντὶ 25000 δρ. Πόσον ἐπληρώθη ὁ τετρ. τεκτονικὸς πῆχυς;

184) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 260 μ., τὸ δὲ μῆκος του 60 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

185) Εἷς κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 30 μ. καὶ ἐμβαδὸν 1200 τ.μ. Ποῖον εἶναι τὸ πλάτος του;

186) Ἓν κτῆμα ἔχει ἐμβαδὸν 16260 τ.μ. καὶ πλάτος 135,5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος του;

187) Εἷς τοῖχος μὲ πλάτος 12 μ. καὶ ὕψος 8 μ. πρόκειται νὰ χρωματισθῇ· τὸ χρωμάτισμα ἑνὸς τετραγ. μέτρου στοιχίζει 7,50 δραχ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ χρωμάτισμα ὅλου τοῦ τοίχου, ἂν ἐξαιρεθῇ μία θύρα του, πλάτους 1,2 μ. καὶ ὕψους 3 μ.;

188) Τετράγωνον ἔχει πλευρὰν α) 4 μ. β) 3 1/2 μ. γ) 5,25 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου;

189) Τετράγωνον ἔχει περίμετρον 45 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

190) Τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 225 τ.μ. Ποία εἶναι ἡ πλευρά του;

191) Πρόκειται νὰ στρωθῇ μία αὐλὴ μὲ πλάκας τετραγωνικάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλευρὰν 0,25 μ. Ἡ αὐλὴ ἔχει μῆκος 18 μ. καὶ πλάτος 7,2 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

192) Ἓν χωράφιον σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰν 18 μ. ἀνταλλάσσεται μὲ ἓν ἄλλο μὲ τὴν ἰδίαν ποιότητα τοῦ χώματος ἀλλὰ μὲ σχῆμα ὀρθογώνιον· τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτὸ ἔχει περίμετρον ἴσην μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου καὶ πλάτος 10 μέτρα. Ἔγινε δικαίως ἡ ἀνταλλαγή; ἂν ὄχι, ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἀνθρώπους, οἱ ὁποῖοι ἀντήλλαξαν, ἠδικήθη; Καὶ πόσον;

193) Εἷς κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 25 μέτρων καὶ πλάτος 14,8 μ. διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα μέρη μὲ δύο δρόμους, οἱ ὁποῖοι διασταυροῦνται εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ καὶ ἔχουν πλάτος 1 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα περιέχει τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη τοῦ κήπου;

194) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 8,24 μ. καὶ ὕψος 4,05 μ.

195) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ βάσις εἶναι 13,2 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 211,20 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του.

196) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 22 μέ-

τρα καὶ ἡ μία πλευρὰ του 4 μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 3 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

197) Δύο ἴσα παραλληλόγραμμα κεῖνται ἑκατέρωθεν μιᾶς κοινῆς πλευρᾶς αὐτῶν μήκους 4 μέτρων. Ἡ ἀπόστασις δὲ αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἶναι 7,6 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο παραλληλογράμμων.

198) Ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα, ὅσα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

199) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΓΔ εἶναι 14,06 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι 5,8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ.

200) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 2,4 μέτρα, ἡ δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εἶναι 4 μέτρα.

201) Ἓν λιβάδιον τριγωνικοῦ σχήματος ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 185 μέτρα, ἡ δὲ κάθετος πρὸς αὐτὴν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εἶναι 79 μέτρα. Πόσα στρέμματα βασιλικὰ ἔχει τὸ λιβάδιον αὐτό;

202) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 8 μέτρων καὶ ὕψος 3 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους.

203) Αἱ διαγώνιοι ρόμβου εἶναι 15 μέτρα καὶ 9 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

204) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, αἱ δὲ κορυφαὶ Γ καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ. Ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι 3,2 μέτρα, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων.

205) Τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 11,3 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 45,2 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως ἀπὸ ταύτης;

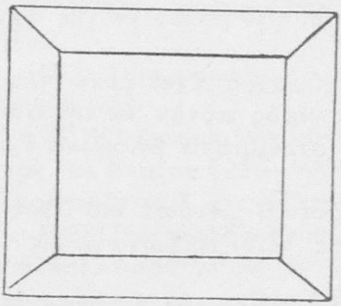
206) Ὅλα τὰ τρίγωνα, ὅσα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

207) Τραπεζίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 14,6 μέτρα, ἡ ἄλλη 9 μ. καὶ τὸ ὕψος 8,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

208) Ἑνὸς κήπου, ὁ ὁποῖος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἡ μία 123 μ. ἡ ἄλλη 232,6 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν 85 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς τ. μέτρα ἢ εἰς βασ. στρέμματα.

209) Τραπεζίου αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι 9,8 μ· καὶ 4,2 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 38,50 τ.μ. Ποία ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν παραλλήλων πλευρῶν;

210) Τέσσαρα ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ τραπέζια ἔχουν τὴν μικροτέραν βάσιν ἴσην μὲ 5 δακτύλους, τὴν μεγαλυτέραν ἴσην μὲ 7 δακτύλους καὶ ἀπόστασιν μεταξύ των ἴσην μὲ 1 δάκτυλον. Ἐὰν δὲ τὰ θέσωμεν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 117, αἱ βάσεις αὐτῶν σχηματίζουν δύο τετράγωνα. α) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ἑνὸς τραπεζίου; β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τραπεζίου κατὰ τὸν σχετικὸν κανόνα. γ) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τετραγώνων.



Σχ. 117

211) Εἰς τὸ σχῆμα 113 ἄς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶναι (ΒΘ)=5, ΓΚ=3, ΕΙ=6, ΖΗ=4,6, ΑΗ=3, (ΗΘ)=3,2, (ΘΙ)=3,8, (ΙΚ)=1 καὶ ΚΔ=2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

212) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 8 μέτρα καὶ 6 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

213) Ὀρθογωνίου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι 24 μ. καὶ 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς τῶν διαγωνίων του.

214) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 17 μέτρα καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 15 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

215) Μὲ τὰ δεδομένα τῆς § 109 νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὸ σχῆμα 114 α) κατὰ τὸν σχετικὸν κανόνα καὶ β) ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τετραγώνων.

216) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

111. Μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου.—Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἠμποροῦμεν νὰ τὸ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς. Νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὴν ἓν νῆμα πολὺ λεπτόν, τὸ ὁποῖον νὰ τεντώσωμεν καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν. Τὸ μῆκος δέ, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. Ὁ τρόπος ὅμως οὗτος δὲν δίδει μὲ ἀκρίβειαν τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας.

Ὑπάρχει ὅμως ἄλλος τρόπος ἀκριβέστερος. Στηρίζεται δὲ αὐτὸς εἰς τὸ ἑξῆς. Ἐὰν μετρήσωμεν περιφερείας διαφόρων κύκλων καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης διαιρέσωμεν μὲ τὴν διάμετρόν της, θὰ εὕρωμεν εἰς ὅλας τὰς διαιρέσεις αὐτὰς πηλίκον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3,14.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὰς διαιρέσεις αὐτὰς διαιρετέος εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας κύκλου, διαιρέτης τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου της καὶ πηλίκον ὁ ἀριθμὸς 3,14, ἕπεται, ὅτι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

Οὕτω τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 3 μέτρων εἶναι $2 \times 3 \times 3{,}14 = 18{,}84$ μέτρα.

Ὁ ἀριθμὸς 3,14 παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος π· ἐὰν δὲ καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου καὶ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, ἔχομεν τὸν τύπον $Γ = 2 . α . π$.

112. Μῆκος τόξου.—***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 27° περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 5 μ.*** Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας του δηλ. 360° εἶναι $10 \times 3{,}14$. Τὸ μῆκος τόξου 1° εἶναι $\frac{10 \times 3{,}14}{360}$ καὶ τὸ μῆκος τόξου 27° εἶναι $\frac{10 \times 3{,}14 \times 27}{360} = 2{,}355$.

Ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, τὸ δὲ τόξον τῆς περιφερείας του εἶναι μ°, τὸ μῆκος αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$τ = \frac{2 . α . π}{360} . μ. \quad ἢ \quad \frac{α . π . μ}{180}$$

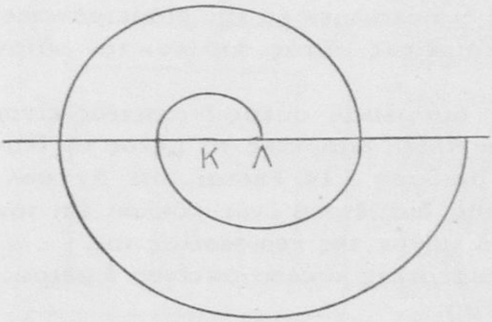
Ἀσκήσεις.

217) Γράψατε κύκλον ἀκτῖνος 4 δακτύλων καὶ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

218) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος α) 5 μ., β) 2 1/2 μ. καὶ γ) 3,2 μ.

219) Εἷς τροχὸς ἁμάξης μὲ ἀκτῖνα 0,45 μ. ἔκαμεν 128 στροφὰς κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἁμάξης· πόσον διάστημα διέτρεξεν ἡ ἅμαξα;

220) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 44 μ. ($\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi}$).



Σχ. 118

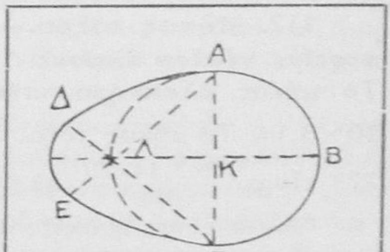
221) Ἡ περιφέρεια τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς εἶναι 40000000 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

222) Εἷς κορμὸς δένδρου ἔχει περιφέρειαν 15 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος αὐτοῦ;

223) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου α) 90°, β) 36°, καὶ γ) 108° περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 7 μ.;

224) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἀκτῖνος 5 μέτρων, τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ εἶναι α) πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου, β) ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ γ) κανονικοῦ πενταγώνου.

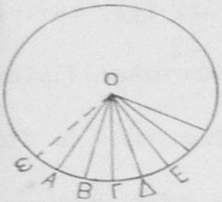
225) Γράψατε τέσσαρας ἡμιπεριφερείας μὲ ἀκτῖνας κατὰ σειρὰν 1, 2, 3, 4 δακτύλων μὲ κέντρον κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Κ, Λ, Κ, Λ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 118. Κατόπιν δὲ νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς σπειροειδοῦς γραμμῆς, ἡ ὁποία ἐσχηματίσθη.



Σχ. 119

226) Ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει τὸ σχ. 119 (ᾠοῦ), ἀποτελεῖται α) ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΓ ἀκτῖνος δύο δακτύλων, β) ἀπὸ τὰ ἴσα τόξα ΑΔ καὶ ΕΓ 45° ἴσων κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα Γ καὶ Α καὶ ἀκτῖνα 4 δακτύλων καὶ γ) ἀπὸ τὸ τόξον ΔΕ 90°, τὸ ὁποῖον ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Λ καὶ ἀκτῖνα 1 δάκτυλον καὶ 2 γραμμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει τὸ σχῆμα.

113. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.—Ἔστω ὁ κύκλος Ο, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς μέγαν ἀριθμὸν ἴσων τόξων καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ κτλ. (σχ. 120). Διαιρεῖται οὕτως ὁ κύκλος εἰς ἴσους τομεῖς ΟΑΒ, ΟΒΓ κτλ. Ἐὰν δὲ ἓν τῶν ἴσων τόξων, π. χ. τὸ ΑΒ, εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἕκαστος τομεύς, π. χ. ὁ ΟΑΒ, δύναται νὰ θεωρηθῇ ἰσοδύναμος μὲ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, τὴν ὁποίαν παριστῶ διὰ τοῦ α. Ὥστε ἐμβαδὸν τομέως $ΑΟΒ = \frac{1}{2}.α.(ΑΒ)$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τομέων, ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ α. (ΑΒ) + $\frac{1}{2}$ α.(ΒΓ) + $\frac{1}{2}$ α. (ΓΔ) + ... + $\frac{1}{2}$ α. (ωΑ) = $\frac{1}{2}$ α. [(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + ... + (ωΑ)]· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + ... + (ωΑ) εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι 2απ· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κύκλου εἶναι $\frac{1}{2}$ α. 2π.α = πα², ἤτοι εἶναι γινόμενον τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του. Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν κύκλου μὲ ἀκτῖνα 5 μ. εἶναι Ε = π.α² = 3,14.25 = 78,50 τ.μ.



Σχ. 120

Ἀντιστρόφως, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα του ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ π, ἔπειτα δὲ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πηλίκου· π.χ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι 1256 τ.μ., τὸ πηλίκον 1256 : 3,14 = 400 καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{400} = 20$ μ.

114. Ἐμβαδὸν τομέως.—Ἐξ ὅσων εἴπομεν περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου του. Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 24 μέτρα καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου του 8 μέτρα, εἶναι $\frac{24.8}{2} = 96$ τ.μ.

Ἀσκήσεις.

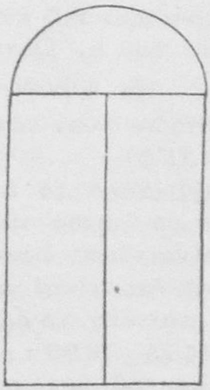
227) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 7 μέτρα.

228) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 0,3 μέτρα.

229) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶναι 28 δάκτυλοι. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

230) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι 31,4 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

231) Δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, ἔχουν ἀκτῖνας ἡ μία 18 μ., ἡ ἄλλη 12 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν;



Σχ. 121

232) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι α) 28,26 τ.μ. β) 113,04 τ.μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ;

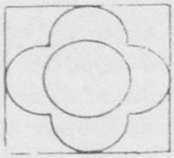
233) Τὸ μῆκος κύκλου τόξου κυκλικοῦ τομέως εἶναι 12,566 μ., ἡ δὲ ἀκτίς του 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

234) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἀκτῖνος 6 μ., ὅταν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τομέως εἶναι 60°.

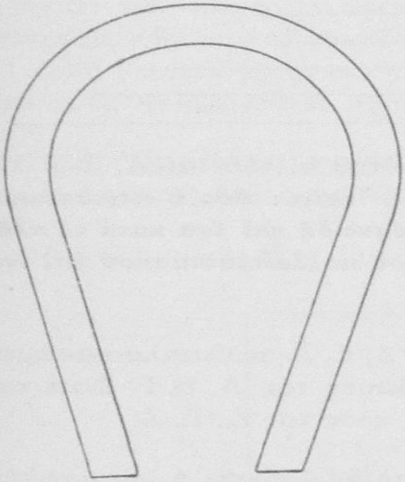
235) Κυκλικοῦ τομέως τὸ τόξον εἶναι 40° καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ 25 δάκτυλοι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

236) Μία θύρα ἔχει τὸ σχῆμα 121. Ἡ βάσις ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι 0,60 μ. καὶ τὸ ὕψος εἶναι δύο μέτρα, τὸ δὲ ὑπὲρ τὰ ὀρθογώνια σχῆμα εἶναι ἡμικύκλιον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς θύρας.

237) Εἰς τὸ σχῆμα 122 ὁ κύκλος καὶ τὰ 4 ἡμικύκλια ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας. Τὰ δὲ κέντρα τῶν 4 ἡμικυκλίων κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον. α) Κατασκευάσατε τοιοῦτον σχῆμα. β) Εὕρετε τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, ποὺ κάμνουν αἱ 4 ἡμιπεριφέρειαι, ὅταν ἡ ἀκτίς των εἶναι 2 δάκτυλοι καὶ γ) εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν 4 ἡμιπεριφερειῶν καὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁλοκλήρου κύκλου, ὅταν ἡ ἀκτὶς εἶναι 2 δάκτυλοι· (πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἔχετε ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα συναντῶνται αἱ 4 ἡμιπεριφέρειαι, σχηματίζουν τετράγωνον περιγεγραμμένον περὶ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν).



Σχ. 122



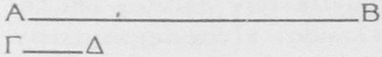
Σχ 123

238) Εἰς τὸ σχῆμα 123 (πετάλου) τὰ δύο τόξα ἀνήκουν εἰς δύο κύκλους ὁμοκέντρους καὶ καθὲν εἶναι 210°. Αἱ δὲ βάσεις τῶν δύο ἴσων τραπεζίων εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων. α) Κατασκευάσατε τοιοῦτον σχῆμα. β) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος αὐτοῦ, ὅταν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων εἶναι 2 καὶ 3 δάκτυλοι, αἱ δὲ βάσεις τῶν τραπεζίων εἶναι 5 δάκτυλοι ἡ μία καὶ 47 γραμμαὶ ἡ ἄλλη.

239) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος 5 δακτ. καὶ ὅταν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν τετραγώνου.

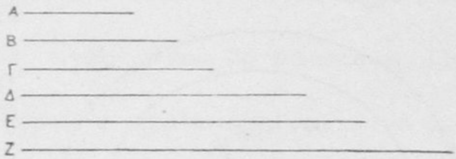
ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

115. Περὶ λόγου.—Ἔστω, ὅτι ἔχομεν δύο ὁμοειδῆ ποσά, π. χ. τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν τὴν ΑΒ



καὶ μονάδα λάβωμεν τὴν ΓΔ καὶ εὕρωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι 5 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ, τὸν ἀριθμὸν 5 λέγομεν λόγον τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Ὅθεν: ***Λόγος ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἓν ἄλλο ὁμοειδὲς λέγεται ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν μετρήσωμεν τὸ πρῶτον μὲ τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.***

116. Ποσὰ ἀνάλογα.—Ἃς λάβωμεν τώρα τὰς εὐθείας γραμμὰς Α, Β, Γ, ἃς ὑποθέσωμεν δέ, ὅτι κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἐπανελάβομεν 3 φορὰς καὶ μᾶς ἔδωσαν τὰς Δ, Ε, Ζ. Ὥστε οἱ λόγοι τῆς Α πρὸς τὴν Δ, τῆς Β πρὸς τὴν Ε καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Ζ εἶναι μεταξύ των ἴσοι, διότι ὁ καθεὶς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι 3. Ἕνεκα δὲ τούτου αἱ εὐθεῖαι Δ, Ε, Ζ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τὰς Α, Β, Γ. Ὥστε: ***Δύο ἢ περισσότερα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ὁμοειδῆ καὶ ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος, ὅταν γίνωνται ἀπὸ αὐτὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***



117. Ἐὰν κάθε μίαν ἀπὸ τὰς Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1/3 εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ λάβωμεν τὰς Α, Β, Γ· ὥστε καὶ αἱ εὐθεῖαι Α, Β, Γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς Δ, Ε, Ζ.

118. Αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Δ, αἱ ὁποῖαι γίνονται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται ἀντίστοιχοι ἢ ὁμόλογοι. Ὥστε ὁμόλογοι εἶναι καὶ αἱ εὐθεῖαι Β καὶ Ε, ὡς καὶ αἱ Γ καὶ Ζ.

Ἀσκήσεις.

240) Γράψατε δύο εὐθείας καὶ εὕρετε τὸν λόγον αὐτῶν.

241) Γράψατε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν λόγον: α) 3, β) 3 1/2, γ) 3,25.

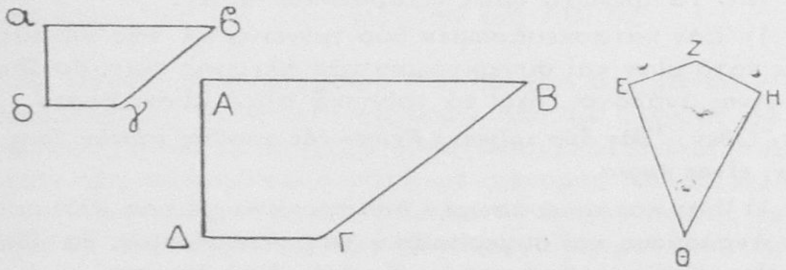
242) Γράψατε 4 εὐθείας τοιαύτας, ὥστε ὁ λόγος δύο ἀπὸ αὐτὰς νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων.

243) Γράψατε δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν ἴσας βάσεις (π. χ. 6 δακτύλων), ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου (π.χ. 2 καὶ 4 δακτύλων). Ἔπειτα εὕρετε τὰ ἐμβαδά των, τὰ ὁποῖα νὰ συγκρίνετε. Ποῖος λοιπὸν εἶναι ὁ λόγος τῶν βάσεων τῶν τριγώνων αὐτῶν καὶ ποῖος ὁ λόγος τῶν ὑψῶν των καὶ τῶν ἐμβαδῶν των; Τί εἶναι μεταξύ των οἱ δύο τελευταῖοι λόγοι; Τί γενικὸν συμπέρασμα ἐξάγετε;

244) Γράψατε δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν ἴσα ὕψη, ἀλλὰ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι τριπλασία τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου. Ποῖος λοιπὸν εἶναι ὁ λόγος τῶν ὑψῶν, τῶν βάσεων, τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν; ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ τῶν δύο τελευταίων λόγων τί γενικὸν συμπέρασμα ἐξάγετε;

245) Κάμετε μόνοι σας ἀσκήσεις, ὅπως αἱ ἄνω δύο καὶ αἱ ὁποῖαι νὰ ἀναφέρωνται εἰς ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

119. Ὁμοιότης σχημάτων.—Ὅλοι ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τῆς ὁμοιότητος δύο σχημάτων. Οὕτως ἀμέσως βλέπομεν, ὅτι τὰ



Σχ. 124. Σχ. 125. Σχ. 126.

σχήματα 124, 125 εἶναι ὅμοια μεταξύ των καὶ ὅτι κανὲν ἀπὸ αὐτὰ δὲν εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα 126. Ἂν τώρα μετρήσωμεν τὰς γωνίας τῶν ὁμοίων αὐτῶν σχημάτων, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου μία πρὸς μίαν. Δηλαδὴ εἶναι $Α=α$, $Β=β$, $Γ=γ$ κτλ.

Διὰ τὰς πλευρὰς ὅμως βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον. Ἀλλ' ἂν λάβωμεν τὰς πλευρὰς τῆς μιᾶς γωνίας, π.χ. τῆς Α τοῦ ἑνὸς σχήματος, καὶ τὰς συγκρίνωμεν μὲ τὰς πλευρὰς τῆς ἴσης γωνίας α, θὰ ἴδωμεν, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς αβ καὶ ἡ ΑΔ εἶναι διπλασία τῆς αδ· ἤτοι αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας Α εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἴσης γωνίας α.

Τὸ αὐτὸ δὲ θὰ ἴδωμεν, ἂν συγκρίνωμεν τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν Β καὶ β κ.ο.κ. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι ***δύο εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους.***

120. Ὥστε διὰ νὰ εἴπωμεν, ὅτι δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν καὶ τὰς γωνίας των καὶ τὰς πλευράς των. Διότι ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, ἀλλὰ νὰ μὴ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους (ὅπως εἶναι ἓν τετράγωνον καὶ ἓν ὀρθογώνιον), ἢ ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, ἀλλὰ νὰ μὴ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας (ὅπως εἶναι εἷς ρόμβος καὶ ἓν τετράγωνον).

121. Τὰ τρίγωνα ὅμως ἐξαιροῦνται, διότι:

1) Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν καὶ συγκρίνωμεν τὰς πλευράς των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.***

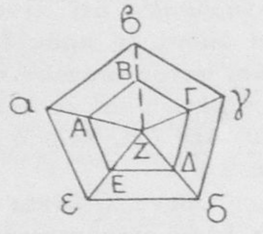
2) Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους καὶ συγκρίνωμεν τὰς γωνίας των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.***

3) Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουν αὐτήν, ἀναλόγους καὶ συγκρίνωμεν ἔπειτα τὰς δύο ἄλλας γωνίας των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν ἀνωτέρω 1ην περίπτωσιν, εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουν αὐτήν, ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.***

122. Πρόβλημα.—***Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι διπλάσιαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος.*** Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἓν τυχὸν σημεῖον Ζ (σχ. 127) καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· τὰς εὐθείας αὐτὰς διπλασιάζομεν, ὁπότε γίνονται Ζα, Ζβ, Ζγ, Ζδ, Ζε· ἐὰν τώρα συνδέσωμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν μὲ τὰς εὐθείας αβ, βγ, γδ, δε, εα, λαμβάνομεν τὸ πολύγωνον αβγδε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, διότι τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὴν τὸ Ζ εἶναι ὅμοια (§ 121,3). Ἑπομένως τὰ δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας των ἴσας. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τριπλάσιαι, τετραπλάσιαι, 1/2 κτλ. τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 127

123. Λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων.—Ἂς κατασκευάσωμεν πρῶτον ἓν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς 3,4 καὶ 5 δακτύλων (θὰ εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον) καὶ ἔπειτα ἓν ἄλλο τρίγωνον αβγ ὅμοιον πρὸς αὐτὸ μὲ πλευρὰς διπλασίας, ἤτοι 6, 8 καὶ 10 δακτύλων· ἂς ἐξετάσωμεν δὲ ἔπειτα, πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αβγ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ, ἤτοι ἂς εὕρωμεν τὸν **λόγον** τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δευτέρου τριγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν ἐμβ. τρ. αβγ$=\frac{6\times8}{2}=$24 τ.δ. καὶ ἐμβ. τρ. ΑΒΓ$=\frac{3\times4}{2}=$ $=$6 τ.δ. Ὥστε ἐμβ. τριγ. αβγ : ἐμβ. τριγ. ΑΒΓ$=24:6=4$. Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος 4 εἶναι τετράγωνον τοῦ 2, ὁ δὲ 2 εἶναι ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (λόγος ὁμοιότητος) τῶν ἄνω τριγώνων.

Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ***ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων***

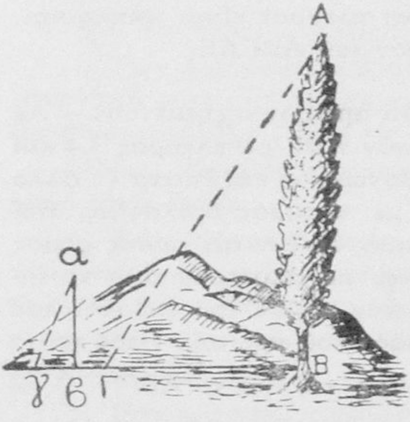
τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.

῞Ωστε, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι π.χ. 10 τ.μ., τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τριπλάσιαι, θὰ εἶναι 10 τ.μ. $\times 3^2 =$ $= 10$ τ.μ.$\times 9 = 90$ τ.μ.

124. Τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε (σχ. 127) παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι διῃρημένα εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἕν. Καθὲν δὲ ἀπὸ τὰ τρίγωνα τοῦ αβγδε εἶναι τετραπλάσιον πρὸς τὸ ὅμοιόν του τρίγωνον τοῦ ΑΒΓΔΕ. Ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον πολύγωνον αβγδε εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἐνῷ ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν εἶναι 2.

῞Οθεν: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.***

125. Ἐφαρμογὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων.—***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.*** ῎Εστω τὸ δένδρον ΑΒ (σχ. 128). Ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐδάφους (τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὁριζόντιον) ἐμπηγνύομεν κατακορύφως μίαν ράβδον αβ· τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὀρθογώνια, διότι ἔχουν ὀρθὰς γωνίας, τὰς Β καὶ β. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ γων. Γ= =γων. γ (διότι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ αγ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τοῦ ἐδάφους), ἕπεται, ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια· ἂν λοιπὸν μετρήσωμεν τὰς σκιὰς ΒΓ καὶ βγ καὶ εὕρωμεν, ὅτι ἡ σκιὰ ΒΓ εἶναι π.χ. πενταπλασία τῆς σκιᾶς βγ, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ΑΒ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ὕψους τῆς ράβδου αβ· ἂν λοιπὸν ἡ αβ εἶναι 1,5 μ., ἡ ΑΒ θὰ εἶναι $1{,}5 \times 5 =$ $= 7{,}5$ μ.



Σχ. 128

Σημείωσις. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὕψος κωδωνοστασίων, πύργων, στύλων κτλ.

Ἀσκήσεις.

246) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2, 4, 5 δακτύλων. Ἔπειτα κατασκευάσατε ἄλλο τρίγωνον, ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον. Τί πλευρὰς θὰ λάβετε; Πόσα τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ πρῶτον εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν;

247) Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι νὰ εἶναι 40° καὶ 60°. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ; Καὶ πόσα τρίγωνα εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν μεταξύ των ἴσας γωνίας μίαν πρὸς μίαν; Τί εἶναι τὰ τρίγωνα αὐτὰ μεταξύ των;

248) Τριγώνου τινὸς ΑΒΓ αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ=7μ., ΒΓ==9μ. καὶ ΓΑ=14μ., τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, εἶναι 24,5 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

249) Τριγώνου ΑΒΓ νὰ προεκταθοῦν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ καὶ νὰ ληφθῇ τὸ ΑΕ τριπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΖ τριπλάσιον τοῦ ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ κατόπιν ὁ λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

250) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2, 3, 4 δακτ. καὶ ἔπειτα ἄλλο τρίγωνον μὲ πλευρὰς 4, 6, 8 δακτ. Φέρετε ἔπειτα δύο ὁμόλογα ὕψη (π.χ. τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς 3, 6), τὰ ὁποῖα νὰ συγκρίνετε. Ποῖος λοιπὸν εἶναι ὁ λόγος αὐτῶν; Καὶ τί εἶναι ὁ λόγος αὐτὸς ἐν σχέσει μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν;

251) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὕρετε τὸν λόγον τῶν περιμέτρων τῶν δύο τριγώνων. Νὰ συγκρίνετε δὲ ἔπειτα αὐτὸν μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν. Τί γενικὸν συμπέρασμα ἐξάγετε ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτήν;

252) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΒΓ) καὶ ΔΕΖ (ΔΕ==ΕΖ) ἔχουν γων. Α=γων. Δ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

253) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι πενταπλάσιαι τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου. Πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου;

254) Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ 1 μέτρον, εἶναι 2,3774 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 3 μ.

255) Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 1 μ. εἶναι 2,598 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 2,5 μ.

256) Ἡ σκιὰ ἑνὸς κωδωνοστασίου εἶναι ἑξαπλασία τῆς σκιᾶς μιᾶς ράβδου. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ράβδος ἔχῃ μῆκος 2,25 μέτρα;

257) Ἐκ δύο κύκλων ὁ εἷς ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων καὶ ὁ ἄλλος διπλασίαν. Εὕρετε α΄) τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν των, β΄) τὸν λόγον αὐτῶν, γ΄) τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων, δ΄) τὸν λόγον αὐτῶν. Ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὸν λόγον τῶν περιφερειῶν καὶ τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν πρὸς τὸν λόγον τῶν δύο ἀκτίνων. Τί συμπεραίνετε ἀπὸ τὰς συγκρίσεις αὐτάς;

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑΣ

126. Τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουν πολλὰς ἐφαρμογάς. Μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι καὶ ἡ ἑξῆς. Ὁ ἄνθρωπος πολλάκις ἔχει ἀνάγκην νὰ κατασκευάζῃ τὰ σχήματα ἐπιπέδων ἐκτάσεων, ὡς εἶναι αἱ γαῖαι, ἐπὶ χάρτου. Ὡς εἶναι δὲ εὐνόητον, τὰ σχήματα αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἐκτάσεων, τὰς ὁποίας θὰ ἀπεικονίσῃ· ἀλλὰ πάλιν διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἓν σχῆμα ὅμοιον πρὸς ἓν ἄλλο, πρέπει νὰ γνωρίζῃ ἀκριβῶς τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τοῦ πρωτοτύπου σχήματος. Καὶ διὰ νὰ τὰ γνωρίζῃ, πρέπει νὰ τὰ μετρήσῃ. Προκειμένου ὅμως περὶ γαιῶν, ἡ μέτρησις ἐπ' αὐτῶν εὐθειῶν καὶ γωνιῶν δὲν εἶναι καὶ τόσον εὔκολος. Διότι δὲν εἶναι πολὺ εὔκολος οὔτε ἡ χάραξις εὐθειῶν, οὔτε ἡ κατασκευὴ καθέτων καὶ γενικῶς ἡ ἐκτέλεσις ὅλων τῶν ἐργασιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γαιῶν καὶ ἐπομένως διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἀπαιτουμένων ὁμοίων σχημάτων.

Γίνονται ὅμως εὔκολοι αἱ ἐργασίαι αὐταί, ὅταν ἀποκτήσωμεν ὡρισμένας γνώσεις. Τὰς γνώσεις δὲ αὐτὰς διδάσκει ἡ χωρομετρία.

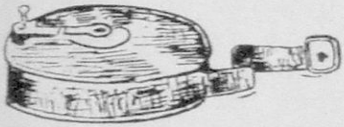
Ἡ χωρομετρία λοιπὸν ἔχει σκοπὸν τὴν μέτρησιν γαιῶν μικρᾶς ἐκτάσεως καὶ τὴν ἀπεικόνισιν αὐτῶν ἐπὶ χάρτου μὲ ὅμοια σχήματα.

127. Χάραξις εὐθείας.—Ἔστω, ὅτι θέλωμεν νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν γραμμὴν μεταξὺ δύο σημείων αὐτοῦ Α καὶ Β. Πρὸς τοῦτο δμως χρησιμοποιοῦμεν ἀκόντια.

Σχ. 129

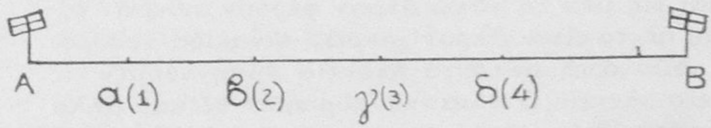
Εἶναι δὲ τὰ ἀκόντια (σχ. 129) ράβδοι ἀπὸ ξύλον, αἱ ὁποῖαι εἰς μὲν τὸ κάτω ἄκρον φέρουν σιδηρὰν αἰχμήν, εἰς δὲ τὸ ἄνω ἄκρον μικρὰν πινακίδα ἐρυθρόλευκον. Δύο ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἀκόντια ἐμπηγνύομεν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ (μᾶς χρειάζονται δὲ καὶ ἄλλα σημεῖα διὰ τὴν χάραξιν), ἐμπηγνύομεν (διὰ τοῦ βοηθοῦ) καὶ ἄλλα ἀκόντια μεταξὺ Α καὶ Β, ἀλλὰ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε, ὅταν σκοπεύωμεν ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὰ ἀκόντια αὐτὰ νὰ καλύπτωνται ἀπὸ τὰς σκοπευτικὰς γραμμάς. Τὰ σημεῖα λοιπόν, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ τῶν ἀκοντίων, εἶναι ἐπάνω εἰς εὐθεῖαν γραμμήν. Ἔχομεν δὲ οὕτω τὴν χάραξιν τῆς εὐθείας.

128. Μέτρησις εὐθείας.—Ἔπειτα ἀπὸ τὴν χάραξιν τῆς εὐθείας ΑΒ ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν μέτρησιν αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο κάμνομεν χρῆσιν μετροταινίας (σχ. 130).



Σχ. 130

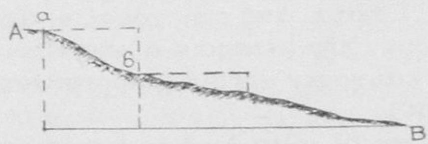
Εἶναι δὲ αὕτη λινὴ ταινία στενὴ μήκους 10, 20 ἢ 25 μέτρων καὶ φέρει ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου. Τυλίσσεται δὲ περὶ ἄξονα καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς θήκης. Διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ταινία, χρειάζονται δύο ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι, ἀφοῦ ξετυλίξουν τὴν ταινίαν, τὴν κρατοῦν τεντωμένην. Καὶ ὁ μὲν εἷς (ὁ μετρητὴς) τοποθετεῖ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ταινίας εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 131), ὁ δὲ ἄλλος (ὁ βοηθὸς) εἰς τὸ σημεῖον τῆς χαραχθείσης εὐθείας, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ταινίας, ἐμπηγνύει βελόνην. Ἔπειτα ὁ μετρητὴς καὶ ὁ βοηθὸς προχωροῦν πρὸς τὸ Β. Ὅταν δὲ ὁ μετρητὴς φθάσῃ εἰς τὴν βελόνην, τοποθετεῖ εἰς αὐτὴν τὸ ἄκρον τῆς ταινίας, ἐνῷ ὁ βοηθὸς κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον σημειώνει δεύτερον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἐξακολουθεῖ δὲ ἡ ἰδία ἐργασία, μέχρις ὅτου ὁ βοηθὸς φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β· ἀλλὰ κατ' αὐτὴν ὁ μετρητὴς ἀφαιρεῖ τὰς βελόνας, ὅταν πρόκειται νὰ ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχουν τοποθετηθῆ.



Σχ. 131

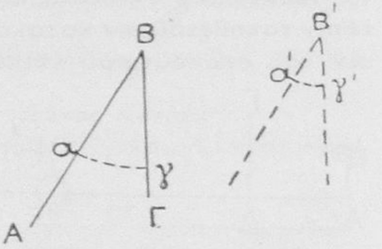
Ἂν τὸ τελευταῖον τμῆμα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς μετροταινίας, ὁ βοηθὸς σημειοῖ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Β. Οὕτως, ἂν τὸ μῆκος τῆς ταινίας εἶναι 10 μ., αἱ βελόναι, τὰς ὁποίας ἀφῄρεσεν ὁ μετρητής, εἶναι 5, τὸ δὲ μῆκος τοῦ τελευταίου τμήματος εἶναι 3,60 μ.· τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι 5.10+3,60=53,60 μ.

Σημείωσις. Ἂν τὸ ἔδαφος εἶναι κεκλιμένον, ἡ μέτρησις τῆς ὁριζοντίου ἀποστάσεως δύο σημείων Α καὶ Β γίνεται κατὰ τμήματα ὁριζόντια, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 132. Κατ' αὐτὴν ἡ μέτρησις γίνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὰ δὲ σημεῖα τοῦ ἐδάφους, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸ πέρας τῆς ταινίας, εὑρίσκονται, ἂν ἀπὸ τὸ πέρας τῆς ταινίας ἀφήσωμεν μικρὸν λίθον νὰ καταπέσῃ.



Σχ. 132

129. Μέτρησις γωνίας.—Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 133), ἡ ὁποία εἶναι χαραγμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μετρήσωμεν. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας τὰ τμήματα Βα καὶ Βγ (συνήθως ἴσα). Κατόπιν μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις Βα, Βγ καὶ αγ, τέλος δὲ κατασκευάζομεν ἐπὶ χάρτου τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Βαγ, τὸ Β΄α΄γ΄· τότε ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν Β΄. Ὥστε, ὅταν μετρήσωμεν τὴν Β,΄ θὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τῆς Β.



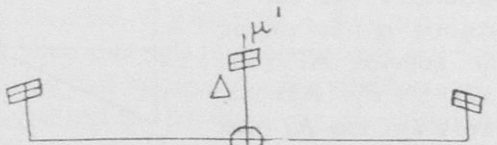
Σχ. 133

130. Ὀρθόγωνον.—Κατὰ τὴν χωρομέτρησιν πολλάκις εἶναι ἀνάγκη νὰ φέρωμεν καθέτους ἐπὶ εὐθείας τοῦ ἐδάφους. Ἀλλὰ διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρειάζεται εἰδικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται **ὀρθόγωνον.** Εἶναι δὲ τοῦτο κοῖλον πρῖσμα μεταλλικόν, μὲ ὀκτὼ ἕδρας καὶ προσαρμόζεται ἐπὶ ράβδου, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς αἰχμὴν (σχ. 134). Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας τοῦ πρίσματος ὑπάρχει σχισμὴ καὶ θυρίς. Κατὰ τὸν ἄξονα δὲ τῆς θυρίδος ὑπάρχει λεπτὸν νῆμα τεντωμένον. Εἶναι δὲ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τοῦτο μὲ τὸν ἄξονα τῆς σχισμῆς τῆς ἀπέναντι ἕδρας νὰ ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον λέγεται **σκοπευτικόν.** Μὲ τὸν τρόπον δὲ αὐτὸν ἠμποροῦμεν νὰ λαμβάνωμεν ἐπίπεδα κατὰ γωνίας 90° καὶ 45°.

Σχ. 134

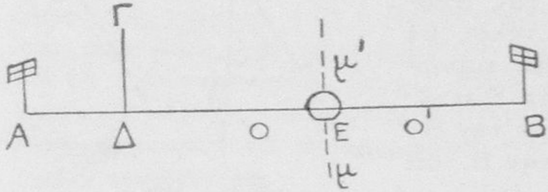
131. Χρῆσις τοῦ ὀρθογώνου. — α΄) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΑΒ διὰ τοῦ σημείου αὐτῆς Γ.

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ ὀρθόγωνον κατακορύφως ἐπὶ τοῦ



Σχ. 135

σημείου Γ (σχ. 135) καὶ στρέφομεν τοῦτο, μέχρις ὅτου ἓν ἀπὸ τὰ σκοπευτικὰ ἐπίπεδα, π.χ. τὸ Ο—Ο΄, διέλθῃ διὰ τοῦ Β. Κατόπιν τοποθετοῦμεν κατακορύφως ἀκόντιον Δ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου μ—μ΄.



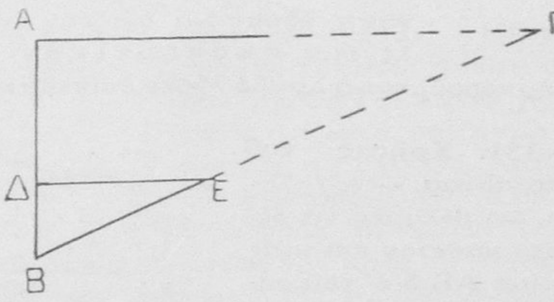
Σχ. 136

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Ο—Ο΄, ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

β΄) Ἔστω τώρα, ὅτι τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ. Τότε τοποθετοῦμεν τὸ ὀρθόγωνον ἐπὶ ἑνὸς σημείου τῆς ΑΒ (σχ. 136), ὁπότε τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Κατόπιν δὲ μετακινοῦμεν τὸ ὄργανον ἐπὶ τῆς ΑΒ, συγχρόνως δὲ σκοπεύομεν μὲ τὸ σκοπευτικόν μας ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ Ο—Ο΄· ὅταν δὲ τοῦτο διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, τὸ σημεῖον Δ τῆς ΑΒ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐτοποθετήθη τὸ ὄργανον, εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

132. Πρόβλημα.—***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις σημείου Α ἀπὸ ἄλλο σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον βλέπομεν, ἀλλ' εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ἠμποροῦμεν νὰ μεταβῶμεν*** (ἀπρόσιτον σημεῖον).

Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους α΄) ἓν μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ (σχ. 137), β΄) τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ γ΄) ἓν μέρος τῆς ΒΓ. Ἔπειτα φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ἐὰν τότε μετρήσωμεν τὰ τμήματα ΑΒ, ΔΒ καὶ ΔΕ, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ζητούμενον.

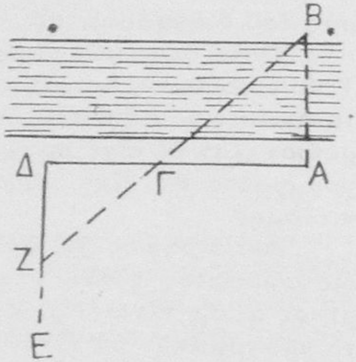


Σχ. 137

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΔΕΒ εἶναι ὅμοια· ἔχομεν λοιπὸν $\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$, ἤτοι $ΑΓ = ΔΕ \times \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$. Οὕτως, ἂν εἶναι ΑΒ=80 μ., ΔΒ=20 μ. καὶ ΔΕ=25 μ., θὰ εἶναι $ΑΓ = 25 \times \frac{80}{20} = 100$ μέτρα.

133. Πρόβλημα.—*Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος ποταμοῦ.*

Πρὸς τοῦτο πλησίον τῆς μιᾶς ὄχθης λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Α (σχ. 138), τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπέναντι ἑνὸς σημείου Β τῆς ἄλλης ὄχθης. Κατόπιν χαράσσομεν ἐπὶ τῆς πρώτης ὄχθης εὐθεῖαν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΒ μήκους π.χ. 30 μέτρων· ἐπὶ δὲ τοῦ σημείου Γ ἐμπηγνύομεν ἀκόντιον· κατόπιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ χαράσσομεν τὴν ΓΔ μήκους 15 μ. (ἢ καὶ 30) καὶ ἔπειτα τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΑ. Τέλος ἐπὶ τῆς ΔΕ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΒΓ. Ἐὰν τώρα μετρήσωμεν τὴν ΔΖ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς ΔΖ (θὰ εἶναι δὲ ἴσον μὲ αὐτό, ἐὰν ἡ ΓΔ εἶναι 30 μ.).



Σχ. 138

ΠΕΡΙ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

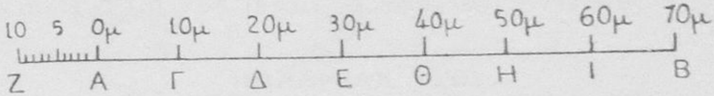
134. Ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.—Ἡ ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων δι' ὁμοίων ἐπὶ χάρτου λέγεται **σχέδιον** ἢ **διάγραμμα.** Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ διαγράμματος πρέπει νὰ εἶναι μικρότεραι τῶν πλευρῶν τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου σχήματος καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν. Δηλαδή, ἂν μία πλευρὰ τοῦ διαγράμματος εἶναι 100 φορὰς μικροτέρα τῆς ὁμολόγου πρὸς αὐτὴν πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ διαγράμματος θὰ εἶναι 100 φορὰς μικρότεραι τῶν πρὸς αὐτὰς ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ σχήματος (ἐνῷ αἱ γωνίαι τῶν σχημάτων αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι). Ὥστε εἰς τὸ ἀνώτερω παράδειγμα ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ διαγράμματος πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ πραγματικοῦ σχήματος εἶναι 1/100, λέγεται δὲ οὗτος **ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.**

Διὰ τὰ διαγράμματα συνήθεις κλίμακες εἶναι αἱ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{50}$ κτλ. Εἶναι δέ, ὅπως βλέπομεν, κλασματικαὶ μονάδες· ὁ παρονομαστὴς δὲ αὐτῶν φανερώνει, πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτεραι αἱ πλευραὶ τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου σχήματος ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ διαγράμματος.

Ὥστε, ὅταν μᾶς εἴπουν, ὅτι ἓν διάγραμμα ἔγινε μὲ κλίμακα 1/50, ἐννοοῦμεν, ὅτι, ἂν τὸ πραγματικὸν μῆκος εἶναι 50 μέτρα, τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ μῆκος 50:50=1 μέτρον· ἐὰν δὲ εἶχε πραγματικὸν μῆκος 5 μέτρων, ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ εἶχε μῆκος 5:50=0,1 τοῦ μέτρου, ἤτοι μίαν παλάμην.

Ἀντιστρόφως δέ, ἂν τὸ μῆκος μιᾶς εὐθείας γραμμῆς τοῦ διαγράμματος εἶναι 1 μέτρον, τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος αὐτῆς εἶναι 1 μ. × 50=50 μέτρα· ἂν δὲ εἶναι 0,5 μέτρα, τὸ πραγματικὸν θὰ εἶναι 0,5 μ. × 50=25 μέτρα.

135. Γραφικὴ κλῖμαξ.—Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίματος ἀπαιτεῖ ὑπολογισμούς διὰ νὰ ἀποφύγωμεν αὐτούς,



Σχ. 139

χρησιμοποιοῦμεν μίαν ἄλλην κλίμακα, ἡ ὁποία λέγεται **γραφική.** Μὲ τὴν γραφικὴν κλίμακα εὑρίσκομεν τὰ πραγματικὰ μήκη μὲ ἓν ἁπλοῦν ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου.

Ἡ γραφικὴ κλῖμαξ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη. Εἰς τὴν γραφικὴν κλίμακα, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχ. 139, τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ κτλ. ἔχουν μῆκος 0,01 μ. καὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς πραγματικὰ μήκη 10 μέτρων.

Ἑπομένως ἡ γραφικὴ αὐτὴ κλῖμαξ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν 1/1000 (διότι 0,01:10=0,001). Εἰς αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα ΑΖ εἶναι διῃρημένον εἰς 10 ἴσα μέρη· ὥστε κάθε μέρος αὐτοῦ παριστᾷ πραγματικὸν μῆκος 1 μέτρου.

Ἐὰν τώρα θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων Α καὶ Β ἑνὸς διαγράμματος (ὑπὸ κλίμακα 0,001), ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Θέτομεν πρῶτον τὰ δύο σκέλη τοῦ διαβήτου εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Κατόπιν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου (χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸ ἄνοιγμά του) τὸ θέτομεν εἰς μίαν διαίρεσιν τῆς γραφικῆς κλίμακος, ἀλλ' εἰς τοιαύτην (διαίρεσιν), ὥστε τὸ ἄλλο σκέλος νὰ πέσῃ εἰς τὸ τμῆμα ΑΖ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος)· ἂν δὲ τὸ πρῶτον σκέλος πέσῃ εἰς τὴν διαίρεσιν 80, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὴν τετάρτην διαίρεσιν τοῦ τμήματος ΑΖ, τότε τὸ πραγματικὸν μῆκος θὰ εἶναι 84 μέτρα.

136. Κατασκευὴ διαγραμμάτων.—α') ***Τριγώνου.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα μιᾶς ἐπιπέδου ἐκτάσεως τοῦ ἐδάφους μὲ σχῆμα τριγωνικὸν ὑπὸ κλίμακα π.χ. 1 : 1000. Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν πρῶτον τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος. Ἔστω δέ, ὅτι εὕρομεν 50 μ., 80 μ., 70 μ. Κατόπιν δὲ διαιροῦμεν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εὕρομεν, διὰ τοῦ 1000, ὁπότε εὑρίσκομεν τὰ πηλίκα 0,05 μ. 0,08 μ., 0,07 μ. Ἐὰν τώρα κατασκευάσωμεν τρίγωνον αβγ μὲ πλευρὰς ἴσας πρὸς 0,05 μ., 0,08 μ. καὶ 0,07 μ., τοῦτο θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

β') ***Οἱουδήποτε πολυγωνικοῦ εὐθυγράμμου σχήματος.*** Διαιροῦμεν τοῦτο πρῶτον διὰ διαγωνίων εἰς τρίγωνα. Ἔπειτα μετροῦμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαγωνίους καὶ τέλος κατασκευάζομεν ὑπὸ δοθεῖσαν κλίμακα κατὰ σειρὰν συνεχόμενα τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἐλάβομεν διὰ τῆς διαιρέσεως.

Κατωτέρω καὶ ὑπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 140 καὶ 141 δίδομεν διαγράμματα ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα.

Ἀσκήσεις.

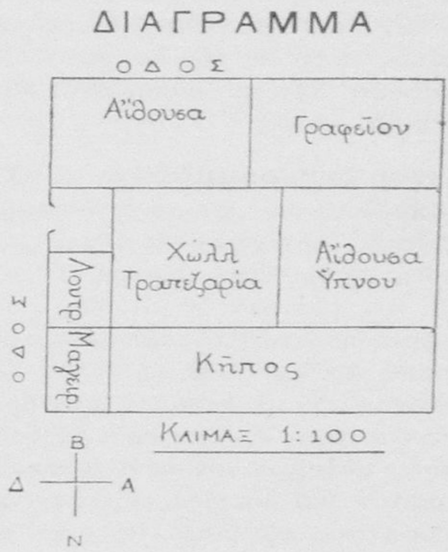
258) Κατασκευάσατε εὐθείας 10, 15, 50 μέτρων ὑπὸ κλίμακα 1/100, 1/200, 1/500.

259) Κατασκευάσατε τὸ διάγραμμα τοῦ δωματίου σας, τῆς αὐλῆς, τοῦ κήπου τοῦ σχολείου σας κτλ. ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα.

260) Ἀπὸ τὰ διαγράμματα ὑπ' ἀριθ. 140 καὶ 141 εὕρετε τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν διαστάσεών των ἢ τῶν ἀποστάσεων διαφόρων σημείων των.

261) Ἀπὸ τὸ σχεδιάγραμμα τῆς πόλεώς σας εὕρετε τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν διαφόρων ὁδῶν αὐτῆς.

262) Ἐκ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου τῆς Ἑλλάδος, τὸν ὁποῖον



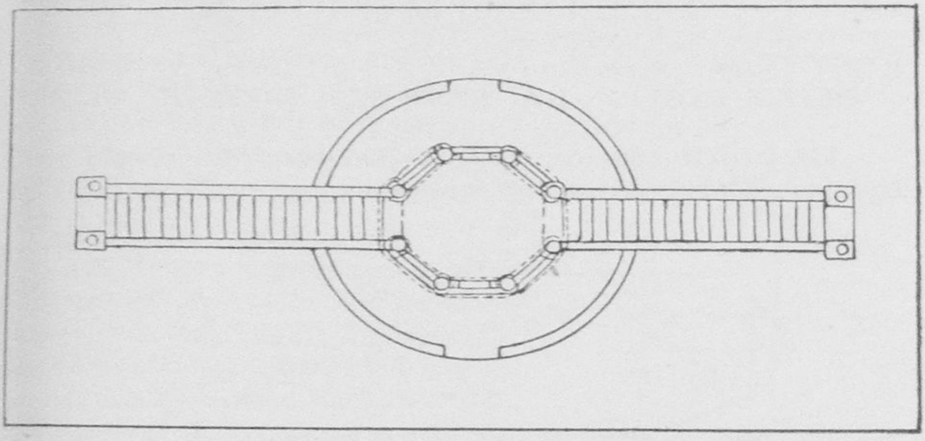
Σχ. 140

ἔχετε, εὕρετε τὰς πραγματικὰς ἀποστάσεις διαφόρων πόλεων αὐτῆς.

263) Σχέδιον κεντήματος ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 0,1 μ. καὶ 0,08 μ. Θέλει δὲ μία ἐπὶ τοῦ σχεδίου αὐτοῦ νὰ κεντήσῃ ἓν τραπεζομάνδηλον μὲ διαστάσεις 10 φορὰς μεγαλυτέρας τῶν διαστάσεων τοῦ σχεδίου. Ποίας διαστάσεις θὰ ἔχῃ τὸ τραπεζομάνδηλον καὶ πόσας φορὰς θὰ γίνουν μεγαλύτεραι

αἱ γραμμαὶ τοῦ σχεδίου; Ποία θὰ εἶναι τότε ἡ κλῖμαξ τοῦ σχεδίου;

264) Οἱ ράπται καὶ συνηθέστερον αἱ ράπτριαι καὶ οἱ ὑποδηματοποιοὶ κατασκευάζουν πρῶτον τὰ σχέδια τῶν φορεμάτων καὶ ὑποδημάτων ἐπὶ χάρτου εἰς φυσικὸν μέγεθος (δηλαδὴ ἀχνά-



Σχ. 141 Κλῖμαξ 1 : 250

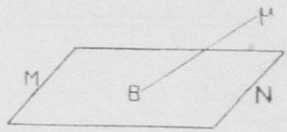
ρια) καὶ ἔπειτα κόπτουν τὰ ὑφάσματα ἢ τὰ δέρματα. Εἶναι δὲ τὰ «ἀχνάρια» αὐτὰ μεγεθύνσεις ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα σχεδίων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκουν συνήθως εἰς εἰδικὰ περιοδικά. Ἐκ τοιούτων σχεδίων κατασκευάσατε τὰ ἀχνάρια φορεμάτων ἢ ὑποδημάτων.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

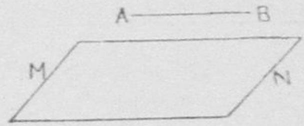
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

137. Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.—Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατόν: α′) Νὰ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (§ 18, 1, σ. 12). β′) Νὰ

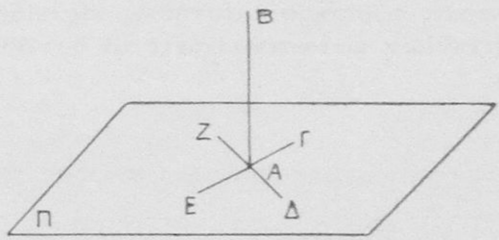


Σχ. 142



Σχ. 143

συναντᾷ (τέμνῃ) αὐτό. Τέμνει δὲ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον (σχ. 142). γ′) Νὰ μὴ τὸ συναντᾷ, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον (σχ. 143). Λέγονται δὲ τότε ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον **π α ρ ά λ λ η λ α.**

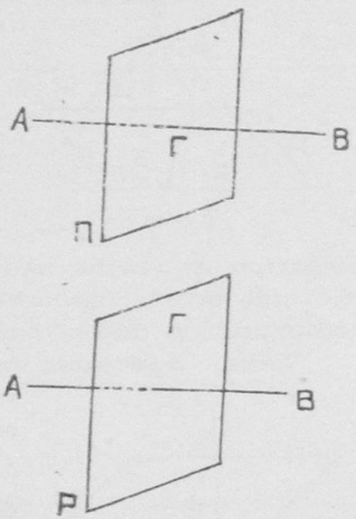


Σχ. 144

138. Ὅταν μία εὐθεῖα τέμνῃ ἓν ἐπίπεδον, εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό. Εὐθεῖα δὲ λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς (σχ. 144) (καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται τότε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν).

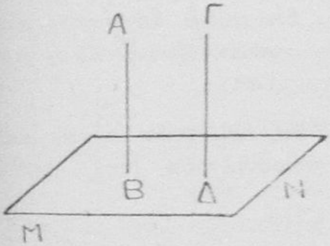
Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν μία εὐθεῖα, π.χ. ἡ ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον Π, γράφομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο μόνον εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ, καὶ ἂν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ εἶναι ὀρθαί, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἄλλως τε εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ σχηματίζει μὲ οἱανδήποτε ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Α ὀρθὴν γωνίαν.

139. Ὅταν μία εὐθεῖα δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, εἶναι πλαγία πρὸς αὐτὸ (σχ. 142). Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος ἢ ἡ πλαγία τέμνει τὸ ἐπίπεδον, λέγεται **ποὺς** τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας.



Σχ. 145

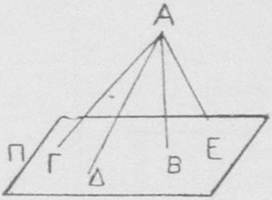
140. Ἐὰν ἔχωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ σημεῖον τι αὐτῆς Γ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Γ. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν καὶ διὰ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας (σχ. 145). Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ***ἓν ἐπίπεδον μόνον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν.***



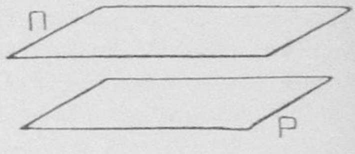
Σχ. 146

141. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς δοθέντος ἐπιπέδου ἢ ἐπ' αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ μίαν μόνον. Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἀπὸ δύο διάφορα σημεῖα καθέτους ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ δύο αὗται κάθετοι εἶναι **παράλληλοι** (σχ. 146).

142. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Π καὶ Α σημεῖον τι ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὰς πλαγίας ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κτλ. (σχ. 147), ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι



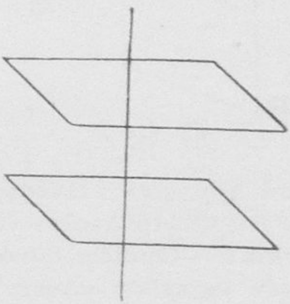
Σχ. 147



Σχ. 148

μικροτέρα ἀπὸ κάθε πλαγίαν ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κλπ. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τῆς καθέτου ἡ ΑΒ ὁρίζει τὴν ἀ π ό σ τ α σ ι ν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ὥστε: ***Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς τὸ ἐπίπεδον.***



Σχ. 149

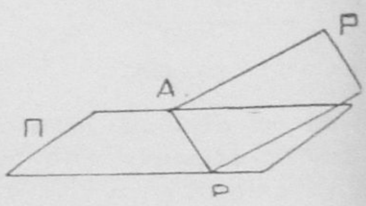
143. Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.—Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου καὶ ἡ ὀροφὴ αὐτοῦ, ὅσον καὶ ἂν τὰ φαντασθῶμεν αὐξανόμενα, δὲν συναντῶνται. Λέγονται δὲ π α ρ ά λ λ η λ α.

Ὥστε: ***Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἐὰν δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν αὐξηθοῦν*** (σχ. 148).

144. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλα*** (σχ. 149).

145. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου καὶ εἷς τοῖχος αὐτοῦ τέμνονται. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ὅθεν: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ*** (σχ. 150).

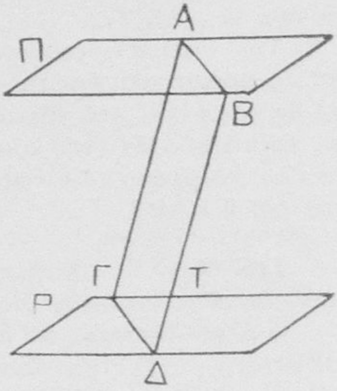


Σχ. 150

146. Τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τῆς ὀροφῆς καὶ τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου τέμνονται ὑφ' ἑνὸς τοίχου κατὰ εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι.

Ὅθεν: ***Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.***

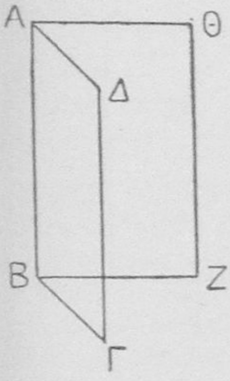
Οὕτως αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΔΓ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα τέμνονται ὑπὸ τοῦ Τ, εἶναι παράλληλοι (σχ. 151).



Σχ. 151

147. Εἰς τὸ σχῆμα 151 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν παραλλήλων αὐτῶν τέμνει τὰ ἐπίδεδα Π καὶ Ρ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι.

Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ***παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσαι.***



Σχ. 152

148. Ἐὰν ἔχωμεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἶναι αὕτη κάθετος καὶ εἰς τὸ ἄλλο. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν πολλὰς καθέτους μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, αὗται εἶναι ἴσαι μεταξύ των (§ 147). Μίαν δὲ τῶν καθέτων τούτων ὀνομάζομεν ***ἀπόστασιν*** τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

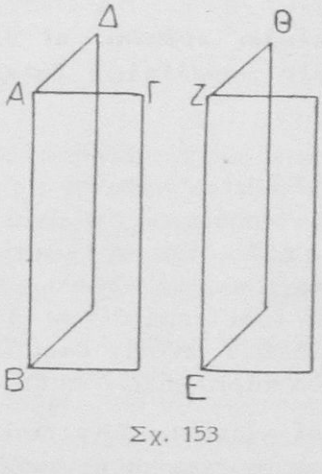
149. Δίεδροι γωνίαι.—Ἂν διπλώσωμεν ἓν φύλλον χάρτου καὶ τὸ ἡμιανοίξωμεν ἔπειτα, τὸ σχῆμα (σχ. 152), τὸ ὁποῖον γίνεται, λέγεται δ ί ε δ ρ ο ς γ ω ν ί α.

῞Οθεν: ***Δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον κάμνουν δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνονται καὶ τελειώνουν εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.*** Ἡ τομὴ (ΑΒ) τῶν δύο ἐπιπέδων λέγεται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ δύο ἐπίπεδα (ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΖΘ), τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν δίεδρον γωνίαν, λέγωνται ἕδραι αὐτῆς.

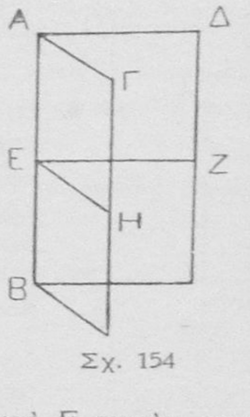
Τὴν δίεδρον γωνίαν παριστῶμεν μὲ δύο γράμματα, τὰ ὁποῖα γράφονται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἢ καὶ μὲ τέσσαρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἓν γράφεται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας, τὸ ἄλλο ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ τὰ λοιπὰ δύο ἐπὶ τῆς ἀκμῆς (τὰ γράμματα ἐπὶ τῆς ἀκμῆς θέτομεν εἰς τὸ μέσον). Οὕτως ἡ δίεδρος γωνία τοῦ σχ. 152 σημειοῦται ΑΒ ἢ ΓΑΒΖ.

150. Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι ἠμποροῦν νὰ τεθοῦν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ κάμουν μίαν μόνην, λέγονται ἴσαι.

Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν δύο δίεδροι γωνίαι, π.χ. αἱ ΔΑΒΓ καὶ ΘΖΕΗ (σχ. 153) εἶναι ἴσαι, ἐφαρμόζομεν τὴν ἀκμὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΖΕ καὶ τὴν ἕδραν ΓΑΒ ἐπὶ τῆς ΗΖΕ. Ἐὰν δὲ καὶ ἡ ἕδρα ΔΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΘΖΕ, αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἄλλως εἶναι ἄνισοι.



Σχ. 153



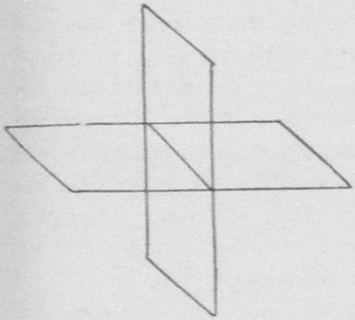
Σχ. 154

151. Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΔΑΒΓ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς ΑΒ (σχ. 154).

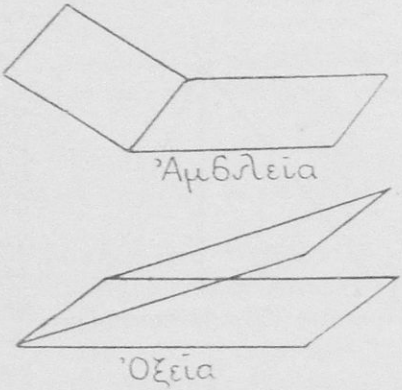
'Εὰν εἰς τὸ σημεῖον Ε τῆς ΑΒ φέρωμεν τὴν κάθετον ΕΖ, ἡ ὁποία νὰ κεῖται εἰς τὴν ἕδραν ΔΑΒ, καὶ τὴν κάθετον ΕΗ, ἡ ὁποία νὰ κεῖται εἰς τὴν ἕδραν ΓΑΒ, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΖΕΗ λέγεται ἀντίστοιχος γωνία τῆς διέδρου ΔΑΒΓ.

'Εὰν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον.

'Εὰν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου εἶναι π.χ. 30° λέγομεν, ὅτι καὶ ἡ δίεδρος γωνία εἶναι 30°. Ἤτοι ἡ ἐπίπεδος



Σχ. 155



Σχ. 156

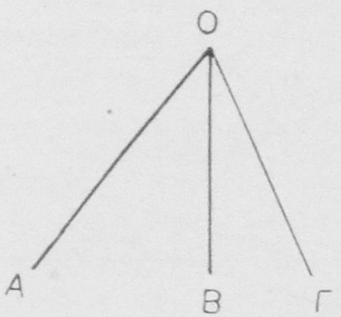
γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν δίεδρον, μετρεῖ τὴν δίεδρον αὐτήν.

152. 'Εὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται καὶ σχηματίζουν, ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς εὐθείας, τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας, λέγονται κάθετα πρὸς ἄλληλα (σχ. 155). Τότε αἱ δίεδροι γωνίαι λέγονται ὀρθαί.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ τοίχου ἑνὸς δωματίου καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἡ δὲ δίεδρος γωνία αὐτῶν εἶναι ὀρθή. 'Η ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντίστοιχος ὀρθῆς διέδρου, εἶναι ὀρθή. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντίστοιχος διέδρου, εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ δίεδρος εἶναι ὀρθή.

153. Ἐὰν μία δίεδρος γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς, λέγεται **ἀμβλεῖα**, ἐὰν δὲ εἶναι μικροτέρα αὐτῆς, λέγεται ὀξεῖα (σχ. 156).

154. Στερεαὶ γωνίαι.— Ἂν προσέξωμεν τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἀνὰ τρεῖς διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κορυφὴ τοῦ κύβου. Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τρεῖς τοιαῦται ἕδραι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ δίδουν τρεῖς ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν τρεῖς τοιαῦται ἕδραι, δηλαδὴ τρία τοιαῦτα ἐπίπεδα, λέγεται **στερεὰ γωνία** (τρίεδρος).



Σχ. 157

Ὁμοίως καὶ τέσσαρα ἢ περισσότερα ἐπίπεδα ἠμποροῦν νὰ σχηματίζουν στερεὰν γωνίαν (τετράεδρον κτλ.). Θὰ σχηματίζουν δὲ στερεὰν γωνίαν, ὅταν ὅλα διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τελειώνῃ τὸ καθὲν εἰς τὰς δύο εὐθείας, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνεται ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπὸ τὰ δύο μέρη του.

Αἱ εὐθεῖαι, εἰς τὰς ὁποίας τέμνονται αἱ ἕδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας, λέγονται **ἀκμαὶ** αὐτῆς, καὶ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται ὅλαι αἱ ἀκμαί, λέγεται **κορυφὴ** τῆς στερεᾶς γωνίας. Τὸ σχῆμα (157) ΟΑΒΓ παριστᾷ τρίεδρον στερεὰν γωνίαν, τῆς ὁποίας κορυφὴ εἶναι τὸ Ο, ἕδραι τὰ ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΑΒΓ, ΟΑΓ καὶ ἀκμαὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

Ἀσκήσεις.

265) Λάβετε κύβον καὶ δείξατε εὐθείας καθέτους πρὸς ἐπίπεδον καὶ παραλλήλους πρὸς ἐπίπεδον.

266) Λαμβάνομεν ἓν φύλλον χάρτου, τοῦ ὁποίου, μίαν τῶν εὐθειῶν, εἰς τὰς ὁποίας τελειώνει, σημειοῦμεν ΑΒ. Κατόπιν, ἀφοῦ λάβωμεν ἓν σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ, διπλώνομεν τὸ φύλλον

οὕτως, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ, ἔστω δὲ ΓΔ ἡ εὐθεῖα, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐδιπλώθη τὸ φύλλον. Ἔπειτα τὸ ἀνοίγομεν ὀλίγον καὶ θέτομεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΓΒ ἐπὶ τῆς τραπέζης. Πῶς διευθύνεται ἡ ἀκμὴ ΓΔ πρὸς τὴν τράπεζαν;

267) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ εὕρετε, πῶς τέμνεται καθὲν τῶν ἐπιπέδων ΔΓΒ καὶ ΔΓΑ μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς τραπέζης.

268) Πόσας διέδρους γωνίας σχηματίζουν οἱ τοῖχοι, τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ ἑνὸς δωματίου;

269) Τί δίεδροι γωνίαι εἶναι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κύβου;

270) Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐφεξῆς ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ τῶν κατὰ κορυφήν, νὰ ὁρίσετε τὰς διέδρους γωνίας, τὰς ἐφεξῆς καὶ τὰς κατὰ κορυφήν.

271) Αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

272) Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

273) Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν;

274) Ἐπὶ ἑνὸς χαρτονίου χαράσσομεν δύο εὐθείας ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ, τεμνομένας καθέτως. Ἔπειτα ἀποκόπτομεν διὰ ψαλίδος μίαν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, π.χ. τὴν ΓΟΑ, καὶ διπλώνομεν ἔπειτα τὰ μέρη τοῦ ἀπομένοντος χαρτονίου κατὰ τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΔ, μέχρις ὅτου αἱ ΟΑ καὶ ΟΓ ἐφαρμόσουν. Τότε σχηματίζεται μία τρίεδρος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ δίεδροι καὶ ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία**.

Εἰς ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα βλέπετε ἢ τὰ ὁποῖα ἔχετε, δείξατε τοιαύτας γωνίας.

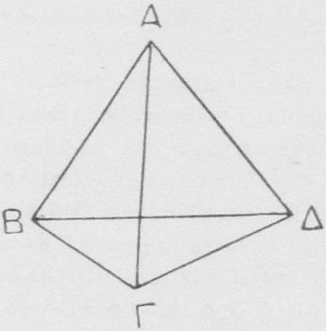
ΠΟΛΥΕΔΡΑ

155. Ὁ κύβος (εἰκ. 1, σ. 6) εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον τελειώνει πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα ἢ ἕδρας. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **πολύεδρον.**

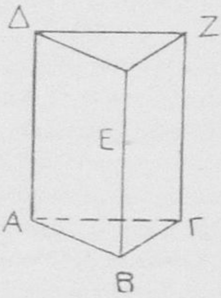
Ὥστε: ***Πολύεδρον λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον τελειώνει πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα.***

Ἂν αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι τέσσαρες, λέγεται **τετράεδρον** (σχ. 158), ἂν πέντε **πεντάεδρον** (σχ. 159) κ.ο.κ.

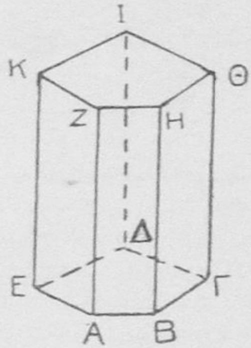
Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ καὶ **κορυφαὶ** αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν του. **Ἀκμαὶ ἢ πλευραὶ** τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του.



Σχ. 158



Σχ. 159



Σχ. 160

156. Πρίσματα.—Τὸ σχῆμα 160 παριστᾷ πολύεδρον. Παρατηροῦμεν ὅμως εἰς αὐτό, ὅτι αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι, ὡς αἱ ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ κτλ., εἶναι ὅλαι παραλληλόγραμμα. Τὰ πολύεδρα, τὰ ἔχοντα τοιαύτην κατασκευήν, λέγονται **πρίσματα.**

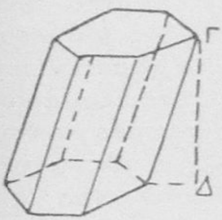
Ὅθεν: ***Πρῖσμα λέγεται στερεόν, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὅλαι δὲ αἱ ἄλλαι παραλληλόγραμμα.***

Ὁ ἄνθρωπος εἰς πολλὰ ἀντικείμενα δίδει τὸ σχῆμα πρίσματος. Π.χ. τὰ πολυεδρικὰ μολυβδοκόνδυλα ἔχουν σχῆμα πρίσματος.

Αἱ δύο ἕδραι τοῦ πρίσματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, λέγονται **β ά σ ε ι ς** αὐτοῦ.

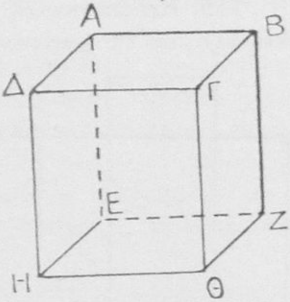
Ἐὰν τώρα φέρωμεν εὐθείας καθέτους μεταξὺ τῶν δύο (παραλλήλων) βάσεων τοῦ πρίσματος, αἱ κάθετοι αὗται εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Μία δὲ ἀπὸ τὰς καθέτους αὐτὰς λέγεται ὕψος τοῦ πρίσματος. Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνον, τὸ πρῖσμα τοῦτο λέγεται **τ ρ ι γ ω ν ι κ ό ν**, **τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ὸ ν** δέ, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τετράπλευρον κ.ο.κ.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πρῖσμα, λαμβάνομεν τυχὸν πολύγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 160) καὶ φέρομεν ἀπὸ τὰς κορυφὰς αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ, ΕΚ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ὅλα ἐπάνω εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ. Τὸ στερεὸν δέ, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ καὶ εἰς τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΗΖ κτλ., θὰ εἶναι πρῖσμα.



Σχ. 161

Εἰς τὸ πρῖσμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχ. 160, αἱ ἀκμαὶ ΑΖ, ΒΗ κτλ. εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, λέγεται δὲ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ πρῖσμα τοῦτο **ὀ ρ θ ό ν**.



Σχ. 162

Ὥστε: ***Ὀρθὸν λέγεται τὸ πρῖσμα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Ἐὰν δὲ δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, τὸ πρῖσμα λέγεται πλάγιον.***

Τὸ σχῆμα 161 παριστᾷ πλάγιον πρῖσμα. Ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΔ, κάθετος μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του.

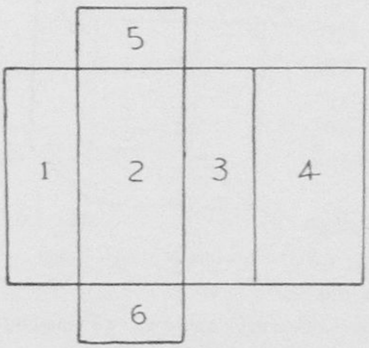
157. Τὸ πρῖσμα ΕΓ (σχ. 162) παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας αὐτοῦ **π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ α**. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **παραλληλεπίπεδον.** Εἶναι δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον **ἑξάεδρον.**

Τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθὸν καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας αὐτοῦ ὀρθογώνια, λέγεται **ὀρθογώνιον** παραλληλεπίπεδον. Τὰ κυτία τῶν σπίρτων, ὅπως εἴπομεν καὶ προηγουμένως, ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἐὰν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχῃ ὅλας τὰς ἕδρας του τετράγωνα, λέγεται κύβος ἢ κανονικὸν ἑξάεδρον.

158. Ἰδιότης τοῦ παραλληλεπιπέδου.—Θέτομεν ἐπὶ μιᾶς ἕδρας παραλληλεπιπέδου ἓν φύλλον χάρτου καὶ χαράσσομεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας. Ἐὰν κατόπιν τὸ σχῆμα τοῦτο θέσωμεν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτῆς. Ὅθεν: ***Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι*** (εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι). Ἕνεκα δὲ τούτου ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύο οἱασδήποτε ἀπέναντι ἕδρας.

159. Κατασκευὴ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.—Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου σχῆμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ὀρθογώνια ἴσα καὶ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἔπειτα χαράσσομεν διὰ μαχαιρίου καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ μεσαίου ὀρθογωνίου καὶ διπλώνομεν κατὰ τὰς πλευρὰς ταύτας, τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ σχήματος, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν, σχηματίζεται δὲ οὕτως ἓν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (σχ. 159).



Σχ. 163

160. Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.—Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τὸ σχῆμα 163, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ὀρθογώνια, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 1 καὶ 3 εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἐπίσης ἴσα μεταξύ των εἶναι τὰ 2 καὶ 4, ὡς καὶ τὰ 5 καὶ 6. Ἔπειτα χαράσσομεν διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου 2 καὶ τοῦ 3 καὶ διπλώνομεν τὰ μέρη κατὰ τὰς χαραχθείσας γραμμάς, ὁπότε θὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Σημείωσις.—Ἐὰν τὸ σχῆμα 163 ἀποτελῆται ἀπὸ ἓξ τετράγωνα ἴσα, θὰ σχηματισθῇ κατὰ τὸν ἄνω τρόπον κύβος.

Ἀσκήσεις.

275) Τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα πόσας ἕδρας ἔχει, πόσας στερεὰς γωνίας, πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμάς;

276) Τὸ παραλληλεπίπεδον πόσας κορυφάς, πόσας στερεὰς γωνίας καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει;

277) Αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια. Ὀρθὸν εἶναι τὸ πρῖσμα τοῦτο ἢ πλάγιον;

278) Ποῖαι εἶναι αἱ ὁμοιότητες μεταξὺ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ ποῖαι αἱ διαφοραί;

279) Πόσαι ἀκμαὶ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον;

280) Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας, λέγεται διαγώνιος αὐτοῦ. Πόσας διαγωνίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς ἓν παραλληλεπίπεδον;

281) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα, ἔχον βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,02 μ. καὶ ὕψος 0,2 μ.

282) Ὁμοίως κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἔχον βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,03 μ. καὶ ὕψος 0,15 μ., ὡς καὶ μίαν κυβικὴν παλάμην.

161. Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.—Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρῖσμα ΘΕ (σχ. 160). Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ σχηματισθῇ ἓν ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦτο θὰ ἔχῃ βάσιν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Οὕτως, ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 2 μέτρων καὶ τὸ ὕψος εἶναι 5 μ., τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἐμβαδὸν εἶναι $12 \times 5 = 60$ τ. μ.

Ἂν ἡ περίμετρος τῆς βάσεως παρασταθῇ μὲ τὸ γράμμα Π καὶ τὸ ὕψος διὰ τοῦ υ, ἔχομεν ἐμβ. παρ. ἐπιφ. = Π. υ.

Σημείωσις.—Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος προσθέσωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μιᾶς βάσεώς του, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.

Ἀσκήσεις.

283) Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 3,5 μ. καὶ ὕψος 1,9 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

284) Δοχεῖον πρισματικὸν ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,45 μέτρα, τὸ ὕψος δὲ αὐτοῦ εἶναι 0,86 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του;

285) Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 1 μέτρου. Τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 4,75 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

286) Αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ὀρθοῦ πενταγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 2 μ., 2,75 μ., 1,60 μ., 3 μ., 3,25 μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

287) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 0,25 μ.

288) Αἱ βάσεις ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνα ὀρθογώνια μὲ πλευρὰς ἕκαστον 2, 4, 5 μέτρα, τὸ ὕψος δὲ αὐτοῦ εἶναι 2 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

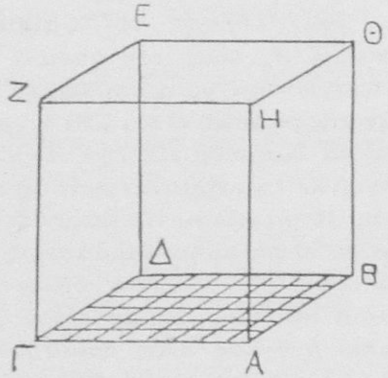
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

162. Μονάδες ὄγκου.—Ὡς μονὰς ὄγκου τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν ἴσην μὲ ἓν μέτρον καὶ λέγεται κυβικὸν μέτρον.

Ἂν ὁ κύβος ἔχῃ ἀκμὴν ἴσην μὲ μίαν παλάμην ἢ μὲ ἕνα δάκτυλον ἢ μὲ μίαν γραμμήν, λέγεται κυβικὴ παλάμη ἢ κυβικὸς δάκτυλος ἢ κυβικὴ γραμμή. Δυνάμεθα δὲ νὰ μετρήσωμεν στερεὰ καὶ μὲ κυβικὰς παλάμας ἢ καὶ μὲ κυβικοὺς δακτύλους ἢ καὶ μὲ κυβικὰς γραμμάς.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν στερεοῦ, λέγεται ὄγκος αὐτοῦ.

163. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.—Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΔΗ, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις (σχ. 164) εἶναι τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν, π.χ. αἱ ΔΒ (μῆκος), ΔΓ (πλάτος) καὶ ΔΕ (ὕψος). Ἂς ὑποτεθῇ δέ, ὅτι εἶναι (ΔΒ) = 8 δάκτυλοι, (ΔΓ) = 6 δ. καὶ (ΔΕ) = 12 δ. Τώρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ αἱ διαστάσεις τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 8 δ. καὶ 6 δ., τὸ γινόμενον αὐτῶν 8×6=48, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τετρ. δακτύλους, φανερώνει, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ τοποθετήσωμεν ἐπάνω εἰς αὐτὴν (τὴν βάσιν) ἓν στρῶμα ἀπὸ 48 κυβικοὺς δακτύλους. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 12 δάκτυλοι, ἕπεται, ὅτι τοῦτο χωρεῖ 12 τοιαῦτα στρώματα, ἤτοι, ὅτι χωρεῖ τοῦτο ἐν ὅλῳ 48×12=576 κυβ. δακτύλους. Ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ εἶναι 576 κυβ. δάκτυλοι = 8×6×12.



Σχ. 164

Ὅθεν: ***Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ.***

Ἐπειδὴ δὲ 8×6×12=48×12, ὁ δὲ 48 παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἔπεται, ὅτι ὁ ἀνωτέρω ὄγκος ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, διὰ τὸν ὄγκον αὐτοῦ Ο ἔχομεν $O = \alpha \times \beta \times \gamma$ ἢ $O = (\alpha \times \beta) \times \gamma$.

164. Ὄγκος τοῦ κύβου.—Ἐὰν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι α, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἤτοι $O = \alpha^3$. Ὥστε, ἐὰν $\alpha = 2$ μέτρα, ἔχομεν $O = 2^3 = 8$ κυβικὰ μέτρα. Καὶ ἐὰν $\alpha = 10$ παλ., ἔχομεν $O = 10^3 = 1000$ κυβικαὶ παλάμαι. Καὶ ἂν $\alpha = 10$ δάκτυλοι, ἔχομεν $O = 1000$ κυβ. δάκτυλοι. Ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 κυβ. παλάμας καὶ ἡ κυβικὴ παλάμη εἰς 1000 κυβ. δακτύλους.

165. Ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.—Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρῖσμα (σχ. 160), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 750 τετραγωνικαὶ γραμμαὶ καὶ τὸ ὕψος 50 γραμμαί. Ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 750 τ. γραμμαί, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 750 τετράγωνα, καθὲν τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ πλευρὰν 1 γραμμήν. Τώρα ἂς φαντασθῶμεν, ὅτι θέτομεν ἐπὶ ἑκάστου τετραγώνου τὴν βάσιν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ὕψους 50 γραμμῶν καὶ βάσεως 1 τετρ. γραμμῆς. Ἀλλὰ τότε εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὄγκος ὅλων τῶν 750 παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα θὰ θέσωμεν, θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πρίσματος. Ἀλλ' ὁ ὄγκος ἑνὸς τοιούτου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 1×50 κυβ. γραμμαὶ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος τῶν παραλληλεπιπέδων, δηλαδὴ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, εἶναι 50×750 κυβ. γραμμαί.

Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ***ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.*** Ἤτοι, ἂν β εἶναι τὸ ἐμβαβὸν τῆς βάσεώς του καὶ υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι β.υ.

Σημείωσις.—Ἡ διαίρεσις τῆς βάσεως εἰς τετράγωνα ἴσα γίνεται μὲ τόσον μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, ὅσον ἡ πλευρὰ τῶν τετραγώνων εἶναι μικροτέρα.

166. Ὄγκος πλαγίου πρίσματος.—Κατασκευάζομεν δύο δοχεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν βάσεις καὶ ὕψη ἴσα, ἀλλὰ τὸ μὲν ἓν ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος, τὸ δὲ ἄλλο πλαγίου. Ἂν ἔπειτα γεμίσωμεν αὐτὰ μὲ ὕδωρ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὸ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα πλαγίου πρίσματος, χωρεῖ τόσον ὕδωρ, ὅσον χωρεῖ καὶ τὸ ἄλλο, ἤτοι ἔχουν τὰ δοχεῖα αὐτὰ ἴσους ὄγκους. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ***ὁ ὄγκος ἑνὸς πλαγίου πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Ἀσκήσεις.

289) Εἷς τοῖχος ἔχει 12 μέτρα μῆκος, 0,75 μ. πάχος καὶ 3 μ. ὕψος. Πόσων κυβικῶν μέτρων ὄγκον ἔχει;

290) Τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 0,25 μ. καὶ ἡ βάσις του εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,06 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

291) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι $3\frac{1}{2}$ παλάμαι.

292) Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ μία δεξαμενή, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον μήκους 15 μ. καὶ πλάτους 4 μ., ὅταν τὸ βάθος της εἶναι $6\frac{1}{2}$ μέτρα;

293) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι 8 τετρ. παλάμαι καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

294) Πλαγίου πρίσματος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 2,50 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

295) Ἔχει τις μεταλλικὴν πλάκα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,2 μ., 0,8 μ., 1,5 μ., θέλει δὲ νὰ διαιρέσῃ αὐτὴν εἰς κύβους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ ἀκμὴν 0,02 μ. Εἰς πόσους τοιούτους κύβους θὰ διαιρεθῇ ἡ πλάξ;

296) Μία δεξαμενὴ σχήματος ὀρθοῦ πρίσματος χωρεῖ 3600 κυβικὰ μέτρα ὕδατος, τὸ δὲ βάθος της εἶναι $4\frac{1}{2}$ μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

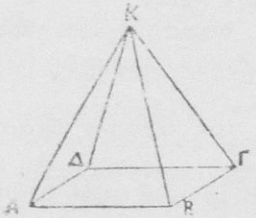
297) Μία δεξαμενὴ ἔχει τὸ σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος μὲ πυθμένα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 3 μέτρα, τὸ βάθος της εἶναι 2 μέτρα καὶ χωρεῖ 30000 κυβικὰς παλάμας ὕδατος. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ πυθμένος της;

298) Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 8,5 δακτύλων καὶ ἡ βάσις

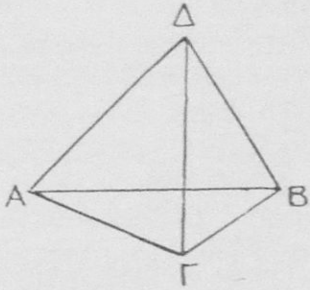
του εἶναι τρίγωνον περιμέτρου 16,4 δακτύλων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

167. Ὁρισμοί.—Τὸ πολύεδρον ΚΑΒΓΔ (σχ. 165) ἔχει 5 ἕδρας. Ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ τετρα-



Σχ. 165



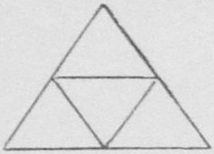
Σχ. 165

πλεύρου ΑΒΓΔ, κορυφὴν δὲ κοινήν, τὴν Κ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Τὸ πολύεδρον τοῦτο λέγεται **πυραμίς**.

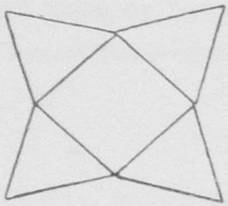
Βάσις τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ τὸ σημεῖον Κ καὶ **ὕψος** ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος. Ἡ πυραμίς, ἐὰν ἔχῃ βάσιν **τρίγωνον**, λέγεται τριγωνική, **τετραγωνικὴ** δέ, ἐὰν ἔχῃ βάσιν **τετράπλευρον** κ.ο.κ. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς (σχ. 166) εἶναι τετράεδρον, δύναται δὲ οἱαδήποτε ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις της.

Ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἡ πυραμὶς λέγεται **κανονική**.

168. Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδος.—Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον ἰσόπλευρον (σχ. 167) καὶ ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὁπότε διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς 4 ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἐὰν κατόπιν χαράξωμεν διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ κεντρικοῦ τριγώνου καὶ διπλώσωμεν τὰ ἄλλα τρίγωνα κατὰ τὰς χαραχθείσας πλευράς, μέχρις ὅτου αἱ κορυφαὶ συμπέσουν, θὰ σχηματισθῇ τριγωνικὴ πυραμίς. Τί πυραμὶς εἶναι ἡ κατασκευασθεῖσα; Ἐξ ἄλλου ἐὰν



Σχ. 167



Σχ. 168

κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου τετράγωνον πλευρᾶς δύο δακτύλων καὶ τέσσαρα ἰσοσκελῆ τρίγωνα (σχ. 168), ἔχοντα βάσεις τὰς βάσεις τοῦ τετραγώνου καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας μὲ 2,5 δακτύλους, ἔπειτα δὲ χαράξωμεν διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου, σχηματίζομεν ὡς ἄνω τετραγωνικὴν πυραμίδα.

169. Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος.— α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου χωριστὰ καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομεν.

β΄) Ἂν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως (διότι ὅσαι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως, τόσα καὶ τὰ τρίγωνα).

Ὥστε, ἂν β εἶναι ἡ βάσις τῶν τριγώνων καὶ υ τὸ ὕψος των καὶ 4 ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν Ε

$$E=\frac{1}{2}\times\beta\times\upsilon\times4=\frac{\beta\times\upsilon\times4}{2} \text{ ἢ } E=\frac{(\beta\times4)\times\upsilon}{2}$$

Ἀλλὰ β×4 εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐτῆς, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ Π.

$$\text{Ὥστε } E=\frac{\Pi\times\upsilon}{2}=\Pi\times\frac{\upsilon}{2}$$

῞Οθεν: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν παραπλεύρων τριγώνων της.***

Οὕτως, ἂν ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,6 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων της εἶναι 0,4 τοῦ μέτρου, τὸ ἄνω ἐμβαδὸν εἶναι $E = (0,6 \times 4) \times \frac{0,4}{2} = 0,8$ τετρ. μέτρα.

Ἀσκήσεις.

299) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 2μ., τὰ δὲ ὕψη τῶν τριγώνων εἶναι ἴσα ἕκαστον πρὸς 2,3 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

300) Ἑξαγωνικὴ κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πλευρᾶς 4 μέτρων, τὸ δὲ ὕψος τῶν τριγώνων εἶναι 4,58 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

301) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκ χαρτονίου, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ κατασκευάσωμεν πυραμίδα κατὰ τὰ ἐν παραγρ. 168, ἔχει πλευρὰν 16 παλαμῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κατασκευασθείσης πυραμίδος.

302) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 8 μ.

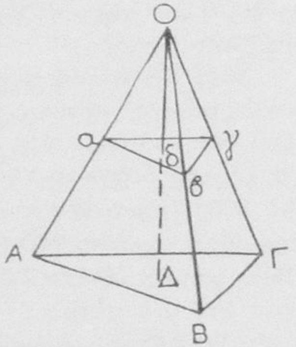
170. Ὄγκος τῶν πυραμίδων.—Κατασκευάζομεν πρῶτον ἓν δοχεῖον μὲ σχῆμα πυραμίδος οἱασδήποτε. Ἔπειτα κατασκευάζομεν δεύτερον δοχεῖον μὲ σχῆμα πρίσματος, τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ ἔχῃ βάσιν ἴσην μὲ τὴν βάσιν τοῦ πρώτου καὶ ὕψος ἐπίσης ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρώτου. Ἐὰν τώρα θελήσωμεν νὰ γεμίσωμεν τὸ δεύτερον δοχεῖον μὲ τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ τὸ πρῶτον, θὰ ἴδωμεν, ὅτι γεμίζει, ὅταν χύσωμεν εἰς αὐτὸ τρεῖς φορὰς ὕδωρ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ πρῶτον. Ἐξ αὐτοῦ δὲ συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρισματικοῦ δοχείου εἶναι τριπλάσιος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ ἄλλου δοχείου ἢ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου μὲ τὸ σχῆμα πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρισματικοῦ δοχείου.

Ὅθεν: ***Μία πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*** Καὶ ἑπομένως: ***Ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.***

Κατὰ ταῦτα, ἂν τὸ ἐμβαδὸν β τῆς βάσεως πυραμίδος εἶναι 20 τετρ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς υ εἶναι 6 μέτρα, ὁ ὄγκος αὐτῆς Ο εἶναι:

$$Ο = \frac{β \times υ}{3} = \frac{20 \times 6}{3} = 40 \text{ κυβικὰ μέτρα.}$$

171. Κόλουρος πυραμίς.—Ἂν κόψωμεν μίαν πυραμίδα, ὡς τὴν ΟΑΒΓ, μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της, ἡ τομὴ αβγ εἶναι σχῆμα ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν. Τότε τὸ μέρος τῆς πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς, ἤτοι τὸ μέρος ΑΒΓαβγ, λέγεται **κόλουρος πυραμὶς** (σχ. 169).



Σχ. 169

Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται βάσεις αὐτῆς (ἐπάνω καὶ κάτω βάσις), ἡ δὲ κάθετος μεταξὺ τῶν δύο βάσεών της λέγεται ὕψος αὐτῆς. Οὕτω τῆς ἄνω κολούρου πυραμίδος βάσεις εἶναι αἱ ἕδραι ΑΒΓ καὶ αβγ, ὕψος δὲ ἡ δΔ.

172. Ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.—Ἐὰν Β καὶ β εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ υ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτῆς, ὁ ὄγκος της Ο εἶναι $Ο = \frac{1}{3} \times υ \times (Β + β + \sqrt{Β \times β})$· ὥστε ἂν Β=24 τ.μ., β=6 τ.μ. καὶ υ=2 μ., εὑρίσκομεν

$$Ο = \frac{1}{3} \times 2 \times (24+6+\sqrt{24 \times 6}) = \frac{1}{3} \times 2 \times (24+6+\sqrt{144}) = 28 \text{ κ.μ.}$$

Σημείωσις.—Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος, ὡς τῆς αβγΑΒΓ, εὑρίσκεται, ὅταν ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ (ἐκ τῆς ὁποίας προέκυψεν ἡ δοθεῖσα κόλουρος) ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος Οαβγ.

Ἀσκήσεις.

303) Μιᾶς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον μὲ βάσιν 5 μέτρα καὶ ὕψος 3, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι $6 \frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

304) Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 200 μέτρα καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 140 μέτρα. Πόσον ὄγκον ἔχει;

305) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 40 τ.μ. καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς 80 κ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος της;

306) Μιᾶς πυραμίδος ὁ ὄγκος εἶναι 800 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 30 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

307) Κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν ἑξάγωνον ἔχει ὕψος 2 μ., ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 1 μέτρον, ἡ δὲ κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι 0,867 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης.

308) Πυραμὶς κανονικὴ μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 7 μέτρων ἔχει ὄγκον 980 κ. μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος αὐτῆς. Ποῖον δὲ θὰ ἦτο τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἐὰν τὸ ὕψος ἦτο 1,4 μέτρα;

309) Αἱ τρεῖς μεγαλύτεραι πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου εἶναι κανονικαὶ μὲ βάσεις τετράγωνα. Ἐξ αὐτῶν ἡ μεγαλυτέρα ἔχει ὕψος 137 μ. καὶ πλευρὰν τῆς βάσεώς την ἴσην μὲ 227 μ. Ἡ ἄλλη ἔχει ὕψος 136 μ. καὶ πλευρὰν τῆς βάσεώς της 207 μ. Ἡ δὲ τρίτη ἔχει ὕψος 62 μ. καὶ πλευρὰν τῆς βάσεώς της 108 μ.

Νὰ εὑρεθῇ:

α΄) ὁ ὄγκος ἑκάστης πυραμίδος καὶ

β΄) ὁ ὁλικὸς ὄγκος αὐτῶν.

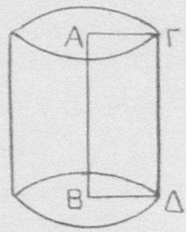
310) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων εἶναι 18 τ. μ. καὶ 32 τ. μ. καὶ τὸ ὕψος εἶναι 4 μ.

311) Κολούρου πυραμίδος αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα μὲ πλευρὰς 5 μ. καὶ 4 μ. Τὸ ὕψος δὲ τῆς κολούρου εἶναι 1 μέτρον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

173. Τὸ σχῆμα 170 παριστᾷ κύλινδρον. Εἶναι δὲ στερεόν, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς δύο κύκλους ἴσους καὶ εἰς μίαν ἐπιφάνειαν κυρτήν. Οἱ δύο κύκλοι λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων καὶ ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς αὐτάς, λέγεται ὕψος (ἢ ἄξων) αὐτοῦ. Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν πολλὰ ἀντικείμενα, ὡς εἶναι οἱ σωλῆνες ὕδατος, τὰ δοχεῖα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν, διάφορα κυτία γάλακτος κτλ.

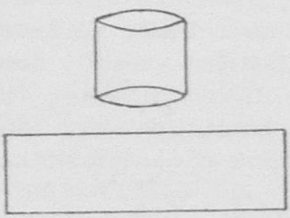


Σχ. 170

Ὁ κύλινδρος παράγεται ὡς ἑξῆς: Στρέφομεν ἓν ὀρθογώνιον, π. χ. τὸ ΑΒΓΔ, περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του· τότε αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουν δύο ἴσους κύκλους (τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου), ἡ δὲ ΓΔ γράφει ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία εἶναι κυρτὴ (τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου), λέγεται δὲ ἡ ΓΔ γενέτειρα. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου.

Ἐὰν τώρα τὸν κύλινδρον αὐτὸν κόψωμεν μὲ ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα, ἡ τομή, τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν, θὰ ἔχῃ σχῆμα ὀρθογωνίου. Θὰ εἶναι δὲ τοῦτο διπλάσιον ἀπὸ τὸ ΑΒΓΔ.

174. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.— Ἐὰν καλύψωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μὲ χάρτην, κόψωμεν ἔπειτα αὐτὸν κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας καὶ τὸν ἀναπτύξωμεν κατόπιν ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβωμεν σχῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον. Τὸ ἐμβαδὸν δὲ αὐτοῦ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.


Σχ. 171

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει βάσιν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ὅθεν: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἡ ἀκτὶς α τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶναι 4 δάκτυλοι καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 6 δάκτυλοι, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι $E=2\times\pi\times\alpha\times\upsilon=2\times3{,}14\times4\times6=$ $=150{,}72$ τετρ. δάκτυλοι.

Ἀσκήσεις.

312) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου κύλινδρον.

313) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 2,4 μ. καὶ ὕψος 4 μέτρα.

314) Τοῦ ἀνωτέρω κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

315) Εἷς στῦλος κυλινδρικὸς ὕψους 4 μέτρων καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,60 μέτρα πρόκειται νὰ χρωματισθῇ· στοιχίζει δὲ ὁ χρωματισμὸς 1 τετρ. μέτρου 4 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς τοῦ στύλου;

316) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα σωλῆνα ἀπὸ λευκοσίδηρον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ μῆκος 10 μέτρων καὶ διάμετρον βάσεως 0,3 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα λευκοσιδήρου χρειαζόμεθα; Ἐὰν δὲ ἓν τετραγωνικὸν μέτρον λευκοσιδήρου τιμᾶται 15 δραχ., πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ σωλήν;

175. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.—Ἐὰν γεμίσωμεν μὲ ὕδωρ ἕνα κύλινδρον (δοχεῖον) καὶ ἓν πρῖσμα, τὰ ὁποῖα ὅμως νὰ ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους, θὰ ἴδωμεν, ὅτι χωροῦν ἴσον ὕδωρ. Ἔχουν ἐπομένως τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος (§ 166). Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἀκτὶς α τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶναι 2 παλάμαι καὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ εἶναι 3 παλάμαι, ὁ ὄγκος του Ο εἶναι

$$O=\pi\times\alpha^2\times\upsilon=3{,}14\times4\times3=37{,}68 \text{ κυβ. παλάμαι.}$$

Ἀσκήσεις.

317) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 12,8 τετρ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος εἶναι 12,5 μέτρα.

318) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,2 μ. καὶ ὕψος 3 μ.

319) Κυλινδρικὴ δοκὸς μήκους 10 μέτρων καὶ μὲ διάμετρον τῆς βάσεώς της 8,2 μ. πόσον ὄγκον ἔχει;

320) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 16 δάκτυλοι καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του εἶναι 16,5 δάκτυλοι.

321) Ἑνὸς κυλίνδρου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,5 τοῦ μέτρου, ὁ δὲ ὄγκος 3,14 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

322) Ἑνὸς κυλίνδρου ὁ ὄγκος εἶναι 80 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του.

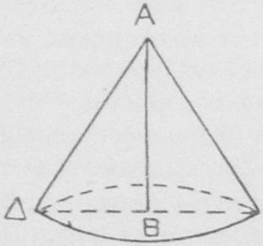
323) Εἷς κοῖλος κυλινδρικὸς σωλὴν ἐκ μετάλλου ἔχει μῆκος 8 μέτρων, ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 0,8 μ., ἡ δὲ ἐσωτερικὴ 0,6 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου τοῦ σωλῆνος τούτου;

324) Ἓν τηλεφωνικὸν καλώδιον κυλινδρικοῦ σχήματος ἔχει μῆκος 440 μέτρα καὶ διάμετρον τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ 0,005 μέτρα. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

325) Ἓν κυλινδρικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 200 τετρ. παλάμαι, χωρεῖ 10 κυβικὰ μέτρα ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος αὐτοῦ;

ΚΩΝΟΣ

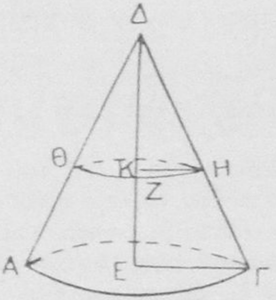
176. Τὸν κῶνον εἴδομεν εἰς τὴν § 70. Τελειώνει εἰς ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος λέγεται βάσις τοῦ κώνου, καὶ εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἂς περιστρέψωμεν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του, π.χ. τὴν ΑΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Τότε ἡ μὲν ΒΓ (σχ. 172) θὰ γράψῃ κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἡ δὲ ΑΓ θὰ γράψῃ



Σχ. 172

τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ ὁποία ἔμεινεν ἀκίνητος, λέγεται **ἄξων** ἢ **ὕψος** τοῦ κώνου, τὸ δὲ σημεῖον Α αὐτῆς, κορυφὴ αὐτοῦ. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ λέγεται **πλευρὰ** τοῦ κώνου ἢ **γενέτειρα.**

Ἐὰν κόψωμεν τὸν κῶνον μὲ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ τομή, τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν (δηλαδὴ ἡ ΑΔΓ), θὰ ἔχῃ σχῆμα τριγώνου ἰσοσκελοῦς, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ. Σχῆμα κώνου ἔχουν ἀρκετὰ ἀντικείμενα, ὡς τὰ χωνία καὶ ἄλλα.



Σχ. 173

177. Κόλουρος κῶνος.—Ἂν κόψωμεν ἕνα κῶνον μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του (σχ. 173), ἡ τομὴ εἶναι κύκλος, ὁ ΘΗΖ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ κέντρον του Κ εἰς τὸν ἄξονα ΔΕ τοῦ κώνου. Τότε τὸ μέρος τοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς (δηλαδὴ τὸ ΘΗΓΑ), λέγεται **κόλουρος κῶνος.**

Οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους τελειώνει ὁ κόλουρος κῶνος, λέγονται βάσεις αὐτοῦ. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΚΕ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν βάσεών του, λέγεται **ἄξων** ἢ **ὕψος** του. Τὸ μέρος ΗΓ τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ κώνου ΔΑΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων, λέγεται πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου.

178. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, καλύπτομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ μὲ χάρτην, κόπτομεν ἔπειτα αὐτὸν κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας καὶ τὸν ἀναπτύσσομεν κατόπιν ἐπὶ ἐπιπέδου. Τότε θὰ λάβωμεν σχῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι κυκλικὸς τομεύς.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τομέως εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἀλλὰ τὸ τόξον τοῦ τομέως αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτίς του εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου. Ὅθεν (§ 114):

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου,

πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευράν του.

Ὥστε, ἐὰν ἡ ἀκτὶς α τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 3 μέτρα καὶ ἡ πλευρὰ λ αὐτοῦ εἶναι 5 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι $Ε = 1/2 \times 2 \times \pi \times \alpha \times \lambda = \pi \times \alpha \times \lambda = 3,14 \times 3 \times 5 = 47,10$ τετραγ. μέτρα.

179. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου.— Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του. Ἤτοι, ἂν α καὶ β εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεών του καὶ λ ἡ πλευρά του, τὸ ἐμβαδὸν Ε εἶναι $Ε = \frac{1}{2} \times \lambda \times 2 \times \pi \times (\alpha + \beta) = \pi \times \lambda \times (\alpha + \beta)$· π.χ. ἂν $\alpha = 4$ μ., $\beta = 1$ μ. καὶ $\lambda = 5$ μ., θὰ εἶναι $Ε = 3,14 \times 5 \times (4+1) = 3,14 \times 5 \times 5 = 78,50$ τετρ. μέτρα.

Ἀσκήσεις.

326) Νὰ κατασκευάσετε κῶνον ἐκ χαρτονίου.

327) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 1,2 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ.

328) Τοῦ ἀνωτέρω κώνου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

329) Πόσον ἐμβαδὸν ἔχει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου μὲ πλευρὰν 5 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 3 μ.;

330) Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,8 τοῦ μέτρου χρειάζονται, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κωνικὴν σκηνὴν μὲ πλευρὰν 8 μ. καὶ περιφέρειαν βάσεως 15 μ.;

331) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 3 μ. καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶναι 5 μ. καὶ 2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;

180. Ὄγκος τοῦ κώνου.— Ἐὰν γεμίσωμεν μὲ ὕδωρ ἕνα κῶνον (δηλαδὴ δοχεῖον κωνικὸν) καὶ μίαν πυραμίδα, τὰ ὁποῖα ὅμως νὰ ἔχουν ὕψη ἴσα καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὐτὰ χωροῦν ἴσον ὕδωρ. Ἔχουν ἐπομένως τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος (§ 170). Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἀκτὶς α τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι 4 μέτρα καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 3 μέτρα, ὁ ὄγκος του Ο θὰ εἶναι $О=\frac{1}{3}\times\pi\times\alpha^2\times\upsilon=\frac{1}{3}\times3,14\times16\times3=50,24$ κυβ. μέτρα.

181. Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.—Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος Ο εἶναι $О=\frac{1}{3}\times\pi\times\upsilon\times(\alpha^2+\alpha\times\beta+\beta^2)$. Ὥστε:

ἂν $\alpha=6$ μ., $\beta=2$ μ. καὶ $\upsilon=3$ μ.

εὑρίσκομεν $О=\frac{1}{3}\times3,14\times3\times(6^2+6\times2+2^2)=3,14\times(36+12+$ $+4)=3,14\times52=163,28$ κυβ. μέτρα.

Ἀσκήσεις.

332) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 9 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ 6,28 τετρ. μέτρα;

333) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 1,6 μέτρα.

334) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 3,2 μέτρα καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 5 μέτρα;

335) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 8 μ. καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 31,4 μ.;

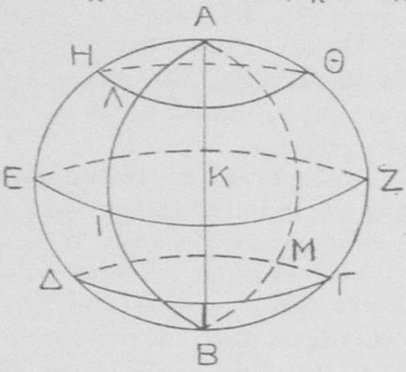
336) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 30 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 8 τετραγ. μέτρα;

337) Αἱ δύο περιφέρειαι τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἡ μία 6,2 μ., ἡ ἄλλη 9,45 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

ΣΦΑΙΡΑ

182. Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἐὰν περιστρέψωμεν ἡμικύκλιον, π.χ. τὸ ΑΚΒΓ (σχ. 174), περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΚΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, θὰ παραχθῇ σφαῖρα. Αἱ ἀποστάσεις ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ κτλ. τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας καὶ τῶν σημείων Α, Β, Ζ κτλ. τῆς ἐπιφανείας της λέγονται ἀκτῖνες τῆς σφαίρας.



Σχ. 174

Εἶναι δὲ αὗται ἴσαι μεταξύ των. Διάμετρος δὲ αὐτῆς λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τελειώνει εἰς δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της. Οὕτως ἡ ΑΚΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας Κ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

183. Θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν.— α΄) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.

β΄) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Τότε τὸ ἐπίπεδον λέγεται ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Διὰ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της, φέρομεν τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ἔπειτα ἐπίπεδον κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον. Ἐπειδὴ δὲ ἓν μόνον ἐπίπεδον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἕπεται, ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν μόνον ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον αὐτῆς.

γ΄) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα ἀπὸ ἕν. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.

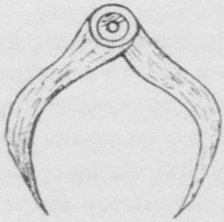
184. Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας.— Εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν κόψωμεν μίαν σφαῖραν μὲ ἓν ἐπίπεδον, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος. Ἐὰν δὲ κάμωμεν διαφόρους τοιαύτας τομάς, θὰ ἴδωμεν, ὅτι οἱ κύκλοι, τοὺς ὁποίους θὰ λάβωμεν, εἶναι τόσον μεγαλύτεροι, ὅσον τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον ὀλιγώτερον.

Ὥστε, ἂν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους κύκλους τῆς σφαίρας.

Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας**, ἐνῷ οἱ κύκλοι τῆς σφαίρας, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα δὲν διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου, λέγονται **μικροί**. Οὕτως οἱ κύκλοι τοῦ σχ. 174 ΕΙΖ, ΑΛΒΜ εἶναι μέγιστοι, ἐνῷ οἱ κύκλοι ΗΛΘ, ΔΓΜ εἶναι μικροί. Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι μεταξύ των ἴσοι. Ἐπίσης δὲ εἶναι φανερόν, ὅτι εἷς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια.

185. Πόλοι κύκλου σφαίρας.— Τὰ ἄκρα Α καὶ Β διαμέτρου σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου Γ αὐτῆς, λέγονται πόλοι τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ὁ πόλος Α (ὡς καὶ ὁ Β) τοῦ κύκλου Γ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας του.

Σημείωσις.— Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφερείας. Πρὸς τοῦτο δὲ χρησιμοποιοῦμεν τὸν σφαιρικὸν διαβήτην, ὅστις ἔχει σκέλη καμπύλα (σχ. 175)· καὶ τὸ μὲν ἓν σκέλος αὐτοῦ στηρίζομεν εἰς σημεῖόν τι τῆς σφαίρας, μὲ τὸ ἄλλο δὲ γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν περιφέρειαν. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς σφαίρας, εἰς τὸ ὁποῖον στηρίζομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου, εἶναι εἷς ἀπὸ τοὺς πόλους τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφομεν.



Σχ. 175

186. Ὅταν τὰ ἐπίπεδα δύο κύκλων τῆς σφαίρας εἶναι παράλληλα, οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται **παράλληλοι**. Τὸ μέρος δὲ τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν, λέγεται **σφαιρικὸν τμῆμα.** Οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους τελειώνει ἓν σφαιρικὸν τμῆμα, λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ κάθετος ἡ μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του λέγεται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἂν τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἓν σφαιρικὸν τμῆμα, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνον βάσιν. Τότε δὲ ὕψος τοῦ τμήματος εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον τῆς βάσεως μὲ τὸν πόλον αὐτῆς. Διότι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει ἓν σφαιρικὸν τμῆμα, λέγεται **σφαιρικὴ ζώνη.** Τὸ ὕψος καὶ αἱ βάσεις τοῦ τμήματος εἶναι ὕψος καὶ βάσεις τῆς ζώνης.

Εἶναι λοιπὸν αὕτη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἐπιπέδων.

Ἀσκήσεις.

338) Πόσαι εἶναι αἱ διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν;

339) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις ἐπιπέδου καὶ σφαίρας, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς;

340) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις ἐπιπέδου καὶ σφαίρας, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα της;

341) Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς σφαίρας ἀπό τινος ἐπιπέδου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς. Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου;

342) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀκτίνων δύο σφαιρῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των, ὅταν ἡ μία σφαῖρα εἶναι ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης, καὶ ποία, ὅταν αἱ σφαῖραι ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἀλλ' ἡ μία εἶναι ἐντὸς τῆς ἄλλης;

343) Ἐὰν νοήσωμεν μίαν σφαῖραν ἐντὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου (κυλίνδρου) αἱ βάσεις ἐφάπτονται τῆς σφαίρας (κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς σφαῖραν), τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Διὰ

ποίας πρακτικῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας;

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

187. α΄) Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.— ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρόν της.***

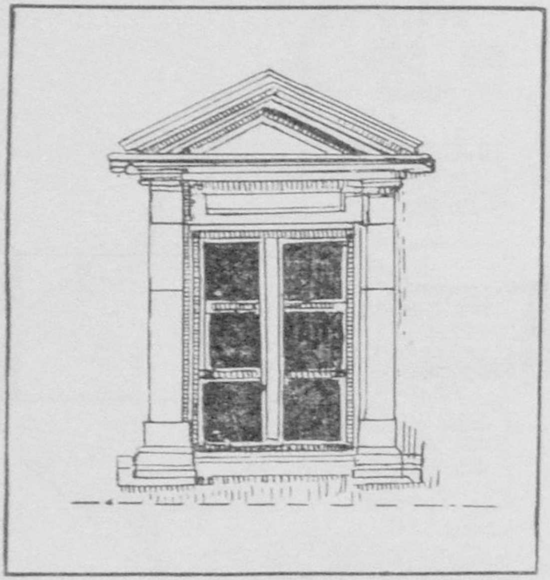
Κατὰ ταῦτα, ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας της εἶναι $Ε=2\times π\times α\times 2\times α=4\times π\times α^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $π\times α^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας α, λέγομεν, ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.***

Οὕτως, ἐὰν $α=3$ μέτρα, εἶναι $Ε=4\times 3,14\times 9=113,04$ τ.μ.

β΄) Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης.— ***Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.*** Ὥστε, ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ζώνης καὶ α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ εἶναι $2\times π\times α\times υ$· π.χ. ἂν $α=4$, $υ=3$, θὰ εἶναι $Ε=2\times 3,14\times 4\times 3=75,36$ τ.μ.

γ΄) Ὄγκος τῆς σφαίρας.—Ἂς φαντασθῶμεν ἓν μέγα πλῆθος πυραμίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ βάσιν ἀπείρως μικράν. Ἂς θέσωμεν δὲ τοιαύτας πυραμίδας εἰς τρόπον, ὥστε ὅλαι νὰ ἔχουν τὴν κορυφήν των εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τὰς βάσεις των ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς καὶ ἂς θέσωμεν τόσας, ὥστε νὰ καλυφθῇ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Εἶναι φανερὸν τότε, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων τούτων θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αὐταὶ αἱ πυραμίδες ἔχουν ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν, δηλαδὴ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος της. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀκτῖνος α εἶναι $4\times π\times α^2$, ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{3}\times α\times 4\times π\times α^2=\frac{4}{3}\times π\times α^3$. Π.χ. ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 2 μ., ὁ ὄγκος της εἶναι $\frac{4}{3}\times 3,14\times 2^3=33,493$ κ. μ.

Σημείωσις α'.—Οἱ ἄνθρωποι εἰς τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα κατασκευάζουν εἴτε διὰ τὰς ἀνάγκας των τὰς πρακτικὰς εἴτε διὰ καλλιτεχνικοὺς σκοπούς, δίδουν σχήματα τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν, ἢ σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι συνδυασμοὶ αὐτῶν. Οὕτως εἰς τὰ ποτήρια π.χ. δίδουν σχῆμα πρισμάτων, κυλίνδρων ἢ κολούρων κώνων. Μερικὰ δὲ ἀπὸ αὐτὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἕνα κόλουρον κῶνον, εἰς τὸν ὁποῖον τίθεται τὸ ὑγρόν, ἀπὸ ἓν

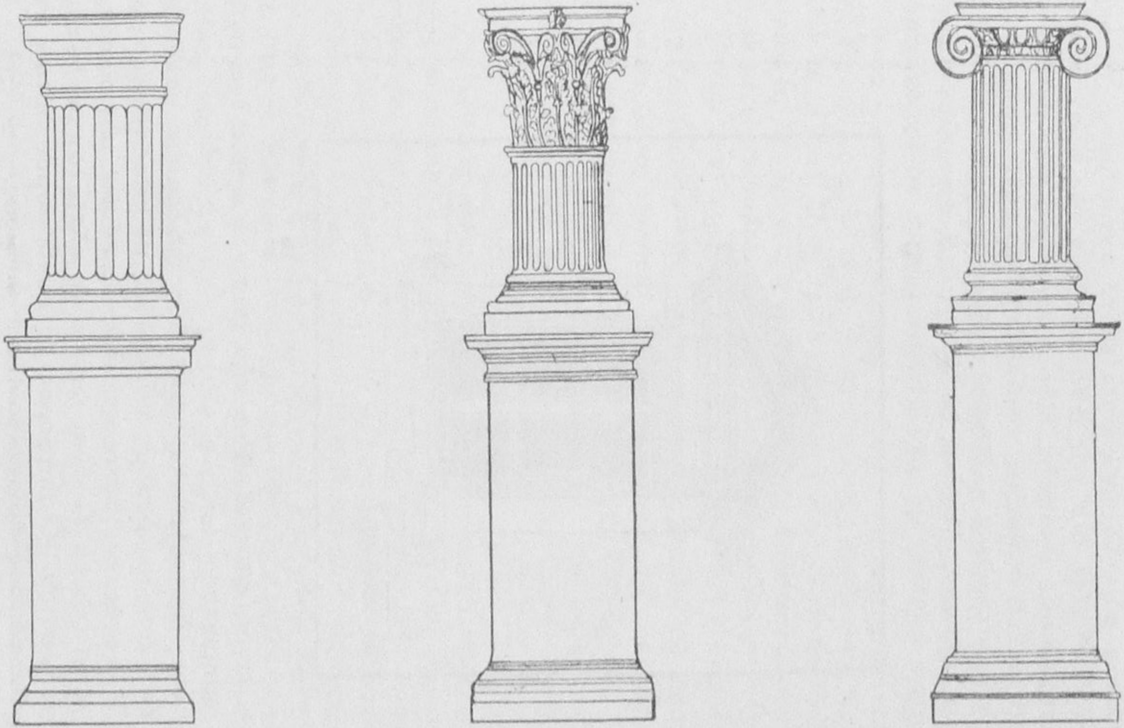


Εἰκὼν 2

στέλεχος κυλινδρικὸν καὶ ἀπὸ τὴν βάσιν, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα σφαιρικοῦ τμήματος.

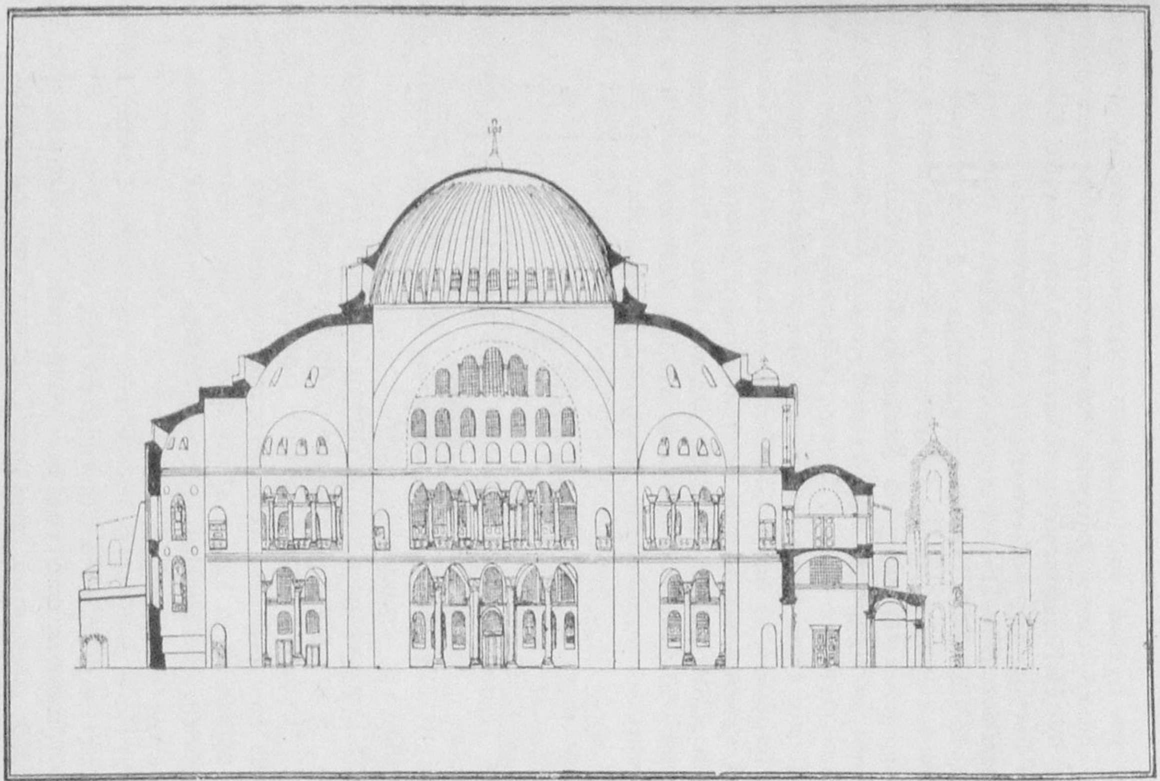
Τὰ χωνία ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο διαφόρους κολούρους κώνους ἢ ἀπὸ δύο κολούρους πυραμίδας μὲ βάσεις τετράγωνα συνήθως. Οἱ κίονες, αἱ βάσεις κτλ. τῶν ναῶν καὶ τῶν οἰκοδομημάτων ἐν γένει (εἰκὼν 2) εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον συνδυασμοὶ τοιούτων σχημάτων. Ὁ διάφορος δὲ συνδυασμὸς αὐτῶν ἀποτελεῖ τοὺς διαφόρους ἀρχιτεκτονικοὺς ρυθμούς.

Κατωτέρω εἰς τὰς εἰκόνας 3 καὶ 4 τῶν σελίδων 134 καὶ 135



Ρυθμός Δωρικός Ρυθμός Κορινθιακός Ρυθμός Ἰωνικός

Εικών 3



Σχεδιάγραμμα τοῦ ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας ὑ Κλίμαξ 1:500.

Εἰκὼν 4

δίδομεν τὰ σχέδια τοῦ Δωρικοῦ, Ἰωνικοῦ καὶ Κορινθιακοῦ ρυθμοῦ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς Ἀρχιτεκτονικῆς ὡς καὶ σχεδιάγραμμα τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας ὡς ἄριστον δεῖγμα τῆς βυζαντινῆς Ἀρχιτεκτονικῆς.

Σημείωσις β'.—Πολλὰ ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα ἔχουν σχῆμα ὄχι ἀκριβῶς τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν, ἀλλὰ παραπλήσιον. Τότε, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτῶν, τὰ φανταζόμεθα διηρημένα εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα προσεγγίζον πολὺ πρὸς τὰ σχήματα τῶν στερεῶν, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ὄγκον. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῶν μερῶν (ὅστις εἶναι κατὰ προσέγγισιν) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν. Π.χ. ἓν βαρέλιον τὸ φανταζόμεθα διηρημένον εἰς δύο ἴσους κολούρους κώνους, εἰς αὐτοὺς δὲ ἡ μικρότερα βάσις εἶναι μία ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ βαρελίου, ἡ δὲ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τομή, τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν, ἐὰν κόψωμεν τὸ βαρέλιον εἰς δύο ἴσα μέρη μὲ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του.

Ἀσκήσεις.

344) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 20 μέτρα;

345) Ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς εἶναι 2,2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς;

346) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 62,83 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της;

347) Ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω σφαιρῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος.

348) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶναι περίπου 40000000 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς της, πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της καὶ πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

349) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 1,4 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 3 μ.

350) Ἑκάστη ἀπὸ τὰς δύο εὐκράτους ζώνας τῆς γῆς ἔχει ὕψος 3305 χιλιόμετρα περίπου. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκάστης;

188. Εἰδικὸν βάρος σώματος. — Ὅλοι γνωρίζομεν, ὅτι διάφορα σώματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον, δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ βάρος. Ἑπομένως, ἂν γνωρίζομεν μόνον τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος, δὲν γνωρίζομεν καὶ τὸ βάρος του. Ἂν ὅμως θέλομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὰ βάρη τῶν σωμάτων ἀπὸ τὸν ὄγκον των, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν καὶ ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, σχετικὸν μὲ τὸ σῶμα αὐτὸ καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος του. ***Εἰδικὸν δὲ βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ σώματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου.***

Π.χ. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μίαν κυβικὴν παλάμην ἀπὸ σίδηρον· ἐὰν τὴν ζυγίσωμεν, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἔχει βάρος 7780 γραμμαρίων. Κατόπιν τούτου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ βάρος αὐτὸ μὲ τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι 1000 γραμ. Διαιροῦντες λοιπὸν εὑρίσκομεν 7,78. Ὥστε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,78.

Ἀλλὰ τὸ βάρος (εἰς τόννους, χιλιόγραμμα, γραμμάρια) καὶ ὁ ὄγκος (εἰς κ.μ., κ.π., κ.δ.) τοῦ ὕδατος παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὥστε, ἀντὶ νὰ διαιρῶμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος (εἰς τόννους κτλ.) διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος, δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν τὸ βάρος αὐτοῦ διὰ τοῦ ὄγκου του (εἰς κ.μ. κτλ.).

Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ***εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους του πρὸς τὸν ὄγκον του.***

Π.χ. τὸ βάρος σώματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 350 κ. δ., εἶναι 84 γραμμάρια. Τότε τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ εἶναι 84:350=0,24.

189. Σχέσις βάρους καὶ ὄγκου ἑνὸς σώματος. — Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, ἐὰν Β εἶναι τὸ βάρος σώματος (εἰς τόννους κλπ.) καὶ Ο ὁ ὄγκος του (εἰς κ.μ. κτλ.), τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ Ε εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως Β:Ο. Εἶναι λοιπὸν $\frac{B}{O}=E$· ἄρα Β=Ο.Ε. Ὥστε, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸ βάρος του.

Π.χ. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,5. Ἓν λοιπὸν τεμάχιον ἀργύρου ὄγκου 32 κ.δ. ζυγίζει $32 \times 10{,}5 = 336$ γραμ.

Σημείωσις.—Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $B = O . E$ προκύπτει ἡ $\frac{B}{E} = O$, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος (εἰς τόννους κτλ.) μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον (εἰς κ.μ. κτλ.).

Π.χ. Ἓν τεμάχιον χαλκοῦ (εἰδ. βάρος 8,9), τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος 445 γραμμάρια, ἔχει ὄγκον $445 : 8{,}9 = 50$ κ.δ.

Κατωτέρω δίδομεν τὰ μέσα εἰδικὰ βάρη μερικῶν σωμάτων

Ἀλουμίνιον	2,56	Ὕδωρ θαλάσσης	1,026
Χρυσὸς	19,3	Γάλα ἀγελάδος	1,03
Ἀδάμας	3,5	Οἰνόπνευμα	0,90
Ὕαλος	2,5	Οἶνος	0,99
Μάρμαρον	2,7	Ἔλαιον ἐλαίας	0,91
Μόλυβδος	11,3	Πάγος	0,93
Φελλὸς	0,24	Ζῦθος	0,98
Λευκόχρυσος	21,5	Ὑδράργυρος	13,6

Ἀσκήσεις.

351) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος α΄) Μολύβδου ὄγκου 27 κ.δ., β΄) Ὑδραργύρου ὄγκου 7,5 κ.δ., γ΄) Χρυσοῦ ὄγκου 12 κ.δ., δ΄) Ζύθου ὄγκου 2 κ.π., ε΄) Γάλακτος ὄγκου 1 κ.π.

352) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος α΄) Μαρμάρου, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 135 τόννους, β΄) Ὑάλου, ἡ ὁποία ζυγίζει 42 χιλιόγραμμα, γ΄) Ἐλαίου, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 45,5 χιλιόγραμμα, 4) Οἰνοπνεύματος, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 135 γραμμάρια, ε΄) Θαλασσίου ὕδατος, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 51 χιλιόγραμμα καὶ 300 γραμμάρια.

353) Κάμε ὁμοίας ἀσκήσεις ἐπὶ σωμάτων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖς συχνά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΙΚΤΟΙ

354) Πόσων μοιρῶν γωνίαν σχηματίζει ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης ἑνὸς ὡρολογίου εἰς τὴν 10ην ὥραν, τὴν 12ην καὶ τὴν 3ην;

355) Πόσων μοιρῶν γωνίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις πρὸς Α μετὰ τῆς διευθύνσεως πρὸς Β καὶ πόσων μοιρῶν μετὰ τῆς διευθύνσεως πρὸς ΒΑ;

356) Διχοτομήσατε δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας καὶ μετρήσατε τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων αὐτῶν. Ποῖον ἀριθμὸν μοιρῶν πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρετε;

357) Φέρετε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ κόψατε αὐτὰς διὰ τρίτης εὐθείας, κατόπιν διχοτομήσατε τὰς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι κεῖνται μεταξὺ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, καὶ τέλος μετρήσατε τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων τούτων. Ποῖον ἀριθμὸν μοιρῶν πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρετε;

358) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον γράψατε δύο χορδὰς ἴσας καὶ κατόπιν συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστην τῶν χορδῶν. Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης νὰ ἐξαγάγετε ἓν γενικὸν συμπέρασμα.

359) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον γράψατε δύο χορδὰς ἀνίσους καὶ συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἀχθεισῶν χορδῶν· ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης νὰ ἐξαγάγετε γενικόν τι συμπέρασμα.

360) Κατασκευάσατε ἓν οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ· κατόπιν φέρετε καθέτους ἐπὶ τὰς ΒΓ καὶ ΑΓ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν. Ἐὰν δὲ αἱ κάθετοι αὐτῶν τέμνωνται εἰς τὸ Δ, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ Δ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ἑκάστης τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ.

361) Ἔχομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ· ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν α΄) εὐθεῖαν μέχρι τοῦ μέσου τῆς ΒΓ, β΄) τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ γ΄) τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶναι διάφοροι. Εἰς ποῖον εἶδος τριγώνου αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνην;

362) Λάβετε μίαν γωνίαν ΑΒΓ καὶ μὲ πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Β κατασκευάσατε δύο γωνίας ἴσας μεταξύ των καὶ ἐκτὸς τῆς ΑΒΓ, τὰς ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ. Δείξατε, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΒΔ καὶ ΑΒΕ εἶναι ἴσαι.

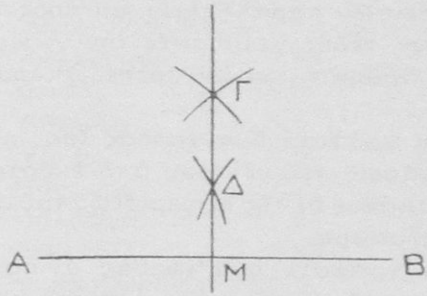
363) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι 40°.

364) Κατασκευάσατε ἓν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύ-

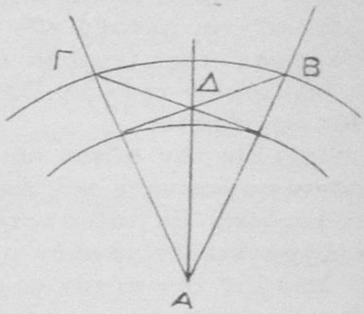
κλον. Μετρήσατε ἔπειτα δύο ἀπέναντι γωνίας καὶ εὕρετε κατόπιν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τὸ αὐτὸ νὰ γίνῃ καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο ἀπέναντι γωνίας. Ἐκ τῶν ἐξαγομένων δέ, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρετε, νὰ συναγάγετε γενικὴν πρότασιν.

365) Ἡ εὐθεῖα ΓΔ τοῦ σχήματος 176 εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ προσέξετε τὸ σχῆμα καὶ νὰ φέρετε ἔπειτα μὲ τὸν ἴδιον τρόπον κάθετον εἰς τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας.

366) Ἡ εὐθεῖα ΑΔ τοῦ σχήματος 177 εἶναι διχοτόμος τῆς



Σχ. 176



Σχ. 177

γωνίας ΒΑΓ. Νὰ προσέξετε τὸ σχῆμα καὶ νὰ διχοτομήσετε ἔπειτα μὲ τὸν ἴδιον τρόπον δοθεῖσαν γωνίαν.

367) Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι ἡ γωνία, ἥτις εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας 49° 51′ 48″;

368) Τῆς ἀνωτέρω γωνίας νὰ εὑρεθῇ ἡ παραπληρωματική της.

369) Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουν ἄθροισμα 180°. Ἐὰν ἡ ΑΒΓ εἶναι 79° 2′ 48″, πόσον εἶναι ἡ ΔΕΖ;

370) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. Β=60° καὶ γων. Γ =70°. Ἐὰν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων τέμνωνται εἰς τὸ Δ, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΒΔΓ;

371) Δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι 63° 42′ καὶ 40° 53′. Πόσον εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου;

372) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. Α=75° καὶ γων. Β=36°. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τῶν δύο σχηματιζομένων τριγώνων.

373) Δύο ἄνθρωποι ἐκκινοῦσιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ

ἀπομακρύνονται ἀκολουθοῦντες διευθύνσεις καθέτους πρὸς ἀλλήλας· καὶ ὁ μὲν εἷς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως 12 μέτρα, ὁ δὲ ἄλλος 16 μέτρα. Πόσον ἀπέχει ὁ εἷς τοῦ ἄλλου;

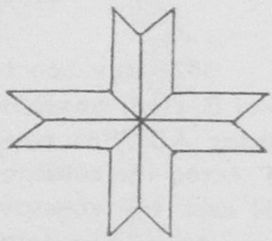
374) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, αἱ δὲ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 4 μέτρα καὶ 5 μέτρα. Ἐπὶ τοῦ πατώματος αὐτοῦ εἶναι ἐστρωμένος τάπης σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 3,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀκαλύπτου μέρους τοῦ πατώματος τοῦ δωματίου;

375) Ἓν παράθυρον ἔχει ὕψος 2 μέτρα καὶ πλάτος 1,2 μέτρα, ὑπάρχουν δὲ εἰς αὐτὸ 4 ὑαλοπίνακες διαστάσεων ἕκαστος 0,8 καὶ 0,5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν ξυλίνων μερῶν τοῦ παραθύρου;

376) Παραλληλογράμμου τινὸς ἑκάστη τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 7 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 6,25 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων πλευρῶν, ἐὰν ἑκάστη τούτων εἶναι 10 μέτρα.

377) Παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 0,6 μ., τὸ δὲ ὕψος 0,45 μ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ λαμβάνομεν σημεῖον τι Ε καὶ φέρομεν τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΒ.

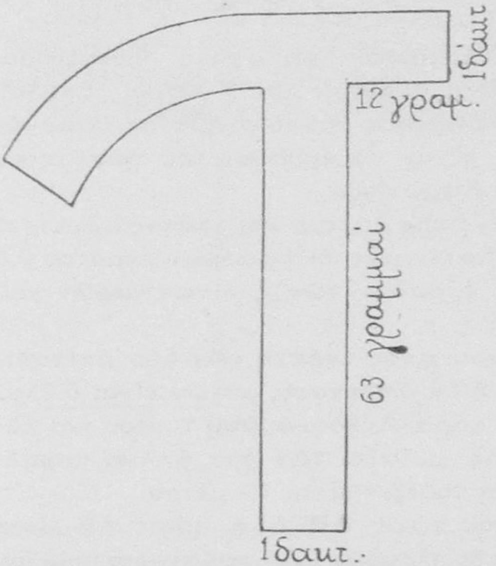
378) Τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπίσης εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ πλευραὶ ΔΕ καὶ ΔΓ. Ἡ ΑΒ εἶναι 6 παλάμαι, ἡ ΑΕ 26 δάκτυλοι καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΑΒ εἶναι 38 δάκτυλοι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου.



Σχ. 178

379) Τὸ σχῆμα 178 ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 ἴσα παραλληλόγραμμα. Αἱ κοιναὶ βάσεις αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν καθέτων πρὸς ἀλλήλας. α΄) Εὕρετε τὰς γωνίας ἑκάστου παραλληλογράμμου. β΄) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος αὐτοῦ, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 13 γραμμαὶ

καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,5 τοῦ δακτύλου. γ΄) Νὰ κατασκευάσετε ὅμοιον σχῆμα.



Σχ. 179

380) Τὰ τόξα τοῦ σχήματος 179 εἶναι 60° καὶ ἀνήκουν εἰς δύο περιφερείας ὁμοκέντρους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μεγαλυτέρα ἔχει ἀκτῖνα 35 γραμμῶν. α΄) Εὕρετε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος αὐτοῦ. β΄) Κατασκευάσατε ὅμοιον σχῆμα.

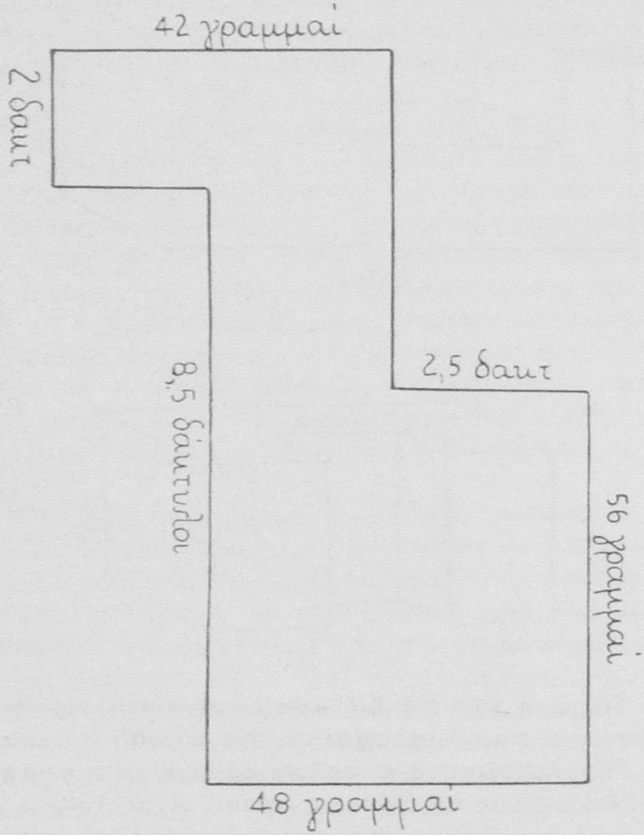
381) Εὕρετε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος 180, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἐὰν τὸ σχῆμα αὐτὸ κατεσκευάσθη ὑπὸ κλίμακα 1:10000, ποία εἶναι ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πραγματικοῦ σχήματος;

382) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχουν κοινὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχουν κοινὰ καὶ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ περιστρέψωμεν τὸ ἄλλο ἐπίπεδον Π περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὸ Γ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ ἐφαρμόσουν καὶ θὰ ἀποτελέσουν ἓν μόνον ἐπίπεδον. Κατόπιν τούτου ἀπαντήσατε εἰς τὴν ἐρώτησιν: Διὰ τριῶν σημείων, κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, πόσα ἐπίπεδα διέρχονται καὶ πόσα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας;

383) Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Διατί;

384) Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Διατί;

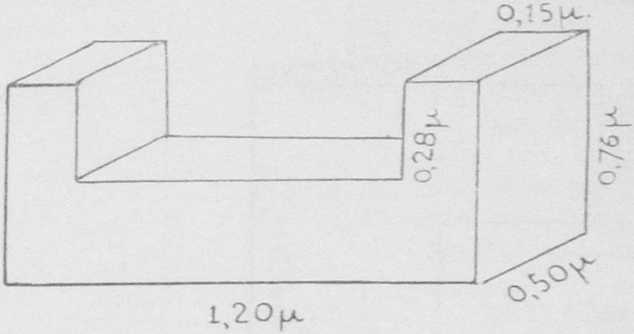
385) Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Διατί;

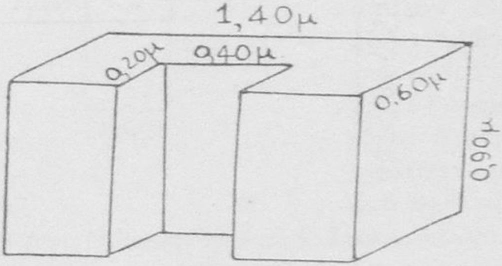


Σχ. 180

386) Κιβώτιον ἐκ σανίδων ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αἱ ἐξωτερικαὶ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 1,6 μέτρα μῆκος, 1,5 μ. πλάτος καὶ 1 μέτρον ὕψος. Τὸ πάχος τῶν σανί-

δων, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι κατεσκευασμένον, εἶναι 0,02 τοῦ μέτρου, εἶναι δὲ πλῆρες σάπωνος. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σάπωνος;





Σχ. 181

387) Τὰ μέρη τῶν ἐπίπλων, ποὺ φαίνονται εἰς τὸ σχ. 181, εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος των.

388) Ἕν κιβώτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 1,40 μ. καὶ 0,60 μ., τὸ δὲ ὕψος του 0,50 μ. Ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως τοῦ κιβωτίου τούτου ἐφαρμόζει κάλυμμα σχήματος ἡμικυλίνδρου, ὅστις ἐκόπη δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, ὁ ὁποῖος ἄξων ἰσοῦται μὲ τὴν μεγαλυτέραν διάστασιν τοῦ κιβωτίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὁλικὸς ὄγκος.

389) Μία δεξαμενὴ μήκους 7 μ. καὶ πλάτους 6 μ. χωρεῖ 210

κυβικὰ μέτρα ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τῆς δεξαμενῆς;

390) Μολυβδοκόνδυλον κυλινδρικὸν ἔχει μῆκος 14 δακτύλων καὶ διάμετρον ἑνὸς δακτύλου, ἡ δὲ διάμετρος τοῦ γραφίτου εἶναι 2 γραμμαί· νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου, ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατεσκευασμένον τὸ μολυβδοκόνδυλον.

391) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 5,6 παλαμῶν, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι 0,96 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

392) Α καὶ Β εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΑΒ.

393) Τὸ διάγραμμα ἐδαφικῆς ἐκτάσεως κατεσκευάσθη ὑπὸ κλίμακα 1/1000· εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 0,25 μ. καὶ 0,42 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐδαφικῆς ταύτης ἐκτάσεως.

394) Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς ἑνὸς μέτρου· μὲ τὰς πλευρὰς δὲ ταύτας ὡς διαμέτρους γράφομεν τέσσαρα ἡμικύκλια ἐξωτερικὰ πρὸς τὸ τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ οὕτω προκύπτοντος σχήματος ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

395) Ἓν σῶμα ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, περατοῦται ὅμως ἑκατέρωθεν εἰς κώνους ἴσους καὶ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ἰσοῦνται μὲ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι 0,08 μέτρα, τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 0,8 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ἑκάστου κώνου εἶναι 0,05 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος τούτου.

396) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτῖνος 1 μ. καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτῖνος διπλασίας καὶ τέλος νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

397) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 καὶ 8 δακτ. Ἔπειτα μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου γράψατε ἡμικύκλια ἐξωτερικὰ πρὸς τὸ τρίγωνον καὶ εὕρετε τὰ ἐμβαδὰ ἑκάστου τῶν ἡμικυκλίων· κατόπιν συγκρίνατε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἡμικυκλίων, τῶν γραφέντων ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ

ἡμικυκλίου τοῦ γραφέντος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης· ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς διατυπώσατε γενικὴν πρότασιν.

398) Διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου φέρετε εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ τελειώνουν εἰς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Κατόπιν συγκρίνατε πρὸς ἄλληλα τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν τούτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ κέντρου· ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης νὰ συναγάγετε γενικήν τινα πρότασιν.

399) Εἰς κύκλον φέρομεν τυχοῦσαν διάμετρον καὶ ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας φέρομεν χορδὰς εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

400) Νὰ κατασκευσθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν 5 δακτύλων καὶ ὕψος 6 δακτύλων. Πόσα τοιαῦτα τρίγωνα δύνασθε νὰ κατασκευάσετε; Τί εἶναι ταῦτα πρὸς ἄλληλα;

401) Δίδεται ἓν ἐπίπεδον Π καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπ' αὐτό. Διὰ τῆς ΑΒ διέρχονται ἐπίπεδα. Ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶναι κάθετα ἐπὶ τρίτον, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίτον ἐπίπεδον. Δείξατε τοιαῦτα ἐπίπεδα εἰς τὸ δωμάτιον.

402) Αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς διαφόρους θέσεις δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους. Εὕρετε τὰς σχέσεις μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν καὶ τῶν ἀκτίνων των. Ἡ τομὴ τῶν δύο σφαιρῶν τί σχῆμα εἶναι;

403) Ἓν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου. Κατὰ ποίαν γραμμὴν ἐφάπτεται αὐτῆς;

404) Ἓν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. Κατὰ ποίαν γραμμὴν ἐφάπτεται αὐτῆς;

405) Δίδεται ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τί εἶναι πρὸς ἀλλήλας αἱ δίεδροι γωνίαι, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς;

406) Τέμνω κύλινδρον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Τί σχῆμα ἔχει ἡ τομή;

407) Τέμνω κῶνον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Τί σχῆμα ἔχει ἡ τομή;

408) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 96 μέτρα, ἡ δὲ βάσις εἶναι τριπλασία τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

409) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ρόμβου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 5 μέτρα καὶ μία τῶν διαγωνίων του 8 μέτρα.

410) Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι 81 τετραγ. δάκτυλοι. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

411) Τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἀκτῖνος 5 μ. εἶναι 3,927 μέτρα. Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι τὸ τόξον τοῦτο;

412) Τομεὺς κύκλου ἀκτῖνος 6 μ. ἔχει ἐμβαδὸν 1 τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι ἡ γωνία τοῦ τομέως;

413) Τρίγωνον ὀρθογώνιον μὲ πλευρὰς 3 μ., 4 μ. καὶ 5 μ. στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν 3 καὶ ἔπειτα περὶ τὴν πλευρὰν 4. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν οὕτω σχηματιζομένων δύο κώνων καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τούτων.

414) Ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 4 μ. καὶ 2 μ., στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν 4 καὶ κατόπιν περὶ τὴν πλευρὰν 2. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν οὕτω σχηματιζομένων κυλίνδρων καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τούτων.

415) Κύβος τέμνεται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν. Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς;

416) Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου. Σημειώσατε ἐπ' αὐτοῦ σημεῖα κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς. Τί γραμμὴ πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ ποίαν διεύθυνσιν ἔχει ἡ γραμμὴ αὕτη ὡς πρὸς τὴν ΑΒ;

417) Δίδεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ. Κατασκευάσατε τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τριγώ-

νου ΑΒΓ καὶ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Γ. Αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ ποίας γραμμῆς κεῖνται καὶ ποίαν διεύθυνσιν ἔχει αὕτη ὡς πρὸς τὴν ΑΒ;

418) Ἐπὶ ποίας ἐπιφανείας κεῖνται τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον;

419) Δύο κύλινδροι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν;

420) Δύο κῶνοι ἔχουν ἴσας βάσεις, ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν;

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

'Ανάδοχος ἐκτυπώσεως : «Ἑλληνικὴ Ἐκδοτικὴ Ἑταιρεία» Α. Ε.
Ἀθῆναι, ὁδὸς Παπαδιαμαντοπούλου, 44

450