3000

ΝΙΚ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρώην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΟΜΟΝ 3438 ΔΙΑ ΜΙΑΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ
ΑΠΟ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 1931-32

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

Ἀντίτυπα 1000


Α ...ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
...ΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81Α
ΑΘΗΝΑΙ
1939

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΕΚΔΟΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ Α. Ε.
ΑΘΗΝΑΙ, ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ 44

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ ἔκδοσις αὕτη οὐδόλως διαφέρουσα κατὰ τὸ γενικὸν σχέδιον τῆς Α΄ ἐκδόσεως συνετάχθη ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐπισήμου προκηρύξεως τοῦ Σ. Ὑπουργείου τῆς Παιδείας κατὰ τὸν νόμον 3438. Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν προκήρυξιν ταύτην περιέχει στοιχεῖά τινα ***Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας*** καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν ***κανονικῶν πολυέδρων***, ἐν ᾧ ἀφ᾽ ἑτέρου παρελείφθη ἡ περὶ ὁρίων θεωρία, διότι αὕτη ἐξετάζεται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

Ἔχοντες δὲ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι πρέπει νὰ δίδηται εἰς τοὺς μαθητάς, ὅσῳ τὸ δυνατὸν συχνοτέρα εὐκαιρία αὐτενεργείας ἀνεγράψαμεν ὡς καὶ ἐν τῇ Α΄ ἔτι ἐκδόσει τὰ πλεῖστα τῶν πορισμάτων ἄνευ ἀποδείξεων.

Ἤδη, ὅτε ἤρχισεν ἐπισήμως διδασκομένη, τείνει δὲ νὰ ἐπικρατήσῃ ἀλλαχοῦ τε καὶ παρ᾽ ἡμῖν ἡ διδακτικὴ μέθοδος τῆς ***αὐτομάτου ἐνεργείας ἢ τοῦ σχολείου ἐργασίας***, ἐθεωρήσαμεν ἐπιβεβλημένον διὰ τὸ συμφέρον τῶν μαθητῶν, ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν εὔκολον ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης, νὰ αὐξήσωμεν τὸν κύκλον τῆς τοιαύτης τῶν μαθητῶν ἐνεργείας. Διὰ τοῦτο πλὴν τῶν πορισμάτων ἀνεγράψαμεν ὑπὸ τὰ σχετικὰ θεωρήματα καὶ ἄνευ τῶν λύσεων αὐτῶν πλεῖστα προβλήματα, ἐξ ἐκείνων ἰδίᾳ, ὧν ἡ λύσις διαφαίνεται εὐκόλως ἐκ τῶν προηγουμένων.

Ὁ Συγγραφεὺς

Ν. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αἱ πρῶται ἔννοιαι.

§ 1. Διάστημα. Σχῆμα καὶ ὄγκος σώματος.—Ἡ ἄπειρος πέριξ ἡμῶν ἔκτασις, ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖνται ὅλα τὰ σώματα τῆς φύσεως, καλεῖται *διάστημα*.

Εἰς ἕκαστον σῶμα διακρίνομεν, πλὴν τῆς συνιστώσης αὐτὸ ὕλης, *σχῆμα καὶ ὄγκον*.

Ὄγκος σώματος καλεῖται τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, ὅπερ τὸ σῶμα τοῦτο καταλαμβάνει.

Ἕκαστον σῶμα ἐκτείνεται κατὰ τὰς ἀκολούθους τρεῖς διαφόρους διευθύνσεις: α′) Ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, β′) ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν καὶ γ′) ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι: *ἕκαστον σῶμα ἔχει τρεῖς διαστάσεις*.

§ 2. Ἐπιφάνεια σώματος. Ἕκαστον σῶμα ἔχει πολλὰ ἄκρα. *Τὸ σύνολον τῶν ἄκρων σώματός τινος καλεῖται ἐπιφάνεια αὐτοῦ.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου σώματος χωρίζει αὐτὸ ἀπὸ τοῦ περιβάλλοντος διαστήματος.

Ἑκάστη ἐπιφάνεια ἔχει σχῆμα, ἐκτείνεται δὲ κατὰ δύο μόνον διαστάσεις.

Ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν ἁπλουστέρα εἶναι ἡ *ἐπίπεδος* ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς τὸ *ἐπίπεδον*, οὗ εἰκόνα παρέχει ἡμῖν ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος (μακρὰν τῶν παρειῶν τοῦ δοχείου), ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, κλπ.

§ 3. Γραμμαί.—*Τὰ ἄκρα ἐπιφανείας τινὸς ἢ μέρους ἐπιφανείας καλοῦνται γραμμαί.* Π.χ. τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας τοίχου, μελανοπίνακος, φύλλου δάφνης, μεταλλικοῦ νομίσματος εἶναι γραμμαί.

Ἑκάστη γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ μίαν μόνον διάστασιν.

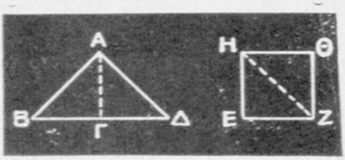
ΣΗΜ. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ σώματα, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὸ σχῆμα, καλοῦμεν αὐτὰ *γεωμετρικὰ σχήματα* ἢ ἁπλῶς *σχήματα*. Παριστῶμεν δὲ ταῦτα δι᾽ εἰκόνων, τὰς ὁποίας ἐπίσης σχήματα καλοῦμεν.

§ 4. Σημεῖα. *Τὰ ἄκρα γραμμῆς τινος ἢ μέρους αὐτῆς καλοῦνται σημεῖα.* Ἕκαστον σημεῖον οὐδεμίαν ἔχει διάστασιν, παρίσταται δὲ ἐν φύλλῳ χάρτου ἢ τῷ μελανοπίνακι διὰ τελείας στιγμῆς καὶ ὀνομάζεται δι' ἑνὸς γράμματος, ὅπερ τίθεται πλησίον αὐτοῦ.

Ἴσα καὶ ἄνισα σχήματα.

§ 5. Ἴσα καὶ ἰσοδύναμα σχήματα.—*Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ἂν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἓν μόνον σχῆμα ἀποτελῶσιν.* Οὕτω τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΗΕΖ *(Σχ. 1)* εἶναι ἴσα, διότι καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσι.

Δύο σχήματα λέγονται ἴσα κατὰ μέρη ἢ ἰσοδύναμα, ἐὰν ταῦτα ἀκέραια μὲν δὲν ἐφαρμόζωσιν, ἐφαρμόζουσιν ὅμως ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Τὰ σχήματα π.χ. ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 2)* εἶναι ἰσοδύναμα, διότι τὰ μέρη ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ α' ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν μερῶν ΔΕ καὶ ΕΖ τοῦ β', ἐν ᾧ ἀκέραια τὰ σχήματα ταῦτα δὲν ἐφαρμόζουσιν. Ὁμοίως τὰ σχήματα ΑΒΔ καὶ ΕΖΗΘ *(Σχ. 1)* εἶναι ἰσοδύναμα.

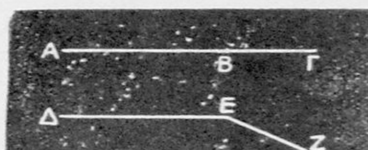


Σχ. 1.

§ 6. Ἄνισα σχήματα. — *Δύο σχήματα λέγονται ἄνισα, ἐὰν τὸ ἓν εἶναι ἴσον ἢ ἰσοδύναμον πρός τι μέρος τοῦ ἄλλου.* Οὕτω τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΖΘΗ *(Σχ. 1)* εἶναι ἄνισα.

Σχῆμά τι λέγεται μικρότερον ἄλλου, ἐὰν εἶναι ἴσον ἢ ἰσοδύναμον πρός τι μέρος τοῦ ἄλλου. Π.χ. τὸ ΑΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΕΖΘΗ *(Σχ. 1)*.

Σχῆμά τι λέγεται μεγαλύτερον ἄλλου, ἐὰν τὸ ἄλλο τοῦτο εἶναι μικρότερον ἐκείνου. Π.χ. τὸ σχῆμα ΕΖΘΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒΓ *(Σχ. 1)*.



Σχ. 2.

§ 7. Ἀξίωμα. *Ἀξίωμα καλεῖται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.*

Περὶ τῶν ἴσων σχημάτων δεχόμεθα τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα.

α') Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα σχήματα εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.

β') Δύο καὶ τὰ αὐτὰ σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἄνισα.

Διάφοροι ὁρισμοί. *Ἀπόδειξις καλεῖται συλλογισμὸς ἢ σειρὰ συλλογισμῶν, δι' ὧν πειθόμεθα ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.*

Θεώρημα καλεῖται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

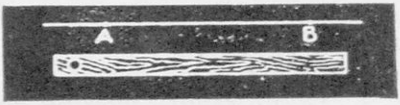
Πόρισμα καλεῖται πᾶσα πρότασις πηγάζουσα ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

Αἴτημα καλεῖται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας τὴν ἀλήθειαν δεχόμεθα ἄνευ ἀποδείξεως.

Εἴδη γραμμῶν.

§ 9. Α΄. Εὐθεῖα γραμμή. Παρατηροῦντες λεπτὸν νῆμα ἢ χορδὴν ἢ τρίχα καλῶς τεταμένην σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας γραμμῆς *(Σχ. 3)*.

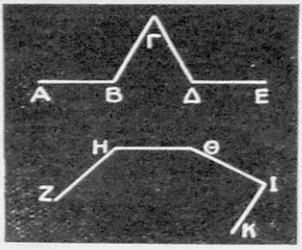
Τὰς εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν (1), συνήθως ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος *(Σχ. 3)*, κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου σύρομεν τὴν γραφίδα ἢ τὴν κιμωλίαν.



Σχ. 3.

Τὸ μεταξὺ δύο ὡρισμένων σημείων εὐθείας περιεχόμενον μέρος αὐτῆς καλεῖται ἰδιαιτέρως *εὐθύγραμμον τμῆμα*. Τὰ δὲ σημεῖα, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕκαστον τμῆμα, καλοῦνται *ἄκρα* αὐτοῦ.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου. Ἐπίσης διὰ τοῦ διαβήτου συγκρίνομεν πρὸς ἄλληλα δύο εὐθ. τμήματα καὶ διακρίνομεν, ἂν ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ποῖον τὸ μεγαλύτερον τούτων.



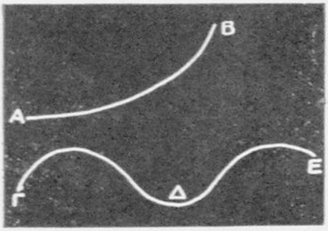
Σχ. 4.

Β΄. Τεθλασμένη γραμμή. *Τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία σύγκειται ἐξ εὐθυγρ. τμημάτων καὶ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.* Π. χ. αἱ γραμμαὶ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ *(Σχ. 4)* εἶναι τεθλασμέναι γραμμαί.

(1) Περὶ τῶν ἄλλων τρόπων χαράξεως εὐθείας βλέπε Πρακτικὴν Γεωμετρίαν μου (Ἐκδ. Θ΄ § 13).

Πλευραὶ τεθλασμένης γραμμῆς καλοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσιν αὐτήν.

Γ'. Καμπύλη γραμμή. *Καμπύλη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος, ὅσον καὶ ἂν ὑποτεθῇ μικρόν, εἶναι εὐθεῖα γραμμή.* Π. χ. ἡ γραμμή, εἰς ἣν περατοῦται ἑκατέρα ὄψις μεταλλικοῦ νομίσματος, εἶναι καμπύλη γραμμή. Ἐπίσης αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔΕ *(Σχ. 5)* εἶναι καμπύλαι γραμμαί.



Σχ.. 5.

Δ'. Μικτὴ γραμμή. *Μικτὴ γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων γραμμῶν.* Π.χ. ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 6)* εἶναι μικτὴ γραμμή.

§ 10. Ἀξιώματα περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα.

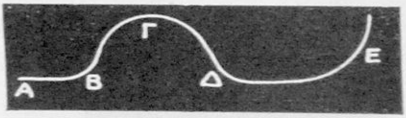
α'. *Διὰ δύο σημείων διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα γραμμή.*

Ἢ : *Δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας.*

Διὰ τοῦτο ἑκάστην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν διὰ δύο σημείων αὐτῆς. Λέγοντες π. χ. εὐθεῖαν ΑΒ *(Σχ. 3)* νοοῦμεν τὴν διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένην ταύτην.

β'. *Πᾶν εὐθ. τμῆμα δύναται νὰ νοηθῇ ἐκτεινόμενον ἐπ' ἄπειρον καὶ κατ' ἀμφότερα τὰ ἄκρα αὐτοῦ.*

Σημ. Εὐθ. τμῆμα ἐπεκτείνομεν, ὅσον δυνάμεθα, συνήθως τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος.



Σχ. 6.

γ'. *Πᾶν εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα.*

δ'. *Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα ἔχει ἓν μέσον, ἤτοι σημεῖον διαιροῦν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τμήματα.*

§ 11. Ἀπόστασις δύο σημείων.—*Ἀπόστασις δύο σημείων καλεῖται τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα.*

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθ. τμημάτων.

§ 12. Ἄθροισμα εὐθ. τμημάτων. *Ἄθροισμα εὐθ. τμη-*

μάτων καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι ταῦτα, ὅταν πάντα τεθῶσι τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο καὶ διαδοχικῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Οὕτως, ἂν ἐπὶ εὐθείας ληφθῶσι τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου εὐθ. τμήματα ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ *(Σχ. 7)*, ἀποτελεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα ΗΚ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ.

Σχ. 7.

Εὐθύγραμμόν τι τμῆμα καλεῖται διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἄλλου εὐθ. τμήματος, ἐὰν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο, τριῶν κτλ. εὐθ. τμημάτων ἴσων πρὸς αὐτό. Γίνεται δὲ εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου ἡ κατασκευὴ εὐθ. τμήματος διπλασίου, τριπλασίου κλπ. ἄλλου δοθέντος.

Εὐθ. τμῆμα καλεῖται ἥμισυ, τρίτον κτλ. ἄλλου, ἂν τοῦτο εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. ἐκείνου.

§ 13. Διαφορὰ δύο εὐθ. τμημάτων.—*Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθ. τμημάτων καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον μένει, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἀποκοπῇ τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.* Ἐὰν π.χ. ληφθῇ τμῆμα ΗΘ ἴσον τῷ ΑΒ *(Σχ. 7)*, διαφορὰ τῶν εὐθυγρ. τμημάτων ΗΚ καὶ ΑΒ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΘΚ.

ΣΗΜ. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῶν εὐθ. τμημάτων ἔχουσιν ἁπάσας τὰς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἰδιότητας τῶν πράξεων τούτων.

Εἴδη ἐπιφανειῶν.

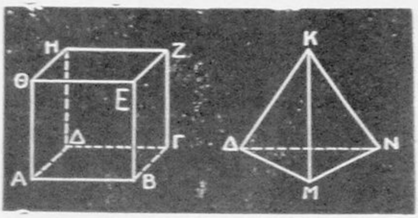
§ 14. Α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.—Ἔκ τινων παραδειγμάτων (§ 2) ἐσχηματίσαμεν εἰκόνα τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἢ τοῦ ἐπιπέδου. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ διὰ δύο τυχόντων σημείων τῆς ἐπιφανείας ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, μελανοπίνακος κ.τ.λ. διερχομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπ' αὐτῆς, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν συμβαίνει διὰ τὰς ἐπιφανείας ᾠοῦ, πορτοκαλίου κ.λ.π., ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον καλεῖται πᾶσα ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἅπασα ἡ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς διερχομένη εὐθεῖα.

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον διατυποῦμεν συντομώτερον οὕτω:

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον καλεῖται πᾶσα ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ.

Β΄. Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.— *Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια, καλεῖται πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ ἐπίπεδα ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον.* Οὕτως ἡ ἐπιφάνεια ἑκατέρου τῶν σωμάτων ΑΖ, ΚΔΜΝ (*Σχ. 8*) εἶναι τεθλασμένη ἐπιφάνεια.

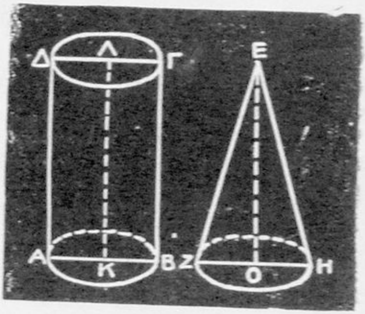


Σχ. 8.

Γ΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια.— *Καμπύλη ἐπιφάνεια καλεῖται πᾶσα ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον.* Π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ᾠοῦ, βόλου, εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

Δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια. *Μικτὴ ἐπιφάνεια καλεῖται πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἐξ ἐπιπέδων καὶ καμπύλων μερῶν.* Οὕτως ἡ ἐπιφάνεια ἑκατέρου τῶν σωμάτων ΑΒΓΔ, ΕΖΗ (*Σχ. 9*) εἶναι μικτὴ ἐπιφάνεια.

§ 15. Ἀξιώματα περὶ τοῦ ἐπιπέδου.—Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα:



Σχ. 9.

α΄) *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ νοηθῇ ἐπεκτεινόμενον κατ' ἀμφοτέρας αὐτοῦ τὰς διαστάσεις καὶ ἐπ' ἄπειρον.*

β΄) *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου οὕτως ὥστε ταῦτα νὰ ἀποτελῶσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον.*

γ΄) *Πᾶσα εὐθεῖα ἐπιπέδου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο μέρη. Τὸ δὲ ὑπὸ δύο σημείων αὐτοῦ ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα τέμνει ἢ οὔ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, καθ' ὅσον τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται εἰς διάφορα μέρη ἢ εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου.*

Εἴδη σχημάτων.

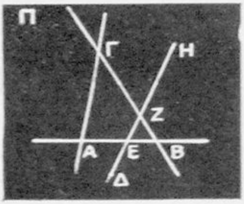
§ 16. Α΄. Ἐπίπεδα σχήματα.—*Ἐπίπεδον σχῆμα καλεῖται πᾶν σχῆμα, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ* *ἐπιπέδου*. Π.χ. τὰ σχήματα ΑΒΔ καὶ ΕΖΘΗ (*Σχ. 1*) εἶναι ἐπίπεδα σχήματα.

Β'. Στερεὰ σχήματα. *Στερεὸν σχῆμα καλεῖται πᾶν σχῆμα, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται πάντα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.* Π.χ. τὰ σχήματα ΑΖ καὶ ΚΔΜΝ (*Σχ. 8*) εἶναι στερεὰ σχήματα.

Ταυτιζόμενα ἐπίπεδα.

§ 17. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεθῶσιν οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ταῦτα ταυτίζονται ἐν τῇ θέσει ταύτῃ καὶ ἓν μόνον ἐπίπεδον ἀποτελοῦσιν.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ (*Σχ. 10*) τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα ἐπιπέδου τινὸς Π. Νοήσωμεν δὲ ἕτερον ἐπίπεδον Ρ τιθέμενον οὕτως ὥστε καὶ τοῦτο νὰ περιέχῃ τὰ τρία ταῦτα σημεῖα. Λέγω ὅτι ἐν τῇ θέσει ταύτῃ τὸ Ρ ταυτίζεται μετὰ τοῦ Π.



Σχ. 10.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀνήκουσιν εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων εὐθεῖαι (§ 14 Α'). Ἔστω ἤδη Δ τυχὸν σημεῖον τοῦ Π καὶ ΔΗ τυχοῦσα αὐτοῦ εὐθεῖα τέμνουσα εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ὡς κείμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ, ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἅπασα κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ καὶ τὸ σημεῖον Δ αὐτῆς κεῖται κατ' ἀκολουθίαν ἐπὶ τοῦ Ρ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ Ρ κεῖται ἐν τῷ Π. Ἔχουσι λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινὰ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐὰν πάντα τὰ ἄκρα δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ὁρισμὸς καὶ διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας.

§ 18. Γεωμετρία.—*Γεωμετρία καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία διδάσκει τὰ εἴδη τῶν σχημάτων, τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως αὐτῶν.*

Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, καλεῖται *Ἐπιπεδομετρία*. Τὸ δὲ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα, καλεῖται *Στερεομετρία*.

Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει τὰ διάφορα σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐξ ἧς ἕκαστον τούτων ἀποτελεῖται.

ΣΗΜ. Οἱ Αἰγύπτιοι καὶ οἱ Χαλδαῖοι φαίνεται ὅτι ἔθεσαν τὰς πρώτας βάσεις τῆς πρακτικῆς τοὐλάχιστον Γεωμετρίας. Οἱ φιλόσοφοι *Θαλῆς ὁ Μιλήσιος* (627—547 π. Χ.), καὶ *Πυθαγόρας ὁ Σάμιος* (580—500 π. Χ.) μετέφερον εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐξ Αἰγύπτου τὰς πρώτας γεωμετρικὰς γνώσεις. Οὗτοι δὲ καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς *Ἱπποκράτης ὁ Χῖος* (450 π. Χ.), *Πλάτων* (427—348 π. Χ.), *Εὐκλείδης* (287 π. Χ.), *Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος* (287—212 π. Χ.), *Ἀπολλώνιος* (260—210 π.Χ.) καὶ ἄλλοι βαθμιαίως ἀνέπτυξαν καὶ προήγαγον τὴν Γεωμετρίαν εἰς ἐπιστήμην ἀπαραμίλλου τελειότητος. Δικαίως ὅθεν ἡ Γεωμετρία θεωρεῖται ὡς κατ' ἐξοχὴν Ἑλληνικὴ ἐπιστήμη.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

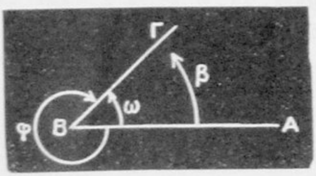
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Τὰ κυριώτερα ἐπίπεδα σχήματα.

1. Γωνία.

§ 19. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα γωνίας.—*Γωνία καλεῖται πᾶν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι εὐθεῖαν.*

Τὸ σχῆμα π.χ. ΑΒΓ *(Σχ. 11)* εἶναι γωνία.



Σχ. 11.

Αἱ δύο εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι γωνίαν τινά, καλοῦνται *πλευραὶ* τῆς γωνίας ταύτης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν γωνίας καλεῖται *κορυφὴ* τῆς γωνίας ταύτης. Οὕτω τῆς γωνίας ΑΒΓ πλευραὶ μὲν εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Β.

Ἑκάστην δεδομένην γωνίαν ὁρίζομεν καὶ ὀνομάζομεν διὰ τῆς κορυφῆς ἢ διὰ τριῶν σημείων, ὧν τὸ ἓν εἶναι ἡ κορυφή, τὰ δὲ ἄλλα κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν, ἓν εἰς ἑκάστην πλευράν. Κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν δὲ προσέχομεν νὰ ἀναγινώσκωμεν εἰς τὸ μέσον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς.

ΣΗΜ. Ἐνίοτε ὁρίζομεν δοθεῖσαν γωνίαν δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον θέτομεν ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς.

§ 20. Γένεσις γωνίας. — Ἑκάστην γωνίαν δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν γεννωμένην ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς στρεφομένης κατὰ ὡρισμένην φορὰν περὶ τὴν κορυφὴν καὶ χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς αὐτῆς. Οὕτως ἡ γωνία ω *(Σχ. 11)* γεννᾶται ὑπὸ τῆς ΒΑ στρεφομένης κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ στραφῇ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς τοῦ βέλους β, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, θέλει γράψει ἄλλην γωνίαν, τὴν φ.

Ἡ ἀρχικὴ θέσις τῆς στρεφομένης εὐθείας καλεῖται *ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας*, ἡ δὲ τελικὴ αὐτῆς θέσις καλεῖται *τελικὴ πλευρὰ αὐτῆς*.

§ 21. Κοίλη καὶ κυρτὴ γωνία. — Ἐὰν ἡ πρὸς γένεσιν γωνίας στρεφομένη εὐθεῖα σταματήσῃ πρὶν συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς, ἡ γραφεῖσα γωνία καλεῖται *κοίλη γωνία*. Ἐὰν δὲ αὕτη παύσῃ κινουμένη μετὰ τὴν διὰ τῆς ῥηθείσης προεκτάσεως δίοδον, ἡ γραφεῖσα γωνία καλεῖται *κυρτὴ γωνία*. Οὕτως ἡ γωνία ω *(Σχ. 11)* εἶναι κοίλη, ἡ δὲ φ κυρτὴ γωνία.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις λέγοντες ἁπλῶς γωνίαν θέλομεν νοεῖ κοίλην γωνίαν.

2. Εὐθύγραμμα σχήματα.

§ 22. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα εὐθ. σχήματος. — *Εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται πᾶν μέρος ἐπιπέδου πανταχόθεν ὑπὸ εὐθ. τμημάτων περικλειόμενον.* Τὰ σχήματα π.χ. ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘΙΚ, ΛΜΝ *(Σχ. 12)* εἶναι εὐθ. σχήματα.

Πλευραὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα, ὑφ' ὧν τοῦτο περικλείεται.

Γωνίαι εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

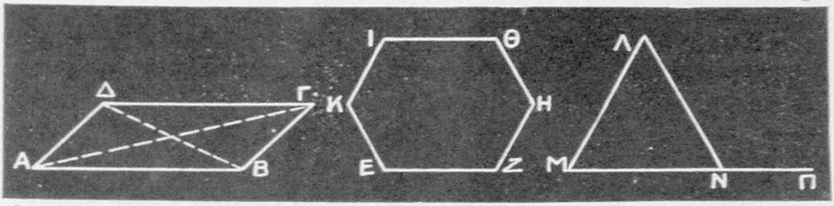
Κορυφαὶ εὐθυγράμμου σχήματος καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἕκαστον εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν.

Τὰ εὐθ. σχήματα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν καλοῦνται *τρίγωνα ἢ τρίπλευρα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα κλπ.*

Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα κλπ. καλοῦνται συνήθως *πολύγωνα.*

Ἐξωτερικὴ γωνία εὐθ. σχήματος καλεῖται πᾶσα γωνία σχηματιζομένη ὑπό τινος πλευρᾶς καὶ τῆς προεκτάσεως οἱασδήποτε τῶν



Σχ. 12.

προσκειμένων αὐτῇ πλευρῶν τοῦ εὐθ. σχήματος. Οὕτως ἡ γωνία ΛΝΠ *(Σχ. 12)* εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΛΜΝ.

Διαγώνιος εὐθ. σχήματος καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς αὐτοῦ. Οὕτω τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ *(Σχ. 12).*

Τὰ τρίγωνα στεροῦνται διαγωνίων, διότι εἰς ταῦτα δὲν ὑπάρχουσι κορυφαὶ μὴ διαδοχικαί.

Περίμετρος εὐθ. σχήματος καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Κατ' ἀναλογίαν *περίμετρος τεθλ. γραμμῆς καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτῆς.*

Κυρταὶ τεθλ. γραμμαὶ καὶ κυρτὰ εὐθ. σχήματα.

§ 23. **Ὁρισμοί.** — *Κυρτὴ τεθλ. γραμμὴ καλεῖται πᾶσα ἐπίπεδος τεθλ. γραμμή, τῆς ὁποίας ἑκάστη πλευρὰ προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν ἀφήνει ὅλην τὴν τεθλ. γραμμὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.*

Οὕτως ἡ ἐπίπεδος τεθλ. γραμμὴ ΖΗΘΙΚ *(Σχ. 4)* εἶναι κυρτή, ἐν ᾧ ἡ ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 4)* δὲν εἶναι τοιαύτη.

Κυρτὸν εὐθ. σχῆμα καλεῖται πᾶν εὐθ. σχῆμα, ὅπερ περικλείεται ὑπὸ κυρτῆς τεθλ. γραμμῆς. Οὕτω τὰ εὐθ. σχήματα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘΙΚ, ΛΜΝ *(Σχ. 12)* εἶναι πάντα κυρτὰ εὐθ. σχήματα, ἐν ᾧ τὸ ΕΖΗΘΙ *(Σχ. 14)* δὲν εἶναι κυρτόν.

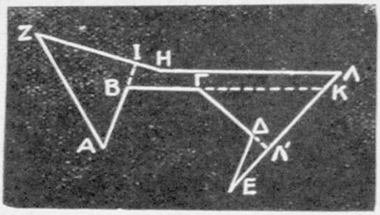
Αἱ περίμετροι τῶν κυρτῶν τεθλ. γραμμῶν καὶ εὐθ. σχημάτων ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 24. Θεώρημα I.— *Ἡ περίμετρος πάσης κυρτῆς τεθλ. γραμμῆς εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου πάσης ἄλλης τεθλ. γραμμῆς, ἥτις περιβάλλει αὐτὴν πανταχόθεν καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα.*

Ἔστω ἡ κυρτὴ τεθλ. γραμμὴ ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 13)* καὶ τυχοῦσα ἄλλη τεθλ. γραμμὴ ΑΖΗΛΕ, ἥτις περιβάλλει ἐκείνην καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα Α καὶ Ε.

Λέγω ὅτι $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ<ΑΖ+ΖΗ+ΗΛ+ΛΕ.$

Ἀπόδειξις. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ καὶ ἑκάστην κατὰ τὴν φοράν, ἥτις ἄγει ἐκ τοῦ α′ πρὸς τὸ β′ ἄκρον, ὡς ταῦτα προηγουμένως ἀνεγράφησαν. Ἔστωσαν δὲ Ι, Κ, Λ′ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ προεκτάσεις αὗται τέμνουσι τὴν τεθλ. γραμμὴν ΑΖΗΛΕ.



Σχ. 13.

Κατὰ τὸ ἀξίωμα (§ 10γ′) εἶναι $ΑΒ+ΒΙ<ΑΖ+ΖΙ,\quad ΒΓ+ΓΚ<ΒΙ+ΙΗ+ΗΛ+ΛΚ,$

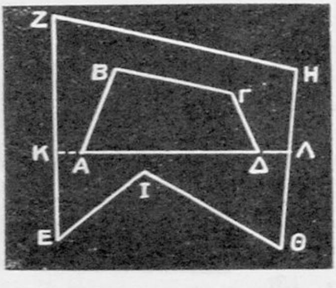
$$ΓΔ+ΔΛ'<ΓΚ+ΚΛ' \quad\text{καὶ}\quad ΔΕ<ΔΛ'+Λ'Ε.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς ἀνισότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἀφαιρέσωμεν εἶτα ἀπὸ τῶν ἀνίσων ἀθροισμάτων τὰ κοινὰ μέρη ΒΙ, ΓΚ καὶ ΔΛ′ προκύπτει ὅτι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΙ<ΑΖ+ΖΙ+ΙΗ+ΗΛ+ΛΚ+ΚΛ'+Λ'Ε \quad\text{ἢ}$$

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ<ΑΒ+ΖΗ+ΗΛ+ΛΕ. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

§ 25. Θεώρημα II.— *Ἡ περίμετρος παντὸς κυρτοῦ εὐθ. σχήματος εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου πάσης τεθλ. γραμμῆς περικλειούσης αὐτὸ πανταχόθεν.*



Σχ. 14.

Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 14)* τυχὸν κυρτὸν εὐθ. σχ. καὶ ΕΖΗΘΙ τυχοῦσα τεθλ. γραμμὴ περιβάλλουσα αὐτὸ πανταχόθεν.

Λέγω ὅτι :

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΕ.$$

Ἀπόδειξις. Προεκτείνομεν ἑκατέρωθεν πλευράν τινα, π. χ. τὴν ΑΔ, τοῦ κυρτοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αὕτη τέμνῃ τὴν ΕΖΗΘΙ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ<ΑΚ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΛ+ΛΔ.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης τὸ αὐτὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ, προκύπτει ὅτι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΑΚ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΛ+ΛΔ+ΔΑ \text{ ἢ}$$
$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΚΛ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΛ.$$

Ἐὰν εἰς ταύτην ἀντὶ ΚΛ τεθῇ τὸ μεγαλύτερον (§ 10γ΄) ἄθροισμα

$$ΚΕ+ΕΙ+ΙΘ+ΘΛ, \text{ προκύπτει ἡ ἀνισότης}$$
$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΚΕ+ΕΙ+ΙΘ+ΘΛ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΛ \text{ ἢ}$$
$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΕ, \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀσκήσεις. 1) Ἡ περίμετρος τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἀπὸ σημείου ἐντὸς αὐτοῦ κειμένου.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου ἐντὸς τριγώνου κειμένου ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τούτου.

3) Τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

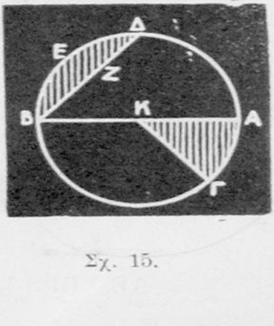
3. Κύκλος.

§ 26. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κύκλου.—*Κύκλος καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται.*

Περιφέρεια κύκλου καλεῖται ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος περατοῦται. Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν συνήθως διὰ τοῦ διαβήτου.

Κέντρον κύκλου καλεῖται τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὅπερ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας του. Οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΔΒΓ (*Σχ. 15*) περικλειόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος, οὗ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Κ καὶ περιφέρεια ἡ γραμμὴ ΑΔΒΓ.

Ἀκτὶς κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆτμῆμα, τὸ ὁποῖον ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν. Π. χ. τὰ εὐθ. τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ (*Σχ. 15*) εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ.



Σχ. 15.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου: *Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διάμετρος κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Π.χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ (*Σχ. 15*) εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ.

Ἑκάστη διάμετρος ἀποτελεῖται προφανῶς ἐκ δύο ἀκτίνων καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν: *Αἱ διάμετροι ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

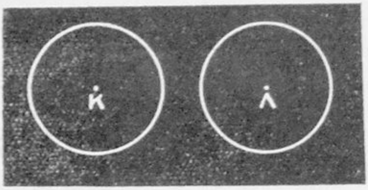
ΣΗΜ. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἀπόστασις σημείου τοῦ ἐπιπέδου κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, καθ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τούτου.

Ὥστε ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου κύκλου πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ καὶ μόνον αὐτὰ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια ἑκάστου κύκλου καλεῖται ***γεωμετρικὸς τόπος*** ἢ ἁπλῶς ***τόπος*** τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ὧν ἕκαστον ἀπέχει τοῦ κέντρου ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι αὐτοῦ.

Ἴσοι κύκλοι καὶ ἴσαι περιφέρειαι.

§ 27. Θεώρημα Ι. —*Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων Κ, Λ εἶναι ἴσαι, οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι ἴσοι, καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἐπίσης ἴσαι.*

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ, οὕτως ὥστε τὸ κέντρον Λ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Κ. Ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας Λ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, διότι, ἂν ἔπιπτεν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, θὰ ἀπεῖχεν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ κύκλου Λ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ. Εἶναι ἄρα οἱ κύκλοι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι ἴσαι, ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 16.

ΣΗΜ. Δεχόμενοι ὅτι σημεῖόν τι Μ τῆς περιφερείας Λ πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, ὀφείλομεν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΛΜ εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Κ, ὅπερ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Διὰ τοῦτο χαρακτηρίζομεν ὡς ψευδὲς ὅτι τὸ Μ πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ· κατ᾽ ἀνάγκην ἄρα ὀφείλομεν νὰ δεχθῶμεν ὡς ἀληθὲς ὅτι τὸ Μ πίπτει ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ, διότι ἄλλο τι δὲν δύναται νὰ συμβῇ.

Γενικῶς: Ἂν δεχόμενοι πρότασίν τινα ὡς ἀληθῆ καταλήξωμεν εἰς συμπέρασμα ἀντίθετον πρὸς ἤδη παραδεδεγμένας ἀληθείας ἢ πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, τὴν πρότασιν ἐκείνην χαρακτηρίζομεν ὡς ψευδῆ. Ἂν δὲ πᾶσαι αἱ περὶ ὑποκειμένου τινὸς δυναταὶ κρίσεις χαρακτηρισθῶσιν οὕτω ψευδεῖς, πλὴν μιᾶς, αὕτη εἶναι ἀληθής.

Ἡ ἀποδεικτικὴ αὕτη μέθοδος εἶναι συνήθης εἰς τὰ Μαθηματικά, ὀνομάζεται δὲ *πλαγία ἀπόδειξις* ἢ *μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*.

4. Μέρη περιφερείας τοῦ κύκλου.

§ 28. Τόξον. — Χορδὴ τόξου. — *Τόξον καλεῖται τυχὸν μέρος περιφερείας.* Π.χ. τὰ μέρη ΑΔ, ΔΒ, ΑΓ τῆς περιφερείας Κ (*Σχ. 15*) εἶναι τόξα.

Χορδὴ τόξου καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, ὅπερ ὁρίζουσι τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν (§ 10 α΄), ἐν ᾧ εἰς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα.

Ἐὰν κύκλος (Κ, α) νοηθῇ στρεφόμενος περὶ τὸ κέντρον του, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου του, πᾶν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας θὰ κεῖται ἐπ᾿ αὐτῆς διότι εἶναι πάντοτε ΚΜ=α.

Ἄρα: *Πᾶν τόξον ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.* Κατ᾿ ἀκολουθίαν δὲ *δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.* Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν τὸ Θ. (§ 27) κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τόξα ἴσων περιφερειῶν.

Περὶ τῶν τόξων δεχόμεθα τὸ ἀκόλουθον ἀξίωμα.

Πᾶν τόξον ἔχει μέσον καὶ μόνον ἕν.

§ 29. Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ τόξων.—*Ἄθροισμα τόξων τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν καλεῖται τὸ τόξον, ὅπερ σχηματίζεται, ἂν ταῦτα τεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ οὕτως ὥστε τὸ τέλος ἑκάστου νὰ εἶναι ἀρχὴ τοῦ ἀκολούθου.* Οὕτω τῶν τόξων ΑΔ, ΔΒ, ΒΓ (Σχ. 15) ἄθροισμα εἶναι τὸ ὑπ᾿ αὐτῶν ἀποτελούμενον τόξον ΑΒΓ.

Τόξον τι λέγεται διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. ἄλλου, ἐὰν εἶναι ἄθροισμα δύο, τριῶν κλπ. τόξων ἴσων πρὸς τὸ ἄλλο.

Τόξον τι καλεῖται ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κλπ. ἄλλου, ἂν τὸ ἄλλο τοῦτο εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κλπ. ἐκείνου.

Τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας καλεῖται μοῖρα (°)· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον καλεῖται πρῶτον λεπτὸν (′)· ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 δεύτερα λεπτά (″). Ἡ μοῖρα καὶ τὰ ῥηθέντα μέρη αὐτῆς χρησιμεύει ὡς μονάς, πρὸς ἣν συγκρίνονται τὰ τόξα. Οὕτως, ἂν τόξον τι εἶναι 25πλάσιον τοῦ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας, λέγομεν ὅτι εἶναι τόξον 25 μοιρῶν καὶ σημειοῦται οὕτω 25°.

Τὸ ἄθροισμα $\tau+\tau+\frac{\tau}{10}+\frac{3\tau}{100}+\frac{4\tau}{1000}=T$ καλεῖται γινόμενον τοῦ τόξου τ ἐπὶ 2,134. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 2,134 καλεῖται λόγος τοῦ Τ πρὸς τὸ τ, ἤτοι $T:\tau=2,134$.

Διαφορὰ δύο ἀνίσων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας καλεῖται τὸ τόξον, ὅπερ μένει, ἂν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ ἀποκοπῇ τόξον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον. Π. χ. τῶν ΑΔΕ καὶ ΑΔ *(Σχ. 15)* διαφορὰ εἶναι τὸ τόξον ΔΕ.

§ 30. Τμῆμα κύκλου. Κυκλικὸς τομεύς.—*Τμῆμα κύκλου καλεῖται μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.* Π. χ. τὸ μέρος ΔΕΒΖ τοῦ κύκλου Κ *(Σχ. 15)* εἶναι τμῆμα κύκλου.

Κυκλικὸς τομεὺς καλεῖται μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τόξου τινὸς καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Π. χ. τὸ μέρος ΑΚΓ τοῦ κύκλου Κ *(Σχ. 15)* εἶναι κυκλικὸς τομεύς.

Βάσις κυκλικοῦ τομέως καλεῖται τὸ τόξον αὐτοῦ.

Γωνία δὲ κυκλικοῦ τομέως καλεῖται ἡ γωνία τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

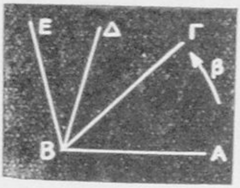
Εἴδη γωνιῶν. Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν. Γωνίαι ἔχουσαι κοινὴν κορυφήν.

§ 31. Α′. Ἐφεξῆς γωνίαι.—*Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.* Π. χ, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ *(Σχ. 17)* εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι.

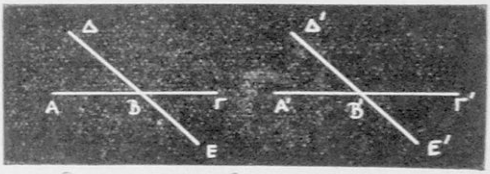
Β′. Διαδοχικαὶ γωνίαι.—*Γωνίαι τινὲς λέγονται διαδοχικαί, ἐὰν ἑκάστη μετὰ τῆς ἑπομένης εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι.* Π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ *(Σχ. 17)* εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι.

Γ΄. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι.—*Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ αἱ πλευραὶ ἑκατέρας εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.* Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ (*Σχ. 18*) εἶναι κατὰ κορυφήν.

§ 32. **Θεώρημα Ι.**—*Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.* Λέγω δηλ. ὅτι γων. ΑΒΕ=ΔΒΓ (*Σχ. 18*).



Σχ. 17.



Σχ. 18.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α′Γ′, Δ′Ε′ τεμνόμεναι εἰς τὸ Β′ σχηματίζουσιν εἰς ἄλλην θέσιν τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι καὶ αἱ ΑΓ, ΔΕ, ἤτοι
$A\widehat{B}\Delta = A'\widehat{B'}\Delta'$, $\Delta\widehat{B}\Gamma = \Delta'\widehat{B'}\Gamma'$ κτλ. Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι τὸ δεύτερον τοῦτο σχῆμα τίθεται ἐπὶ τοῦ α΄, οὕτως ὥστε τὸ Β′ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, ἡ πλευρὰ Β′Δ′ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἡ Β′Α′ νὰ εὑρίσκηται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ΒΔ μέρος ὡς πρὸς τὴν ΑΒ. Τότε ἡ πλευρὰ Β′Α′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΔ, διότι ΑΒΔ=Α′Β′Δ′, ἡ δὲ Β′Γ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΕ. Ἡ γωνία ἄρα Δ′Β′Γ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΕ καὶ ἑπομένως εἶναι $A\widehat{B}E = \Delta'\widehat{B'}\Gamma'$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\Delta\widehat{B}\Gamma = \Delta'\widehat{B'}\Gamma'$ ἕπεται ὅτι $A\widehat{B}E = \Delta\widehat{B}\Gamma$. ὅ. ἔ. δ.

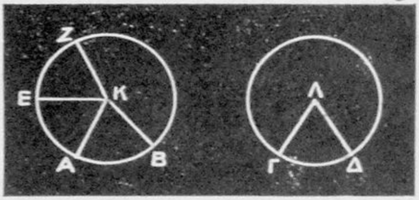
Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν ἐκ τῶν γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν, εἶναι δύο ἐφεξῆς ἴσαι, πᾶσαι αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Ἐπίκεντροι γωνίαι. Ἰδιότητες αὐτῶν.

§ 33. **Ἐπίκεντροι γωνίαι.** — *Ἐπίκεντρος γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι κέντρον κύκλου τινός.* Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΓΛΔ (*Σχ. 19*) εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐπικέντρου γωνίας περιεχόμενον τόξον καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον. Οὕτω τὸ τόξον ΑΒ (Σχ. 19) εἶναι ἀντίστοιχον τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ, ἡ δὲ ΑΚΒ λέγομεν ὅτι βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ.

§ 34. Θεώρημα I.— *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι. Καὶ ἀντιστρόφως. Ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων.*



Σχ. 19.

Α΄) Ἔστω Κ=Λ καὶ $\widehat{ΑΒ}=\widehat{ΓΔ}$ (Σχ. 19). Λέγω ὅτι $Α\hat{Κ}Β=Γ\hat{Λ}Δ$.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ, οὕτως ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ συμπέσωσι καὶ τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, τὸ δὲ Δ νὰ κεῖται πρὸς ὃ μέρος τῆς ΚΑ κεῖται καὶ τὸ Β. Εἶναι ἤδη φανερὸν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΛΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΑ (§ 10 α΄), ἡ περιφέρεια τοῦ Λ θὰ ἐφαρμόσῃ (§ 27) ἐπὶ τῆς ἴσης περιφερείας τοῦ κύκλου Κ καὶ τὸ τόξον ΓΔ ἐπὶ τοῦ ΑΒ. Κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ ἀκτὶς ΛΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΒ. Ἡ γωνία ἄρα ΓΛΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚΒ· ἄρα αὗται εἶναι ἴσαι. ὅ.ἔ.δ.

Ἂν τὰ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΕΖ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ καὶ νοηθῇ ἐπὶ ἴσης περιφερείας Λ τόξον ΓΔ ἴσον αὐτοῖς, θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀποδεχθέντα $Α\hat{Κ}Β=Γ\hat{Λ}Δ$ καὶ $Ε\hat{Κ}Ζ=Γ\hat{Λ}Δ$· ἄρα $Α\hat{Κ}Β=Ε\hat{Κ}Ζ$. ὅ.ἔ.δ.

Β΄. *Ἀντιστρόφως.* Ἂν εἶναι $Α\hat{Κ}Β=Γ\hat{Λ}Δ$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΒ}=\widehat{ΓΔ}$.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ, οὕτως ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ συμπέσωσι καὶ ἡ ἀκτὶς ΛΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΑ, τὸ δὲ σημεῖον Δ, πρὸς ὃ μέρος τῆς ΚΑ κεῖται καὶ τὸ Β. Οὕτως ἡ μὲν περιφέρεια Λ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Κ, ἡ δὲ ἀκτὶς ΛΔ ἐπὶ τῆς ΚΒ, διότι $Α\hat{Κ}Β=Γ\hat{Λ}Δ$· καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον Δ πίπτει ἐπὶ τοῦ Β. Τὸ τόξον ἄρα ΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΒ καὶ συνεπῶς ταῦτα εἶναι ἴσα. ὅ.ἔ.δ.

Ἂν ἴσαι ἐπίκ. γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΕΚΖ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ

Κ καὶ νοηθῇ ἐν ἴσῳ κύκλῳ Λ ἐπίκ. γωνία ΓΛΔ ἴση αὐταῖς, θὰ εἶναι $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overset{\frown}{EZ}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἄρα $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{EZ}$. ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 4) Δύο διάμετροι κύκλου διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τόξα, ὧν ἕκαστον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπέναντι κείμενον.

5) Ἐὰν δύο διάμετροι κύκλου σχηματίζωσι δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, αἱ διάμετροι αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα.

§ 35. Θεώρημα ΙΙ.— *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ ἀνίσων τόξων βαίνουσιν ὁμοίως ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι. Καὶ ἀντιστρόφως. Ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ὁμοίων ἀνίσων τόξων.*

Α΄. Ἔστωσαν ἴσαι περιφέρειαι Κ, Λ *(Σχ. 19)* καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}<\overset{\frown}{EB}$. Λέγω ὅτι καὶ $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta<E\hat{K}B$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}<\overset{\frown}{EB}$, τὸ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μέρος $\overset{\frown}{BA}$ τοῦ $\overset{\frown}{EB}$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν $A\hat{K}B=\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{EB}$ τὸ Α κεῖται μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Β, ἡ δὲ ἀκτὶς ΚΑ ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΚΒ, ὅθεν $A\hat{K}B<E\hat{K}B$. Ἄρα καὶ $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta<E\hat{K}B$. ὅ.ἔ.δ.

Β΄. *Ἀντιστρόφως.* Ἂν εἶναι $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta<E\hat{K}B$, θὰ εἶναι καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}<\overset{\frown}{EB}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta<E\hat{K}B$, ἕπεται ὅτι $\Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ ἰσοῦται πρὸς μέρος $B\hat{K}A$ τῆς $E\hat{K}B$ καὶ ἐπομένως $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\overset{\frown}{AB}$. Ἐπειδὴ δέ, τῆς ΚΑ οὔσης ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΚΒ, τὸ Α κεῖται μεταξὺ Ε καὶ Β, ἕπεται ὅτι $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{EB}$· ἄρα $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}<\overset{\frown}{EB}$. ὅ. ἔ. δ.

Καθ᾽ ἣν περίπτωσιν τὰ ἄνισα τόξα ἢ ἐπίκεντροι γωνίαι ἀνήκουσιν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἡ ἀπόδειξις γίνεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὰς ἀντιστοίχους περιπτώσεις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

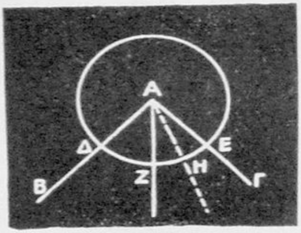
ΣΗΜ. Τὰ θεωρήματα (§ 34 καὶ § 35) ἰσχύουσι καὶ διὰ κυρτὰς ἐπικέντρους γωνίας καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

Διχοτόμος γωνίας.

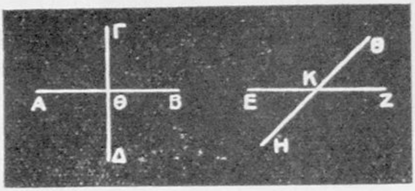
§ 36. Θεώρημα Ι.— *Ἑκάστη γωνία Α διαιρεῖται ὑπὸ εὐθείας καὶ μιᾶς μόνον εἰς δύο ἴσας γωνίας.*

Ἀπόδειξις. Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν ταύτην ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΔΕ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον καὶ Ζ τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΖ θὰ εἶναι $B\widehat{A}Z = Z\widehat{A}E$ (§ 34).

Ἂν δὲ ἦτο καὶ $\Delta\widehat{A}H = H\widehat{A}E$ θὰ ἦτο καὶ $\overset{\frown}{\Delta H} = \overset{\frown}{HE}$, θὰ εἶχε δὲ τὸ τόξον ΔΕ δύο μέσα, ὅπερ ἄτοπον (§ 28). Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΖ καὶ μόνον αὐτὴ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ εἰς δύο ἴσας γωνίας, ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 20



Σχ. 21.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, καλεῖται διχοτόμος αὐτῆς.

Κατὰ τὸ προηγούμενον Θ ἑκάστη γωνία ἔχει διχοτόμον καὶ μίαν μόνον.

ΣΗΜ. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ προηγούμενα ἰσχύουσι καὶ διὰ κυρτὰς γωνίας.

Κάθετοι καὶ πλάγιαι εὐθεῖαι.—Γωνίαι αὐτῶν.

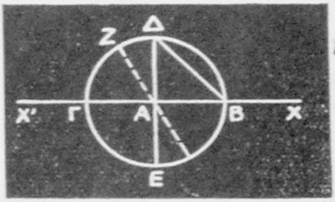
§ 37. Ὁρισμοί.—*Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι, ἐὰν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.* Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 21)* εἶναι κάθετοι εὐθεῖαι.

Πᾶσα γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ καθέτων εὐθειῶν καλεῖται ὀρθὴ γωνία.

Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι δὲν εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ *(Σχ. 21)* εἶναι πλάγιαι εὐθεῖαι.

§ 38. Θεώρημα 1.—*Δι' ἑκάστου σημείου εὐθείας ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνον.*

Ἀπόδειξις. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α εὐθείας Χ΄Χ *(Σχ. 22)* καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν· αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς Χ΄Χ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς δύο τόξα. Ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἑνὸς τούτων καὶ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΑΕ θὰ εἶναι $\widehat{ΓΑΔ}=\widehat{ΔΑΒ}$ (§ 34). Ἄρα (32 Πόρ.) καὶ $\widehat{ΓΑΔ}=\widehat{ΔΑΒ}=\widehat{ΒΑΕ}=\widehat{ΕΑΓ}$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι Χ'Χ καὶ ΔΑΕ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.



Σχ. 22.

Ἂν καὶ ἄλλη εὐθεῖα ΑΖ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν Χ'Χ, θὰ ἦτο $\widehat{ΓΑΖ}=\widehat{ΖΑΒ}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\overset{\frown}{ΓΖ}=\overset{\frown}{ΖΒ}$, θὰ εἶχε δὲ τότε τὸ τόξον ΓΔΒ δύο μέσα, τὸ Δ καὶ Ζ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸ γνωστὸν (§ 28) ἀξίωμα. Ὥστε διὰ τοῦ Α ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν Χ'Χ ἡ ΔΑ καὶ μόνον αὐτή. ὅ. ἔ. δ.

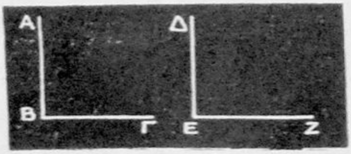
Πόρισμα Ι.—*Δύο κάθετοι διάμετροι κύκλοι διαιροῦσι τὴν μὲν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα (τεταρτημόρια), τὸν δὲ κύκλον εἰς τέσσαρας ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς (τεταρτοκύκλια).*

Πόρισμα ΙΙ.—*Πᾶσα διάμετρος κύκλου διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα τόξα (ἡμιπεριφερείας) καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα τμήματα κύκλου (ἡμικύκλια).*

ΣΗΜ. Τυχοῦσα χορδὴ ΒΔ (Σχ. 22) διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ τόξα ΒΔ καὶ ΔΓΒ, ὧν ΒΔ<ΒΔΓ καὶ ΔΓΒ>ΔΓΕ· ἄρα $\overset{\frown}{ΒΔ}<\overset{\frown}{ΔΓΒ}$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ἡ χορδὴ ΒΔ διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα τμήματα κύκλου. Πλὴν τῶν διαμέτρων λοιπὸν οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἔχει τὰς ὑπὸ τοῦ Πορ. ΙΙ ἀναφερομένας ἰδιότητας· κατ' ἀκολουθίαν δὲ πᾶσα εὐθεῖα ἔχουσα τὴν ἑτέραν τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἶναι διάμετρος, ἔχει δὲ συνεπῶς καὶ τὴν ἄλλην τῶν ἰδιοτήτων τούτων.

§ 39. Θεώρημα ΙΙ.—*Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ὀρθὴ γωνία ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΒΓ (*Σχ. 23*) καὶ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ πλευρὰ ΕΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ. Διότι ἄλλως θὰ ἤγοντο διὰ τοῦ Β δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ὅπερ ἄτοπον (§ 3-). Ἄρα $\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{ΔΕΖ}$. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 23.

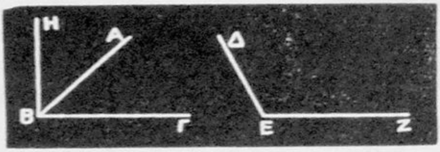
Ἕνεκα τοῦ σταθεροῦ μεγέθους τῆς ὀρθῆς γωνίας λαμβάνεται αὕτη ὡς μονὰς πρὸς τὴν ὁποίαν συγκρίνονται αἱ ἄλλαι γωνίαι.

§ 40. Ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι γωνίαι.—*Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας καλεῖται ὀξεῖα γωνία.* Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 24)* εἶναι ὀξεῖα γωνία.

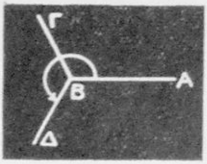
Πᾶσα γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας καλεῖται ἀμβλεῖα γωνία. Π.χ. ἡ γωνία Ε *(Σχ. 24)* εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν.

§ 41. Ἄθροισμα ἐφεξῆς γωνιῶν.—*Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν καλεῖται ἡ ὑπὸ τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κοινὴ αὐτῶν πλευρά.* Π.χ. τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΓΒΑ καὶ ΑΒΗ *(Σχ. 24)* ἄθροισμα



Σχ. 24.

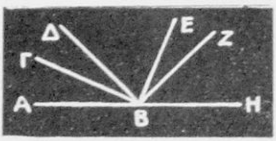


Σχ. 25.

εἶναι ἡ γωνία ΓΒΗ, τῶν δὲ ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ *(Σχ. 25)* ἄθροισμα εἶναι ἡ κυρτὴ γωνία ΑΒΔ.

Β΄. *Ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν.* Τὸ ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὰς δύο πρώτας, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὴν τρίτην καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ προστεθῶσι πᾶσαι αἱ γωνίαι. Π.χ. τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ καὶ ΕΒΖ *(Σχ. 26)* ἄθροισμα εἶναι ἡ γωνία ΑΒΖ.

Γ΄. *Ἄθροισμα οἱωνδήποτε γωνιῶν.* Τὸ ἄθροισμα οἱωνδήποτε γωνιῶν εὑρίσκομεν, ἂν καταστήσωμεν ταύτας διαδοχικὰς καὶ προσθέσωμεν κατὰ τὰ προηγούμενα.



Σχ. 26.

Γωνία τις λέγεται διπλασία, τριπλασία κλπ. ἄλλης, ἂν εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο, τριῶν κτλ. γωνιῶν, ἴσων πρὸς ταύτην.

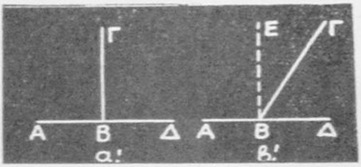
Γωνία τις λέγεται ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ. ἄλλης, ἐὰν ἡ ἄλλη εἶναι διπλασία, τριπλασία κτλ. ταύτης.

Ἐὰν ω εἶναι μία γωνία, τὸ ἄθροισμα

$$\omega+\omega+\omega+\frac{2\omega}{10}+\frac{3\omega}{100}+\frac{7\omega}{1000}=\Theta$$

καλεῖται γινόμενον τῆς γωνίας ω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,237.

§ 42. **Συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι.** — *Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν.* Π.χ. αἱ γωνίαι ΓΒΑ καὶ ΑΒΗ *(Σχ. 24)* εἶναι συμπληρωματικαὶ γωνίαι.



Σχ. 27.

Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται γωνίαι γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος.

§ 43. **Θεώρημα I.** — *Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.*

Λέγω δηλ. ὅτι ΑΒΓ+ΓΒΔ=2ὀρθ. *(Σχ. 27).*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ κοινὴ πλευρὰ ΒΓ εἶναι *(Σχ. 27 β')* πλαγία πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ διὰ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΔ ἀγομένη κάθετος ΒΕ κεῖται προφανῶς ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΑΒΓ, εἶναι δὲ

$$\mathrm{A\hat{B}E}=1 \text{ ὀρθ. καὶ } \mathrm{E\hat{B}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta}=1 \text{ ὀρθ. Ἄρα}$$

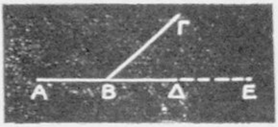
$$\mathrm{A\hat{B}E}+\mathrm{E\hat{B}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta}=2 \text{ ὀρθ. ἢ } \mathrm{A\hat{B}\Gamma}+\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ τὸ θεώρημα εἶναι προφανές.

Πόρισμα I. — *Ἐὰν ἐκ σημείου εὐθείας ἀχθῶσι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ σχηματιζόμεναι διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.*

Πόρισμα II. — *Ἐὰν ἐκ σημείου ἀχθῶσι τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ σχηματιζόμεναι διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.*

§ 44. Θεώρημα ΙΙ.—*('Αντίστροφον τοῦ Ι). 'Εὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*



Σχ. 28.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι

$\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΓΒΔ}=2$ ὀρθ. *(Σχ. 28).*

Λέγω ὅτι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

'Απόδειξις. 'Εὰν ΒΕ εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κορυφῆς Α. θὰ εἶναι $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΓΒΕ}=2$ ὀρθ. (§ 43). 'Επειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι καὶ $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΓΒΔ}=2$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΓΒΕ}=\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΓΒΔ}$, ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ὅτι $\widehat{ΓΒΕ}=\widehat{ΓΒΔ}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΒΕ συμπίπτουσιν. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΔ προέκτασις τῆς ΑΒ, ἤτοι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. ὅ. ἔ. δ.

§ 45. Διαφορὰ δύο γωνιῶν.—*Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία, ἡ ὁποία μένει, ἐὰν ἀρχόμενοι ἀπό τινος πλευρᾶς τῆς μεγαλυτέρας ἀποκόψωμεν ἀπ' αὐτῆς γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν μικροτέραν.* Π.χ. τῶν γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ *(Σχ. 27)* διαφορὰ εἶναι ἡ γωνία ΕΒΓ.

'Ασκήσεις. 6) Γωνία τις ἰσοῦται πρὸς $\frac{2}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς συμπληρωματικῆς καὶ πόσον τὸ τῆς παραπληρωματικῆς;

7) 'Εὰν γωνία τις πολυγώνου εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσης ἐξωτερικῆς γωνίας αὐτοῦ;

8) 'Εξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι $1\frac{5}{7}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσης ἐσωτερικῆς γωνίας αὐτοῦ;

9) 'Εὰν ἀγομένων ἐκ σημείου εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθειῶν δύο τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ τρίτη εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἴσων ἐκείνων γωνιῶν;

10) 'Εὰν αἱ ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγομένων σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης; Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ προέκτασις ἑκάστης διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

11) 'Εὰν δύο ἐξωτερικαὶ γωνίαι εὐθ. σχήματος εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἔχουσαι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

12) Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι εὐθεῖαι.

13) Αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Μέτρησις γωνίας.

§ 46. Θεώρημα I.—*Ὁ λόγος γωνίας πρὸς ἄλλην ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τόξων αὐτῶν, ἐὰν αὗται καταστῶσιν ἐπίκεντροι ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Θ καὶ θ δύο γωνίαι ἐπίκεντροι ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, T δὲ καὶ τ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα. Λέγω ὅτι $\Theta:\theta=T:\tau$.

α') Ἐὰν $\Theta:\theta=3$, θὰ εἶναι $\Theta=\theta.3=\theta+\theta+\theta$. Προφανῶς ἄρα καὶ $T=\tau+\tau+\tau=\tau.3$ καὶ ἑπομένως $T:\tau=3=\Theta:\theta$.

β') Ἐὰν $\Theta:\theta=\frac{1}{3}$, θὰ εἶναι $\Theta=\frac{\theta}{3}$, ὅθεν $\theta=\Theta.3$ καὶ ἑπομένως $\tau=T.3$, ὅθεν $T=\frac{\tau}{3}$ καὶ $T:\tau=\frac{1}{3}=\Theta:\theta$.

γ') Ἐὰν $\Theta:\theta=2{,}132\ldots$, θὰ εἶναι $\Theta=\theta.2{,}132\ldots=\theta+\theta+\frac{\theta}{10}+\frac{3\theta}{100}+\frac{2\theta}{1000}+\ldots.$ καὶ ἑπομένως $T=\tau+\tau+\frac{\tau}{10}+\frac{3\tau}{100}+\frac{2\tau}{1000}+\ldots=\tau.2{,}132\ldots$, ὅθεν

$$T:\tau=2{,}132\ldots=\Theta:\theta.$$

Εἶναι λοιπὸν εἰς πᾶσαν περίπτωσιν $\Theta:\theta=T:\tau$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐὰν τὸ τόξον τ εἶναι ἡ μονὰς τῶν τόξων, ἡ δὲ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία θ ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν, ὁ λόγος $T:\tau$ καλεῖται *μέτρον* τοῦ τόξου T, ὁ δὲ λόγος $\Theta:\theta$ καλεῖται *μέτρον* τῆς γωνίας Θ. Τὰ μέτρα ταῦτα σημειοῦμεν συντόμως οὕτω (T), (Θ). Ὑπὸ τὰς δηλωθείσας προϋποθέσεις ἡ προηγουμένως ἀποδειχθεῖσα ἰσότης $\Theta:\theta=T:\tau$ γράφεται καὶ οὕτω $(\Theta)=(T)$, ἐκφράζει δὲ αὕτη ὅτι:

Πόρισμα. *Τὸ μέτρον γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἐὰν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ εἰς τὴν μονάδα τῶν τόξων βαίνουσα ἐπ. γωνία.*

Ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου τόξου ἢ γωνίας καλεῖται *μέτρησις* τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας ταύτης.

Κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον πόρισμα ἡ μέτρησις γωνίας ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ἀντιστοίχου τόξου. Γίνεται δὲ αὕτη τῇ βοηθείᾳ τοῦ μοιρογνωμονίου, καθ' ὃν ἡ Πρακτικὴ Γεωμετρία διδάσκει τρόπον.

Ἀσκήσεις. 14) Μετρήσατε τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ Σχ. 25.

15) Ἐν κύκλῳ χαράξατε μίαν διάμετρον καὶ μίαν ἀκτῖνα πλαγίαν πρὸς αὐτὴν καὶ μετρήσατε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν.

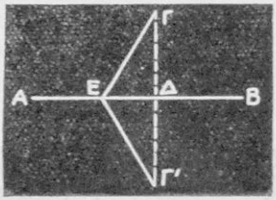
16) Χαράξατε δύο εὐθείας πλαγίας καὶ μετρήσατε μίαν τῶν γωνιῶν αὐτῶν καὶ ὑπολογίσατε ἔπειτα τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Κάθετοι καὶ πλάγιαι εὐθεῖαι.

§ 47. Θεώρημα I.—*Δι' ἑκάστου σημείου Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ κειμένου ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνον.*

Ἀπόδειξις. α') Νοήσωμεν ὅτι τὸ ἡμιεπίπεδον ΓΑΒ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἡμιπέδου καὶ ἔστω Γ' τὸ σημεῖον, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζει τὸ Γ. Ἐὰν τὸ στραφὲν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν καὶ ἀχθῇ ἡ ΓΓ', αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ.



Σχ. 29.

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ἐπαναλαμβανομένην τὴν ῥηθεῖσαν στροφήν, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μὲν Γ θὰ ἔλθῃ πάλιν εἰς τὸ Γ', τὸ δὲ Δ θὰ μείνῃ ἀκίνητον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΓ' καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΑΔΓ', ἤτοι εἶναι $Α\widehat{Δ}Γ = Α\widehat{Δ}Γ'$. Πᾶσα ἄρα (§ 32, Πορ.) αἱ περὶ τὸ Δ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΓ' εἶναι κάθετοι (§ 37).

β') Ἂν ἤγετο καὶ ἄλλη κάθετος ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ ἦτο $Γ\widehat{Ε}Δ=1$ ὀρθ. Ἂν δὲ ἐπαναληφθῇ ἡ προηγουμένη στροφή, θὰ ἐφαρμόσῃ ἡ γωνία ΓΕΔ ἐπὶ τῆς ΔΕΓ' καὶ θὰ ἦτο $Γ\widehat{Ε}Δ = Δ\widehat{Ε}Γ' = 1$ ὀρθ. Ἄρα $Γ\widehat{Ε}Δ + Δ\widehat{Ε}Γ' = 2$ ὀρθ., ἡ δὲ γραμμὴ ΓΕΓ' θὰ ἦτο (§ 44) εὐθεῖα. Οὕτω δὲ θὰ ἤγοντο διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Γ' δύο εὐθεῖαι, ὅπερ ἄτοπον (§ 10 α'). Δὲν εἶναι λοιπὸν ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ὥστε διὰ τοῦ Γ διέρχεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. ὅ. ἔ. δ.

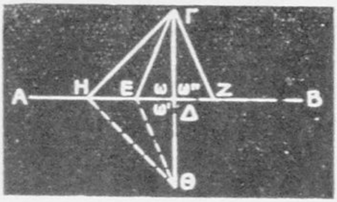
§ 48. Πλάγιαι εὐθεῖαι, πόδες καθέτου καὶ πλαγίων εὐθειῶν.—Αἱ ἐκ σημείου πρὸς εὐθεῖαν, πλὴν τῆς καθέτου ἐπὶ ταύτην, ἀγόμεναι εὐθεῖαι καλοῦνται *πλάγιαι* πρὸς αὐτήν. Οὕτως ἡ ΓΕ *(Σχ. 29)* εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΑΒ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον εὐθείας καὶ τυχούσης ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἢ πλαγίας καλεῖται πούς τῆς καθέτου ἢ τῆς πλαγίας ταύτης. Οὕτω τὸ μὲν σημεῖον Δ (*Σχ. 29*) εἶναι πούς τῆς καθέτου ΓΔ, τὸ δὲ Ε εἶναι πούς τῆς πλαγίας ΓΕ πρὸς τὴν ΑΒ.

§ 49. **Θεώρημα ΙΙ.**—*Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ διάφοροι πλάγιαι: α') Αἱ πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι. β') Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας. γ') Αἱ πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι, μεγαλυτέρα δὲ εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πούς ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.*

Ἔστω ΓΔ (*Σχ. 30*) ἡ ἔκ τινος σημείου Γ ἀγομένη ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος καὶ ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ διάφοροι πρὸς αὐτὴν πλάγιαι, τοιαῦται ὥστε ΔΕ=ΔΖ καὶ ΔΗ>ΔΖ. Λέγω ὅτι α') ΓΕ=ΓΖ, β') ΓΔ<ΓΕ καὶ γ') ΓΗ>ΓΖ.

Ἀπόδειξις. α') Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΓΕΔ στραφῇ περὶ τὴν ΓΔ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ μέρους τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ περιέχει τὸ Ζ, ἡ εὐθεῖα ΔΕ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΖ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ω καὶ ω'', τὸ δὲ Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΔΕ=ΔΖ. Ἡ ΓΕ κατ' ἀκολουθίαν (§ 10 α') ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΓΖ· εἶναι ἄρα ΓΕ=ΓΖ. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 30.

β') Προεκτείνοντες τὴν κάθετον ΓΔ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸν πόδα Δ φορὰν λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης εὐθ. τμῆμα ΔΘ ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ ἄγομεν τὸ τμῆμα ΕΘ. Οὕτως εἶναι (§ 10 γ') ΓΔ + ΔΘ < ΓΕ + ΕΘ. Ἐπειδὴ δὲ ΓΔ=ΔΘ καὶ ΓΕ=ΕΘ, διότι εἶναι πρὸς τὴν ΓΘ πλάγιαι, δι' ἃς εἶναι ΔΓ=ΔΘ, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται

ΓΔ+ΓΔ<ΓΕ+ΓΕ ἢ ΓΔ.2<ΓΕ.2, ὅθεν ΓΔ<ΓΕ. ὅ. ἔ. δ.

γ') Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου εὐθ. τμήματος ΔΗ ληφθῇ τμῆμα ΔΕ ἴσον πρὸς τὸ ΔΖ, τὸ Ε θὰ κεῖται μεταξὺ Δ καὶ Η. Ἐὰν δὲ προεκταθῇ ἡ ΔΓ καὶ ληφθῇ τμῆμα ΔΘ ἴσον πρὸς ΓΔ, ἡ τεθλ. γραμμὴ ΓΗΘ θὰ περιβάλῃ τὴν ΓΕΘ καὶ θὰ εἶναι ΓΗ+ΗΘ>ΓΕ+ΕΘ (§ 24). Ἐπειδὴ δὲ ΓΗ = ΗΘ καὶ ΓΕ = ΕΘ (49 α'), ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται ΓΗ.2 > ΓΕ.2, ὅθεν ΓΗ > ΓΕ· ἄρα καὶ ΓΗ > ΓΖ. ὅ. ἔ.δ.

Πόρισμα 1.—*Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι πρὸς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.*

Πόρισμα II.—*Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.*

Πόρισμα III.—*Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.*

§ 50. Θεώρημα III. (ἀντίστροφον τοῦ II).—*α') Ἐὰν δύο πλάγιαι ἐκ σημείου πρὸς εὐθεῖαν ἀγόμεναι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. β') Ἡ μικροτέρα τῶν ἐκ σημείου πρὸς εὐθεῖαν ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. γ') Ἐὰν δύο πλάγιαι ἐκ σημείου πρὸς εὐθεῖαν ἀγόμεναι εἶναι ἄνισοι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου καὶ περισσότερον ἀπέχει ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας.*

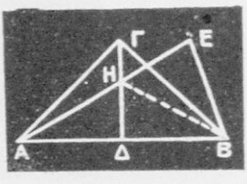
Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

§ 51. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας.—*Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας καλεῖται τὸ ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα.* Οὕτως ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ *(Σχ. 30)* εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ.

§ 52. Θεώρημα IV.—*Ἐὰν εὐθεῖα ΓΔ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως εὐθ. τμῆμα ΑΒ, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος τούτου.*

Ἀπόδειξις. Προφανῶς αἱ ΓΑ καὶ ΓΒ *(Σχ. 31)* εἶναι πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. Εἶναι ἄρα (§ 49) ΓΑ=ΓΒ. ὅ. ἔ. δ.

V **§ 53. Θεώρημα V.**—*Ἐὰν εὐθεῖα ΓΒ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, πᾶν σημεῖον Ε ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον ἀπέχει ἄνισον τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος τούτου, ὀλιγώτερον δὲ ἀπέχει τοῦ ἄκρου, μεθ' οὗ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου.* V



Σχ. 31.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα ΑΕ τέμνει τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Η, εἶναι δέ, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη, ΑΗ=ΗΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου (§ 10 γ') εἶναι ΗΒ+ΗΕ > ΒΕ, ἕπεται ὅτι ΑΗ+ΗΕ > ΕΒ ἢ ΑΕ > ΒΕ. ὅ. ἔ. δ.

§ 54. Θεώρημα VI. (ἀντίστροφον τοῦ IV).—*Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον τῶν ἄκρων εὐθ. τμήματος κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ τμῆμα τοῦτο.*

Διότι ἄλλως θὰ ἀπεῖχεν ἄνισον τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος (§ 53),

Πόρισμα 1.—*Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς τόξου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τόξον.*

ΣΗΜ. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως εὐθ. τμῆμα, καλεῖται γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τοῦ εὐθ. τμήματος. Διότι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην.

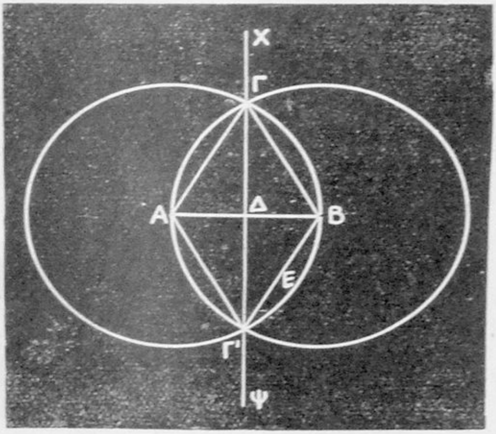
Ἀσκήσεις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 17) Διὰ δύο σημείων διέρχονται ἄπειροι περιφέρειαι κύκλων.

18) Ἐκ δύο ἀνίσων πλαγίων ἡ μεγαλυτέρα σχηματίζει μετὰ τῆς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀγομένης καθέτου μεγαλυτέραν γωνίαν.

19) Ἐπί τινος τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίζονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἕτερα δύο Δ καὶ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $ΑΒ < ΑΓ$ καὶ $ΑΔ < ΑΕ$, θὰ εἶναι καὶ $ΒΔ < ΓΕ$.

Κατασκευὴ καθέτων εὐθειῶν.

§ 55. Θεώρημα.—*Αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ*



Σχ. 32.

ἀκτῖνα εὐθύγραμμόν τι τμῆμα ΑΒ καὶ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ, ἔχουσι κοινὰ σημεῖα καὶ δύο μόνον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ χψ ἡ δι' αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ΑΒ κάθετος. Αὕτη διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Δ, ὅπερ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Α, τέμνει προφανῶς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Α, ἔστω εἰς τὸ Γ· εἶναι δὲ ΓΑ=ΓΒ (§ 52).

Ἐπειδὴ δὲ ΓΑ=ΑΒ, ἔπεται ὅτι καὶ ΓΒ=ΑΒ· ἄρα τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Β.

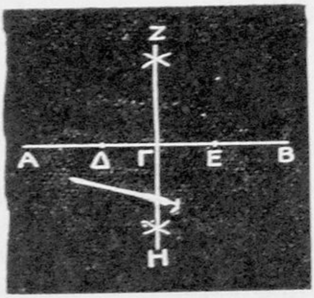
Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ἐπὶ τῆς χψ καὶ πρὸς τὸ ἕτερον ἢ τὸ Γ μέρος τμῆμα ΔΓ' ἴσον πρὸς τὸ ΔΓ καὶ ἀχθῶσιν αἱ πλάγιαι ΑΓ' καὶ ΒΓ', θὰ εἶναι (§ 49) ΑΓ=ΑΓ' καὶ ΒΓ=ΒΓ', ἐξ ὧν ἔπεται ὅτι τὸ Γ' ἀπέχει ἀπὸ ἑκατέρου κέντρου ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Κεῖται ἄρα καὶ τοῦτο ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β.

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι αὗται εἶχον πλὴν τῶν Γ καὶ Γ' καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Ε, θὰ ἦτο ΑΕ=ΒΕ. Ἀλλὰ τότε τὸ Ε θὰ ἔκειτο (§ 54) ἐπὶ τῆς χψ καὶ αὕτη θὰ εἶχε μεθ' ἑκατέρας τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β τρία κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον (§ 49, Πόρ. ΙΙ).

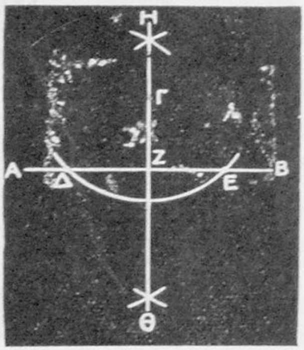
Ἔχουσι λοιπὸν αἱ περιφέρειαι Α καὶ Β κοινὰ τὰ σημεῖα Γ' καὶ Γ, οὐδὲν δὲ ἄλλο. ὅ.ἔ.δ.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ τὰς ἰδιότητας (§ 54 Θ. καὶ Πόρ. Ι) λύομεν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

§ 56. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δίχα καὶ καθέτως δεδομένον εὐθ. τμῆμα ΑΒ (Σχ. 32).*



Σχ. 33.



Σχ. 34.

§ 57. Πρόβλημα ΙΙ.—*Διὰ δεδομένου σημείου Γ εὐθείας ΑΒ (Σχ. 33) νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖα.*

§ 58. Πρόβλημα III.—*Διὰ δεδομένου σημείου Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 34) κειμένου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπ' αὐτήν.*

ΣΗΜ. Τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα λύονται εὐκόλως καὶ διὰ τοῦ γνώμονος (1).

Ἀσκήσεις. 20) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον δεδομένον εὐθύγραμμον τμῆμα.

21) Νὰ διαιρεθῇ εὐθ. τμῆμα εἰς 4 ἴσα μέρη.

22) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων.

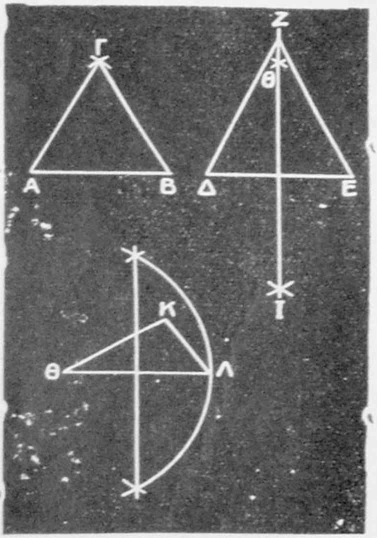
23) Ἐπὶ δεδομένης περιφερείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων δεδομένης χορδῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΤΡΙΓΩΝΑ

Εἴδη τριγώνων καὶ στοιχεῖα αὐτῶν.

§ 59. Α'. Ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ, σκαληνὰ τρίγωνα.



Σχ. 35.

α') Ἰσόπλευρον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

β') Ἰσοσκελὲς τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

γ') Σκαληνὸν τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

Οὕτω τὸ ΑΒΓ (*Σχ. 35*) εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ δὲ ΔΖΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ΘΚΛ σκαληνόν.

Ἡ ἄνισος πλευρὰ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καλεῖται βάσις αὐτοῦ.

§ 60. Β'. Ὀξυγώνια, ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια τρίγωνα. *Ὀξυγώνιον τρίγωνον*

1) Ὅρα πρακτικὴν Γεωμετρίαν μου (§ 22).

καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι πᾶσαι ὀξεῖαι.

Ὀρθογώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ὀρθή.

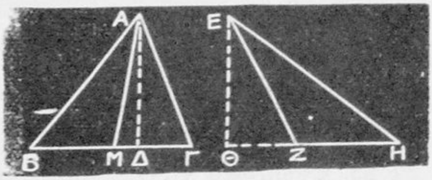
Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου καλεῖται *ὑποτείνουσα* αὐτοῦ.

Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.

§ 61. Βάσις, ὕψος, διάμεσοι τριγώνου. *Βάσις τριγώνου καλεῖται μία οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.*

Ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

Ἐὰν π.χ. ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 36)* ἡ ΒΓ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ. Τοῦ δὲ τριγώνου ΕΖΗ ὕψος εἶναι τὸ ΕΘ, ἂν ὡς βάσις ληφθῇ ἡ ΖΗ.



Σχ. 36.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται συνήθως αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτῶν.

Διάμεσος τριγώνου καλεῖται πᾶν εὐθ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπό τινος κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς αὐτοῦ. Οὕτω Μ ὄντος τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 36)*.

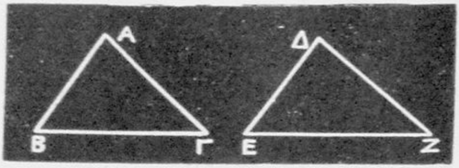
Ἰσότης τριγώνων.

§ 62. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 37)*· ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ΒΓ=ΕΖ, Β=Ε καὶ Γ=Ζ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β, ἡ δὲ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Οὕτως ἡ μὲν κορυφὴ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ, διότι ΒΓ=ΕΖ, ἡ ΕΔ ἐπὶ τῆς ΒΑ, διότι Β=Ε, καὶ ἡ ΖΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς

ΓΑ, διότι Γ=Ζ. Ἡ κορυφὴ Δ ὡς κειμένη ἐπὶ τῶν ΕΔ καὶ ΖΔ, ὀφείλει νὰ πέσῃ ἐπὶ τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ, ἤτοι ἐπὶ τῆς Α. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ· εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα. ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 37.

ΣΗΜ. Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ ΑΒ=ΕΔ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ.

Πόρισμα I.— *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσιν ἴσην μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἀσκήσεις. 24) Ἐὰν δύο πλάγιαι σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀγομένης καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἴσαι.

25) Πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον γωνίας τέμνει τὰς πλευρὰς εἰς σημεῖα ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπέχοντα.

26) Ἐὰν ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

§ 63. Θεώρημα II.— *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 37)* καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α=Δ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ταῦτα εἶναι ἴσα. ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ΒΓ=ΕΖ, Β=Ε, Γ=Ζ.

Πόρισμα I.— *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

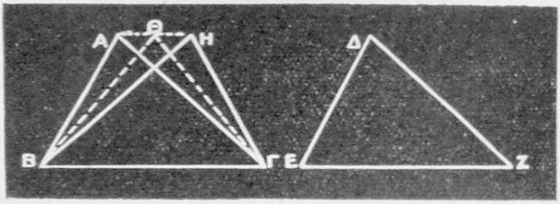
Πόρισμα II.— *Ἐὰν δύο τόξα μιᾶς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσα, καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι* (ὅρα καὶ § 34).

Ἀσκήσεις. 27) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας ΒΑΓ λαμβάνομεν ΑΒ=ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου ταύτης ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων Β καὶ Γ.

28) Τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ', ΑΒ', ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΓ=Β'Γ'.

29) Ἐὰν προεκτείνοντες τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Δ φορὰν λάβωμεν ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΕΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΒ=ΓΕ καὶ $\widehat{ΒΑΕ}=\widehat{ΑΕΓ}$.

§ 64. Θεώρημα III.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*



Σχ. 38.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 38)* καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ ΑΓ=ΔΖ.

Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

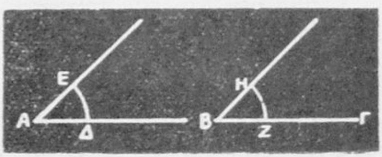
Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β καὶ ἡ Ζ ἐπὶ τῆς Γ, ἡ Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α. Διότι, ἂν τὸ Δ ἔπιπτεν εἰς τὸ Η, θὰ ἦτο ΒΗ=ΒΑ καὶ ΓΗ=ΓΑ. Ἕνεκα τούτων τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἔπρεπε (§ 54) νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Θ τῆς ΑΗ, ἤτοι αἱ ΒΘ καὶ ΓΘ θὰ ἦσαν ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΗ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ ἄτοπον (§ 38). Ὄντως λοιπὸν ἡ κορυφὴ Δ πίπτει ἐπὶ τῆς Α καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ. Εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν αἱ χορδαὶ δύο τόξων τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ τόξα εἶναι ἴσα.*

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

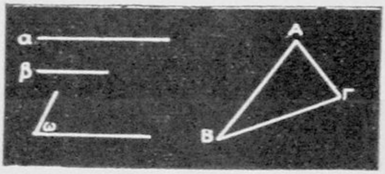
Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον Πόρισμα καὶ ἐνθυμούμενοι καὶ τὴν ἰδιότητα (§ 34 Θ.) λύομεν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.



Σχ. 39.

§ 65. Πρόβλημα I.—*Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δεδομένην γωνίαν Α* *καὶ ἔχουσα δεδομένην πλευρὰν ΒΓ καὶ κορυφὴν Β (Σχ. 39).*

§ 66. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο*

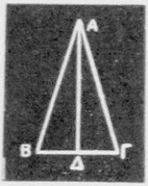


Σχ. 40.

πλευρῶν α καὶ β καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένης γωνίας ω (Σχ. 40).

Ἰδιότητες ἰσοσκελῶν καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

§ 67. Θεώρημα Ι.—*Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.*



Σχ. 41.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 41)*. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα (§ 64), ἕπεται ὅτι Β=Γ.

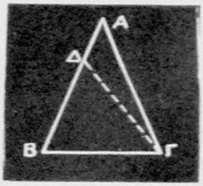
Πόρισμα Ι.—*Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.*

Ἀσκήσεις. 31) Ἐὰν δύο σημεῖα κείμενα ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ, ταῦτα ἀπέχουσιν ἴσον καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως.

32) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἑτέρου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

33) Αἱ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀντιστοιχοῦσαι διάμεσοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

§ 68. Θεώρημα ΙΙ. (ἀντίστροφον τοῦ Ι).—*Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.*



Σχ. 42.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 42)* αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι. Λέγω ὅτι ΑΓ=ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ΑΒ>ΑΓ καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΒΑ τμῆμα ΒΔ=ΑΓ, θὰ εἶναι ΒΑ>ΒΔ καὶ τὸ Δ κεῖται μεταξὺ Β καὶ Α. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΔ, αὕτη θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι τρίγ. ΓΒΔ < τρίγ. ΑΒΓ. Ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ, ἔχοντα τὴν ΒΓ κοινήν, ΒΔ=ΓΑ, καὶ Β=Γ, ὀφείλουσι νὰ εἶναι ἴσα. Τὰ αὐτὰ λοιπὸν σχήματα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἄνισα, ὅπερ ἄτοπον. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι δὲν εἶναι ΑΒ < ΑΓ. Ἄρα ΑΓ=ΑΒ ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.*

Ἀσκήσεις. 34) Ἐὰν δύο ἐξωτερικαὶ γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

35) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσογώνιον τρίγωνον ἔχον μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

§ 69. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀγομένη κάθετος διχοτομεῖ τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 41)* ἰσοσκελές τι τρίγωνον καὶ ΑΔ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἀγομένη κάθετος. Λέγω ὅτι ΒΔ=ΔΓ καὶ $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}\Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι, ἔπεται (§ 50) ὅτι ΔΒ=ΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}\Gamma$.

Πόρισμα Ι.—*Τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν καὶ διάμεσοι αὐτοῦ.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Ἡ ἐπὶ χορδὴν κάθετος διάμετρος διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ ἑκάτερον τῶν εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχούντων τόξων.*

Ἀσκήσεις. 36) Δύο ἴσαι πλάγιαι σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀγομένης καθέτου.

37) Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα.

38) Ἡ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου διχοτομοῦσα εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ.

39) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν αὐτῆς.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον πόρισμα καὶ ἐνθυμούμενοι τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ Προβλήματος Ι (§ 56) λύομεν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

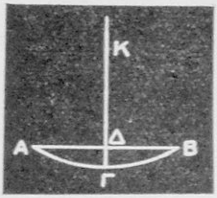
§ 70. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ διχοτομηθῇ δεδομένον τόξον ΑΒ περιφερείας (Σχ. 43).*

§ 71. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διχοτόμος δεδομένης γωνίας Α (Σχ. 44).*

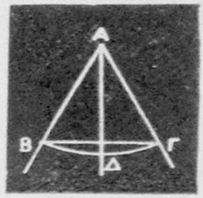
Ἀσκήσεις. 40) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον περιφερείας ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς 4 ἴσα μέρη.

41) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς γωνίας.

42) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι ἥμισυ ὀρ-



Σχ. 43.



Σχ. 44.

θῆς γωνίας καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῆς νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δεδομένα εὐθ. τμήματα.

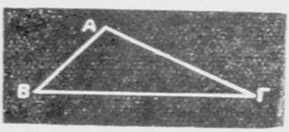
43) Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια κύκλου εἰς 8 ἴσα τόξα (ὅρα καὶ § 38 Πόρ. 1).

Σχέσεις ἀνισότητος μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν τριγώνων.

§ 72. Θεώρημα Ι.—*Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 45)*. Λέγω π.χ. ὅτι

$$ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ \text{ καὶ } ΑΓ > ΒΓ - ΑΒ.$$



Σχ. 45.

Ἀπόδειξις. α΄) Τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα μετὰ τῆς τεθλασμένης ΑΒΓ εἶναι προφανὲς (§ 10 γ΄) ὅτι: $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι καὶ $ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ$, ὅθεν προκύπτει ὅτι $ΒΓ - ΑΒ < ΑΓ$. ὅ. ἔ. δ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην πλευράν.

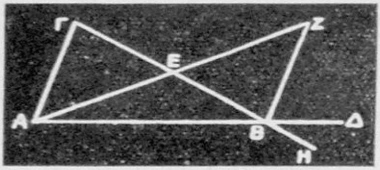
§ 73. Θεώρημα ΙΙ.—*Πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 46)* τυχὸν τρίγωνον καὶ ΓΒΔ ἐξωτερική τις γωνία αὐτοῦ. Λέγω ὅτι $Γ\widehat{Β}Δ > Α$ καὶ $Γ\widehat{Β}Δ > Γ$.

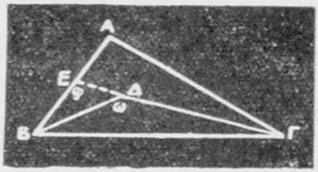
Ἀπόδειξις. Ἄγομεν τὴν διάμεσον ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΕΖ ἴσον τῇ ΑΕ, εἶτα δὲ ἄγομεν τὴν ΒΖ. Αὕτη κεῖται προφανῶς ἐντὸς τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΒΔ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $\widehat{\Gamma B\Delta} > \widehat{EBZ}$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ (§ 63) τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΕΒΖ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι $\widehat{\Gamma} = \widehat{EBZ}$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνισότητος (1) ἕπεται ὅτι $\widehat{\Gamma B\Delta} > \widehat{\Gamma}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $ABH > A$, ὅθεν καὶ $\widehat{\Gamma B\Delta} > A$.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν ἐκ σημείου ἐντὸς τριγώνου κειμένου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς δύο αὐτοῦ κορυφάς, ἡ γωνία αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τρίτης γωνίας τοῦ τριγώνου.*



Σχ. 46 α'.



Σχ. 46 β'.

Ἂν ω εἶναι ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ *(Σχ. 46 β')*, εἶναι προφανῶς $\omega > \varphi$ καὶ $\varphi > A$· εἶναι ἄρα $\omega > A$.

§ 74. Θεώρημα III.—*Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν γωνιῶν.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 46)* τυχὸν τρίγωνον, Β δὲ καὶ Γ δύο τυχοῦσαι γωνίαι αὐτοῦ. Λέγω ὅτι $B + \Gamma < 2$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma} < \widehat{\Gamma B\Delta}$, ἕπεται ὅτι $B + \Gamma < \widehat{B} + \widehat{\Gamma B\Delta}$, ὅθεν (§ 43) $B + \Gamma < 2$ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

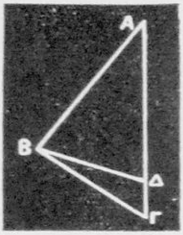
Πόρισμα I.—*Πᾶν ὀρθογώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει δύο ὀξείας γωνίας.*

Πόρισμα II.—*Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι γωνίαι.*

§ 75. Θεώρημα IV.—*Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι· καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 47)*, ἐν ᾧ εἶναι $A\Gamma > AB$. Λέγω ὅτι καὶ $B > \Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΓ λάβωμεν τμῆμα ΑΔ ἴσον τῇ ΑΒ, θὰ εἶναι $A\Gamma > A\Delta$· κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον Δ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΔ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας Β αὐτοῦ· εἶναι ὅθεν Β > ΑΒΔ.



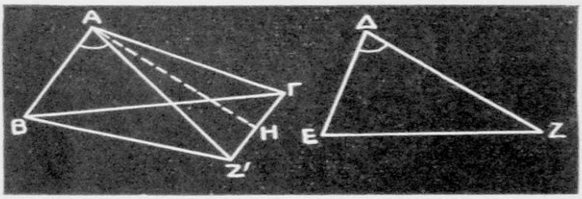
Σχ. 47.

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος ΑΒ=ΑΔ ἕπεται ὅτι ΑΒΔ=ΑΔΒ καὶ ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται Β>ΑΔΒ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔΒ>Γ, ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ὅτι Β>Γ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν εἶναι Β>Γ, θὰ εἶναι καὶ ΑΓ>ΑΒ. Τῷ ὄντι· ἂν ἦτο ΑΓ≦ΑΒ, θὰ ἦτο (§ 67, 65) καὶ Β≦Γ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

§ 76. Θεώρημα V.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων τούτων γωνιῶν κείμεναι πλευραὶ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.*

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (*Σχ. 48*) δύο τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ Α>Δ. Λέγω ὅτι ΒΓ<ΕΖ.



Σχ. 48.

Ἀπόδειξις. Θέτομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Οὕτως ἡ μὲν κορυφὴ Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΖ θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν τινὰ ΑΖ′ ἐντὸς τῆς γωνίας Α κειμένην, διότι Α>Δ, καὶ ἡ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΖ′. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΓΖ′, σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΖ′. Τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΖ′, τὸ δὲ ὕψος ΑΗ αὐτοῦ κεῖται πρὸς ὃ μέρος τῆς ΑΖ′ κεῖται ἡ κορυφὴ Γ. Ὥστε τὰ σημεῖα Β καὶ Ζ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΗ. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΖΓ, ἕπεται (§ 53) ὅτι ΒΖ′<ΒΓ, ὅθεν ἕπεται ὅτι καὶ ΕΖ<ΒΓ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. — *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ἄνισα τόξα ἔχουσιν ἀνίσους χορδάς, εἶναι δὲ ἡ τῶν χορδῶν τούτων ἀνισότης ὁμοία ἢ μὴ πρὸς τὴν τῶν τόξων, καθ' ὅσον τὰ τόξα εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας.* (Ὅρα καὶ § 35).

§ 77. Θεώρημα VI. — *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ ἄλλας ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων τούτων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.*

Ἐὰν δηλ. *(Σχ. 48)* εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ>ΕΖ, λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ Α>Δ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἦτο Α⩵Δ θὰ ἦτο (§ 63, 76) καὶ ΒΓ⩵ΕΖ, ἅτινα ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Θὰ εἶναι ἄρα κατ' ἀνάγκην Α>Δ ὅ. ἔ. δ..

Πόρισμα Ι.—*Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις ἄνισοι χορδαὶ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἄνισα τόξα· εἶναι δὲ ἡ τῶν τόξων τούτων ἀνισότης ὁμοία ἢ μὴ πρὸς τὴν τῶν χορδῶν, καθ' ὅσον τὰ τόξα εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας.*

Ἀσκήσεις. 44) Ἡ ὑποτείνουσα παντὸς ὀρθ. τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

45) Ἐὰν ΒΓ εἶναι ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ σημεῖόν τι τῆς πλευρᾶς ΑΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΔΓ<ΔΒ.

46) Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἑκατέρωθεν αὐτῆς πλευρῶν.

47) Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχηται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μετ' αὐτῶν ἀνίσους γωνίας, μεγαλυτέραν δὲ μετὰ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς.

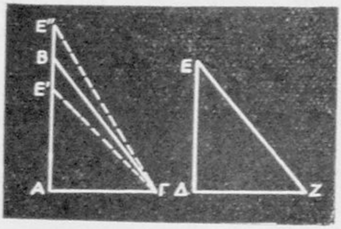
48) Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχηται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μετὰ τῶν δύο ἡμίσεων τῆς τρίτης πλευρᾶς ἀνίσους γωνίας, ἀμβλεῖαν μὲν μετὰ τοῦ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν προσκειμένου, ὀξεῖαν δὲ μετὰ τοῦ εἰς τὴν μικροτέραν πλευρὰν προσκειμένου ἡμίσεος.

Ἰσότης ὀρθογωνίων τριγώνων.

§ 78. Θεώρημα Ι.— *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσιν ἴσην μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τὴν ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 49)*, εἰς ἃ εἶναι ΑΓ=ΔΖ καὶ Β=Ε. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Οὕτως ἡ μὲν κορυφὴ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἡ κορυφὴ Ε ἔπιπτεν ἐπί τινος σημείου Ε′ ἢ Ε″ διαφόρου τοῦ Β, ἡ γωνία Ε θὰ κατελάμβανε τὴν θέσιν ΑΕ′Γ ἢ ΑΕ″Γ καὶ θὰ ἦτο Ε=ΑΕ′Γ>Β ἢ Ε=ΑΕ″Γ<Β (§ 73). Ταῦτα δὲ ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Πίπτει λοιπὸν ἡ κορυφὴ Ε ἐπὶ τῆς Β καὶ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ ἐφαρμόζουσιν. Εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα. δ. ἔ. δ.

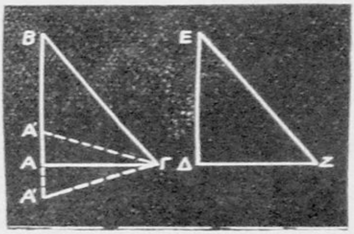


Σχ. 49.

§ 79. Θεώρημα ΙΙ.— *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἂν δηλ. εἶναι ΒΓ=ΕΖ καὶ Β=Ε *(Σχ. 50)*, θὰ εἶναι τὸ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ καὶ ἡ ΕΔ ἐπὶ τῆς ΒΑ. Ἐὰν δὲ κορυφὴ Δ ἔπιπτεν εἴς τι σημεῖον Α′ διάφορον τοῦ Α, ἡ πλευρὰ ΖΔ θὰ κατελάμβανε τὴν θέσιν ΓΑ′ καὶ θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ δύο κάθετοι, ὅπερ ἄτοπον (§ 47). Πίπτει λοιπὸν κορυφὴ Δ ἐπὶ τῆς Α καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν. Εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα. δ. ἔ. δ.



Σχ. 50.

Πόρισμα Ι.— *Ἕκαστον σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.*

§ 80. Θεώρημα ΙΙΙ.— *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἂν δηλ. *(Σχ. 50)* εἶναι ΒΓ=ΕΖ καὶ ΑΒ=ΕΔ, θὰ εἶναι καὶ τρ. ΑΒΓ=τρ. ΔΕΖ.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ ΔΕ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἡ ὑποτείνουσα ὅθεν καθίσταται πλαγία πρὸς τὴν ΑΓ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β· ἐπειδὴ δὲ ΒΓ=ΕΖ, θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΖ, ἤτοι τὸ Ζ συμπίπτει μετὰ τοῦ Γ. Τὰ τρίγωνα ἄρα ἐφαρμόζουσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. — *Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ ἴσων χορδῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον τῶν πλευρῶν γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ταύτης.*

ΣΗΜ. Ἡ διχοτόμος γωνίας καλεῖται *γεωμ. τόπος* τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἀσκήσεις. 49) Τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ πάσης εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

50) Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου τῆς διχοτόμου γωνίας ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης.

51) Τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς βάσεως αὐτοῦ.

52) Τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.

53) Τὸ μέσον τόξου ἢ χορδῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταληγουσῶν ἀκτίνων.

54) Τὰ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὕψη εἶναι ἴσα.

55) Τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πάντα ἴσα πρὸς ἄλληλα.

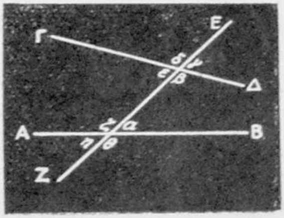
56) Ἐὰν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Παράλληλοι εὐθεῖαι. — Ἰδιότητες αὐτῶν.

§ 81. Γωνίαι δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης. —

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ.51)* τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης ΕΖ εἰς σημεῖα διάφορα ἀλλήλων, σχηματίζονται αἱ γωνίαι α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ.



Σχ. 51.

α΄) Δύο τούτων μεταξὺ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*. Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι α καὶ β· ὁμοίως αἱ ζ καὶ ε.

β΄) Δύο γωνίαι διάφορον ἔχουσαι κορυφήν, μεταξὺ τῶν τεμνομένων καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς ἐναλλάξ*. Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι α καὶ ε· ὁμοίως αἱ β καὶ ζ.

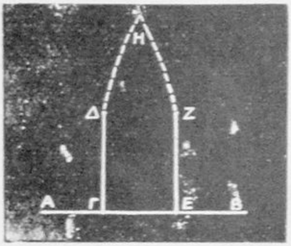
γ΄) Δύο γωνίαι διάφορον ἔχουσαι κορυφήν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ ἡ μὲν μεταξύ, ἡ δὲ ἐκτὸς τῶν τεμνομένων κείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*. Τοιαῦται π.χ. εἶναι αἱ γωνίαι α καὶ γ, η καὶ ε κλπ.

ΣΗΜ. Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν καὶ *τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ*, *τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*, καὶ *τὰς ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας*.

Πᾶσαι αἱ ἐντὸς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθ. γωνίας. Ἂν ἑπομένως $\alpha+\beta<2$ ὀρθ. θὰ εἶναι $\zeta+\varepsilon>2$ ὀρθ. καὶ ἀντιστρόφως.

§ 82. Παράλληλοι εὐθεῖαι. — *Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμεναι ἐπιπέδου οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἑκατέρωθεν.*

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται λόγος περὶ εὐθειῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἑκάστοτε κειμένων ἐπιπέδῳ.



Σχ. 52.

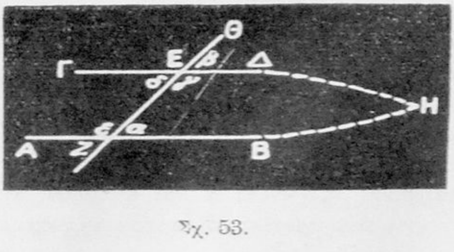
§ 83. Θεώρημα I. — *Εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΕΖ *(Σχ. 52)* κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Η, θὰ ἤγοντο ἐξ αὐτοῦ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΓΔ καὶ ΕΖ οὐδέποτε συναντῶνται, κεῖνται δὲ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄρα εἶναι παράλληλοι. ὅ. ἔ. δ.

§ 84. Θεώρημα II. — *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι α') τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας ἢ β') τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἢ γ') τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 53)* τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι α') $\alpha=\beta$ ἢ β') $\alpha=\delta$ ἢ γ') $\alpha+\gamma=2$ ὀρθ. Λέγω ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.



Σχ. 53.

Ἀπόδειξις. α') Ἐὰν αἱ

αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Η, ἐν τῷ τριγώνῳ ΗΕΖ θὰ ἦτο β=α, ὅπερ (§ 73) ἄτοπον.

β′) Ἄν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Η, θὰ ἦτο δ=α, ὅπερ ἄτοπον.

γ′) Ἄν ἐτέμνοντο αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἴς τι σημεῖον Η, αἱ δύο γωνίαι α καὶ γ τοῦ τριγώνου ΗΕΖ θὰ εἶχον ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθάς, ὅπερ ἄτοπον.

Εἰς ἑκάστην λοιπὸν τῶν περιπτώσεων αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν τέμνονται, κεῖνται δὲ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄρα εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.— *Διὰ σημείου Ε κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 53) δύναται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος ἐκείνῃ.*

Ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΕΖ τέμνουσαν τὴν ΑΒ καὶ νοοῦμεν τὴν γωνίαν α τεθειμένην οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ζ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ε καὶ ἡ ΖΕ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς ΕΘ. Οὕτως ἡ ΖΒ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΕΔ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΖΒ, διότι ΘΕΔ=α,

Ἀσκήσεις. 57) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

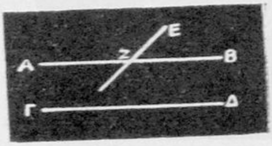
58) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

§ 85. Εὐκλείδειον αἴτημα.— *Διὰ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνον παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἄγεται* (1).

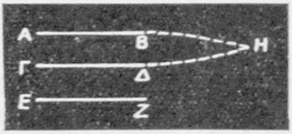
Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 86. Θεώρημα Ι.— *Πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τέμνει καὶ τὴν ἄλλην. (Σχ. 54).*



Σχ. 54.



Σχ. 55.

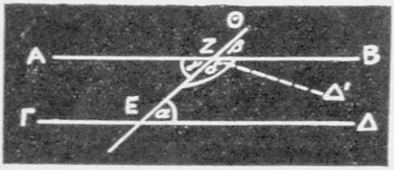
§ 87. Θεώρημα ΙΙ.— *Εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (Σχ. 55).*

1) Ἐπὶ τοῦ αἰτήματος τούτου στηρίζονται τὰ ἐν χρήσει στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας, ἥτις διὰ τοῦτο καλεῖται Εὐκλείδειος Γεωμετρία. Ἀξιοσημείωτον ὅτι,

§ 88. **Θεώρημα III.** (ἀντίστροφον τοῦ Θ. § 84).—*Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης, α΄) αἱ σχηματιζόμεναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι. β΄) αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι, γ΄) αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (*Σχ. 56*) καὶ ΕΖ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα ταύτας. Λέγω ὅτι α΄) α=β, β΄) α=γ, γ΄) α+δ=2ὀρθ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἦτο α≷β, καὶ κατασκευάσωμεν μὲ κορυφὴν Ζ καὶ πλευρὰν ΖΘ γωνίαν ΘΖΔ′ ἴσην τῇ α καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς β μέρος τῆς ΖΘ, ἡ ΖΔ′ εἶναι διάφορος τῆς ΖΒ καὶ (§ 84 α΄) παράλληλος τῇ ΓΔ. Ἀλλ᾽ ἐν τοιούτῃ περιπτώσει θὰ ἤγοντο διὰ τοῦ Ζ δύο παράλληλοι τῆς ΓΔ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Εἶναι λοιπὸν α=β. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 56.

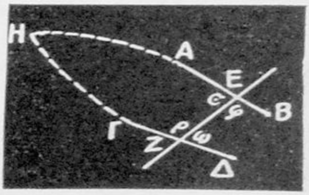
β΄) Ἀφ᾽ οὗ, ὡς ἀπεδείχθη ἤδη, εἶναι α=β, εἶναι δὲ (§ 32) καὶ γ=β, ἕπεται εὐκόλως ὅτι α=γ. ὅ. ἔ. δ.

γ΄) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων β+δ=2 ὀρθ. καὶ α=β ἕπεται εὐκόλως ὅτι α+δ=2 ὀρθ. ὁ. ἔ. δ.

Πόρισμα I.— *Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.*

Πόρισμα II.— *Ἐὰν τεμνομένων δύο εὐθειῶν ὑπὸ τρίτης σχηματίζωνται δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ἔχουσαι ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται, πρὸς ὃ μέρος τῆς τεμνούσης κεῖνται αἱ γωνίαι αὗται.*

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τεμνομένων τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὑπὸ τῆς ΕΖ (*Σχ. 57*) εἶναι ω+φ<2 ὀρθ.



Σχ. 57.

ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἄγονται πολλαὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν, δυνάμεθα νὰ διαπλάσωμεν ἕτερον εἶδος Γεωμετρίας, ἥτις καλεῖται «Μὴ Εὐκλείδειος Γεωμετρία». Ταύτης θεμελιωτὴς εἶναι ὁ Ρῶσσος Μαθηματικὸς Lobatschefski (1793 - 1856 μ.Χ.).

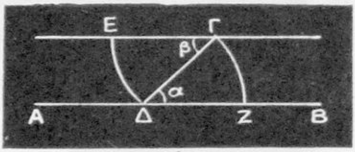
Περὶ τοῦ Εὐκλείδου ὅρα θεωρητ. Ἀριθ. μου (σελ. 67 ὑποσημείωσις).

Λέγω ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ τέμνονται πρὸς ὃ μέρος τῆς ΕΖ κεῖνται αἱ γωνίαι ω καὶ φ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἦσαν παράλληλοι, θὰ ἦτο (§ 88) $\omega + \varphi = 2$ ὀρθαί, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται. Ἐὰν δὲ αὗται ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Η κείμενον, πρὸς ὃ μέρος τῆς ΕΖ κεῖνται αἱ ἄλλαι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ἐν τῷ τριγώνῳ ΗΕΖ θὰ ἦτο (§ 81) $\rho + \sigma > 2$ ὀρθῶν, ὅπερ ἄτοπον (§ 74).

§ 89. Πρόβλημα Ι.—*Διὰ δεδομένου σημείου Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 58) κειμένου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.*

Ἂν ἡ ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ἀχθῇ δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα ΓΔ τέμνουσα τὰς παραλλήλους ταύτας εὐθείας, θὰ εἶναι (§ 88) $\alpha = \beta$.



Σχ. 48.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις. Μὲ κορυφὴν Γ καὶ πλευρὰν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΔ σχηματίζομεν πρὸς τὸ ἕτερον ἢ ἡ α μέρος τῆς ΓΔ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν α. Ἡ ἄλλη πλευρὰ ΓΕ τῆς γωνίας ταύτης εἶναι ἡ ζητουμένη (§ 84).

Ἀσκήσεις. 59) Διὰ δεδομένου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετ' αὐτῆς δεδομένην γωνίαν.

60) Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης, α') αἱ σχηματιζόμεναι ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, β') αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι καὶ γ') αἱ ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ εἶναι παραπληρωματικαί.

61) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης σχηματιζομένας ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

62) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὑπὸ τρίτης τεμνομένων σχηματιζομένας ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας εἶναι κάθετοι.

63) Πᾶσα παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον γωνίας τέμνει μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς σημεῖα ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης.

64) Διὰ σημείου Β κειμένου ἐπί τινος πλευρᾶς γωνίας τινὸς Α ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας ταύτης καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΔ ἴσον τῷ ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α ἢ τῆς παραπληρωματικῆς της, καθ' ὅσον τὸ ΒΔ κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς γωνίας Α.

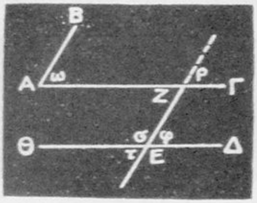
65) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ πᾶσαι σημεῖον.

66) Ἐὰν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρός τινα πλευρὰν αὐτοῦ, τὸ ἐντὸς τοῦ τριγώνου περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τῶν ἄλλων πλευρῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν.

67) Αἱ τὰς πλευρὰς τριγώνου δίχα καὶ καθέτως τέμνουσαι εὐθεῖαι διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐφαρμογαὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

Α΄. Γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέτους.



Σχ. 59.

§ 90. Θεώρημα Ι. — *Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν αἱ μὲν δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι, αἱ δὲ ἄλλαι ἀντίρροποι* (1).

Ἔστω γωνία φ *(Σχ. 59)* ἔχουσα πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ω· ἄλλη γωνία τ ἔχουσα τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους πρὸς τὰς τῆς ω καὶ ἡ σ ἔχουσα τὴν ΕΖ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν δὲ ΕΘ παράλληλον καὶ ἀντίρροπον πρὸς τὴν ΑΖ. Λέγω ὅτι: $\omega=\varphi$, $\omega=\tau$ καὶ $\omega+\sigma=2$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἡ εὐθεῖα ΕΖ τέμνουσα τὴν ΕΔ τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της ΑΓ καὶ σχηματίζει μετ' αὐτῆς πλὴν ἄλλων καὶ τὴν γωνίαν ρ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 88) εἶναι $\omega=\rho$ καὶ $\varphi=\rho$, ἔπεται εὐκόλως ὅτι καὶ $\omega=\varphi$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\omega=\varphi$ καὶ $\tau=\varphi$ ἔπεται ὅτι καὶ $\omega=\tau$. ὅ.ἔ.δ.

γ΄) Ἐπειδὴ $\sigma+\varphi=2$ ὀρθ. καὶ $\omega=\varphi$, ἔπεται ὅτι $\sigma+\omega=2$ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

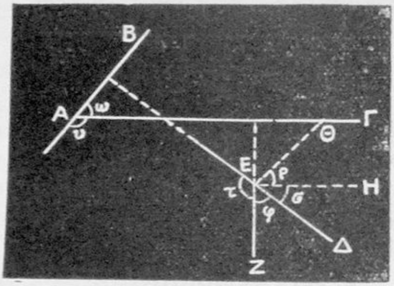
§ 91. Θεώρημα ΙΙ. — *Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς*

---

(1) Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων καλοῦνται ὁμόρροποι μέν, ἂν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζουσιν αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν, ἀντίρροποι δέ, ἂν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ταύτης.

αὐτῶν καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι μέν, ἂν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μὲν μία εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα.

Ἔστωσαν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ω καὶ φ (*Σχ. 60*), τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι, μία πρὸς μίαν, ἤτοι ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΔ καὶ ἡ ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ. Προεκτείνοντες δύο καθέτους πλευράς, π.χ. τὰς ΑΒ καὶ ΕΔ, πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς σχηματίζομεν τὰς ἀμβλείας γωνίας υ καὶ τ. Λέγω ὅτι ω=φ, υ=τ, ω+τ=2 ὀρθ.



Σχ. 60.

Ἀπόδειξις. α') Ἄγομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Ε τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΗ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἔστω δὲ ρ ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία καὶ σ ἡ γωνία ΔΕΗ. Ἐπειδὴ ἡ ΕΔ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΕΘ, ἕπεται ὅτι ρ+σ=1 ὀρθ. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι καὶ φ+σ=1 ὀρθ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἕπεται ὅτι ρ+σ=φ+σ, ὅθεν ρ=φ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 90) εἶναι καὶ ρ=ω, ἕπεται ὅτι καὶ ω=φ. ὅ. ἔ. δ.

β') Ἐκ τῶν ἰσοτήτων υ+ω=2 ὀρθ. καὶ τ+φ=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι υ+ω=τ+φ, ὅθεν υ=τ. ὅ. ἔ. δ.

γ') Ἐπειδὴ ω=φ καὶ φ+τ=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι ω+τ=2 ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 68) Ἐὰν δύο γωνίαι ἴσαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

69) Ἐὰν δύο γωνίαι παραπληρωματικαὶ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.

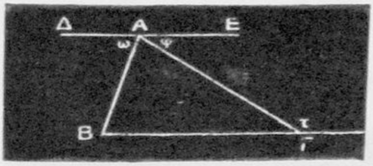
70) Ἐὰν δύο γωνίαι ἴσαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.

71) Ἐὰν δύο γωνίαι παραπληρωματικαὶ ἔχωσι τὰς πλευρὰς καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

Β'. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν κυρτῶν εὐθ. σχημάτων.

§ 92. Θεώρημα Ι.—*Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι ω=Β, φ=Γ καὶ Α+ω+φ=2 ὀρθ. Ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι Α+Β+Γ=2 ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 61.

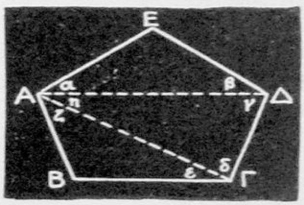
Πόρισμα Ι.—*Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.*

Πόρισμα ΙΙΙ.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ αἱ ἄλλαι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

§ 93. Θεώρημα ΙΙ.—*Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τόσας ὀρθὰς γωνίας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.*

Ἔστω τυχὸν κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (*Σχ. 62*), ὅπερ ἔχει 5 πλευράς. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς (5×2—4) ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 62.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ αὐτοῦ, τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς (5—2) τρίγωνα, ὧν αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 2×(5—2) ἢ (2×5—4) ὀρθὰς γωνίας, ἤτοι

$$\alpha+E+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+B+\zeta+\eta=(5\times 2-4) \text{ ὀρθ.}$$

$$\text{ἢ } A+B+\Gamma+\Delta+E=(5\times 2-4) \text{ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.}$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ δι' οἱονδήποτε ἄλλο κυρτὸν πολύγωνον.

Ἀσκήσεις. 72) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

73) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

74) Γωνία τις τριγώνου είναι $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς, ἡ μία δὲ τῶν ἄλλων διπλασία τῆς τρίτης. Πόσον εἶναι ἑκατέρα τούτων ;

75) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ δεκαγώνου ;

76) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

77) Ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουσιν αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ, ἰσοῦται πρὸς 1 ὀρθ. $+\frac{A}{2}$.

78) Ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουσιν αἱ διχοτομοῦσαι τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Β καὶ Γ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς 1 ὀθρ. $-\frac{A}{2}$.

79) Ἐὰν νοήσωμεν κινητὸν διαγράφον κατά τινα φορὰν τὰς πλευρὰς κυρτοῦ εὐθ. σχήματος καὶ προεκβάλωμεν ἑκάστην πλευράν, καθ' ἣν φορὰν κινεῖται ἐπ' αὐτῆς τὸ ρηθὲν κινητόν, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.

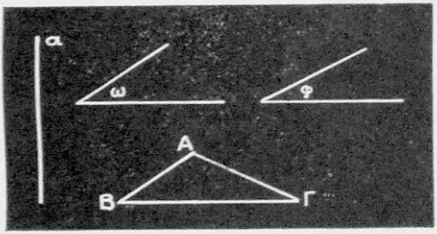
80) Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Καὶ ἀντιστρόφως.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἰδιότητα (§ 92) καὶ τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος Ι (§ 65) λύομεν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

§ 94. Πρόβλημα Ι. — *Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν ω καὶ φ (ω+φ<2 ὀρθ.) τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.*

§ 95. Πρόβλημα ΙΙ. — *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α καὶ τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν ω καὶ φ (ω+φ<2 ὀρθ.).*

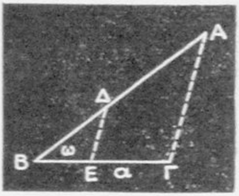


Σχ. 63.

§ 96. Πρόβλημα ΙΙΙ.— *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν ω καὶ τῆς ἀντικειμένης γωνίας φ (Σχ. 64).*

Περιορισμός. Πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι ω+φ<2 ὀρθ.

Λύσις. Ὁρίζομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ=α *(Σχ. 64)* καὶ μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΒΓ ἴσην τῇ ω. Εἶτα κατασκευάζομεν γωνίαν ΒΔΕ ἴσην τῇ φ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς ω μέρος τῆς ΒΔ. Ἐὰν εἶτα ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν παράλληλον τῇ ΔΕ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ προφανῶς εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 64.

Τρίγωνον διάφορον τοῦ κατασκευασθέντος καὶ ἔχον τὰ δεδομένα στοιχεῖα δὲν ὑπάρχει. Τὸ πρόβλημα ἄρα ἔχει μίαν λύσιν.

Σημ. Κατασκευάζοντες τὴν τρίτην γωνίαν ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ προηγούμενον.

Ἀσκήσεις. 81) Ἐκ τῆς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίας νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς αὐτοῦ.

82) Ἐκ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι αὐτοῦ.

83) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

84) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπέναντι γωνίας.

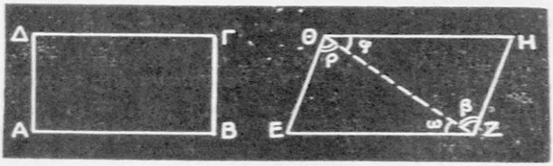
85) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας αὐτοῦ.

86) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

Παραλληλόγραμμα.

§ 97. Ἀξιοσημείωτα εἴδη τετραπλεύρων. *Ἐκ τῶν τετραπλεύρων ἀξιοσημείωτα εἶναι τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ τραπέζια.*

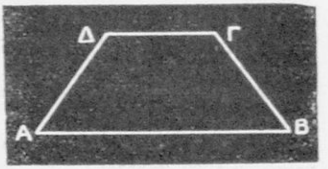


Σχ. 65.

Α΄. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους* *καλεῖται παραλληλόγραμμον*. Τὰ τετράπλευρα π. χ. ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ (*Σχ. 65*) εἶναι παραλληλόγραμμα.

Β'. Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους καλεῖται τραπέζιον.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (*Σχ. 66*) εἶναι τραπέζιον. Ἐὰν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τὸ τραπέζιον καλεῖται *ἰσοσκελὲς τραπέζιον*.



Σχ. 66.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.

§ 98. Θεώρημα Ι. — *Ἑκατέρα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.*

Ἔστω ΕΖΗΘ (*Σχ. 65*) τυχὸν παραλληλόγραμμον καὶ ΘΖ διαγώνιός τις αὐτοῦ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΘΖ καὶ ΘΖΗ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ταῦτα ἔχουσι τὴν ΘΖ κοινήν, τὴν $\omega = \varphi$ καὶ $\rho = \beta$ (§ 88 β')· ἄρα εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

§ 99. Θεώρημα ΙΙ. — *Παντὸς παραλληλογράμμου α') αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· β') αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ (*Σχ. 65*). Λέγω ὅτι α') ΕΖ = ΘΗ, ΕΘ = ΖΗ, καὶ β') Ε = Η καὶ Ζ = Θ.

Ἀπόδειξις. α') Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΖΘ καὶ ΘΖΗ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ΕΖ = ΘΗ καὶ ΕΘ = ΖΘ. ὅ. ἔ. δ,

β') Αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΕΘ τῆς Ε εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι πρὸς τὰς πλευρὰς ΗΘ καὶ ΗΖ τῆς γωνίας Η. Ἄρα (§ 90) εἶναι Ε = Η. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ Ζ = Θ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. — *Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί.*

Πόρισμα ΙΙ. — *Ἐὰν δύο προσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Πόρισμα ΙΙΙ. — *Παράλληλα εὐθ. τμήματα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα εἶναι ἴσα.*

Πόρισμα ΙV. — *Τὰ μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα τμήματα καθέτων ἐπὶ ταύτας εὐθειῶν εἶναι ἴσα.*

Ἀσκήσεις. 87) Παραλληλογράμμου μία πλευρὰ εἶναι 12 μ., ἡ δὲ περίμετρος 40 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ;

88) Παραλληλογράμμου μία γωνία είναι $\frac{2}{3}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

89) Ἐὰν ἐκ σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἄλλας αὐτοῦ πλευράς, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον σταθεράν.

90) Αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι (ἂν μὴ συμπίπτωσι).

91) Αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν παραλληλογράμμου τῇ αὐτῇ πλευρᾷ προσκειμένων εἶναι κάθετοι.

92) Ἐὰν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ γωνία Α ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ Ε παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ καὶ ΑΒ=ΕΖ, ΑΔ=ΕΘ, τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα εἶναι ἴσα.

93) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἐκ μιᾶς γωνίας καὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

§ 100. Θεώρημα III. (Ἀντίστροφον τοῦ II). — *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον α΄) τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας ἢ β΄) τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ *(Σχ. 65)* ἔχει α΄) ΕΖ =ΘΗ καὶ ΕΘ=ΖΗ ἢ β΄) Ε=Η καὶ Ζ=Θ. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. α΄) Τὰ τρίγωνα ΕΘΖ καὶ ΘΖΗ ἔχουσι τὴν ΘΖ κοινήν, ΕΖ=ΘΗ καὶ ΕΘ=ΖΗ ἐξ ὑποθέσεως. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα· κατ᾽ ἀκολουθίαν ρ=β καὶ ω=φ. Ἐκ τούτων ἕπεται (§ 84) ὅτι αἱ πλευραὶ ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι καὶ ΕΖ καὶ ΘΗ ὡσαύτως. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον. δ. ἕ. δ.

β΄) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων Ε=Η καὶ Ζ=Θ, αἵτινες ἀληθεύουσι καθ᾽ ὑπόθεσιν, ἕπεται εὐκόλως ὅτι Ε+Ζ=Η+Θ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 93) εἶναι Ε+Ζ+Η+Θ=4 ὀρθ., ἕπεται ὅτι (Ε+Ζ)×2=4 ὀρθ., ὅθεν Ε+Ζ =2 ὀρθ. Αἱ πλευραὶ ἄρα (§ 84 γ΄) ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν ἤδη ἐν τῇ ἰσότητι Ε+Ζ=2 ὀρθ. ἀντὶ Ζ τεθῇ ἡ Θ, προκύπτει ὅτι Ε+Θ=2 ὀρθ., ὅθεν ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι παράλληλοι.

Ἔχει λοιπὸν τὸ ΕΖΗΘ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. δ. ἕ. δ.

Πόρισμα I.— *Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι πᾶσαι ἴσαι, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Πόρισμα II.— *Ἐὰν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι πᾶσαι ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.*

§ 101. Θεώρημα IV.— *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.*

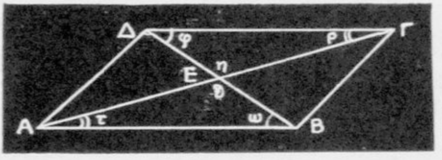
Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ *(Σχ. 65)*, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Λέγω ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΕΘΖ καὶ ΘΖΗ ἔχοντα τὴν ΘΖ κοινήν, ΕΖ=ΘΗ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ω=φ (§ 88 β′) εἶναι ἴσα. Ἄρα ρ=β καὶ συνεπῶς αἱ πλευραὶ ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι. Ἔχει λοιπὸν τὸ τετράπλευρον τοῦτο τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· εἶναι ἄρα παραλληλόγραμμον. ὅ. ἔ. δ.

Ἄσκησις. 94) Ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων δύο ἀντικειμένων πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς ἑκατέραν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

§ 102. Πόρισμα V. — *Αἱ διαγώνιοι παραλληλλογράμμου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 67)* τυχὸν παραλληλόγραμμον καὶ Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων. Λέγω ὅτι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΒΕ=ΕΔ,



Σχ. 67.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ ἔχουσι ΑΒ=ΔΓ, ω=φ καὶ τ=ρ. Εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν ΑΕ=ΕΓ, ΒΕ=ΕΔ. ὅ. ἔ. δ.

§ 103. Θεώρημα VI.— *Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου τέμνωνται δίχα, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι *(Σχ. 67)* εἶναι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΒΕ=ΕΔ. Λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγοαμμον.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ ἔχοντα ΑΕ=ΕΓ καὶ ΒΕ=ΕΔ ἐξ ὑποθέσεως καὶ θ=η εἶναι ἴσα· ἄρα εἶναι ΑΒ=ΓΔ καὶ ω=φ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ω=φ συνάγεται ὅτι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι καὶ παράλληλοι, ἕπεται (§ 101) ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀσκήσεις. 95) Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αἱ εὐθεῖαι ΑΖ καὶ ΔΕ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

96) Τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

97) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ αἱ διαγώνιοι ἰσοῦνται πρὸς δεδομένα εὐθ. τμήματα καὶ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς $1/2$ ὀρθῆς.

§ 104. **Ὁρισμοί.**— *Ἀπόστασις* δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης ἐπ' αὐτὰς καθέτου.

Βάσις παραλληλογράμμου κεῖται τυχοῦσα πλευρὰ αὐτοῦ.

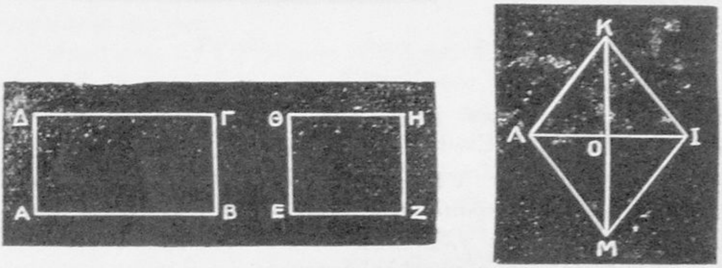
Ὕψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ.

Βάσεις τραπεζίου καλοῦνται αἱ παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ. Ὕψος δὲ τραπεζίου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διάμετρος τραπεζίου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἀξιοσημείωτα εἴδη παραλληλογράμμων.

§ 105. **Α΄. Ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.**— *Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθαί, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλόγγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον.* Π.χ. τὸ ΑΒΓΔ *(Σχ. 68)* εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 68.

Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο καλεῖται τετράγωνον. Τὸ ὀρθογώνιον π.χ. ΕΖΗΘ *(Σχ. 68)* εἶναι τετρέγωνον.

Β΄. **Ρόμβος.**—*Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο καλεῖται ρόμβος.*

Τὸ παραλληλόγραμμον π.χ. ΙΚΛΛ *(Σχ. 68)* εἶναι ρόμβος.

§ 106. **Ἰδιαίτεραι τῶν ὀρθογωνίων καὶ ρόμβων ἰδιότητες.** — Τὰ ὀρθογώνια καὶ οἱ ρόμβοι πλὴν τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων ἔχουσι καὶ τὰς ἀκολούθους ἔτι ἰδιότητας, ὧν τὰς ἀποδείξεις, ὡς εὐκόλους, παραλείπομεν.

Θεώρημα I.—*Παντὸς ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Θεώρημα II.—*Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ. Καὶ Ἀντιστρόφως: Ἐὰν παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνωνται καθέτως ἢ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ, αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Πόρισμα I.—*Τοῦ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ.*

Πόρισμα II.—*Πᾶν παραλληλόγραμμον, οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται καθέτως, εἶναι τετράγωνον.*

Ἀσκήσεις. 98) Ἑκάστη πλευρὰ ὀρθογωνίου σχηματίζει μετὰ τῶν διαγωνίων του ἴσας γωνίας.

99) Ἐὰν μία διαγώνιος ὀρθογωνίου σχηματίζῃ μετά τινος πλευρᾶς γωνίαν $\frac{2}{7}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων;

100) Τὰ ἄκρα δύο διαμέτρων κύκλου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

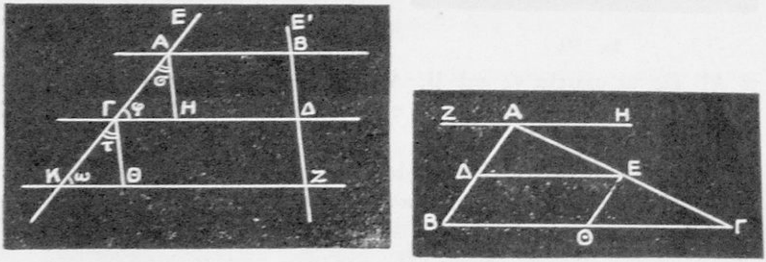
101) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς διαγωνίου του.

102) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἐκ τῶν διαγωνίων του.

103) Ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ῥόμβου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.

§ 107. Θεώρημα I.—*Ἐὰν τμήματα εὐθείας μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα εἶναι ἴσα καὶ τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν πα-*



Σχ. 69.

ραλλήλων περιεχόμενα τμήματα πάσης ἄλλης εὐθείας εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε' *(Σχ. 69)* δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΚΖ, οὕτως ὥστε ΑΓ=ΓΚ. Λέγω ὅτι καὶ ΒΔ=ΔΖ.

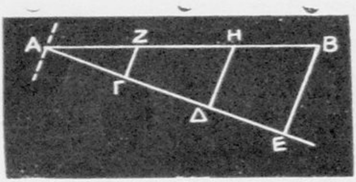
Ἀπόδειξις. Ἄγομεν ἐκ τῶν Α καὶ Γ παραλλήλους τῇ Ε΄ εὐθείας ΑΗ καὶ ΓΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι. Τὰ τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΚΘ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΑΓ=ΓΚ, σ=τ, φ=ω· εἶναι ἄρα ΑΗ=ΓΘ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 99) εἶναι ΑΗ=ΒΔ καὶ ΓΘ=ΔΖ, ἕπεται ὅτι καὶ ΒΔ=ΔΖ. ὅ. ἔ. δ. Οὕτω γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πλείονα τμήματα.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ, αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.*

Πόρισμα II.—*Τὸ ὑπὸ τῶν μέσων δύο πλευρῶν τριγώνου ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα εἶναι παράλληλον τῇ τρίτῃ πλευρᾷ αὐτοῦ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.*

Πόρισμα III.—*Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἀγομένη διάμεσος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.*

§ 108. Πρόβλημα.—*Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ (Σχ. 70) εἰς τρία ἴσα μέρη.*



Σχ. 70.

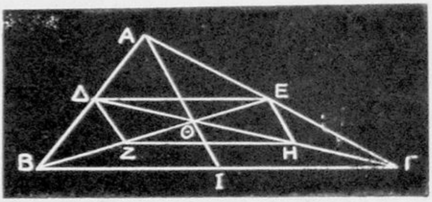
Λύσις. Ἐκ τινος ἄκρου Α τοῦ ΑΒ ἄγομεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετ᾽ αὐτοῦ γωνίαν καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς τρία ἴσα διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Ἄγομεν εἶτα τὴν ΕΒ καὶ ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ παραλλήλους ταύτῃ εὐθείας, αἵτινες τέμνουσι τὸ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Λέγω ὅτι ΑΖ=ΖΗ=ΗΒ. Τῷ ὄντι· ἂν διὰ τοῦ Α ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΕ, ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ, θὰ εἶναι καὶ ΑΖ=ΖΗ=ΗΘ.

§ 109. Θεώρημα II.—*Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται πᾶσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 71)* τυχὸν τρίγωνον καὶ ΑΙ, ΒΕ, ΓΔ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ προφανῶς $\widehat{\mathrm{E}\mathrm{B}\Gamma}+\widehat{\Delta\Gamma\mathrm{B}}<2$ ὀρθ. αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ

ΓΔ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Θ. Ἂν δὲ Ζ καὶ Η εἶναι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΒΘ καὶ ΓΘ, τὸ εὐθ. τμῆμα ΖΗ εἶναι παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ ἴσον πρὸς $\frac{ΒΓ}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ΔΕ εἶναι παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ ἴσον πρὸς $\frac{ΒΓ}{2}$, ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 71.

Εἶναι λοιπὸν ΕΘ=ΘΖ=ΖΒ καὶ ΔΘ=ΘΗ=ΗΓ, ὅθεν ἔπεται ὅτι $ΒΘ=\frac{2}{3}ΒΕ$ καὶ $ΓΘ=\frac{2}{3}ΓΔ$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ ΑΙ τέμνονται εἰς σημεῖον ἀπέχον τοῦ Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $\frac{2}{3}$ ΒΕ, ἤτοι εἰς τὸ Θ καὶ ὅτι $ΑΘ=\frac{2}{3}ΑΙ$.

Ἀσκήσεις. 104) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

105) Τὰ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ὁριζόμενα εὐθ. τμήματα διχοτομοῦνται.

106) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραγώνου.

107) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ρόμβου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

108) Ἡ διὰ τοῦ μέσου δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου διερχομένη εὐθεῖα διχοτομεῖ πᾶν εὐθ. τμῆμα καταλῆγον εἰς τὰς ἄλλας αὐτοῦ πλευράς.

109) Ἡ διάμεσος τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴση, πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

110) Πᾶν εὐθ. τμῆμα περιεχόμενον μεταξὺ τῶν βάσεων τραπεζίου διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέσου αὐτοῦ.

111) Τὸ εὐθ. τμῆμα, ὅπερ ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τραπεζίου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

112) Ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθ. τριγώνου, διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

113) Ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

114) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἔχον περίμετρον ἴσην πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

115) Τὰ ὕψη τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

116) Διὰ δεδομένου σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου δύο δεδομένων εὐθειῶν, ἃς δὲν δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν μέχρι τῆς τομῆς αὐτῶν.

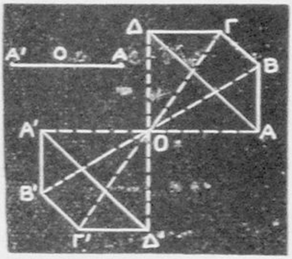
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Συμμετρία ἐν ἐπιπέδῳ. Α΄. Συμμετρία πρὸς κέντρον.

§ 110. Συμμετρικὰ πρὸς κέντρον σημεῖα καὶ σχήματα.—*Δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ λέγονται συμμετρικὰ πρός τι ἄλλο σημεῖον Ο, ἐὰν τοῦτο διχοτομῇ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ΄ (Σχ. 72).*

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται *κέντρον συμμετρίας.*

Ἐὰν εὐθύγρ. τμῆμα ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίαν 180°, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ ΟΑ΄ καὶ τὸ Α ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του Α΄.



Σχ. 72.

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον, ἐὰν πᾶν σημεῖον ἑκατέρου εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τοῦ ἄλλου πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο. Τὰ σχήματα π. χ. ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς κέντρον Ο.

Ἐὰν τὰ πρὸς ὡρισμένον σημεῖον συμμετρικὰ πάντων τῶν σημείων σχήματος εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος, τὸ σημεῖον ἐκεῖνο καλεῖται *κέντρον συμμετρίας* τοῦ σχήματος τούτου. Π. χ. τὸ κέντρον κύκλου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Τὰ πρὸς κέντρον συμμετρικὰ σχήματα ἔχουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

§ 111. Θεώρημα Ι.—*Τὰ πρὸς κέντρον συμμετρικὰ σχήματα εἶναι ἴσα.* Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ *(Σχ. 72)* δύο συμμετρικὰ πρὸς κέντρον Ο σχήματα. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν τὸ σχῆμα ΟΑΒΓΔ στρεφόμενον περὶ τὸ Ο χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου του, μέχρις οὗ ἡ ΟΑ διαγράψασα γωνίαν 180° ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄. Ἐπειδὴ $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$, $A\hat{O}\Gamma = A'\hat{O}\Gamma'$, $A\hat{O}\Delta = A'\hat{O}\Delta'$, αἱ ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΟΒ΄, ΟΓ΄, ΟΔ΄. Ἐπειδὴ δὲ ΟΑ = ΟΑ΄, ΟΒ = ΟΒ΄, ΟΓ = ΟΓ΄, ΟΔ = ΟΔ΄, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἐφαρμόζουσιν ἐπὶ τῶν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄. Τὸ σχῆμα ἄρα ΑΒΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ταῦτα εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 117) Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας πρὸς κέντρον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον εἶναι εὐθεῖα παράλληλος αὐτῇ.

118) Τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν γωνίας συμμετρικὸν αὐτῆς εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς γωνία.

119) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν ὀρθ. τριγώνου πρὸς κέντρον α΄) τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, β΄) τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης.

120) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς κέντρον α΄) τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, β΄) τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ.

121) Ἐὰν ἑκάστη διάμεσος τριγώνου προεκβληθῇ πέραν τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς κατὰ τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς, τὰ ἄκρα τῶν προεκβολῶν τούτων εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ πρῶτον.

122) Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

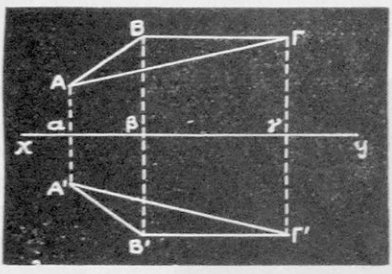
Β΄. Συμμετρία πρὸς ἄξονα.

§ 112. Συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα σημεῖα καὶ σχήματα.—*Δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ (Σχ. 73) λέγονται συμμετρικὰ πρὸς τινα εὐθεῖαν* xy, *ἐὰν αὕτη τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν ΑΑ΄.*

Ἡ εὐθεῖα xy λέγεται *ἄξων συμμετρίας.*

Ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος συμμετρίας εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ.

Ἐὰν τὸ ἡμιεπίπεδον Αχψ στραφῇ περὶ τὴν xy, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α΄xy, ἡ Αα μένουσα κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα xy θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α΄α καὶ ἕνεκα τῆς ἰσότητος Αα=αΑ΄ τὸ Α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του Α΄.



Σχ. 73.

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα, ἐὰν ἕκαστον σημεῖον ἑκατέρου εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τοῦ ἄλλου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.

Ἐὰν τὰ πρὸς εὐθεῖαν συμμετρικὰ πάντων τῶν σημείων σχήματος εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος, ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται *ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τούτου.* Π.χ. ἑκάστη διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Τὰ πρὸς ἄξονα συμμετρικὰ σχήματα ἔχουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

§. 113. Θεώρημα Ι.— *Τὰ πρὸς ἄξονα συμμετρικὰ σχήματα εἶναι ἴσα.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ ἡμιεπίπεδον Αχψ στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα χψ, μέχρις οὗ ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου Α′χψ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, τοῦ σχήματος ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν των Α′,Β′,Γ′. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σχῆμα ΑΒΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α′ Β′ Γ′· εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 123) Τὸ πρὸς ἄξονα συμμετρικὸν εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι εἶναι εὐθεῖα παράλληλος αὐτῇ.

124) Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἄξονα καὶ μὴ παράλληλοι αὐτῷ τέμνουσιν αὐτὸν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ σχηματίζουσιν ἴσας μετ' αὐτοῦ γωνίας.

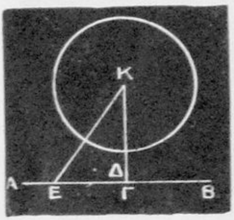
125) Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

126) Ἡ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου διχοτομοῦσα εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η′.

Θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν.

§ 112. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΚΓ τοῦ κέντρου Κ κύκλου ἀπὸ εὐθείας ΒΑ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα Ρ, ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως.*



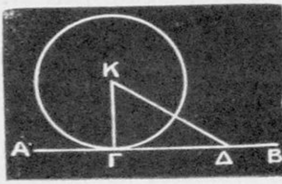
Σχ. 74.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΚΓ>Ρ τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ἂν δὲ Ε εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ΚΕ>ΚΓ καὶ κατὰ μείζονα λόγον ΚΕ>Ρ· κεῖται ἄρα τὸ Ε ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ· ἄρα ὁ κύκλος καὶ ἡ εὐθεῖα οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ κύκλος Κ οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ΚΓ>Ρ. ὅ. ἔ. δ.

§ 115. Θεώρημα ΙΙ. — *Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΚΓ τοῦ κέντρου κύκλου Κ ἀπὸ εὐθείας ΑΒ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι Ρ, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΚΓ εἶναι ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἀφ᾽ ἑτέρου ΚΓ=Ρ, τὸ σημεῖον Γ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ.

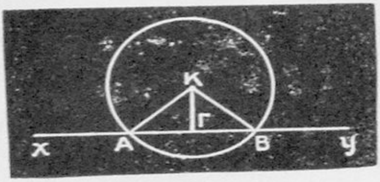


Σχ. 75

Ἂν δὲ Δ εἶναι ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ΚΔ>ΚΓ ἢ ΚΔ>Ρ καὶ ἑπομένως τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἡ περιφέρεια Κ ἔχουσι μόνον τὸ Γ κοινὸν σημεῖον. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ ΑΒ καὶ ἡ περιφέρεια Κ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Γ, πᾶν ἄλλο σημεῖον Δ τῆς ΑΒ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ θὰ εἶναι ΚΓ=Ρ καὶ ΚΔ>Ρ, ὅθεν ΚΓ<ΚΔ. Εἶναι ἄρα (§ 50) ἡ ἀκτὶς ΚΓ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ὅ. ἔ. δ.

§ 116. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΚΓ τοῦ κέντρου κύκλου Κ ἀπὸ εὐθείας χψ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα. Καὶ ἀντιστρόφως.*



Σχ. 76

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα χψ καὶ ἡ περιφέρεια Κ ἔχουσιν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἢ ἓν ἢ δύο. Ἀλλὰ ἂν εἶχον ἓν κοινὸν σημεῖον ἢ οὐδὲν θὰ ἦτο ΚΓ⩾Ρ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Κατ᾽ ἀνάγκην λοιπὸν ἡ χψ καὶ ἡ περιφέρεια Κ ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα. ὅ. ἔ. δ.

Κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

Πᾶσα εὐθεῖα ἔχουσα μετὰ περιφερείας δύο κοινὰ σημεῖα καλεῖται *τέμνουσα* αὐτῆς.

§ 117. Ἐφαπτομένη περιφερείας κύκλου.—*Πᾶσα εὐθεῖα ἔχουσα μετὰ περιφερείας κύκλου ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ταύτης.*

Τὸ κοινὸν σημεῖον περιφερείας καὶ τυχούσης αὐτῆς ἐφαπτομένης καλεῖται *σημεῖον ἐπαφῆς*. Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ. 75)* εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Κ, τὸ δὲ Γ εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἑκάστη ἐφαπτομένη περιφερείας ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 118. Θεώρημα Ι.—*Ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καταλήγουσα ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.*

Διότι ἡ ἀκτὶς αὕτη εἶναι μικροτέρα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν σημείων τῆς ἐφαπτομένης.

§ 119. Θεώρημα II.—*Ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος κύκλου εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας του.*

Διότι τὸ κέντρον ἀπέχει ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι.

Πόρισμα I.—*Δι' ἑκάστου σημείου περιφερείας ἄγεται μία μόνον ἐφαπτομένη ταύτης* (§ 38).

Ἐκ τῆς προηγουμένης (§ 119) ἰδιότητος ἕπεται εὐκόλως ἡ λύσις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

§ 120. Πρόβλημα I.—*Διὰ δεδομένου σημείου περιφερείας νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ταύτης.*

Ἀσκήσεις. 127) Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου κύκλου εἶναι παράλληλοι.

128) Ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος του, ἐφάπτεται τῆς βάσεως.

129) Ἐὰν δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας τέμνωνται, ἡ γωνία αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας τῶν εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καταληγουσῶν ἀκτίνων.

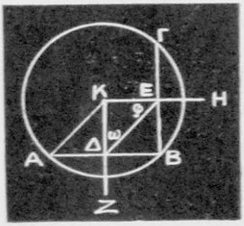
130) Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, τὰ ἐντὸς τῆς ἐξωτερικῆς περιεχόμενα τμήματα τῶν ἐφαπτομένων τῆς ἄλλης εἶναι ἴσα.

131) Ἐὰν χορδὴ τόξου καὶ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλοι, τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς περιεχόμενα τόξα εἶναι ἴσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

Θέσεις δύο περιφερειῶν.

§ 121. Θεώρημα I.—*Διὰ τριῶν σημείων Α, Β, Γ, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, διέρχεται περιφέρεια κύκλου καὶ μόνον μία.*



Σχ. 77.

Ἀπόδειξις. Ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΖ καὶ ΕΗ, αἵτινες τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ εἶτα τὴν ΕΔ. Ἐπειδὴ δὲ $\omega + \varphi < 2$ ὀρθ. αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΗ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ. Ἐπειδὴ (§ 52) εἶναι ΚΑ=ΚΒ καὶ ΚΒ=ΚΓ, ἕπεται ὅτι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ. Ἐὰν ὅθεν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ.

Ἂν διήρχετο διὰ τῶν Α, Β, Γ καὶ ἄλλη περιφερεια, Κ', θὰ ἦτο Κ'Α=Κ'Β καὶ Κ'Β=Κ'Γ, ἄρα τὸ

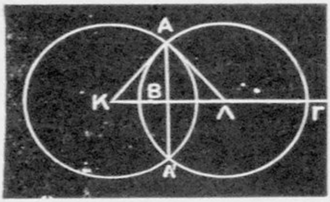
Κ′ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῶν ΔΖ καὶ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον, διότι αὗται πλὴν τοῦ Κ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν. Ὥστε διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ μόνον μία περιφέρεια διέρχεται. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I.—*Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο.*

§ 122. Διάκεντρος δύο περιφερειῶν. — *Ἡ διὰ τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν διερχομένη εὐθεῖα καλεῖται διάκεντρος αὐτῶν.*

§ 123. Θεώρημα I. — *Ἐὰν δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον Α ἐκτὸς τῆς διακέντρου κείμενον, θὰ ἔχωσι κοινὸν καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν διάκεντρον.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΚΛ διέρχεται δι᾽ ἀμφοτέρων τῶν κέντρων Κ καὶ Λ εἶναι (§ 112) ἄξων συμμετρίας ἑκατέρας τῶν περιφερειῶν τούτων. Τὸ συμμετρικὸν ἄρα Α′ τοῦ σημείου Α τῆς περιφερείας Κ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὀφείλει νὰ κεῖται τοῦτο καὶ ἐπὶ τῆς Λ. Κεῖται ἄρα τὸ Α′ ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ. ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 78.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.*

Πόρισμα II.—*Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάκεντρον, οὐδὲν δὲ τούτων κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς.*

Πόρισμα III.—*Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὸν ἓν σημεῖον τῆς διακέντρου αὐτῶν, οὐδὲν ἄλλο πλὴν αὐτοῦ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.*

§ 124. Ἐφαπτόμεναι καὶ τεμνόμεναι περιφέρειαι.—*Δύο περιφέρειαι λέγονται ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων, ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.* Τοιαῦται π. χ. εἶναι αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ *(Σχ. 79).*

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν καλεῖται *σημεῖον ἐπαφῆς.*

Δύο περιφέρειραι ἐφάπτονται *ἐκτὸς* ἢ *ἐντός*, καθ᾽ ὅσον αὗται κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ ἡ μία κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Δύο περιφέρειαι λέγονται *τεμνόμεναι* ἢ λέγομεν ὅτι αὗται τέ-

μνονται, ἐὰν ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα. Τοιαῦται π. χ. εἶναι αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ *(Σχ. 78)*. Λέγονται δὲ οὕτω, διότι μέρος ἑκατέρας κεῖται ἐντὸς καὶ μέρος ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Τῷ ὄντι· τῆς ΑΑ′ *(Σχ. 78)* οὔσης κοινῆς χορδῆς εἰς τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ μέρος τοῦ κύκλου Λ κεῖται ἐντὸς τοῦ Κ. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἕνεκα τοῦ τριγώνου ΑΚΛ εἶναι $K\mathrm{A} < K\Lambda + \Lambda\mathrm{A}$, ὅθεν $K\mathrm{A} < K\Lambda + K\Gamma$ ἢ $K\mathrm{A} < K\Gamma$. Τὸ σημεῖον ἄρα Γ τῆς Λ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι μέρος τῆς Κ κεῖται ἐντὸς καὶ μέρος ἐκτὸς τῆς Λ.

§ 125. Δυναταὶ θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.—Κατὰ τὰ προηγούμενα δύο περιφέρειαι ἔχουσιν ἢ δύο κοινὰ σημεῖα ἢ ἓν ἢ οὐδέν. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ὁ ὑπὸ ἑκατέρας περιφερείας ὁριζόμενος κύκλος κεῖται ὅλος ἐκτὸς ἢ ὅλος ἐντὸς τοῦ ἄλλου. Αἱ δυναταὶ ἄρα θέσεις δύο μὴ ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἀκόλουθοι.

α′)	Δύο κοινὰ σημεῖα	Αἱ περιφέρειαι τέμνονται
β′)	ἓν κοινὸν σημεῖον	» » ἐφάπτονται ἐκτός.
γ′)	ἓν κοινὸν σημεῖον	» » » ἐντός.
δ′)	οὐδὲν κοινὸν »	ἑκάτερος κύκλος κεῖται ὅλος ἐκτὸς τοῦ ἄλλου.
ε′)	οὐδὲν κοινὸν »	ὁ εἷς κύκλος κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων ὑφίσταται ὡρισμένη σχέσις μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν καὶ τῶν ἀκτίνων Ρ, ρ αὐτῶν, ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων γίνεται φανερόν.

§ 126. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

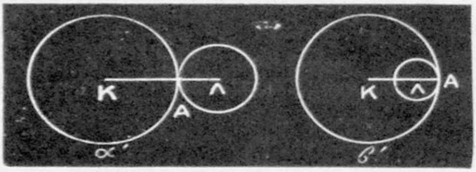
Ἔστωσαν Κ καὶ Λ *(Σχ. 78)* δύο τεμνόμεναι περιφέρειαι. Λέγω ὅτι $P - \rho < K\Lambda < P + \rho$.

Ἀπόδειξις. Ἡ ΚΛ εἶναι πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΚΛ· ἄρα (§ 72) εἶναι $\Lambda\mathrm{A} - K\mathrm{A} < K\Lambda < \Lambda\mathrm{A} + K\mathrm{A}$ ἢ $P - \rho < K\Lambda < P + \rho$. ὅ. ἔ. δ.

§ 127. Θεώρημα.—*Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐκτός, ἡ ἀπόσπασις τῶν κέντρων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ *(Σχ. 79 α')* δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἐκτὸς εἰς τὸ σημεῖον Α.

Λέγω ὅτι ΚΛ=Ρ+ρ.



Σχ. 79.

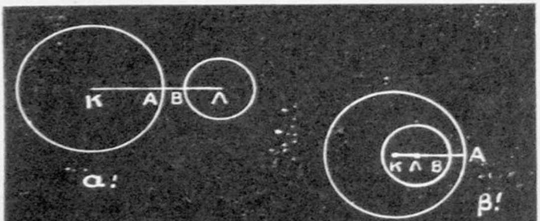
Ἀπόδειξις. Τὸ κοινὸν σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ (§ 123, Πόρ. Ι), τὰ δὲ κέντρα Κ καὶ Λ ἑκατέρωθεν τοῦ Α. Ἄρα ΚΛ =ΚΑ+ΑΛ ἢ ΚΛ=Ρ+ρ. ὅ. ἔ. δ.

§ 128. Θεώρημα ΙΙΙ. — *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐντός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ *(Σχ. 79 β')* δύο εἰς τὸ σημεῖον Α ἐντὸς ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι ἔχουσαι ἀκτῖνας Ρ καὶ ρ, ὧν ἔστω Ρ>ρ. Λέγω ὅτι ΚΛ=Ρ—ρ.

Ἀπόδειξις. Τὰ σημεῖα Κ, Λ, Α κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ 123 Πόρ. Ι). Ἐπειδὴ δὲ αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός, τὰ Κ καὶ Λ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ ὡς πρὸς τὸ Α μέρος. Ἕνεκα δὲ τῆς σχέσεως ΚΑ>ΛΑ, τὸ Λ κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Α. Εἶναι ἄρα ΚΛ+ΛΑ=ΚΑ, ὅθεν ΚΛ=Ρ—ρ. ὅ. ἔ. δ.

§ 129. Θεώρημα IV. — *Ἐὰν ἑκάτερος δύο κύκλων κεῖται ὅλος ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*



Σχ. 80.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΛ *(Σχ. 80 α')* τέμνῃ τὰς περιφερείας Κ καὶ Λ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως

ΚΒ>ΚΑ καὶ ἑπομένως τὸ Α κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Β. Ἄρα ΚΑ+ΑΒ+ΒΛ=ΚΛ ἢ Ρ+ΑΒ+ρ=ΚΛ, ὅθεν ΚΛ>Ρ+ρ. ὅ. ἔ. δ.

§ 130. Θεώρημα V. — *Ἐὰν κύκλος κεῖται ὅλος ἐντὸς ἄλλου, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν κύκλων τούτων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος Λ κείμενος ἐντὸς κύκλου Κ *(Σχ.80β')*. Ἐὰν τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΛ προεκβληθῇ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὸ Λ φοράν, θὰ τμήσῃ πρῶτον τὴν περιφέρειαν Λ εἴς τι σημεῖον Β καὶ εἶτα τὴν Κ εἴς τι σημεῖον Α. Εἶναι ἄρα ΚΛ+ΛΒ+ΒΑ=ΚΑ καὶ ἑπομένως ΚΛ+ΒΑ=Ρ—ρ, ὅθεν ΚΛ<Ρ—ρ. ὅ. ἔ. δ.

§ 131. Ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων I—V (§ 126—131). Τὰ ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων (I—V) διατυποῦμεν συντόμως ὧδε.

α') Ἐὰν ΚΛ<Ρ+ρ καὶ ΚΛ>Ρ—ρ, αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ τέμνονται.

β') Ἐὰν ΚΛ=Ρ+ρ, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.

γ') » ΚΛ=Ρ—ρ, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.

δ') » ΚΛ>Ρ+ρ, ἑκάτερος κύκλος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου.

ε') » ΚΛ<Ρ—ρ, ὁ εἷς κύκλος κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἀποδεικνύεται δι' ἕκαστον τούτων εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἀσκήσεις. 132) Δύο ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς αὐτῶν.

133) Ἐὰν περιφέρεια τέμνῃ δύο ἄλλας ὁμοκέντρους, αἱ κοιναὶ χορδαὶ ἐκείνης καὶ ἑκατέρας τῶν τεμνομένων περιφερειῶν εἶναι παράλληλοι.

134) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη ἐκτὸς ἢ ἐντὸς δεδομένης περιφερείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς.

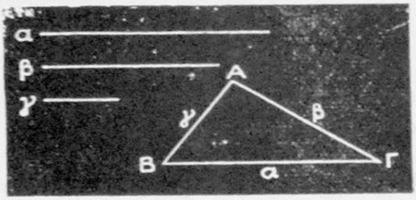
135) Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα, αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

§ 135. Πρόβλημα I. — *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ α, β, γ (Σχ. 81).*

Λύσις. Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ α, ὅπερ οὐδενὸς τῶν ἄλλων δεδομένων τμημάτων εἶναι μικρότερον. Εἶτα μὲ κέντρα Γ καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰ τμήματα β καὶ γ γράφομεν περιφερείας κύκλων. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνωνται καὶ ἀχθῶσιν εἰς τὸ ἕτερον τῶν κοινῶν σημείων Α, αἱ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ ΑΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον. Πᾶν ἄλλο τρίγωνον σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων είναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ἤτοι, ἐὰν αἱ γραφεῖσαι περιφέρειαι τέμνωνται, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

Διερεύνησις. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἐλύθη τὸ πρόβλημα τοῦτο, καθίσταται φανερὸν ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει αἱ ῥηθεῖσαι περιφέρειαι νὰ τέμνωνται, ἤτοι πρέπει (§ 131 α') νὰ εἶναι

$\alpha < \beta + \gamma$ καὶ $\alpha > \beta - \gamma$.



Σχ. 81.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ β' τῶν ἀνισοτήτων τούτων προφανῶς ἀληθεύει ἀφοῦ $\alpha \geqq \beta$, ἔπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha < \beta + \gamma$, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν.

Ἀσκήσεις. 136) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς τῶν ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

137) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

138) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν διαγωνίων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι.—Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα εἰς κύκλον εὐθ. σχήματα.

§ 133. Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία.—*Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου τούτου*. Π.χ. ἡ γωνία ΒΑΓ *(Σχ. 82)* εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Κ. Τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας περιεχόμενον τόξον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου καλεῖται *ἀντίστοιχον* αὐτῆς τόξον. Οὕτω τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας Α ἀντίστοιχον τόξον εἶναι τὸ ΒΔΓ.

Σχ. 82.

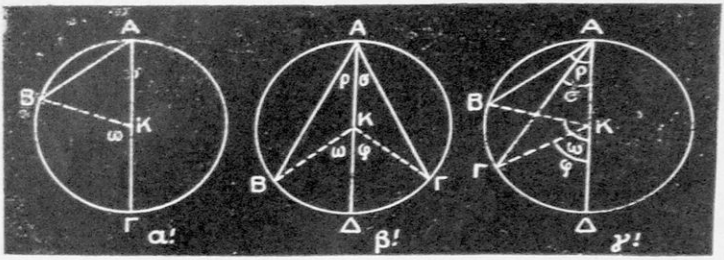
ΣΗΜ. Συνήθως ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι ἐγγεγραμμένη τις γωνία Α ἔχει ἀντίστοιχον τόξον ΒΓ, λέγομεν ὅτι ἡ Α βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ.

Γωνία τις καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Οὕτως ἡ γωνία Α (*Σχ. 82*) εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα κύκλου ΒΑΓΒ.

Ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

§ 134. Θεώρημα Ι. — *Πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.*

Ἔστω ΒΑΓ ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον Κ (*Σχ. 83*) γωνία καὶ ΒΚΓ ἡ εἰς τὸ αὐτὸ τόξον βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία. Λέγω ὅτι γων. $\text{ΒΑΓ}=\frac{\text{γων. ΒΚΓ}}{2}$.



Σχ. 83.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂν (*Σχ. 83 α΄*) τὸ κέντρον Κ κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς ΑΓ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ, ἡ γωνία ΒΚΓ ἢ ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΚΑΒ καὶ ἑπομένως $\omega=\text{ΒΑΓ}+\text{Β}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}=\text{Β}$, ἕπεται, ὅτι $\omega=2.\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}$, ὅθεν $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}=\frac{\omega}{2}$ ἢ

$\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}=\frac{\text{Β}\widehat{\text{Κ}}\text{Γ}}{2}$. ὅ.ἔ.δ.

β΄) Ἂν τὸ κέντρον Κ κεῖται ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἄγοντες τὴν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῆς διερχομένην διάμετρον ΑΔ διαιροῦμεν τὴν μὲν ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς δύο ἄλλας ρ καὶ σ, τὴν δὲ ἐπίκεντρον εἰς τὰς ω καὶ φ. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $\rho=\frac{\omega}{2}$ καὶ $\sigma=\frac{\varphi}{2}$, ἐξ ὧν ἕπεται

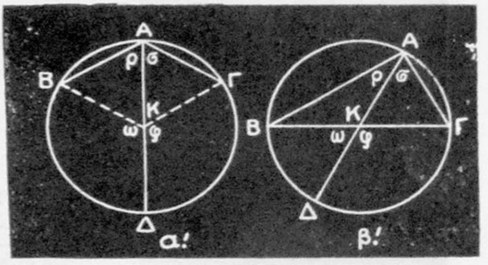
ὅτι $\rho+\sigma=\frac{\omega+\varphi}{2}$ ἢ $\text{Β}\widehat{\text{Α}}\text{Γ}=\frac{\text{Β}\widehat{\text{Κ}}\text{Γ}}{2}$. ὅ.ἔ.δ.

γ΄) Ἂν τὸ κέντρον Κ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας

(Σχ. 83 γ'), ἄγοντες τὴν διάμετρον ΑΔ σχηματίζομεν τὰς ἐγγεγραμμένας γωνίας ρ καὶ σ καὶ τὰς ἐπικέντρους ω καὶ φ, εἶναι δὲ κατὰ τὴν α' περίπτωσιν $\rho=\frac{\omega}{2}$ καὶ $\sigma=\frac{\varphi}{2}$, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι

$$\rho-\sigma=\frac{\omega-\varphi}{2} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\frac{\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma}{2}.$$ ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ τόξον ΒΔΓ (Σχ. 84 α'), ἐφ' οὗ βαίνει ἐγγεγραμμένη τις γωνία, εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, ἡ ἐπ' αὐτοῦ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία Κ εἶναι κυρτή. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.



Σχ. 84.

Πόρισμα Ι.—*Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθὴ (Σχ. 84 β').*

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\rho=\frac{\omega}{2}$ καὶ $\sigma=\frac{\varphi}{2}$ ἕπεται ὅτι

$$\rho+\sigma=\frac{\omega+\varphi}{2}=\frac{2.\text{ὀρθ.}}{2}=1 \text{ ὀρθ.} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=1 \text{ ὀρθ.}$$

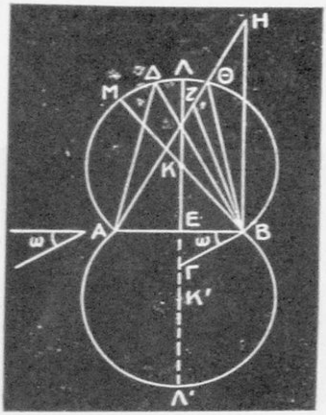
Πόρισμα ΙΙΙ.—*Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, καθ' ὅσον βαίνει ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἢ μεγαλυτέρου ἡμιπεριφερείας.*

Πόρισμα IV.—*Τὸ μέτρον ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία.*

Πόρισμα V.—*Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο τόξων συμμετρικῶν πρὸς αὐτὴν φαίνεται ἐκ πάντων τῶν σημείων τῶν τόξων τούτων* (πλὴν τῶν ἄκρων αὐτῆς) *ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.*

Ἐὰν δηλ. δύο τόξα ΑΛΒ, ΑΛ'Β εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΒ αὐτῶν *(Σχ. 85)* θὰ εἶναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\widehat{\Theta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\widehat{\Lambda'}\mathrm{B}$ (§ 134 Πόρ. Ι, § 113).

Παρατήρησις. Ἐὰν Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον ἑνὸς τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΛΒ, ΑΛ'Β, θὰ εἶναι $A\hat{Z}B > A\hat{\Theta}B$ ἢ $A\hat{Z}B > \omega$. Ἐὰν δὲ Η εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν κυκλικῶν τούτων τμημάτων καὶ ἐκτὸς αὐτῶν κείμενον, θὰ εἶναι



Σχ. 85.

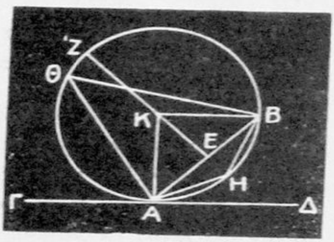
$$A\hat{H}B < A\hat{\Theta}B \text{ ἢ } A\hat{H}B < \omega.$$

Ὥστε ἐκ πάντων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ρηθέντων κυκλικῶν τμημάτων μόνον τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΛΒΛ'Α ἔχουσι τὴν ἰδιότητα αἱ ἐξ ἑκάστου τούτων πρὸς τὰ Α καὶ Β ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ σχηματίζωσι γωνίαν ω. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΛΒΛ'Α εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ω.

Ἂν ἡ γωνία ω εἶναι ὀρθή, ἡ γραμμὴ ΑΛΒΛ' εἶναι περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΒ.

§ 135. Θεώρημα ΙΙ.—*Πᾶσα ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται πρὸς ἐγγεγραμμένην γωνίαν βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐκείνης περιεχομένου τόξου.*

Ἔστω ΑΒ τυχοῦσα τοῦ κύκλου Κ χορδὴ *(Σχ. 86)* καὶ ΓΔ ἡ εἰς τὸ ἄκρον Α αὐτῆς ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Λέγω ὅτι $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Theta}B$ καὶ $\Gamma\hat{A}B = A\hat{H}B$.



Σχ. 86.

Ἀπόδειξις. α') Ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ καὶ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ κάθετον ΚΕ, ἥτις διχοτομεῖ τὴν κοίλην καὶ κυρτὴν γωνίαν ΑΚΒ. Ὥστε $A\hat{K}E = \frac{AKB}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 134) εἶναι καὶ $A\hat{\Theta}B = \frac{A\hat{K}B}{2}$, ἔπεται ὅτι

$A\hat{\Theta}B = A\hat{K}E$. Ἀλλὰ τῆς ὀξείας γωνίας ΑΚΕ αἱ πλευραὶ εἶναι μία πρὸς μίαν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ὀξείας γωνίας ΒΑΔ· ἄρα (§ 91) εἶναι $B\hat{A}\Delta = A\hat{K}E$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἕπεται ὅτι $B\hat{A}\Delta = A\hat{\Theta}B$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἐπειδὴ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΑΚΖ αἱ πλευραὶ εἶναι, μία πρὸς μίαν, κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ἀμβλείας γωνίας ΓΑΒ, ἕπεται ὅτι ΑΚΖ=ΓΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΑΗΒ=ΑΚΖ, ἕπεται ὅτι ΓΑΒ=ΑΗΒ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας τέμνωνται, τὰ μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς καὶ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα.*

Ἀσκήσεις. 139) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἥτις βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας;

140) Τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων χορδῶν κύκλου περιεχόμενα τόξα τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι ἴσα.

141) Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, τὸ ἓν τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων καὶ τὰ ἄκρα τῶν διὰ τοῦ ἄλλου κοινοῦ σημείου ἀγομένων διαμέτρων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

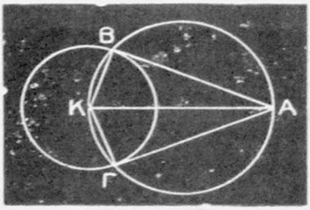
142) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι, αἱ ὑπὸ τῶν ἄκρων αὐτῶν ὁριζόμεναι χορδαὶ εἶναι παράλληλοι.

143) Αἱ ἐκ τῶν ἄκρων διαμέτρου κύκλου ἀγόμεναι παράλληλοι χορδαὶ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἄλλα αὐτῶν ἄκρα κεῖνται ἐπὶ διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

144) Πᾶσα γωνία ἔχουσα τὴν κορυφὴν της ἐντὸς κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἵτινες βαίνουσιν ἐπὶ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

145) Ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ γωνίας κεῖται ἐκτὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς τέμνωσι τὴν περιφέρειαν, ἡ γωνία αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσι ἐπὶ τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

§ 136. Πρόβλημα Ι.—*Διὰ δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς κύκλου Κ (Σχ. 87) κειμένου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.*



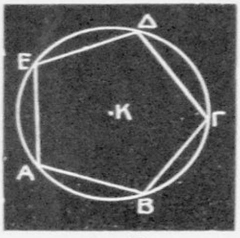
Σχ. 87

Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη, ἡ γωνία ΑΒΚ θὰ εἶναι (§ 118) ὀρθή, τὸ δὲ Β ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ΑΚ. Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ ἀκόλουθος λύσις τοῦ προβλήματος.

Λύσις. Ἄγομεν τὴν ΚΑ καὶ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Αὕτη διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Κ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ διὰ τοῦ Α τέμνει τὴν Κ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Ἄγομεν εἶτα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες εἶναι ἀμφότεραι ἐφαπτόμεναι τῆς Κ, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύομεν παρατηροῦντες ὅτι ΑΒΚ=ΑΓΚ=1 ὀρθ. (§ 134 Πόρ. II).

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν ὅτι ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Ἐκ τῶν ἴσων δὲ ὀρθ. τριγώνων ΑΚΒ, ΑΚΓ συνάγεται ὅτι ἡ ΑΚ διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΒΚΓ.

§ 137. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα περὶ κύκλον εὐθ. σχήματα.—*Εὐθύγραμμόν τι σχῆμα καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἂν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου.* Π.χ. τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 88)* εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ κύκλον Κ.

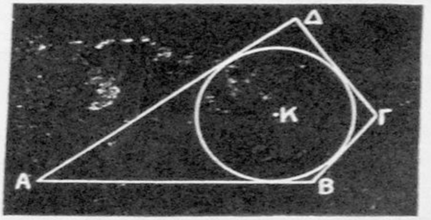


Σχ. 88.

Ὁ κύκλος, εἰς ὃν εἶναι ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμόν τι σχῆμα, καλεῖται *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ εὐθύγραμμον τοῦτο σχῆμα. Οὕτως ὁ κύκλος Κ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 88)*.

Εὐθύγραμμόν τι σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου. Π.χ. τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ *(Σχ. 89)*.

Ὁ κύκλος, περὶ ὃν εἶναι περιγεγραμμένον εὐθύγραμμόν τι σχῆμα, καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτό. Οὕτως ὁ κύκλος Κ *(Σχ. 89)* εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ.



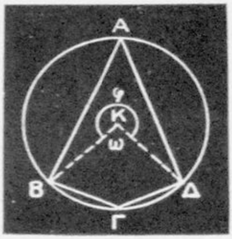
Σχ. 89.

Ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων.

§ 138. Θεώρημα I.—*Αἱ ἀπέναντι γωνίαι παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί.*

Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 90)* ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ τετράπλευρον. Λέγω ὅτι Α+Γ=2 ὀρθ. καὶ Β+Δ=2 ὀρθ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΒ καὶ ΚΔ, σχηματίζωνται αἱ ἐπίκεντραι γωνίαι ω καὶ φ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 134) εἶναι $Α=\frac{ω}{2}$ καὶ $Γ=\frac{φ}{2}$, ἕπεται ὅτι $Α+Γ=\frac{ω+φ}{2}=2$ ὀρθ. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι Α+Β+Γ+Δ=4 ὀρθ., ἕπεται ὅτι καὶ Β+Δ=2 ὀρθ.

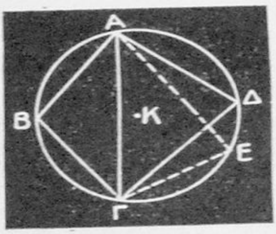


Σχ. 90

Πόρισμα Ι.—*Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.*

§ 139. Θεώρημα ΙΙ (ἀντίστροφον τοῦ Ι).—*Ἐὰν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 91)* τετράπλευρον, ἐν ᾧ εἶναι Α+Γ=2 ὀρθ., ἑπομένως καὶ Β+Δ=2 ὀρθ. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 91.

Ἀπόδειξις. Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διέρχεται (§ 121) μία περιφέρεια. Ἔστω δὲ ΑΕΓ τὸ τόξον αὐτῆς, ὅπερ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς κορυφῆς Δ μέρος τῆς διαγωνίου ΑΓ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγεγραμμένον, θὰ εἶναι Β+Ε=2 ὀρθ. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς Β+Δ=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι Δ=Ε. Ἡ κορυφὴ ἄρα Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΕΓ, διότι ἂν αὕτη ἔκειτο ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ ἦτο $Δ\lesseqgtr Ε$ (§ 134 Παρ.). Ὑπάρχει λοιπὸν περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἤτοι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Πᾶν ὀρθογώνιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Ἀσκήσεις. 146) Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

147) Πᾶν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

148) Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου σχηματίζουσι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

149) Ἂν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΒΓ ἀχθῇ χορδὴ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΑΓ, ἡ χορδὴ αὕτη ἰσοῦται τῇ ΑΒ.

150) Εἰς δεδομένον κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον δεδομένην βάσιν.

151) Νὰ περιγραφῇ περὶ δεδομένον τρίγωνον κύκλος.

152) Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

153) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντικειμένων πλευρῶν περιγεγραμμένου περὶ κύκλον τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν αὐτοῦ.

154) Πᾶν παραλληλόγραμμον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι ρόμβος ἢ τετράγωνον.

155) Ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τριγώνου ΑΒΓ ἀγομένη ἐφαπτομένη σχηματίζει μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς Γ καὶ Β τοῦ τριγώνου.

156) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

157) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, μιᾶς τῶν προσκειμένων γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Α΄ βιβλίου.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 158) Ἐὰν ἡ μία ὀξεῖα γωνία ὀρθ. τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας αὐτοῦ πλευρᾶς. Καὶ ἀντιστρόφως.

159) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐπί τινα τῶν ἴσων πλευρῶν ὕψος αὐτοῦ.

160) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

161) Ἐὰν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ καὶ Ε τὸ μέσον τῆς ΔΓ, ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή.

162) Αἱ διχοτομοῦσαι δύο διαδοχικὰς γωνίας κυρτοῦ τετραπλεύρου σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

163) Εἰς δύο ἀνίσους πλευρὰς τριγώνου ἀντιστοιχοῦσιν ἄνισοι διάμεσοι, μικροτέρα δὲ διάμεσος εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευράν.

164) Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ.

165) Ἐὰν Α΄, Β΄, Γ΄ εἶναι τὰ πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ συμμετρικὰ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

166) Ἐὰν αἱ διχοτομοῦσαι δύο γωνίας τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

167) Ἐκ τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου κύκλου ἀγομένων χορδῶν αὐτοῦ μικροτέρα εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένην διάμετρον.

168) Τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς διαμέσους ἄλλου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ.

169) Ἐὰν τραπεζίου ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων, ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

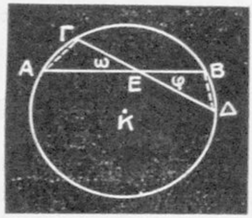
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Ἀναλυτικὴ καὶ συνθετικὴ μέθοδος.

§ 140. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο ἴσαι χορδαὶ τέμνωνται, τὰ τμήματα ἑκατέρας εἶναι ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, πρὸς τὰ τμήματα τῆς ἑτέρας.*

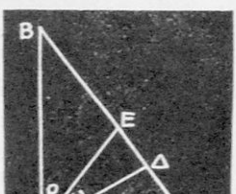
Ἔστωσαν δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 92)* τεμνόμεναι εἴς τι σημεῖον Ε. Λέγω ὅτι ΑΕ=ΕΔ καὶ ΕΓ=ΕΒ.

Ἀνάλυσις. Ἐὰν ὄντως εἶναι ΑΕ=ΕΔ καὶ ΕΓ=ΕΒ, ἐπειδὴ εἶναι καὶ ω=φ, θὰ εἶναι τρίγ. ΒΕΔ=τρίγ. ΑΕΓ, ὅθεν Α=Δ, Γ=Β, $\overline{ΑΓ}=\overline{ΒΔ}$. Τούτων αἱ δύο πρῶται εἶναι προφανεῖς, ἐκ δὲ τῆς $\overline{ΑΓ}=\overline{ΔΒ}$ προκύπτει ὅτι $\widehat{ΑΓ}=\widehat{ΒΔ}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι $Α\widehat{ΓΒ}=Γ\widehat{ΒΔ}$, ὅθεν καὶ $\overline{ΑΒ}=\overline{ΓΔ}$, ἧς ἡ ἀλήθεια εἶναι ἐκ τῆς ὑποθέσεως γνωστή.



Σχ. 92.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ $\overline{ΑΒ}=\overline{ΓΔ}$, ἕπεται ὅτι καὶ $Α\widehat{ΓΒ}=Γ\widehat{ΒΔ}$, ὅθεν $\widehat{ΑΓ}=\widehat{ΒΔ}$ καὶ ἐπομένως $\overline{ΑΓ}=\overline{ΒΔ}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ Α=Δ, Γ=Β, ἕπεται ὅτι τρίγ. ΑΓΕ=τρίγ. ΒΕΔ· ἄρα ΑΕ=ΕΔ καὶ ΕΓ=ΕΒ. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 93.

§ 141. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθ. τριγώνου ἀγομένη διάμεσος σχηματίζει μετὰ τοῦ ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἀγομένου ὕψους αὐτοῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.*

Ἀνάλυσις. Ἐὰν ὄντως εἶναι ω=Γ—Β *(Σχ.93)*, ἐπειδὴ εἶναι Β=ρ (§ 107 Πόρ.ΙΙΙ) καὶ Γ=1 ὀρθ.—σ, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ ω=1 ὀρθ.—σ—ρ=1 ὀρθ. —(σ+ρ), ὅθεν ω+σ+ρ=1 ὀρθ. ἢ Α=1 ὀρθή, ἥτις ἐξ ὑποθέσεως ἀληθεύει.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ Α=1 ὀρθ., ἡ διάμεσος ΑΕ ἰσοῦται πρὸς ΒΕ καὶ κατ' ἀκολουθίαν Β=ρ· ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι σ=1 ὀρθ.—Γ. Ἡ ἰσότης ἄρα ω+ρ+σ=1 ὀρθ. γίνεται ω+Β+1 ὀρθ.—Γ=1 ὀρθ., ὅθεν ω=Γ—Β. ὅ. ἔ. δ.

§ 142. Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις.—Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων ἠκολουθήσαμεν ἐν ἑκατέρῳ δύο στάδια ἐργασίας.

Κατὰ τὸ πρῶτον στάδιον, ὅπερ *ἀνάλυσιν* ἐκαλέσαμεν, ὑποθέσαντες ἀληθὲς τὸ θεώρημα, ἤτοι ἀληθεῖς τὰς πρὸς ἀπόδειξιν σχέσεις ἢ σχέσιν καὶ καταλλήλως μετ' ἄλλης ἢ ἄλλων ἀληθῶν σχέσεων συνδυάσαντες αὐτὰς ἐπορίσθημεν ἄλλην ἀληθῆ σχέσιν, ἐξ ἧς ὁμοίως ἄλλην καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω μέχρις οὗ κατελήξαμεν εἰς σχέσεις προφανῶς ἢ ἐξ ὑποθέσεως ἀληθεῖς.

Κατὰ τὸ δεύτερον στάδιον, ὅπερ *σύνθεσιν*, ἐκαλέσαμεν, ἠκολουθήσαμεν ἀντίθετον ἀκριβῶς πορείαν. Ἠρχίσαμεν ἀπὸ τῆς ἐξ ὑποθέσεως ἀληθοῦς σχέσεως καὶ ὑπὸ τῆς ἀναλύσεως ὁδηγούμενοι ἀνεύρομεν, ἐπὶ τῇ βάσει γνωστῶν ἰδιοτήτων, ἄλλην ἀληθῆ σχέσιν, ἐκ ταύτης ὁμοίως ἄλλην καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ κατελήξαμεν εἰς τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀποδεικτέων, ἢ τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως.

Ἡ σύνθεσις ἀποτελεῖ αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν πλήρη καὶ πειστικὴν ἀπόδειξιν, ἥτις καλεῖται *συνθετικὴ ἀπόδειξις*. Κατὰ ταύτην ἐγένοντο αἱ ἀποδείξεις ὅλων σχεδὸν τῶν θεωρημάτων τοῦ Α' βιβλίου. Μεταχειριζόμεθα δὲ αὐτὴν ἐν γένει, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἢ διαγιγνώσκεται εὐκόλως ἡ ἀλληλουχία τῶν προτάσεων, δι' ὧν καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν πρότασιν.

Τὴν ἀνάλυσιν ἀντιθέτως μεταχειριζόμεθα, ὅταν ἀγνοοῦμεν τὴν ἀπόδειξιν καὶ προσπαθοῦμεν ἡμεῖς αὐτοὶ νὰ καταρτίσωμεν αὐτήν. Ἡ ἀνάλυσις καθ' ἑαυτὴν μόνη δὲν ἀποτελεῖ πάντοτε πλήρη ἀπόδειξιν. Τῷ ὄντι· ἐκ τοῦ ὅτι παραδεχόμενοι τὸ ἀποδεικτέον ὡς ἀληθὲς ἐφθάσαμεν εἰς ἐξαγόμενον ἀληθές, δὲν ἕπεται ὅτι ἡ ἀληθὴς ὑποτεθεῖσα πρότασις εἶναι ὄντως ἀληθής. Τὸ τοιοῦτον συμπέρασμα εἶναι ἀσφαλές, ἐὰν αἱ ἐν τῇ ἀναλύσει διαδεχόμεναι ἀλλήλας προτάσεις εἶναι τοιαῦται, ὥστε οὐ μόνον ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς ἡγουμένης νὰ συνάγηται ἡ ἀλήθεια τῆς ἑπομένης, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς ἑπομένης νὰ συνάγηται ἡ ἀλήθεια τῆς ἡγουμένης (ἀντιστρεπταὶ προτάσεις). Τῆς Γεωμετρίας ὅμως αἱ προτάσεις δὲν εἶναι πᾶσαι τοιαῦται. Π. χ. παραδεχόμενοι ὅτι αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἀσφαλῶς συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἐὰν ὅμως παραδεχθῶμεν ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, δὲν ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι. Ἕνεκα τούτων ἢ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ἐξελέγχομεν τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν ἐν αὐτῇ ἀναφαινομένων διαδοχικῶν προτάσεων ἢ συνηθέστερον ἕπεται τῆς ἀναλύσεως συνθετικὴ ἀπόδειξις, ὡς εἰς ἀμφότερα τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἐγένετο.

Ἀσκήσεις. 170) Ἐκ τῶν σημείων τῆς περιφερείας κύκλου Κ ὀλιγώτερον ἀπέχει ἀπὸ δεδομένου σημείου Α τὸ ἓν τῶν κοινῶν σημείων τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ΑΚ, περισσότερον δὲ τὸ ἕτερον τῶν κοινῶν τούτων σημείων.

171) Ἐὰν ἐκ τινος τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν ἀχθῇ τυχοῦσα αὐτῶν τέμνουσα, αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι σχηματίζουσι γωνίαν σταθεράν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τῆς τεμνούσης.

172) Ἐὰν δι' ἑκατέρου τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα, αἱ ὑπὸ τῶν ἄκρων αὐτῶν ὁριζόμεναι χορδαὶ εἶναι παράλληλοι.

173) Τὰ ὕψη ἑκάστου τριγώνου διχοτομοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τούτων.

174) Αἱ εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ἀγόμεναι ἀκτῖνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι, μία πρὸς μίαν, κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ὁρίζουσιν οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

175) Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου ἐκ σημείου τῆς περιφερείας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

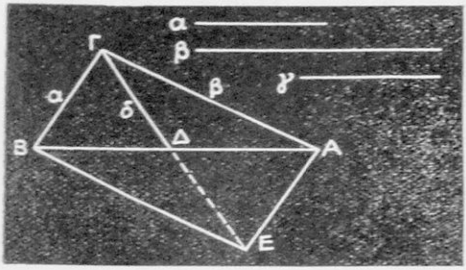
176) Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Γ τόξου ΑΓΒ ἀχθῶσι χορδαὶ ΓΔ καὶ ΓΕ τέμνουσαι τὴν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η, τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

§ 143. Χρῆσις τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.—Ὅταν ἀγνοῶμεν τὴν λύσιν προταθέντος προβλήματος καὶ θέλωμεν ἡμεῖς αὐτοὶ νὰ καταρτίσωμεν αὐτήν, κάμνομεν χρῆσιν τῆς ἀναλύσεως, ἤτοι ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λυθέν, δηλ. κατασκευασθὲν τὸ ζητούμενον σχῆμα. Προσπαθοῦμεν δὲ ἐπωφελούμενοι γνωστῶν ἰδιοτήτων νὰ ορισθῶμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλο σχῆμα· ἐκ τούτου ὁμοίως ἄλλο καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ καταλήξωμεν εἰς σχῆμα, οὗ ἡ κατασκευὴ ἦτο δυνατὴ καὶ ἀρχικῶς, ἤτοι ἄνευ μεσολαβήσεως τῶν προηγηθέντων σχημάτων. Ἀντιστρέφοντες ἤδη τὴν πορείαν μας καταλήγομεν συνθετικῶς πλέον εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου. Συνήθως τὴν συνθετικὴν ταύτην κατασκευὴν ἀκολουθεῖ ἀπόδειξις ὅτι τὸ οὕτω κατασκευαζόμενον σχῆμα εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ διερεύνησις τῶν συνθηκῶν, ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ αὕτη.

Τὴν μέθοδον ταύτην ἐφηρμόσαμεν ἤδη εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων (§ 89 καὶ 136). Πρὸς πληρεστέραν δὲ κατανόησιν αὐτῆς θέλομεν ἀκολουθήσει αὐτὴν καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

§ 144. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν α καὶ β καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου δ.*

Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι ΑΒΓ (*Σχ. 94*) εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ἤτοι ὅτι ΒΑ=β, ΓΒ=α, καὶ ἡ διάμεσος ΓΔ=δ. Ἂν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΔ λάβωμεν τμῆμα ΔΕ=ΒΔ, ἕνεκα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΒΕ εἶναι ΒΕ=ΑΓ=β. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΓΒΕ γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς, διότι ΓΒ=α, ΒΕ=β, καὶ ΓΕ=2δ.



Σχ. 94.

Κατασκευάζεται ἄρα τοῦτο καὶ ἄνευ τῆς μεσολαβήσεως τοῦ ἀγνώστου τριγώνου ΑΒΓ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΓΒΕ ἔχον ΓΒ=α, ΒΕ=β καὶ ΓΕ=2δ· ἄγομεν εἶτα τὴν διάμεσον ΒΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης λαμβάνομεν ΔΑ=ΒΔ καὶ φέρομεν τὴν ΓΑ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Ἡ πλευρὰ τούτου ΓΒ=α ἐκ κατασκευῆς· ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΓΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ πλευρὰ ΓΑ=ΒΕ=β. Ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν διερχομένη διάμεσος ΓΔ=ΓΕ : 2=2δ : 2=δ.

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΓΒΕ, ἤτοι

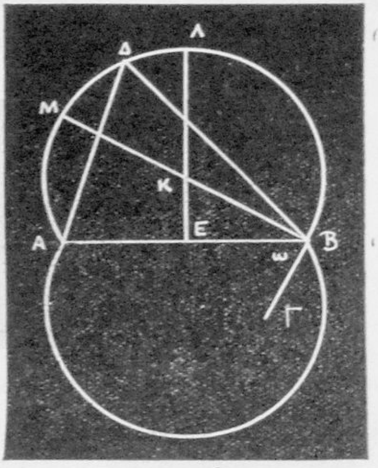
$$(\beta-\alpha):2<\delta<(\beta+\alpha):2.$$

Ἀσκήσεις. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον

177) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς πρός τινα τούτων ἀντιστοιχούσης διαμέσου.
178) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο διαμέσων (δύο περιπτώσεις).
179) Ἐκ τῶν τριῶν διαμέσων αὐτοῦ.

§ 145. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα κύκλου ἔχον* *δεδομένην χορδὴν ΑΒ καὶ δεχόμενον δοθεῖσαν γωνίαν ω (Σχ. 95).*

Ἀνάλυσις Ἔστω ΑΔΒ. Ἂ τὸ ζητούμενον κυκλικὸν τμῆμα καὶ Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, εἰς ὃν τοῦτο ἀνήκει. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΚΕ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, θὰ εἶναι ΑΕ=ΕΒ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ εἰς τὸ Β ἐφαπτομένη ΒΓ, θὰ εἶναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}B = \omega$. Ἡ ΑΒΓ ἄρα κατασκευάζεται καὶ ἀρχικῶς.



Σχ. 95.

Σύνθεσις. Μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν ΑΒ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ=ω, ἐκ δὲ τοῦ Β ὑψοῦμεν τὴν ΒΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Γράφομεν εἶτα τὴν ΕΛ, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν χορδὴν ΑΒ, ἔστω δὲ Κ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αὕτη τέμνει τὴν ΒΜ. Τέλος μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· τούτου τὸ τμῆμα ΑΛΒΑ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $K\hat{E}B + K\hat{B}E < 2$ ὀρθῶν, αἱ ΕΛ καὶ ΒΜ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ, δι' ὃ εἶναι ΚΑ=ΚΒ· ἡ γραφεῖσα ἄρα περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Τυχοῦσα δὲ ἐν τῷ κυκλικῷ τμήματι ΑΛΒΑ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΔΒ=ΑΒΓ=ω (§ 135).

ΣΗΜ. Καὶ τὸ πρὸς τὴν ΑΒ συμμετρικὸν τοῦ ΑΔΒΑ κυκλικὸν τμῆμα ΑΔ'ΒΑ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος (§ 134 Πόρ. V).

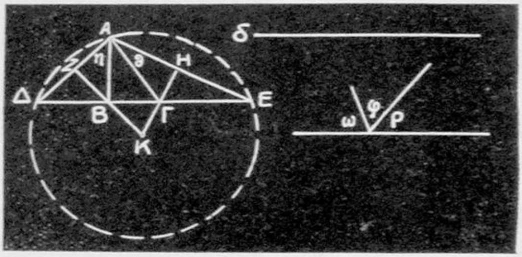
Ἀσκήσεις. 180) Νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου ἔχον χορδὴν 0,05 μ. καὶ δεχόμενον γωνίαν 45°.

181) Νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου ἔχον χορδὴν 0,03 μ. καὶ δεχόμενον γωνίαν 60°.

182) Κυκλικὸν τμῆμα δέχεται γωνίαν 60°. Πόσην γωνίαν δέχεται τὸ ἄλλο κυκλικὸν τμῆμα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν χορδὴν μὲ τὸ πρῶτον;

§ 146. Πρόβλημα ΙΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν ω, φ, ρ καὶ τῆς περιμέτρου δ αὐτοῦ (Σχ. 96).*

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ἤτοι ὅτι $ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ=δ$, $Α=φ$, $Β=ω$ καὶ $Γ=ρ$. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λάβωμεν $ΒΔ=ΑΒ$ καὶ $ΓΕ=ΑΓ$, θὰ εἶναι $ΔΕ=ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ=δ$. Ἐπειδὴ δὲ $Β=Δ+η=2Δ$ καὶ $Γ=Ε+θ=2Ε$ ἕπεται ὅτι $Δ=\frac{Β}{2}=\frac{ω}{2}$ καὶ



Σχ. 96.

$Ε=\frac{Γ}{2}=\frac{ρ}{2}$. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΔΕ δυνάμεθα (§ 95) νὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἀρχικῶς καὶ νὰ ὁρίσωμεν οὕτω τὴν κορυφὴν Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Αἱ ἄλλαι δὲ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι τομαὶ τῆς ΔΕ καὶ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΑΕ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΑΕ ἔχον $ΔΕ=δ$, $Δ=\frac{ω}{2}$, $Ε=\frac{ρ}{2}$ καὶ ἄγομεν εἶτα τὰς καθέτους ΖΒ καὶ ΗΓ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΕ. Ἐὰν αὗται δὲν τέμνωνται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΔΕ, τέμνωσι δὲ τὴν ΔΕ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἄγοντες τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι $ΑΒ=ΒΔ$ καὶ $ΑΓ=ΓΕ$, ἕπεται ὅτι $ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=ΔΒ+ΒΓ+ΓΕ=ΔΕ=δ$. Ἐπειδὴ δὲ $Δ=η$, $Ε=θ$ καὶ $Β=Δ+η$, $Γ=Ε+θ$, ἕπεται ὅτι $Β=2Δ=2.\frac{ω}{2}=ω$ καὶ $Γ=2Ε=2.\frac{ρ}{2}=ρ$. Τέλος παρατηροῦντες ὅτι $ω+φ+ρ=Α+Β+Γ$ συνάγομεν εὐκόλως ὅτι καὶ $Α=φ$. Ἔχει λοιπὸν τὸ ΑΒΓ τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἤτοι εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $ω+φ+ρ=2$ ὀρθ. καὶ οὕτως ἀνωτέρω ἐλήφθησαν. Τοῦ ὅρου δὲ τούτου ἐκπληρουμένου ἡ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ κατασκευὴ εἶναι δυνατή, ἀφοῦ θὰ εἶναι $\frac{\omega}{2}+\frac{\rho}{2}<2$ ὀρθ. Αἱ δὲ κάθετοι ΖΒ καὶ ΒΓ τέμνοντα ιεῖς τὸ κέντρον Κ τοῦ περὶ τὸ ΔΑΕ περιγεγραμμένου κύκλου, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΑΕ. Διότι γων. ΔΑΕ$=2$ ὀρθ. $-\left(\frac{\omega+\rho}{2}\right)=2$ ὀρθ.$-(1$ ὀρθ.$-\frac{\varphi}{2})=1$ ὀρθ. $+\frac{\varphi}{2}$, ἤτοι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ τὸ κέντρον Κ κεῖται ἐντὸς τοῦ μεγαλυτέρου τῶν κυκλικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ κύκλος διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΔΕ.

Ἀσκήσεις. 183) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

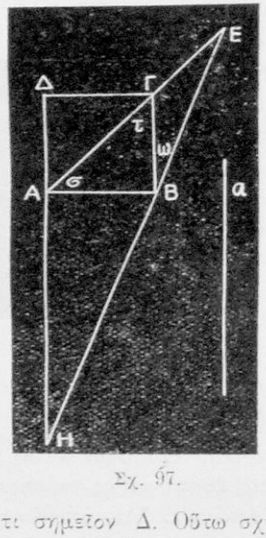
Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον :

184) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

185) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

§ 147. Πρόβλημα IV.—*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος α τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 97)* τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαγωνίου ΑΓ λάβωμεν τμῆμα ΓΕ=ΒΓ, θὰ εἶναι ΑΕ=α. Ἐπειδὴ δὲ Ε=ω καὶ Η=ω, ἕπεται ὅτι ΑΗ=ΑΕ=α. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι $\widehat{ΕΑΗ}=1\frac{1}{2}$ ὀρθ. συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΑΗ κατασκευάζεται ἀρχικῶς.



Σχ. 97.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΕΑΗ ἔχον ΑΗ=ΑΕ=α καὶ ΕΑΗ$=1\frac{1}{2}$ ὀρθ. Ἄγομεν εἶτα τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΗ, τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν παράλληλον τῇ ΑΒ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῇ ΑΗ εἴς τι σημεῖον Δ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας ὀρθὰς εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma = 1\frac{1}{2}$ ὀρθ. — 1 ὀρθ. $= \frac{1}{2}$ ὀρθ., ἔπεται ὅτι $\tau = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ἐπομένως ΑΒ=ΒΓ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον.

Ἐπειδὴ δὲ Ε=Η, Η=ω, ἔπεται ὅτι Ε=ω, ὅθεν καὶ ΒΓ=ΓΕ. Ἕνεκα ταύτης εἶναι ΑΓ+ΒΓ=ΑΓ+ΓΕ=ΑΕ=α.

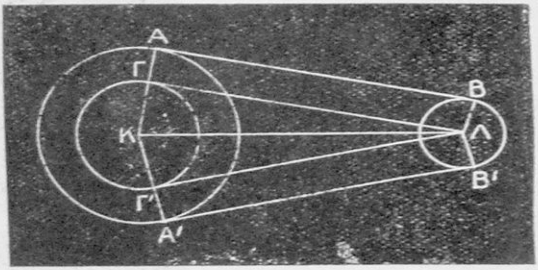
Διερεύνησις. Προφανῶς πᾶσαι αἱ ρηθεῖσαι κατασκευαὶ εἶναι πάντοτε ἐκτελεσταὶ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν.

Ἀσκήσεις. 186) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

187) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπό τινος τῶν διαγωνίων.

188) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν αὐτοῦ.

§ 148. Πρόβλημα V. — *Νὰ γραφῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων καὶ ἀνίσων περιφερειῶν Κ καὶ Λ (Σχ. 98).*



Σχ. 98.

Κοινή τις ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν καλεῖται *ἐξωτερικὴ* ἢ *ἐσωτερική*, καθ' ὅσον αὗται κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τῆς ἐφαπτομένης ταύτης.

Ἀνάλυσις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΑΒ. Αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΒ ὡς κάθετοι ἐπ' αὐτὴν εἶναι παράλληλοι· ἐὰν δὲ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΛΓ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ καὶ θὰ ἐφάπτηται ἐπομένως τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΓ=ΚΑ—ΓΑ καὶ ΓΑ=ΛΒ, ἔπεται ὅτι ΚΓ=ΚΑ—ΛΒ. Ἡ νέα ὅθεν περιφέρεια ἔχει γνωστὸν κέντρον καὶ ἀκτῖνα, δύναται ἄρα νὰ κατασκευασθῇ καὶ ἀρχικῶς. Μεθ' ὃ καὶ ἡ ΛΓ κατασκευάζεται, ὁρίζονται δὲ οὕτω κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Α. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἀκτὶς τοῦ Λ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ ΚΓ, ὁρίζεται καὶ τὸ Β, μεθ' ὃ καὶ ἡ ΑΒ.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΓ=ΚΑ—ΛΒ γράφομεν τρίτην (βοηθητικὴν) περιφέρειαν, πρὸς ἣν ἄγομεν ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένην ΛΓ. Ἄγομεν εἶτα τὴν ἀκτῖνα ΚΓ καὶ προεκτείνομεν αὐτήν, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν δεδομένην περιφέρειαν Κ εἴς τι σημεῖον Α. Τέλος ἐκ τοῦ Λ φέρομεν ἀκτῖνα ΛΒ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ ΚΑ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις. Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται εἶναι ΚΓ=ΚΑ—ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΚΓ = ΚΑ — ΛΒ, ἕπεται ὅτι ΚΑ—ΑΒ=ΚΑ—ΛΒ, ὅθεν ΑΓ=ΛΒ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΛΓ ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΓΛ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι καὶ Α=Β=1 ὀρθ., ἐπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΒ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ κοινὴ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ ἐφαπτομένη καὶ ἔχει προφανῶς ἀμφοτέρας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ἐφ' ὅσον ἄγεται ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη τῆς βοηθητικῆς περιφερείας. Οὕτως ἂν ΚΛ<ΚΑ—ΛΒ, τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν ἔχει λύσιν. Ἂν ΚΛ=ΚΑ—ΛΒ, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἂν δὲ ΚΛ>ΚΑ—ΛΒ, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἤτοι ὑπάρχουσι δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ Α′Β′ καθ' ὅμοιον ἀμφότεραι κατασκευαζόμεναι τρόπον.

Ἀσκήσεις. 189) Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων καὶ ἴσων περιφερειῶν.

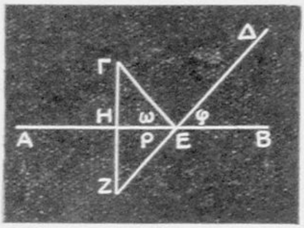
190) Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων περιφερειῶν.

191) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δεδομένας περιφερείας καὶ ἀπὸ τῆς ὁποίας τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τούτων ἀπέχουσιν ἀποστάσεις ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς δεδομένα εὐθ. τμήματα.

192) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δεδομένας περιφερείας, οὕτως ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῆς ὁριζόμεναι χορδαὶ νὰ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς δεδομένα εὐθ. τμήματα.

193) Διὰ δεδομένου σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δεδομένην περιφέρειαν, οὕτως ὥστε νὰ ὁρίζηται ἐπ' αὐτῆς χορδὴ ἴση πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

§ 149. Πρόβλημα VI.—*Δεδομένων δύο σημείων Γ καὶ Δ* *πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δεδομένης εὐθείας ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰ δεδομένα σημεῖα ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἀντιστοίχων μερῶν τῆς δοθείσης εὐθείας.*



Σχ. 99.

Ἀνάλυσις. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι Ε εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, θὰ εἶναι ω=φ. Ἂν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνουσα ταύτην μὲν εἰς τὸ Η, τὴν δὲ ΔΕ εἰς τὸ Ζ, σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΗΕ καὶ ΖΗΕ, ἅτινα εἶναι ἴσα. Εἶναι λοιπὸν ΓΗ=ΗΖ· κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ Ζ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὸν ἄξονα ΑΒ καὶ δύναται ἄρα νὰ ὁρισθῇ ἀρχικῶς.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν τὸ Ζ συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς ΑΒ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΔ. Αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ε, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Ἀσκήσεις. 194) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τεθλ. γραμμὴ ΓΕΔ (Σχ. 99) εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης ἐκ δύο πλευρῶν συγκειμένης τεθλασμένης γραμμῆς, ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα καὶ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς ΑΒ.

195) Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β ἑκατέρωθεν δεδομένης εὐθείας ΓΔ κειμένων νὰ εὑρεθῇ ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον Ε, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{\text{ΑΕΓ}}=\widehat{\text{ΒΕΓ}}$.

196) Δεδομένων δύο σημείων Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δεδομένης εὐθείας ΓΔ νὰ εὑρεθῇ ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον Ε, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΑΕΓ=2.ΒΕΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Γεωμετρικοὶ τόποι.

§ 150. Γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἐχόντων κοινὴν ἰδιότητα.—Εἰς τὸ Α΄ βιβλίον ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ σημειώσωμεν παραδείγματά τινα γεωμ. τόπων. Ἕνεκα δὲ τῆς σπουδαιότητος αὐτῶν ἐπαναλαμβάνομεν ταῦτα ἀκολούθως.

1ον) Ἑκάστη περιφέρεια κύκλου εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει τοῦ κέντρου ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι αὐτοῦ.

2ον) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως εὐθ. τμῆμα, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.

3ον) Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

4ον) Ἡ γραμμή, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν δεδομένον θέσει καὶ μεγέθει εὐθ. τμῆμα καὶ δέχονται δεδομένην γωνίαν, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ δεδομένον εὐθ. τμῆμα φαίνεται ὑπὸ τὴν δεδομένην γωνίαν (§ 134 Παρ.).

5ον) Ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει διάμετρον δεδομένον θέσει καὶ μεγέθει εὐθ. τμῆμα, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ εὐθ. τμῆμα τοῦτο φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Πλὴν τούτων ἔστωσαν ἔτι καὶ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

6ον) Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἡ παράλληλος αὐταῖς καὶ εἰς ἴσην ἀπ᾽ αὐτῶν κειμένη ἀπόστασιν εὐθεῖα. Διότι προφανῶς πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἕκαστον ἴσον ἀπὸ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν.

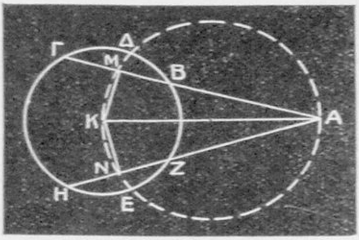
7ον) Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἀπὸ δεδομένης εὐθείας δεδομένην ἀπόστασιν α, εἶναι αἱ ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἐπ᾽ αὐτῆς κείμεναι δύο παράλληλοι ταύτῃ εὐθεῖαι. Διότι εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἕκαστον ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπόστασιν α.

8ον) Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν τούτων, εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν περιεχόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν εὐθειῶν τούτων. Διότι προφανῶς τὰ σημεῖα τοῦ μέρους τούτου καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ῥηθεῖσαν ἰδιότητα.

Ἄρα: *Γεωμετρικὸς τόπος σημείων ἐχόντων κοινήν τινα ἰδιότητα καλεῖται ἡ γραμμὴ ἢ ἡ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας πάντα τὰ σημεῖα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν κοινὴν ταύτην ἰδιότητα.*

§ 151. Γεωμ. τόπος I.—*Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν δεδομένου κύκλου Κ, αἵτινες προτεινόμεναι διέρχονται διὰ δεδομένου σημείου Α κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ (Σχ. 100).*

Λύσις. Ἄγομεν διὰ τοῦ Α τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ τῆς περιφερείας καὶ ὁρίζομεν τὸ μέσον Μ τῆς χορδῆς ΒΓ, ὅπερ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὸ θέσει καὶ μεγέθει ὡρισμένον εὐθ. τμῆμα ΑΚ φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Κεῖται ἄρα (§ 150, 5ον) τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΑΚ.



Σχ. 100.

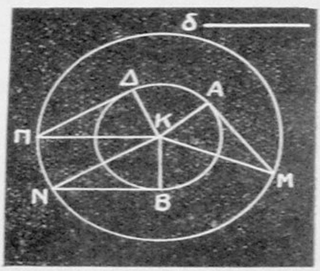
Ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ ὁρισθῇ τυχὸν σημεῖον Ν, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΝΚ εἶναι ὀρθή, ἡ ΚΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΖΗ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ν· εἶναι ἄρα τοῦτο σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Τὰ ἐκτὸς τοῦ Κ σημεῖα τῆς ρηθείσης περιφερείας προφανῶς δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ δεδομένου κύκλου Κ περιεχόμενον τόξον τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΑΚ.

Ἀσκήσεις. Εὑρεῖν τὸν γεωμ. τόπον: 197) Τῶν μέσων τῶν χορδῶν δεδομένου κύκλου, αἵτινες διέρχονται διὰ δεδομένου σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου.

198) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ δεδομένου σημείου ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας δεδομένου κύκλου.

§ 152. Γεωμ. τόπος ΙΙ.— *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἄγονται εἰς δεδομένην περιφέρειαν Κ ἐφαπτόμεναι ἴσαι πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα δ (Σχ. 101).*



Σχ. 101.

Λύσις. Εἰς δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας ἄγομεν ἐφαπτομένας ταύτῃ καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῶν τμήματα ΑΜ καὶ ΒΝ ἴσα πρὸς τὸ δ. Τὰ ἄκρα Μ καὶ Ν τῶν τμημάτων τούτων εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΚΜ καὶ ΒΚΝ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ΚΜ=ΚΝ. Πᾶν λοιπὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου ἀπέχει τοῦ Κ, ὅσον καὶ τὸ τυχὸν τούτων Μ. Κεῖται ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΜ.

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Π τῆς περιφερείας ταύτης ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΠΔ τῆς δοθείσης περιφερείας, ἐπειδὴ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΚΠΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ΚΑΜ, ἔπεται ὅτι ΠΔ=ΑΜ=δ. Ὥστε τὸ Π εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

Ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῇ δοθείσῃ καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθ. τριγώνου, οὗ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δεδομένης περιφερείας καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα δ.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος: 199) Τῶν μέσων τῶν χορδῶν δεδομένου κύκλου, αἵτινες εἶναι ἴσαι πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα.

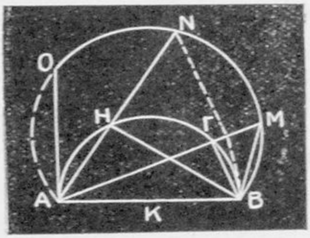
200) Τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται δεδομένης περιφερείας.

201) Τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο δεδομένας καὶ ἴσας περιφερείας.

202) Τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται δύο δεδομένων ὁμοκέντρων περιφερειῶν, μία πρὸς μίαν.

203) Τῶν συμμετρικῶν δεδομένου σημείου Α πρὸς τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' ἄλλου ὡρισμένου σημείου.

§ 153. Γεωμ. τόπος ΙΙΙ.—*Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς διαμέτρου ΑΒ δεδομένου ἡμικυκλίου Κ ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΓΜ ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν ΓΒ. Εὑρεῖν τὸν τόπον, ὃν γράφει τὸ Μ, ὅταν ἡ χορδὴ ΑΓ λαμβάνῃ πάσας τὰς δυνατὰς περὶ τὸ Α θέσεις (Σχ. 102).*



Σχ. 102.

Λύσις. Ἐπειδὴ ΒΓ=ΓΜ, τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΒΓΜ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ κατ' ἀκολουθίαν Μ=45°. Φαίνεται ἄρα ἐκ τοῦ Μ ἡ ὡρισμένη θέσει καὶ μεγέθει διάμετρος ΑΒ ὑπὸ γωνίαν 45°, κατ' ἀκολουθίαν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΜΒ τοῦ τμήματος, ὅπερ ἔχει χορδὴν ΑΒ, δέχεται γωνίαν 45° καὶ κεῖται πρὸς ὃ μέρος τῆς ΑΒ κεῖται καὶ τὸ δεδομένον ἡμικύκλιον (§ 150, 4ον).

Ἂν ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὸ Α τέμνουσα τὸ τόξον AMB εἰς τὸ O, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AO δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου.

Ἂν δὲ N εἶναι τυχὸν τοῦ τόξου OB σημεῖον καὶ H τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ AN τέμνει τὴν δεδομένην ἡμιπεριφέρειαν, ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ H σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ $N=45^o$, ἕπεται ὅτι $HN=HB$, ἤτοι τὸ N εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος εἶναι τὸ μέρος OMB τοῦ τόξου τοῦ ῥηθέντος τμήματος.

Ἀσκήσεις. 204) Ἐκ τοῦ ἄκρου A ὡρισμένης διαμέτρου AB δεδομένου κύκλου Γ ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν AΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΓM ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν ΓB. Εὑρεῖν τὸν τόπον, ὃν γράφει τὸ M, ὅταν ἡ χορδὴ AΓ λαμβάνῃ πάσας τὰς δυνατὰς περὶ τὸ A θέσεις.

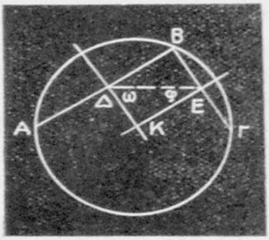
205) Ἐκ δεδομένου σημείου A ἐκτὸς δεδομένου κύκλου K κειμένου ἄγομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ABΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς BΓ ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν κάθετον, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν τμῆμα ΔM ἴσον πρὸς τὸ AΔ. Εὑρεῖν τὸν γεωμ. τόπον, ὃν γράφει τὸ M, ὅταν ἡ τέμνουσα ABΓ λαμβάνῃ πάσας τὰς δυνατὰς περὶ τὸ A θέσεις.

§ 154. Χρῆσις τῶν γεωμ. τόπων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. – Πολλάκις τὸ ἄγνωστον προβλήματος εἶναι σημεῖον ἢ δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς σημεῖον, ὅπερ ὀφείλει νὰ ἐκπληροῖ ἐπιτάγματά τινα ἐκ τοῦ προβλήματος ἀπορρέοντα. Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὸ ἄγνωστον σημεῖον ὀφείλει νὰ ἐκπληροῖ δύο ἐπιτάγματα. Ὅσα σημεῖα ἐκπληροῦσι τὸ ἓν μόνον τῶν ἐπιταγμάτων τούτων ἔχουσιν ἐν γένει τόπον τινά· ὅσα δὲ ἐκπληροῦσι τὸ ἄλλο ἐπίταγμα ἔχουσιν ἕτερον τόπον. Τὸ ἄγνωστον σημεῖον, ὡς ἐκπληροῦν καὶ τὰ δύο ἐπιτάγματα, ὀφείλει νὰ εἶναι κοινὸν τῶν τόπων τούτων σημεῖον. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν τοὺς τόπους τούτους, ὁρίζομεν τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον.

Ὅταν τὸ ἄγνωστον σημεῖον ἐκπληροῖ πλείονα ἐπιτάγματα, χωρίζομεν αὐτὰ καταλλήλως εἰς δύο κατηγορίας καὶ κατασκευάζομεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἐκπληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα ἑκατέρας κατηγορίας. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

§ 155. Πρόβλημα I.—*Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων A, B, Γ (Σχ. 103) μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.*

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι K, θὰ εἶναι $KA=KB=K\Gamma$. Ὥστε τὸ ἄγνωστον κέντρον ἐκπληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα: α') Ἀπέχει ἴσον τῶν δεδομένων σημείων A καὶ Β. β') Ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων Β καὶ Γ. Εἶναι ἄρα κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως ἡ μὲν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ, ἡ δὲ τὸ ΒΓ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις τοῦ προβλήματος.



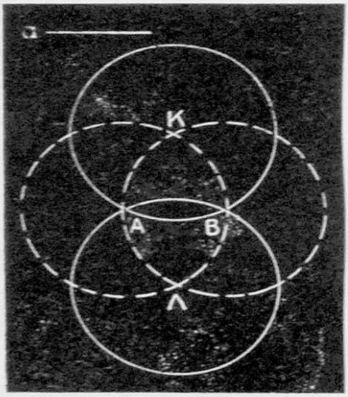
Σχ. 103.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ. Μὲ κέντρον δὲ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Ἀσκήσεις. Νὰ γραφῇ περιφέρεια: 206) Διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον ἐπὶ δεδομένης εὐθείας.

207) Διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτομένη δεδομένης εὐθείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς.

§ 156. Πρόβλημα ΙΙ. — *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα α καὶ διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β (Σχ. 104).*



Σχ. 104.

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι Κ, θὰ εἶναι ΚΑ=ΚΒ=α. Ὥστε τὸ ἄγνωστον κέντρον ὀφείλει νὰ ἐκπληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα: α') Νὰ ἀπέχῃ τοῦ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς α· καὶ β') Νὰ ἀπέχῃ τοῦ Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς α. Εἶναι ἄρα τοῦτο κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν (Α, α), (Β, α).

Σύνθεσις. Γράφομεν τὰς περιφερείας (Α, α) καὶ (Β, α). Ἐὰν δὲ Κ εἶναι κοινὸν αὐτῶν σημεῖον, γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Κ, α), ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

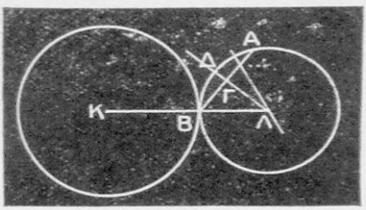
Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν λύσιν, ἐφ' ὅσον οἱ δύο τόποι, ὧν ἐγένετο χρῆσις, ἔχουσι δύο ἢ ἓν κοινὸν σημεῖον, ἤτοι ἂν $AB < 2\alpha$ ἢ $AB = 2\alpha$. Ἂν δὲ $AB > 2\alpha$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις. Νὰ γραφῇ περιφέρεια: 208) Ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα, διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δεδομένης περιφερείας.

209) Ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα, διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτομένη δεδομένης εὐθείας.

210) Διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν.

§ 157. Πρόβλημα III.—*Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δεδομένης περιφερείας Κ εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς Β (Σχ. 105).*



Σχ. 105.

Ἀνάλυσις. Ἂν κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι τὸ Λ, θὰ εἶναι $\Lambda A = \Lambda B$, τὸ δὲ Λ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 123 Πόρ. I) τὰ τρία σημεῖα Κ, Β καὶ Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὸ Λ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΒ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ Γ καὶ ὁρίζομεν τὸ κοινὸν σημεῖον Λ ταύτης καὶ τῆς ΚΒ· εἶτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Λ, ΛΒ) ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ Λ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, εἶναι $\Lambda A = \Delta B$· ἄρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τῆς ρηθείσης περιφερείας Λ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ ἔχουσι τὸ ἐπὶ τῆς διακέντρου κείμενον σημεῖον Β κοινόν, οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐφάπτονται ἀλλήλων.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, ὅταν ἡ ΓΔ τέμνῃ τὴν ΚΒ· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΚΒ. Δὲν ἔχει δὲ λύσιν τὸ πρόβλημα, ὅταν ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ ΑΒ ἐφάπτηται τῆς περιφερείας Κ.

Ἀσκήσεις. 211) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου, ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη ἐκτὸς ἢ ἐντὸς δεδομένης περιφερείας.

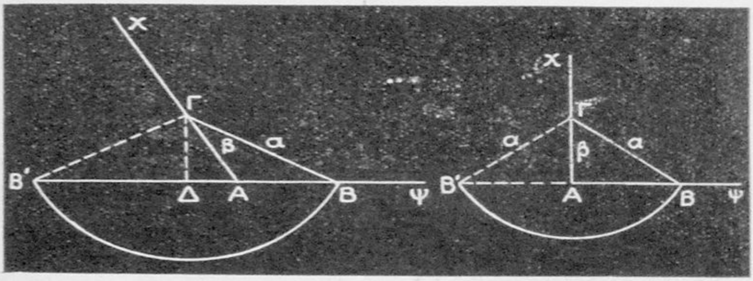
212) Εἰς δεδομένην γωνίαν νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς.

Νὰ γραφῇ περιφέρεια :

213) Ἐφαπτομένη δεδομένης περιφερείας ἐκτὸς ἢ ἐντὸς καὶ δεδομένης εὐθείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς.

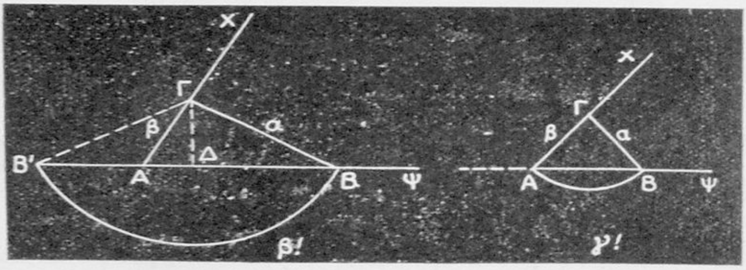
214) Ἐφαπτομένη δεδομένης εὐθείας καὶ δεδομένης περιφερείας εἰς ὡρισμένον αὐτῆς σημεῖον.

§ 158. Πρόβλημα IV.—*Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν α καὶ β καὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α (Σχ. 106).*



Σχ. 106 α′.

Ἀνάλυσις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἐν ᾧ εἶναι ΑΒ=β, ΓΒ=α καὶ ΒΑΓ=Α. Ἐὰν κατασκευασθῇ γωνία χΑψ=Α καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς Αχ τμῆμα ΑΓ=β, ἡ τρίτη κορυφὴ Β θὰ εἶναι τομὴ τῆς πλευρᾶς Αψ καὶ τῆς περιφερείας (Γ, α).



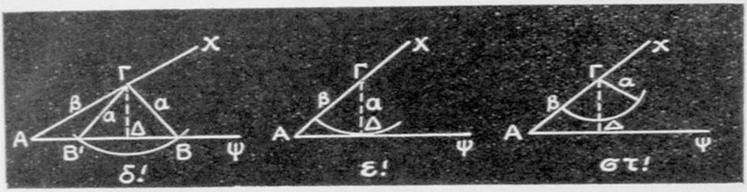
Σχ. 106 β′.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν γωνίαν χΑψ=Α· λαμβάνομεν ἐπί τινος πλευρᾶς Αχ τμῆμα ΑΓ=β καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν

(Γ, α). Ἂν αὕτη τέμνῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἴς τι σημεῖον Β, τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ὅταν ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἔχῃ μετὰ τῆς Αψ κοινὸν ἢ κοινὰ σημεῖα, ἤτοι ὅταν $\alpha \geqq ΓΔ$, ἔνθα ΓΔ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς Αψ. Ἐξαρτᾶται δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων καὶ ἐκ τοῦ εἴδους τῆς γωνίας Α.

1ον) Ἐὰν $Α \geqq 1$ ὀρθ. (Σχ. 106 α'), ἡ Α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου γωνία καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$.



Σχ. 106.

Ἐπειδὴ δὲ τότε εἶναι $\beta \geqq ΓΔ$, θὰ εἶναι $\alpha > ΓΔ$, κατ' ἀκολουθίαν ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια ἔχει μετὰ τῆς εὐθείας δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β' κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Α. Καὶ ἂν μὲν $Α > 1$ ὀρθ. μόνον τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἔχει τὰ δεδομένα στοιχεῖα· ἂν δὲ $Α = 1$ ὀρθ. ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἔχουσι τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἀλλὰ εἶναι ἴσα. Ἔχει λοιπὸν τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν.

2ον) Ἐὰν $Α < 1$ ὀρθ. εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha < \beta$.

Ἂν $\alpha > \beta$ *(Σχ. 106 β')*, ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια Γ ἔχει μετὰ τῆς εὐθείας Αψ δύο κοινὰ σημεῖα, ὧν μόνον τὸ ἓν κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αψ. Ἔχει λοιπὸν τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν.

Ἂν $\alpha = \beta$ *(Σχ. 106 γ')*, ἡ περιφέρεια Γ τέμνει τὴν πλευρὰν Αψ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν $\alpha < \beta$ *(Σχ. 106* δ', ε', στ'), διακρίνομεν τρεῖς μερικωτέρας περιπτώσεις, καθ' ὅσον $\alpha > ΓΔ$, $\alpha = ΓΔ$ καὶ $\alpha < ΓΔ$.

Ἂν $\alpha > ΓΔ$, ἡ περιφέρεια Γ ἔχει μετὰ τῆς Αψ δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β' ἀμφότερα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αψ κείμενα. Ἀμφότερα λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒ'Γ ἔχουσι τὰ δοθέντα στοιχεῖα, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἂν $\alpha = ΓΔ$, ἡ περιφέρεια Γ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς Αψ εἰς τὸ Δ καὶ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν $α < ΓΔ$ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον 215): Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τοῦ ἐπὶ ταύτην ὕψους καὶ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

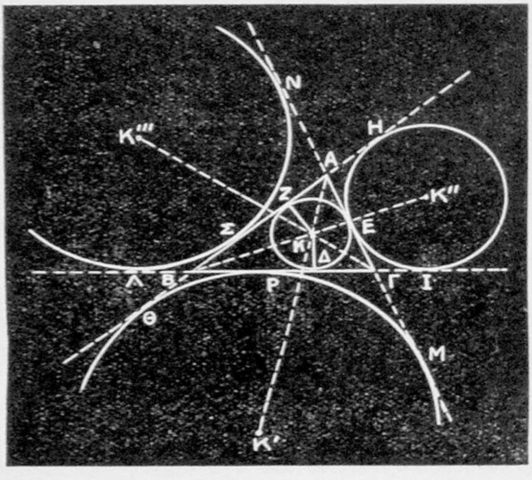
216) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τοῦ ἐπὶ μίαν τούτων ὕψους.

217) Ἐκ μιᾶς γωνίας καὶ τῶν εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀντιστοιχούντων ὑψῶν.

218) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

219) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τοῦ ἐπί τινα τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὕψους.

§ 159. Πρόβλημα V.—*Εἰς δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος (Σχ. 107).*



Σχ. 107.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου καὶ ΚΖ, ΚΔ, ΚΕ αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὗται ἐφάπτονται τοῦ κύκλου Κ, τὸ κέντρον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπ' αὐτῶν, ἤτοι $ΚΖ=ΚΔ=ΚΕ$. Ἐπειδὴ $ΚΖ=ΚΔ$, τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς Β· ἐπειδὴ δὲ $ΚΔ=ΚΕ$, τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς Γ. Εἶναι ἄρα τὸ Κ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τούτων.

Σύνθεσις. Διχοτομοῦμεν δύο γωνίας Β καὶ Γ τοῦ δεδομένου τριγώνου καὶ ἔστω Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τούτων.

Ἄγομεν ἐκ τοῦ Κ τὴν ΚΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Κ,ΚΔ), ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

ΣΗΜ. Διχοτομοῦντες γωνίαν τινὰ τοῦ τριγώνου καὶ τὴν παραπληρωματικὴν ἄλλης αὐτοῦ γωνίας ὁρίζομεν τὸ κέντρον κύκλου, ὅστις ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ἄλλων τοῦ τριγώνου πλευρῶν (παρεγγεγραμμένος κύκλος).

Ἀσκήσεις. 220) Εἰς δεδομένην γωνίαν νὰ ἐγγραφῇ κύκλος ἔχων δεδομένην ἀκτῖνα.

221) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, μιᾶς τῶν προσκειμένων γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

222) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ β′ βιβλίου.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 223) Αἱ περιφέρειαι, αἵτινες ἔχουσι χορδὰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς σημεῖα, ἅτινα εἶναι κορυφαὶ ἑτέρου ἐγγραφίμου τετραπλεύρου.

224) Τὸ τετράπλευρον, ὅπερ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα δύο καθέτων χορδῶν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος :

225) Τῶν ἄκρων τῶν εὐθ. τμημάτων, ἅτινα εἶναι ἴσα, παράλληλα καὶ ὁμόρροπα πρὸς δεδομένον εὐθ. τμῆμα καὶ ἄγονται ἐκ τῶν σημείων δεδομένης περιφερείας.

226) Τῶν μέσων ὡρισμένου εὐθ. τμήματος, ὅπερ κινεῖται οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ κεῖνται πάντοτε ἐπὶ δύο δεδομένων καθέτων εὐθειῶν.

227) Τῶν μέσων τῶν ἀποστάσεων δεδομένου σημείου ἀπὸ τῶν σημείων δεδομένης περιφερείας.

Νὰ γραφῇ περιφέρεια :

228) Ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη δεδομένης εὐθείας καὶ περιφερείας.

229) Ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων περιφερειῶν.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον :

230) Ἐκ μιᾶς γωνίας καὶ δύο διαμέσων.

231) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ἑνὸς ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἀντικειμένης τῇ βάσει γωνίας.

232) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, μιᾶς πλευρᾶς καὶ ἑνὸς ὕψους.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον :

233) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

234) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

235) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Μέτρησις εὐθ. σχημάτων.

§ 160. Ποσά, εἴδη αὐτῶν.— *Ποσὸν καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.*

Σωρὸς μήλων, ὅμιλος μαθητῶν, εὐθύγραμμόν τι τμῆμα, ἐπιφάνειά τις κλπ. εἶναι ποσά.

Τὰ ποσὰ διαιροῦνται εἰς *πλήθη ἢ ἀσυνεχῆ ποσὰ* καὶ εἰς *συνεχῆ ποσά.*

Πλῆθος ἢ ἀσυνεχὲς ποσὸν καλεῖται πᾶν ποσόν, ὅπερ σύγκειται ἐκ μερῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ᾽ ἀλλήλων καὶ αὐτοτελῶν. (Ὅμιλος μαθητῶν, σωρὸς μήλων κλπ.).

Συνεχὲς ποσὸν καλεῖται πᾶν ποσόν, οὗ τὰ μέρη συνέχονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἓν ὅλον ἀποτελοῦσι (γραμμαί, ἐπιφάνειαι, ὄγκοι, χρόνος κλπ.).

§ 161. Γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.— Ἂν $\Gamma\Theta = AB + AB + AB + \frac{AB}{2} + \frac{AB}{4}$, τὸ ΓΘ καλεῖται γινόμενον τοῦ AB ἐπὶ $\left(1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$.

Γενικῶς: *Γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ γίνεται ἐξ αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὅπως ὁ ἀριθμὸς οὗτος γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

ΣΗΜ. Εὐνόητον ἐκ τούτου καθίσταται ὅτι τὸ γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν εἶναι ποσὸν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτό.

Ἀσκήσεις. 236) Ἐπὶ δεδομένης περιφερείας νὰ ληφθῇ τυχὸν τόξον μικρότερον τεταρτημορίου καὶ νὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον αὐτοῦ α΄) ἐπὶ 3 καὶ β΄) ἐπὶ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$.

237) Δεδομένης ὀξείας γωνίας νὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ $2\frac{1}{2}$.

238) Νὰ σχηματισθῇ τὸ γινόμενον δεδομένου εὐθ. τμήματος ἢ τόξου ἢ γωνίας ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

§ 162. Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς πο-

σόν. — **Μέτρησις καὶ μέτρα ποσοῦ.** — Ἂν εἶναι ΓΘ=ΑΒ $\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, ὁ ἀριθμὸς $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ καλεῖται λόγος τοῦ ΓΘ πρὸς τὸ ΑΒ.

Γενικῶς: *Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν καλεῖται ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ποσόν, ἵνα προκύψῃ τὸ πρῶτον.*

Σχ. 108.

Ὁ λόγος ποσοῦ Π πρὸς ἄλλο Π′ παρίσταται οὕτω Π : Π′ ἢ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Εὐνόητον ὅτι ὁ λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως τὸ πρῶτον ποσὸν γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Τὰ ποσά, ἅτινα συνιστῶσι λόγον τινά, καλοῦνται *ὅροι* αὐτοῦ. Ὁ προτασσόμενος ὅρος ἑκάστου λόγου καλεῖται *ἡγούμενος*, ὁ δὲ ἐπιτασσόμενος καλεῖται *ἑπόμενος* ὅρος αὐτοῦ.

Ἐὰν τὸ ποσὸν ΑΒ *(Σχ. 108)* ληφθῇ ὡς μονάς, ὁ λόγος ΓΖ : ΑΒ καλεῖται *μέτρον* τοῦ ΓΖ.

Γενικῶς: *Μέτρον ποσοῦ καλεῖται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς ὡρισμένον καὶ ὁμοειδὲς ποσόν, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονάς.*

Τὸ μέτρον ἑκάστου ποσοῦ παρίσταται συντόμως δι' ὧν καὶ τὸ ποσὸν παρίσταται γραμμάτων κλειομένων ἐντὸς παρενθέσεως. Οὕτως ὁ λόγος ΓΖ: ΑΒ, ἤτοι τὸ μέτρον τοῦ ΓΖ, γράφεται συντόμως οὕτω (ΓΖ).

Μέτρησις ποσοῦ καλεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 239) Ποῖος ὁ λόγος περιφερείας πρὸς τὸ ἥμισυ καὶ ποῖος πρὸς τὸ τέταρτον αὐτῆς;

240) Ποῖος ὁ λόγος τριγώνου, πρὸς τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ;

Ἰδιότητες τῶν μέτρων τῶν ποσῶν.

§ 163. Θεώρημα Ι.—*Τὸ μέτρον ποσοῦ εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν μερῶν αὐτοῦ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μεμετρημένων.*

Ἔστω ποσόν τι Π=Α+Β καὶ Μ ὁμοειδὲς ποσόν, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονάς. Λέγω ὅτι (Π)=(Α)+(Β).

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι (Α)=Α : Μ=2 καὶ

(Β)=Β : Μ=1,21, ἕπεται ὅτι Α=Μ.2=Μ+Μ καὶ

$B = M.1,21 = M + \frac{M}{10} + \frac{M}{10} + \frac{M}{100}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$A + B = M + M + M + \frac{M}{10} + \frac{M}{10} + \frac{M}{100}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἐξ ὑποθέσεως

εἶναι $A + B = \Pi$ καὶ $M + M + M + \frac{M}{10} + \frac{M}{10} + \frac{M}{100} = M(2 + 1,21)$,

ἔπεται ὅτι $\Pi = M(2 + 1,21)$, ὅθεν $\Pi : M = 2 + 1,21$ ἢ $(\Pi) = (A) + (B)$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Τὰ ἴσα ἢ ἰσοδύναμα σχήματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἐὰν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Καὶ ἀντιστρόφως.*

§ 164. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ποσόν τι ἐπί τινα θετικὸν ἀριθμόν, καὶ τὸ μέτρον αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Λέγω δηλ. ὅτι τὸ ποσὸν $\Pi.\lambda$ ἔχει μέτρον $(\Pi).\lambda$.

Ἀπόδειξις. α') Ἂν λ εἶναι π.χ. 3, ὡς γνωστὸν $\Pi.3 = \Pi + \Pi + \Pi$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $(\Pi.3) = (\Pi) + (\Pi) + (\Pi) = (\Pi).3$.

β') Ἂν $\lambda = \frac{1}{4}$, ἐπειδὴ Π εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\Pi.\frac{1}{4}$, θὰ εἶναι

κατὰ τὴν α' περίπτωσιν $(\Pi) = (\Pi.\frac{1}{4}).4$, ὅθεν $(\Pi.\frac{1}{4}) = (\Pi).\frac{1}{4}$.

γ') Ἔστω τέλος $\lambda = 1,21\ldots$ Ἐπειδὴ

$\Pi.1,21\ldots = \Pi + \frac{\Pi}{10} + \frac{\Pi}{10} + \frac{\Pi}{100} + \ldots$, ἔπεται ὅτι

$(\Pi.1,21\ldots) = (\Pi) + \left(\frac{\Pi}{10}\right) + \left(\frac{\Pi}{10}\right) + \left(\frac{\Pi}{100}\right) + \ldots$ (§ 163).

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις εἶναι

$\left(\frac{\Pi}{10}\right) = (\Pi).\frac{1}{10}$, $\left(\frac{\Pi}{100}\right) = (\Pi).\frac{1}{100}, \ldots$ ἔπεται ὅτι

$(\Pi.1,21\ldots) = (\Pi) + (\Pi).\frac{1}{10} + (\Pi)\frac{1}{10} + (\Pi)\frac{1}{100} + \ldots$, ἢ

$(\Pi.1,21.) = (\Pi).1,21\ldots$ Ὥστε δι' οἱανδήποτε θετικὴν τιμὴν τοῦ λ εἶναι $(\Pi.\lambda) = (\Pi).\lambda$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα Ι.—*Ὁ λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων αὐτῶν, ἐὰν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.*

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\Pi : P = \lambda$, εἶναι $\Pi = P.\lambda$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $(\Pi) = (P).\lambda$ ὅθεν $(\Pi) : (P) = \lambda$.

§ 165. Κοινὸν μέτρον ποσῶν.—Σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα ποσά.—Ἔστωσαν Π καὶ P δύο ὁμοειδῆ ποσὰ καὶ M τρίτον ποσὸν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὸ καὶ τοιοῦτον ὥστε $\Pi : M=3$ καὶ $P : M=2$, ἤτοι οἱ λόγοι εἶναι ἀμφότεροι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τὸ ποσὸν Μ καλεῖται *κοινὸν μέτρον* τῶν δύο ποσῶν Π καὶ Ρ· ταῦτα δὲ λέγονται *σύμμετρα ποσά.*

Γενικῶς: *Ποσόν τι καλεῖται κοινὸν μέτρον ἄλλων, ἐὰν οἱ λόγοι ἑκάστου τούτων πρὸς ἐκεῖνο εἶναι πάντες ἀκέραιοι ἀριθμοί.*

Δύο ὁμοειδῆ ποσὰ καλοῦνται σύμμετρα ποσά, ἐὰν ἔχωσι κοινὸν μέτρον.

Δύο ὁμοειδῆ ποσὰ καλοῦνται ἀσύμμετρα, ἐὰν δὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον.

ΣΗΜ. Βραδύτερον θέλομεν γνωρίσει ποσὰ ἀσύμμετρα.

§ 166. Μονάδες μήκους.—Αἱ διάφοροι μονάδες, ὧν γίνεται χρῆσις διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν, καλοῦνται *μονάδες μήκους.*

Ἡ συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ μέτρον ἢ ὁ βασ. πῆχυς μετὰ τῶν πολλαπλασίων (στάδιον ἢ χιλιόμετρον καὶ μυριάμετρον) καὶ τῶν ὑποπολλαπλασίων (παλάμη, δάκτυλος γραμμή,) αὐτοῦ (1).

§ 167. Μῆκος εὐθ. τμήματος.—*Τὸ μέτρον εὐθ. τμήματος καλεῖται μῆκος αὐτοῦ.*

ΣΗΜ. Καὶ τὸ μέτρον πάσης ἄλλης γραμμῆς μεμετρημένης διά τινος μονάδος μήκους καλεῖται μῆκος τῆς γραμμῆς ταύτης.

Τὰ μήκη τῶν εὐθ. τμημάτων ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 168. Θεώρημα Ι.—*Τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος συμμέτρου πρὸς τὴν μονάδα εἶναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς* (σύμμετρος) *ἀριθμός.*

Ἔστω Π εὐθ. τμῆμα σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα Μ *(Σχ. 149).* Λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\Pi : M$ ἢ (Π) εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα.

Σχ. 109.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ Π καὶ Μ ὑπετέθησαν σύμμετρα ἔχουσι κοινὸν μέτρον Κ, ἔστω δὲ ὅτι $\Pi : K=\mu$ καὶ $M : K=\nu$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\Pi=K.\mu$ καὶ $M=K.\nu$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς β' τούτων προκύπτει ὅτι $K=M.\frac{1}{\nu}=\frac{M}{\nu}$, ἡ α' γίνεται $\Pi=\frac{M}{\nu}.\mu$

(1) Ὅρα Πρακτικὴν Γεωμετρίαν μου.

ἢ $\Pi = M.\frac{\mu}{\nu}$, ὅθεν $\Pi : M = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $(\Pi) = \frac{\mu}{\nu}$. Ὥστε τὸ μῆκος τοῦ Π εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα, καθ᾽ ὅσον ὁ μ εἶναι ἢ οὔ διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ ν

§ 169. Θεώρημα II (ἀντίστροφον τοῦ I). — *Ἐὰν τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος εἶναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός, τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα.*

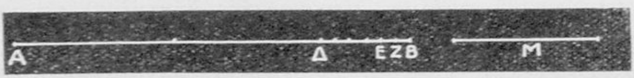
Ἔστω εὐθ. τμῆμα Π καὶ Μ ἡ μονὰς τοῦ μήκους, ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι : α´) $(\Pi)=3$ καὶ β´) ὅτι $(\Pi)=\frac{3}{4}$. Λέγω ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰ ποσὰ Π καὶ Μ εἶναι σύμμετρα.

Ἀπόδειξις. α´) Ἐπειδὴ $(\Pi)=3$ ἢ $\Pi : M=3$ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ προφανῶς $M : M=1$, ἕπεται ὅτι ἀμφότεροι οἱ λόγοι $\Pi : M$ καὶ $M : M$ εἶναι ἀκέραιοι· ἄρα τὸ ποσὸν Μ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ποσῶν Π καὶ Μ· ταῦτα δὲ εἶναι κατ᾽ ἀκολουθίαν σύμμετρα ποσά. ὅ. ἔ. δ.

β´) Ἐπειδὴ καθ᾽ ὑπόθεσιν εἶναι $(\Pi)=\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{\Pi}{M}=\frac{3}{4}$, ἕπεται ὅτι $\Pi=M.\frac{3}{4}=\frac{M}{4}+\frac{M}{4}+\frac{M}{4}=\frac{M}{4}.3$, ὅθεν $\Pi : \frac{M}{4}=3$. Ἀφ᾽ ἑτέρου ἐκ τῆς ἰσότητος $M=\frac{M}{4}.4$ προκύπτει ὅτι $M : \frac{M}{4}=4$. Τὸ ποσὸν λοιπὸν $\frac{M}{4}$ εἶναι (§ 165) κοινὸν μέτρον τῶν ποσῶν Π καὶ Μ· ταῦτα δὲ εἶναι κατ᾽ ἀκολουθίαν σύμμετρα ποσά. ὅ. ἔ. δ.

§ 170. Θεώρημα III. — *Τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν μονάδα εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω ΑΒ εὐθ. τμῆμα ἀσύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα Μ *(Σχ. 110)*. Λέγω ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.



Σχ. 110.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μονὰς Μ χωρεῖ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ ἀκεραία δίς, ὑπολείπεται δὲ καὶ τμῆμά τι ΔΒ μικρότερον αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν $(A\Delta)=2$. Εἰς τὸ τμῆμα ΔΒ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δέκατον τοῦ Μ χωρεῖ 4 φοράς, ὑπολείπεται δὲ τμῆμά τι ΕΒ μικρότερον τοῦ δεκάτου τοῦ Μ. Οὕτω δὲ $ΔΕ = \frac{M}{10}.4$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $ΔΕ : M = \frac{4}{10}$ ἢ $(ΔΕ) = 0,4$. Εἰς τὸ τμῆμα ΕΒ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ Μ χωρεῖ 7 φοράς, ὑπολείπεται δὲ τμῆμά τι ΖΒ μικρότερον τοῦ ἑκατοστοῦ τοῦ Μ. Οὕτως εἶναι $(ΕΖ) = 0,07$. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι πάντοτε ὑπολείπεται τμῆμά τι μικρότερον τοῦ ἑκάστοτε χρησιμοποιουμένου μέρους τῆς μονάδος Μ· διότι ἂν π.χ. τὸ ἑκατοστὸν τοῦ Μ ἐχώρει εἰς τὸ ΕΒ ἀκριβῶς 7 φοράς, θὰ ἦτο $(ΕΒ) = 0,07$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(ΑΒ) = (ΑΔ) + (ΔΕ) + (ΕΒ) = 2 + 0,4 + 0,07 = 2,47$, ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ θὰ ἦτο ἀριθμὸς σύμμετρος, ἀλλὰ τότε (§ 169) τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ θὰ ἦτο σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα Μ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $(ΑΒ) = (ΑΔ) + (ΔΕ) + (ΕΗ) + \ldots, = 2,47\ldots$ ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ εἶναι ἀριθμὸς δεκαδικὸς ἔχων ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Εἶναι δὲ ταῦτα μὴ περιοδικά, διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς 2,47... θὰ ἦτο ἴσος πρός τι κλάσμα, τὰ δὲ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Μ θὰ ἦσαν σύμμετρα, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Τὸ μῆκος λοιπὸν τοῦ ΑΒ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. ὅ. ἔ. δ.

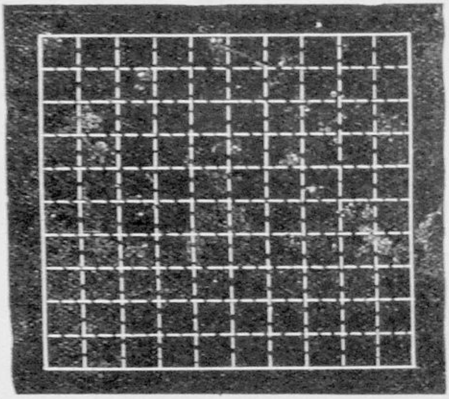
Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

§ 171. Μονάδες ἐπιφανειῶν. — Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας. — Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν ὡς μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς. Καλοῦνται δὲ τὰ τετράγωνα ταῦτα κατὰ σειρὰν *τετραγωνικὸν μέτρον, τετραγωνικὴ παλάμη, τετραγωνικὸς δάκτυλος, τετραγωνικὴ γραμμή.*

Διαιροῦντες *(Σχ. 111)* δύο προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἰς δέκα ἴσα μέρη ἑκατέραν καὶ ἄγοντες ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, διαιροῦμεν τὸ τετραγ. μέτρον εἰς 100 τετράγωνα, ὧν ἕκαστον ἔχει πλευρὰν μιᾶς παλάμης· ἔχει λοιπὸν τὸ τετραγ. μέτρον 100 τετρ. παλάμας.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ἡ τετρ. παλάμη ἔχει 100 τετραγ. δακτύλους καὶ ὁ τετρ. δάκτυλος ἔχει 100 τετρ. γραμμάς.

Γενικῶς: Ἂν δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν, διαιρεθῶσιν εἰς ν ἴσα μέρη ἑκατέρα καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ, διαιρεῖται τὸ τετράγωνον εἰς $\nu.\nu = \nu^2$ τετράγωνα, ὧν ἕκαστον ἔχει πλευρὰν τὸ $\frac{1}{\nu}$ τῆς μονάδος μήκους καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{\nu^2}$ τῆς μονάδος τῶν ἐπιφανειῶν.



Σχ. 111.

Ἂν ὡς μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ χιλιόμετρον, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν θὰ εἶναι τὸ *τετραγωνικὸν χιλιόμετρον*, ὅπερ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 1000 μέτρων. Τὸ τετραγ. χιλιόμετρον περιέχει κατὰ τὰ προηγούμενα $1000 \times 1000 = 1000000$ τ. μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἀγρῶν καὶ ἀμπέλων γίνεται χρῆσις τοῦ *βασιλικοῦ στρέμματος*, ὅπερ ἔχει 1000 τ. μ., καὶ τοῦ *παλαιοῦ στρέμματος*, ὅπερ ἔχει 1270 τετρ. μέτρα. Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ *τεκτονικοῦ τετρ. πήχεως*, ὅστις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως καὶ ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας καλεῖται τὸ μέτρον αὐτῆς, ἤτοι ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν. Ἂν π. χ. Π εἶναι τυχοῦσα ἐπιφάνεια, Μ ἡ μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν καὶ $\Pi : M = 3$, ἢ $(\Pi) = 3$, ὁ ἀριθμὸς 3 καλεῖται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Π.

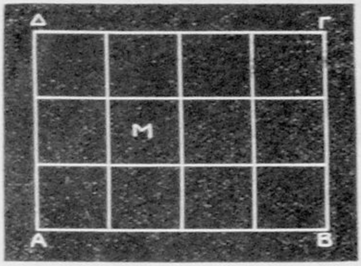
Εὐνόητον δὲ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια αὕτη γίνεται ἐκ τῆς μονάδος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ἕνεκα τούτου τὸ ἐμβαδὸν λαμβάνει τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, ἧς γίνεται χρῆσις. Οὕτω λέγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τινὸς εἶναι 3 τετρ. μέτρων, ἢ 12 τετρ. παλαμῶν ἢ 165 τετρ. χιλιομέτρων κλπ. καθ' ὅσον ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετρ. μέτρον, ἡ τετρ. παλάμη, τὸ τετρ. χιλιόμετρον κλπ.

Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμων.

§ 172. Θεώρημα I.— *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Περίπτωσις α'. Ἔστω ΑΒΓΔ *(σχ. 112)* ὀρθογώνιον, ἐν ᾧ (ΑΒ) = 4 μ. καὶ (ΑΔ) = 3 μ. Λέγω ὅτι (ΑΒΓΔ) = 3×4 = 12 τ. μ.

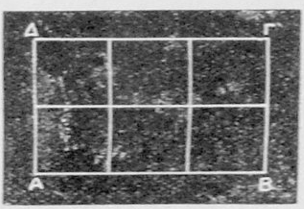


Σχ. 112.

Ἀπόδειξις. Διαιροῦμεν τὴν βάσιν εἰς 4, τὸ δὲ ὕψος εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρου τῶν τμημάτων τούτων ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰ ἄλλα. Οὕτω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς 4×3 τετράγωνα Μ, ὧν ἕκαστον ἔχον πλευρὰν 1 μέτρου εἶναι μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν. Ὥστε ΑΒΓΔ = Μ.(4.3), ἄρα ΑΒΓΔ : Μ = 4.3 ἢ (ΑΒΓΔ) = 12 τ. μ. ὅ. ἔ. δ.

Περίπτωσις β'. Ἔστω ΑΒΓΔ *(σχ. 113)* ὀρθογώνιον, ἐν ᾧ (ΑΒ) = $\frac{3}{4}$ μ. καὶ (ΑΔ) = $\frac{2}{4}$ μ. Λέγω ὅτι (ΑΒΓΔ) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{16}$ τ.μ.

Ἀπόδειξις. Ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς μήκους τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, ἀντίστοιχος μονὰς ἐπιφανειῶν θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν $\frac{1}{4}$ μ. καὶ (§ 171) εἶναι τὸ $\frac{1}{16}$ τ. μ. Ἀλλὰ τότε ἡ μὲν βάσις ΑΒ θὰ ἔχῃ 3 τοιαύτας μονάδας μήκους, τὸ δὲ ὕψος 2 καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ 3×2 = 6 ἀντιστοί-

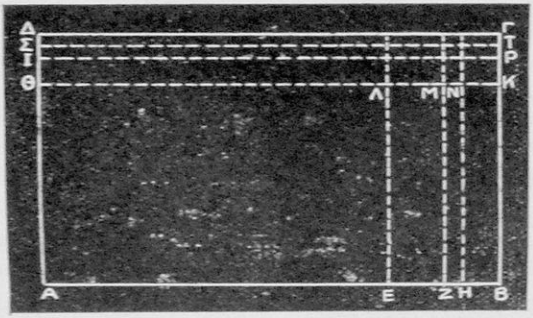


Σχ. 113.

χους μονάδας ἐπιφανείας, ἤτοι $(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{16}$ τ.μ. $\times 6=\frac{6}{16}$ τ. μ. δ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ μήκη τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους εἶναι κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπομεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως.

Περίπτωσις γ'). Ἔστω τέλος τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 114)*, ἐν ᾧ (ΑΒ)=3,627 . . . μέτρα καὶ (ΑΔ)=2,329 . . . μέτρα. Λέγω ὅτι (ΑΒΓΔ)=(3,627 . . .)×(2,329 . . .) τ. μέτρα.



Σχ. 114.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ ὁρίζομεν τὰ τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ..., ὧν τὰ μήκη εἶναι κατὰ σειρὰν 3 μ., 0,6 μ., 0,02 μ..., ἐπὶ δὲ τοῦ ὕψους ΑΔ ὁρίζομεν τὰ τμήματα ΑΘ, ΘΙ, ΙΣ..., ὧν τὰ μήκη εἶναι 2μ., 0,3μ., 0,02μ... Ἐὰν ἤδη ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η... ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΔ, ἐκ δὲ τῶν σημείων Θ, Ι, Σ... ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς ἄλλα ὀρθογώνια, ὧν τὰ ἐμβαδὰ ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ (§ 163 Θ. Ι). Ἐπειδὴ δὲ (ΑΕΛΘ)=3.2 τμ., (ΕΛΜΖ)=0,6.2 τμ., (ΜΖΗΝ)=0,02.2 τμ. κ.τ.λ., ἔπεται ὅτι

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\left\{\begin{array}{ll}(ΑΘΚΒ)=(3+0,6+0,02+...)\times 2 & =3,627...\times 2 \text{ τ.μ.}\\ (ΙΘΚΡ) & =3,627...\times 0,3 \text{ τ.μ.}\\ (ΙΡΤΣ) & =3,627...\times 0,02 \text{τ.μ.}\end{array}\right.$

. . . .

. . . .

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒΓΔ)=3,627 . . . . . × (2+0,3+0,02+0,009+...) ἤ (ΑΒΓΔ)=3,627 . . . . . × 2,329 . . . τμ. ὅ.ἔ.δ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν κληθῇ Ε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ὅπερ ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ, ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἰσότης $E=\beta.\ \upsilon$.

ΣΗΜ. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος δέον νὰ ὦσι μεμετρημένα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν δηλοῖ ἀντιστοίχους πρὸς ταύτην μονάδας ἐπιφανείας. Οὕτως, ἂν β καὶ υ παριστῶσι μέτρα ἢ παλάμας, τὸ β.υ δηλοῖ τετρ. μέτρα ἢ τετρ. παλάμας.

Πόρισμα. *Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτό.*

Οὕτως, ἂν διὰ τοῦ Ε παρασταθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν α, θὰ εἶναι $E=\alpha\times\alpha$ ἢ $E=\alpha^2$.

ΣΗΜ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ δευτέρα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ α καλεῖται καὶ τετράγωνον τοῦ α.

Ἀσκήσεις. 241) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ὅπερ ἔχει βάσιν 6,25 μ. καὶ ὕψος 2,30 μ.

242) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ὅπερ ἔχει βάσιν 45,50 μ. καὶ περίμετρον 150,75. μ.

243) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πλευρὰν 3,45. μ.

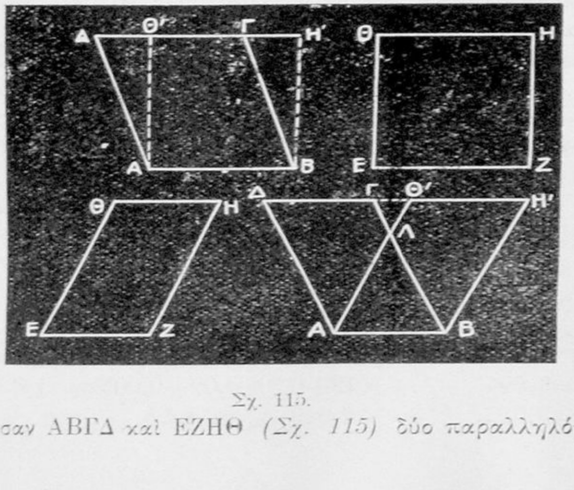
244) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, οὗ ἡ περίμετρος εἶναι 60,24 μ.

245) Ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 450 τ.μ. καὶ βάσιν 30 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

246) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τετραγώνου, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν 14,0628 τ. μέτρων;

247) Πόση εἶναι ἡ βάσις ὀρθογωνίου ἔχοντος ὕψος 20 μ. καὶ ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς 32 μέτρων;

§ 173. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.*



Σχ. 115.

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ *(Σχ. 115)* δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις. Θέτομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ, οὕτως ὥστε αἱ βάσεις αὐτῶν ΑΒ καὶ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσωσιν. Ἐπειδὴ τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως πλευρὰ ΘΗ θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν τινὰ Θ′Η′ κειμένην ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ τῆς ΔΓ καὶ θὰ ἔχῃ ἢ οὔ μετὰ τῆς ΔΓ κοινὸν μέρος. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὰ τρίγωνα ΑΔΘ′ καὶ ΒΓΗ′ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΔ=ΒΓ, ΑΘ′=ΒΗ′ καὶ ΔΑΘ′=ΓΒΗ′.

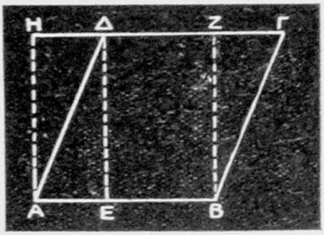
Καὶ κατὰ μὲν τὴν α′ περίπτωσιν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΗ′Θ′ ἔχοντα τὰ ῥηθέντα τρίγωνα ἴσα καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΘ′ κοινὸν εἶναι ἰσοδύναμα.

Κατὰ δὲ τὴν β′, ἂν ἀπὸ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΔΘ′ καὶ ΒΓΗ′ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τρίγωνον ΓΛΘ′, τὰ ὑπολειπόμενα τετράπλευρα ΑΛΓΔ καὶ ΒΛΘ′Η′ εἶναι ἴσα· ἐπειδὴ δὲ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΗ′Θ′ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν ἴσων τούτων τετραπλεύρων καὶ ἐκ τοῦ κοινοῦ τριγώνου ΑΛΒ, ἕπεται ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα.

Εἰς ἀμφοτέρας λοιπὸν τὰς περιπτώσεις τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΘ′Η′ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒΘ′Η′ εἶναι αὐτὸ τὸ ΕΖΗΘ εἰς ἄλλην θέσιν, ἕπεται ὅτι τὰ ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα. ὅ. ἔ. δ.

§ 174. **Θεώρημα ΙΙΙ.**—*Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΒΓΔ *(Σχ. 116)* τυχὸν παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΔΕ. Λέγω ὅτι (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ).(ΔΕ).



Σχ. 116.

Ἀπόδειξις. Ἄγοντες ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β καθέτους ἐπὶ τὴν ΔΓ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄρα (§ 163 Πόρισμα Ι) (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΖΗ)=(ΑΒ)×(ΑΗ). ὅθεν (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ)×(ΔΕ).ὅ.ἔ.δ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν διὰ τοῦ Ε παρασταθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν β καὶ ὕψος υ θὰ εἶναι Ε=β×υ.

Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις,* *εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Ἀσκήσεις. 248) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν 154,35 μ. καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τῆς βάσεως;

249) Ρόμβου ἡ περίμετρος εἶναι 249,20 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν εἶναι 41,10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

250) Νὰ ἀποδειχθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐμβαδῶν ἡ ἄσκησις 103.

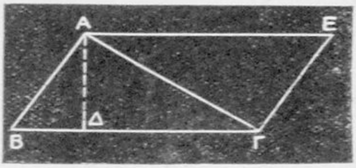
251) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων, αἵτινες κεῖνται ἀπέναντι τῆς κοινῆς καὶ ὡρισμένης θέσει καὶ μεγέθει βάσεως αὐτῶν, δεδομένου ἑνὸς τῶν παραλληλογράμμων τούτων.

Ἐμβαδὸν τριγώνου.

§ 175. Θεώρημα I.—*Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 117)* τυχὸν τρίγωνον, ὅπερ ἔχει βάσιν ΒΓ καὶ ὕψος ΑΔ. Λέγω ὅτι

$$(ΑΒΓ)=\frac{(ΒΓ).(ΑΔ)}{2}.$$



Σχ. 117.

Ἀπόδειξις. Ἄγοντες ἐξ ἑκατέρας τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν τοῦ τριγώνου σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒΓ εἶναι ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΕ, ἕπεται ὅτι $(ΑΒΓ)=\frac{(ΑΒΓΕ)}{2}=\frac{(ΒΓ)\times(ΑΔ)}{2}$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I.—*Τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Πόρισμα II.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

Ἀσκήσεις. 252) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ ἡ μὲν βάσις εἶναι 345 μ., τὸ δὲ ὕψος 20 μ.

253) Ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 3 β. στρεμμάτων, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 120 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ;

254) Πόση εἶναι ἡ ἀξία τριγωνικοῦ οἰκοπέδου ἔχοντος βάσιν 35,60 μ. καὶ ὕψος 23,20 μ. ἐὰν ὁ τ. τ. π. τιμᾶται 65 δραχ.;

255) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη διάμεσος τριγώνου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἰσοδύναμα.

256) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ.

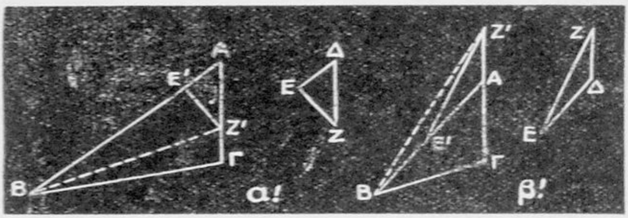
257) Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς τριγώνου σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

§ 176. Θεώρημα II.— *Ἐὰν γωνία τριγώνου εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ γωνίας τινὸς ἄλλου τριγώνου, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουσι τὰς ἴσας ἢ παραπληρωματικὰς ταύτας γωνίας.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι *(Σχ. 118 α')* Α=Δ ἢ *(Σχ. 118 β')* Α+Δ=2 ὀρθ. Λέγω ὅτι:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{(ΑΒ).(ΑΓ)}{(ΔΕ).ΔΖ)}.$$

Ἀπόδειξις. Θέτομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἰς τὴν θέσιν ΑΕ'Ζ', οὕτως ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α *(Σχ. 118 α')* ἢ ἐπὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς Α *(Σχ. 118 β')* καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν



Σχ. 118.

ΒΖ'. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΖ' εἶναι ἰσοϋψῆ, ἕπεται ὅτι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΖ')}=\frac{(ΑΓ)}{(ΑΖ')}$ (1). Ὁμοίως εἶναι $\frac{(ΑΒΖ')}{(ΑΕ'Ζ')}=\frac{(ΑΒ)}{(ΑΕ')}$ (2). Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΕ'Ζ')}=\frac{(ΑΒ)\ (ΑΓ)}{(ΑΖ')(ΑΕ')} \text{ ἢ } \frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{(ΑΒ).\ (ΑΓ)}{(ΔΕ).\ (ΔΖ)}. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀσκήσεις. 258) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἔχει μῆκος 4 μ., ἡ δὲ ΑΓ ἔχει μῆκος 9 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΕ καὶ ΔΖ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΖ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ἔχοντος τὴν γωνίαν Δ ἴσην τῇ Α;

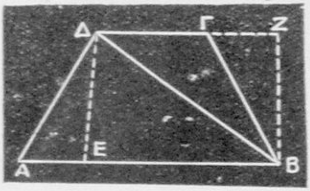
259) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἰσοδύναμον

πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσιν ἀντιστοίχως μῆκος 8 μ. καὶ 2 μ.

260) Ἐὰν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι Α=Α΄ καὶ Β+Β΄=2 ὀρθ. θὰ εἶναι ΒΓ : Β΄Γ΄=ΑΓ : Α΄Γ΄.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου.

§ 177. Θεώρημα Ι.—*Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*



Σχ. 119.

Ἔστω ΑΒΓΔ (*Σχ. 119*) τυχὸν τραπέζιον, ὅπερ ἔχει βάσεις τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ, ὕψος δὲ ΔΕ. Λέγω ὅτι : $(\text{ΑΒΓΔ})=\dfrac{(\text{ΑΒ})+(\text{ΓΔ})}{2}.(\text{ΔΕ})$.

Ἀπόδειξις. Ἄγοντες τὴν διαγώνιον ΔΒ διαιροῦμεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ $(\text{ΑΒΔ})=\dfrac{(\text{ΑΒ}).\ (\text{ΔΕ})}{2}$ καὶ $(\text{ΒΔΓ})=\dfrac{(\text{ΔΓ}).(\text{ΒΖ})}{2}$ ἢ $(\text{ΒΔΓ})=\dfrac{(\text{ΔΓ}).\ (\text{ΔΕ})}{2}$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$(\text{ΑΒΔ})+(\text{ΒΔΓ})=\frac{(\text{ΑΒ}).(\text{ΔΕ})}{2}+\frac{(\text{ΔΓ})\ (\text{ΔΕ})}{2},\ \text{ὅθεν}$$

$$(\text{ΑΒΓΔ})=\frac{(\text{ΑΒ})+(\text{ΔΓ})}{2}.\ (\text{ΔΕ}).\ \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Ε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗ αἱ μὲν βάσεις ἔχουσι μῆκος β καὶ β΄, τὸ δὲ ὕψος ἔχει μῆκος υ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\text{Ε}=\dfrac{(\beta+\beta')}{2}\upsilon$.

Πόρισμα Ι.— *Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς διαμέσου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

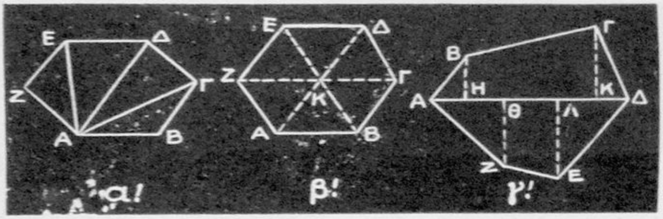
Ἀσκήσεις. 261) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ὅπερ ἔχει βάσεις 100 μ. καὶ 60 μ., ὕψος δὲ 30 μ.

262) Τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι 75,60 μ., τὸ ὕψος 10 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν 500 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ ;

263) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ὅπερ ἔχει διάμεσον 94,60 μ. καὶ ὕψος 27,50 μέτρων ;

264) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπὸ ταύτης ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

§ 178. Ἐμβαδὸν πολυγώνου. — Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τυχόντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 120 α΄ β΄)* διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τού-



Σχ. 120.

των καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα. Διαιρεῖται δὲ πολύγωνον εἰς τρίγωνα κατὰ τοὺς ἀκολούθους δύο τρόπους.

α΄) Ἄγομεν πάσας τὰς διά τινος κορυφῆς αὐτοῦ, π.χ. τῆς Α, διερχομένος διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ. Οὕτω πολύγωνον ἔχον ν πλευρὰς διαιρεῖται εἰς (ν—2) τρίγωνα.

β΄) Ὁρίζομεν τυχαίως σημεῖον Κ ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἄγομεν πάντα τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπ᾽ αὐτοῦ καὶ τῶν κορυφῶν του· Οὕτω πολύγωνον ν πλευρῶν διαιρεῖται εἰς ν τρίγωνα.

ΣΗΜ. Ἐνίοτε ἐργαζόμεθα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ πολυγώνου καὶ ὡς ἀκολούθως. Ἄγομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΑΔ (Σχ. 120 γ΄) καὶ ἐκ τῶν ἄλλων κορυφῶν τὰς ἐπὶ ταύτην καθέτους ΒΗ, ΓΚ, ΕΛ, ΖΘ. Οὕτω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τετράπλευρα (τραπέζια ἢ ὀρθογώνια).

Ἀσκήσεις. 265) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος α, σημεῖόν τι δὲ αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀπόστασιν $\frac{\alpha.\sqrt{3}}{2}$.

266) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 110γ΄) ἂν (ΑΗ) = 2 μ, (ΗΚ)=7 μ, (ΚΔ)=4 μ, (ΑΘ)=4 μ, (ΛΔ)=8 μ, (ΒΗ)=4 μ, (ΓΚ)=5 μ, (ΖΘ)= 2 μ, (ΕΛ)=2,5 μ καὶ (ΖΕ)=1,25 μ.

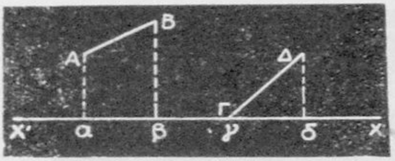
267) Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζοειδοῦς εἶναι γινόμενον μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης διαγωνίου ἀπ᾽ αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Μετρικαὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων σχέσεις.

§ 119. Προβολὴ σημείου καὶ εὐθ. τμήματος ἐπὶ ἄξονα. — *Ὀρθὴ προβολὴ ἢ ἁπλῶς προβολὴ σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν καλεῖται ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἀγομέ-*

μένης καθέτου. Οὕτω τοῦ σημείου Α *(Σχ. 121)* προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν χ΄χ εἶναι ὁ πούς α τῆς καθέτου Αα.



Σχ. 121.

Ἡ εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἣν γίνεται ἡ προβολή, καλεῖται προβολικὸς ἄξων. Εὐνόητον ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ προβολικοῦ ἄξονος εἶναι προβολὴ ἑαυτοῦ.

Ὀρθὴ προβολὴ ἢ ἁπλῶς προβολὴ εὐθ. τμήματος ἐπὶ εὐθεῖαν καλεῖται τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας ταύτης, ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν προβολῶν τῶν ἄκρων τοῦ εὐθ. τμήματος. Οὕτω τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ *(Σχ. 121)* προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα αβ, τοῦ δὲ ΓΔ τὸ γδ.

§ 180. Θεώρημα Ι.—*Τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς καθέτου ταύτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 122)* ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ΑΒΕΔ τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΒ. Ἄγοντες τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὁρίζομεν τὴν προβολὴν ΒΗ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Λέγω ὅτι (ΑΒΕΔ)=(ΒΓ). (ΒΗ) ἢ $(ΑΒ)^2$=(ΒΓ). (ΒΗ).

Ἀπόδειξις. Ἄγοντες ἐκ τῆς κορυφῆς Ε τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΒΓ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ. Ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις τούτου ἡ ΕΒ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ΑΒ, ἑπομένως

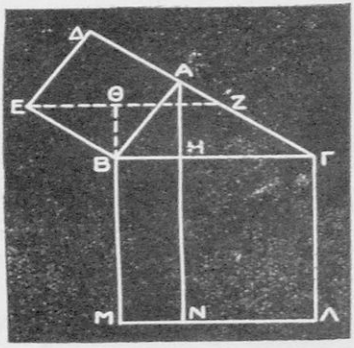
(ΕΒΓΖ)=(ΕΒ).(ΑΒ)

Ἐπειδὴ δὲ καὶ

(ΑΒΕΔ)=(ΕΒ).(ΑΒ),

ἕπεται ὅτι

(ΑΒΕΔ)=(ΕΒΓΖ) (1)



Σχ. 122.

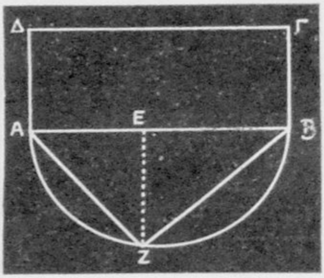
Ἂν δὲ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ΕΒΓΖ ἡ ΒΓ, τὸ ὕψος του θὰ εἶναι ΒΘ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν (ΕΒΓΖ)=(ΒΓ). (ΒΘ)· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) προκύπτει εὐκόλως ὅτι (ΑΒΕΔ)=(ΒΓ). (ΒΘ). (2)

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΕΒΘ καὶ ΑΒΗ εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι ΒΘ=ΒΗ, ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται (ΑΒΕΔ)=(ΒΓ).(ΒΗ) ἢ (ΑΒ)²=(ΒΓ).(ΒΗ). ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον (§ 180) θεώρημα λύομεν εὐκόλως τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

§ 181. Πρόβλημα 1.—*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (Σχ. 123).*



Σχ. 123.

Ἀσκήσεις. 268) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ἔχει μῆκος 30 μ., μία δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν 18 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν προβολῆς ἑκατέρας τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

269) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ἔχει μῆκος 50 μ., ἡ δὲ ἐπὶ ταύτην προβολὴ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν 18 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκατέρας τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.

270) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν τετραγώνων δύο χορδῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας ἀγομένων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγομένην διάμετρον.

271) Ἐὰν ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν;

§ 182. Θεώρημα ΙΙ. (Πυθαγόρειον).—*Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 122)* ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ ΒΓ. Λέγω ὅτι (ΒΓ)²=(ΑΒ)²+(ΑΓ)².

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον (§ 180) θεώρημα εἶναι (ΑΒ)²=(ΒΓ).(ΒΗ) καὶ (ΑΓ)²=(ΒΓ).(ΗΓ). Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι

(ΑΒ)²+(ΑΓ)²=(ΒΓ) (ΒΗ)+(ΒΓ).(ΗΓ), ὅθεν

(ΑΒ)²+(ΑΓ)²=(ΒΓ)[(ΒΗ)+(ΗΓ)] ἢ (ΑΒ)²+(ΑΓ)²=(ΒΓ)². ὅ. ἔ. δ.

Συνήθως, χάριν συντομίας θέτομεν (ΒΓ)=α, (ΑΒ)=γ, (ΑΓ)=β, τὸ δὲ Πυθαγόρειον θεώρημα ἐκφράζεται τότε διὰ τῆς σχέσεως

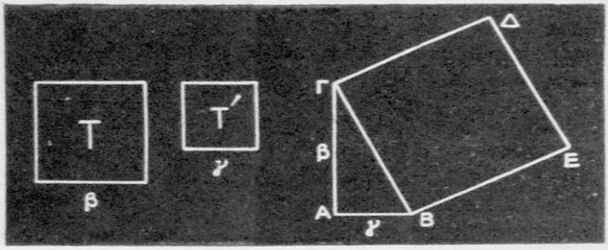
$$α^2=β^2+γ^2.$$

Πόρισμα I.—*Τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.*

Πόρισμα II.—*Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον ἐκείνου.*

Πόρισμα III.—*Ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

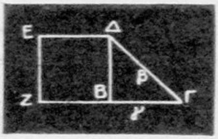
§ 183. Πρόβλημα I.—*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύ-*



Σχ. 124.

ναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δεδομένων τετραγώνων Τ καὶ Τ′ (Σχ. 124).

§ 184. Πρόβλημα II.—*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων Τ καὶ Τ′ (Σχ. 125).*



Σχ. 125.

Ἀσκήσεις. 272) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου, οὗ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 12 μ., ἡ δὲ ἄλλη 16 μ. (= 20 μ.)

273) Ὀρθ. τριγώνου ἡ μὲν ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 45 μ, μία δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν 36 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

274) Ὀρθ. τριγώνου ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος 21 μ, ἡ δὲ ἄλλη 28 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἑκατέρας τούτων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

275) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, οὗ μία γωνία εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι 80 μ ἡ μία καὶ 32 μ ἡ ἄλλη.

276) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗ ἡ μὲν βάσις εἶναι 2 μ, ἑκατέρα δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ 8 μ.

277) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, οὗ ἡ μία βάσις εἶναι 60 μ, ἡ ἄλλη 40 μ καὶ ἑκατέρα τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ 15 μ.

278) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος α.

279) Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖται, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.

280) Δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι ἔχουσιν ἀκτῖνας Α καὶ α ($A>\alpha$). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος χορδῆς τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἐφαπτομένης τῆς ἄλλης περιφερείας.

281) Δύο κύκλοι ἔχοντες ἀκτῖνας Α καὶ α κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τὰ δὲ κέντρα αὐτῶν ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης.

282) Ἐὰν Δ εἶναι ἡ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α, α, α' αἱ ἀκτῖνες τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ περιγραφομένων περιφερειῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $A^2=\alpha^2+\alpha'^2$.

283) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.

284) Δεδομένων τριῶν εὐθ. τμημάτων α, β, γ, νὰ γραφῇ εὐθ. τμῆμα χ, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\chi^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

285) Ὁμοίως νὰ γραφῇ εὐθ. τμῆμα ψ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι

$$\psi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}.$$

286) Δοθέντος εὐθ. τμήματος α νὰ γραφῇ τὸ εὐθ. τμῆμα $\alpha\sqrt{2}$ καὶ τὸ $\alpha\sqrt{3}$.

287) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τυχὸν δοθὲν ἄλλο τετράπλευρον.

288) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δεδομένων ὀρθογωνίων.

289) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δεδομένου ὀρθογωνίου.

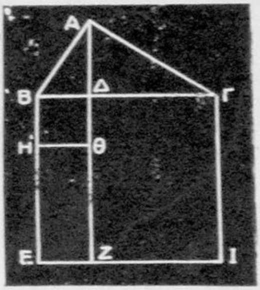
§ 185. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθ. τριγώνου ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν προβολῶν τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 126)* τυχὸν ὀρθ. τρίγωνον καὶ ΑΔ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Λέγω ὅτι $(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΒΔ}).(\text{ΔΓ})$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ἔπεται (§ 182 Πόρ. Ι) ὅτι $(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΑΒ})^2-(\text{ΒΔ})^2$. (1)

Ἐπειδὴ δέ, ἂν κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΖΕ ἔχον ΒΕ=ΒΓ, εἶναι $(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΒΔΖΕ})$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΒΕΖΔ})-(\text{ΒΔ})^2$. Ἐὰν ἤδη κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον

ΒΔΘΗ ἔχον πλευρὰν ΒΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΖΕ μέρος αὐτῆς, ἡ ἰσότης (2) γράφεται καὶ οὕτω
$(ΑΔ)^2=(ΒΕΖΔ)-(ΒΗΘΔ)=(ΗΕΖΘ)$. Ἐπειδὴ δέ,



Σχ. 126.

$(ΗΕΖΘ)=(ΗΘ).(ΗΕ)$ καὶ $ΗΘ=ΒΔ$,
$ΗΕ=ΒΕ-ΒΗ=ΒΓ-ΒΔ=ΔΓ$,
ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $(ΑΔ)^2=(ΒΔ).(ΔΓ)$. ὅ. ἔ. δ.

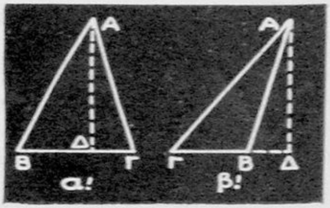
Ἀσκήσεις. 290) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθ. τριγώνου, οὗ αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 μ. ἡ μία καὶ 4 μ. ἡ ἄλλη.

291) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθ. τριγώνου, οὗ ἡ ὑποτείνουσα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους εἰς τμήματα 2 μ. καὶ 8 μ.

292) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ οὔσης τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\frac{1}{(ΑΒ)^2}+\frac{1}{(ΑΓ)^2}=\frac{1}{(ΑΔ)^2}$.

293) Δεδομένου ἡμικυκλίου ἔχοντος διάμετρον ΑΒ μήκους 6 μ. διαιρεῖται αὕτη εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ καὶ ἄγεται ἡ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Ε. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΓΕ.

§ **186. Θεώρημα IV.**—*Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ δύο ὀρθογώνια βάσιν ἔχοντα τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τούτων καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*



Σχ. 127.

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 127)* τυχὸν τρίγωνον, ΑΒ πλευρά τις αὐτοῦ κειμένη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας Γ καὶ ΓΔ ἡ ἐπὶ τὴν ΒΓ προβολὴ τῆς ΑΓ. Λέγω ὅτι
$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2-2(ΒΓ).(ΓΔ$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἔπεται ὅτι
$$(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2. \qquad (1)$$
Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΔ)=(ΒΓ)-(ΔΓ)$ *(Σχ. 127 α')* ἢ $(ΒΔ)=(ΓΔ)-(ΒΓ)$ *(Σχ. 127 β')*, ἔπεται ὅτι $(ΒΔ)^2=(ΒΓ)^2+(ΔΓ)^2-2(ΒΓ).(ΔΓ)$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΓ)^2+(ΔΓ)^2-2(ΑΓ).(ΔΓ)$.
Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΔ)^2+(ΔΓ)^2=(ΑΓ)^2$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται
$$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2-2(ΒΓ).(ΓΔ). \quad ὅ. ἔ. δ.$$

§ 187. Θεώρημα V.— *Τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας ἀμβλυγωνίου τριγώνου κειμένης πλευρᾶς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ηὐξημένον κατὰ δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν μίαν τῶν πλευρῶν τούτων καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 127 β')* ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, ΑΓ ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας κειμένη πλευρὰ καὶ ΒΔ ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Λέγω ὅτι $(ΑΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΒΓ).(ΒΔ)$.

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΔ εἶναι $(ΑΓ)^2=(ΑΔ)^2+(ΓΔ)^2$ (1). Ἐπειδὴ δὲ $(ΓΔ)=(ΓΒ)+(ΒΔ)$, ἕπεται ὅτι $(ΓΔ)^2=(ΓΒ)^2+(ΒΔ)^2+2(ΓΒ).(ΒΔ)$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $(ΑΓ)^2=(ΑΔ)^2+(ΓΒ)^2+(ΒΔ)^2+2(ΓΒ).(ΒΔ)$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2=(ΑΒ)^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(ΑΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΓΒ).(ΒΔ). \quad ὅ. ἔ. δ.$$

Πόρισμα Ι.— *Γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, καθ' ὅσον τὸ τετράγωνον τῆς ἀντικειμένης πλευρᾶς εἶναι ἴσον, μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αὐτῆς.*

Ἀσκήσεις. 294) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς 3, 4, 5 μονάδας μήκους εἶναι ὀρθογώνιον.

295) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον 4, 5, 6 εἶναι ὀξυγώνιον, τὸ δὲ 7, 9, 12 ἀμβλυγώνιον.

296) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $α^2=β^2+γ^2$, τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰς $λα$, $λβ$, $λγ$, εἶναι ὀρθογώνιον.

297) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 8, 10, 15 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς 10 μ. ἐπὶ τὴν πλευρὰν 8 μ.

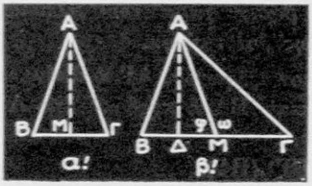
298) Ἐὰν ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, Δ δὲ καὶ Ε εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΒΕ)^2=(ΕΓ)^2+(ΒΓ).(ΔΕ)$.

§ 188. Θεώρημα VI. (Τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων). — *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 128)* τυχὸν τρίγωνον καὶ ΑΜ τυχοῦσα αὐτοῦ διάμεσος. Λέγω ὅτι $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΑΜ)^2+2(ΒΜ)^2$.

Ἀπόδειξις. α') Ἐὰν ΑΒ=ΑΓ, ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπομένως $(ΑΒ)^2=(ΑΜ)^2+(ΒΜ)^2$,

$(ΑΓ)^2=(ΑΜ)^2+(ΜΓ)^2=(ΑΜ)^2+(ΜΒ)^2$, ὅθεν προκύπτει εὐκόλως ὅτι $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΑΜ)^2+2(ΒΜ)^2$. δ. ἔ. δ.



Σχ. 128.

β′) Ἐὰν *(Σχ. 128 β′)* εἶναι $ΑΓ>ΑΒ$ θὰ εἶναι (§ 76) καὶ $ω>φ$· ἐπειδὴ δὲ $ω+φ=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $φ<1$ ὀρθ. καὶ $ω>1$ ὀρθ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ΑΔ, θὰ εἶναι

$(ΑΒ)^2=(ΑΜ)^2+(ΒΜ)^2-2(ΒΜ).(ΜΔ)$

$(ΑΓ)^2=(ΑΜ)^2+(ΜΓ)^2+2(ΜΓ).(ΜΔ)$,

ἐξ ὧν εὐκόλως διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι

$(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΑΜ)^2+2(ΒΜ)^2$. δ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 299) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν διαμέσων τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς 8, 10, 12 μέτρων.

300) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ΑΜ εἶναι διάμεσος καὶ ΑΔ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(ΑΓ)^2-(ΑΒ)^2=2(ΒΓ).(ΜΔ)$.

301) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων.

302) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

303) Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς μιᾶς ἀπὸ τῶν ἄκρων διαμέτρου τῆς ἄλλης εἶναι σταθερόν.

304) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου Α περιφερείας Κ ἀπὸ τῶν ἄκρων χορδῆς παραλλήλου τῇ ΚΑ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

§ 189. Πρόβλημα I.— *Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὕψη καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Λύσις. Ἔστω ὅτι $(ΒΓ)=α$, $(ΑΓ)=β$, $(ΑΒ)=γ$ καὶ ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ ὕψος αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι $(ΑΔ)^2=γ^2-(ΔΒ)^2$. (1)

Ἂν $Β<1$ ὀρθ., θὰ εἶναι $β^2=α^2+γ^2-2α(ΒΔ)$, ὅθεν

$$(ΒΔ)=\frac{α^2+γ^2-β^2}{2α}.$$

Ἂν δὲ $Β>1$ ὀρθ., θὰ εἶναι $β^2=α^2+γ^2+2α\,(ΒΔ)$, ὅθεν

$$(ΒΔ)=\frac{β^2-α^2-γ^2}{2α}=-\frac{α^2+γ^2-β^2}{2α}$$

Εἰς ἀμφοτέρας ἄρα τὰς περιπτώσεις εἶναι $(Β\Delta)^2 = \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$

ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $(Α\Delta)^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$, ὅθεν

$(Α\Delta)^2 = \frac{4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}$. Ἐπειδὴ δὲ

$4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2 = (\alpha+\beta+\gamma)\ (\gamma+\alpha-\beta)\ (\gamma-\alpha+\beta)\ (\beta+\alpha-\gamma)$,

ἕπεται ὅτι $(Α\Delta) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)}$ (2)

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)$, $\alpha+\gamma-\beta=2(\tau-\beta)$ καὶ $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$. ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται $(Α\Delta) = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}$.

Ἂν δὲ θέσωμεν $(Α\Delta)=Υ_\alpha$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$Υ_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $Υ_\beta = \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}$ καὶ

$$Υ_\gamma = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}.$$

Ἤδη πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ Ε, ἀρκεῖ εἰς τὴν γνωστὴν (§ 175) ἰσότητα $Ε = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\ (Α\Delta)$ νὰ θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν (ΒΓ) καὶ ΑΔ. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$Ε = \sqrt{\tau\ (\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}.$$

Ἀσκήσεις. 305) Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ ὕψη καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 4, 5, 7 μέτρων.

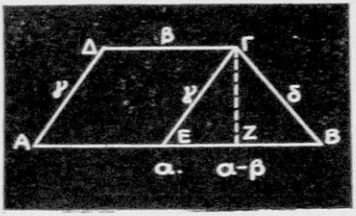
306) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς 51, 68, 85 μέτρων.

307) Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Γ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀκτῖνα τὴν προβολὴν τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τμημάτων ΑΕ καὶ ΑΕ′ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

§ 190. Πρόβλημα ΙΙ. — *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ΑΒΓΔ (Σχ. 129) ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ βάσεις καὶ $(ΑΒ)=\alpha$, $(Γ\Delta)=\beta$, $(Α\Delta)=\gamma$ καὶ $(ΒΓ)=\delta$. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΔ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΕΓΒ, ὅπερ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΖ μετὰ τοῦ τραπεζίου. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς εἶναι (ΓΕ)=γ, (ΕΒ)=α—β καὶ (ΒΓ)=δ, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (2 § 189) εὑρίσκομεν ὅτι

$$(\Gamma Z)=\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sqrt{(\alpha-\beta+\delta+\gamma)(\gamma+\delta-\alpha+\beta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha-\beta+\delta-\gamma)}.$$



Σχ. 129.

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\varkappa,$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\alpha-\beta+\delta+\gamma=2(\varkappa-\beta),$$
$$\gamma+\delta-\alpha+\beta=2(\varkappa-\alpha),$$
$$\alpha-\beta-\delta+\gamma=2(\varkappa-\beta-\delta),$$
καὶ $\alpha-\beta+\delta-\gamma=2(\varkappa-\beta-\gamma)$,

ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(\Gamma Z)=\frac{2}{\alpha-\beta}\sqrt{(\varkappa-\alpha)\ (\varkappa-\beta)\ (\varkappa-\beta-\gamma)\ (\varkappa-\beta-\delta)}.$$

Ἡ ἰσότης ἄρα $E=\dfrac{\alpha+\beta}{2}(\Gamma Z)$ γίνεται

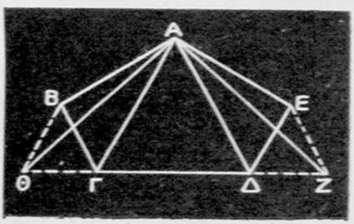
$$E=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{(\varkappa-\alpha)\ (\varkappa-\beta)\ (\varkappa-\beta-\gamma)\ (\varkappa-\beta-\delta)} \qquad (1).$$

Ἀσκήσεις. 308) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, οὗ αἱ βάσεις εἶναι 50 μ. καὶ 28 μ. ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 12 μ.

Κατασκευὴ εὐθ. σχημάτων ἰσοδυνάμων πρὸς ἄλλα δεδομένα εὐθύγραμμα σχήματα.

§ 191. **Πρόβλημα I.** — *Νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. σχῆμα ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν (Σχ. 130).*

Ἀνάλυσις. Ἂν ΑΒΓΔΖ εἶναι τὸ ζητούμενον εὐθ. σχῆμα, θὰ εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔΖ ἰσοδύναμα.



Σχ. 130.

Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΔ, θὰ εἶναι ἰσοϋψῆ. Αἱ κορυφαὶ ἄρα Ε καὶ Ζ αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΕΖ παραλλήλου τῇ ΑΔ.

Σύνθεσις. Ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΔ, ἥτις ἀποχωρίζει τοῦ δοθέντος πολυγώνου τὸ τρίγωνον ΑΕΔ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Ε ἄγομεν εὐθεῖαν ΕΖ παράλληλον τῇ ΑΔ μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἐὰν τέλος φέρωμεν τὴν ΑΖ, σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΖ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι:

Τοῦτο ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν τοῦ ΑΒΓΔΕ καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Διότι ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ ΑΒΓΔ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν ΑΔΕ, ΑΔΖ εἶναι ἰσοδύναμα (§ 175 Πόρ. Ι).

Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ἡ λύσις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

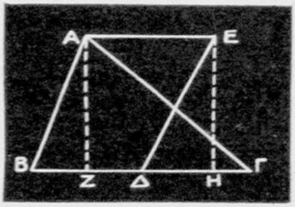
§ 192. Πρόβλημα ΙΙ.— *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 130).*

Ἀσκήσεις. 309) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τετράπλευρον.

310) Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ δεδομένου σημείου μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

§ 193. Πρόβλημα ΙΙΙ.— *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τρίγωνον (Σχ. 131).*

Λύσις. Ἄγομεν ἐκ μὲν τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖαν ΑΕ παράλληλον τῇ ΒΓ, ἐκ δὲ τοῦ μέσου Δ τῆς πλευρᾶς ταύτης παράλληλον τῇ ΑΒ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ. Ἄγοντες ἤδη ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Ε καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΗΕ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 131.

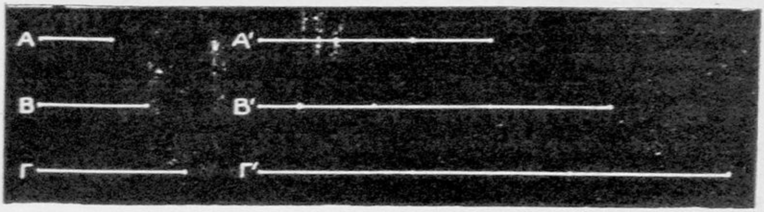
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Ποσὰ ἀνάλογα.

§ 194. Ποσὰ ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα.—Ἔστωσαν Α, Β, Γ *(Σχ. 132)* τυχόντα εὐθ. τμήματα καὶ Α'=Α.3, Β'=Β.3 καὶ Γ'=Γ.3. Τὰ εὐθ. τμήματα Α', Β', Γ' καλοῦνται ἀνάλογα πρὸς τὰ Α, Β, Γ.

Γενικῶς: Ἂν $\Pi' = \Pi.\lambda$, $P' = P.\lambda$, $\Sigma' = \Sigma.\lambda$. (1), ἔνθα λ εἶναι τυχὸν ἀριθμός, τὰ ποσὰ Π′, Ρ′, Σ′ καλοῦνται ἀνάλογα πρὸς τὰ Π, Ρ, Σ.

Ὥστε: *Ποσά τινα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα καὶ ὁμοειδῆ, ἂν γίνωνται ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*



Σχ. 132.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $\Pi = \Pi'.\frac{1}{\lambda}$, $P = P'.\frac{1}{\lambda}$, $\Sigma = \Sigma'.\frac{1}{\lambda}$ (2)

ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ποσὰ Π, Ρ, Σ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Π′, Ρ′, Σ′. Τὰ ἐξ ἀλλήλων διὰ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντα ποσὰ (π.χ. Π καὶ Π′, Ρ καὶ Ρ′, Σ καὶ Σ′) καλοῦνται ὁμόλογα ἢ *ἀντίστοιχα* ποσά.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\Pi' : \Pi = \lambda$, $P' : P = \lambda$ καὶ $\Sigma' : \Sigma = \lambda$, ὅθεν καὶ $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{P'}{P} = \frac{\Sigma'}{\Sigma}$ (3)

Ἀντιστρόφως. Ἂν οἱ λόγοι (3) εἶναι ἴσοι, κληθῇ δὲ λ ἕκαστος τούτων, συνάγεται εὐκόλως ὅτι $\Pi' = \Pi\lambda$, $P' = P\lambda$, $\Sigma' = \Sigma\lambda$.

Ἄρα: *Ἂν ποσά τινα εἶναι ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ποσῶν εἶναι ὁ αὐτός· καὶ ἀντιστρόφως.*

Διὰ τοῦτο, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ Π′, Ρ′, Σ′ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Π, Ρ, Σ μεταχειριζόμεθα ἀδιαφόρως τὰς ἰσότητας (1) ἢ (3).

§ 195. Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.—*Ἀναλογία καλεῖται ἰσότης δύο λόγων.* Οὕτως ἡ ἰσότης $A : B = \Gamma : \Delta$ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶναι ἀναλογία. Οἱ ὅροι τῶν λόγων, οἵτινες συνιστῶσιν ἀναλογίαν τινά, καλοῦνται καὶ *ὅροι τῆς ἀναλογίας.*

Τούτων οἱ *ἡγούμενοι* τῶν δύο λόγων καλοῦνται καὶ *ἡγούμενοι τῆς ἀναλογίας* ὅροι, οἱ δὲ ἑπόμενοι τῶν λόγων ὅρων καλοῦνται καὶ τῆς ἀναλογίας *ἑπόμενοι* ὅροι.

Ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος ὅρος καλοῦνται *ἄκροι*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος καλοῦνται *μέσοι ὅροι* τῆς ἀναλογίας.

ΣΗΜ. Οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου ἀναλογίας εἶναι προφανῶς ποσὰ ὁμοειδῆ πρὸς ἄλληλα. Δύνανται δὲ νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου λόγου.

Συνεχὴς ἀναλογία καλεῖται πᾶσα ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι.

Ὁ μέσος ὅρος συνεχοῦς ἀναλογίας καλεῖται *μέσος ἀνάλογος* τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς. Οὕτως ἡ ἀναλογία Π : Μ = Μ : Ρ εἶναι συνεχής, ὁ δὲ ὅρος Μ αὐτῆς καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων Π καὶ Ρ.

Αἱ ἀναλογίαι ἔχουσι διαφόρους ἰδιότητας, ἐξ ὧν ἀναφέρομεν τὰς ἀκολούθους.

§ 196. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν τέσσαρα ποσὰ συνιστῶσιν ἀναλογίαν καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν συνιστῶσιν ἀντίστοιχον ἀναλογίαν, ἀρκεῖ οἱ ὅροι ἑκατέρου λόγου νὰ μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἐπειδὴ Α : Β = (Α) : (Β) καὶ Γ : Δ = (Γ) : (Δ) (§164 Πόρ. Ι), εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν Α : Β = Γ : Δ, θὰ εἶναι καὶ (Α) : (Β) = (Γ) : (Δ) καὶ ἀντιστρόφως.

§ 197. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν τέσσαρα ὁμοειδῆ ποσὰ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μέσων ὅρων, ἀρκεῖ πάντες οἱ ὅροι νὰ μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἐὰν τῆς ἀναλογίας Α : Β = Γ : Δ, οἱ ὅροι εἶναι πάντες ὁμοειδεῖς, θὰ εἶναι (Α).(Δ) = (Β).(Γ).

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἐπειδὴ Α:Β=Γ:Δ, εἶναι καὶ (Α) : (Β) = (Γ) : (Δ) ἢ $\frac{(\mathrm{A})}{(\mathrm{B})}=\frac{(\Gamma)}{(\Delta)}$. Ἐὰν δὲ ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς προκύπτει ὅτι (Α).(Δ) = (Β).(Γ). ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἂν εἶναι (Α).(Δ) = (Β).(Γ) καὶ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ γινομένου (Β).(Δ), προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{(\mathrm{A})}{(\mathrm{B})}=\frac{(\Gamma)}{(\Delta)}$, ἄρα καὶ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\Gamma}{\Delta}$, ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν οἱ ὅροι ἀναλογίας εἶναι ὁμοειδεῖς, δυνάμεθα νὰ ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ὅρους αὐτῆς.* Ἂν Α : Β = Γ : Δ, ἕπεται ὅτι (Α).(Δ) = (Β).(Γ), ὅθεν $\frac{(\mathrm{A})}{(\Gamma)}=\frac{(\mathrm{B})}{(\Delta)}$, ἄρα καὶ

$$\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}=\frac{\mathrm{B}}{\Delta}.$$

Πόρισμα II.—*Ἐὰν τέσσαρα εὐθ. τμήματα συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων.*

Πόρισμα III.—*Ἐὰν τρία εὐθ. τμήματα συνιστῶσι συνεχῆ ἀναλογίαν, τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων.*

Ἀσκήσεις. 311) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δεδομένων εὐθ. τμημάτων.

Ποσὰ ἀναλόγως μεταβαλλόμενα.

§ 198. Συμμεταβλητὰ ποσά.—Ἀνάλογα ποσά.—*Δύο ποσὰ λέγονται συμμεταβλητά, ἂν μεταβαλλομένου τοῦ ἑνὸς μεταβάλληται καὶ τὸ ἄλλο.* Π.χ. ἡ πλευρὰ καὶ ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι ποσὰ συμμεταβλητά.

Οἱ τρόποι τῆς ἐξ ἀλλήλων ἐξαρτήσεως τῶν συμμεταβλητῶν ποσῶν εἶναι ποικιλώτατοι· ἐκ τούτων ἀξιοσημείωτος καὶ ἁπλούστερος εἶναι ἐκεῖνος, καθ' ὃν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμὸν καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Τοιαύτη π.χ. εἶναι ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἐξάρτησις τῆς πλευρᾶς α καὶ τῆς περιμέτρου Π ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τῷ ὄντι, ἂν $α=2$, θὰ εἶναι $Π=6$, ἂν $α=4$, θὰ εἶναι $Π=12$ κ.τ.λ. Τὰ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀπ' ἀλλήλων ἐξαρτώμενα συμμεταβλητὰ ποσὰ καλοῦνται *ἀνάλογα ποσὰ* ἢ ποσὰ *ἀναλόγως μεταβαλλόμενα.*

Ὥστε: *Δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα ἢ ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἂν πολαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμὸν καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Τὰ ἀνάλογα ποσὰ ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 199. Θεώρημα I.—*Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο ποσά, τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται ἀναλόγως, Α δὲ καὶ Α′ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Π, καὶ Β, Β′ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Ρ. Λέγω ὅτι $A':A=B':B$.

Ἀπόδειξις. Ἂν κληθῇ λ ὁ λόγος $A':A$, θὰ εἶναι $A'=A.λ$, ἤτοι ἡ τιμὴ Α πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ λ καθίσταται Α′· ἀλλ' ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἕπεται ὅτι ἡ πρὸς τὴν Α′ ἀντίστοιχος τιμὴ Β′ γίνεται ἐκ τῆς Β, ἂν αὕτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ, ἤτοι $B'=B.\lambda$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $B' : B=\lambda$. Ἄρα $A' : A=B' : B$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἂν $A' : A=B' : B$, κληθῇ δὲ λ ἕκαστος τῶν λόγων τούτων, προκύπτει εὐκόλως ὅτι $A'=A.\lambda$ καὶ $B'=B.\lambda$. Ἄρα πολλαπλασιαζομένης τιμῆς τινος Α τοῦ Π ἐπὶ λ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ Β τοῦ Ρ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν ἑκατέρου τῶν ποσῶν τούτων, ἕπεται ὅτι ταῦτα μεταβάλλονται ἀναλόγως. ὅ. ἔ. δ.

§ 200. Θεώρημα II.—*Ἐὰν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν εἶναι σταθερός. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο ἀνάλογα καὶ ὁμοειδῆ ποσά, $A', A'', A'''...$ τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ Π, καὶ $B', B'', B'''....$ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ Ρ. Λέγω ὅτι $A : B=A' : B'=A'' : B''=...$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μεταβάλλονται ἀναλόγως, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι $A : A'=B : B'$, $A : A''=B : B''...$ Ἐὰν δὲ ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ὅρους ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν τούτων, προκύπτουσιν αἱ ἀναλογίαι $A : B=A' : B'$, $A : B=A'' : B''$,,.. ὅθεν ἕπεται $A : B=A' : B'=A'' : B''...$ ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἂν εἶναι $A : B=A' : B'=A'' : B''...$ ἀντιμετατεθῶσι δὲ οἱ μέσοι ὅροι ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν $A : B=A' : B'$, $A : B=A'' : B''$, προκύπτουσιν αἱ ἀναλογίαι $A : A'=B : B'$, $A : A''=B : B''$, ἄρα (§ 199 ἀντ.) τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

§ 201. Θεώρημα III.— *Ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑτέρου δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ τὸ ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, τὰ ποσὰ ταῦτα μεταβάλλονται ἀναλόγως.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ καὶ α, β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὰς τιμὰς $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4.....$ τοῦ Π ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ $\beta.2$, $\beta.3$, $\beta.4....$ τοῦ Ρ. Λέγω ὅτι τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔστω ὅτι εἰς τὴν $\alpha.\frac{1}{\lambda}$ (ἔνθα λ ἀκέραιος) τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ χ τοῦ Ρ. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὴν τιμὴν $\left(\alpha.\frac{1}{\lambda}\right).\lambda$ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\chi\lambda$ τοῦ Ρ. Ἐπειδὴ δὲ $\left(\alpha.\frac{1}{\lambda}\right).\lambda=\alpha$, εἰς δὲ τὴν τιμὴν α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ β, ἕπεται ὅτι $\chi.\lambda$

$=6$, ἄρα $\chi=6.\frac{1}{\lambda}$. Ὥστε εἰς τὴν τιμὴν $\alpha.\frac{1}{\lambda}$ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $6.\frac{1}{\lambda}$ τοῦ Ρ.

β') Ἔστω α.3,147 τιμή τις τοῦ Π καὶ ζητήσωμεν τὴν εἰς ταύτην ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ Ρ. Καθ' ἃ προηγουμένως ἀπεδείχθη εἰς τὴν τιμὴν $\alpha.\frac{1}{1000}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $6.\frac{1}{1000}$· κατὰ δὲ τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὴν τιμὴν $\left(\alpha.\frac{1}{1000}\right)3147=\alpha.3,147$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\left(6.\frac{1}{1000}\right)3147=6.3,147$.

γ') Ἔστω ἔτι α.2,304314324... τιμή τις τοῦ Π· λέγω ὅτι ἡ εἰς ταύτην ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ Ρ εἶναι 6.2,304314324...

Καὶ ὄντως	εἰς τὴν τιμὴν	α.2	ἀντιστοιχεῖ	ἡ	τιμὴ	6.2
»	»	α.2,3	»	»	»	6.2,3
»	»	α.2,304	»	»	»	6.2,304
»	»	α.2.3043	»	»	»	6.3,2043

καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω. Ἄρα εἰς τὴν τιμὴν α.2,304314324... ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ 6.2,304314324...

Ὥστε, ἂν ν εἶναι τυχὸν ἀριθμὸς καὶ α, 6 δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν εἰρημένων ποσῶν, αἱ τιμαὶ α.ν καὶ 6.ν θὰ εἶναι ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν αὐτῶν ποσῶν. Τὰ ποσὰ ἄρα (§ 199) Π καὶ Ρ μεταβάλλονται ἀναλόγως. ὅ. ἔ. δ.

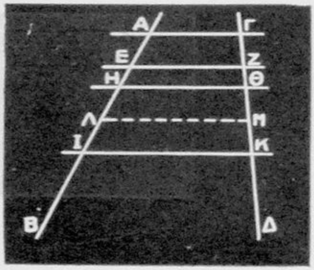
Κατὰ ταῦτα, ἵνα βεβαιωθῶμεν ὅτι δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Ἀνάλογα εὐθ. τμήματα.

§ 202. Θεώρημα Ι. Τοῦ Θαλοῦ).—*Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.*

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι *(Σχ. 133)* τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ κλπ. Λέγω ὅτι τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΕ.2=ΗΙ καὶ ὅτι Λ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΗΙ, ὅτε ΑΕ=ΗΛ=ΛΙ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Λ ἀχθῇ ἡ ΛΜ παράλληλος τῇ ΑΓ, ἐπειδὴ ΑΕ=ΗΛ=ΛΙ, θὰ εἶναι καὶ ΓΖ=ΘΜ=ΜΚ καὶ ἐπομένως ΘΚ = ΓΖ.2 Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τμῆμα τριπλάσιον τοῦ ΑΕ ἀντιστοιχεῖ τμῆμα τῆς ΓΔ τριπλάσιον τοῦ ΓΖ κτλ. Ἄρα (§ 201) τὰ ἀντίστοιχα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τμήματα μεταβάλλονται ἀναλόγως. ὅ. ἔ. δ.

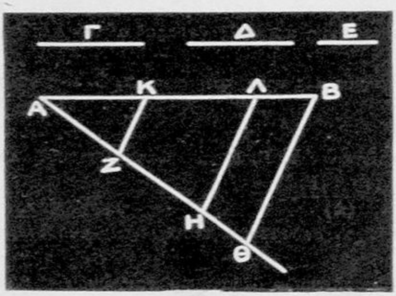


Σχ. 133.

Πόρισμα I. — *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ὑπ᾿ αὐτῶν ὁριζόμενα τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.*

Πόρισμα II — *Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρός τινα πλευρὰν τριγώνου τέμνῃ τὰς ἄλλας αὐτοῦ πλευράς, τὰ τμήματα, εἰς ἃ ἡ μία τούτων διαιρεῖται εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.*

Πόρισμα III. — (Ἀντ. τοῦ II). *Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ δύο πλευρὰς τριγώνου, τὰ δὲ τμήματα τῆς μιᾶς τούτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου τούτου.*

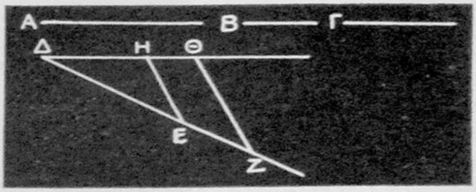


Σχ. 134.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου (§ 202) Θεωρήματος ἕπεται εὐκόλως ἡ λύσις τῶν ἀκολούθων προβλημάτων.

§ 203. Πρόβλημα I. —*Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς ἄλλα δοθέντα εὐθ. τμήματα Γ, Δ, Ε (Σχ. 134).*

§ 204. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος δοθέντων εὐθ. τμημάτων Α, Β, Γ (Σχ. 135).*



Σχ. 135.

Ἀσκήσεις. 312) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἄν ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρός τινα πλευρὰν αὐτοῦ, διαιρεῖ ἑκατέραν τῶν ἄλλων εἰς τμήματα ἔχοντα λόγον 2.

313) Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ρ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΗ : ΑΖ = ΑΒ : ΑΓ$.

314) Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, εἰς ἃ τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

315) Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ΒΕ διαιρεῖ τὴν ΑΓ εἰς λόγον 1 : 2.

316) Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον εὐθ. τμῆμα εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον ἴσον πρὸς $^2/_3$.

317) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4.

318) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δεδομένην ὑποτείνουσαν, ἡ δὲ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς ἀντικειμένης κορυφῆς διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μέρη ἔχοντα λόγον $^3/_5$.

319) Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον εὐθ. τμῆμα εἰς τρία τμήματα Α, Β, Γ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι $\frac{Α}{2} = \frac{Β}{3} = \frac{Γ}{5}$.

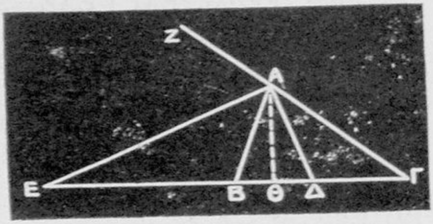
320) Δεδομένων τριῶν εὐθ. τμημάτων Α, Γ, Β νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(χ) = \frac{(Β) \times (Γ)}{(Α)}$.

321) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἔχον δεδομένην βάσιν καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δεδομένον ὀρθογώνιον.

322) Διὰ δεδομένου σημείου μιᾶς τῶν πλευρῶν δεδομένου τριγώνου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα χωρίζουσα ἀπ' αὐτοῦ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δεδομένον τρίγωνον.

§ 205. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς εἰς ταῦτα προσκειμένας πλευρὰς αὐτῆς. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Λέγω ὅτι $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}$.



Σχ. 136.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην. Εἶναι ἄρα (§ 176) $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΔΓ})}=\frac{(\text{ΑΒ})\times(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΔ})\times(\text{ΑΓ})}$, ὅθεν $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΓ})}$. (1)

Ἀφ᾿ ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ τὰ ῥηθέντα τρίγωνα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ, εἶναι $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΔΓ})}=\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΔΓ})}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΔΓ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΓ})}$, ὅθεν δι᾿ ἀντιμεταθέσεως τῶν μέσων ὅρων προκύπτει ὅτι $\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΑΒ})}=\frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΓ})}$ ἢ $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΔ}}$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}$, ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν Α. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει ὅτι $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$. Ἂν δὲ ἡ διχοτόμος τῆς Α ἔτεμνε τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Δ′, θὰ ἦτο $\frac{\text{ΒΔ}'}{\text{Δ}'\text{Γ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἕπεται ὅτι $\frac{\text{ΒΔ}'}{\text{Δ}'\text{Γ}}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}$ ἢ $\frac{(\text{ΒΔ}')}{(\text{Δ}'\text{Γ})}=\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΔΓ})}$. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν 1 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{Δ}'\text{Γ})}=\frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΔΓ})}$, ὅθεν $(\text{Δ}'\text{Γ})=(\text{ΔΓ})$. Ἄρα τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ συμπίπτουσιν καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν διχοτόμος τῆς Α εἶναι ἡ ΑΔ. ὅ.ἔ.δ.

§ 206. Θεώρημα III.—*Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευράν, αἱ ἀποστάσεις τῆς τομῆς ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων γωνιῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου τούτου καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω ΑΕ ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΖΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 136)*. Λέγω ὅτι $\frac{ΕΒ}{ΑΒ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $Ε\hat{Α}Γ+Ε\hat{Α}Ζ=2$ ὀρθ. καὶ $Ε\hat{Α}Ζ=Ε\hat{Α}Β$ ἕπεται ὅτι

$Ε\hat{Α}Γ+Ε\hat{Α}Β=2$ ὀρθ. ἄρα (§ 176) $\frac{(ΕΑΒ)}{(ΕΑΓ)}=\frac{(ΑΕ)(ΑΒ)}{(ΑΕ)(ΑΓ)}$, ὅθεν

$$\frac{(ΑΑΒ)}{(ΕΑΓ)}=\frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι $\frac{(ΕΑΒ)}{(ΕΑΓ)}=\frac{(ΕΒ)}{(ΕΓ)}$. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\frac{ΕΒ}{ΑΒ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$. ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{ΕΒ}{ΑΒ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$, ἡ εὐθεῖα ΑΕ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΖΑΒ.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὴν τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἀσκήσεις. 323) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 8 μ, 10 μ, 12 μ. Νὰ ὁρισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς ἃ ἡ πλευρὰ 10 διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

324) Νὰ ὑπολογισθῶσι συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς ἃ ἑκάστη διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

325) Ἐὰν ἐν τριγώνῳ εἶναι $2α=β+γ$, νὰ ὁρισθῶσι συναρτήσει τῶν πλευρῶν β, γ, τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ α ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

326) Ἐὰν ΑΔ εἶναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ καὶ αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΑΔΓ τέμνωσιν ἡ μὲν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε, ἡ δὲ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

327) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 8 μ, 10 μ, 12 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς 10 μ ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ αὕτη προεκτεινομένη τέμνεται ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν.

328) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων, εἰς ἃ ἡ πλευρὰ 12 μ τοῦ προηγουμένου τριγώνου τέμνεται ὑπὸ τῶν διχοτομουσῶν τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου τούτου.

Ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας.

§ 207. Ἁρμονικὰ συζυγῆ σημεῖα, ἁρμονικὴ σημειοσειρά.—Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 136)* τυχὸν τρίγωνον, ΑΔ καὶ ΑΕ αἱ αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α τέμνουσαι τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐκ τῶν γνωστῶν (§ 205 206) ἰσοτήτων $\frac{\Delta B}{AB}=\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma}$, $\frac{EB}{AB}=\frac{E\Gamma}{A\Gamma}$ ἕπεται ὅτι

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma},\quad \frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma},\quad \text{ὅθεν}\quad \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{EB}{E\Gamma} \qquad (1)$$

Ὁ λόγος λοιπὸν τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ ἰσοῦ- πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ε ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β καὶ Γ.

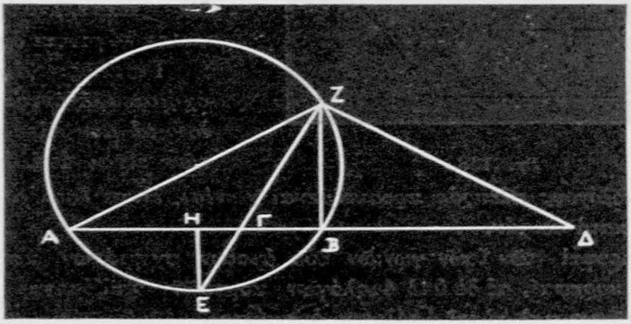
Τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην, λέγονται *ἁρμονικὰ συζυγῆ* ἀλλήλων πρὸς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ λέγομεν ὅτι διαιρεῖται *ἁρμονικῶς* ὑπὸ τῶν σημείων Δ καὶ Ε.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{B\Delta}{BE}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Β, Γ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ ἀλλήλων πρὸς τὰ Δ καὶ Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΔΕ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Β, Γ.

Τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε ἀποτελοῦσιν ἐν τῇ τοιαύτῃ αὐτῶν θέσει *ἁρμονικὴν σημειοσειράν*.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς προηγουμένας (§ 205, 206) ἰδιότητας λύομεν εὐκόλως τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

§ 208. Πρόβλημα Ι. — *Δοθέντων ἐπ' εὐθείας τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ ὁρισθῇ τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Γ πρὸς τὰ δύο ἄλλα.*



Σχ. 137.

Πρέπει νὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ Γ δὲν κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β (§ 203) ἢ κεῖται μεταξὺ αὐτῶν *(Σχ. 137)*

Κατὰ τὴν β' περίπτωσιν ἡ ΖΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον ΖΓΕ τῆς γωνίας Ζ τριγώνου ΑΖΒ, οὗ ἡ κατασκευὴ εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ Γ εἶναι μέσον τοῦ ΑΒ, ἡ ΖΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, τὸ δὲ Δ ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἀσκήσεις. 329) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ΑΒ ἔχει ἓν ἁρμονικὸν συζυγὲς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

330) Ἐὰν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς ἄλλα Α καὶ Β, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀδύνατον νὰ περιέχωνται ἀμφότερα μεταξὺ Α καὶ Β, οὐδὲ ἀμφότερα τὰ Α καὶ Β μεταξὺ Γ καὶ Δ.

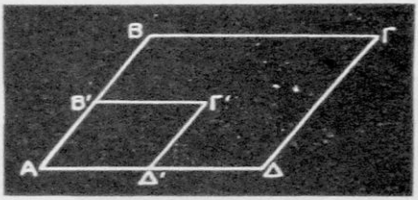
331) Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Γ, Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς Α καὶ Β, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΟΑ)^2=(ΟΓ)(ΟΔ)$.

332) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ πρὸς Α καὶ Β ἁρμονικὰ συζυγῆ σημεῖα κεῖνται ἀμφότερα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου τοῦ ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα.

§ 209. Ὁρισμὸς ὁμοίων εὐθ. σχημάτων. — Ἔστωσαν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒ'Γ'Δ' ἐν οἷς ΑΒ=ΑΒ'.2, ΑΔ=ΑΔ'.2. Προφανῶς αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒ'Γ'Δ', αἱ δὲ εἰς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς προσκείμεναι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν καὶ κατὰ σειράν. Τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα λέγονται ὅμοια.



Σχ. 138.

Γενικῶς: *Δύο εὐθ. σχήματα λέγονται ὅμοια, ἐὰν αἱ μὲν πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι, αἱ δὲ εἰς ὁμολόγους πλευρὰς προσκείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μία πρὸς μία καὶ κατὰ σειράν.*

Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν δύο ὁμοίων σχημάτων καλοῦνται *ὁμόλογοι κορυφαί*, αἱ δὲ ὑπὸ ὁμολόγων κορυφῶν ὁριζόμεναι διαγώνιοι καλοῦνται καὶ αὐταὶ *ὁμόλογοι διαγώνιοι*.

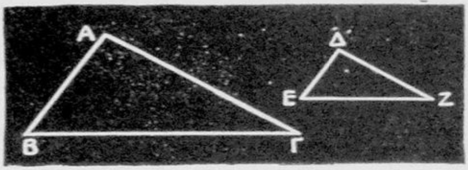
Αἱ διάμεσοι καὶ τὰ ὕψη ὁμοίων τριγώνων, ἅτινα ἄγονται ἐξ ὁμολόγων κορυφῶν αὐτῶν καλοῦνται *ὁμόλογοι διάμεσοι* καὶ *ὁμόλογα ὕψη*. Ὁμοίως αἱ τῶν ἴσων γωνιῶν ὁμοίων τριγώνων διχοτόμοι καλοῦνται *ὁμόλογοι διχοτόμοι*. Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ὁμοίων σχημάτων καλεῖται *λόγος ὁμοιότητος* τῶν σχημάτων τούτων.

Περιπτώσεις ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

§ 210. Θεώρημα I. — *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, εἶναι ὅμοια.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (*Σχ. 139*) ἔχοντα $Α=Δ$ $Β=Ε$ καὶ $Γ=Ζ$ (1).

Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



(Σχ. 39)

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $Α=Δ$, ἔπεται ὅτι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{(ΑΒ)\times(ΑΓ)}{(ΔΕ)\times(ΔΖ)}$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $Β=Ε$, ἔπεται ὅτι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{(ΑΒ)\times(ΒΓ)}{(ΔΕ)\times(ΕΖ)}$ (§ 176)

καὶ ἐπειδὴ $Γ=Ζ$ » » $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{(ΑΓ)\times(ΒΓ)}{(ΔΖ)\times(ΕΖ)}$. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι $\frac{(ΑΒ)\times(ΑΓ)}{(ΔΕ)\times(ΔΖ)}=\frac{(ΑΒ)\times(ΒΓ)}{(ΔΕ)\times(ΕΖ)}=\frac{(ΑΓ)\times(ΒΓ)}{(ΔΖ)\times(ΕΖ)}$ ἢ

$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}\cdot\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}=\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}\cdot\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}=\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}\cdot\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸ μὲν α′ καὶ γ′ τῶν γινομένων τούτων διὰ τοῦ λόγου $\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}$, τὸ δὲ β′ καὶ γ′ διὰ τοῦ $\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$. Ἐκ τούτων καὶ τῶν (1) ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ εἶνε αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Πόρισμα I. — *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ὅμοια.*

Ἀσκήσεις. 333) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην εἶναι ὅμοια.

334) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πάντοτε ὅμοια;

335) Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη Α ΔΕ, ΕΒ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τι σ μεῖον Ζ, θὰ εἶναι $AZ = \frac{A\Gamma}{3}$ καὶ $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{3}$.

336) Τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ ἔχουσιν ἀντιστοίχως μήκη 9 10μ, 15μ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ ἔχον μῆκος 4μ καὶ ΑΕ ἔχ μῆκος 7μ, ἐκ δὲ τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΒΓ. Νὰ ὑπο λογισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ἡ ΑΓ καὶ τὰ μήκη τῶ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τμημάτων τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν.

337) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουσ μήκη 3μ ἡ μὲν καὶ 4μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ τριγώνου ΔΕΖ, οὗ ἡ ὀξεῖα γωνία Ε ἰσοῦται τῇ Β καὶ ἡ κάθετος πλευρὰ Δ ἔχει μῆκος 6μ.

338) Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τραπεζίου διαιρεῖ ἑκατέραν εἰ τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.

339) Τὰ ὁμόλογα ὕψη δύο ὁμοίων τριγώνων διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἕν, ὁ δὲ λόγος τῶν ὑψῶν τούτων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς ὁμοιότη τος αὐτῶν.

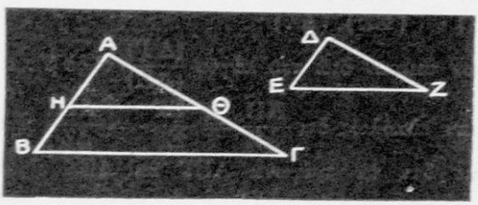
340) Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἴσα ὕψη, ἀχθῇ δὲ ἐντὸς αὐτῶν παράλληλος τῇ ΒΓ, τὰ ἐντὸς τῶν τριγώνων περιε-χόμενα μέρη ταύτης εἶναι ἴσα.

§ 211. Θεώρημα II. — *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.*

Ἐὰν δηλ. $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ (1), τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $AH = \Delta E$ καὶ ἄγομεν τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ἔπεται ὅτι

$$\frac{AB}{AH} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}.$$



Σχ. 140.

Ἐπειδὴ $AH = \Delta E$, ἔπεται ὅτι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}$. Ἐκ τούτων καὶ τῶν ἰσοτήτων (1) συνάγεται ὅτι $H\Theta = EZ$ καὶ $A\Theta = \Delta Z$, εἶναι δὲ καὶ $AH = \Delta E$. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, κατ' ἀκολουθίαν $A = \Delta$, $H = E$ καὶ $\Theta = Z$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $H=B$ καὶ $\Theta=\Gamma$, ἕπεται ὅτι $B=E$ καὶ $\Gamma=Z$, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσιν τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· εἶναι ἄρα ὅμοια. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι, ὅτι ἴσαι γωνίαι εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων συνάγεται ὅτι ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων συνεπάγεται καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ τοιοῦτον δὲν συμβαίνει εἰς τὰ ἄλλα εὐθ. σχήματα. Οὕτω τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, χωρὶς νὰ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· ρόμβος καὶ τετράγωνον ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους χωρὶς νὰ ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας.

Πόρισμα Ι.—*Τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι πάντα ὅμοια.*

Ἀσκήσεις. 341) Τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου, εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτό.

342) Ἐὰν τὰ ὕψη τριγώνου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη ἄλλου τριγώνου, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ἀντιστρόφως.

343) Ἐὰν δύο ὀρθ. τρίγωνα εἶναι ὅμοια, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ὁμολόγων καθέτων πλευρῶν.

§ 212. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων εἶναι ὅμοια.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 140)* καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι $A=\Delta$ καὶ $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. (1).

Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΗ ἴσον τῇ ὁμολόγῳ πλευρᾷ ΔΕ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Η τὴν ΘΗ παράλληλον τῇ ΒΓ. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ εἶναι $\frac{AB}{AH}=\frac{A\Gamma}{A\Theta}$ ὅθεν $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{A\Theta}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) συμπεραίνομεν ὅτι $A\Theta=\Delta Z$· τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν $H=E$ καὶ $\Theta=Z$.

Ἐπειδὴ δὲ $H=B$ καὶ $\Theta=\Gamma$, ἕπεται ὅτι $B=E$ καὶ $\Gamma=Z$, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι πάσας τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἄρα ὅμοια. ὅ. ἔ. δ.

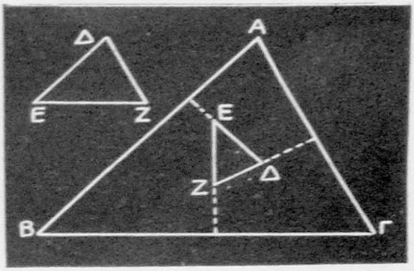
Ἀσκήσεις. 344) Ἐὰν δύο ὀρθ. τρίγωνα ἔχωσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

345) Αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι δύο ὁμοίων τριγώνων διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἕν.

346) Ἐκ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ αἱ κάθετοι ΔΕ καὶ ΔΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

347) Ἐὰν δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ Α καὶ Α΄ συμπίπτωσι, τὰ τρίγωνα ΒΑΒ΄ καὶ ΓΑΓ΄ εἶναι ὅμοια.

§ 213. Θεώρημα VI.—*Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.*



Σχ. 141.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (*Σχ. 141*) ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι, μία πρὸς μίαν, ἤτοι ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ δύο γωνίαι, ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι περὶ τῶν γωνιῶν τῶν ῥηθέντων τριγώνων αἱ ἀκόλουθοι τρεῖς ὑποθέσεις μόνον εἶναι δυναταί.

Ἢ $Α+Δ=2$ ὀρθ., $Β+Ε=2$ ὀρθ. καὶ $Γ+Ζ=2$ ὀρθ.
ἢ $Α=Δ$ $Β+Ε=2$ ὀρθ. καὶ $Γ+Ζ=2$ ὀρθ.
ἢ $Α=Δ$ $Β=Ε$ ὅτε καὶ $Γ=Ζ$.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἰσότητες ἑκατέρας τῶν δύο πρώτων σειρῶν εἶναι ἀδύνατον νὰ συναληθεύωσιν, ἕπεται ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες τῆς γ΄ σειρᾶς καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

ΣΗΜ. Παρατηροῦντες ὅτι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν κεῖνται παράλληλοι ἢ κάθετοι πλευραὶ συμπεραίνομεν ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτῶν.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων.

§ 214. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε΄ τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου Κ ἀρχομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια ἓν πρὸς ἓν πρὸς τὰ ΚΑ′Β′, ΚΒ′Γ′, ΚΓ′Δ′, ἕπεται ὅτι

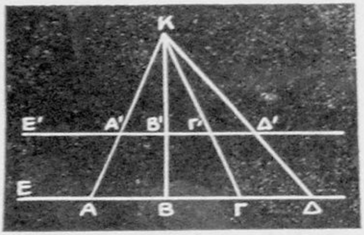
$$\frac{KA}{KA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{KB}{KB'},\quad \frac{KB}{KB'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{K\Gamma}{K\Gamma'},\quad \frac{K\Gamma}{K\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{K\Delta}{K\Delta'},$$

ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Ε ληφθῶσι τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐπὶ τῆς Ε′ ἕτερα σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta}=\ldots\neq 1,$$

αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′,.... διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



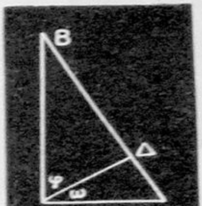
Σχ. 142.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ, διότι ἄλλως θὰ ἦτο $\frac{AB}{A'B'}=1$, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν δὲ παρασταθῇ διὰ τοῦ Γ‴ τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ ΚΓ′ τέμνει τὴν Ε, ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι ΒΓ=ΒΓ‴· ἄρα τὸ Γ‴ συμπίπτει μετὰ τοῦ Γ.

Ἀσκήσεις. 348) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν ἐντὸς τριγώνου καὶ παραλλήλων πρός τινα πλευρὰν αὐτοῦ εὐθ. τμημάτων.

349) Ἡ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βάσεων τραπεζίου ὁριζομένη εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

350) Νὰ ἀχθῇ χορδὴ διαιρουμένη εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ δύο δεδομένων ἀκτίνων τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



Εἰκ. 143.

§ 215. Θεώρημα ΙΙ. — *Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς αὐτό.*

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ ἔχοντα $A\hat{\Delta}B=B\hat{A}\Gamma$ καὶ τὴν Β κοινὴν ἔχουσι καὶ φ=Γ· ἄρα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης τὰ ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ ἔχοντα $\widehat{\text{ΑΔΓ}}=\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ καὶ τὴ Γ κοινὴν ἔχουσιν ω=Β· ἄρα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῶν ἰσοτήτω τέλος $\widehat{\text{ΑΔΒ}}=\widehat{\text{ΑΔΓ}}$, φ=Γ καὶ Β=ω, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα I.—*Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνο εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπ τὴν ὑποτείνουσαν.*

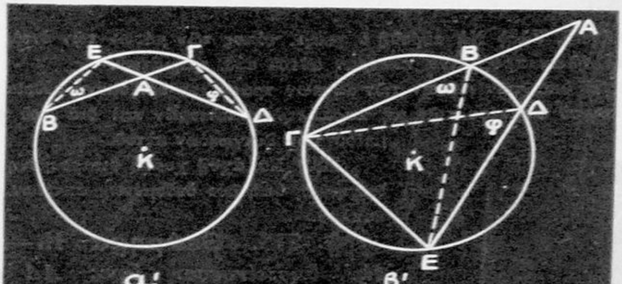
Πόρισμα II.—*Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων, εἰς ἃ τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Ἀσκήσεις. 351) Νὰ ἀποδειχθῶσι διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων τὰ θεωρήματα (§ 180, 182, 185).

352) Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦται ἐπ' αὐτὴν κάθετος τέμνουσα τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς σημεῖα Ζ καὶ Η, τὴν δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἡμιπεριφέρειαν, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ κορυφὴ Α εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\text{ΔΕ})^2=(\text{ΔΖ})\,(\text{ΔΗ})$.

353) Ἂν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς διαμέτρων γραφῶσιν ἡμιπεριφέρειαι τέμνουσαι ἡ μὲν α′ τὸ ὕψος ΓΕ εἴς τι σημεῖον Ζ, ἡ δὲ β′ τὸ ὕψος ΑΔ εἴς τι σημεῖον Η, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΖ=ΒΗ.

§ 216. Θεώρημα III.—*Ἐὰν ἐκ σημείου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι περιφέρειαν (Σχ. 144) ἢ τέμνουσα καὶ ἐφα-*



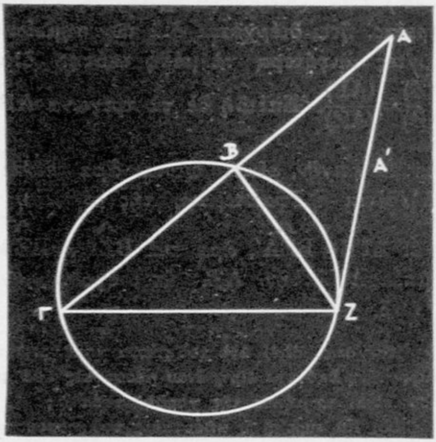
Σχ. 144.

πτομένη (Σχ. 145), τὰ ὀρθογώνια τῶν ἐπὶ ἑκατέρας ὁριζομένων ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῶν κοινῶν *σημείων αὐτῶν καὶ τῆς περιφερείας εἶναι ἰσοδύναμα. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἂν δηλ. μία τῶν διὰ τοῦ σημείου Α ἀγομένων εὐθειῶν τέμνῃ περιφέρειαν Κ εἰς τὰ Β, Γ, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὰ Δ, Ε, θὰ εἶναι

$(ΑΒ)(ΑΓ)=(ΑΔ)(ΑΕ)$

Ἂν δὲ *(Σχ. 145)* ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΒΓ τέμνουσα περιφέρειαν εἰς τὰ Β, Γ καὶ ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι $(ΑΖ)^2=(ΑΒ)(ΑΓ)$.



Σχ. 145.

Ἀπόδειξις. α') Ἐπειδὴ $Α\widehat{Γ}Δ=Α\widehat{Ε}Β$ καὶ $Γ\widehat{Α}Δ=Β\widehat{Α}Ε$, τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΑΕ εἶναι ὅμοια. Κατ' ἀκολουθίαν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ},\ \text{ἄρα } (ΑΒ)(ΑΓ)=(ΑΔ)(ΑΕ).\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἡ ἐφαπτομένη ΑΖ *(Σχ. 145)* εἶναι τὸ ὅριον, εἰς ὃ καταντᾷ ἡ τέμνουσα ΑΔΕ στρεφομένη περὶ τὸ Α, μέχρις οὗ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε συμπέσωσιν εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν θέσιν τῆς στρεφομένης τεμνούσης ἀληθεύει ἡ προηγουμένως ἀποδειχθεῖσα ἰσότης $(ΑΒ)(ΑΓ)=(ΑΔ).(ΑΕ)$, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ ὅταν τὰ Δ καὶ Ε συμπέσωσιν εἰς τὸ Ζ. Ἀλλὰ τότε εἶναι $ΑΔ=ΑΕ=ΑΖ$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΑΖ)^2=(ΑΒ)(ΑΓ)$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. α') Ἐὰν $(ΑΒ).(ΑΓ)=(ΑΔ).(ΑΕ)$, τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Τῷ ὄντι διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ $(ΑΓ).(ΑΔ)$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)}=\frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}$. Ἐπειδὴ καὶ $Γ\widehat{Α}Δ=Β\widehat{Α}Ε$, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΕ εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο $ΑΒΕ=ΑΔΓ$. (Ἄρα $ω=φ$ *(Σχ. 144 β')*.

Ἐκ τῶν σημείων ὅθεν Β καὶ Δ φαίνεται ἡ χορδὴ ΓΕ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν Β, Γ, Ε.

6') Ἐὰν $(ΑΖ)^2=(ΑΒ)(ΑΓ)$, ἡ εὐθεῖα ΑΖ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ζ, Β, Γ. Τῷ ὄντι· διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ (ΑΒ)(ΑΖ) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(ΑΖ)}{(ΑΒ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΑΖ)}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΑΓΖ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Α κοινήν, εἶναι ὅμοια, ἄρα εἶναι καὶ $\widehat{ΑΓΖ}=\widehat{ΑΖΒ}$. Ἐὰν δὲ ΖΑ′ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ῥηθείσης περιφερείας εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΓΖ}=\widehat{ΒΖΑ'}$, ἄρα καὶ $\widehat{ΒΖΑ}=\widehat{ΒΖΑ'}$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΖΑ′ συμπίπτει μὲ τὴν ΑΖ, ἤτοι ἐφαπτομένη εἰς τὸ Ζ εἶναι ἡ ΑΖ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 354) Διὰ τοῦ μέσου χορδῆς μήκους 4,40 μ. ἄγεται ἄλλη χορδὴ διαιρουμένη ὑπὸ τοῦ εἰρημένου μέσου εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν ἔχει μῆκος 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης;

355) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου τόξου ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτοῦ (βέλος τόξου), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μὲν ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 5 μ, τὸ δὲ μῆκος τῆς χορδῆς 8μ.

356) Ἐκ σημείου Α ἀπέχοντος τοῦ κέντρου κύκλου 10μ. ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἐὰν (ΑΒ)=8 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 3 μ, πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΒΓ;

357) Ἐὰν ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ)(ΑΕ)=(ΑΓ)(ΑΔ).

358) Ἐὰν ΒΓ εἶναι τυχοῦσα χορδὴ κύκλου Κ καὶ Α τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $(ΚΑ)^2+(ΑΒ)(ΑΓ)$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

359) Ἐὰν Η τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΗΔ).(ΗΑ)=(ΗΕ).ΗΒ)=(ΗΖ).ΗΓ).

360) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης κύκλου ἀκτῖνος 6μ. ἀγομένης ἐκ σημείου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 12 μ.

361) Ἐὰν ἡ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσα δίχα καὶ καθέτως τέμνῃ τὰς καθέτους πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, ἡ διάμεσος ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Ε καὶ Ζ.

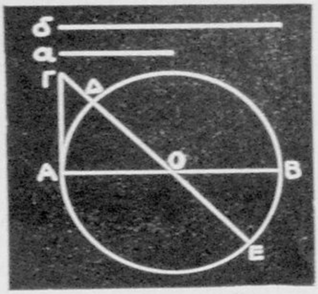
362) Δεδομένων ἐπ' εὐθείας τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ Γ ἀγομένων ἐφαπτομένων εἰς τὰς περιφερείας, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

363) Ἐκ τοῦ σημείου Α περιφερείας Κ, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ ἄγεται ἐφαπτομένη καὶ ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ ἔχον μῆκος 3ρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ Β ἀπὸ ἑκατέρου τῶν σημείων, εἰς ἃ ἡ περιφέρεια τέμνεται ὑπὸ τῆς ΒΚ.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα λύομεν εὐκόλως τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

§ 217. Πρόβλημα Ι.— *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔχουσι διαφορὰν δοθὲν εὐθ. τμῆμα δ, καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς α (Σχ. 146).*

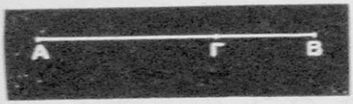


Σχ. 146.

Πρέπει νὰ ληφθῇ ΑΒ=δ καὶ ΑΓ=α.

Ἀσκήσεις. 364) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθ. τρίγωνον, οὗ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα β, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς β καὶ τῆς ὑποτεινούσης.

§ 218. Πρόβλημα ΙΙ (χρυσῆ τομή). — *Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.*



Σχ. 147.

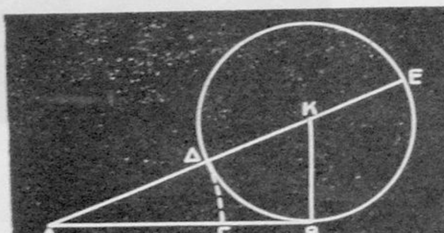
Ἀνάλυσις. Ἐὰν Γ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, θὰ εἶναι

$$(ΑΒ) : (ΑΓ) = (ΑΓ) : (ΓΒ), \text{ ὅθεν}$$

$$(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)(ΓΒ) = (ΑΒ)[(ΑΒ)-(ΑΓ)] = (ΑΒ)^2 - (ΑΒ)(ΑΓ), \quad \text{ὅθεν}$$

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΓ)[(ΑΓ) + (ΑΒ) \qquad (1)$$

Ἐντεῦθεν, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ λύσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις.



Σχ. 148.

Σύνθεσις. Ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ ἄκρου Β τοῦ ΑΒ κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΚ ἴσον πρὸς ΑΒ : 2. Γράφομεν εἶτα

F Διότι $(AB)^2=(AK)^2-(KE)^2$, ἄρα $(AB)^2=[(A\Delta)+(KE)]^2-(KE)^2$ ἢ
ἢ $(AB)^2=(A\Delta)^2+\cancel{(KE)^2}+2(A\Delta)(KE)-\cancel{(KE)^2}$ ἄρα $(AB)^2=(A\Delta)^2+2(A\Delta)(KE)$ ἢ
$(AB)^2=(A\Delta)[(A\Delta)+2(KE)]$ καὶ ἐπειδὴ $A\Delta+2(KE)=AE$ ἔπεται $(AB)^2=(A\Delta)(AE)$

ἢ ἄλλως: Θεώρ. III § 216 (Σχ. 145)

τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΒ) καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τέλος γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΔ), ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ. Τῷ ὄντι· ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος $(AB)^2=(A\Delta)\,(AE)$ ἔπεται ὅτι

$$(AB)^2=(A\Gamma)[(A\Gamma)+(\Delta E)]=(A\Gamma)[(A\Gamma)+(AB)]=$$
$$(A\Gamma)^2+(A\Gamma)(AB), \quad \text{ὅθεν} \quad (AB)^2-(A\Gamma)AB)=(A\Gamma)^2 \quad \text{ἢ}$$
ὅρα § 226 $$(AB)(B\Gamma)=(A\Gamma)^2 \text{ καὶ ἑπομένως } (AB):(A\Gamma)=(A\Gamma):(B\Gamma).$$

Ἀσκήσεις. 365) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκατέρου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εὐθ. τμῆμα μήκους α εἶναι διῃρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

366) Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρός τινα πλευρὰν τριγώνου διαιρῇ ἄλλην πλευρὰν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, θὰ διαιρῇ ὁμοίως καὶ τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ.

367) Διὰ δεδομένου σημείου Α κειμένου ἐκτὸς γωνίας ΒΓΔ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα πρῶτον τὴν πλευρὰν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ε καὶ εἶτα τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Ζ, οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΖ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

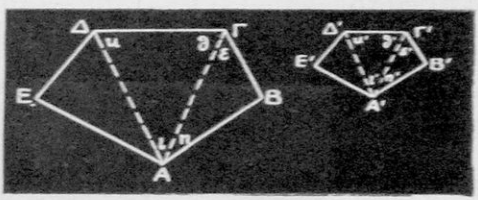
Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ὁμοίων εὐθ. σχημάτων.

§ 219. Θεώρημα I. — *Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.*

Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ *(Σχ. 149)* δύο ὅμοια εὐθ. σχήματα, Π δὲ καὶ Π΄ αἱ περίμετροι αὐτῶν. Λέγω ὅτι

$$\Pi : \Pi' = AB : A'B'.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ὅμοια, εἶναι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A'}$. Ἐὰν δὲ παρασταθῇ διὰ τοῦ



Σχ. 149.

λ ἕκαστος τῶν λόγων τούτων, ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

$AB=A'B'.\lambda$, $A\Gamma=A'\Gamma'.\lambda \ldots$, $EA=E'A'.\lambda$, ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἰσότης $(AB+B\Gamma+\ldots+AE)=(A'B'+B'\Gamma'+\ldots+E'A')\lambda$ ἢ $\Pi=\Pi'.\lambda$, ὅθεν $\Pi:\Pi'=\lambda=AB:A'B'$. ὃ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 368) Παραλληλογράμμου δύο προσκείμεναι πλευραὶ ἔχουσι μήκη 9 μ. ἡ μὲν καὶ 5μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν ἑτέρου παραλληλογράμμου ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχοντος τετραπλασίαν περίμετρον.

359) Τριγώνου αἱ πλευραὶ ἔχουσι μήκη 3 μέτ., 5μέτ., 7 μέτ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχοντος περίμετρον 45 μέτρ.

§ 220. Θεώρημα II.—*Αἱ ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν ἀγόμεναι διαγώνιοι δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.*

Ἐὰν δηλ. τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄, πρὸς τὰ ὁποῖα κεῖνται ὁμοίως.

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν δοθέντων πολυγώνων εἶναι ΑΒ : Α΄Β΄ = ΒΓ : Β΄Γ΄ καὶ Β = Β΄. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΒΓ : Β΄Γ΄ = ΑΓ : Α΄Γ΄ καὶ ε = ε΄. Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἀληθῶν ἰσοτήτων ΒΓ : Β΄Γ΄ = ΓΔ : Γ΄Δ΄ καὶ Γ = Γ΄, ἕπεται ὅτι θ = θ΄ καὶ ΑΓ : Α΄Γ΄ = ΓΔ : Γ΄Δ΄. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΓΔ, Α΄Γ΄Δ΄ εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΔΕ, Α΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια ὅ.ἔ.δ.

§ 221. Θεώρημα III.—*Ἐὰν δύο εὐθ. σχήματα σύγκεινται ἐκ τριγώνων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κειμένων, ταῦτα εἶναι ὅμοια.*

Ἐὰν δηλ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ ὁμοίως κείμενα Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄ καὶ τὰ ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια, ἕπεται ὅτι η = η΄, Β = Β΄, ε = ε΄. Ὁμοίως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ, Α΄Γ΄Δ΄ προκύπτει ὅτι θ = θ΄, ι = ι΄, κ = κ΄ ἄρα καὶ ε + θ = ε΄ + θ΄ ἢ Γ = Γ΄. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι

Δ = Δ΄, Ε = Ε΄, Α = Α΄. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων

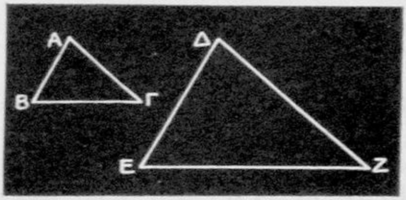
ΑΒ : Α΄Β΄ = ΒΓ : Β΄Γ΄ = ΑΓ : Α΄Γ΄, ΑΔ : Α΄Δ΄ = ΓΔ : Γ΄Δ΄ = ΑΓ : Α΄Γ΄,

ΑΔ : Α΄Δ΄ = ΔΕ : Δ΄Ε΄ = ΑΕ : Α΄Ε΄, ἕπεται εὐκόλως ὅτι

ΑΒ : Α΄Β΄ = ΒΓ : Β΄Γ΄ = ΓΔ : Γ΄Δ΄ = ΔΕ : Δ΄Ε΄ = ΑΕ : Α΄Ε΄. Ἄρα τὰ ΑΒΓΔΕ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια.

§ 222. Θεώρημα IV. — *Ὁ λόγος δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Α΄. Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $A = \Delta$, ἄρα $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{(AB).(A\Gamma)}{(\Delta E).(\Delta Z)} = \dfrac{(AB)}{(\Delta E)} \cdot \dfrac{(A\Gamma)}{(\Delta Z)}$.



Σχ. 150.

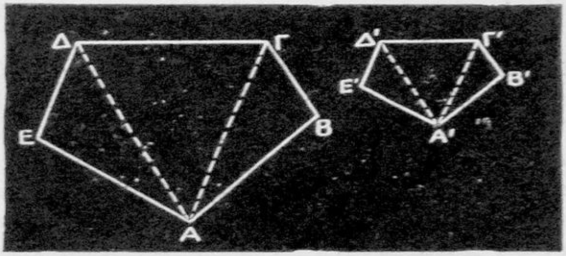
Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{(A\Gamma)}{(\Delta Z)} = \dfrac{(AB)}{(\Delta E)}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{(AB)^2}{(\Delta E)^2}$. δ. ἔ. δ.

Β΄. Ἐὰν τὰ ΑΒΓΔΕ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, Α ΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄.

Κατὰ δὲ τὴν ἀποδειχθεῖσαν περίπτωσιν εἶναι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2} = \left[\frac{(AB)}{(A'B')}\right]^2, \quad \frac{(A\Gamma\Delta)}{(A'\Gamma'\Delta')} = \frac{(\Gamma\Delta)^2}{(\Gamma'\Delta')^2} = \left[\frac{(\Gamma\Delta)}{(\Gamma'\Delta')}\right]^2,$$

$\dfrac{(A\Delta E)}{(A'\Delta'E')} = \dfrac{(\Delta E)^2}{(\Delta'E')^2} = \left[\dfrac{(\Delta E)}{(\Delta'E')}\right]^2$. Ἕνεκα ὅμως τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων εἶναι $\dfrac{(AB)}{(A'B')} = \dfrac{(\Gamma\Delta)}{(\Gamma'\Delta')} = \dfrac{(\Delta E)}{(\Delta'E')}$.



Σχ. 151.

Ἂν δὲ ἕκαστος τούτων παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, αἱ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2$, $\dfrac{(A\Gamma\Delta)}{(A'\Gamma'\Delta')} = \lambda^2$, $\dfrac{(A\Delta E)}{(A'\Delta'E')} = \lambda^2$, ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $(AB\Gamma) = (A'B'\Gamma')\lambda^2$, $(A\Gamma\Delta) = (A'\Gamma'\Delta')\lambda^2$, $(A\Delta E) = (A'\Delta'E')\lambda^2$. Προσθέτοντες δὲ ταύτας, κατὰ μέλη εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $(AB\Gamma\Delta E) = (A'B'\Gamma'\Delta'E')\lambda^2$, ὅθεν

$$(AB\Gamma\Delta E) : (A'B'\Gamma'\Delta'E') = \lambda^2 = (AB)^2 : (A'B')^2. \text{ δ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα Ι.— *Ἐὰν αἱ πλευραὶ εὐθ. σχήματος πολ]σθῶσι πᾶσαι ἐπὶ λ, αἱ δὲ γωνίαι μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $λ^2$.*

370) Ποῖος ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τριγώνου πρὸς ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ;

371) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐννεαπλάσιον δεδομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

372) Τρίγωνον ἔχει βάσιν 24μ. καὶ ὕψος 8μ. Ἐὰν ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει καὶ ἀπέχουσα τῆς κορυφῆς 6μ., πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν σχημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τοῦτο;

373) Τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης· ἐὰν δὲ προεκβληθῶσιν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί, τὸ ἐκτὸς τοῦ τραπεζίου σχηματιζόμενον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 24 τ. μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

374) Τριγώνου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 27μ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τοιοῦτον ὥστε, ἂν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς ἄλλην αὐτοῦ πλευράν, νὰ σχηματίζηται νέον τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ 1)4 τοῦ ἀρχικοῦ;

375) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος παραλληλογράμμου πρὸς τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

§ 223. Πρόβλημα Ι.— *Νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. σχῆμα ὅμοιον πρὸς δεδομένον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ (Σχ. 151) τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος ὄντος ἴσου πρὸς τὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν.*

Λύσις. Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ χ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, θὰ εἶναι μ : ν=ΑΒ : χ, ἤτοι ἡ χ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμημάτων μ,ν καὶ ΑΒ, κατασκευάζεται δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 204). Ὁμοίως κατανοοῦμεν ὅτι ἡ πρὸς τὴν ΒΓ ὁμόλογος πλευρὰ ψ τοῦ ζητουμένου σχήματος εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν μ, ν, καὶ ΒΓ καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω. Ἤδη ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς χ, εἶτα δὲ μὲ πλευρὰν Α′Β′ καὶ κορυφὴν Β′ κατασκευάζομεν γωνίαν Β′ ἴσην τῇ Β· ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα Β′Γ′ ἴσον πρὸς ψ καὶ καθ' ἑξῆς οὕτως ἐργαζόμενοι σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον εὐθ. σχῆμα Α′Β′Γ′Δ′Ε′.

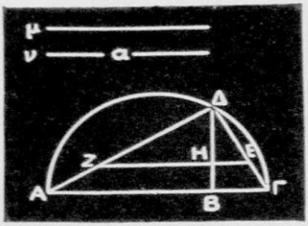
§ 224. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δεδομένον τετράγωνον λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν (Σχ. 152).*

Λύσις. Ἐπὶ εὐθείας ὁρίζομεν διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ=μ καὶ ΒΓ=ν· ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν Α εἴς τι σημεῖον Δ. Ἄγομεν εἶτα τὰς χορδὰς ΔΑ καὶ ΔΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΓ ὁρίζομεν εὐθ. τμῆμα ΔΕ$=$α, ἐκ δὲ τοῦ Ε ἄγομεν παράλληλον τῇ ΑΓ τέμνουσαν τὴν ΔΑ εἴς τι σημεῖον Ζ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΖ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ

$(ΔΖ)^2 : (ΔΕ)^2 = ΖΗ : ΗΕ, \quad ΔΕ = α$

καὶ $ΖΗ : ΗΕ = ΑΒ : ΒΓ = μ : ν$

ἔπεται ὅτι $(ΔΖ)^2 : α^2 = μ : ν$.



Σχ. 152.

Ἀσκήσεις. 376) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

377) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ δοθέντος τετραγώνου.

378) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος ὀρθογωνίου.

§ 225. Πρόβλημα V.—*Δοθέντων δύο εὐθ. σχημάτων Π καὶ Ρ νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον πρὸς τὸ Π καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Ρ.*

Λύσις. Ἔστω Χ τὸ ζητούμενον εὐθ. σχῆμα καὶ χ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ἥτις εἶναι ὁμόλογος πρός τινα πλευρὰν α τοῦ Π. Ἐπειδὴ τὰ εὐθ. σχήματα Π καὶ Χ πρέπει νὰ εἶναι ὅμοια, ἔπεται ὅτι $(Π) : (Χ) = α^2 : χ^2$. Ἐπειδὴ δὲ $(Χ) = (Ρ)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(Π) : Ρ = α^2 : χ^2$. Ἐὰν ἤδη μετασχηματίσωμεν τὰ εὐθ. σχήματα Π καὶ Ρ εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα καὶ καλέσωμεν π καὶ ρ τὰς πλευρὰς αὐτῶν, θὰ εἶναι $(Π) = π^2$ καὶ $(Ρ) = ρ^2$, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $π^2 : ρ^2 = α^2 : χ^2$, ὅθεν $π : ρ = α : χ$.

Κατασκευάζεται ἄρα ἡ χ κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 204). Κατασκευασθείσης μιᾶς πλευρᾶς τοῦ Χ ἡ πλευρὰ ψ αὐτοῦ, ἥτις εἶναι ὁμόλογος πρὸς τυχοῦσαν ἄλλην πλευρὰν β τοῦ Π ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $α : β = χ : ψ$ καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ Χ γίνεται καθ' ὃν τρόπον τὸ πρόβλημα Ι (§ 223) ἐλύθη.

Ἀσκήσεις. 379) Δεδομένων δύο ἀνίσων τριγώνων νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός τινα πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου ἀποχωρίζουσα ἀπ' αὐτοῦ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἕτερον.

380) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν τρίγωνον.

381) Δεδομένων δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον πρὸς αὐτὰ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

§ 226. **Ἀλγεβρικὴ λύσις γεωμ. Προβλήματος.**—Ἐὰν τὰ μέτρα τῶν ἔν τινι προβλήματι εἰσερχομένων γνωστῶν γεωμετρικῶν ποσῶν παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ,..., διὰ τῶν φ. χ, ψ, ω... δὲ τὰ μέτρα τῶν ἀγνώστων ποσῶν, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνεύρωμεν ἀλγεβρικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν μέτρων τῶν γνωστῶν καὶ ἀγνώστων ποσῶν τοῦ προβλήματος. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰς μεταξὺ τῶν ποσῶν τούτων ὑπαρχούσας γεωμ. σχέσεις καὶ ἀναγράφομεν τῇ βοηθείᾳ ἐν ἀνάγκῃ καταλλήλων βοηθητικῶν γραμμῶν, τὰς ἀντιστοίχους μεταξὺ τῶν μέτρων αὐτῶν σχέσεις. Αἱ σχέσεις αὗται ἀποτελοῦσι τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τοὺς ἀγνώστους, λύοντες ταύτας, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἀνευρίσκομεν τύπους, δι' ὧν καθίστανται γνωσταὶ αἱ ἐκτελεστέαι μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν μέτρων τῶν γνωστῶν ποσῶν πράξεις πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν μέτρων τῶν ἀγνώστων ποσῶν. Οὕτω (§ 189) παραστήσαντες διὰ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ἀνεύρομεν τύπους ἐξ ὧν καταφαίνονται αἱ πράξεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ὕψη καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὅταν τὰ α, β, γ, ἀντικατασταθῶσι δι' ὡρισμένων ἀριθμῶν.

Ἐὰν δὲ οἱ ἄγνωστοι εἶναι γραμμαί, εἶναι δυνατὸν πολλάκις ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων τύπων νὰ διαγνώσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς γεωμετρικῆς τῶν γραμμῶν τούτων κατασκευῆς. Οὕτως ἐν τῷ προβλήματι τῆς χρυσῆς τομῆς θεωρήσαντες ὡς ἄγνωστον ἓν τῶν τμημάτων, εἰς ἃ πρέπει νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ, εὕρομεν τὸν τύπον (1, § 218), ἐξ οὗ ὁδηγούμενοι ἀνεύρομεν τὸν τρόπον τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τοῦ ἀγνώστου τούτου τμήματος.

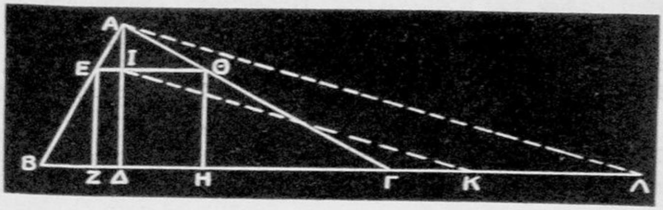
Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων καλεῖται *ἀλγεβρική*. Πρὸς πληρεστέραν δὲ κατανόησιν αὐτῆς, θὰ λύσωμεν κατ' αὐτὴν καὶ τὰ ἀκόλουθα δύο προβλήματα.

§ 227. **Πρόβλημα IV.**—*Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον (Σχ. 153).*

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον καὶ (ΕΘ)=χ· ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω (ΑΔ)=β καὶ (ΒΓ)=α. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΕΘ ἀφ' ἑνὸς καὶ ΑΔΓ, ΑΘΙ ἀφ' ἑτέρου ἕπεται ὅτι

$$(\text{ΑΘ}):(\text{ΑΓ})=\chi:\alpha, \quad (\text{ΑΘ}):(\text{ΑΓ})=(\beta-\chi):\beta, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi:\alpha=(\beta-\chi):\beta.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν ὅτι
$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{6-\chi}{6}=\frac{6}{\alpha+6}$, $\frac{\chi}{6}=\frac{\alpha}{\alpha+6}$ καὶ $\frac{\alpha+6}{\alpha}=\frac{6}{\chi}$. Εἶναι λοιπὸν τὸ μῆκος χ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν $\alpha+6$, α καὶ 6.



Σχ. 153.

Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΚ=ΒΓ καὶ ἕτερον ΚΛ=ΑΔ· ἄγομεν εἶτα τὴν εὐθεῖαν ΑΛ καὶ ἐκ τοῦ Κ παράλληλον αὐτῇ τὴν ΚΙ, ἥτις τέμνει τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ Ι. Τέλος ἄγομεν διὰ τοῦ Ι εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΓ τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Θ, ἐξ ὧν ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ τὰς ΕΖ καὶ ΗΘ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΖΕΘΗ.

Τῷ ὄντι· τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον, οὗ ἡ πλευρὰ ΗΘ, ὡς ἴση τῇ ΔΙ, εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν $\alpha+6$, α καὶ 6. Ἀλλ᾽ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΕΘ ἀφ᾽ ἑνὸς καὶ ΑΘΙ, ΑΔΓ ἀφ᾽ ἑτέρου προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΘ}}=\frac{\alpha}{\text{ΕΘ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΙ}}$ ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΙ}}=\frac{\alpha}{\text{ΕΘ}}$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΙΚ καὶ ΑΛ εἶναι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΙ}}=\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\alpha+6}{6}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha+6}{6}=\frac{\alpha}{\text{ΕΘ}}$, ὅθεν $\frac{\alpha+6}{\alpha}=\frac{6}{\text{ΕΘ}}$. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τετάρτη ἀνάλογος τῶν μηκῶν $\alpha+6$, α καὶ 6 κατ᾽ ἀκολουθίαν ΕΘ=ΘΗ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον.

Ἀσκήσεις. 382) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α.

383) Νὰ ἀχθῇ ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ διπλασία τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς ΒΓ.

384) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δε-

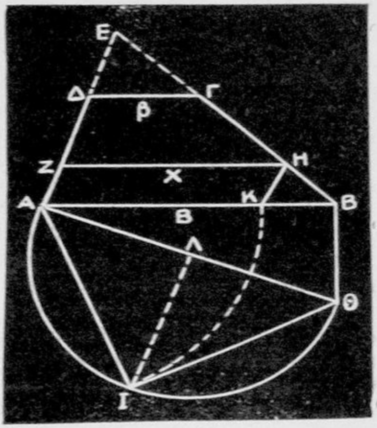
δομένον ὀρθογώνιον καὶ οὕτως ὥστε ἡ μεγαλυτέρα αὐτοῦ πλευρὰ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας τοῦ τριγώνου πλευρᾶς.

385) Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δεδομένον ἡμικύκλιον.

386) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

§ 228. Πρόβλημα VII.

— *Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι᾽ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.*



Σχ. 154.

Ἀνάλυσις. Ἂν ΖΗ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, θὰ εἶναι (ΑΒΗΖ) = (ΖΗΓΔ). Ἂν δὲ (ΑΒ)=Β, (ΖΗ)=χ, (ΔΓ)=β, ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΑΒ, ΕΖΗ, ΕΔΓ θὰ εἶναι

$$\frac{(\mathrm{EAB})}{\mathrm{B}^2}=\frac{(\mathrm{EZH})}{\chi^2}=\frac{(\mathrm{E\Delta\Gamma})}{\beta^2}.$$

Ἐκ τούτων δὲ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι

$$\frac{(\mathrm{EAB})-(\mathrm{EZH})}{\mathrm{B}^2-\chi^2}=\frac{(\mathrm{EZH})-(\mathrm{E\Delta\Gamma})}{\chi^2-\beta^2} \text{ ἢ } \frac{(\mathrm{ABHZ})}{\mathrm{B}^2-\chi^2}=\frac{(\mathrm{ZH\Gamma\Delta})}{\chi^2-\beta^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΖΗ)=(ΖΗΓΔ), ἕπεται ὅτι $\mathrm{B}^2-\chi^2=\chi^2-\beta^2$, ὅθεν

$$2\chi^2=\mathrm{B}^2+\beta^2.$$

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΘ ἔχον καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς βάσεις τοῦ δεδομένου τραπεζίου. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι $(\mathrm{A\Theta})^2=\mathrm{B}^2+\beta^2$ καὶ ἑπομένως $2\chi^2=(\mathrm{A\Theta})^2$.

Κατασκευάζοντες εἶτα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΙΘ ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΑΘ, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι

$$2\chi^2=2(\mathrm{AI})^2, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=(\mathrm{AI}).$$

Ἤδη λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα ΑΚ=ΑΙ, ἐκ τοῦ Κ ἄγομεν τὴν ΚΗ παράλληλον τῇ ΑΔ, ἐκ τοῦ Η παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου τὴν ΗΖ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Τῷ ὄντι ἐργαζόμενοι, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει, ἀποδεικνύομεν ὅτι $\frac{(\mathrm{EAB})-(\mathrm{EZH})}{\mathrm{B}^2-(\mathrm{ZH})^2}=\frac{(\mathrm{EZH})-(\mathrm{E\Gamma\Delta})}{(\mathrm{ZH})^2-\beta^2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς εἰ-ναι $2(ZH)^2 = B^2 + 6^2$, ἔπεται ὅτι $B^2 - (ZH)^2 = (BH)^2 - 6^2$ καὶ ἐπομένως $(EAB) - (EZH) = (EZH) - (E\Gamma\Delta)$ ἢ $(ABHZ) = (ZH\Gamma\Delta)$.

Ἀσκήσεις. 387) Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους βάσεις.

388) Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 2.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' βιβλίου.

389) Τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τραπεζίου καὶ βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμα.

390) Ἐὰν τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ προεκβάλωμεν, καθ' ἣν φορὰν ἐπὶ ἑκάστης κινεῖται κινητὸν διαγράφον τὴν περίμετρον αὐτοῦ, καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τμήματα ΓΑ', ΑΒ', ΒΓ', ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἑπταπλάσιον τοῦ ΑΒΓ.

391) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων δύο καθέτων χορδῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

392) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων.

393) Ἡ διὰ τῶν ἄκρων δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων δύο κύκλων διερχομένη εὐθεῖα τέμνει τὴν διάκεντρον εἰς σταθερὸν σημεῖον.

394) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν εὐθεῖαν, ἣν ὁρίζουσι τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων.

395) Ἐὰν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια καὶ παρασταθῶσι διὰ δ, δ' τὰ ἐπὶ τὰς ὑποτεινούσας ΒΓ, Β'Γ' ὕψη, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{66'} + \frac{1}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\delta\delta'}.$$

396) Ἐὰν ἐν παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ εὐθεῖα τέμνουσα κατὰ σειρὰν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η, θὰ εἶναι $(\Delta E)^2 = (EZ).(EH)$.

397) Ἐὰν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἡ διάμετρος τούτου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων.

398) Τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαγωνίων παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν (Θ. τοῦ Πτολεμαίου).

399) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων τραπεζίου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν βάσεων.

400) Τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

401) Ἐὰν α, 6, γ, εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ Ρ τὸ μῆκος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, εἶναι $\alpha 6 \gamma = 4.P.E.$

402) Τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης διχοτόμου ηὐξημένον κατὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων, εἰς ἃ ἡ ἄλλη πλευρὰ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ρηθείσης διχοτόμου.

403) Ἐὰν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ 2τ ἡ περίμετρος αὐτοῦ, ἡ διχοτόμος τῆς Α ἔχει μῆκος. $\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}$.

404) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τρίγωνον καὶ ἔχον μετ' αὐτοῦ μίαν γωνίαν κοινήν.

405) Νὰ εὑρεθῇ καὶ κατασκευασθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἔχουσι λόγον $\mu:\nu$ διάφορον τοῦ 1, ἔνθα μ καὶ ν εἶναι δεδομένα εὐθ. τμήματα ἢ δεδομένοι ἀριθμοί.

406) Ἐπὶ δεδομένου τόξου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τόξου τούτου ἔχουσι λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων.

407) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, τοῦ λόγου τῶν ἄλλων πλευρῶν καὶ τοῦ ὕψους.

408) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

409) Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ.

410) Ὀρθὴ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της, ἡ ὁποία κεῖται ἐντὸς δοθέντος κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.

411) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

412) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Κανονικὰ εὐθ. σχήματα.

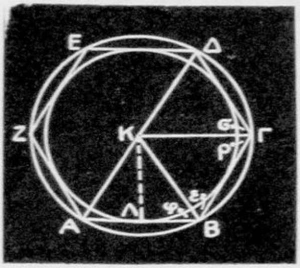
§ 229. Κανονικὰ εὐθ. σχήματα.— *Κανονικὸν εὐθ. σχῆμα καλεῖται πᾶν εὐθ. σχῆμα, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πλευραὶ καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.* Π. χ. τὰ τετράγωνα καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα. Ἐὰν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχῃ ν πλευράς, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ εἶναι

$$\frac{2\nu-4}{\nu}\ \text{ὀρθ.}$$

Κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ καλεῖται πᾶσα τεθλασμένη γραμμή, τῆς ὁποίας πᾶσαι αἱ πλευραὶ καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἰδιότητες τῶν κανονικῶν εὐθ. σχημάτων.

§ 230. Θεώρημα I.—*Πᾶν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.*



Σχ. 155.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ (*Σχ. 155*) τυχὸν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Α΄. Διὰ τριῶν μὴ διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, διέρχεται μία μόνον περιφέρεια, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι ἡ τομὴ Κ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ αὐτοῦ. Εἶναι ἄρα ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΚΒΓ εἶναι (§ 64) ἴσα, ἄρα
$$\varphi = \varepsilon = \frac{B}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ΚΒ = ΚΓ, ἔπεται ὅτι $\rho = \varepsilon = \dfrac{B}{2} = \dfrac{\Gamma}{2}$· ὅθεν καὶ
$$\sigma = \frac{\Gamma}{2} = \rho$$

Τὰ τρίγωνα ὅθεν ΚΒΓ καὶ ΚΓΔ εἶναι ἴσα (§ 63) καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν ΚΒ = ΚΔ· καὶ ἡ κορυφὴ ἄρα Δ κεῖται ἐπὶ τῆς ρηθείσης περιφερείας.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν κορυφῶν Ε καὶ Ζ. Ὥστε ἡ ρηθεῖσα περιφέρεια διέρχεται δι᾿ ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἄρα τοῦτο ἐγγράψιμον ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Ἐπειδὴ ΑΒ = ΒΓ = ... = ΖΑ ἐξ ὑποθέσεως, τὸ κέντρον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπ᾿ αὐτῶν· πᾶσαι δὲ αὗται ἐφάπτονται τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ταύτην ΚΛ. Εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ περιγράψιμον περὶ τὴν περιφέρειαν ταύτην ὅ. ἔ. δ.

§ 231. Κέντρον, ἀκτῖνες, ἀπόστημα καὶ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ εὐθ. σχήματος.—*Τὸ κοινὸν κέντρον τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικὸν εὐθ. σχῆμα περιφερείας καλεῖται κέντρον τοῦ κανονικοῦ τούτου σχήματος.*

Τὰ ὑπὸ τοῦ κέντρου καὶ τῶν κορυφῶν κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ὁριζόμενα εὐθ. τμήματα καλοῦνται ἀκτῖνες τοῦ σχήματος τούτου.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ καλεῖται ἀπόστημα τοῦ σχήματος τούτου. Οὕτω ΚΛ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖ (*Σχ. 155*).

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ εἰς τὰ ἄκρα πλευρᾶς τινὸς κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καταλήγουσαι ἀκτῖνες αὐτοῦ καλεῖται κεντρικὴ γωνία τοῦ σχήματος τούτου. Οὕτω τοῦ κανονικοῦ εὐθ. σχήμα- ΑΒΓΔΕΖ κεντρικὴ γωνία εἶναι ἡ ΑΚΒ.

Ἐὰν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχῃ ν πλευράς, ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ εἶναι $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Οὕτως ἡ κεντρικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρθ.

Ἀσκήσεις. 413). Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, δεκαγώνου ;

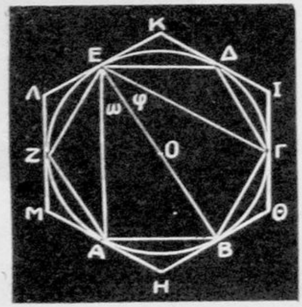
414) Τίνος κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἑκάστη γωνία εἶναι $\frac{10}{7}$ ὀρθῆς ;

415) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη γωνία κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, ὅπερ ἔχει πλευρὰς πλείονας τῶν 4 εἶναι ἀμβλεῖα.

416) Πόση εἶναι ἡ κεντρικὴ γωνία τετραγώνου, κανονικοῦ πενταγώνου καὶ ἑξαγώνου ;

417) Τίνος κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 36^0 ;

§ 232. Θεώρημα ΙΙ. — *Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα τόξα καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, τὸ σχηματιζόμενον ἐγγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα εἶναι κανονικόν.*



Σχ. 156.

Ἔστω ὅτι $\widehat{AB}=\widehat{B\Gamma}=...=\widehat{ZA}$ (*Σχ. 156*). Λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικόν.

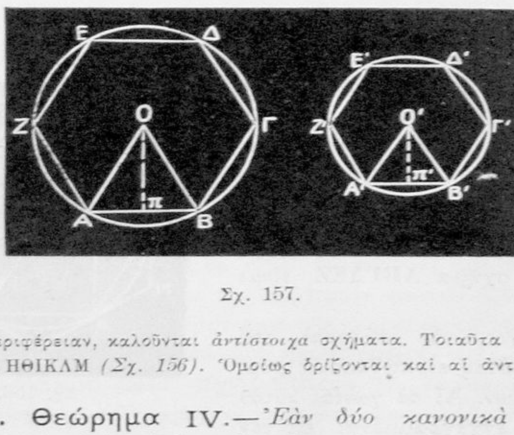
Ἀπόδειξις. Αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος τούτου εἶναι ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων. Αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων, διότι ἕκαστον τούτων ὑπολείπεται, ἂν ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῶσι δύο τῶν ἴσων τόξων, εἰς ἃ εἶναι διῃρημένη ἡ περιφέρεια· εἶναι ἄρα αὗται ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν (§ 229) τὸ σχῆμα τοῦτο κανονικόν. ὅ. ἔ. δ.

§ 233. Θεώρημα III.—*Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα τόξα καὶ ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, τὸ σχηματιζόμενον περιγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα εἶναι κανονικόν.*

Ἔστωσαν ΜΗ, ΗΘ,...., ΛΜ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Ο *(Σχ. 156)*, εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι τὸ περιγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα ΜΗΘΙΚΛ εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΗΒ, ΒΘΓ,...., ΖΜΑ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι (§ 135 Πόρ. Ι) εἶναι ΗΑ=ΗΒ, ΘΒ=ΘΓ κλπ. Τῶν τριγώνων τούτων αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι (63 Πόρ. ΙΙ) καὶ αἱ εἰς αὐτὰς προσκείμεναι γωνίαι πᾶσαι εἶναι ἴσαι. Τῷ ὄντι· ἐπειδὴ ΑΒΗ=ω, ΓΒΘ=φ (§ 135) καὶ ω=φ, ἕπεται ὅτι ΑΒΗ=ΓΒΘ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης ὅλων τῶν εἰρημένων γωνιῶν. Τὰ τρίγωνα ἄρα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι Η=Θ=Ι=Κ=Λ=Μ καὶ
ΑΗ=ΗΒ=ΒΘ=ΘΓ κλπ., ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι
ΜΗ=ΗΘ=ΘΙ=ΙΚ=ΛΜ. Τὸ εὐθ. σχῆμα ΗΘΙΚΛΜ εἶναι λοιπὸν κανονικόν. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Δύο εὐθ. σχήματα, τὰ ὁποῖα ἐγγίζουσι περιφέρειαν εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα καὶ τὸ μὲν ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο περιγεγραμμένον περὶ



Σχ. 157.

τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, καλοῦνται ἀντίστοιχα σχήματα. Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ ΑΒΓΔΕΓ καὶ ΗΘΙΚΛΜ *(Σχ. 156)*. Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τεθλ. γραμμαί.

§ 234. Θεώρημα IV.—*Ἐὰν δύο κανονικὰ εὐθ. σχήματα ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος* *τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων καὶ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἔστωσαν δύο κανονικὰ εὐθ. σχήματα ΑΒΓ...Μ, Α′Β′Γ′...Μ′ *(Σχ. 157)*, ὧν ἑκάτερον ἔχει ν πλευράς, ἔστω δὲ Οπ τὸ ἀπόστημα τοῦ α′ καὶ Ο′π′ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἄλλου. Λέγω ὅτι α′) τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ β′) ὅτι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{O\pi}{O'\pi'}=\frac{OB}{O'B'}$.

Ἀπόδειξις. α′) Ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν κανονικῶν τούτων σχημάτων ἔχει ν πλευράς, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου εἶναι $\left(2-\frac{4}{\nu}\right)$ ὀρθ. Εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι μία πρὸς μίαν.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=...=ΜΑ καὶ Α′Β′=Β′Γ′=.,.=ΜΑ′, ἕπεται ὅτι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=...=\frac{MA}{M'A'}$ ἤτοι τὰ σχήματα ταῦτα ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Εἶναι ἄρα ὅμοια. ὅ.ἔ.δ.

β′ Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν πΟΒ, π′Ο′Β′ εἶναι $\frac{2}{\nu}$ τῆς ὀρθῆς. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΒπ καὶ Ο′π′Β′ εἶναι ἄρα ὅμοια καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν $\frac{\pi B}{\pi'B'}=\frac{O\pi}{O'\pi'}=\frac{OB}{O'B'}$. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς εἶναι $\frac{\pi B}{\pi'B'}=\frac{2.\pi B}{2.\pi'B'}=\frac{AB}{A'B'}$ ἕπεται ὅτι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{O\pi}{O'\pi'}=\frac{OB}{O'B'}$. ὅ, ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 418) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ, ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ ἀπόστημα θ αὐτοῦ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $4(\rho^2-\theta^2)=\alpha^2$.

419) Κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἡ πλευρὰ εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ἀπόστημα 3/2μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

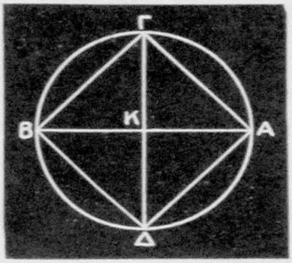
420) Ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων δύο κανονικῶν πενταγώνων εἶναι 2/3. Ποῖος ὁ λόγος τῶν περιμέτρων καὶ ποῖος τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν;

421) Αἱ ἀποστάσεις σημείου ἐντὸς κανονικοῦ εὐθ. σχήματος κειμένου ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα σταθερόν.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

§ 235. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον Κ (Σχ. 158) τετράγωνον.*

Λύσις. Ἄγομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς τῶν ἴσων τόξων ΑΓ, ΓΒ, ΑΔ, ΔΑ. Οὕτως ἐγγράφεται τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ, ὅπερ εἶναι (§ 232) κανονικόν, ἤτοι τετράγωνον.



Σχ. 158.

Μῆκος τῆς πλευρᾶς. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι $(ΑΓ)^2=(ΚΑ)^2+(ΚΓ)^2$. Ἐὰν δὲ κληθῇ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $(ΑΓ)^2=2R^2$, ὅθεν $(ΑΓ)=R\sqrt{2}$

Ἄρα: *Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt{2}$.*

Ἀσκήσεις. 422) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. — Ἐφαρμογή, διὰ R=3μ.

423) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἀπόστημα τετραγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ νὰ ὁρισθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

424) Τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 5,29 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

425) Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τετραγώνου ΑΓΒΔ *(Σχ. 158)* προεκβληθῇ κατὰ τμῆμα ΓΕ ἴσον τῇ ΑΓ καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΕ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἐφάπτεται εἰς τὸ Α τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς.

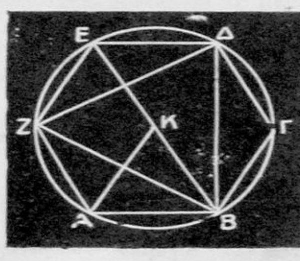
426) Νὰ περιγραφῇ περὶ δεδομένον κύκλον τετράγωνον καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος.

427) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον καὶ περιγραφῇ περὶ αὐτὸν κανονικὸν ὀκτάγωνον.

§ 236. **Πρόβλημα II.**—*Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον Κ (Σχ. 159) κανονικὸν ἑξάγωνον.*

Ἀνάλυσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας, ἡ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ θὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἑξαγώνου καὶ $\widehat{ΑΚΒ}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ὀρθ.

Ἑκατέρα ἄρα τῶν ἄλλων γωνιῶν



Σχ. 159.

τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ θὰ ἰσοῦται πρὸς $\left(2-\frac{2}{3}\right):2=\frac{2}{3}$ ὀρθ. Τὸ τρίγωνον ΑΚΒ εἶναι λοιπὸν ἰσογώνιον, ἄρα καὶ ἰσόπλευρον.

Ἄρα: *Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.*

Σύνθεσις. Κατὰ ταῦτα, ἵνα ἐγγράψωμεν τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάγωνον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας ἓξ διαδοχικὰ τόξα, ὧν ἕκαστον ἔχει χορδὴν ἴσην τῇ ἀκτῖνι καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. Τὸ οὕτως ἐγγραφόμενον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Ἀσκήσεις. 428). Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον δεδομένην πλευράν.

429) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον καὶ περιγραφῇ περὶ αὐτὸν κανονικὸν δωδεκάγωνον.

430) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι $R\sqrt{3}:2$.

431) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ὅπερ ἔχει ἀπόστημα $2\sqrt{3}$.

432) Κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει ἐμβαδὸν $13{,}5\sqrt{3}$ τ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ;

433) Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.

§ 237. Πρόβλημα III. — *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον Κ (Σχ. 159) ἰσόπλευρον τρίγωνον.*

Λύσις. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὰς χορδὰς ΒΔ, ΔΖ, ΖΒ τῶν τόξων ΒΓΔ, ΔΕΖ καὶ ΖΑΒ ἐγγράφεται τὸ τρίγωνον ΖΔΒ, ὅπερ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Μῆκος τῆς πλευρᾶς. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΓΔΕ εἶναι $\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}$ περιφερείας, ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι διάμετρος τὸ δὲ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ $(B\Delta)^2=(BE)^2-(\Delta E)^2$ ἢ $(B\Delta)^2=(2R)^2-R^2$, ὅθεν $(B\Delta)=R\sqrt{3}$.

Ἄρα: *Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ $\sqrt{3}$.*

Ἀσκήσεις. 434) Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

435) Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

436) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Νὰ συγκριθῇ τὸ συμπέρασμα τοῦτο πρὸ τὸ τῆς ἀσκήσεως 430 καὶ νὰ ἐξαχθῇ μνημονικὸς κανών.

437) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περίμετρος περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

438) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

439) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

440) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

441) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

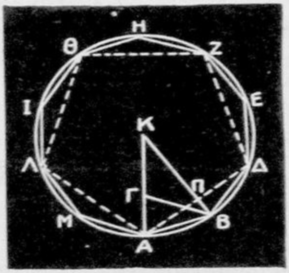
442) Ἐὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ προεκβληθῶσι, μέχρις οὗ τμηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Η, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΑΔ εἶναι ἰσόπλευρον.

§ 238. Πρόβλημα IV.—*Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον Κ (Σχ. 160) κανονικὸν δεκάγωνον.*

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἡ μὲν χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ θὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἡ δὲ κεντρικὴ γωνία ΑΚΒ θὰ ἰσοῦται πρὸς 4/10 ἢ 2/5 ὀρθ.

Ἑκατέρα δὲ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ θὰ ἰσοῦται $\left(2-\frac{2}{5}\right)$ ὀρθ. $:2=\frac{4}{5}$ ὀρθ. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΒΓ διχοτόμος τῆς γωνίας Β, θὰ εἶναι Κ=ΚΒΓ καὶ

ΑΓΒ = Κ + ΚΒΓ=4/5 ὀρθ. ὅθεν ΚΓ=ΓΒ=ΑΒ.



Σχ. 160.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τὴν Β, εἶναι ΚΒ : ΑΒ = ΚΓ : ΑΓ ἢ ΚΑ : ΚΓ=ΚΓ : ΑΓ, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ ΑΒ=ΚΓ>ΑΓ.

Ἄρα: *Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

Μῆκος τῆς πλευρᾶς. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι ρ, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ χ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγιατί;

γώνου θὰ εἶναι $\frac{\rho}{\chi}=\frac{\chi}{\rho-\chi}$ ὅθεν $\chi=\frac{\rho(-1+\sqrt{5})}{2}$. Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων τῆς χ ἡ $\frac{\rho(-1-\sqrt{5})}{2}$ δὲν εἶναι παραδεκτή, ὡς ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μείζων τῆς ἀκτῖνος ρ, εἶναι ἄρα

$$\chi=\frac{\rho(-1+\sqrt{5})}{2}.$$

Ἀσκήσεις. 443) Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον.

444) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

445) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κονονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

§ 239. Πρόβλημα V.—*Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δεδομένον κύκλον Κ (Σχ. 160) κανονικὸν πεντάγωνον.*

Λύσις. Διαιροῦμεν πρῶτον τὴν περιφέρειαν εἰς 10 ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΔ...ΜΑ καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΔ, ΔΖ, ΖΘ, ΘΛ, ΛΑ τῶν τόξων ΑΒΔ, ΔΕΖ, ΖΗΘ, ΘΙΛ καὶ ΛΜΑ, ὧν ἕκαστον ἐκ δύο δεκάτων τῆς περιφερείας ἀποτελούμενον ἰσοῦται πρὸς τὸ $^1/_5$ αὐτῆς. Τὸ οὕτως ἐγγεγραμμένον εὐθ. σχῆμα ΑΔΖΘΛ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον κανονικὸν πεντάγωνον.

Μῆκος τῆς πλευρᾶς. Τῆς γωνίας ΑΚΒ οὔσης ὀξείας εἶναι $(AB)^2=(AK)^2+(KB)^2-2(KB).(K\Pi)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ ὡς πλευρὰ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς $\frac{\rho}{2}(-1+\sqrt{5})$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\frac{\rho^2}{4}(-1+\sqrt{5})^2=2\rho^2-2\rho(K\Pi)$. Λύοντες ταύτην πρὸς (ΚΠ) εὑρίσκομεν ὅτι $(K\Pi)=\frac{\rho}{4}(1+\sqrt{5})$. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΠ εὑρίσκομεν ὅτι

$$(A\Pi)^2=\rho^2-(K\Pi)^2=\rho^2-\frac{\rho^2}{16}(1+\sqrt{5})^2=\frac{\rho^2}{16}(10-2\sqrt{5}),\quad \text{ὅθεν}$$

$$(A\Pi)=\frac{\rho}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\quad \text{κατ' ἀκολουθίαν}$$

$$(A\Delta)=\frac{\rho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Ἀσκήσεις. 446) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

447) Νὰ ὁρισθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πενταγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

448) Εἰς κύκλον Ο ἄγομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΟΒ, ΓΟΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ μέσον Ε τῆς ἀκτῖνος ΟΒ καὶ ἀκτῖνα ΕΓ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΟΑ εἰς τι σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΓΖ ἰσοῦται τῇ πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν κύκλον Ο ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πεταγώνου.

449) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου συνιστῶσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

§ 240. Πρόβλημα VI.—*Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.*

Λύσις. Ἐπειδὴ $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, ἔπεται ὅτι ὁρίζοντες τόξον ἴσον πρὸς τὸ 1/6 τῆς δεδομένης περιφερείας καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ᾽ αὐτοῦ τόξον ἴσον πρὸς τὸ 1/10 αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ 1/15 αὐτῆς. Μεθ᾽ ὃ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν 15 τοιαῦτα διαδοχικὰ τόξα καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

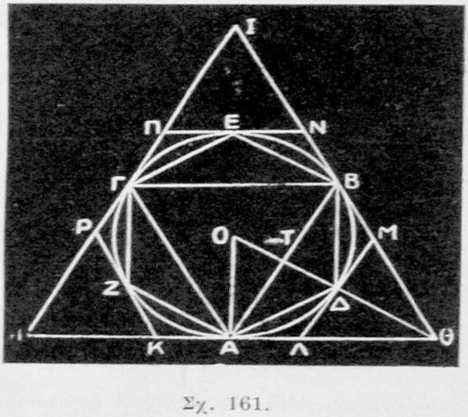
Μέτρησις τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου.

Α΄. Μέτρησις περιφερείας.

§ 241. Θεώρημα I.—*Ἡ περίμετρος εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου ἔχουσι κοινὸν ὅριον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν βαίνῃ ἀπαύστως διπλασιαζόμενος.*

Ἀπόδειξις. Α΄ Ἔστωσαν ΑΒΓ, ΑΔΒΕΓΖ,... κανονικὰ εὐθ. σχήματα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον Ο, ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου. Ἔστωσαν δὲ σ, σ΄, σ΄΄,... αἱ περίμετροι αὐτῶν. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν περιμέτρων τούτων περιβάλλεται ὑπὸ τῆς ἑπομένης εἶναι

$\sigma<\sigma'<\sigma''$,... κλπ.



Σχ. 161.

Ὥστε ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ εὐθ. σχήματος βαίνει ἀπαύστως αὐξανομένη, ἐφ᾽ ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζεται. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη μένει πάντοτε μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου εὐθ. σχήματος π.χ. τοῦ ΗΘΙ, ἔπεται ὅτι ἔχει ὅριον (1). ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Ἔστωσαν Σ, Σ΄, Σ΄΄... αἱ περίμετροι τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν εὐθ. σχημάτων ΗΘΙ, ΚΛΜΝΙΡ,.... ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου. Ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων περιβάλλει τὴν ἑπομένην εἶναι $\Sigma > \Sigma' > \Sigma'' > \ldots$ κλπ.

Ὥστε ἡ περίμετρος περιγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ εὐθ. σχήματος βαίνει ἀπαύστως ἐλαττουμένη, ἐφ᾽ ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διπλασιάζεται. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη μένει πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τυχόντος ἐγγεγραμμένου εὐθ. σχήματος, π.χ. τοῦ ΑΒΓ, ἔπεται ὅτι ἔχει ὅριον. ὅ. ἔ. δ.

Γ΄. Τὰ εὐθ. σχήματα ΑΒΓ, καὶ ΗΘΙ εἶναι ὅμοια, ὡς κανονικὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν. Ἄρα θὰ εἶναι

$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{AB}{H\Theta}$ καὶ $\frac{OT}{OA} = \frac{AB}{H\Theta}$ ὅθεν $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{OT}{OA}$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος ταύτης δὲν ἐλήφθη ὑπ᾽ ὄψιν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν εὐθ. σχημάτων, ἔπεται ὅτι αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀπαύστως διπλασιάζηται, ἤτοι καὶ τὰ ὅρια τῶν μελῶν αὐτῶν εἶναι ἴσα, δηλ. $ὅρ\,\frac{\sigma}{\Sigma} = ὅρ\,\frac{OT}{OA}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ὅρ\,\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{ὅρ\sigma}{ὅρ\Sigma}$ καὶ $ὅρ\,\frac{OT}{OA} = \frac{ὅρOT}{ὅρOA} = \frac{OA}{OA} = 1$,

συνάγομεν ὅτι $\frac{ὅρ\sigma}{ὅρ\Sigma} = 1$, ὅθεν $ὅρ\sigma = ὅρ\Sigma$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. *Ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων δύο ἀντιστοίχων κανονικῶν εὐθ. σχημάτων ἔχει ὅριον μηδέν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀπαύστως διπλασιάζεται.*

ΣΗΜ. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ προηγούμενον Θεώρημα καὶ Πόρισμα ἰσχύει καὶ διὰ τὰς περιμέτρους μὴ κλειστῶν τεθλασμένων καὶ ἀντιστοίχων γραμμῶν.

§ 242. Ἀνάπτυγμα καὶ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τόξου.—Ἐπὶ εὐθείας ΟΧ *(Σχ. 162)* ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ο ἂς λάβωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ,.. ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς περιμέτρους ἐγγεγραμμένων εἰς δεδομένον κύκλον κανονικῶν εὐθ. σχημάτων, ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον τοῦ προηγουμένου ἀριθμὸν πλευρῶν. Εἶτα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἂς λάβωμεν ἕτερα τμήματα ΟΕ, ΟΖ,

(1) Ἡ θεωρία τῶν ὁρίων εἶναι γνωστὴ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας.

ΟΗ, ΟΘ... ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων εὐθ. σχημάτων.

Σχ. 162.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν τὰς προηγουμένας ἰδιότητας κατανοοῦμεν ὅτι τὰ μὲν ἄκρα Α, Β, Γ, Δ... βαίνουσιν ἀπομακρυνόμενα τοῦ Ο, τὰ δὲ Ε, Ζ, Η, Θ... πλησιάζουσι πρὸς αὐτό· πάντα δὲ πλησιάζουσιν ἀπαύστως πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ.

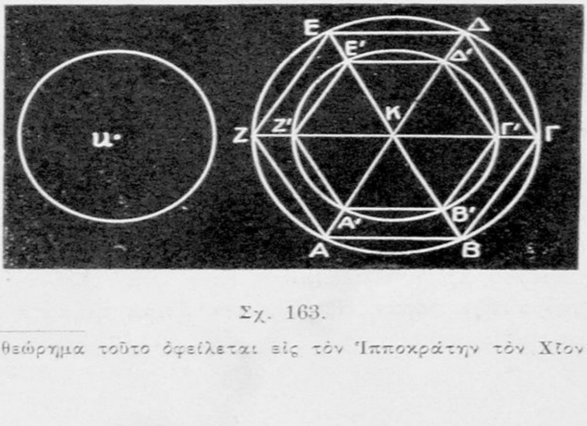
Κατ᾿ ἀκολουθίαν τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ... αὐξανόμενα καὶ τὰ ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ ἐλαττούμενα τείνουσι πάντα πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ τμῆμα ΟΜ. Τοῦτο εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ περίμετροι τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν εὐθ. σχημάτων· καλεῖται δὲ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας.

Τὸ μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος περιφερείας καλεῖται μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης.

ΣΗΜ. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τόξου κατανοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει εὐθ. τμῆμα, εἰς ὃ τείνει ἡ περίμετρος κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον καὶ ἡ περίμετρος τῆς ἀντιστοίχου περιγεγραμμένης. Τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται *ἀνάπτυγμα* τοῦ τόξου, τὸ δὲ μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος τόξου καλεῖται *μῆκος τοῦ τόξου.*

§ 243. Θεώρημα ΙΙ.— *Ὁ λόγος δύο περιφερειῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν* (1).

Ἔστωσαν δύο κύκλοι κ καὶ Κ *(Σχ. 163)*, ὧν τὰς ἀκτῖνας κα-



Σχ. 163.

(1) Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον (450 π.Χ.).

λέσωμεν ἀντιστοίχως ρ καὶ Ρ, τὰς δὲ περιφερείας γ καὶ Γ. Λέγω ὅτι $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\rho}{P}$.

Ἀπόδειξις. Καθιστῶμεν τοὺς κύκλους τούτους ὁμοκέντρους καὶ διαιροῦντες τὴν μίαν (π. χ. τὴν ἐξωτερικὴν) περιφέρειαν εἰς ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ, ΖΑ ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ..., ΚΖ. Οὕτω καὶ ἡ ἄλλη περιφέρεια διαιρεῖται εἰς τὰ ἴσα τόξα Α'Β', Β'Γ', Γ'Δ',... Ζ'Α'. Ἐὰν ἤδη ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθησαν ἀμφότεραι αἱ περιφέρειαι, ἐγγράφονται τὰ κανονικὰ εὐθ. σχήματα ΑΒΓΔΕΓ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ', τὰ ὁποῖα ἔχοντα τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ἐὰν δὲ κληθῶσι Σ καὶ σ αἱ περίμετροι αὐτῶν θὰ εἶναι

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{A'B'}{AB} \text{ καὶ } \frac{KA'}{KA}=\frac{A'B'}{AB}, \text{ ἄρα } \frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{KA'}{KA}=\frac{\rho}{P}.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος ταύτης δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων εὐθ. σχημάτων, ἔπεται ὅτι αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀπαύστως διπλασιάζηται, ἤτοι ὅρ$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\rho}{P}$ ἢ $\frac{\text{ὅρ}\sigma}{\text{ὅρ}\Sigma}=\frac{\rho}{P}$ ὅθεν (§ 241, 242) $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\rho}{P}$ ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δύο τόξα εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα ἔχουσι λόγον ἴσον τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

§ **Πόρισμα Ι.**—*Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι σταθερός, ἤτοι δι' ὅλας τὰς περιφερείας ὁ αὐτός.*

Ἐπειδὴ $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\rho}{P}=\frac{2\rho}{2P}$, ἔπεται εὐκόλως ὅτι $\frac{\gamma}{2\rho}=\frac{\Gamma}{2P}$.

Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παριστῶσιν εἰς τὰ συγγράμματα ὅλων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ γράμματος π. Ἀπεδείχθη δὲ ὅτι οὗτος εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, οὗ ἔχουσιν ὑπολογισθῇ μέχρι σήμερον πλείονα τῶν ἑπτακοσίων δεκαδικῶν ψηφίων.

Πρῶτος ὁ Ἕλλην Μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης (287—212 π. Χ.) εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}=3{,}1428$· ἡ τιμὴ αὕτη διαφέρει τῆς ἀληθοῦς 3,141592653.., διαφορὰν μικροτέραν τοῦ 1/1000.

Ὁ Πτολεμαῖος (87—167 μ. Χ.) εὗρεν ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ π. τὴν 3,14166...,ὁ δὲ Ὀλλανδὸς γεωμέτακης A. Métius (1571—1635 μ.Χ.) εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὸν ἀριθμὸν 355/113=3,1415920. Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς θέλομεν συνήθως κάμει χρῆσιν τῆς κατὰ προσέγγισιν 1/100000 τιμῆς 3,14159.

Πόρισμα ΙΙ.—*Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.*

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{2\rho}=\pi$ προκύπτει ὅτι $\gamma=2\rho\pi$.

Ἀσκήσεις. 450) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος 5 μέτ.;

451) Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς περιφερείας 18,84954 μέτ.;

452) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς εἰς κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 4 μ. ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ πόσον τὸ τῆς περὶ τὸ αὐτὸ ἑξάγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας;

453 Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν ἡ περιγεγραμένη περιφέρεια ἔχει μῆκος $4\pi\sqrt{3}$;

454) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2 μ. ἐγγεγραμμένης περιφερείας;

455) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τετράγωνον πλευρᾶς $2\sqrt{2}$ μέτρων;

456) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων περιφερειῶν.

457) Νὰ γραφῇ περιφέρεια τριπλασία δεδομένης περιφερείας.

§ 244. Εὕρεσις τοῦ μήκους τόξου.—Ἔστω τ τὸ μῆκος τόξου μ° καὶ τὸ γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, εἰς ἣν τοῦτο ἀνήκει. Κατὰ τὴν γνωστὴν (§ 165 Πόρ. 1) ἰδιότητα εἶναι:

$$\frac{\tau}{\gamma}=\frac{\mu}{360}, \quad \text{ὅθεν} \quad \tau=\frac{\mu}{360}.\gamma. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\gamma=2\pi\rho$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\tau=2\pi\rho.\frac{\mu}{360} \quad \text{ἢ} \quad \tau=\pi\rho.\frac{\mu}{180} \qquad (2)$$

Οὕτω τόξον 30° καὶ ἀκτῖνος 10 μ. ἔχει μῆκος

$$10.\pi.\frac{30}{160}=5,23598 \text{ μ.}$$

Ἀσκήσεις. 458) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 59° καὶ ἀκτῖνος 3 μ.;

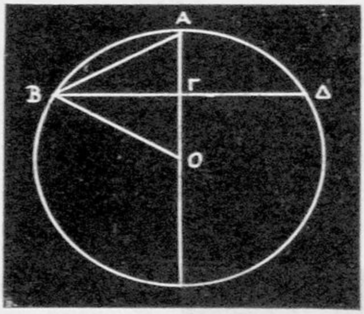
459) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 29° 15′ καὶ ἀκτῖνος 4,60 μ.;

460) Πόσον μοιρῶν τόξον ἀκτῖνος 5,40 μ. ἔχει μῆκος 2,11 π.;

461) Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς περιφερείας, τῆς ὁποίας τόξον 32° 20′ 15″ ἔχει μῆκος 0,2387 π μέτρα;

462) Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τρία τόξα περατούμενα εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτελουμένης γραμμῆς.

§ 245. Πρόβλημα Ι. — *Ἐκ τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἐκ τοῦ μήκους ρ τῆς ἀκτῖνος νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθ. πλευρῶν.*



Σχ. 164.

Λύσις. Ἐὰν (ΒΔ)=α καὶ ἡ διάμετρος ΑΟΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι πλευρά, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος χ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Παρατηροῦντες ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀξεῖα εὑρίσκομεν ὅτι $\chi^2=2\rho^2-2\rho\,(\text{ΟΓ})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\text{ΟΓ})^2=\rho^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{4\rho^2-\alpha^2}{4}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\chi^2=2\rho^2-2\rho\sqrt{\frac{4\rho^2-\alpha2^2}{4}}$, ὅθεν

$$\chi=\sqrt{2\rho^2-\rho\sqrt{4\rho^2-\alpha^2}}. \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις. 463) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος.

464) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δωδεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

465) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

466) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

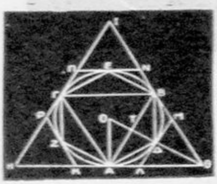
§ 246. Εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ π. — Διὰ τοῦ προηγουμένως εὑρεθέντος τύπου (1), ἂν θέσωμεν ρ=1 καὶ α=1, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ 12ου, εἶτα 24ου, 48ου, κτλ. καὶ τὰς ἀντιστοίχους περιμέτρους αὐτῶν. Οὕτως εὑρέθη ὅτι τοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον (ρ=1) ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει 3072 πλευράς, ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος 6,28318 μ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο δύναται κατὰ προσέγγισιν νὰ θεωρηθῇ ὡς μῆκος τῆς περιφερείας, ἕπεται ὅτι 2π=6,28318 καὶ ἑπομένως π=3, 14159.

Εὐνόητον ὅτι, ἂν ἐξακολουθήσωμεν ὑπολογίζοντες οὕτω τὰς περιμέτρους τοῦ 6144ου, 12288ου..., θὰ εὕρωμεν ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ π.

Β΄. Μέτρησις τοῦ κύκλου.

§ 247. Θεώρημα Ι.— *Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ εὐθ. σχήματο ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τὸ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένο ἔχουσι κοινὸν ὅριον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀπαύστως δι πλασιάζηται.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 165)* ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο κανονικὸ εὐθ. σχῆμα καὶ ΗΘΙ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον. Λέγω ὅτι τ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τούτων ἔχει ὅριον, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ δ' ἀμφό τερα τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑκατέρου ἀπαύστως διπλασιάζηται.



Σχ. 165.

Ἀπόδειξις. Α΄. Ἐγγράφοντες εἰς τὸν κύκλον Ο σειρὰν εὐθ. σχημάτων ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ ἀρχομένων καὶ ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν βαίνει ἀπαύστως αὐξανόμενον ἀλλὰ μένει πάντοτε μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου εὐθ. σχήματος π.χ. τοῦ ΗΘΙ. Ἔχει ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ὅριον. ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Ὁμοίως περιγράφοντες σειρὰν εὐθ. σχημάτων ἀπὸ τοῦ ΗΘΙ, ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ προηγουμένου κατανοοῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν βαίνει ἀπαύστως ἐλαττούμενον ἀλλὰ μένει πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ τυχόντος ἐγγεγραμμένου εὐθ. σχήματος π.χ. τοῦ ΑΒΓ. Ἔχει ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ὅριον. ὅ. ἔ. δ.

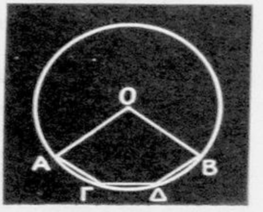
Γ΄. Καλοῦντες ε καὶ Ε ἀντιστοίχως τὰ ἐμβαδὰ τῶν κανονικῶν εὐθ. σχημάτων ΑΒΓ καὶ ΗΘΙ συνάγομεν ὅτι $\dfrac{ε}{Ε}=\dfrac{(ΑΒ)^2}{(ΗΘ)^2}$ καὶ $\dfrac{ΑΒ}{ΘΗ}=\dfrac{ΟΤ}{ΟΑ}$, ὅθεν $\dfrac{ε}{Ε}=\dfrac{(ΟΤ)^2}{(ΟΑ)^2}$. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχωσι τὰ ἀντίστοιχα κανονικὰ εὐθ. σχήματα, συνάγομεν ὅτι ὅρ $\dfrac{ε}{Ε}=$ ὅρ $\dfrac{(ΟΤ)^2}{(ΟΑ)^2}$ ἢ

$$\frac{ὅρε}{ὅρΕ}=\frac{ὅρ(ΟΤ)^2}{(ΟΑ)^2} \qquad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(ΟΤ)^2=(ΟΤ).\ (ΟΤ)$, ἕπεται ὅτι $ὅρ.(ΟΤ)^2=[ὅρ,(ΟΤ)]^2=Α^2$ ἔνθα Α εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου· ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται $\dfrac{ὅρ.ε}{ὅρ.Ε}=\dfrac{Α^2}{Α^2}=1$, ὅθεν ὅρε $=$ ὅρΕ. ὅ. ἔ. δ.

§ 248. Ἐμβαδὸν κύκλου.—*Τὸ κοινὸν ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀπαύστως διπλασιάζηται, καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.*

ΣΗΜ. Ἐὰν εἰς τόξον ΑΒ περιφερείας Ο *(Σχ. 166)* ἐγγράψωμεν κανονικὴν τεθλ. γραμμὴν ΑΓΔΒ καὶ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ, σχηματίζεται τὸ εὐθ. σχῆμα ΟΑΓΔΒ, ὅπερ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει ὅριον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς εἰς τὸ τόξον ΑΒ ἐγγεγραμμένης κανονικῆς τεθλ. γραμμῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται. Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΑΒ.

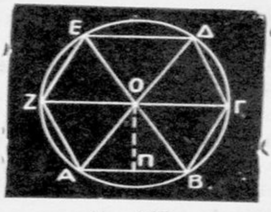


Σχ. 166.

§ 249. Θεώρημα Ι.—*Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.*

Ἔστω κύκλος τις Ο *(Σχ. 167)*, Γ ἡ περιφέρεια, Ρ ἡ ἀκτὶς καὶ Κ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Λέγω ὅτι $K = \Gamma . \frac{P}{2}$.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τοῦτον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα π. χ. ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἄγομεν τὰς εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καταληγούσας ἀκτῖνας.



Σχ. 167.

Ἐπειδὴ (ΟΑΒ)=1/2 (ΑΒ) (ΟΠ)
(ΟΒΓ)=1/2 (ΒΓ) (ΟΠ)....
(ΟΖΑ) = ½ (ΑΖ) (ΟΠ), ἔπεται ὅτι

(ΑΒΓΔΕΖ)=1/2(ΟΠ) [(ΑΒ)+ΒΓ)+...+(ΖΑ)].

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ τὸ κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, ἔπεται ὅτι

ὅρ. (ΑΒΓΔΕΖ)=1/2. ὅρ. (ΟΠ) ὅρ. [(ΑΒ)+(ΒΓ)+...+(ΖΑ)].

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ὅρ. (ΑΒΓΔΕΖ)=Κ, ὅρ. (ΟΠ)=Ρ καὶ ὅρ. [(ΑΒ)+(ΒΓ)+.....+(ΖΑ)]=Γ, αὕτη γίνεται $K = \frac{1}{2} P . \Gamma$.

ἢ $K = \Gamma . \frac{P}{2}$ ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν κ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, τ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\kappa = \tau \frac{P}{2}$.

Πόρισμα Ι. — *Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.*

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $K = \Gamma . \frac{P}{2}$ καὶ $\Gamma = 2\pi P$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι

$$K = \pi P^2$$

Πόρισμα ΙΙ. — *Ὁ λόγος δύο κύκλων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἀσκήσεις. 467) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 2 μέτρων.

468) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἐγγράφεται κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 5 μέτρων.

469) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν περιεχόμενος δακτύλιος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς κύκλον, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἐκ σημείου τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἀγομένην ἐφαπτομένην τῆς ἐσωτερικῆς.

470) Αἱ ἐκ σημείου περιφερείας ἀγόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τινὸς χορδαὶ ἔχουσι μῆκος 10μ. ἡ μία καὶ 7,5μ. ἡ ἄλλη. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου;

471) Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι κατὰ $(3\sqrt{3} - 4)$ τ. μ. μεγαλύτερον τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

472) Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων κύκλων.

473) Τετράγωνόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 6,25 τ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου; Καὶ πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου περιεχομένης ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου τούτου;

474) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν εὐθ. σχήματος περιγεγραμμένου περὶ κύκλον εἶναι γινόμενον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ εὐθ. σχήματος τούτου.

475) Αἱ ἀκτῖνες δύο ὁμοκέντρων κύκλων διαφέρουσι κατὰ 1 μ. τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν κατὰ 15,70794 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

§ 250. Τετραγωνισμὸς κύκλου. — *Καλεῖται τετραγωνισμὸς κύκλου ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δεδομένον κύκλον.*

Ἐπειδὴ $K = \Gamma . \frac{P}{2}$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου. Ἂν ἑπομένως ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοιοῦτον τρίγωνον, μετασχηματίζοντες αὐτὸ εἰς ὀρθογώνιον καὶ τοῦτο εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον θὰ ἐτετραγωνίζομεν τὸν κύκλον.

Τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς τοῦ ῥηθέντος τριγώνου ἀπησχόλησεν ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας τοὺς μαθηματικούς, μέχρις οὗ τῷ 1882 ὁ Γερμανὸς Μαθηματικὸς Lindemann ἀπέδειξεν ὅτι ἡ κατασκευὴ αὔτη διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου εἶναι ἀδύνατος. Ὁ τετραγωνισμὸς κατ' ἀκολουθίαν τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατος.

§ 251. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλικοῦ τομέως.

Ἔστω ΑΟΒ *(Σχ. 166)* κυκλικὸς τομεὺς ἔχων ἀκτῖνα ρ, μ τὸ μέτρον καὶ τ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ αὐτοῦ. Ἐὰν κληθῇ ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 249 Σημ.) θὰ εἶναι $\varepsilon = \tau . \frac{\rho}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 244) $\tau = \pi\rho \frac{\mu}{180}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $\varepsilon = \frac{\pi\rho^2}{2} . \frac{\mu}{180}$ ἢ $\varepsilon = \pi\rho^2 . \frac{\mu}{360}$.

Ἀσκήσεις. 476) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 60° καὶ ἀκτῖνος 6 μέτρων.

477) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὅστις σχηματίζεται, ἂν μὲ κέντρον μίαν κορυφὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ α γραφῇ τόξον περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἄλλων κορυφῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

478) Κυκλικὸς τομεὺς 30° ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{\pi}{3}$ τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει;

479) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροτέρου τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται κύκλος ἀκτῖνος ρ ὑπὸ χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου α') κανονικοῦ ἑξαγώνου β') ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ γ') τετραγώνου.

480) Τὰ κέντρα δύο ἴσων κύκλων ἀκτῖνος ρ κεῖνται εἰς ἀπόστασιν $\rho\sqrt{3}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐπιφανείας.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Δ' βιβλίου.

481) Ἐκ τῶν χορδῶν α καὶ β δύο διαδοχικῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ, νὰ εὑρεθῇ ἡ χορδὴ τοῦ ἀθροίσματος ΑΒΓ τῶν τόξων τούτων.

482) Ἐκ τῆς χορδῆς α τόξου καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ νὰ εὑρεθῇ ἡ χορδὴ τοῦ διπλασίου τόξου.

483) Ἐκ τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου.

484) Ἐὰν ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ, ΒΔ, ΔΖ, ΖΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ ἑτέρου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓΔΕΖ.

485) Ἔστω Η εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἔχοντος πλευρὰν α. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ α τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν σχημάτων, εἰς ἃ τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΑΗ.

486) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται κύκλος ἀκτῖνος ρ ὑπὸ χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου καὶ δωδεκαγώνου.

487) Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰ αὐτοῦ γράφομεν τόξα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τούτου τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν τόξων τούτων περιεχομένης ἐπιφανείας.

488) Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ γράφομεν τόξα ἐντὸς τοῦ τετραγώνου κείμενα. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν τόξων τούτων περιεχομένης ἐπιφανείας.

489) Τρεῖς κύκλοι ἴσοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἀνὰ δύο ἐκτός. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτῶν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν περιεχομένης ἐπιφανείας.

490) Δεδομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς ἡμικύκλιον γράφομεν ἐκτὸς αὐτοῦ ἡμιπεριφερείας ἐχούσας διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν περιεχομένη ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. (Τὰ μέρη, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια αὐτη καλοῦνται μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους).

491) Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ δεδομένου ἡμικυκλίου ὁρίζομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ γράφομεν ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου ἡμιπεριφερείας ἐχούσας διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν περιεχομένης ἐπιφανείας συναρτήσει τῆς ἐκ τοῦ Γ καθέτου εἰς τὴν διάμετρον μέχρι τῆς δεδομένης ἡμιπεριφερείας. Εἰς ποίαν θέσιν τοῦ Γ ἡ ἐπιφάνεια αὐτη γίνεται μεγίστη;

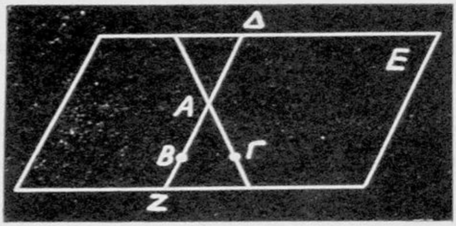
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα.—Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἐπιπέδου.

§ 252. Θεώρημα I.—*Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ (Σχ. 168) ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

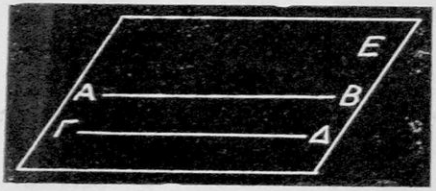


Σχ. 168.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν ἐπίπεδον Ε καὶ ἂς χαράξωμεν ἐπ' αὐτοῦ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΔΖ· ἂς τεθῇ δὲ τοῦτο οὕτως ὥστε ἡ ΔΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐὰν τότε τὸ Ε νοηθῇ στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ τὸ Γ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτοῦ, θὰ περιέχῃ εἰς τὴν θέσιν ταύτην πλὴν τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΑΓ. Ἄλλο δὲ ἐπίπεδον δὲν δύναται νὰ διέλθῃ δι' αὐτῶν, διότι, ἄλλως διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ θὰ διήρχοντο δύο διάφορα ἐπίπεδα, ὅπερ ἄτοπον (§ 17). Ὥστε διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἤτοι αὗται ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. — *Τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου* (§ 17).

Πόρισμα II. — *Εὐθεῖα καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*



Σχ. 169.

§ 253. Θεώρημα II.—*Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 169) ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ε. Ἂν δὲ διήρχετο δι᾽ αὐτῶν καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ θὰ διήρχοντο δύο διάφορα ἐπίπεδα, ὅπερ ἄτοπον. Διέρχεται λοιπὸν διὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἤτοι αὗται ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 492) Πᾶσα εὐθεῖα ὁριζομένη ὑπὸ σημείου ἐπιπέδου καὶ ἑτέρου σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένου οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

493) Ἐὰν εὐθεῖα ἔχῃ μετὰ ἐπιπέδου ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, πρὸς οὐδεμίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι παράλληλος.

494) Ἐὰν ἐκ δύο εὐθειῶν ε καὶ ε΄ ἡ μὲν ε κεῖται ἔν τινι ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ε΄ ἔχῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἓν μόνον σημεῖον ἐκτὸς τῆς ε κείμενον, διὰ τῶν εὐθειῶν ε καὶ ε΄ οὐδὲν ἐπίπεδον διέρχεται.

Τομαὶ εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων.

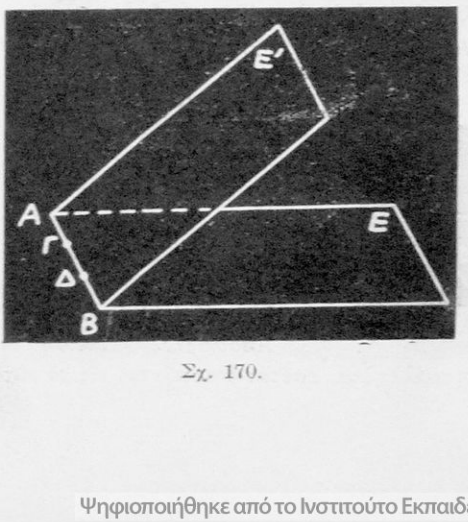
§ 254. Ἀξίωμα.— *Ἐὰν δύο σημεῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν ἐπιπέδου, ἡ ὑπ᾽ αὐτῶν ὁριζομένη εὐθεῖα ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.*

Πᾶσα εὐθεῖα ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ ἐπιπέδου καλεῖται τέμνουσα αὐτοῦ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπιπέδου καὶ τυχούσης αὐτοῦ τεμνούσης καλεῖται *ποὺς* ἢ *ἴχνος* τῆς εὐθείας ταύτης.

§ 255. Τομὴ δύο ἐπιπέδων.— *Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων* καλεῖται τομὴ αὐτῶν.

§ 256. Θεώρημα Ι.— *Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή.*



Σχ. 170.

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Ε καὶ Ε′ *(Σχ. 170)* ἔχοντα κοινὰ σημεῖα Α Β, Γ, κτλ. Λέγω ὅτι πάντα κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Δύο τυχόντα κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἥτις κεῖται ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε′. Πᾶν δὲ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Γ τῶν ἐπιπέδων κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ, διότι ἂν τοῦτο ἔκειτο ἐκτὸς αὐτῆς, διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ Γ θὰ διήρχετο δύο ἐπίπεδα, ὅπερ ἄτοπον (§ 252 Π ΙΙ).

Ὥστε γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε′ εἶναι ἡ ΑΒ, ἤτοι ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 495) Ἐὰν ἐπίπεδα διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἄλλου τέμνοντος αὐτὴν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

496) Εὐθεῖα ΟΓ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ. Σημεῖόν τι δὲ Δ ἐπ᾽ οὐδεμιᾶς τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν κεῖται. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐπιπέδων ΟΑΔ, ΟΒΔ, ΟΓΔ;

Ἐπίπεδον καὶ εὐθεῖαι κάθετοι.

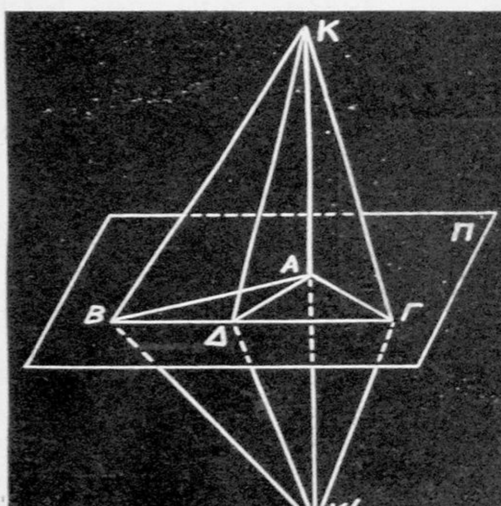
§ 257. Εὐθεῖα κάθετος ἢ πλαγία πρὸς ἐπίπεδον.— *Εὐθεῖά τις λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἂν αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τούτου διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.*

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Εὐθεῖα λέγεται πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, ἂν τέμνῃ αὐτὸ καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ᾽ αὐτό.

§ 258. Θεώρημα Ι. — *Ἐὰν εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπ᾽ ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ταύτας, αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.*

Ἔστω εὐθεῖα ΑΚ κάθετος ἐπ᾽ ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ (*Σχ. 171*). Λέγω ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 171.

Ἀπόδειξις. Χαράσσομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΔ διερχομένην διὰ τοῦ Α καὶ ἑτέραν ΒΔΓ τέμνουσαν τὰς ἄλλας εἰς τὰ σημεῖα Β, Δ, Γ. Προεκτείνομεν εἶτα τὴν ΑΚ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΚ′=ΑΚ, ἄγομεν δὲ καὶ τὰς εὐθείας ΚΒ, ΚΔ, ΚΓ, Κ′Β, Κ′Δ, Κ′Γ.

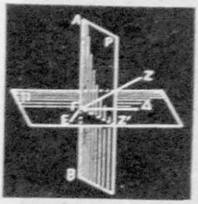
Ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ΚΚ′, ἕπεται ὅτι ΒΚ = ΒΚ′ καὶ ΓΚ = ΓΚ′, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΒΓ, Κ′ΒΓ εἶναι ἴσα. Ἐὰν δὲ τὸ ΚΒΓ στραφῇ περὶ τὴν ΒΓ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἄλλου τριγώνου, τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ ἡ κορυφὴ Κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Κ′. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ μένει ἀκίνητον, ἡ εὐθεῖα ΚΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Κ′Δ· ἄρα ΚΔ=Κ′Δ.

Τὸ τρίγωνον ὅθεν ΚΔΚ′ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ διάμεσος ΔΑ αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΚΑΚ′,

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ Π διερχομένην διὰ τοῦ Α. Εἶναι ἄρα αὕτη κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. ὅ. ἔ. δ.

§ 259. Θεώρημα ΙΙ.—*Πᾶσαι αἱ ἐκ σημείου εὐθείας ΑΒ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖαι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.*

Ἀπόδειξις. Δύο τυχοῦσαι ΓΔ καὶ ΓΕ τῶν καθέτων τούτων ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἐπιπέδου τινὸς Π, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἂν ἄλλη τις τῶν καθέτων τούτων, π.χ. ἡ ΓΖ, ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ Π, τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν εὐθειῶν ΓΖ καὶ ΓΑ θὰ ἔτεμνε τὸ Π κατά τινα εὐθεῖαν ΓΖ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Θὰ ἤγοντο λοιπὸν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ ἐκ τοῦ Γ δύο κάθετοι ΓΖ καὶ ΓΖ′ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον (§ 38).

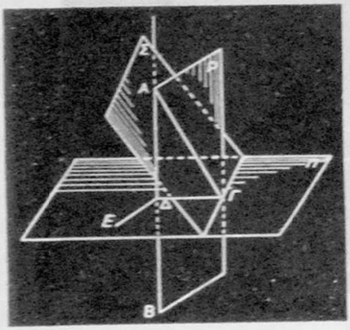


Σχ. 172.

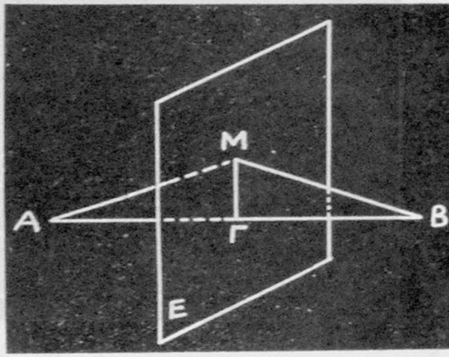
Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται εὐκόλως ἡ ἀκόλουθος ἰδιότης.

§ 260. Θεώρημα ΙΙΙ. — *Δι' ἑκάστου σημείου Γ εὐθείας ΑΒ ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ ἓν μόνον.*

§ 261. Πρόβλημα Ι. — *Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος* *τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων δεδομένου εὐθ. τμήματος ΑΒ; (Σχ. 174).*



Σχ. 173.



Σχ. 174.

'Ασκήσεις. 497) Ἂν εὐθεῖα τέμνῃ πλαγίως ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος πρὸς εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ μίαν μόνον.

498) Ἂν εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἰς σημεῖον Α, τὸ ὑπ' αὐτῆς καὶ τυχούσης πλαγίας ΑΒ ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν τοῦ Π διερχομένην διὰ τοῦ Α καὶ μίαν μόνον.

499) Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον δεδομένης εὐθείας ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων.

Κάθετος καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον εὐθεῖαι.

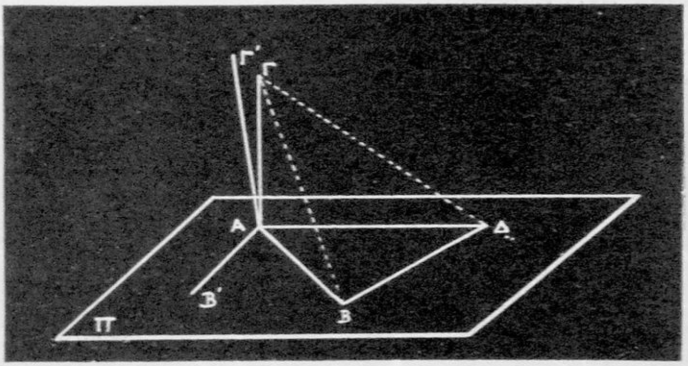
§ 262. Θεώρημα Ι.—*Δι' ἑκάστου σημείου Α ἐπιπέδου Π ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου ἄγεται εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ μία μόνον.*

'Απόδειξις. α') Χαράσσομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π εὐθεῖαν ΔΒ καὶ ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν κάθετον ΑΒ. Ἐκ τοῦ Β ἄγομεν ἐπὶ τὴν ΔΒ ἑτέραν κάθετον ΒΓ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ ὑψοῦμεν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνια ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $(ΑΓ)^2+(ΑΒ)^2=(ΓΒ)^2$, $(ΑΔ)^2-(ΑΒ)^2=(ΒΔ)^2$, ἐξ ὧν εὐκόλως ἕπεται ὅτι $$(ΑΓ)^2+(ΑΔ)^2=(ΓΒ)^2+(ΒΔ)^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι $(ΓΒ)^2+(ΒΔ)^2=(ΓΔ)^2$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$(ΑΓ)^2+(ΑΔ)^2=(ΓΔ^2)$. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἐπειδὴ

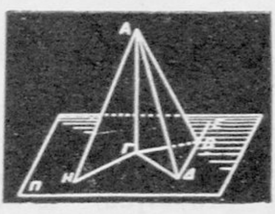


Σχ. 175.

δὲ ἐκ κατασκευῆς εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν Π.

Ἂν διὰ τοῦ Α ἤγετο καὶ ἄλλη κάθετος ΑΓ′ ἐπὶ τὸ Π, τὸ ἐπίπεδον ΓΑΓ′ θὰ ἔτεμνε τὸ Π κατά τινα εὐθεῖαν ΑΒ′, πρὸς ἣν ἀμφότεραι αἱ ΑΓ, ΑΓ′ θὰ ἦσαν κάθετοι, ὅπερ ἄτοπον.

6′) Ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 176)*, ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς ἑξῆς. Χαράσσομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΔΕ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ· εἶτα δὲ ἄγομεν τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π κειμένην καὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τέλος ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ τέμνουσαν τὴν ΔΕ εἴς τι σημεῖον Δ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔ.



Σχ. 176.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ εἶναι ὀρθογώνια ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες

$$(ΑΓ)^2+(ΓΒ)^2=(ΑΒ)^2 \text{ καὶ}$$

$(ΓΔ)^2-(ΓΒ)^2=(ΔΒ)^2$, ἐξ ὧν ἕπεται εὐκόλως ὅτι $(ΑΓ)^2+((ΓΔ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΔ)^2$.

Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ εἶναι $(ΑΒ)^2+(ΒΔ)^2=(ΑΔ)^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΑΓ)^2+(ΓΔ)^2=(ΑΔ)^2$.

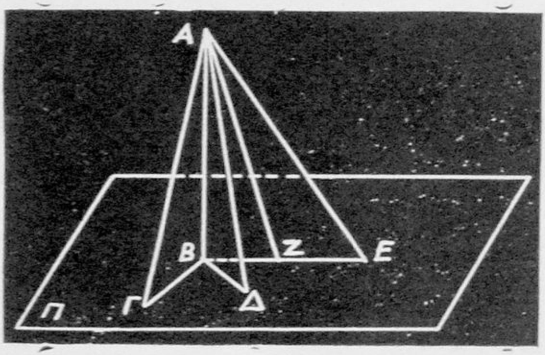
Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΒ, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἂν ἐκ τοῦ Α ἤγετο καὶ ἄλλη κάθετος ΑΗ ἐπὶ τὸ Π, τὸ ἐπίπεδον ΑΗΓ θὰ ἔτεμνε τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΗ, πρὸς ἣν ἀμφότεραι αἱ ΑΓ καὶ ΑΗ θὰ ἦσαν κάθετοι, ὅπερ ἄτοπον.

Ὥστε ἐκ τοῦ Α ἄγεται πάντοτε μία κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ μία μόνον. ὅ. ἔ. δ.

§ 263. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου κειμένου ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ τυχοῦσαι πλάγιαι. α') Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας. β') Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι. γ') Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἶναι ἄνισοι, μεγαλυτέρα δὲ τούτων εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.*

Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον ἐκτὸς ἐπιπέδου Π κείμενον, ΑΒ ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος καὶ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ πλάγιαι πρὸς αὐτὸ εὐθεῖαι τοιαῦται ὥστε ΒΓ = ΒΔ καὶ ΒΕ > ΒΓ *(Σχ. 177)*. Λέγω ὅτι α') Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, π.χ. τῆς ΑΓ, β') ΑΓ = ΑΔ καὶ γ') ΑΕ > ΑΓ.



Σχ. 177.

Ἀπόδειξις. α') Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ. ὅ. ἔ. δ.

β') Ἐπειδὴ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ΑΓ=ΑΔ. ὅ.ἔ.δ.

γ') Ἐπειδὴ ΒΕ>ΒΓ, ἂν ἐπὶ τῆς ΒΕ ληφθῇ τμῆμα ΒΖ ἴσον τῷ ΒΓ, τὸ Ζ θὰ κεῖται μεταξὺ Β καὶ Ε, ἤτοι ΒΕ>ΒΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ καὶ ΒΕ>ΒΖ, ἕπεται (§ 48 γ') ὅτι ΑΕ>ΑΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΒΖ=ΒΓ, ἕπεται ὅτι ΑΖ = ΑΓ καὶ ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται ΑΕ>ΑΓ. ὅ ἔ. δ.

§ 264. Θεώρημα ΙΙΙ.—(ἀντίστροφον τοῦ ΙΙ). *Ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου. α') Ἡ μικροτέρα ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. β') Οἱ πόδες ἴσων πλαγίων ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. γ') Οἱ πόδες ἀνίσων πλαγίων ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου καὶ περισσότερον ἀπέχει ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας πλαγίας.*

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

§ 265. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου.— *Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου καλεῖται τὸ ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης καθέτου ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα.*

Οὕτως ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 177)*, εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

Ἀσκήσεις. 500) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου δεδομένην ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου;

501) Ἐὰν εὐθεῖα σχηματίζῃ γωνίας ἴσας μὲ τρεῖς εὐθείας ἐπιπέδου διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

502) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν κορυφῶν δεδομένου τριγώνου;

503) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένων.

Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων.

§ 266. Θεώρημα Ι.— *Ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖάν τινα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὁ ποὺς τῆς δευτέρας ταύτης καθέτου* *καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς πρώτης, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.*

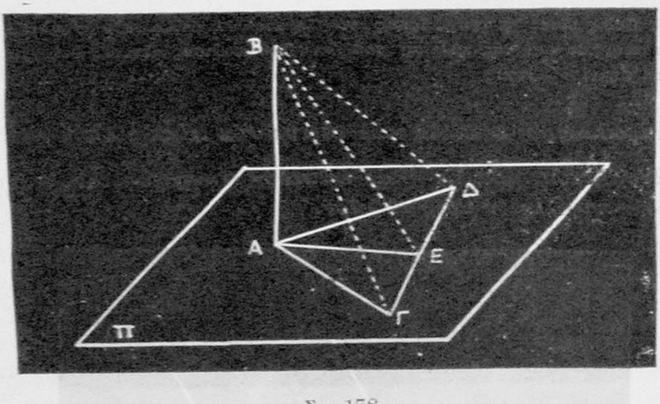
Ἔστω ΑΒ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ ΑΕ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ Π. Λέγω ὅτι ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ *(Σχ. 178)*.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΓΔ ἑκατέρωθεν τοῦ Ε τμήματα ΓΕ καὶ ΕΔ ἴσα, ἄγομεν δὲ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ καὶ ΒΔ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ, εἶναι ΑΓ=ΑΔ, ἄρα (§ 263) ΒΓ=ΒΔ, ἡ δὲ διάμεσος ΒΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΓΔ. ὅ. ἔ. δ.

§ 267. Θεώρημα II. — *Ἐὰν ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐπ' εὐθείας καθέτου πρὸς ἐπίπεδον ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖάν τινα τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἡ ὑπὸ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων ὁριζομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τούτου.*

Ἔστω ΒΑ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π *(Σχ. 178)* καὶ ΒΕ κάθετος



Σχ. 178.

ἐπί τινα εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου Π. Λέγω ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ληφθῇ ΓΕ=ΕΔ, θὰ εἶναι ΒΓ=ΒΔ, ἄρα καὶ ΑΓ=ΑΔ. Ἡ δὲ διάμεσος ΑΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. ὅ. ἔ. δ.

§ 268. Θεώρημα III.—*Ἐὰν ἐκ σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν δύο κάθετοι, ἔκ τινος δὲ σημείου τῆς μιᾶς τούτων ἀχθῇ κά-*

θετος ἐπὶ τὴν ἄλλην, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄλλης ταύτης καθέτου καὶ τῆς πρώτης εὐθείας.

Ἔστωσαν ΕΒ καὶ ΕΑ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ, ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ καὶ Π τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΕ καὶ ΓΔ. Λέγω ὅτι ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ΒΑ ἦτο πλαγία πρὸς τὸ Π, ἐκ τοῦ Β θὰ ἤγετο πρὸς αὐτὸ ἑτέρα κάθετος ΒΑ′. Ἀλλὰ τότε ἡ Α′Ε θὰ ἦτο (§ 267) κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ ἤγοντο δὲ ἐκ τοῦ Ε καὶ ἐν τῷ Π δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὸ Π. ὅ. ἔ. δ.

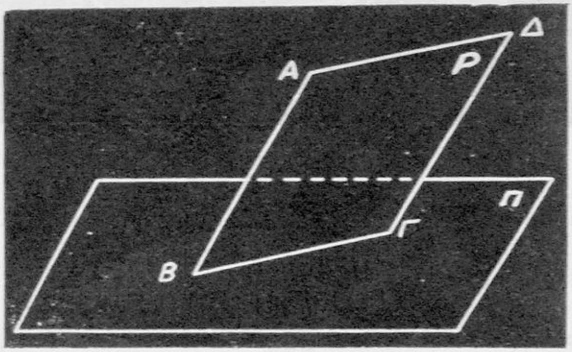
Ἀσκήσεις. 504) Ἐκ σημείου Α ἀπέχοντος 4 μέτ. δεδομένου ἐπιπέδου Π ἄγομεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ μὲ κέντρον τὸν πόδα Β, ἀκτῖνα δὲ 3 μέτ. γράφομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π περιφέρειαν κύκλου. Εἰς τυχὸν εἶτα σημεῖον Γ τῆς περιφερείας ταύτης ἄγομεν ἐφαπτομένην ΓΔ μήκους $2\sqrt{6}$ μέτ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ ;

505) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν δεδομένου τριγώνου ;

506) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν δεδομένου σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου κειμένου ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου, αἵτινες διέρχονται δι' ὡρισμένου σημείου αὐτοῦ ;

Παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ τέμνοντα αὐτὰς ἐπίπεδα.

§ 269. Θεώρημα I.—*Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ εὐθεῖαν, θὰ τέμνῃ καὶ πᾶσαν παράλληλον αὐτῇ εὐθεῖαν.*



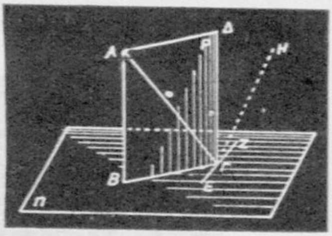
Σχ. 179.

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Π τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Β. Λέγω ὅτι τοῦτο θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἔχον μετὰ τοῦ Π κοινὸν σημεῖον τὸ Β τέμνει αὐτὸ κατά τινα εὐθεῖαν ΒΓ. Αὕτη δὲ τέμνει τὴν ΓΔ (§ 86) εἴς τι σημεῖον Γ, ὅπερ εἶναι προφανῶς σημεῖον καὶ τοῦ Π· τέμνει ἄρα τὸ Π τὴν ΓΔ εἰς τὸ Γ. ὅ. ἔ. δ.

§ 270. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ πᾶσαν παράλληλον αὐτῇ εὐθεῖαν.*

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Π ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ *(Σχ. 180)*. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.



(Σχ. 180.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, τὴν ὁποίαν ὁρίζουσι τὰ ἴχνη αὐτῶν Β καὶ Γ περιέχει δὲ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π ἡ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος εὐθεῖα ΕΓΖ, αὕτη οὖσα (§ 256) κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ κάθετος· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΕΖ, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Π. ὅ. ἔ. δ.

§ 271. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνουσαι καθέτως ἐπίπεδον Π εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ΓΔ δὲν ἦτο παράλληλος τῇ ΑΒ, θὰ ἤγετο διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα ΓΗ, ἥτις θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ Π (§ 270). Ἀλλὰ τότε θὰ ἤγοντο διὰ τοῦ Γ δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ Π, ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΓΔ παράλληλος τῇ ΑΒ. ὅ. ε. δ.

Πόρισμα Ι.—*Εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Ε εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.*

Ἄσκησις. 507) Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἀχθῇ εὐθεῖα

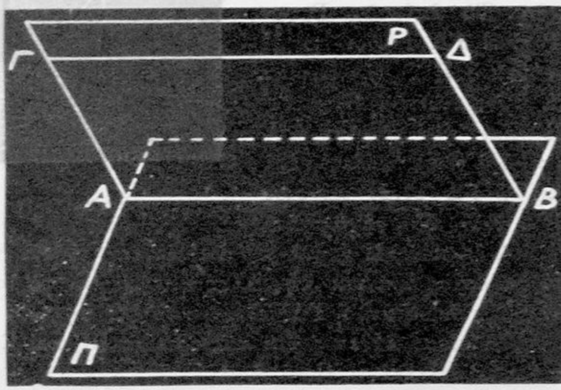
ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διάφορος τῆς ΑΔ, ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ.

Εὐθεῖα καὶ παράλληλον αὐτῇ ἐπίπεδον.

§ 272. Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον.—*Εὐθεῖά τις λέγεται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἂν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν τέμνωνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν, ἤτοι ἂν οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.*

§ 273. Θεώρημα I.—*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, πᾶσα εὐθεῖα ἑκατέρου παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν αὐτῶν εἶναι καὶ πρὸς τὸ ἕτερον ἐπίπεδον παράλληλος. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ (*Σχ. 181*) δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα κατὰ τὴν



Σχ. 181.

ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθεῖά τις τοῦ Ρ παράλληλος τῇ ΑΒ. Λέγω ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ΓΔ ἔτεμνε τὸ Π εἴς τι σημεῖον Μ, τοῦτο θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ΑΒ. Τότε δὲ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχοντα τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ τὸ σημεῖον Μ κοινὸν θὰ συνέπιπτον, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν. Διότι ἂν ἡ ΓΔ ἔτεμνε τὴν ΑΒ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Πόρισμα I. — *Ἐὰν εὐθεῖα ἐκτὸς ἐπιπέδου οὖσα εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖάν τινα αὐτοῦ, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.*

Πόρισμα II. — *Ἐὰν εὐθεῖα ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον Π, ἡ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀγομένη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π.*

Ἀσκήσεις. 508) Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς εὐθεῖαν καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

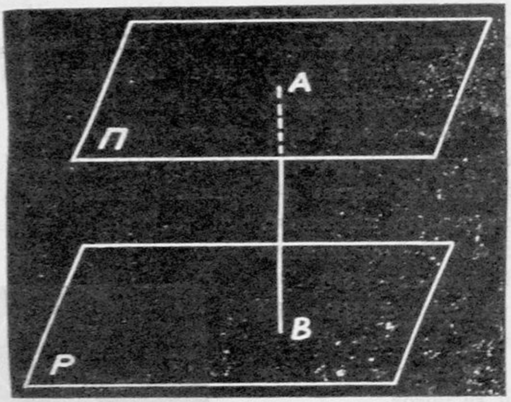
509) Ἐὰν εὐθεῖα Ε καὶ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Ε', ἡ εὐθεῖα Ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

510) Διὰ δεδομένης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν μὴ κειμένην μετὰ τῆς πρώτης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

511) Αἱ τομαὶ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὑπὸ ἄλλου παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Περὶ παραλλήλων ἐπιπέδων.

§ 274. Παράλληλα ἐπίπεδα.—*Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἂν δὲν τέμνωνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκβληθῶσιν, ἤτοι ἂν οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.*



Σχ. 182.

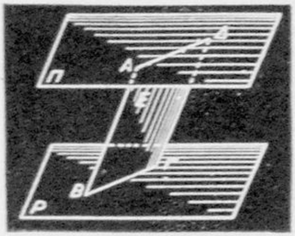
§ 275. Θεώρημα I.—*Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶχον κοινόν τι σημεῖον θὰ ἤγοντο ἐξ αὐτοῦ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον (§ 260).

§ 276. Θεώρημα ΙΙ. — *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα ἢ ἐπίπεδον τέμνον τὸ ἓν θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.*

α΄) Ἔστωσαν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ *(Σχ. 183)* καὶ εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα τὸ Π εἴς τι σημεῖον Α. Λέγω ὅτι αὕτη τέμνει καὶ τὸ Ρ.



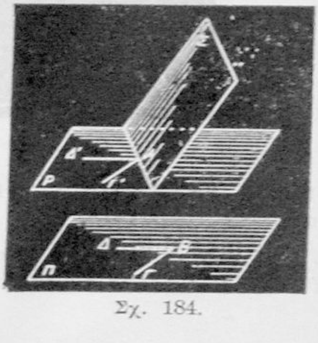
Σχ. 183.

Ἀπόδειξις. Διὰ τυχόντος σημείου Γ τοῦ ἐπιπέδου Ρ ἄγομεν εὐθεῖαν ΓΔ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Π τέμνει τὴν ΑΒ, θὰ τέμνῃ (§ 269) καὶ τὴν παράλληλόν της ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Δὲν δύναται δὲ ἡ ΓΔ νὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ, διότι ἄλλως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον Δ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Τὸ ἐπίπεδον Ρ τέμνει λοιπὸν τὴν ΓΔ εἰς τὸ Γ καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ. ὅ.ἔ.δ.

β΄) Ἔστω ἐπίπεδόν τι Ε, ὅπερ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π. Λέγω ὅτι τὸ Ε θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ὅπερ εἶναι παράλληλον τῷ Π.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Π καὶ ΑΒ τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ Ε ἀγομένη ἐκ τοῦ Α καὶ διάφορος τῆς ΑΔ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π εἰς τὸ Α, θὰ τέμνῃ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν καὶ τὸ Ρ εἴς τι σημεῖον Β. Τὰ δὲ ἐπίπεδα Ε καὶ Ρ ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Β τέμνονται. ὅ.ἔ.δ.

§ 277. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Διὰ σημείου Α ἐκτὸς ἐπιπέδου Π κειμένου ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.*



Σχ. 184.

Ἀπόδειξις. Διὰ τυχόντος σημείου Β τοῦ ἐπιπέδου Π ἄγομεν δύο εὐθείας ΒΓ, ΒΔ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ ἐκ τοῦ Α τὰς ΑΓ', ΑΔ' ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς ἐκείνας, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π παραλλήλους. Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ′ καὶ ΑΔ′ ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον Ρ, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ εἶναι παράλληλον τῷ Π. Διότι, ἂν τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Π ἐτέμνοντο, ἡ τομὴ αὐτῶν ἔπρεπε (§ 273) νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΓ′ καὶ ΑΔ′, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα.

Πᾶν δὲ ἄλλο ἐπίπεδον Σ διερχόμενον διὰ τοῦ Α, ὡς τέμνον τὸ Ρ θὰ τέμνῃ (§ 276) καὶ τὸ Π. Διέρχεται λοιπὸν διὰ τοῦ Α, ἓν μόνον ἐπίπεδον Ρ παράλληλον τῷ Π. ὅ. ἔ. δ.

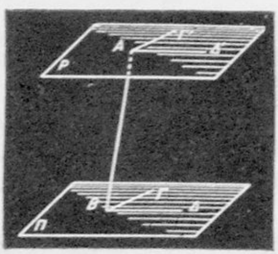
Πόρισμα I.—*Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς ἄλλο εἶναι καὶ πρὸς ἄλλα παράλληλα.*

Πόρισμα II.— *Πᾶσαι αἱ πρὸς ἐπίπεδον παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐκεῖνο.*

§ 278. Θεώρημα IV.—*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.*

Ἔστωσαν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ΑΒ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Β. Λέγω ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ.

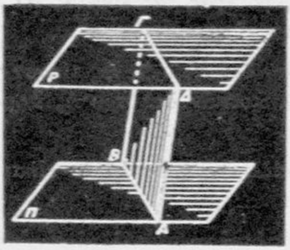
Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα τὸ Π τέμνει καὶ τὸ Ρ εἰς τι σημεῖον Α. Ἐὰν ἤδη διὰ τοῦ ποδὸς Β φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π δύο εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ἐκ δὲ τοῦ Α ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς αὐτὰς τὰς ΑΓ′, ΑΔ′, αὗται θὰ εἶναι καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π παράλληλοι καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτὰς εὐθείας ΑΓ′ καὶ ΑΔ′· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν Ρ. ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 185.

§ 279. Θεώρημα V.—*Αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ΑΒ, ΓΔ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου ΑΒΓΔ *(Σχ. 186)*. Λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 186.

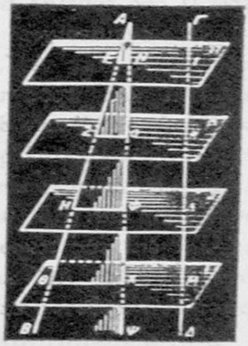
Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ ἢ τέμνονται ἢ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Μ, τοῦτο θὰ ἔκειτο ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. — *Τμήματα παραλλήλων εὐθειῶν μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα εἶναι ἴσα.*

Πόρισμα ΙΙ. — *Τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα τμήματα κοινῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα καθέτων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.*

§ 280. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. — *Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης ἐπ' αὐτὰ κοινῆς καθέτου.* Π.χ. τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ *(Σχ. 185)* ἀπόστασις εἶναι τὸ τμῆμα ΑΒ.

§ 281. Θεώρημα VI. — *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*



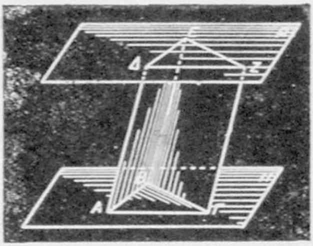
Σχ. 187.

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 187)* δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Ρ, Σ, Τ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ ἡ μία καὶ εἰς τὰ Ι, Κ, Λ, Μ, ἡ ἄλλη. Λέγω ὅτι $\frac{ΕΖ}{ΙΚ} = \frac{ΖΗ}{ΚΛ} = \frac{ΗΘ}{ΛΜ}$.

Ἀπόδειξις. Διά τινος σημείου Α τῆς ΑΒ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΨ παράλληλον τῇ ΓΔ. Αὕτη τέμνει τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Ν, Ο, Φ, Χ, τὸ δὲ ἐπίπεδον ΒΑΨ τέμνει αὐτὰ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΕΝ, ΖΟ, ΗΦ καὶ ΘΧ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΨ τέμνονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, μεθ' ὧν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἕπεται (§ 203) ὅτι $\frac{EZ}{NO}=\frac{ZH}{O\Phi}=\frac{H\Theta}{\Phi X}$. Ἐπειδὴ δὲ $NO=IK$, $O\Phi=K\Lambda$, $\Phi X=\Lambda M$, αἱ προηγούμεναι ἰσότητες γίνονται $\frac{EZ}{IK}=\frac{ZH}{K\Lambda}=\frac{H\Theta}{\Lambda M}$. ὅ.ἔ.δ.

§ 282. Θεώρημα VII.—*Ἐὰν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.*

Ἔστωσαν Α καὶ Δ *(Σχ. 188)* δύο γωνίαι κείμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ καὶ ἔχουσαι τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ. Λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.



Σχ. 188.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α ὁρίζομεν δύο τμήματα ΑΒ, ΑΓ καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων αὐταῖς πλευρῶν τῆς Δ λαμβάνομεν τμήματα ΔΕ, ΔΖ τοιαῦτα ὥστε ΔΕ=ΑΒ καὶ ΔΖ=ΑΓ· ἄγομεν δὲ εἶτα τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, ΒΓ καὶ ΕΖ.

Ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα ΑΒΕΔ, ΑΓΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμα, αἱ ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ ΑΔ· ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλους εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Τὸ δὲ σχῆμα ΒΓΖΕ εἶναι διὰ τοῦτο παραλληλόγραμμον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΒΓ=ΕΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν Α=Δ. ὅ.ἔ.δ.

β΄) Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΔΖ ὡς παράλληλοι πρὸς τὸ Π κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ Δ καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται μόνον εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις. 512) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο.

513) Διὰ δεδομένης εὐθείας παραλλήλου πρὸς δεδομένον ἐπίπεδον νὰ ἀχθῇ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτό.

514) Σημεῖόν τι Α κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ· ἀπέχει δὲ 6 μέτ. ἀπὸ τοῦ Π καὶ 8 μέτ. ἀπὸ τοῦ Ρ. Ἐὰν εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 28 μέτ. τέμνῃ τὸ Ρ εἰς τὸ Β, νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π.

515) Εὐθύγραμμον τμῆμα 24 μ. περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Ρ καὶ τέμνεται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου Σ παραλλήλου πρὸς ἐκεῖνα καὶ ἀπέχοντος 3 μέτ. ἀπὸ τοῦ Π καὶ 5 μέτ. ἀπὸ τοῦ Ρ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Σ.

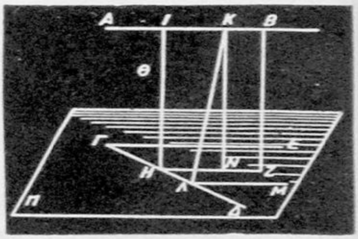
516) Νὰ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα διερχόμενα ἀνὰ ἓν διὰ δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

517) Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀχθῶσιν εὐθ. τμήματα παράλληλα, ὁμόρροπα, ἴσα καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενα τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ τριγώνου παραλλήλου καὶ ἴσου πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Περὶ εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

§ 283. **Θεώρημα Ι.** — *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 189) δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνον. Τὸ δὲ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου εὐθυγράμμου τμήματος.*

Ἀπόδειξις. α΄) Διὰ τυχόντος σημείου Γ τῆς ΓΔ ἄγομεν εὐθεῖαν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ. Αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΓΕ ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἐκ τυχόντος σημείου Β τῆς ΑΒ ἄγομεν τὴν ΒΖ κάθετον ἐπὶ τὸ Π καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς Ζ ταύτης ἄγομεν τὴν ΖΗ παράλληλον τῇ ΓΕ τέμνουσαν δὲ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Η. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΗΖ καὶ ΑΒ εἶναι ἀμφότεραι παράλληλοι τῇ ΓΕ, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΖΗ



Σχ. 189.

περιέχει καὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ. Ἐὰν ἤδη ἐκ τοῦ Η φέρωμεν παράλληλον τῇ ΒΖ εὐθεῖαν ΗΘ, αὕτη θὰ κεῖται προφανῶς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΖΗ καὶ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ΗΙ θὰ εἶναι ἐπίσης κάθετος ἐπ᾿ αὐτὸ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν αὕτη εἶναι κάθετος ἐπ᾿ ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΗΖ αὐτοῦ. Κάθετος δὲ οὖσα ἡ ΗΙ ἐπὶ τὴν ΗΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ. Ὥστε ἡ ΗΙ εἶναι κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐὰν δὲ ὑπῆρχε καὶ ἄλλη κοινὴ αὐτῶν κάθετος ΚΛ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος τῇ ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΛΜ, αὕτη θὰ κεῖται (§ 273 ΙΙ, ΙΙ) ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, καὶ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΛ εἶναι κάθετος ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ κατ' ἀκολουθίαν παράλληλος τῇ ΗΙ. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ΚΛ, ΗΙ θὰ περιεῖχεν ἀμφοτέρας τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὑπάρχει λοιπὸν μία κοινὴ κάθετος ΗΙ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ οὐδεμία ἄλλη. ὅ. ε. δ.

β') Ἐὰν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Κ παράλληλος τῇ ΒΖ εὐθεῖα ΚΝ, αὕτη θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΖΗ· κατ' ἀκολουθίαν δὲ θὰ τέμνῃ τὴν ΗΖ εἴς τι σημεῖον Ν· θὰ εἶναι δὲ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι πλαγία πρὸς τὸ Π ἕπεται ὅτι ΚΝ$<$ΚΛ· ἀφ' ἑτέρου δὲ ΚΝ$=$ΗΙ ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμεναι. Ἄρα ΗΙ$<$ΚΛ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀπόστασις δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τῆς κοινῆς αὐτῶν καθέτου.

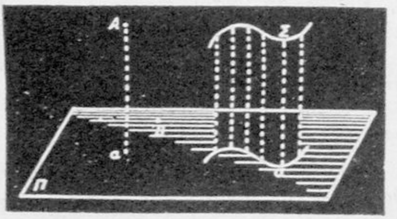
Ἀσκήσεις. 518) Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ πάσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν εἶναι σταθερά.

519) Τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν δύο τυχόντων σημείων τῶν εὐθειῶν τούτων.

Ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον.

§ 284. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἢ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον. — *Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.*

Οὕτω τοῦ σημείου Α *(Σχ. 190)* ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ ποὺς α τῆς ἐπ' αὐτὸ καθέτου Αα.



Σχ. 190.

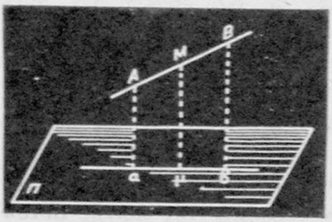
Τὸ ἐπίπεδον Π, ἐφ' οὗ γίνόνται αἱ προβολαὶ καλεῖται *προβολικὸν* ἐπίπεδον, ἡ δὲ Αα καλεῖται *προβάλλουσα* τοῦ σημείου Α. Ἡ προβολὴ παντὸς σημείου τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου συμπίπτει μετ᾽ αὐτοῦ.

Ὀρθὴ προβολὴ τυχόντος σχήματος Σ ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων τοῦ Σ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας τὴν ὀρθὴν προβολὴν θέλομεν πολλάκις καλῇ καὶ ἁπλῶς προβολήν.

§ 285. Θεωρημα Ι. — *Ἡ ἐπὶ ἐπίπεδον προβολὴ εὐθείας ΑΒ μὴ καθέτου ἐπ᾽ αὐτὸ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.*

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ὁ ποὺς α τῆς καθέτου ταύτης εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Α, τὸ δὲ ἐπίπεδον ΒΑα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Αα τέμνει τὸ Π κατά τινα εὐθεῖαν αβ. Ἐὰν ἤδη ἔκ τινος σημείου Μ τῆς ΑΒ ἀχθῇ ἡ Μμ κάθετος ἐπὶ τὸ Π, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος τῇ Αα καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑαβ· θὰ τέμνῃ ἄρα τὴν αβ, ἤτοι ὁ ποὺς μ τῆς Μμ κεῖται ἐπὶ τῆς αβ.



Σχ. 191.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν μ. εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς αβ καὶ ὑψωθῇ δι᾽ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὸ Π ἡ μΜ, αὕτη ὡς παράλληλος τῇ Αα θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑαβ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Μ. Οὕτω δὲ τὸ μ εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ.

Ὥστε ἡ προβολὴ παντὸς σημείου τῆς ΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς αβ· πᾶν δὲ σημεῖον τῆς αβ εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ.

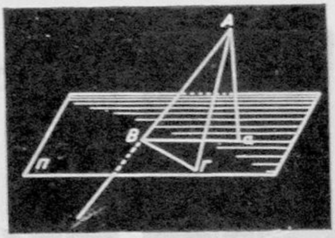
Γεωμετρικὸς ἄρα τόπος τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ, ἤτοι προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι ἡ προβολὴ εὐθείας ὁρίζεται ὑπὸ τῶν προβολῶν δύο σημείων αὐτῆς. Ἂν δὲ ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι προβολὴν τὸν πόδα αὐτῆς· ἡ προβολὴ ἄρα τῆς καθέτου ταύτης εἶναι σημεῖον.

§ 286. Θεώρημα ΙΙ. — *Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ πλαγίως ἐπίπεδον, ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν* *σχηματίζει αὕτη μετὰ τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου διερχομένης διὰ τοῦ ἴχνους αὐτῆς.*

Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα πλαγίως ἐπίπεδον Π, Βα ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ Π καὶ ἑτέρα εὐθεῖα τοῦ Π ἡ ΒΓ. Λέγω ὅτι:

γων.ΑΒα < γων.ΑΒΓ *(Σχ. 192).*



Σχ. 192.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Β ἀρχόμενοι τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ Βα καὶ ἄγομεν τὴν ΑΓ. Παρατηροῦντες ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒα, ΑΒΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινήν, Βα=ΒΓ καὶ Αα < ΑΓ συμπεραίνομεν ὅτι $\widehat{ΑΒα} < \widehat{ΑΒΓ}$. ὅ. ἔ. δ.

§ 287. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.— *Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.*

Ἀσκήσεις. 520) Ἐὰν εὐθ. τμῆμα εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὴν προβολήν του.

521) Αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

522) Ἡ ἐπὶ ἐπίπεδον προβολὴ παραλληλογράμμου εἶναι παραλληλόγραμμον.

523) Ὁ λόγος δύο τμημάτων τῆς αὐτῆς εὐθείας ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

524) Προβολὴ τοῦ μέσου εὐθ. τμήματος εἶναι τὸ μέσον τῆς προβολῆς αὐτοῦ.

525) Ὁ λόγος δύο παραλλήλων εὐθ. τμημάτων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

526) Πόση εἶναι ἡ κλίσις εὐθείας ΒΑ *(Σχ. 192)*, ἧς ἡ προβολὴ Βα ἰσοῦται τῇ προβαλλούσῃ Αα τοῦ σημείου Α αὐτῆς;

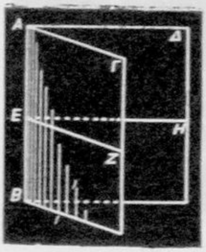
527) Πόση εἶναι ἡ κλίσις εὐθείας ΒΑ *(Σχ. 192)*, ἂν τὸ τμῆμα ΒΑ αὐτῆς εἶναι διπλάσιον τῆς προβολῆς Βα αὐτοῦ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

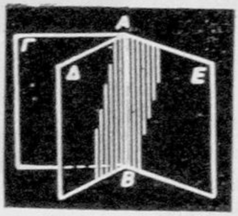
Δίεδροι γωνίαι.

§ 288. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα διέδρου γωνίας.— *Δίεδρος γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν.* Τὸ σχῆμα π.χ. ΓΑΒΔ *(Σχ. 193)* εἶναι δίεδρος γωνία.

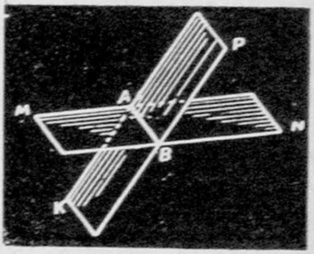
Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι δίεδρον γωνίαν, καλοῦνται ἕδραι αὐτῆς.



Σχ. 193.



Σχ. 194.



Σχ. 195.

Ἡ τομὴ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας καλεῖται *ἀκμὴ* αὐτῆς. Ἑκάστη δοθεῖσα δίεδρος γωνία ὁρίζεται καὶ ὀνομάζεται διὰ τῶν δύο γραμμάτων τῆς ἀκμῆς ἢ διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ὧν δύο τῆς ἀκμῆς εἰς τὸ μέσον ἀναγιγνωσκόμενα καὶ δύο κείμενα ἀνὰ ἓν ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας ἐκτὸς τῆς ἀκμῆς. Οὕτω τὴν δίεδρον γωνίαν τοῦ *(Σχ. 193)* ἀναγιγνώσκομεν ΓΑΒΔ ἢ ΔΑΒΓ ἢ καὶ ἁπλῶς ΑΒ.

§ 289. Ἐφεξῆς καὶ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι.—*α΄) Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν κοινήν, μίαν ἕδραν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.* Οὕτως αἱ δίεδροι γωνίαι ΓΑΒΔ καὶ ΔΑΒΕ *(Σχ. 194)* εἶναι ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι· τοιαῦται δὲ εἶναι καὶ αἱ ΜΑΒΡ καὶ ΡΑΒΝ *(Σχ. 195)*.

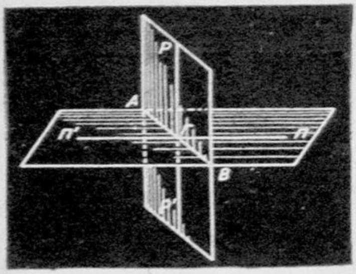
β΄) Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν κοινὴν καὶ αἱ ἕδραι ἑκατέρας εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς ἑτέρας. Αἱ δίεδροι γωνίαι π.χ. ΜΑΒΡ καὶ ΚΑΒΝ *(Σχ. 195)* εἶναι κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι.

§ 290. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας.—*Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας καλεῖται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς.*

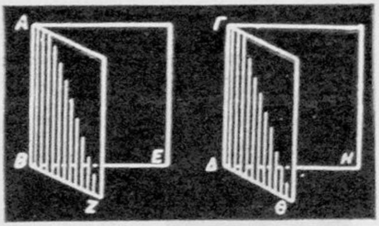
Οὕτως, ἂν τὸ διὰ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγόμενον κάθετον ἐπίπεδον τέμνῃ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου ΑΒ *(Σχ. 193)* κατὰ τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΕΗ, ἡ γωνία ΖΕΗ εἶναι ἡ πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία. Ἂν ἀχθῇ εἰς ἄλλο σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἐπίπεδον τέμνον τὰς ἕδρας κατὰ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ, θὰ εἶναι $Z\hat{E}H = \Gamma\hat{A}\Delta$ (§ 279, 282). *Εἶναι ὅθεν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς.*

§ 291. Ἴσαι δίεδροι γωνίαι. Κάθετα ἐπίπεδα.—*Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἂν καταλλήλως ἐπιτιθέμεναι ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνον δίεδρον γωνίαν.*

Δύο ἐπίπεδα λέγονται κάθετα, ἂν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Τὰ ἐπίπεδα π. χ. ΠΠ' καὶ ΡΡ' *(Σχ. 196)* σχηματίζοντα 4 διέδρους γωνίας ἴσας εἶναι κάθετα.



Σχ. 196.



Σχ. 197.

Ὀρθὴ δίεδρος γωνία καλεῖται πᾶσα δίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι κάθετοι. Ἑκάστη π. χ. τῶν διέδρων ΠΑΒΡ, ΡΑΒΠ', Π'ΑΒΡ' καὶ Ρ'ΑΒΠ εἶναι ὀρθή.

ΣΗΜ. Πᾶσα δίεδρος γωνία διάφορος ὀρθῆς διέδρου γωνίας καλεῖται ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ὀρθῆς διέδρου γωνίας.

Σχέσεις διέδρων καὶ ἀντστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν.

§ 292. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι ἔχωσιν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας, αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι ἴσαι Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστωσαν οἱ δίεδροι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 197)*, ὧν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΖ καὶ ΗΔΘ εἶναι ἴσαι. Λέγω ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

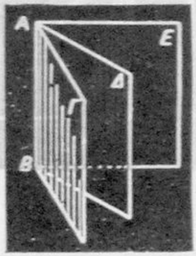
Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ἡ δίεδρος ΓΔ τίθεται ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως ὥστε ἡ γωνία ΗΔΘ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΒΖ. Ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ ΓΔ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΗΔΘ καθίσταται κάθετος ἐπὶ τὸ ΕΒΖ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἕπεται ὅτι συμπίπτει μετὰ τῆς ἀκμῆς ΑΒ. Ἡ ἕδρα ὅθεν ΓΔΗ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΑΒΕ, ἡ δὲ ΓΔΘ ἐπὶ τῆς ΑΒΖ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ δίεδροι ΘΓΔΗ καὶ ΖΑΒΕ ἐφαρμόζουσιν· εἶναι ἄρα αὗται ἴσαι. δ. ἔ. δ.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Πόρισμα I.—*Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Πόρισμα II.—*Τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι. Καὶ ἀντιστρόφως.*

§ 293. Θεώρημα II.—*Αἱ δίεδροι γωνίαι μεταβάλλονται ἀναλόγως πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας αὐτῶν.*



Σχ. 198.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΓΑΒΔ τυχοῦσα δίεδρος γωνία καὶ ΓΑΔ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος. Ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΓΑΔ τῆς γωνίας ταύτης σχηματίσωμεν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην τῇ ΓΑΔ, θὰ εἶναι· $\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{A}\Delta.2$, ἡ δὲ ΓΑΕ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν δίεδρον ΓΑΒΕ. Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$, θὰ εἶναι καὶ δ.ΓΑΒΔ=δ.ΔΑΒΕ, καὶ ἐπομένως δ ΓΑΒΕ=(δ.ΓΑΒΔ).2.

Ἀντιστρόφως. Ἂν δ.ΓΑΒΕ = δ.(ΓΑΒΔ).2 θὰ εἶνε δ.ΓΑΒΔ = δ.ΔΑΒΕ καὶ ἐπομένως $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$, ὅθεν $\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{A}\Delta.\ 2$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τριπλασιαζομένης, τετραπλασιαζομένης κλπ. τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου, τριπλασιάζεται. τετραπλασιάζεται κλπ. ἡ δίεδρος καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ δίεδροι λοιπὸν γωνίαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι μεταβάλλονται ἀναλόγως (§ 201). δ. ἔ. δ.

Πόρισμα I.—*Τὸ μέτρον διέδρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας, ἐὰν ὡς μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν ληφθῇ ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν.*

Ἀσκήσεις. 528) Πάσης διέδρου γωνίας ὑπάρχει διχοτόμον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.

529) Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

530) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς δύο

ὀρθὰς διέδρους γωνίας, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι αὐτῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

531) Ἐὰν δι' εὐθείας ἐπιπέδου ἀχθῶσιν ἐπίπεδα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐκείνου κείμενα, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν διέδρων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

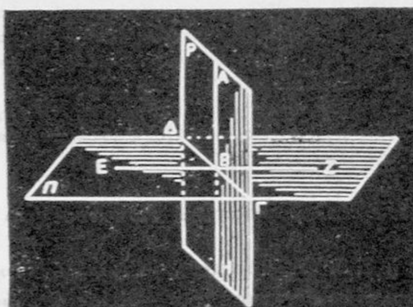
532) Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν ἐπίπεδα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀγόμενα, εἶναι ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

533) Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτου, α') Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι. β') Αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι. γ') Αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δίεδροι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

Ἰδιότητες τῶν καθέτων ἐπιπέδων.

§ 294. Θεώρημα I.—*Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον δι' αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκεῖνο.*

Ἔστω ΑΒ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, Ρ δὲ τυχὸν διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον. Λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Π εἶναι κάθετα.



Σχ. 199.

Ἀπόδειξις. Διὰ τοῦ ποδὸς Β τῆς ΑΒ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π κειμένην καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΕΖ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΑΓΔΕ, ΑΓΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒΕ=ΑΒΖ=1 ὀρθ. ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ῥηθεῖσαι δίεδροι εἶναι ὀρθαί, τὰ δὲ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα. ὅ. ἔ. δ.

§ 295. Θεώρημα II.—*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, πᾶσα εὐθεῖα ἑκατέρου κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἕτερον.*

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ *(Σχ. 199)* δύο ἐπίπεδα κάθετα, ΑΒ εὐθεῖά τις τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ τῶν ἐπιπέδων τούτων. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀπόδειξις. Ἄγοντες τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π κειμένην παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΖ. Αἱ γωνίαι ἄρα ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ εἶναι αἱ εἰς τὰς διέδρους ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι· ἐπειδὴ δὲ αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι ΑΒΕ=ΑΒΖ=1 ὀρθ. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος, ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἀγομένη ἐκ σημείου τοῦ ἄλλου κεῖται ἐν τῷ ἄλλῳ τούτῳ ἐπιπέδῳ.*

Πόρισμα II.—*Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἄλλο καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπ' ἐκεῖνο.*

Ἀσκήσεις. 534) Δι' ἑκάστης εὐθείας ἐπιπέδου τινὸς ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

535) Δι' ἑκάστης εὐθείας τεμνούσης πλαγίως ἐπίπεδον ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

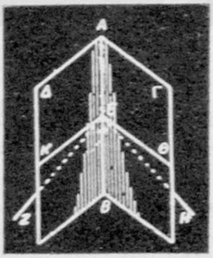
536) Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς πᾶν ἐπίπεδον μὴ διερχόμενον δι' αὐτῆς καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

537) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας;

538) Ἐὰν αβ εἶναι ἡ ἐπὶ ἐπίπεδον Π ὀρθὴ προβολὴ εὐθείας ΑΒ καὶ Ρ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αβ.

Παραπληρωματικὴ ἀντιστοίχου πρὸς δίεδρον γωνίας.

§ 296. Θεώρημα I.—*Ἐὰν ἐκ σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσιν κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς καὶ ἑκατέρα πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ἑτέρα ἕδρα αὐτῆς, ἡ γωνία τῶν καθέτων τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς πρὸς τὴν δίεδρον ἀντιστοιχούσης ἐπιπέδου.*



Σχ. 200.

Ἔστω ΑΒ τυχοῦσα δίεδρος γωνία, Ε τυχὸν τῆς ἀκμῆς αὐτῆς σημεῖον, ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Γ φερομένη, πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ἕδρα Δ καὶ ΕΗ κάθετος ἐπὶ τὴν Δ φερομένη, πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ἕδρα Γ. Λέγω ὅτι ἡ γωνία ΖΕΗ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς εἰς τὴν δίεδρον ΑΒ ἀντιστοιχούσης ἐπιπέδου γωνίας.

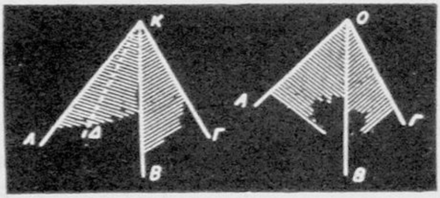
Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον ΖΕΗ περιέχον εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὰς ἕδρας Γ καὶ Δ εἶναι καὶ αὐτὸ κάθετον ἐπ᾽ αὐτάς, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν. Ἐὰν δὲ ΕΘ καὶ ΕΚ εἶναι αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν Γ καὶ Δ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕΗ, ἡ γωνία ΚΕΘ θὰ εἶναι ἡ τῆς διέδρου ΑΒ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία. Ἐπειδὴ δὲ
ΚΕΘ+ΖΕΗ=ΚΕΗ+ΗΕΘ+ΖΕΗ καὶ ΗΕΘ+ΖΕΗ=ΖΕΘ=1 ὀρθ.
καὶ ΚΕΗ=1 ὀρθ., ἕπεται ὅτι ΚΕΘ+ΖΕΗ=2 ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

Ἄσκησις. 539) Τίνες αἱ θέσεις τῶν καθέτων ΕΖ καὶ ΕΗ ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου ΑΒ *(Σχ. 200)* ἐν σχέσει πρὸς τὴν δίεδρον ταύτην κατὰ τὰς διαφόρους περιπτώσεις;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Στερεαὶ γωνίαι.

§ 297. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα στερεᾶς γωνίας.—*Στερεὰ γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ὧν ἕκαστον περατοῦται εἰς τὰς τομὰς αὐτοῦ ὑπὸ τῶν παρακειμένων.*



Σχ. 201.

Τὰ σχήματα π. χ. Κ.ΑΒΓΔ, Ο ΑΒΓ *(Σχ. 201)* εἶναι στερεαὶ γωνίαι.

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα συνιστῶσι στερεὰν γωνίαν καλοῦνται *ἕδραι* αὐτῆς.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἑδρῶν στερεᾶς γωνίας καλεῖται *κορυφὴ* αὐτῆς.

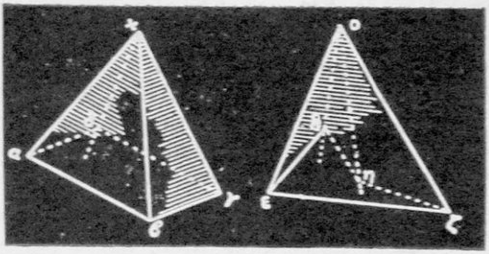
Αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν στερεᾶς γωνίας καλοῦνται *ἀκμαὶ* αὐτῆς.

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης ἕδρας στερεᾶς γωνίας λέγονται καὶ αὐταὶ *ἕδραι* ἢ *ἐπίπεδοι γωνίαι* αὐτῆς.

Αἱ δίεδροι γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἕδραι στερεᾶς γωνίας, καλοῦνται *δίεδροι γωνίαι* τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας.

Οὕτω τῆς στερεᾶς γωνίας Κ.ΑΒΓΔ ἕδραι μὲν εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ καὶ ΔΚΑ, κορυφὴ τὸ σημεῖον Κ, ἀκμαὶ αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ καὶ ΔΚΑ καὶ δίεδροι γωνίαι αἱ ΒΚΑΔ ἢ ΑΚ, ΑΚΒΓ ἢ ΚΒ, ΒΚΓΔ ἢ ΚΓ καὶ ΓΚΔΑ ἢ ΚΔ.

Τὰς στερεὰς γωνίας διακρίνομεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν εἰς τριέδρους τετραέδρους, πενταέδρους κλπ. Ἡ στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓΔ εἶναι τετράεδρος, ἡ δὲ Ο.ΑΒΓ εἶναι τρίεδρος γωνία.

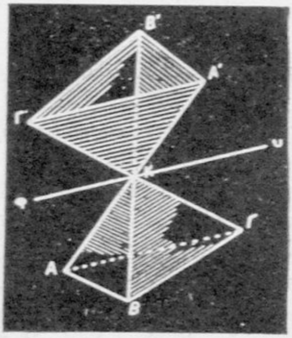


Σχ. 202.

Ἐὰν τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο διέδρους γωνίας ἴσας καλεῖται *ἰσοσκελὴς* στερεὰ γωνία.

Στερεὰ γωνία λέγεται *κυρτή*, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα προεκτεινομένη ἀφίνῃ αὐτὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Αἱ στερεαὶ γωνίαι Κ.ΑΒΓΔ καὶ Ο.ΑΒΓ εἶναι κυρταὶ στερεαὶ γωνίαι, ἡ δὲ ο.εζηθ *(Σχ. 202)* δὲν εἶναι κυρτή.

§ 298. Κατὰ κορυφὴν ἢ συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι.—Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεᾶς γωνίας προεκβληθῶσι πέραν τῆς κορυφῆς αὐτῆς, σχηματίζεται ἑτέρα στερεὰ γωνία, ἡ ὁποία καλεῖται *κατὰ κορυφὴν* ἢ *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης. Οὕτω τῆς στερεᾶς γωνίας Κ.ΑΒΓ *(Σχ. 203)* κατὰ κορυφὴν εἶναι ἡ Κ.Α′Β′Γ′. Δύο κατὰ κορυφὴν στερεῶν γωνιῶν αἱ δίεδροι γωνίαι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, ὡς κατὰ κορυφὴν δίεδροι ἢ ἐπίπεδοι γωνίαι. Οὕτως ἡ δίεδρος ΚΑ ἰσοῦται τῇ διέδρῳ ΚΑ′, ἡ ἕδρα ΑΚΒ ἰσοῦται τῇ Α′ΚΒ′ κλπ.



Σχ. 203.

Αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει. Οὕτως, ἂν ἡ ἀκμὴ ΚΒ κεῖται ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν

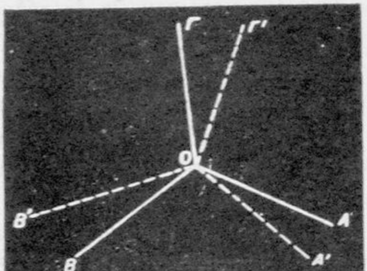
ΑΑ΄ καὶ ΓΓ΄, ἡ ΚΒ΄ θὰ κεῖται ὄπισθεν αὐτοῦ· ἂν δὲ στραφῇ ἡ στερεὰ γωνία Κ.Α΄Β΄Γ΄ περὶ τὴν κορυφὴν Κ, οὕτως ὥστε ἡ ἕδρα Α΄ΚΓ΄ νὰ μὴ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς καὶ μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚΓ, ἡ στερεὰ γωνία Κ.Α΄Β΄Γ΄ δὲν ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓ, διότι αἱ ἀκμαὶ ΚΒ καὶ ΚΒ΄ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἕδρας ΑΚΓ.

Ἂν δὲ ἡ στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν φυ, ἥτις διχοτομεῖ τὰς ἐπιπέδους γωνίας Γ΄ΚΑ καὶ Α΄ΚΓ, καὶ μέχρις οὗ ἡ ἕδρα Α΄ΚΓ΄ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΚΓ, αἱ ἀκμαὶ ΚΑ΄ καὶ ΚΓ΄ θὰ ἐφαρμόσωσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΚΓ καὶ ΚΑ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν αἱ δίεδροι ΚΓ, ΚΑ εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ΚΓ, ΚΑ΄ εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ΚΓ΄, ΚΑ ἐπίσης· ἡ ἕδρα ὅθεν Α΄ΚΒ΄ δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΚΓ, οὐδὲ ἡ Β΄ΚΓ΄ ἐπὶ τῆς ΑΚΒ· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἀκμὴ ΚΒ΄ δὲν ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΚΒ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν. Ἂν ὅμως αἱ δίεδροι ΚΑ, ΚΓ εἶναι ἴσαι, ἡ ἕδρα Α΄ΚΒ΄ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΒΚΓ καὶ ἡ Β΄ΚΓ΄ ἐπὶ τῆς ΒΚΑ. Ἡ ἀκμὴ ἄρα ΚΒ΄ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΚΒ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζουσιν.

Κατὰ ταῦτα *αἱ ἰσοσκελεῖς μόνον τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζουσιν ἐπὶ τῶν κατὰ κορυφὴν αὐτῶν στερεῶν γωνιῶν.*

Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι.

§ 299. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀχθῶσιν κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς καὶ ἑκάστη πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ τρίτη ἀκμή, αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας, ἥτις ἔχει ἀκμὰς τὰς καθέτους ταύτας, εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν εἰς τὰς διέδρους τῆς α΄ ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. Καὶ ἀντιστρόφως.*



Σχ. 204.

Ἔστω Ο.ΑΒΓ τυχοῦσα τρίεδρος στερεὰ γωνία καὶ ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΟΓ ΑΟΓ, ΑΟΒ· φέρεται δὲ ἡ μὲν ΟΑ΄, πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ΟΑ, ἡ δὲ ΟΒ΄, πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ΟΒ καὶ ἡ ΟΓ′, πρὸς ὃ μέρος φέρεται ἡ ΟΓ, ἤτοι αἱ γωνίαι ΑΟΑ′, ΒΟΒ′, ΓΟΓ′ εἶναι ὀξεῖαι. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ δ, δ′, δ″, τὰς εἰς τὰς διέδρους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἀντιστοιχούσας ἐπιπέδους, θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

δ + Β′ΟΓ′ = 2 ὀρθ, δ′ + Α′ΟΓ′ = 2 ὀρθ. καὶ δ″ + Α′ΟΒ′ = 2 ὀρθ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma O \Gamma'} < 1$ ὀρθ. ἡ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΟΑ τῆς διέδρου ΟΑ κάθετος ΟΓ′ φέρεται πρὸς ὃ μέρος καὶ ἡ ἑτέρα ἕδρα ΓΟΑ αὐτῆς· ὁμοίως καὶ ἡ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ κάθετος ΟΒ′ φέρεται πρὸς ὃ μέρος καὶ ἡ ἄλλη ἕδρα ΑΟΒ. Ἄρα (§ 296)
δ+Β′ΟΓ′=2 ὀρθ. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι ἰσότητες.

Ἀντιστρόφως. Αἱ εἰς τὰς διέδρους ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′, ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως παραπληρωματικαὶ τῶν ἑδρῶν ΒΟΓ, ΑΟΓ καὶ ΑΟΒ.

Ἀπόδειξις. Αἱ ΟΓ′ καὶ ΟΒ′ ὡς κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΟΒ, ΑΟΓ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΑ· εἶναι ἄρα ἡ ΟΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β′ΟΓ′, φέρεται δὲ πρὸς ὃ μέρος καὶ ἡ ΟΑ′

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Α′ΟΓ′ φερομένη πρὸς ὃ μέρος καὶ ἡ ΟΓ′ κ.τ.λ. Εἶναι ἄρα αἱ ἕδραι τῆς Ο.ΑΒΓ παραπληρωματικαὶ τῶν εἰς τὰς διέδρους τῆς Ο.Α′Β′Γ′ ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. ὅ. ἔ. δ.

§ 300. Παραπληρωματικαὶ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι.—*Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ἐὰν αἱ ἕδραι ἑκατέρας εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν εἰς τὰς διέδρους τῆς ἑτέρας ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν.*

Π.χ. αἱ τρίεδροι γωνίαι Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α′Β′Γ′ *(Σχ. 204)* κατασκευασθεῖσαι, καθ᾽ ὃν τὸ προηγούμενον θεώρημα διαγράφει τρόπον, εἶναι παραπληρωματικαὶ στερεαὶ γωνίαι.

Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἕδραι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ὀρθαί, αὕτη καλεῖται *τρισορθογώνιος* στερεὰ γωνία καὶ προφανῶς συμπίπτει μετὰ τῆς παραπληρωματικῆς της.

Ἀσκήσεις. 540) Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.

541) Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν ἔχουσι τὰς διέδρους ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ.

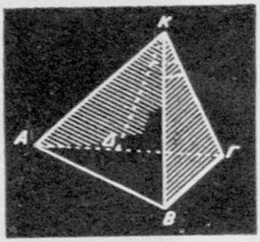
542) Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν θὰ ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

Ἰδιότητες τῶν στερεῶν γωνιῶν.

§ 301. Θεώρημα I.—*Ἑκάστη ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων.*

Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ καὶ ΑΚΓ ἕδρα αὐτῆς μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων. Λέγω ὅτι

γωνΑΚΓ $<$ γωνΑΚΒ $+$ γωνΒΚΓ.



Σχ. 205.

Ἀπόδειξις. Ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΚΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ΓΚΔ ἴσην τῇ ΒΚΓ καὶ ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΔΓ τέμνουσαν τὰς πλευρὰς ΚΑ, ΚΔ, ΚΓ· εἶτα ἐπὶ τῆς τρίτης ἀκμῆς ὁρίζομεν τμῆμα ΚΒ ἴσον πρὸς τὸ ΚΔ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΚΓ καὶ ΔΚΓ εἶναι προφανῶς ἴσα, θὰ εἶναι καὶ ΒΓ$=$ΔΓ. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνισότητος ΑΔ$+$ΔΓ$<$ΑΒ$+$ΒΓ ἕπεται εὐκόλως ὅτι ΑΔ$<$ΑΒ· τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΚΒ καὶ ΑΚΔ ἔχοντα τὴν ΚΑ κοινήν, ΚΔ$=$ΚΒ καὶ ΑΔ$<$ΑΒ, θὰ ἔχωσι καὶ $\mathrm{A\hat{K}\Delta<A\hat{K}B}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\mathrm{\Delta\hat{K}\Gamma=B\hat{K}\Gamma}$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$\mathrm{A\hat{K}\Gamma<A\hat{K}B+B\hat{K}\Gamma}.\quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

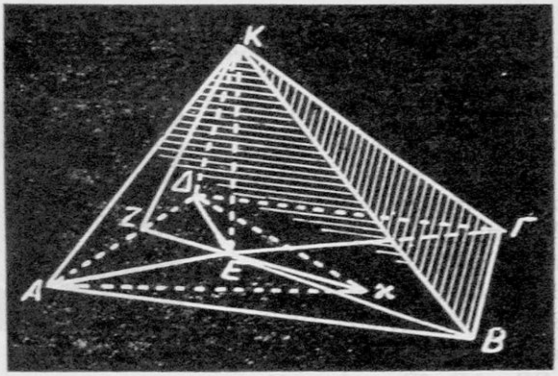
ΣΗΜ. Ἐὰν $\mathrm{A\hat{K}\Gamma\leqq B\hat{K}\Gamma}$ ἡ ἀλήθεια τοῦ Θ εἶναι προφανής.

§ 302. Θεώρημα II.—*Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.*

Ἔστω Κ.ΑΒΓΔ *(Σχ. 206)* τυχοῦσα κυρτὴ στερεὰ γωνία. Λέγω ὅτι
$$\mathrm{AKB+BK\Gamma+\Gamma K\Delta+\Delta KA}<4\ \text{ὀρθ}.$$

Ἀπόδειξις. Φέρομεν διὰ τῆς κορυφῆς Κ καὶ ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας εὐθεῖάν τινα ΚΕ καὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὴν εἴς τι σημεῖον Ε· ἔστω δὲ ΑΒΓΔ ἡ τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας ὑπ' αὐτοῦ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ εὐθεῖα ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ΚΖ θὰ εἶναι (§ 266) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἕδρα ΑΚΔ στραφῇ περὶ τὴν ΑΔ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔ, ἡ ΚΖ μένουσα πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ Κ θὰ ἔλθῃ εἴς τι σημεῖον κ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΕ καὶ ἡ ἕδρα ΑΚΔ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑκΔ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 73 Πορ. I) $\mathrm{\Delta\hat{\kappa}A<\Delta\hat{E}A}$, ἕπεται ὅτι

$A\widehat{K}\Delta < \Delta\widehat{E}A$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $A\widehat{K}B < A\widehat{E}B$, $B\widehat{K}\Gamma < B\widehat{E}\Gamma$ καὶ $\Gamma\widehat{K}\Delta < \Gamma\widehat{E}\Delta$. Ἐὰν ἤδη προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ ἰσότητες αὗται,



Σχ. 206.

προκύπτει ὅτι $A\widehat{K}\Delta + A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta < 4$ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

§ 303. Θεώρημα III.—*Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν πάσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν ἓξ καὶ μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν· ἑκάστη δὲ αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.* Ἔστωσαν δ, δ′, δ″ τὰ μέτρα τῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Λέγω ὅτι: 2 ὀρθ. $<$ δ $+$ δ′ $+$ δ″ $<$ 6 ὀρθ. καὶ δ $+$ 2 ὀρθ. $>$ δ′ $+$ δ″,

δ′ $+$ 2 ὀρθ. $>$ δ $+$ δ″ καὶ δ″ $+$ 2 ὀρθ. $>$ δ $+$ δ′.

Ἀπόδειξις. α′) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ἑδρῶν τῆς παραπληρωματικῆς στερεᾶς γωνίας θὰ εἶναι δ $+$ Α $=$ 2 ὀρθ, δ′ $+$ Β $=$ 2 ὀρθ, δ″ $+$ Γ $=$ 2 ὀρθ. Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες δ $=$ 2 ὀρθ. — Α, δ′ $=$ 2 ὀρθ. — Β καὶ δ″ $=$ 2 ὀρθ. — Γ, ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι δ $+$ δ′ $+$ δ″ $=$ 6 ὀρθ. — (Α $+$ Β $+$ Γ). Ἐπειδὴ δὲ 0 $<$ Α $+$ Β $+$ Γ $<$ 4 ὀρθ, ἕπεται ὅτι δ $+$ δ′ $+$ δ″ $<$ 6 ὀρθ. καὶ δ $+$ δ′ $+$ δ″ $>$ 2 ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

β′) Ἐὰν ἐν τῇ ἀνισότητι Α $<$ Β $+$ Γ θέσωμεν ἀντὶ Α, Β, Γ τὰς ἴσας αὐταῖς διαφορὰς 2 ὀρθ. — δ, 2 ὀρθ. — δ′ καὶ 2 ὀρθ. — δ″, προκύπτει ἡ ἀνισότης 2 ὀρθ. — δ $<$ 2 ὀρθ. — δ′ $+$ 2 ὀρθ. — δ″, ἐξ ἧς διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη δ $+$ δ′ $+$ δ″ — 2 ὀρθ. προκύπτει ἡ ἀνισότης δ′ $+$ δ″ $<$ δ $+$ 2 ὀρθ. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ ἄλλαι σχετικαὶ ἀνισότητες.

Περιπτώσεις ἰσότητος τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

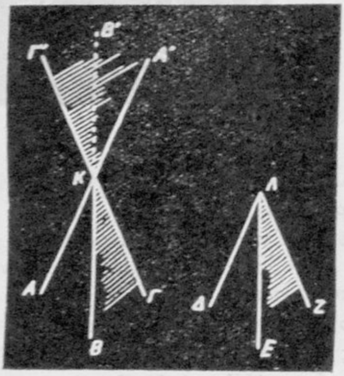
§ 304. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι δύο ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας διέδρους ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ ἄλλα ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, ἓν πρὸς ἓν καὶ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν*

Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ.ΑΒΓ, Λ.ΔΕΖ ἔχουσαι ΑΚΒ=ΔΛΕ, ΒΚΓ=ΕΛΖ καὶ ΚΒ=ΛΕ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφὴν καὶ ὅτι $\Delta\widehat{\Lambda}Z = A\widehat{K}\Gamma$, ΛΖ=ΚΓ, ΔΛ=ΚΑ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι τεθῶσιν οὕτως ὥστε αἱ ἕδραι ΑΚΓ καὶ ΔΛΖ νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αἱ ἀκμαὶ ΚΒ καὶ ΛΕ ἢ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἢ κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Ἤδη ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κατὰ τὴν α' περίπτωσιν ἡ ΛΔΕΖ καταλλήλως τεθειμένη ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓ κατὰ δὲ τὴν β' ἐπὶ τῆς Κ'Α'Β'Γ', ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΚΑΒΓ.

§ 305. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ ἄλλα ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, ἓν πρὸς ἓν καὶ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.*

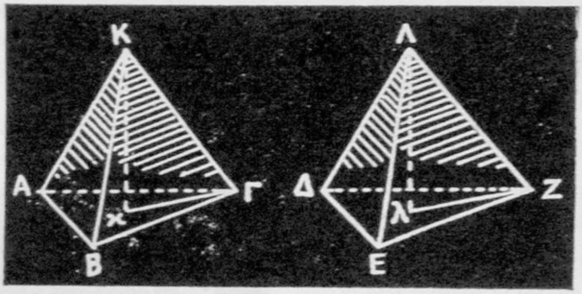
Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.



Σχ. 207.

§ 306. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἀπέναντι διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.*—Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι στεραὶ γωνίαι Κ καὶ Λ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι $A\widehat{K}B = \Delta\widehat{\Lambda}E$, $B\widehat{K}\Gamma = E\widehat{\Lambda}Z$ καὶ $A\widehat{K}\Gamma = \Delta\widehat{\Lambda}Z$. Λέγω ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι δίεδροι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΚΑ=ΛΔ, ΚΒ=ΛΕ, ΚΓ=ΛΖ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφὴν (*Σχ. 208*).

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἀκμαὶ ΚΒ καὶ ΛΕ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ᾽ οὗ ἐτέθησαν αἱ ἕδραι ΑΚΓ καὶ ΔΛΖ. Ἂν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν λάβωμεν τμήματα
ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ=ΛΔ=ΛΕ=ΛΖ, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΑΒ=ΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΒΓ=ΕΖ, ΑΓ=ΔΖ, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα. Ἐὰν ἤδη ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι Κκ καὶ Λλ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἐκ τῶν ἰσοτήτων ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες



Σχ. 208.

κΑ=κΒ=κΓ, ἤτοι τὸ κ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ λ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἐὰν ἤδη τὸ σχῆμα ΛΔΕΖ νοηθῇ τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ΚΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, τὸ κέντρον λ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ κ, ἡ λΖ ἐπὶ τῆς κΓ κλπ. καὶ ἡ κάθετος λΛ ἐπὶ τῆς καθέτου κΚ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΔλΖ καὶ ΚκΓ προκύπτει ὅτι Κκ=Λλ, ἕπεται ὅτι τὸ Λ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Κ, αἱ δὲ ἀκμαὶ ΛΔ, ΛΕ, ΛΖ θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ ἡ στερεὰ γωνία Λ.ΔΕΖ θέλει ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓ. Εἶναι ἄρα αὗται ἴσαι καὶ αἱ ἐφαρμόζουσαι δίεδροι ΛΔ καὶ ΚΑ, ΛΕ καὶ ΚΒ, ΛΖ καὶ ΚΓ εἶναι ἴσαι. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ΚΒ καὶ ΛΕ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἑδρῶν ΑΚΓ καὶ ΔΛΖ, ἡ Λ.ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΚΑ΄Β΄Γ΄, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς Κ.ΑΒΓ. Εἶναι δὲ πάλιν ἡ δίεδρος ΚΑ ἴση τῇ ΛΔ, διότι ἀμφότεραι εἶναι ἴσαι τῇ ΚΑ΄· ὁμοίως εἶναι ΚΒ=ΛΕ καὶ ΚΓ=ΔΖ. ὅ. ἔ. δ.

§ 307. Θεώρημα IV.—*Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι* *ἔχωσι τὰς διέδρους γωνίας αὐτῶν ἴσας θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν θὰ εἶναι δὲ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ στερεαὶ γωνίαι Κ καὶ Λ (*Σχ. 208*) ἔχωσι τὰς διέδρους γωνίας ἴσας, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν στερεαὶ γωνίαι Κ′ καὶ Λ′ θὰ ἔχωσι ἴσας τὰς ἕδρας αὐτῶν. Ἀλλὰ τότε αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι Κ′ καὶ Λ′ θὰ ἔχωσι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας· αἱ παραπληρωματικαὶ ἄρα αὐτῶν Κ καὶ Λ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ἕδρας αὐτῶν, μίαν πρὸς μίαν καὶ θὰ εἶναι (§ 306) ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 543) Ἐὰν δύο ἕδραι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι εἶναι ἴσαι.

544) Ἐὰν δύο δίεδροι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι εἶναι ἴσαι.

545) Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν ἀπέναντι μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἕδρα. Καὶ ἀντιστρόφως.

546) Τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Ε′ βιβλίου.

547) Τὰ ἄκρα διαγωνίου παραλληλογράμμου ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ παντὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ἄλλης διαγωνίου αὐτοῦ.

548) Διὰ δεδομένου σημείου θὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τριῶν ἄλλων δεδομένων σημείων.

549) Διὰ δεδομένης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων.

550) Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας διέδρου γωνίας, τὰ ἴχνη αὐτῆς ἀπέχουσιν ἴσον τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου ταύτης γωνίας.

551) Ἐὰν σημεῖον προβληθῇ ἐπὶ τὰς ἕδρας διέδρου γωνίας, αἱ ἐκ τῶν προβολῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου ταύτης ἀγόμεναι κάθετοι τέμνουσι τὴν ἀκμὴν ταύτην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

552) Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν τοὐλάχιστον τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι ὀρθὴ γωνία.

553) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου;

554) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

555) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουσιν αἱ ἀκμαὶ καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

556) Ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας, ἐπὶ τυχοῦσαν τομὴν αὐτῆς εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ὕψῶν τῆς τομῆς ταύτης.

557) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τυχοῦσα τομὴ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Κ καὶ κ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ κΑΒ.

558) Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τομὴ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Κ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΑΒΓ)^2 = ΚΑΒ)^2 + (ΚΑΓ)^2 + (ΚΒΓ)^2$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Πρίσματα.

§ 308. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα πολυέδρου.— *Πολύεδρον καλεῖται πᾶν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων.* Π.χ. τὰ σώματα ΑΖ, ΚΔΜΝ (*Σχ. 209*) καὶ ΑΗ (*Σχ. 210*) εἶναι πολύεδρα.

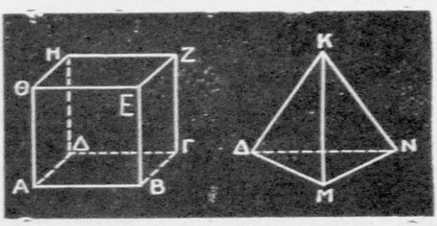
Ἕδραι πολυέδρου καλοῦνται τὰ ἐπίπεδα, ὑπὸ τῶν ὁποίων τοῦτο περικλείεται.

Ἀκμαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

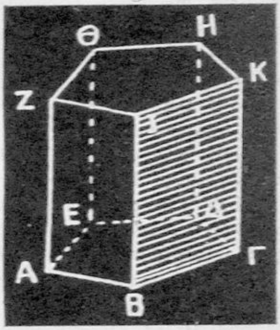
Κορυφαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Δίεδροι καὶ στερεαὶ γωνίαι πολυέδρου καλοῦνται αἱ ὑπὸ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ σχηματιζόμεναι τοιαῦται.

Διαγώνιος πολυέδρου καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα ὁριζόμενον ὑπὸ δύο



Σχ. 209.



Σχ. 210.

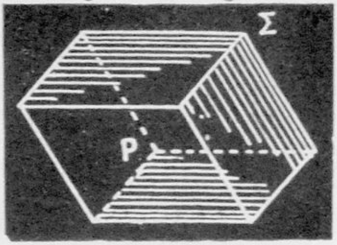
κορυφῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας. Π.χ. τοῦ πολυέδρου ΑΖ διαγώνιοι εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα ΔΕ, ΗΒ, ΘΓ καὶ ΑΖ.

Τὰ πολύεδρα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν αὐτῶν διακρίνονται εἰς τετράεδρα, πεντάεδρα, ἑξάεδρα κλπ.

Πολύεδρόν τι λέγεται κυρτόν, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ προεκτεινομένη ἀφίνῃ αὐτὸ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Π.χ. τὰ πολύεδρα ΑΖ, ΚΔΜΝ, ΑΗ εἶναι κυρτά.

ΣΗΜ. Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κυρτὸν εὐθ. σχῆμα.

§ 309. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα πρίσματος.— *Πρίσμα* *καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο μὲν ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι παραλληλόγραμμα.* Οὕτως, ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 210)* φέρωμεν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ εὐθ. τμήματα ΑΖ,ΒΙ,ΓΚ,ΔΗ καὶ ΕΘ ἴσα, παράλληλα καὶ ὁμόρροπα, φέρωμεν δὲ καὶ τὰς εὐθείας ΖΙ,ΙΚ,ΚΗ,ΗΘ,ΘΖ, σχηματίζεται πολύεδρον, τὸ ὁποῖον εἶναι πρίσμα.



Σχ. 211.

Βάσεις πρίσματος καλοῦνται αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ.

Παράπλευροι ἕδραι πρίσματος καλοῦνται αἱ λοιπαὶ (πλὴν τῶν βάσεων) ἕδραι αὐτοῦ.

Ὕψος πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

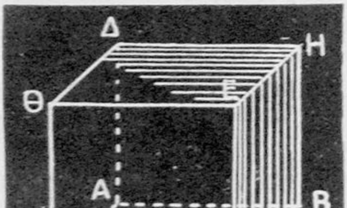
Πλευραὶ πρίσματος καλοῦνται αἱ πλευραὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῶν βάσεων.

Πρίσμα τι λέγεται *τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν* κτλ. ἐὰν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κλπ.

Πρίσμα τι λέγεται *ὀρθόν*, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ὀρθογώνια.

Πρίσμα τι λέγεται *πλάγιον* ἢ *κεκλιμένον*, ἐὰν πᾶσαι ἢ τινὲς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτοῦ εἶναι ρόμβοι ἢ ρομβοειδῆ. Τοιοῦτον π. χ. εἶναι τὸ πρίσμα ΡΣ *(Σχ. 211)*.

Πᾶσα τομὴ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς πλευρὰς καὶ μὴ τέμνοντος τὰς βάσεις καλεῖται *κάθετος τομὴ αὐτοῦ*.



Σχ. 212.

§ 310. Παραλληλεπίπεδα. — *Παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα.*

Εὐνόητον ὅτι πᾶσαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα.

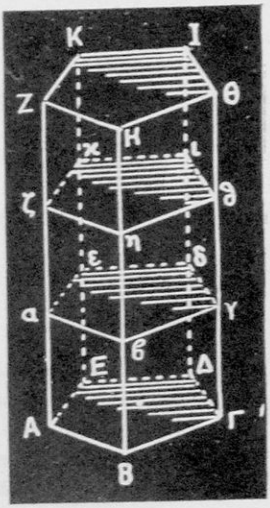
Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια. Π. χ. Τὸ ΑΖ *(Σχ. 209)* εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Αἱ εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν συναντώμεναι ἀκμαὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. Τούτων ἡ μὲν καλεῖται *μῆκος* (ΔΓ), ἡ ἄλλη *πλάτος* (ΔΑ) καὶ ἡ τρίτη *ὕψος* (ΔΗ) *(Σχ. 209).*

Κύβος ἢ κανονικὸν ἑξάεδρον καλεῖται πᾶν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα. Π. χ. τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΕ *(Σχ. 212)* εἶναι κύβος. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ, ἕπεται ὅτι α′) *Αἱ ἀκμαὶ κύβου εἶναι πᾶσαι ἴσαι.* β′) *Αἱ ἕδραι κύβου εἶναι πᾶσαι ἴσαι.*

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν πρισμάτων.

§ 311. Θεώρημα Ι. — *Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι σχήματα ἴσα.*



Σχ. 213.

Ἔστω ΑΘ τυχὸν πρίσμα καὶ δύο αὐτοῦ παράλληλοι τομαὶ αβγδε, ζηθικ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Τὰ τετράπλευρα αβηζ, βγθη, γθιδ, δικε, αεκζ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἄρα αβ=ηζ, βγ=ηθ, γδ=θι, δε=ικ, εα=κζ. Καὶ αἱ γωνίαι δὲ τῶν τομῶν τούτων εἶναι (§ 282) ἴσαι, μία πρὸς μίαν, ἤτοι α=ζ, β=η, γ=θ κλπ. Τὰ δύο λοιπὸν εὐθ. σχήματα αβγδε καὶ ζηθικ εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

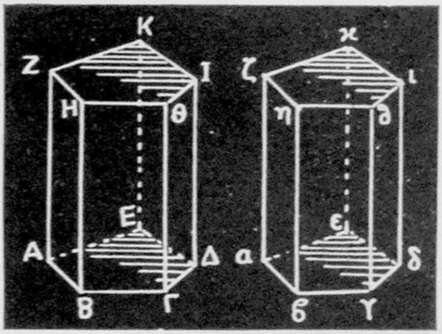
Πόρισμα Ι. — *Πᾶσα τομὴ πρίσματος παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.*

Πόρισμα ΙΙ. — *Αἱ κάθετοι τομαὶ πρίσματος εἶναι πᾶσαι ἴσαι.*

§ 312. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ ὀρθὰ πρίσματα ΑΘ καὶ αθ *(Σχ. 214)* τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ὕψη ΑΖ καὶ αζ ἐπίσης ἴσα. Λέγω ὅτι τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι τὸ πρίσμα αθ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΘ, οὕτως ὥστε ἡ βάσις αβγδε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔΕ· οὕτως ἡ πλευρὰ αζ καθίσταται κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν συμπίπτει μετὰ τῆς ΑΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΖ=αζ, ἡ κορυφὴ ζ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Ζ κλπ. Τὰ πρίσματα λοιπὸν ἐφαρμόζουσιν· εἶναι ἄρα ἴσα. ὅ.ἔ.δ.

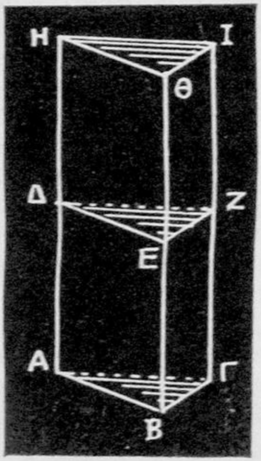


Σχ. 214.

Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους, εἶναι ἰσοδύναμα.*

§ 313. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἐὰν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ· ἐὰν προεκτείνοντες τὰς πλευρὰς ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς βάσεως ΑΒΓ λάβωμεν τμήματα ΔΗ, ΕΘ, ΖΙ ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς ταύτας, φέρωμεν δὲ καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΗΘ, ΘΙ, ΙΗ προκύπτει τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΒΓΗΘΙ Ἐπειδὴ



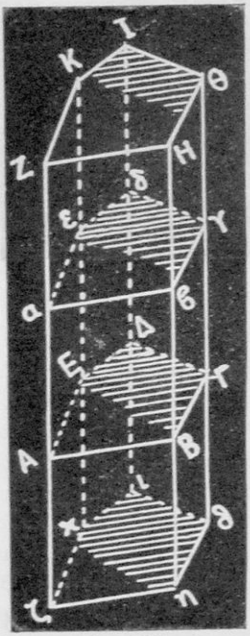
Σχ. 215.

ΑΒΓΗΘΙ=ΑΒΓΔΕΖ+ΔΕΖΗΘΙ

καὶ ΑΒΓΔΕΖ=ΔΕΖΗΘΙ (§ 312). ἕπεται ὅτι ΑΒΓΗΘΙ=ΑΒΓΔΕΖ.2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι 3/μένου, 4/μένου κλπ. τοῦ ὕψους καὶ τὸ πρίσμα 3/ται, 4/ται κλπ. Κατ᾽ ἀκολουθίαν (§ 201) ἐὰν τὸ ὕψος υ ὀρθοῦ πρίσματος Π πολ)σθῇ ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν λ ἤτοι γείνῃ υ.λ=υ′ καὶ τὸ Π θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ λ καὶ θὰ γίνῃ Π.λ=Π′. Ἐπειδὴ δὲ Π′ : Π=λ καὶ υ′ : υ=λ, ἕπεται ὅτι Π′ : Π=υ′ : υ. ὅ.ἔ.δ.

§ 314. Θεώρημα IV.—*Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΘ πλάγιον πρίσμα, αβγδε τυχοῦσα αὐτοῦ κάθετος τομὴ καὶ αθ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν τομὴν αβγδε καὶ ὕψος αζ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΖ τοῦ πλαγίου. Λέγω ὅτι τὰ πρίσματα ΑΘ καὶ αθ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 216.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αζ=ΑΖ>Αα, ἡ ἑτέρα βάσις ζηθικ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος αθ κεῖται ἐντὸς τοῦ πλαγίου. Τὰ πρίσματα λοιπὸν ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ τοῦ κοινοῦ μέρους αβγδεΑΒΓΔΕ καὶ ἐκ τῶν μὴ κοινῶν μερῶν αβγδεΖΗΘΙΚ καὶ ζηθικΑΒΓΔΕ.

Ἐπειδὴ δὲ αΑ+Αζ=αΑ+αΖ, ἔπεται ὅτι Αζ=αΖ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι Βη=βΗ, Γθ=γΘ, Δι=δΙ καὶ Εκ=εΚ. Ἐὰν δὲ τὸ σχῆμα ζηθικΑΒΓΔΕ τεθῇ ἐπὶ τοῦ αβγδεΖΗΘΙΚ, οὕτως ὥστε τὸ εὐθ. σχῆμα ζηθικ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ σχήματος αβγδε, ἡ ζΑ καθισταμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αβγδε συμπίπτει μετὰ τῆς αΖ καὶ ἡ κορυφὴ Α ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Ζ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ κορυφὴ Β ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Η κλπ. Τὰ μὴ κοινὰ λοιπὸν μέρη τῶν πρισμάτων ΑΘ καὶ αθ ἐφαρμόζουσιν, ἤτοι εἶναι ἴσα· τὰ πρίσματα ἄρα ΑΘ καὶ αθ ἀποτελούμενα ἐκ μερῶν ἴσων, ἓν πρὸς ἓν εἶναι ἰσοδύναμα. ὅ.ἔ.δ.

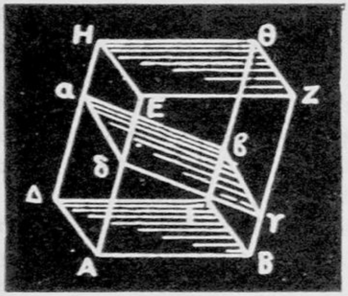
Ἄσκησις. 559) Ἐὰν ἐπὶ τριῶν παραλλήλων καὶ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων εὐθειῶν ληφθῶσιν ὁπωσδήποτε τμήματα ἴσα πρὸς δεδομένον τμῆμα, τὸ πρίσμα, ὅπερ ἔχει πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα, εἶναι σταθερόν.

Ἰδιότητες τῶν παραλληλεπιπέδων.

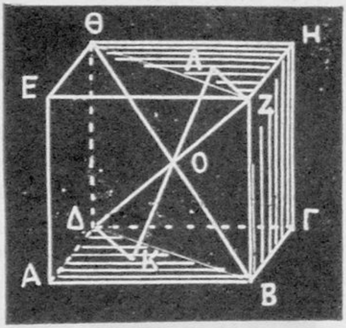
§ 315. Θεώρημα I.—*Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.*

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΘ (*Σχ. 217*). Λέγω ὅτι αἱ ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Αἱ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΘΗ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα. Δύο δὲ ἄλλαι ἀπέναντι ἕδραι



Σχ. 217.



Σχ. 218.

π.χ. αἱ ΑΕΗΔ καὶ ΒΖΘΓ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν μίαν πρὸς μίαν, ἴσας καὶ παραλλήλους. Καὶ αἱ γωνίαι δὲ τῶν ἑδρῶν τούτων αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν σχηματιζόμεναι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα (§ 282). Τὰ παραλληλόγραμμα λοιπὸν ΑΕΗΔ καὶ ΒΖΘΓ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἑδρῶν ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΘΗ.

Πόρισμα Ι.—*Δύο τυχοῦσαι ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς βάσεις αὐτοῦ.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Πᾶσα τομὴ παραλληλεπιπέδου μὴ τέμνουσα τὰς βάσεις αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμον.*

§ 316. Θεώρημα ΙΙ.—*Αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἔστω ΑΗ τυχὸν παραλληλεπίπεδον καὶ ΔΖ, ΒΘ, ΕΓ, ΑΗ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Λέγω ὅτι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα (*Σχ. 218*).

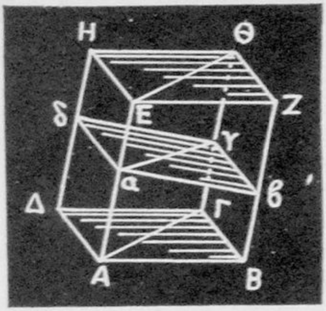
Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον ΔΒΖΘ τέμνει τὰς ἕδρας ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΔΒ καὶ ΘΖ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΔΒΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ δὲ διαγώνιοι ΔΖ καὶ ΒΘ αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ Ο δίχα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἑκατέρα τῶν ἄλλων διαγωνίων ΕΓ, ΑΗ καὶ ἡ ΔΖ τέμνονται δίχα, ἤτοι εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο. Πᾶσαι λοιπὸν αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἑκάστης. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Πᾶσα εὐθεῖα ΚΛ διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου περατουμένη διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ, ἤτοι ΟΚ=ΟΛ, ὡς εὐκόλως ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΚΔ καὶ ΟΛΖ προκύπτει. Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου καλεῖται κέντρον αὐτοῦ.

§ 317. Θεώρημα III.—*Τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.*

Ἔστω ΑΘ τυχὸν παραλληλεπίπεδον καὶ ΑΒΓΕΖΘ, ΑΔΓΕΗΘ τὰ δύο στερεά, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΘΕ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν ΑΕ καὶ ΓΘ αὐτοῦ. Λέγω ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶναι τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΕ, ΓΘ, καὶ ΒΖ εἶναι ἴσα, παράλληλα καὶ ὁμόρροπα, τὸ στερεὸν ΑΒΓΕΖΘ εἶναι τριγωνικὸν πρίσμα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ΑΓΔΕΗΘ εἶναι τριγωνικὸν πρίσμα. Ἤδη διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.



Σχ. 219.

α') Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΘ εἶναι ὀρθόν, καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΕΖΘ ΑΔΓΕΗΘ εἶναι ὀρθὰ πρίσματα· ἐπειδὴ δὲ ταῦτα ἔχουσιν ἴσα ὕψη καὶ ἴσας βάσεις, εἶναι ἴσα.

β') Ἐὰν δὲ τὸ ΑΘ εἶναι πλάγιον καὶ τὰ ῥηθέντα τριγωνικὰ πρίσματα εἶναι πλάγια. Τυχοῦσα δὲ κάθετος τομὴ αβγδ τοῦ ΑΘ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΘΕ εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αβγ καὶ αγδ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι τομαὶ τῶν πρισμάτων ΑΒΓΕΖΘ καὶ ΑΔΓΕΗΘ. Τὸ τριγωνικὸν λοιπὸν πρίσμα ΑΒΓΕΖΘ εἶναι (§ 314) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ΑΕ καὶ βάσιν αβγ. Τὸ δὲ ΑΔΓΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα ἔχον ὕψος ΑΕ καὶ βάσιν αδγ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθὰ ταῦτα πρίσματα εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ πρὸς ταῦτα ἰσοδύναμα πλάγια πρίσματα ΑΒΓΕΖΘ καὶ ΑΔΓΕΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα I.—*Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν γωνιῶν αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις. 560) Τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ὀρθογωνίου παραλληπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.

561) Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

562) Τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου κύβου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

563) Ἐὰν ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι 2 μέτ. πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ;

564) Ἐὰν ἡ διαγώνιος κύβου εἶναι 5 μέτ. πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ αὐτοῦ;

565) Ἡ ἐπιφάνεια κύβου ἔχει ἐμβαδὸν 54 τ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ;

Μέτρησις τῶν πρισμάτων.

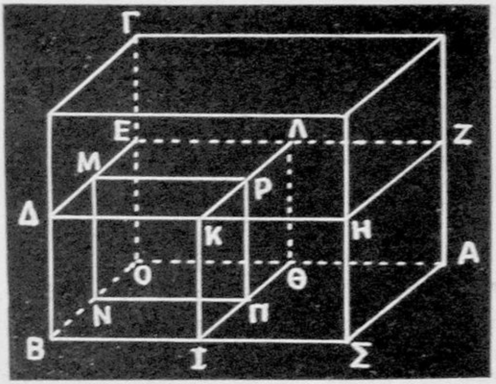
§ 318. Μονάδες ὄγκων.—Ὡς μονὰς τῶν ὄγκων (§ 1) λαμβάνεται ὁ ὄγκος κύβου, ὅστις ἔχει ἀκμὴν τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν ὡς μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ὄγκων εἶναι ὁ κύβος ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν ἑνὸς μέτρου, μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς. Καλοῦνται δὲ οἱ κύβοι οὗτοι κατὰ σειρὰν *κυβικὸν μέτρον, κυβικὴ παλάμη, κυβικὸς δάκτυλος, κυβικὴ γραμμή.*

§ 319. Ὄγκος σώματος.—Ὁ λόγος τοῦ ὄγκου (§ 1) σώματος πρὸς τὴν μονάδα τῶν ὄγκων, ἤτοι τὸ μέτρον αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς ἐκφράζων ἐκ πόσων μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ὁ ὄγκος. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται καὶ αὐτὸς *ὄγκος* τοῦ σώματος τούτου.

§ 320. Θεώρημα I.—*Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.*

Ἔστω ΟΑΒΓ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. Λέγω ὅτι (ΟΑΒΓ)=(ΟΑ) ΟΒ) (ΟΓ). *(Σχ. 220).*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΓ λάβωμεν τμῆμα ΟΕ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα μήκους καὶ διὰ τοῦ ἄκρου Ε φέρωμεν ἐπίπεδον ΔΕΖΗ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΟΒ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΟΑΒΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ ΟΑΒΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟΒΣ· εἶναι ἄρα $\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑΒΕ})} = \frac{(\text{ΟΓ})}{(\text{ΟΕ})}$. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ΟΑ λάβωμεν τμῆμα ΟΘ ἴσον πρὸς ΟΕ καὶ φέρωμεν διὰ τοῦ Θ ἐπίπεδον ΘΛΚΙ παράλληλον πρὸς τὸ ΒΟΓ, σχηματίζεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΟΘΕΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ ΟΑΕΒ τὴν αὐτὴν βάσιν· ΟΒΔΕ εἶναι ἄρα $\frac{(\text{ΟΑΒΕ})}{(\text{ΟΒΘΕ})} = \frac{(\text{ΟΑ})}{(\text{ΟΘ})}$. Ἐὰν τέλος ἐπὶ τῆς ΟΒ λάβωμεν τμῆμα ΟΝ ἴσον πρὸς ΟΕ καὶ φέρωμεν διὰ τοῦ



Σχ. 220.

Ν ἐπίπεδον ΝΠΡΜ παράλληλον πρὸς τὸ ΑΟΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΟΘΕΝ, τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ ΟΘΕΒ τὴν αὐτὴν βάσιν ΟΘΛΕ· εἶναι ἄρα $\frac{(\text{ΟΒΘΕ})}{(\text{ΟΘΕΝ})} = \frac{(\text{ΟΒ})}{(\text{ΟΝ})}$. Ἐὰν ἤδη τὰς εὑρεθείσας τρεῖς ἰσότητας πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑΒΕ})} \cdot \frac{(\text{ΟΑΒΕ})}{(\text{ΟΒΘΕ})} \cdot \frac{(\text{ΟΒΕΘ})}{(\text{ΟΘΕΝ})} = \frac{(\text{ΟΑ}}{(\text{ΟΘ})} \cdot \frac{(\text{ΟΒ})}{(\text{ΟΝ})} \cdot \frac{(\text{ΟΓ})}{(\text{ΟΕ})},$$ ὅθεν

$$\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΘΕΝ})} = \frac{(\text{ΟΑ})\,(\text{ΟΒ})\,(\text{ΟΓ})}{1}.$$ Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΟΘΕΝ ἔχον διαστάσεις ΟΕ=ΟΘ=ΟΝ=1 εἶναι ἡ μονὰς τῶν ὄγκων, ὁ λόγος $\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΘΕΝ})}$ ἐκφράζει τὸν ὄγκον τοῦ ΟΑΒΓ, ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ἰσότης γράφεται

$$(\text{ΟΑΒΓ}) = (\text{ΟΑ}).(\text{Ο}).(\text{ΟΒΓ}).$$ δ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

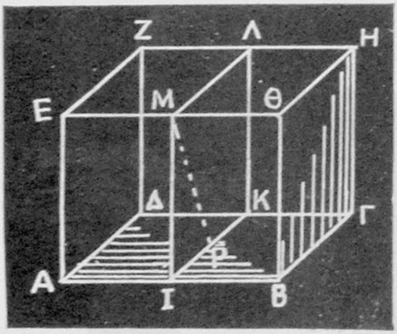
Πόρισμα ΙΙ.—*Ὁ ὄγκος κύβου ἰσοῦται πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.*

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν διαστάσεων τοῦ κυβ. μέτρου ἰσοῦται πρὸς 10 παλάμας, τὸ κυβ. μέτρον περιέχει $10^3=1000$ κ. παλάμας. Ὁμοίως κατανοοῦμεν ὅτι 1 κ. παλ.=1000 κ. δακτ. καὶ 1 κ. δ.=1000 κ. γραμμάς.

§ 321. Θεώρημα ΙΙ.—*Ὁ ὄγκος οἱουδήποτε παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.* α΄) Ἔστω ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΑΗ. ἔχον βάσιν τὸ μὴ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ΑΕ. Λέγω ὅτι

$$(ΑΗ)=(ΑΒΓΔ).\ (ΑΕ).$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ σχηματίζεται ἡ κάθετος τομὴ ΙΚΛΜ. Αὕτη εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ ΜΙ ὡς τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΘΕ καὶ ΙΚΛΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΙΚ. Τὸ παραλληλεπίπεδον δὲ ΑΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ ὀρθογώνιον ΙΚΛΜ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς ΑΒ· ἄρα (ΑΗ)=(ΙΚΛΜ) (ΑΒ).



Σχ. 221.

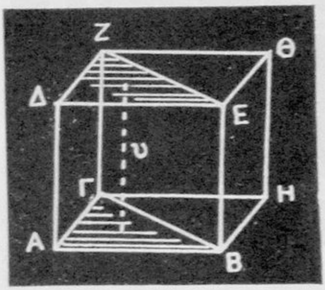
Ἐπειδὴ δὲ (ΙΚΛΜ)=(ΜΙ) (ΙΚ)=(ΑΕ). (ΙΚ), ἕπεται ὅτι (ΑΗ)=(ΑΒ) (ΙΚ).(ΑΕ). (1) Ἀλλ᾽ ἡ ΑΒ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΙΚΛΜ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΙΚ, ἥτις εἶναι διὰ τοῦτο ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Εἶναι ἄρα (ΑΒ) (ΙΚ)=(ΑΒΓΔ), ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται (ΑΗ)=(ΑΒΓΔ).(ΑΕ). ὅ.ἔ.δ.

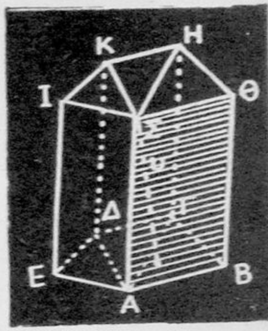
β΄) Ἐὰν τὸ ΑΗ δὲν εἶναι ὀρθόν, ἡ τομὴ ΙΚΛΜ δὲν εἶναι ὀρθογώνιον, ἀλλ᾽ ἄλλο παραλληλόγραμμον· εἶναι δὲ τὸ ΑΗ ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχον βάσιν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος ΑΒ· ἄρα κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν περίπτωσιν εἶναι (ΑΗ)=(ΙΚΛΜ) (ΑΒ). Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ ΙΚΛΜ ἡ ΙΚ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ΜΡ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν (ΙΚΛΜ) = (ΙΚ).(ΜΡ). Ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται (ΑΗ)=(ΙΚ).(ΑΒ).(ΜΡ), ὅθεν (ΑΗ)=(ΑΒΓΔ) (ΜΡ). Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΙΚΛΜ εἶναι (§ 294) κάθετα, ἡ ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν τομὴν ΙΚ αὐτῶν ἀγομένη κάθετος ΜΡ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ κάθετος· εἶναι ἄρα αὕτη ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ καὶ ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης (ΑΗ)=(ΑΒΓΔ).(ΜΡ) δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος.

§ 322. Θεώρημα III. — *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ ἔχον βάσιν ΑΒΓ καὶ ἂς καλέσωμεν υ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Λέγω ὅτι (ΑΒΓΔΕΖ)=(ΑΒΓ).υ.

Ἀπόδειξις. Τὸ τριγωνικὸν τοῦτο πρίσμα εἶναι (§ 317 II. I) τὸ





Σχ. 222.

ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΘ, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσιν αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΔ αὐτοῦ. Εἶναι ἄρα

$$(ΑΒΓΔΕΖ)=\frac{(ΑΘ)}{2}=\frac{(ΑΒΗΓ)\cdot υ}{2}=\frac{2(ΑΒΓ)υ}{2}=(ΑΒΓ)υ. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

β΄) Ἔστω ἤδη τυχὸν πρίσμα ΑΗ ἔχον βάσιν ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος υ, Λέγω ὅτι (ΑΗ)=(ΑΒΓΔΕ).υ.

Ἀπόδειξις. Τὰ ἐπίπεδα ΣΑΓ καὶ ΣΑΔ χωρίζουσι τὸ πρίσμα τοῦτο εἰς τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΣΘΗ, ΑΓΔΣΗΚ καὶ ΑΔΕΣΚΙ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι ὕψος υ. Ἐπειδὴ δὲ

$$(ΑΒΓΣΘΗ)=(ΑΒΓ).υ, \quad (ΑΓΔΣΗΚ)=(ΑΓΔ).υ$$

καὶ (ΑΔΕΣΚΙ)=(ΑΔΕ)υ, ἕπεται διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ὅτι (ΑΗ)=[(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)+(ΑΔΕ)].υ ἢ (ΑΗ)=ΑΒΓΔΕ).υ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. — *Τὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Πόρισμα II. — *Δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Πόρισμα III. — *Δύο πρίσματα ἔχοντα ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

√ Ἀσκήσεις 566) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου, ὅπερ ἔχει διαστάστάσεις 3μέτ, 4μέτ. καὶ 5μέτ; Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

567) Δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 3μ. 2μ. καὶ 5μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ αὕτη; β=Ο.ειδ.

√ 568) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν 24 τ. μέτρων;

√ 569) Πρίσμα ὀρθὸν ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 6μ ἡ μία καὶ 8μ ἡ ἄλλη, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τῆς βάσεως. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

570) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

571) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πλαγίου πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

√ 572) Ὀρθὸν πρίσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2,5μ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος καὶ πόσον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

√ 573) Πόσον εἶναι τὸ βάρος σιδηροῦ τριγωνικοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει ὕψος 0,35μ καὶ βάσιν τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 0,3μ ἑκατέρα δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν 8,5μ; (Εἰδ. βάρος σιδήρου 7,78).

574) Ὀρθοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, ὁ ὄγκος 1,44 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας $4{,}8\sqrt{3}$ τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως αὐτοῦ;

575) Νὰ διαιρεθῇ τριγωνικὸν πρίσμα εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' ἐπιπέδων ἀγομένων διά τινος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

576) Αἱ βάσεις παραλληλεπιπέδου εἶναι ρόμβοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει διαγωνίους 0,4μ καὶ 0,28μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τούτου, ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν ρόμβων τούτων εἶναι 1, 2μ;

577) Ἐὰν ἡ ἀκμὴ κύβου αὐξηθῇ κατὰ 1μ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ αὐξάνει κατὰ 19 κυβ. μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου τούτου;

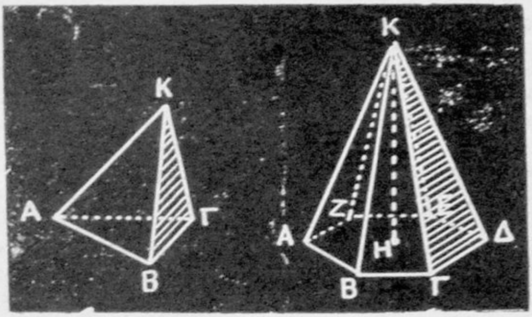
Πυραμίδες.

§ 323. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα πυραμίδος. — *Πυραμὶς καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τυχούσης ἐπιπέδου τομῆς, ἥτις τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς.*

Ἐὰν π. χ. ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 233)* εἶναι ἐπίπεδος τομὴ τῆς στερεᾶς γωνίας Κ, τὸ πολύεδρον Κ.ΑΒΓΔΕΖ εἶναι πυραμίς.

Ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, ἐξ ἧς γίνεται πυραμίς τις, καλεῖται καὶ *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος ταύτης.

Ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ἕδρα καλεῖται *βάσις* τῆς πυραμίδος. Αἱ



Σχ. 223.

ἄλλαι (πλὴν τῆς βάσεως) ἕδραι πυραμίδος καλοῦνται *παράπλευροι* ἕδραι αὐτῆς. Αἱ παράπλευροι ἕδραι πυραμίδος εἶναι τρίγωνα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὴν τῆς πυραμίδος κορυφὴν καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως αὐτῆς.

Ὕψος πυραμίδος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως αὐτῆς. Π. χ. τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ ὕψος εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΗ.

Πλευραὶ πυραμίδος καλοῦνται αἱ ἀκμαὶ αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Πυραμίς τις λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνική*, *πενταγωνικὴ* κλπ., ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον κλπ. Ἑκάστη τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει τέσσαρας ἕδρας, ἤτοι εἶναι *τετράεδρον*· δύναται δὲ οἱαδήποτε ἕδρα αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις. Ἡ πυραμὶς π. χ. Κ.ΑΒΓ εἶναι τριγωνική.

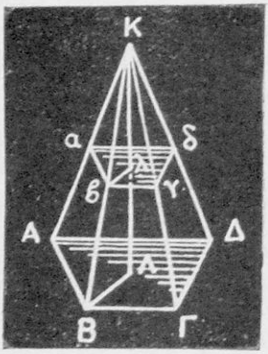
Κανονικὴ πυραμὶς καλεῖται πᾶσα πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, τὸ δὲ ὕψος τέμνει τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ πυραμὶς π. χ. Κ.ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονική. *Κανονικὸν τετράεδρον*, καλεῖται κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας πᾶσαι αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις. 578) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα.

579) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν πυραμίδων.

§ 324. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς, α΄) αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, β΄) ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν βάσιν, ὁ δὲ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν βάσιν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος.*



Σχ. 224.

Ἔστω Κ.ΑΒΓΔ τυχοῦσα πυραμίς, ΚΛ τὸ ὕψος αὐτῆς καὶ αβγδ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ τομὴ αὐτῆς τέμνουσα τὸ ὕψος εἰς σημεῖον λ. Λέγω ὅτι α΄) $\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{Κδ}{ΚΔ}=\frac{Κλ}{ΚΛ}$ καὶ β΄) ἡ τομὴ αβγδ εἶναι σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ καὶ $\frac{(αβγδ)}{(ΑΒΓΔ)}=\left(\frac{Κλ}{ΚΛ}\right)^2$ (Σχ. 224).

Ἀπόδειξις. α΄) Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ εἶναι παράλληλα, αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ αβ αὐτῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΑΒ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ βγ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ δγ τῇ ΔΓ καὶ ἡ αδ τῇ ΑΔ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν Καβ καὶ ΚΑΒ, Κβγ καὶ ΚΒΓ κλπ. εἶναι ὅμοια καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{Κδ}{ΚΔ}$. Ἐπειδὴ (§ 279) αἱ εὐθεῖαι ΒΛ, βλ εἶναι παράλληλοι, τὰ τρίγωνα Κβλ καὶ ΚΒΛ εἶναι ὅμοια, ἄρα $\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κλ}{ΚΛ}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων ἕπεται ὅτι $\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{Κδ}{ΚΔ}=\frac{Κλ}{ΚΛ}$. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν Καβ καὶ ΚΑΒ, Κβγ καὶ ΚΒΓ κλπ. εἶναι

$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{K\beta}{KB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{K\gamma}{K\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{K\delta}{K\Delta}=\frac{\alpha\delta}{A\Delta}, \text{ ἤτοι}$$

$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\alpha\delta}{A\Delta}$. Τὰ εὐθ. λοιπὸν σχήματα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι μία πρὸς μίαν παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἔπεται ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν. Τὰ εὐθ. σχήματα ταῦτα εἶναι ἄρα ὅμοια. Ἕνεκα τούτου εἶναι

$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{(AB)^2}=\left(\frac{\alpha\beta}{AB}\right)^2$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς προαπεδείχθη, εἶναι

$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{K\beta}{KB}=\frac{K\lambda}{K\Lambda}$, ἰσότης αὕτη γίνεται $\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(AB\Gamma\Delta)}=\left(\frac{K\lambda}{K\Lambda}\right)^2$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I.—*Ἐὰν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις.*

Πόρισμα II.—*Ἐὰν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.*

Ἀσκήσεις. 580) Δεδομένης πυραμίδος Κ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΚΑ αὐτῆς σημεῖον τοιοῦτον ὥστε ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τομὴ τῆς πυραμίδος νὰ εἶναι τὸ 1|2 τῆς βάσεως.

581) Ἐὰν σημεῖόν τι α τῆς πλευρᾶς ΚΑ πυραμίδος Κ ἔχῃ τοιαύτην θέσιν ὥστε $\frac{K\alpha}{KA}=\frac{2}{3}$, ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς βάσεως πρὸς τὴν δι' αὐτοῦ διερχομένην καὶ παράλληλον τῇ βάσει τομὴν τῆς πυραμίδος;

582) Ἑκάστη ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι α. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τομῆς, ἡ ὁποία τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ ὕψος αὐτοῦ;

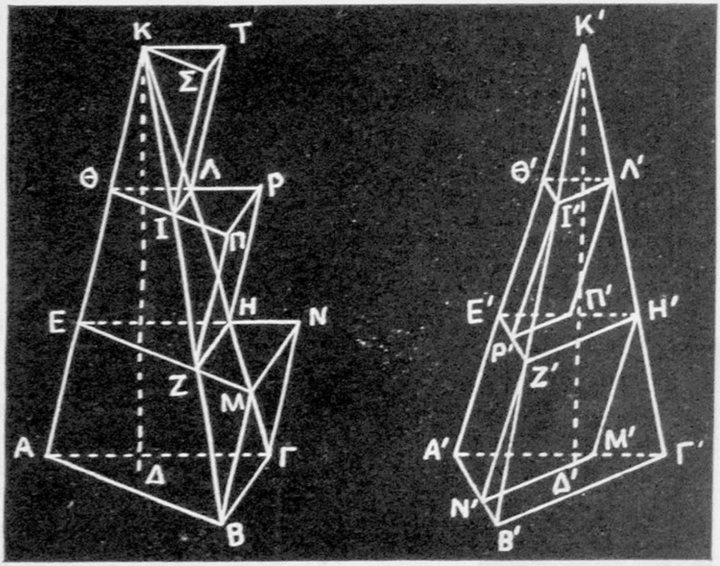
Μέτρησις τῶν πυραμίδων.

§ 325. Θεώρημα I.—*Ἐὰν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Ἔστωσαν αἱ ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες Κ.ΑΒΓ καὶ Κ'.Α'Β'Γ' *(Σχ. 225)*, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι. Λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις. Ἂν αὗται δὲν ἦσαν ἰσοδύναμοι, οἱ ὄγκοι Θ καὶ

Θ′ αὐτῶν θὰ ἦσαν ἄνισοι, ἔστω δὲ Θ > Θ′. Νοήσωμεν τὰ ὕψη ΚΔ καὶ Κ′Δ′ διῃρημένα π.χ. εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκάστου ἂς φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν ἀντίστοιχον βάσιν. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι τομαὶ τῶν πυραμίδων εἶναι (§ 324 Π. ΙΙ) ἰσοδύναμοι, μία πρὸς μίαν ἤτοι (ΕΖΗ) = (Ε′Ζ′Η′), (ΘΙΛ) = (Θ′Ι′Λ′). Ἐὰν ἤδη κατασκευάσωμεν πρίσματα ἔχοντα ὕψος



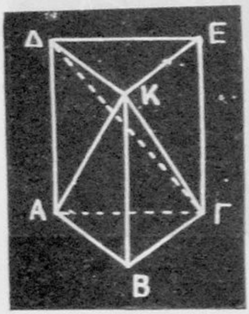
Σχ. 225.

μὲν τὸ τρίτον τοῦ ὕψους τῶν πυραμίδων, βάσεις δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ, ΘΙΛ καὶ καλέσωμεν Π τὸ ἄθροισμα

(ΑΒΓΕΜΝ) + (ΕΖΗΘΠΡ) + (ΘΙΛΚΣΤ) θὰ εἶναι προφανῶς Θ < Π. Ἐὰν κατασκευάσωμεν πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὰ προηγούμενα καὶ ἔχοντα βάσεις τὰς τομὰς Ε′Ζ′Η′ καὶ Θ′Ι′Λ′ τῆς πυραμίδος Κ′, καλέσωμεν δὲ Π′ τὸ ἄθροισμα (Α′Ν′Μ′Ε′Ζ′Η′) + (Ε′Ρ′Π′Θ′Ι′Λ′) θὰ εἶναι προφανῶς Θ′ > Π′. Ἀφαιροῦντες ἤδη ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος Θ < Π τὴν αὐτὴν ποσότητα Θ′ εὑρίσκομεν ὅτι Θ − Θ′ < Π − Θ′.

Ἐπειδὴ δὲ $\Pi - \Theta' < \Pi - \Pi'$, ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ὅτι $\Theta - \Theta' < \Pi - \Pi'$. Ἐπειδὴ δὲ $\Pi - \Pi' = (\text{ΑΒΓΕΜΝ})$, ἕπεται ὅτι $\Theta - \Theta' < (\text{ΑΒΓΕΜΝ})$ ἢ $\Theta - \Theta' < (\text{ΑΒΓ}).\left(\frac{\text{ΚΔ}}{3}\right)$. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ἑκάστης πυραμίδος εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν, εὑρίσκομεν ὅτι $\Theta - \Theta' < (\text{ΑΒΓ}).\frac{(\text{ΚΔ})}{\nu}$. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΓ) εἶναι σταθερὰ ποσότης, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{(\text{ΚΔ})}{\nu}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐφ' ὅσον ὁ ν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον $(\text{ΑΒΓ}).\frac{(\text{ΔΚ})}{\nu}$ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἡ διαφορὰ $\Theta - \Theta'$ εἶναι μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι σταθερὰ καὶ ὡς μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι μηδέν, ἄρα $\Theta = \Theta'$. Ἔχουσι λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται ἴσους ὄγκους καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμοι. ὅ. ἔ. δ.

§ 326. Θεώρημα II. — *Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*



Σχ. 226.

Ἔστω τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓ, καὶ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΚΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω ὅτι ἡ Κ.ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓΔΚΕ.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον ΑΚΓ ἀποκόπτει ἀπὸ τοῦ ῥηθέντος πρίσματος τὴν πυραμίδα Κ.ΑΒΓ, μένει δὲ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΓΕΔ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΚΔΓ, ἡ πυραμὶς Κ.ΑΓΕΔ διαιρεῖται εἰς τὰς πυραμίδας ΚΔΓΕ καὶ ΚΑΔΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσοδύναμοι, ἤτοι (Κ.ΔΓΕ) = (Κ.ΑΔΓ). Ἐπειδὴ δὲ (Κ.ΔΓΕ) = (Γ.ΔΚΕ) καὶ (Κ.ΑΒΓ) = (Γ.ΔΚΕ), ἕπεται ὅτι (Κ.ΑΒΓ) = (Κ.ΔΓΕ) = (Κ.ΑΔΓ).

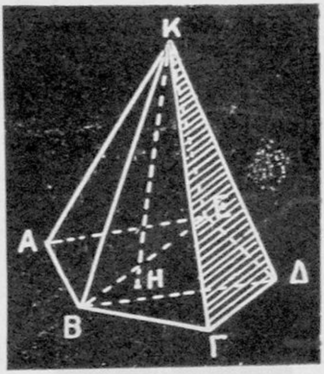
Ἐπειδὴ δὲ αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΚΕ, ἕπεται ὅτι (ΚΑΒΓ) = 1/3 (ΑΒΓΔΚΕ). ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. — *Ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*

§ 327. Θεώρημα III. — *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔΕ, (*Σχ. 227*), ἧς τὸ ὕψος ΚΗ ἔστω υ. Λέγω ὅτι

$$(\text{Κ.ΑΒΓΔΕ}) = \frac{(\text{ΑΒΓΔΕ}).\upsilon}{3}.$$



Σχ. 227.

Ἀπόδειξις. Τὰ ἐπίπεδα ΚΒΔ καὶ ΚΒΕ διαιροῦσι τὴν πυραμίδα εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ὧν ἑκάστη ἔχει ὕψος υ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$(\text{Κ.ΒΔΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΒΔΓ}).\upsilon,$$

$$(\text{Κ.ΒΕΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΒΕΔ}).\upsilon,$$

$(\text{Κ.ΑΒΕ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΕ}).\upsilon$, ἕπεται διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ὅτι

$$(\text{Κ.ΑΒΓΔΕ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΔΓΔΕ}).\upsilon. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα I. — *Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Πόρισμα II. — *Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Πόρισμα III. — *Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Αἱ δὲ ἔχουσαι ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

Ἀσκήσεις. 583) Πυραμίδος Κ.ΑΒΓ ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔχον καθέτους πλευρὰς (ΑΒ)=9 μέτ. καὶ (ΑΓ)=12 μέτ. ἡ δὲ πλευρὰ ΚΑ αὐτῆς κάθετος οὖσα ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς;

584) Κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 10 μέτ. ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 6 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

585 Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 1,5 μέτ. καὶ ὄγκον 0,6 κυβ. μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς;

586) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἔχοντος ἀκμὴν α μέτρων.

587) Πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 2μέτ. 3μέτ. καὶ 4μέτ, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι 5μέτ. Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ κύβου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτήν;

588) Νὰ διαιρεθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς εἰς τέσσαρα μέρη ἰσοδύναμα δι' ἐπιπέδων ἀγομένων διά τινος τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

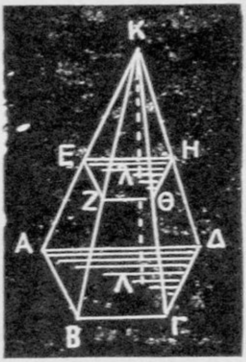
Κόλουροι πυραμίδες καὶ κολοβὰ πρίσματα.

§ 328. **Κόλουρος πυραμίς.**—*Κόλουρος πυραμὶς καλεῖται μέρος πυραμίδος περιεχόμενον μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τυχούσης παραλλήλου πρὸς αὐτὴν τομῆς.* Π.χ. τὸ μέρος ΑΒΓΔΕΖΘΗ (*Σχ. 228*) τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ εἶναι κόλουρος πυραμίς. Ἐκ τῶν ἑδρῶν κολούρου πυραμίδος δύο εἶναι παράλληλοι καὶ ὅμοιαι· αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τραπέζια. Αἱ παράλληλοι ἕδραι κολούρου πυραμίδος καλοῦνται *βάσεις* αὐτῆς.

Ὕψος κολούρου πυραμίδος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτῆς.

Κόλουρός τις πυραμὶς λέγεται *τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ* κλπ., ἐὰν αἱ βάσεις αὐτῆς εἶναι τρίγωνα τετράπλευρα, πεντάγωνα κλπ.

§ 329. **Θεώρημα I.**—*Ὁ ὄγκος πάσης κολ. πυραμίδος εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τῆς κολ. πυραμίδος, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν μίαν, ἡ δὲ τὴν ἄλλην βάσιν τῆς κολ. πυραμίδος καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν βάσεων τούτων.*



Σχ. 228.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΘΗ (*Σχ. 228*) τυχοῦσα κολ. πυραμὶς καὶ Κ.ΑΒΓΔ ἡ πυραμίς, ἐκ τῆς ὁποίας αὕτη προῆλθεν. Ἔστω δὲ $υ=(λΛ)$, $Β=(ΑΒΓΔ)$ καὶ $β=(ΕΖΘΗ)$. Ἐὰν δὲ $Β:χ=χ:β$, θὰ εἶναι $χ^2=Ββ$, ὅθεν $χ=\sqrt{Ββ}$. Λέγω ὅτι

$$(ΑΒΓΔΕΖΘΗ)=\frac{1}{3}Β.υ+\frac{1}{3}β.υ+\frac{1}{3}\sqrt{Ββ}.υ \qquad ἤ$$

$$(ΑΒΓΔΕΖΘΗ)=\frac{1}{3}\left(Β+β+\sqrt{Ββ}\right)υ.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $(ΑΒΓΔΕΖΘΗ)=(Κ,ΑΒΓΔ)-(Κ.ΕΖΘΗ)$ καὶ $(Κ.ΑΒΓΔ)=1/3\ Β.(ΚΛ)$, $(Κ.ΕΖΘΗ)=1/3\ β.(Κλ)$, ἕπεται ὅτι

$$(ΑΒΓΔΕΖΘΗ=1/3\ [Β.(ΚΛ)-β\ (Κλ)] \qquad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 324) ὅτι $\frac{β}{Β}=\left(\frac{Κλ}{ΚΛ}\right)^2$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν $\frac{\sqrt{β}}{\sqrt{Β}}=\frac{Κλ}{ΖΛ}$, ὅθεν δι᾽ ἀντιμεταθέσεως τῶν μέσων ὅρων προκύπτει ὅτι $\frac{\sqrt{β}}{Κλ}=\frac{\sqrt{Β}}{ΚΛ}$. Θέτοντες δὲ $\frac{\sqrt{β}}{Κλ}=\frac{\sqrt{Β}}{ΚΛ}=\frac{1}{ρ}$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

ὅτι (ΚΛ)$=\rho\sqrt{B}$ καὶ (Κλ)$=\rho\sqrt{\beta}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ὅτι

(ΚΛ)—(Κλ)$=\rho\sqrt{B}-\rho\sqrt{\beta}$ ἢ $\upsilon=\rho(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})$, ἄρα $\rho=\dfrac{\upsilon}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}$.

Ἡ ἰσότης (1) γίνεται λοιπὸν (ΑΒΓΔΕΖΘΗ)$=1/3.\ (B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta})\rho=$ $1/3\ (B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta})\dfrac{\upsilon}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}=1/3\dfrac{B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}\upsilon.$

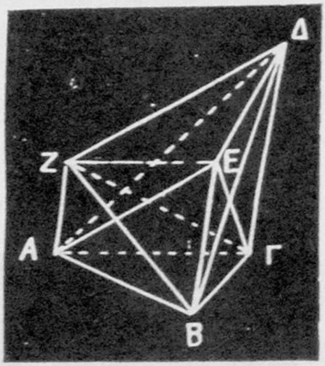
Ἐπειδὴ δὲ $(B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta}):(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})=B+\sqrt{B\beta}+\beta$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται (ΑΒΓΔΕΖΘΗ)$=1/3\ (B+\beta+\sqrt{B\beta})\upsilon$. ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις 589) Κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὕψος 2 μέτ. καὶ βάσεις τρίγωνα ἰσόπλευρα, ὧν τὸ μὲν ἔχει πλευρὰν 3μέτ, τὸ δὲ ἄλλο 2μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

590) Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὕψος 5μ, καὶ βάσεις τετράγωνα, ὧν τὸ μὲν ἔχει πλευρὰν 7,5μ τὸ ἄλλο 5μ, Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

591) Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων β καὶ Β κολ. πυραμίδος εἶναι ρ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $1/3B(1+\rho+\rho^2).\upsilon$.

§ 330. Κολοβὸν πρίσμα.— *Κολοβὸν πρίσμα καλεῖται μέρος πρίσματος περιεχόμενον μεταξὺ τῆς μιᾶς βάσεως καὶ τομῆς αὐτοῦ, ἥτις δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν καὶ τέμνει ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.* Τὸ πολύεδρον π.χ. ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ.229)* εἶναι κολοβὸν πρίσμα.



Σχ. 229.

Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, ἐξ οὗ προέρχεται κολ. πρίσμα, καλεῖται *βάσις* τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Κολοβόν τι πρίσμα καλεῖται *τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν* κλπ. ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον πεντάγωνον κλπ. Τὸ κολ. πρίσμα καλεῖται *ὀρθὸν* ἢ *πλάγιον* καθ᾽ ὅσον καὶ τὸ πρίσμα, ἐξ οὗ προῆλθεν, εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον.

§ 331. Θεώρημα Ι.— *Πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι βάσιν τὴν βάσιν τοῦ κολ. πρίσματος καὶ κορυφὰς ἀντιστοίχως τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς τομῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 229)* κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα. Τὸ ἐπίπεδον ΑΕΓ ἀποχωρίζει τοῦ κολ. πρίσματος τὴν πυραμίδα Ε.ΑΒΓ, ἡ δὲ μένουσα τετραγωνικὴ πυραμὶς Ε.ΑΓΔΖ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕΓ εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, Ε.ΑΖΓ καὶ Ε.ΖΓΔ. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ ΕΒ παράλληλος οὖσα τῇ ΑΖ εἶναι παράλληλος καὶ τῇ βάσει τῆς πυραμίδος Ε.ΑΖΓ, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ πυραμίδες Ε.ΑΖΓ καὶ Β.ΑΖΓ εἶναι ἰσοϋψεῖς, ἄρα, (Ε.ΑΖΓ)=(Β.ΑΖΓ) = (Ζ.ΒΑΓ). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν κατὰ σειρὰν ὅτι (Ε.ΖΓΔ)=(Β.ΖΓΔ)=(Ζ.ΒΓΔ)=(Α.ΒΓΔ)=Δ.(ΑΒΓ). Ἀποτελεῖται λοιπὸν τὸ κολ. πρίσμα ἐκ τῶν πυραμίδων Ε.ΑΒΓ, Ζ.ΑΒΓ, Δ.ΑΒΓ, αἵτινες ἔχουσι βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὰς ἀντιστοίχως τὰς κορυφὰς Ε, Ζ,Δ τῆς τομῆς. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Ὁ ὄγκος παντὸς πλαγίου κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

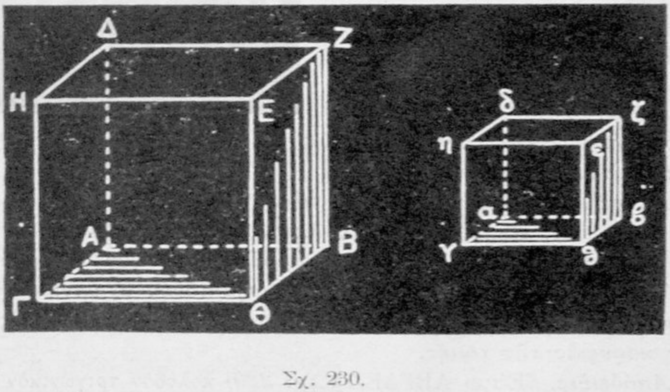
ΣΗΜ. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου πολυγωνικοῦ κολ. πρίσματος διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰ κολ. πρίσματα καὶ προσθέτομεν τοὺς ὄγκους τούτων.

Ἀσκήσεις. 592) Ὀρθοῦ κολ. πρίσματος ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 0,70, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι 1μ, 2μ καὶ 2,50μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

593) Κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 2μ, 5μ καὶ 6 μ, ἡ δὲ κάθετος τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν 0,5μ. καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν 0,3μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Ὅμοια πολύεδρα.

§ 332. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα ὁμοίων πολυέδρων.—



Σχ. 230.

Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν, μίαν πρὸς μίαν, ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, τὰς δὲ ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν *σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας*. Π.χ. οἱ κύβοι αε καὶ ΑΕ (*Σχ. 230*) εἶναι πολύεδρα ὅμοια.

Αἱ ὅμοιαι ἕδραι ὁμοίων πολυέδρων λέγονται *ὁμόλογοι* ἕδραι. Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν λέγονται *ὁμόλογοι* κορυφαί. Αἱ ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι καλοῦνται *ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι*. Τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουσι δύο ὁμόλογοι κορυφαί, καλοῦνται *ὁμόλογα τμήματα*. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἕπεται εὐκόλως ὅτι·

α΄) Αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι. Π.χ. Αἱ δίεδροι ΑΒ καὶ αϐ εἶναι ἴσαι, διότι ἐφαρμόζουσιν, ὅταν αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α ἐφαρμόσωσιν.

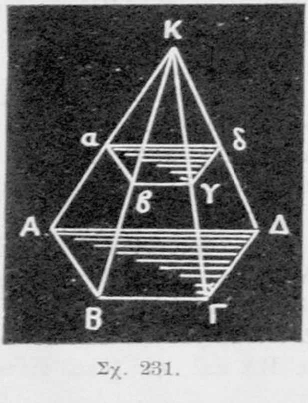
β΄) Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι σταθερός. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ΑΒΘΓ, ΒΘΕΖ, ΖΕΗΔ κλπ. πρὸς τὰς αϐθγ, ϐθεζ, ζεηδ κλπ. εἶναι ΑΒ : αϐ = ΒΘ : ϐθ = ΕΖ : εζ = ΔΖ : δζ κτλ. Ὁ σταθερὸς λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων καλεῖται *λόγος τῆς ὁμοιότητός αὐτῶν*.

Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

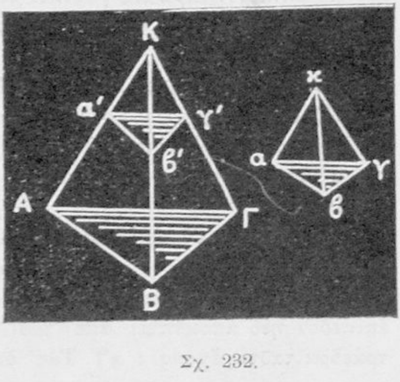
§ 333. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει ἡ ἀποκοπτομένη πυραμὶς εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἀρχικήν.*

Ἔστω ἡ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ (*Σχ 231*) καὶ αϐγδ τομὴ αὐτῆς παράλληλος τῇ βάσει ΑΒΓΔ αὐτῆς. Λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔ καὶ Κ.αϐγδ εἶναι ὅμοιαι.

Ἀπόδειξις. Ἡ τομὴ αϐγδ ὡς παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ εἶναι



Σχ. 231.



Σχ. 232.

(§ 324) ὁμοία πρὸς αὐτήν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ αϐ,ϐγ,γδ,δα εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ, τὰ τρίγωνα Καϐ, Κϐγ, Κγδ, Κδα εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ,ΚΔΑ. Ἡ στερεὰ γωνία Κ εἶναι εἰς ἀμφοτέρας τὰς πυραμίδας κοινή, αἱ δὲ ἄλλαι ἴσαι μία πρὸς μίαν ἤτοι Β=ϐ, Γ=γ, Δ=δ κτλ. (§ 304). Ἔχουσι λοιπὸν αἱ πυραμίδες Κ.ΑΒΓ καὶ Κ.αϐγ τὰς ἕδρας ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν, σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας. Εἶναι ἄρα ὅμοιαι. ὅ. ἔ. δ.

§ 334. Θεώρημα ΙΙ.—*Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχωσι δύο ἕδρας ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας, τὰς δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας διέδρους γωνίας ἴσας, εἶναι ὅμοια.* Ἔστωσαν τὰ τετράεδρα Κ.ΑΒΓ καὶ κ.αϐγ *(Σχ. 232)*, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι καὶ κεῖνται ὁμοίως πρὸς τὰς ακϐ καὶ ϐκγ, ἡ δὲ δίεδρος ΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κϐ. Λέγω ὅτι τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

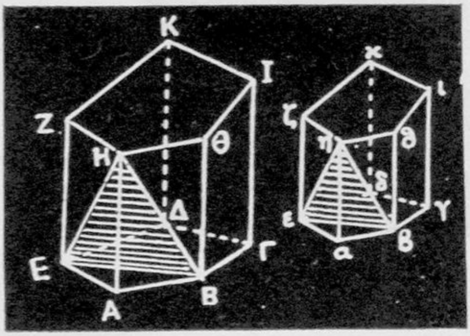
Ἀπόδειξις. Αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ καὶ κ ἔχουσι

ΚΒ=κϐ, $\widehat{ΑΚΒ}=\widehat{ακϐ}$, $\widehat{ΒΚΓ}=\widehat{ϐκγ}$· ἐὰν δὲ αἱ ἕδραι ΑΚΓ καὶ ακγ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ ἀκμαὶ ΚΒ, κϐ φέρονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, διότι αἱ ἕδραι ΑΚΒ,ΒΚΓ κεῖνται ὁμοίως πρὸς τὰς ἀντιστοίχως ὁμοίας ακϐ, ϐκγ. Εἶναι λοιπὸν (§ 394) Κ=κ. Ἔστω δὲ Κα′ϐ′γ′ ἡ θέσις, τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει τὸ τετράεδρον κ.αϐγ, ὅταν τεθῇ ἐπὶ τοῦ Κ.ΑΒΓ καὶ οὕτως ὥστε ἡ κ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Κ. Ἐπειδὴ $\widehat{α′ϐ′Κ}=\widehat{αϐκ}=\widehat{αΒΚ}$ καὶ $\widehat{γ′ϐ′Κ}=\widehat{γϐκ}=\widehat{ΓΒΚ}$, αἱ εὐθεῖαι α′ϐ′,ϐ′γ′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ἄρα α′ϐ′γ′ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ πυραμὶς Κ.ΑΒΓ εἶναι (§ 333) ὁμοία πρός τὴν Κ.α′ϐ′γ′ ἢ τὴν κ.αϐγ. ὅ. ἔ. δ.

§ 335. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἐκ τετραέδρων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κειμένων.*

Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύεδρα ΑΚ καὶ ακ *(Σχ. 233)*. Λέγω ὅτι ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ τετραέδρων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἐπίπεδον ΗΕΒ, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ ἄκρα τριῶν ἀκμῶν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Α, ἀποκόπτει ἀπὸ τοῦ πολυέδρου ΑΚ τὸ τετράεδρον Η.ΑΒΕ· τὸ δὲ τῶν ὁμολόγων κορυφῶν ἐπίπεδον ηεϐ ἀποκόπτει ἀπὸ τοῦ ακ τὸ τετράεδρον η.αϐε. Τὰ τετράεδρα ταῦτα ἔχουσι: α′) Τὰς διέδρους ΗΑ καὶ ηα ἴσας, διότι εἶναι ὁμόλογοι δίεδροι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ΑΚ καὶ ακ, β') Τὰς ΗΑΕ καὶ ΗΑΒ ἀντιστοίχως ὁμοίας πρὸς τὰς ηαε καὶ ηαβ (§ 220). Εἶναι ἄρα (§ 334) τὰ τετράεδρα ταῦτα ὅμοια. Τὰ ὑπολειπόμενα μέρη τῶν πολυέδρων ΑΚ καὶ ακ εἶναι πολύεδρα ὅμοια.



Σχ. 233.

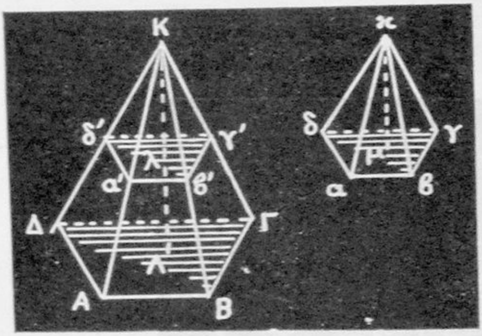
Τῷ ὄντι· ταῦτα ἔχουσι α') Τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας· διότι αἱ μὲν ἀμετάβλητοι ἕδραι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅμοιαι, αἱ δὲ μεταβληθεῖσαι ΕΒΓΔ καὶ εβγδ εἶναι ὅμοιαι ὡς ἀποτελούμεναι ἐκ τριγώνων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων. Ὁμοίως αἱ μεταβληθεῖσαι ἕδραι ΕΖΗ καὶ εζη εἶναι ὅμοιαι (§ 220). Τέλος αἱ νέαι ἕδραι ΗΕΒ καὶ ηεβ εἶναι ὅμοιαι ὡς ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων Η.ΑΕΒ καὶ η.αεβ. β') Τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Διότι αἱ μὲν μὴ μεταβληθεῖσαι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι, μία πρὸς μίαν. Τὰ δὲ μένοντα μέρη τῶν στερεῶν γωνιῶν Η,Ε καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ μένοντα μέρη τῶν η,ε καὶ β ὡς ὑπόλοιπα ἴσων, ἐφ' ὧν ἀφῃρέθησαν ἴσα. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῶν ὑπολειπομένων ὁμοίων πολυέδρων ἐργασθῶμεν ὁμοίως, ἀποσπῶμεν ἕτερον ζεῦγος ὁμοίων πολυέδρων, καὶ καθ'ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ τὰ ὑπολειπόμενα ὅμοια πολύεδρα καταστῶσι τετράεδρα. Ἀποτελοῦνται λοιπὸν τὰ ὅμοια πολύεδρα ΑΚ καὶ ακ ἐκ τετραέδρων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων. ὅ. ἔ. δ.

§ 336. Θεώρημα IV.—*Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν αἱ ὅμοιαι πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔ καὶ κ.αβγδ *(Σχ. 234).*

Λέγω ὅτι (Κ.ΑΒΓΔ) : (κ.αβγδ)$=$(ΑΒ)^3 : (αβ)^3.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ πυραμὶς κ.αβγδ τεθῇ ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓΔ, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι κ καὶ Κ, αἱ ἕδραι αβγδ, ακβ, βκγ, κλπ. θὰ καταλάβωσι ἀντιστοίχως τὰς θέσεις



Σχ. 234.

α′β′γ′δ′, α′Κβ′, β′Κγ′, κλπ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως αἱ ἕδραι ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι πρὸς τὰς Κα′β′, Κβ′γ′, Κγ′δ′, Κδ′α′ αἱ πλευραὶ α′β′, β′γ′, γ′δ′, δ′α′ θὰ εἶναι παράλληλοι, μία πρὸς μίαν, πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΑΒΓΔ καὶ α′β′γ′δ′ εἶναι παράλληλα. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ τὸ ὕψος ΚΛ τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ, τοῦτο θὰ τμήσῃ εἰς τὸ λ καθέτως τὴν ἕδραν α′β′γ′δ′ καὶ θὰ εἶναι προφανῶς Κλ=κμ καὶ (ΑΒΓΔ):(α′β′γ′δ′)=(ΚΛ)²:(Κλ)², ὅθεν (ΑΒΓΔ) : (αβγδ)=(ΚΛ)²:(Κλ)².

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{(\text{Κ.ΑΒΓΔ})}{(\text{κ.αβγδ})}=\dfrac{1/3(\text{ΑΒΓΔ}).(\text{ΚΛ})}{1/3\ (\text{αβγδ}).\ (\text{Κλ})}=\dfrac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{αβγδ})}\cdot\dfrac{(\text{ΚΛ})}{(\text{Κλ})}$, ἔπεται

ὅτι $\dfrac{(\text{Κ.ΑΒΓΔ})}{(\text{κ.αβγδ})}=\dfrac{(\text{ΚΛ})^3}{(\text{Κλ})^3}=\left(\dfrac{\text{ΚΛ}}{\text{Κλ}}\right)^3$. Ἔχοντες δὲ ὑπ᾽ ὄψιν (324) ὅτι

$\dfrac{\text{ΚΛ}}{\text{Κλ}}=\dfrac{\text{ΚΑ}}{\text{Κα}'}=\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{α}'\text{β}'}$ συμπεραίνομεν ὅτι $\dfrac{(\text{Κ.ΑΒΓΔ})}{(\text{κ.αβγδ})}=\dfrac{(\text{ΑΒ})^3}{(\text{αβ})^3}$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος ΑΒ : αβ παρασταθῇ διὰ τοῦ ν, ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης γίνεται $\dfrac{(\text{Κ.ΑΒΓΔ})}{(\text{κ.αβγδ})}=\nu^3$.

Πόρισμα I.—*Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

Πόρισμα II.—*Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ πολυέδρου πολ)σθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διατηρηθῶσι δὲ ἀμετάβλητοι αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι, τὸ πολύεδρον πολ)ζεται ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἀσκήσεις. 594) Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ κύβου πολ)σθῶσιν ἐπὶ 2, διατηρηθῶσι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ, ποσαπλάσιος γίνεται ὁ κύβος οὗτος;

595) Κύβος ἔχει ἀκμὴν 3 μέτ. Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ τριπλασίου κύβου;

596) Ἐπὶ ὡρισμένης πλευρᾶς δεδομένης πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ σημεῖον

τοιοῦτον ὥστε τὸ ἐξ αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ἀγόμενον ἐπίπεδον νὰ διαιρῇ τὴν πυραμίδα εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

597) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

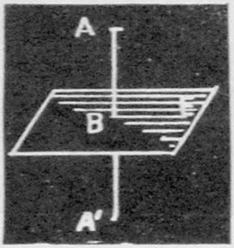
598) Πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ ὁ μὲν ὄγκος εἶναι 48 κυβ. μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ ΚΑ εἶναι 5 μέτ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΚΑ ὁρισθῇ σημεῖον α τοιοῦτον ὥστε (Κα)=3μ. καὶ ἀχθῇ δι' αὐτοῦ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει, πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σχηματιζομένης κολ. πυραμίδος;

599) Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 192 κυβ. μέτρα, αἱ δὲ διαστάσεις ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

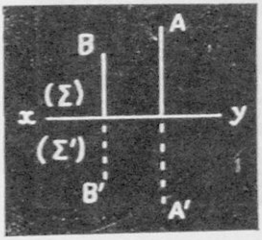
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Συμμετρία ἐν χώρῳ.

§ 337. Συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδον σημεῖα καὶ σχήματα.—*Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται συμμετρικὰ πρός τι ἐπίπεδον Ε (Σχ. 235), ἐὰν τοῦτο τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν*



Σχ. 235.



Σχ. 236.

αὐτῶν ΑΑ'.—Ἐὰν τὰ πρὸς ἐπίπεδον συμμετρικὰ πάντων τῶν σημείων σχήματος εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται *ἐπίπεδον συμμετρίας* τοῦ σχήματος.

Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον, ἢ ἄξονα, καθ' ἃς περιπτώσεις ὡρίσαμεν ἤδη (§ 110 καὶ 112).

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον, ἢ ἄξονα ἢ ἐπίπεδον, ἐὰν πᾶν σημεῖον ἑκατέρου εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τοῦ ἄλλου πρὸς τὸ κέντρον ἢ τὸν ἄξονα ἢ τὸ ἐπίπεδον.

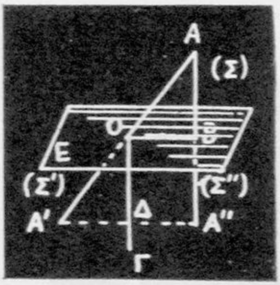
Ἰδιότητες τῶν συμμετρικῶν σχημάτων.

§ 338. Θεώρημα Ι.—*Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα εἶναι ἴσα.*

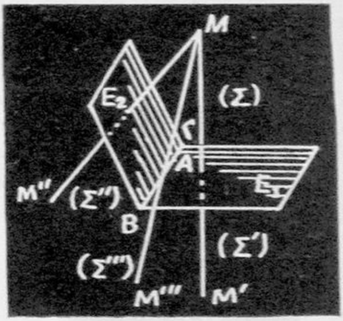
Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν σχῆμά τι Σ καὶ τὸ πρὸς ἄξονα χψ (Σχ.

236) συμμετρικὸν αὐτοῦ Σ'. Ἔστωσαν δὲ Α, Β δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ Σ καὶ Α', Β' τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα. Ἐὰν τὸ σχῆμα Σ στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα χψ, μέχρις οὗ τὸ ἡμιεπίπεδον Αχψ διαγράψῃ δίεδρον γωνίαν 180°, τὸ σημεῖον Α θὰ ἐφαρμόσῃ (§ 112) ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του Α'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δίεδρος γωνία ΑχψΒ μένει κατὰ τὴν στροφὴν ἀμετάβλητος, καὶ τὸ ἡμιεπίπεδον Βχψ θὰ διαγράψῃ δίεδρον γωνίαν 180°, συνεπῶς καὶ τὸ Β θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του Β', ὅπερ εἶναι σημεῖον τοῦ Σ'. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ διὰ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ Σ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν Σ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Σ' καὶ κατ' ἀκολουθίαν ταῦτα εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

§ 339. Θεώρημα II.—*Τὰ συμμετρικὰ σχήματος πρὸς κέντρον καὶ ἐπίπεδον δι' αὐτοῦ διερχόμενον εἶναι ἴσα.*



Σχ. 237.



Σχ. 238.

Νοήσωμεν σχῆμά τι Σ, τὸ πρὸς κέντρον Ο συμμετρικὸν αὐτοῦ Σ', καὶ τὸ πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον Α διερχόμενον διὰ τοῦ Ο *(Σχ. 237)* συμμετρικὸν Σ'' τοῦ Σ. Λέγω ὅτι Σ'=Σ''.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον τοῦ Σ καὶ Α', Α'' τὰ συμμετρικὰ αὐτοῦ πρὸς τὸ κέντρον Ο καὶ τὸ ἐπίπεδον Ε. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ' καὶ ΑΑ'', ἡ ΟΒ εἶναι παράλληλος τῇ Α'Α''· ἡ ΑΑ'' ἄρα ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν Α'Α'' κάθετος. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΟΓ κάθετος ἐπὶ τὸ Ε, αὕτη ὡς παράλληλος τῇ ΑΑ'' θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Α'Α Α'' καὶ θὰ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν Α'Α''. Εἶναι ἄρα τὰ σημεῖα Α', Α'' συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΟΓ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῶν σχημάτων Σ' καὶ Σ'', ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι (§ 338) ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I.—*Τὰ πρὸς δύο κέντρα συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος εἶναι ἴσα.*

Πόρισμα II.—*Τὰ πρὸς κέντρον καὶ τυχὸν ἐπίπεδον συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος εἶναι ἴσα.*

§ 340. Θεώρημα III.—*Τὰ συμμετρικὰ σχήματος πρὸς δύο ἐπίπεδα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν Σ' καὶ Σ'' *(Σχ. 238)* τὰ συμμετρικὰ σχήματα Σ πρὸς τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2. Λέγω ὅτι $\Sigma'=\Sigma''$.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα τέμνωνται κατά τινα εὐθεῖαν ΓΒ *(Σχ. 238)* καὶ κληθῇ Σ''' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς τυχὸν κέντρον Α κείμενον ἐπὶ τῆς ΓΒ, θὰ εἶναι $\Sigma'=\Sigma'''$ καὶ $\Sigma''=\Sigma'''$, ἄρα καὶ $\Sigma'=\Sigma''$.

β΄) Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2 εἶναι παράλληλα, ἂς νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον E_3 τέμνον αὐτὰ καὶ ἂς κληθῇ Σ''' τὸ πρὸς αὐτὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ. Ἐπειδή, ὡς ἀπεδείχθη, εἶναι $\Sigma'=\Sigma'''$ καὶ $\Sigma''=\Sigma'''$, ἕπεται πάλιν ὅτι $\Sigma'=\Sigma''$. ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προειρημένων ἰδιοτήτων καθίσταται φανερὸν ὅτι τὰ συμμετρικὰ σχήματός τινος πρὸς τυχὸν κέντρον ἢ τυχὸν ἐπίπεδον εἶναι ἴσα καὶ μόνον κατὰ τὴν θέσιν διαφέρουσι. Δι' ὅ, ὁσάκις πρόκειται περὶ ἰδιοτήτων τῶν τοιούτων σχημάτων μὴ σχετιζομένων πρὸς τὴν θέσιν ἑκάστου τούτων, δυνάμεθα νὰ ἐκλέγωμεν ἐκ τῶν δύο εἰρημένων εἰδῶν συμμετρίας τὸ μᾶλλον πρόσφορον πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν σχετικῶν ἀποδείξεων· καὶ αὐτὸ δὲ τὸ κέντρον ἢ ἐπίπεδον συμμετρίας ἐπιτρέπεται νὰ ὁρίζωμεν κατὰ βούλησιν διὰ τὸν αὐτὸν σκοπόν. Ἡ σημασία δὲ καὶ χρησιμότητος τῆς τοιαύτης ἐλευθερίας θέλει καταστῇ φανερὰ ἐκ τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων, ἐν αἷς ὁμιλοῦντες ἁπλῶς περὶ συμμετρίας θέλομεν νοῇ ἀδιαφόρως συμμετρίαν πρὸς κέντρον ἢ ἐπίπεδον.

§ 341. Θεώρημα IV.—*Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος εἶναι εὐθ. τμῆμα ἴσον αὐτῷ.*

Ἂν Α΄Β΄ εἶναι τὸ πρὸς τυχὸν κέντρον ἢ ἐπίπεδον συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, λέγω ὅτι Α΄Β΄=ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ μέσον αὐτοῦ εἶναι τὸ ΒΑ=ΑΒ καὶ ΒΑ=Α΄Β΄ (§ 339 Πόρ. I, II) ἕπεται ὅτι Α΄Β΄=ΑΒ. ὅ.ἔ.δ.

§ 342. Θεώρημα V.—*Τὸ συμμετρικὸν γωνίας εἶναι γωνία ἴση αὐτῇ.* Παρατηροῦντες ὅτι συμμετρικὸν γωνίας πρὸς τὴν κορυφήν της εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς γωνία, συνεχίζομεν τὴν ἀπόδειξιν, ὡς τὴν τοῦ προηγουμένου Θεωρήματος.

§ 343. Θεώρημα VI.—*Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. σχήματος εἶναι εὐθ. σχῆμα ἴσον αὐτῷ·*

Ἐνθυμούμενοι (§ 111) ὅτι τὸ συμμετρικὸν εὐθ. σχήματος πρὸς κέντρον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κείμενον εἶναι ἴσον αὐτῷ, συνεχίζομεν ὡς προηγουμένως, τὴν ἀπόδειξιν.

§ 344. Θεώρημα VII.—*Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση αὐτῇ.*

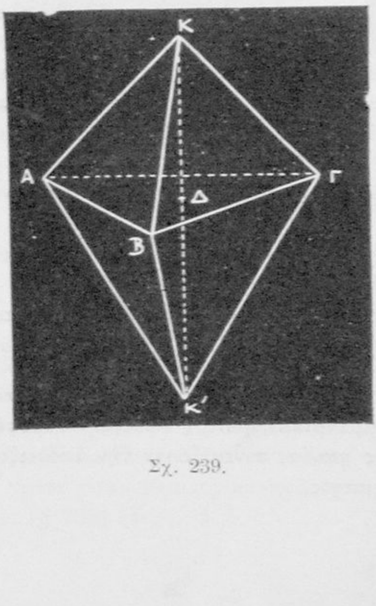
Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας πρὸς τυχὸν κέντρον ἐπὶ τῆς ἀκμῆς κείμενον εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν ταύτης δίεδρος γωνία κλπ.

§ 345. Θεώρημα VIII. – *Τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας εἶναι στερεὰ γωνία ἔχουσα μετ' αὐτῆς ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, πάντα τὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα, ἀλλὰ μὴ ἐφαρμόζουσα πάντοτε μετ' αὐτῆς.*

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς στερεὰ γωνία, ἥτις ἔχει (§ 298) μετ' αὐτῆς ἴσας τὰς ἕδρας καὶ διέδρους γωνίας, μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ δὲν ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς, ἐκτός, ἂν εἶναι ἰσοσκελής. Ταῦτα ἀληθεύουσι (§ 339 Πόρ. I καὶ II) καὶ δι' οἱονδήποτε ἄλλο κέντρον ἢ ἐπίπεδον συμμετρίας.

Πόρισμα I.—*Τὸ συμμετρικὸν πολυέδρου εἶναι πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει μετ' ἐκείνου ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ τὰς ἕδρας καὶ διέδρους γωνίας.*

§ 346. Θεώρημα IX.—*Δύο πολύεδρα συμμετρικὰ εἶναι ἰσοδύναμα.*



Σχ. 239.

Ἐπειδὴ πᾶν πολύεδρον ἀναλύεται, εἰς τετράεδρα, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα διὰ τυχὸν τετράεδρον Κ.ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν Κ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Κ πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓ, τὸ τετράεδρον Κ'ΑΒΓ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Κ.ΑΒΓ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ

$$(\text{Κ.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}.(\text{ΚΔ}),$$

$$(\text{Κ'.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}).(\text{Κ'Δ})$$

καὶ (ΚΔ)=(Κ'Δ), ἕπεται ὅτι

(Κ.ΑΒΓ)=(Κ'.ΑΒΓ).

Ἐὰν δὲ Κ''Α'Β'Γ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Κ.ΑΒΓ πρὸς τυχὸν κέντρον ἢ ἄλλο ἐπίπεδον, θὰ εἶναι (Κ'.ΑΒΓ)=(Κ'',Α'Β'Γ') καὶ ἑπομένως (Κ.ΑΒΓ)=(Κ'.ΑΒΓ)=Κ''.(Α'Β'Γ'). ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις 600) Αἱ διὰ τῶν κοινῶν σημείων τῶν διαγωνίων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.

601) Τὸ πρὸς σημεῖον ἢ ἐπίπεδον συμμετρικὸν ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι πρίσμα ἴσον αὐτῷ.

602) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα καθέτως τεμνόμενα εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας σχήματος, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τούτου.

603) Ἐὰν σχῆμα ἔχῃ ἓν ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ ἄξονα συμμετρίας κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ θὰ ἔχῃ καὶ ἕτερον ἐπίπεδον συμμετρίας.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ΣΤ' βιβλίου.

604) Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ παραπλεύρου ἕδρας ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἀπ' αὐτῆς.

605) Τριγωνικῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ἔχει μῆκος 2,20μέτ., αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχουσι μήκη 3 μέτ. 4 μέτ. 5 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος.

606) Πρίσμα ὀρθὸν ἔχει βάσιν κανονικὸν ὀκτάγωνον ἀκτῖνος ρ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ ρ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

607) Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦσι τὰς διέδρους γωνίας τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

608) Τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διχοτομοῦνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

609) Αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τετραέδρου ἀπὸ τῶν κοινῶν σημείων τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς τὰ 3/4 τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς ταύτης ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι ἕδρας.

610) Ἐὰν τετραέδρου στερεὰ γωνία εἶναι ἴση πρὸς στερεὰν γωνίαν ἄλλου τετραέδρου, ταῦτα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γινόμενα τῶν ἀκμῶν τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν.

311) Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν βάσεων κολούρου πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τομῆς παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπ' αὐτῶν ἀπεχούσης.

612) Νὰ τμηθῇ κύβος, οὕτως ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι τετράγωνον μὴ παράλληλον πρὸς ἕδραν τινὰ αὐτοῦ.

613) Νὰ τμηθῇ κύβος, οὕτως ὥστε ἡ τομὴ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

614) Ὁ ὄγκος κολ. τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 2 κυβ. μέτρα, τὸ ὕψος 1μ καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων 3/4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρας βάσεως, τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθεν καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης.

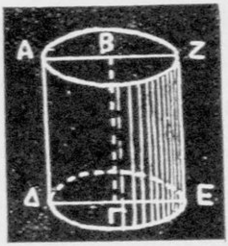
ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Σώματα εἰς μικτὴν περατούμενα ἐπιφάνειαν.

1. Κύλινδρος

§ 347. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κυλίνδρου. — *Κύλινδρος καλεῖται πᾶν στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ ὀρθογωνίου στρεφομένου περὶ μίαν ἀκίνητον αὐτοῦ πλευράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν αὐτοῦ θέσιν.* Π. χ. τὸ στερεὸν ΑΔΕΖ, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ στρεφομένου περὶ τὴν ΒΓ, εἶναι κύλινδρος.



Σχ. 240.

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ἐξ οὗ κύλινδρός τις παράγεται, καλεῖται *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κυλίνδρου τούτου. Τοῦ κυλίνδρου π.χ. ΑΔΕΖ ἄξων ἢ ὕψος εἶναι ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Αἱ εἰς τὸν ἄξονα προσκείμεναι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ μένουσαι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ σταθεραὶ τὸ μῆκος γράφουσι κύκλους ἔχοντας κέντρα Β καὶ Γ, καθέτους δὲ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ. Οἱ κύκλοι οὗτοι καλοῦνται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἀπέναντι τοῦ ἄξονος πλευρὰ ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου γράφει καμπύλην ἐπιφάνειαν περιεχομένην μεταξὺ τῶν βάσεων. Αὕτη καλεῖται ἰδιαιτέρως *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ πλευρὰ ΑΔ, ἡ ὁποία γράφει αὐτήν, καλεῖται *γεννέτειρα* τῆς κυρτῆς ταύτης ἐπιφανείας.

§ 348. Τομαὶ κυλίνδρου. — α') Ἐὰν διὰ τυχόντος σημείου Ε τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΒΓ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τοῦτο θὰ τμήσῃ τὸ ὀρθογώνιον κατὰ εὐθεῖαν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. *(Σχ. 241).* Κατὰ τὴν περιστροφὴν δὲ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ ΕΖ γράφει κύκλον κείμενον εἰς τὸν κύλινδρον καὶ εἰς τὸ ρηθὲν ἐπίπεδον. Ἄρα *ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος.*

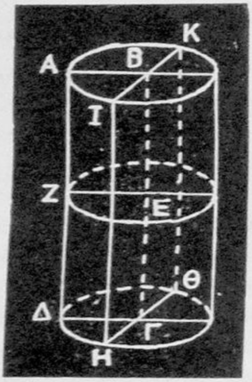
β') Ἐὰν ΗΘΚΙ εἶναι ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, τὸ παράγον τὸν κύλινδρον ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ κατὰ τὴν περιστροφήν του ἐφαρμόζει διαδοχικῶς ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν του ΗΓΙΒ καὶ ΓΘΚΒ. Ἄρα: *Ἡ τομὴ κυλίνδρου* *ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου, ἐξ οὗ παρήχθη ὁ κύλινδρος.*

§ 349. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα περὶ κύλινδρον ὀρθὰ πρίσματα.—Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Τὸ πρίσμα π.χ. ΑΒΓΔΕΖΘΗ *(Σχ. 242)* εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον ΑΓΘΕ.

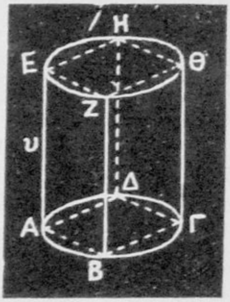
Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κυλίνδρου.

§ 350. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. *Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.*



Σχ. 241.



Σχ. 242.

Τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου διδάσκει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

§ 351. Θεώρημα I. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΓΘΕ κύλινδρος ἔχων ὕψος (ΑΕ)=υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως ρ· ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, λέγω ὅτι ε=2πρυ.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον τοῦτον ὀρθὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΘΗ ἔχον βάσιν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ (ΑΒΖΕ)=(ΑΒ)υ, (ΒΓΘΖ)=(ΒΓ)υ (ΓΔΗΘ)=(ΓΔ)υ καὶ

(ΑΔΗΕ)=(ΑΔ)υ, ἕπεται ὅτι

(ΑΒΖΕ)+(ΒΓΘΖ)+(ΓΔΗΘ)+(ΑΔΗΕ)=[(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΔ)+(ΑΔ)]υ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις ΑΒΓΔ τοῦ πρίσματος, ἕπεται ὅτι

ὅρ. [(ΑΒΖΕ)+...+(ΑΔΗΕ)]=υ. ὅρ. [(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΔ)+ΑΔ)].

Λαμβάνοντες δ᾽ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι

ὅρ. [ΑΒΖΕ)+(ΒΓΘΖ)+(ΓΔΗΘ)+(ΑΔΗΕ)]=ε ἐξ ὁρισμοῦ καὶ

ὅρ. [(ΑΒ)+(ΒΓ)+ΓΔ)+(ΑΔ)]=2πρ. συμπεραίνομεν ὅτι

ε=2πρυ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὕψους καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.*

Ἤτοι : Ε=2πρ(ρ+υ).

Ἀσκήσεις. 615) Πρόκειται δι᾽ ὑφάσματος πλάτους 1,20 μέτ. νὰ καλυφθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3 μέτ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,70 μέτ. Πόσα μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται;

616) Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2,50μ καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40μέτ. Πόσα χρήματα ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν χρωματισμὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πρὸς 5 δραχμὰς κατὰ τετρ. μέτρον;

617) Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο ἰσοϋψῶν κυλίνδρων εἶναι, ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτῶν.

618) Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Μέτρησις κυλίνδρου.

§ 352. Ὄγκος κυλίνδρου.—*Ὄγκος κυλίνδρου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀπαύστως διπλασιάζηται.*

Τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ὄγκου τούτου διδάσκει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

§ 353. Θεωρημα Ι.—*Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου, υ τὸ ὕψος καὶ Κ ὁ ὄγκος αὐτοῦ. Λέγω ὅτι $Κ=πρ^2υ$.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, ἔστω δὲ Θ ὁ ὄγκος καὶ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ. Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 322) εἶναι Θ = Β.υ, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις αὐτοῦ· εἶναι ἄρα ὅρΘ=υὅρ.Β. Ἐπειδὴ δὲ ὅρΘ=Κ ἐξ ὁρισμοῦ καὶ $ὅρΒ=πρ^2$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $Κ=πρ^2.υ$. ὅ. ἔ. δ. (1).

Ἀσκήσεις. 619) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,5 μέτ. καὶ ὕψος 1 μέτ.

620) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι 5 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ.

621) Πόσον βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου (4°Κ) χωρεῖ κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχον ὕψος 0,20 μέτ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,10 μέτ.;

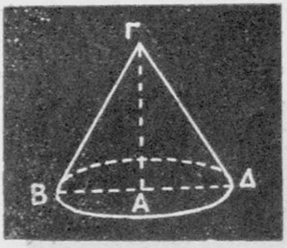
622) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπὶ το ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

623) Δύο ἰσοϋψεῖς κύλινδροι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν. Δύο κύλινδροι ἔχοντες ἴσας βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

624) Πᾶς κύλινδρος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ἰσοϋψὲς πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου.

2. Κῶνος.

§ 354. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κώνου.—*Κῶνος καλεῖται πᾶν στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ ὀρθογωνίου τριγώνου στρεφομένου περὶ μίαν ἀκίνητον πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν αὐτοῦ.*



Σχ. 243.

Τὸ στερεὸν π.χ. ΓΒΔ, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΓ, εἶναι κῶνος.

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ ὀρθ. τριγώνου, ἐξ οὗ παράγεται κῶνός τις, καλεῖται *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κώνου τούτου.

Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας γράφει κύκλον ἔχοντα κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται *βάσις* τοῦ κώνου. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθ. τριγώνου γράφει καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν ἰδιαιτέρως καλοῦμεν *κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κώνου. Ἡ ὑποτείνουσα λέγεται *γεννήτειρα* τῆς κυρτῆς ταύτης ἐπιφανείας ἢ πλευρὰ τοῦ κώνου.

§ 355. Τομαὶ κώνου.—Σκεπτόμενοι ὡς εἰς τὸν κύλινδρον κατανοοῦμεν ὅτι α΄) *Ἡ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος.* β΄) *Ἡ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ ὁ κῶνος παρήχθη.*

§ 356. Πυραμίδες ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι περὶ κῶνον.—Πυραμὶς λέγεται *ἐγγεγραμμένη* εἰς κῶνον, ἐὰν ἔχῃ κορυφὴν τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου καὶ ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Ἡ πυραμὶς π.χ. Γ.ΑΔΒΕ *(Σχ. 244)* εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κῶνον ΓΑΒ. Ὁ κῶνος ΓΑΒ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὴν πυραμίδα Γ.ΑΔΒΕ.

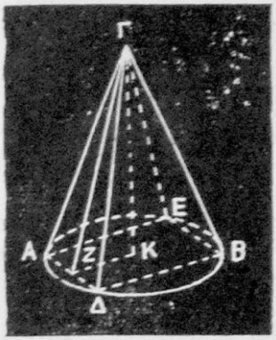
Πυραμὶς λέγεται *περιγεγραμμένη* περὶ κῶνον, ἐὰν ἔχῃ κορυφὴν τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ δὲ βάσις αὐτῆς εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Ὁ κῶνος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν πυραμίδα ταύτην.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κώνου.

§ 357. Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου.—*Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.*

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως.

§ 358. Θεώρημα Ι.—*Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.*



Σχ. 244.

Ἔστω κῶνος ΓΑΒ ἔχων ἀκτῖνα βάσεως ρ καὶ πλευρὰν ΓΔ=λ. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας, λέγω ὅτι ε=2πρ. λ/2 ἢ ε=πρλ.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κῶνον κανονικὴν πυραμίδα καὶ ἔστω ΑΔΒΕ ἡ βάσις αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἴσα. Ἂν δὲ ΓΖ εἶναι τὸ ὕψος μιᾶς τῶν ἑδρῶν τούτων θὰ εἶναι (ΓΔΑ)=1/2 (ΑΔ) (ΓΖ), (ΓΔΒ)=1/2 (ΔΒ) (ΓΖ), (ΓΒΕ)=1/2 (ΒΕ) (ΓΖ), ΓΑΕ)=1/2 (ΑΕ) ΓΖ), ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι (ΓΑΔ)+(ΓΔΒ)+(ΓΒΕ)+(ΓΑΕ)=1/2(ΓΖ) [(ΑΔ)+(ΔΒ+ΒΕ+(ΕΑ)]. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἀληθεύει, ὅσας πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, ἕπεται ὅτι ὅρ [(ΓΑΔ) + (ΓΒΔ) + (ΓΒΕ) + (ΓΑΕ)] = $\frac{1}{2}$ ὅρ. (ΓΖ) ὅρ. [(ΑΔ)+...+(ΑΕ)]. Καὶ ἐπειδὴ δρ.[(ΓΑΔ)+(ΓΔΒ)+(ΓΒΕ)+(ΓΕΑ)]=ε ἐξ ὁρισμοῦ, δρ(ΓΖ)=λ καὶ δρ[(ΑΔ)+(ΔΒ)+(ΒΕ)+(ΑΕ)]=2πρ, ἔπεται ὅτι ε=2πρ.λ/2 ἢ

ε=πρλ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.*

Ἤτοι
$$Ε=\frac{2πρ}{2}(λ+ρ).$$

Ἀσκήσεις. 625) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,3 μέτ. καὶ ὕψος 0,4 μέτ.;

626) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ κώνου;

627) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου, ὅστις ἔχει βάσιν καὶ ὕψος ἴσα πρὸς τὴν βάσιν καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

628) Κύλινδρος καὶ κῶνος ἔχουσιν ἀμφότεροι ἀκτῖνα βάσεως ρ καὶ ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ρ πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κώνου;

§ 359. Ὄγκος κώνου.—*Ὄγκος κώνου καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ κανονικῆς πυραμίδος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.*

Τὸν ὄγκον τοῦτον εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως.

§ 360. Θεώρημα Ι.—*Ὁ ὄγκος κώνου εἶναι τὸ 1/3 τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω Κ ὁ ὄγκος, ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος κώνου. Λέγω ὅτι $Κ=1/3πρ^2υ$.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κῶνον κανονικὴν πυραμίδα Γ.ΑΔΒΕ *(Σχ. 224)* καὶ ἔστω Θ ὁ ὄγκος καὶ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΔΒΕ αὐτῆς. Γνωρίζομεν (§ 327) ὅτι $Θ=\frac{1}{3}Β.υ$, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις. Ἄρα δρ.Θ=1/3υ.δρ.Β. Ἐπειδὴ δὲ δρ.Θ=Κ, ἐξ ὁρισμοῦ καὶ $δρ.Β=πρ^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$Κ=1/3πρ^2υ$. ὅ. ἔ. δ.

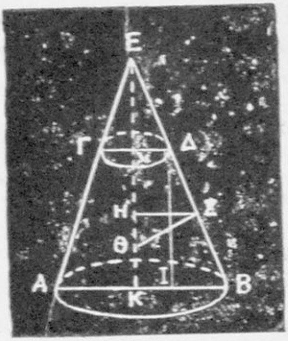
Ἀσκήσεις. 629) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος σιδηροῦ κώνου ἔχοντος ὕψος 0,40μέτ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,30 μέτ. γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,88.

630) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τούτων ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχηματιζομένων κώνων.

631) Δύο ἰσοϋψεῖς κῶνοι εἶναι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

3. Κόλουρος κῶνος.

§ 361. Ὁρισμὸς κολούρου κώνου καὶ στοιχεῖα αὐτοῦ.— *Κόλουρος κῶνος καλεῖται πᾶν στερεόν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως κώνου καὶ τυχούσης αὐτοῦ τομῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.* Τὸ στερεὸν π. χ. ΑΒΔΓ (*Σχ. 245*) εἶναι κόλουρος κῶνος.



Σχ. 245.

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται κόλουρός τις κῶνος, λέγονται *βάσεις* αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων κολ. κώνου καλεῖται *ὕψος* αὐτοῦ.

Ἡ μεταξὺ τῶν βάσεων περιεχομένη καμπύλη ἐπιφάνεια καλεῖται ἰδιαιτέρως *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κολ. κώνου.

Τὸ μεταξὺ τῶν βάσεων κολ. κώνου περιεχόμενον μέρος πλευρᾶς τινος τοῦ ἀρχικοῦ κώνου καλεῖται *πλευρὰ* τοῦ κολ. κώνου. Π. χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΒ εἶναι πλευρὰ τοῦ κολ. κώνου ΑΒΔΓ.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολ. κώνου.

§ 362. Θεώρημα.— *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ἥμισυ τὸς πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Ἔστω κολ. κῶνος ΑΒΓΔ ἔχων πλευρὰν $(\text{Β}\Delta)=\lambda$ καὶ ἀκτῖνας βάσεων τὰς $(\text{ΚΒ})=\text{Α}$ καὶ $(\kappa\Delta)=\alpha$. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας, λέγω ὅτι $\varepsilon=(2\pi\text{Α}+2\pi\alpha)\lambda/2$ ἢ

$$\varepsilon=\pi(\text{Α}+\alpha)\lambda.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ε = κυρτὴ ἐπιφ.(ΕΑΒ) — κυρτὴ ἐπιφ.(ΕΓΔ) καὶ κ.ἐπιφ.(ΕΑΒ) = 2πΑ.(ΕΒ)1/2, κ.ἐπιφ.(ΕΓΔ) = 2πα.(ΕΔ)1/2, ἕπεται ὅτι $\varepsilon=2\pi\text{Α}(\text{ΕΒ})1/2-2\pi\alpha(\text{Ε}\Delta)1/2$ ἢ $\varepsilon=\pi[\text{Α}(\text{ΕΒ})-\alpha(\text{Ε}\Delta)]$ (1)

Ἀλλ' ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΚΒ καὶ ΕκΔ εἶναι $\frac{(\text{ΕΒ})}{\text{Α}}=\frac{(\text{Ε}\Delta)}{\alpha}$. Ἂν δὲ κληθῇ ρ ἑκάτερος τῶν λόγων τούτων, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $(\text{ΕΒ})=\text{Α}\rho$, $(\text{Ε}\Delta)=\alpha\rho$ καὶ $(\text{ΕΒ})-(\text{Ε}\Delta)=(\text{Α}-\alpha)\rho$ ἢ $\lambda=(\text{Α}-\alpha)\rho$, ὅθεν $\rho=\frac{\lambda}{\text{Α}-\alpha}$. Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται $\varepsilon = \pi(A^2 - \alpha^2)\rho = \pi(A^2 - \alpha^2) . \dfrac{\lambda}{A - \alpha} = \pi(A + \alpha)\lambda$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. — *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς τομῆς αὐτοῦ, ἥτις ἀπέχει ἴσον τῶν βάσεων τοῦ κολ. κώνου.*

Ἂν δηλ. Z εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΔ καὶ ZH παράλληλος τῇ KB θὰ εἶναι $\varepsilon = 2\pi(ZH)\lambda$.

Πόρισμα ΙΙ. — *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ὑψουμένην κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ εἰς τὸν ἄξονα περατουμένην.*

§ 363. Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου. — Ἐὰν κληθῇ E τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ἀληθεύει προφανῶς ἡ ἰσότης $E = \pi(A+\alpha)\lambda + \pi A^2 + \pi\alpha^2$.

Ἀσκήσεις. 632) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὅστις ἔχει ὕψος 4 μέτ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 5 μέτ. καὶ 2 μέτ.

633) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι 30 τετραγ. μέτρα, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ 2 μέτ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς μιᾶς βάσεως 3 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἄλλης βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κολ. κώνου.

634) Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων κολ. κώνου εἶναι 4 μέτ. ἡ μία καὶ 3 μέτ. ἡ ἄλλη, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 5 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

Ὄγκος κολούρου κώνου.

§ 364. Θεώρημα Ι. — *Ὁ ὄγκος κολ. κώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κολ. κώνου, βάσεις δὲ ὁ μὲν εἷς τὴν μίαν, ὁ ἄλλος τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ κολ. κώνου καὶ ὁ τρίτος τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν βάσεων τούτων.*

Ἔστω ὁ κολ. κῶνος ΑΒΔΓ *(Σχ. 245)* ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος $(K\kappa) = \upsilon$ καὶ ἀκτῖνας βάσεων τὰς $(KB) = A$ καὶ $(\kappa\Delta) = \alpha$. Ἂν δὲ $\pi A^2 : \chi = \chi : \pi\alpha^2$, θὰ εἶναι $\chi^2 = \pi^2 A^2 \alpha^2$, ὅθεν $\chi = \pi A\alpha$. Λέγω ὅτι

$$(AB\Delta\Gamma) = 1/3\pi A^2\upsilon + 1/3\pi\alpha^2\upsilon + 1/3\pi A\alpha\upsilon \quad \text{ἢ}$$
$$(AB\Delta\Gamma) = 1/3\pi(A^2 + A\alpha + \alpha^2)\upsilon.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι $(AB\Delta\Gamma) = (EAB) - (E\Gamma\Delta)$ καὶ $(EAB) = 1/3\pi A^2(EK)$, $(E\Gamma\Delta) = 1/3\pi\alpha^2(E\kappa)$, ἕπεται ὅτι $(AB\Delta\Gamma) = 1/3\pi[A^2(EK) - \alpha^2(E\kappa)]$ (1). Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΚΒ καὶ ΕκΔ προκύπτει ὅτι $(EK) : A = (E\kappa) : \alpha$. Ἂν δὲ κληθῇ ρ ἑκάτερος τῶν λόγων τούτων, προκύπτει ὅτι $(KE) = A\rho$ καὶ

$(E\kappa)=\alpha\rho$, ὅθεν $(EK)-(E\kappa)=(A-\alpha)\rho$, ἢ $\upsilon=(A-\alpha)\rho$, ὅθεν $\rho=\frac{\upsilon}{A-\alpha}$. Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται

$$(AB\Delta\Gamma)=1/3\pi(A^3-\alpha^3)\rho=\frac{1}{3}\pi.\frac{A^3-\alpha^3}{A-\alpha}\upsilon, \text{ ὅθεν}$$

$$(AB\Delta\Gamma)=1/3\pi(A^2+A\alpha+\alpha^2)\upsilon. \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀσκήσεις. 635) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2μέτ. καὶ ἀκτῖνας βάσεων 1 μέτ. καὶ 3 μέτ.

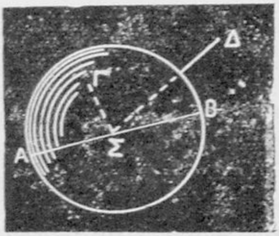
636) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων δεδομένου κολ. κώνου, καὶ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὸν κόλ. κῶνον ὕψος καὶ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν τομὴν τοῦ κολ. κώνου, ἥτις ἀπέχει ἴσον τῶν βάσεων αὐτοῦ.

637) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ὅπερ μένει, ἂν ἀπὸ δεδομένου κολ. κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ κύλινδρος, ὅστις ἔχει ὕψος τὸ αὐτὸ καὶ βάσιν τὴν μικροτέραν βάσιν τοῦ κολ. κώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Σφαῖρα.

§ 365. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα σφαίρας. — *Σφαῖρα καλεῖται πᾶν στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.*



Σχ. 246.

Τὸ σῶμα π. χ. Σ εἶναι σφαῖρα. Τὸ σημεῖον τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, καλεῖται *κέντρον* αὐτῆς.

Πᾶν εὐθ. τμῆμα ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ κέντρου καὶ τυχόντος σημείου τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καλεῖται *ἀκτὶς* αὐτῆς. Τὸ τμῆμα ΣΑ εἶναι ἀκτὶς τῆς σφαίρας Σ.

Πᾶν εὐθ. τμῆμα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας καὶ περατούμενον ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς καλεῖται *διάμετρος* τῆς σφαίρας ταύτης. Π.χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας Σ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σφαίρας ἕπεται εὐκόλως ὅτι: *Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες σφαίρας εἶναι ἴσαι.* Κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲ καὶ *πᾶσαι αἱ διάμετροι σφαίρας εἶναι ἴσαι.*

ΣΗΜ. α΄. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σφαίρας ἕπεται εὐκόλως ὅτι *γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει δοθέντος σημείου Σ δοθεῖσαν ἀπόστασιν Ρ, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Σ καὶ ἀκτῖνα Ρ* (ὅρα καὶ § 26 σημ.).

ΣΗΜ. β΄. Ἡ σφαῖρα παράγεται ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Τὸ τόξον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τούτου γράφει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ταύτης.

Θέσεις σφαίρας πρὸς ἐπίπεδον.

§ 366. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως.*

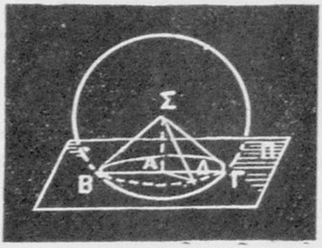
§ 367. Θεώρημα ΙΙ. *Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἡ ἀπόδειξις τῶν θεωρημάτων τούτων εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τῶν θεωρημάτων (§ 114, 115).

§ 368. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς, τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἐὰν δηλ. εἶναι $ΣΑ < Ρ$ *(Σχ. 247)*, τὸ ἐπίπεδον Π τέμνει τὴν σφαῖραν Σ, ἡ δὲ τομὴ εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $ΣΑ < Ρ$, ὁ ποὺς Α κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας· ἐπειδὴ δὲ τὸ Α εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἰσδύει ἐντὸς τῆς σφαίρας, ἤτοι τέμνει αὐτήν. Ἐὰν δὲ Β, Γ, Δ κλπ. εἶναι διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ Π, θὰ εἶναι $ΣΒ = ΣΓ = ΣΔ$ ἄρα (§ 264) καὶ $ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ$, κλπ. Κεῖνται λοιπὸν τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, κλπ. ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Α. Ἡ τομὴ ἄρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ δὲ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος. ὅ. ἔ. δ. Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.



Σχ. 247.

ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΣΑΒ προκύπτει ὅτι $(ΣΒ)^2 = (ΣΑ)^2 + (ΑΒ)^2$, ἐξ ἧς καθίσταται φανερὸν ὅτι: α΄) Ἐὰν $ΣΑ = ΣΒ$, θὰ εἶναι $ΑΒ = 0$, ἤτοι ἡ τομὴ εἶναι σημεῖον. β΄) Ἐὰν $ΣΑ = 0$, θὰ εἶναι $ΑΒ = ΣΒ$, ἤτοι ἡ ἀκτὶς τομῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

§ 369. Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας.—*Πᾶν ἐπίπεδον ἔχον μετὰ σφαίρας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καλεῖται ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας ταύτης ἐπίπεδον.*

Τὸ κοινὸν σημεῖον σφαίρας καὶ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καλεῖται *σημεῖον ἐπαφῆς.*

Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 370. Θεώρημα I.—*Ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται σφαίρας, ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καταλήγουσα ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο* (§ 264 α').

§ 371. Θεώρημα II.—(Ἀντίστροφον τοῦ I). *Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς ἐφάπτεται τῆς σφαίρας* (§ 367).

Πόρισμα I.—*Δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἄγεται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.*

§ 372. Διάφοροι ὁρισμοί.—Σφαῖρά τις λέγεται *ἐγγεγραμμένη* εἰς πολύεδρον, ἂν πᾶσαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς σφαίρας. *Περιγεγραμμένη* δὲ περὶ πολύεδρον λέγεται σφαῖρά τις, ἂν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης.

Πᾶσα εὐθεῖα ἔχουσα μετὰ σφαίρας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καλεῖται *ἐφαπτομένη* αὐτῆς.

Ἀσκήσεις. 638) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουσιν ἀντιστοίχως οὐδέν, ἓν ἢ πολλὰ κοινὰ σημεῖα.

639) Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

640) Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κεῖνται ἐπὶ τοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας ἐπιπέδου.

641) Εὐθεῖα καὶ ἐπιφάνεια σφαίρας δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο.

642) Δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι ἔχουσιν ἀκτῖνας Α καὶ α ($A > \alpha$). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τομῆς τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἐσωτερικὴν σφαῖραν.

643) Σφαῖρα ἀκτῖνος 0,5 μέτ. τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 0,4 μέτ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτῆς;

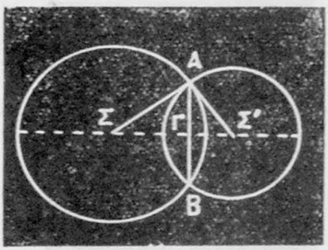
644) Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀκτῖνος 1 μέτ. πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, ὅπως ἡ τομὴ ἔχῃ ἐμβαδὸν 0,36 π. τετρ. μέτρα;

§ 373. Θέσεις ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας.—Νοήσωμεν δύο τυχόντα μὴ ὁμόκεντρα ἡμικύκλια Κ καὶ Κ'. Ἐὰν ταῦτα στραφῶσι περὶ τὴν διάκεντρον, θὰ γράψωσι δύο σφαίρας, ὧν τὰ κέντρα Κ καὶ Κ', ἡ δὲ ἀμοιβαία θέσις εἶναι οἵα καὶ ἡ τῶν κύκλων, εἰς τοὺς ὁποίους κεῖνται τὰ ἡμικύκλια ταῦτα. *Ἀντιστρόφως.* Ἐὰν δύο τυχοῦσαι μὴ ὁμόκεντροι σφαῖραι τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι κύκλοι ἔχοντες οἵαν καὶ αἱ σφαῖραι ἀμοιβαίαν θέσιν. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι αἱ θέσεις τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας εἶναι πέντε, ὅσαι δηλ. καὶ αἱ θέσεις δύο κύκλων. Ἐν ἑκάστῃ δὲ τῶν θέσεων τούτων ὑφίστανται μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν αἱ αὐταὶ καὶ μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν κύκλων σχέσεις (§ 126—131).

Τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν.

§ 374. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο σφαῖραι Σ, Σ', τέμνωνται, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΣΣ' αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Τυχὸν διὰ τῆς ΣΣ' διερχόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὰς σφαίρας ταύτας κατὰ κύκλους ἔχοντας κέντρα Σ καὶ Σ'. Τούτων αἱ περιφέρειαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις ΑΒ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΣΣ' καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον Γ. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι τὰ ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα περιέχουσι τὸ Α, στρέφονται περὶ τὴν ΣΣ', μέχρις οὗ ἐπανέλθωσιν εἰς τὴν προτέραν των θέσιν. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ μὲν ἡμικύκλια ταῦτα θὰ γράψωσι τὰς σφαίρας, τὸ δὲ σταθερὸν τμῆμα ΓΑ μένον διαρκῶς κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΣ' θὰ γράψῃ κύκλον Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΣ'· τοῦ κύκλου τούτου τὴν περιφέρειαν γράφει τὸ σημεῖον Α. Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσει ΣΑ καὶ Σ'Α μένουσιν ἀμετάβλητοι, τὸ Α εἰς πᾶσαν αὐτοῦ θέσιν μένει ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν ἀμφοτέρων τῶν σφαιρῶν. Εἶναι λοιπὸν ἡ περιφέρεια, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ Α κοινὴ εἰς τὰς ἐπιφανείας τῶν σφαιρῶν τούτων. Πλὴν δὲ τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται. Διότι, ἂν σημεῖόν τι Α' κεῖται εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐπιφανείας ταύτας, θὰ εἶναι ΣΑ'=ΣΑ, Σ'Α'=Σ'Α καὶ τρίγ. ΣΑ'Σ'=τρίγ. ΣΑΣ'· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ΣΑΣ' κατὰ τὴν περὶ τὴν ΣΣ' στροφήν του ἔρχεται στιγμήν, καθ' ἣν ἐφαρμόζει καὶ ἐπὶ τοῦ ἴσου ΣΑΣ', ὅτε τὸ Α ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α'. Εἶναι λοιπὸν τὸ Α' σημεῖον τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ Α. Ὥστε τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (Γ,ΓΑ).



Σχ. 248.

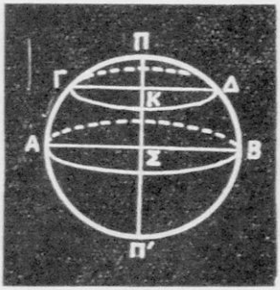
Ἀσκήσεις. 645) Τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν ἀπέχουσιν ἀλλήλων 5 μέτ. αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 4 μέτ. καὶ 3 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

646) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τομῆς τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα ἀπέχουσιν ἀλλήλων 8 μέτ. αἱ δὲ ἀκτῖνες εἶναι 4 μέτ. τῆς μιᾶς καὶ 6 μέτ. τῆς ἄλλης.

647) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περικλείεται ὑπὸ τῆς προειρημένης τομῆς.

Κύκλοι σφαίρας.

§ 375. Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι σφαίρας.—*Μέγιστος κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶσα τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς*. Π. χ. ὁ κύκλος ΑΒ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Σ (*Σχ. 249*).



Σχ. 249.

Μικρὸς κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶσα τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

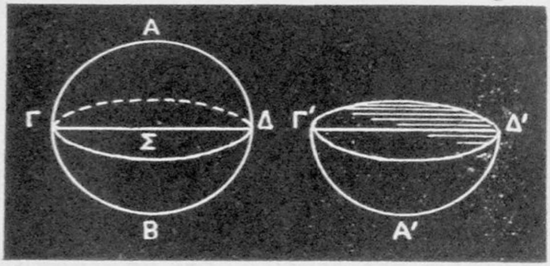
Π. χ. ὁ κύκλος Κ εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας Σ. Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ κέντρον σφαίρας καὶ τὸ κέντρον μικροῦ κύκλου αὐτῆς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου (§ 368).

Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας λέγονται αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων. Π. χ. οἱ κύκλοι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας Σ.

§ 376. Ἰδιότητες τῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας.—Α′. *Πάντες οἱ μέγιστοι κύκλοι σφαίρας εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους*. Διότι πάντες ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, τὴν τῆς σφαίρας.

Β′. *Οἱ μέγιστοι κύκλοι σφαίρας διχοτομοῦσιν ἀλλήλους*. Διότι ἡ τομὴ δύο τοιούτων κύκλων εἶναι διάμετρος ἑκατέρου.

Γ′. *Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη*. Ἂν τὸ μέρος ΓΑΔ (*Σχ. 250*) ἀντιστρέψωμεν οὕτως ὥστε νὰ καταλάβῃ θέσιν, οἵα ἡ Γ′Α′Δ′, εἶτα δὲ ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τοῦ ΓΒΔ, οὕτως ὥστε οἱ κύκλοι ΓΔ καὶ Γ′Δ′ νὰ ἐφαρμόσωσιν, πᾶν σημεῖον Α′ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας Γ′Α′Δ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΓΒΔ, διότι ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Σ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι.



Σχ. 250.

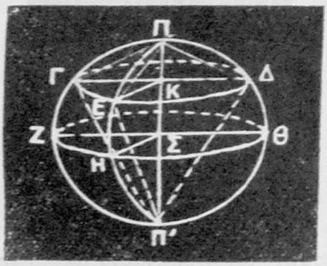
Τὰ δύο λοιπὸν μέρη τῆς σφαίρας ἐφαρμόζουσιν· εἶναι ἄρα ἴσα (ἡμισφαίρια).

§ 377. Ἄξων καὶ πόλοι κύκλου σφαίρας. — *Ἄξων κύκλου σφαίρας καλεῖται ἡ κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον τοῦτον διάμετρος τῆς σφαίρας.*

Πόλοι κύκλου σφαίρας καλοῦντα τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. Π. χ. ἡ διάμετρος ΠΠ′ *(Σχ. 251)* εἶναι ἄξων, τὰ δὲ σημεῖα Π καὶ Π′ εἶναι πόλοι τοῦ κύκλου ΓΔ.

Ἰδιότητες τῶν πόλων κύκλου σφαίρας.

§ 378. Θεώρημα I. — *Ἑκάτερος τῶν πόλων κύκλου σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.*



Σχ. 251.

Ἔστωσαν Γ, Δ, Ε κλπ. τυχόντα σημεῖα τῆς περιφερείας κύκλου Κ τῆς σφαίρας Σ καὶ Π, Π′ οἱ πόλοι αὐτοῦ. Λέγω ὅτι ΠΓ = ΠΔ = ΠΕ κλπ. Π′Γ = Π′Δ = Π′Ε κλπ.

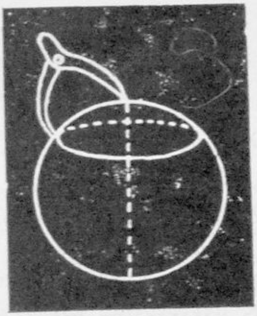
Ἀπόδειξις. Ὁ ἄξων ΠΠ′ τοῦ κύκλου Κ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον Κ καὶ ἑπομένως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΓ=ΚΔ=ΚΕ ἕπεται (§ 263) ὅτι καὶ ΠΓ=ΠΔ=ΠΕ καὶ Π′Γ=Π′Δ=Π′Ε. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. — *Τὰ μεταξὺ πόλου τινὸς κύκλου σφαίρας καὶ τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ περιεχόμενα τόξα μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας εἶναι ἴσα.*

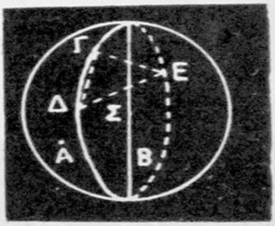
Πόρισμα II. — *Τὰ τόξα μεγίστων κύκλων σφαίρας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν σημείων τῆς περιφερείας ἑτέρου μεγίστου κύκλου καὶ ἑκατέρου τῶν πόλων αὐτοῦ εἶναι τεταρτημόρια.*

Πόρισμα III. — *Ἐὰν δύο τόξα μεγίστων κύκλων σφαίρας περιεχόμενα μεταξὺ ἄλλου μεγίστου κύκλου καὶ σημείου τινὸς εἶναι τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι πόλος τοῦ ἄλλου ἐκείνου μεγ. κύκλου.*

§ 379. Χάραξις περιφερειῶν ἐπὶ σφαίρας. — Ἐπειδὴ ἑκάτερος τῶν πόλων κύκλου σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας περιφερείας κύκλων τόσον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐν ἐπιπέδῳ τῇ βοηθείᾳ διαβήτου ἔχοντος καμπυλωμένα τὰ σκέλη (σφαιρικὸς διαβήτης). Πρὸς τοῦτο τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους αὐτοῦ στηρίζεται ἐπὶ τοῦ πόλου, περιφέρεται δὲ ὁ διαβήτης περὶ τὸν



Σχ. 252.



Σχ. 253.

πόλον, οὕτως ὥστε τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ νὰ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τοῦτο δὲ ἐφωδιασμένον διὰ γραφίδος γράφει προφανῶς περιφέρειαν κύκλου. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου εἶναι ἴση πρὸς χορδὴν τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου σφαίρας, ἡ γραφομένη περιφέρεια εἶναι περιφέρεια μεγίστου κύκλου.

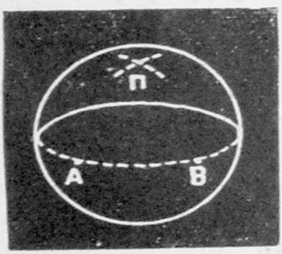
Γραφικαὶ ἐφαρμογαί.

§ 380. Πρόβλημα Ι.— *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς δοθείσης σφαίρας.*

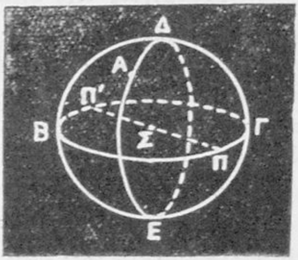
Λύσις. Μὲ πόλους δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας τῆς δοθείσης σφαίρας Σ (*Σχ. 253*) καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τῶν σκελῶν σφαιρικοῦ διαβήτου γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας δύο τόξα τεμνόμενα εἴς τι σημεῖον Γ· κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ εἶτα τρόπον ὁρίζομεν ἄλλα δύο σημεῖα Δ καὶ Ε τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν σημείων Γ, Δ, Ε καὶ Σ ἀπέχει ἴσον τῶν Α καὶ Β, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Σ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ (§ 261). Τὸ ἐπίπεδον ἄρα ΓΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Σ καὶ τέμνει διὰ τοῦτο τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον. Ὁρίζομεν ἤδη διὰ τοῦ διαβήτου εὐθ. τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ΓΔ, ΔΕ, ΕΓ καὶ κατασκευάζομεν ἐν ἐπιπέδῳ τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰ ὁρισθέντα ταῦτα τμήματα καὶ περιγράφομεν περὶ αὐτὸ κύκλον. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς τῆς σφαίρας, διότι προφανῶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ περιγεγραμμένου μεγ. κύκλου τῆς σφαίρας.

§ 381. Πρόβλημα ΙΙ.—*Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγ. κύκλου διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.*

Λύσις. Ἐὰν Π εἶναι ὁ ἕτερος τῶν πόλων τῆς ζητουμένης περιφερείας, ΠΑ καὶ ΠΒ εἶναι χορδὴ τοῦ τεταρτημορίου μεγ. κύκλου



Σχ. 254.



Σχ. 255.

τῆς δοθείσης σφαίρας. Κεῖται ἄρα ὁ πόλος Π ἐπὶ τῶν περιφερειῶν μεγ. κύκλων, οἵτινες ἔχουσι πόλους Α καὶ Β. Ἐὰν ἄρα γραφῶσιν αἱ περιφέρειαι αὗται, ὁρίζεται ὁ πόλος Π καὶ ἀρκεῖ εἶτα νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγ. κύκλου ἔχουσα πόλον Π, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Τῷ ὄντι· ἑκατέρα τῶν ἀποστάσεων ΠΑ, ΠΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν χορδὴν τεταρτημορίου μεγ. κύκλου σφαίρας, ἄρα ΠΑ=ΠΒ. Διέρχεται λοιπὸν διὰ τοῦ Α καὶ Β ἡ μὲν πόλον Π γραφομένη περιφέρεια μεγ. κύκλου.

ΣΗΜ. Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, διέρχονται δι' αὐτῶν ἄπειροι μεγ. κύκλοι.

§ 382. Πρόβλημα III.—*Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια μέγ. κύκλου διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ κάθετος ἐπὶ δοθέντα μεγ. κύκλον ΒΓ αὐτῆς (Σχ. 255).*

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς μέγ. κύκλος ΒΓ πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ζητούμενον, τὸ δὲ κέντρον Σ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων τούτων ἐπιπέδων, ἕπεται ὅτι ὁ κύκλος ΒΓ περιέχει τὸν ἄξονα Π′ΣΠ τοῦ ζητουμένου. Ὁ πόλος ἄρα Π τοῦ ζητουμένου κύκλου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΠ εἶναι χορδὴ τεταρτημορίου μεγ. κύκλου τῆς σφαίρας, τὸ Π κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μέγ. κύκλου, ἥτις γράφεται μὲ πόλον Α. Εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Π τομὴ τῶν εἰρημένων περιφερειῶν. Ἐὰν ἄρα γραφῇ μὲ πόλον Α περιφέρεια μέγ. κύκλου, ὁρίζεται τὸ σημεῖον Π. Ἀρκεῖ εἶτα μὲ πόλον Π νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγ. κύκλου ΔΕ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Ὄντως, αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ, διότι οὗτος περιέχει τὸν ἄξονα Π′ΣΠ τοῦ ΔΕ.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ ΒΓ, τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας σφαίρας.

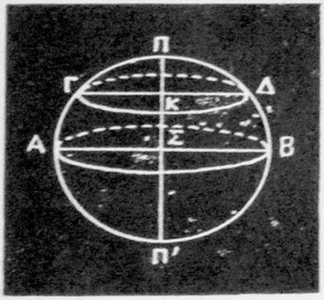
§ 383. Σφαιρικὴ ζώνη καὶ στοιχεῖα αὐτῆς.—*Σφαιρικὴ ζώνη καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.* Π.χ. τὸ μέρος ΑΒΔΓ *(Σχ. 256)* τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Σ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σφαιρικὴ ζώνη.

Βάσεις σφαιρ. ζώνης λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται. Ἐὰν τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ σφαιρ. ζώνη ἔχει μίαν βάσιν.

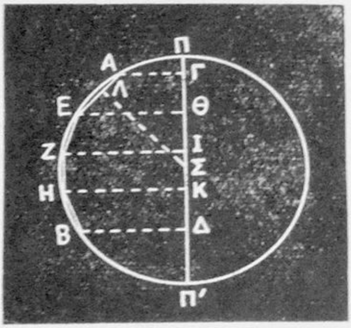
Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων σφαιρ. ζώνης καλεῖται *ὕψος* αὐτῆς.

Ἑκάστη σφαιρικὴ ζώνη παράγεται ὑπὸ τόξου τοῦ γράφοντος τὴν σφαῖραν ἡμικυκλίου. Οὕτως, ἂν τὸ ἡμικύκλιον ΠΓΑΠ′ στραφῇ περὶ τὴν ΠΠ′, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν αὐτοῦ θέσιν, τὸ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ, σφ. ζώνην ΑΒΔΓ, τὸ δὲ τόξον ΠΓ θὰ γράψῃ τὴν σφ. ζώνην ΠΓΔ.

Ἐμβαδὸν σφαιρ. ζώνης καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τὸ γράφον τὴν ζώνην, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀπαύστως διαπλασιάζηται. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως.



Σχ. 256.



Σχ. 257.

§ 384. Θεώρημα I.—*Τὸ ἐμβαδὸν σφ. ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγ. κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.*

Ἔστω ΠΑΠ′ ἡμικύκλιον ἔχον διάμετρον (ΠΠ′)=2ρ, ΑΒ τόξον τι καὶ Γ, Δ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′ (*Σχ. 257*). Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ στραφῇ περὶ τὴν ΠΠ′, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, τοῦτο μὲν θὰ γράψῃ σφαῖραν Σ ἀκτῖνος ρ, τὸ δὲ τόξον ΑΒ θὰ γράψῃ σφ. ζώνην ἔχουσαν ὕψος ΓΔ. Ἐὰν κληθῇ Ζ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης ταύτης, λέγω ὅτι

$$Ζ=2πρ.(ΓΔ).$$

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ κανονικὴν τεθλ. γραμμὴν ΑΕΖΗΒ καὶ προβάλλομεν τὰς κορυφὰς αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου ἑκάστη τῶν πλευρῶν τῆς τεθ. γραμμῆς γράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν κολ. κώνου. Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὸ Πορ. II (§ 363) καὶ παρατηροῦντες ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τούτων διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου Σ καὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι εὑρίσκομεν ὅτι

ἐμϐ. ἐπιφ.(ΑΕ)=2π(ΣΛ)(ΓΘ), ἐμϐ. ἐπιφ.(ΕΖ)=2π(ΣΛ)(ΘΙ),
ἐμϐ. ἐπιφ.(ΖΗ)=2π(ΣΛ)(ΙΚ) καὶ ἐμϐ. ἐπιφ.(ΗΒ)=2π(ΣΛ)(ΚΔ),
ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι ἐμϐ. ἐπιφ.(ΑΕΖΗΒ)=2π(ΣΛ)(ΓΔ).

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ κανονικὴ τεθλασμένη γραμμή, ἕπεται ὅτι

ὅρ. ἐμϐ. ἐπιφ.(ΑΕΖΗΒ)=2π(ΓΔ).ὅρ.(ΣΛ) ἢ Ζ=2πρ(ΓΔ). ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.—*Αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Δύο ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

§ 385. Θεώρημα ΙΙ.—*Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ τόξον ΑΒ (*Σχ.* 257) συνεχῶς αὐξανόμενον ἑκατέρωθεν, ἡ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένη σφ. ζώνη συνεχῶς αὐξάνεται, τὸ δὲ ἐμϐαδὸν αὐτῆς εἶναι πάντοτε γινόμενον τοῦ 2πρ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ἑκάστοτε ὕψος αὐτῆς. Ἐὰν δὲ τὸ τόξον ΑΒ αὐξανόμενον γείνῃ ἡμιπεριφέρεια ΠΑΠ′, ἡ γραφομένη σφαιρ. ζώνη θὰ εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τὸ ὕψος αὐτῆς γίνεται (ΠΠ′)=2ρ καὶ τὸ ἐμϐαδὸν Ε παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$Ε=2πρ.2ρ=4πρ^2. \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Πόρισμα Ι.—*Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

Ἀσκήσεις. 648) Σφαῖρα ἀκτῖνος 3 μέτ. τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 1,5 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμϐαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκατέρας τῶν σφ. ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

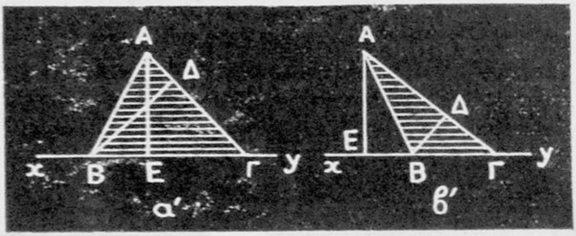
649) Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας εἰς 3 ἰσοδυνάμους σφ. ζώνας.

650) Σφαιρικὴ ζώνη μίαν ἔχουσα βάσιν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐν τῇ ζώνῃ περιεχομένου πόλου τῆς βάσεως ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ταύτης.

651) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος σφ. ζώνης ἰσοδυνάμου πρὸς μεγ. κύκλον τῆς αὐτῆς σφαίρας;

Μέτρησις σφαίρας.

§ 386. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν τρίγωνον στραφῇ περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ διερχόμενον διά τινος κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό, γράφει στερεόν, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ ἀπέναντι* *τῆς κορυφῆς ἐκείνης πλευρὰ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους τοῦ τριγώνου τούτου.*



Σχ. 258.

Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον στρεφόμενον περὶ ἄξονα χψ, ὅστις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Β αὐτοῦ· ἐὰν ΒΔ εἶναι ὕψος τοῦ ΑΒΓ καὶ Θ ὁ ὄγκος τοῦ γραφομένου στερεοῦ, λέγω ὅτι Θ=ἐμβ. ἐπιφανείας (ΑΓ) 1/3 (ΒΔ).

Ἀπόδειξις. α΄. Ἐὰν ὁ ἄξων χψ συμπίπτῃ μετὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΕ *(Σχ. 258 α΄)* παρατηροῦμεν ὅτι $\Theta=1/3\pi(\text{ΑΕ})^2(\text{ΒΕ})+1/3\pi(\text{ΑΕ})^2.(\text{ΕΓ})$, ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ὅτι

$$\Theta=1/3\pi(\text{ΑΕ})^2(\text{ΒΓ})=1/3\pi(\text{ΑΕ})\,(\text{ΑΕ})\,(\text{ΒΓ}).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (ΑΕ) (ΒΓ) = (ΑΓ) (ΒΔ), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\Theta=1/3\pi\,(\text{ΑΕ}).\,(\text{ΑΓ})\,(\text{ΒΔ})$. Ἐὰν δὲ ἐνθυμηθῶμεν (§ 358) ὅτι π(ΑΕ).(ΑΓ)=ἐμβ. ἐπιφ. (ΑΓ), συμπεραίνομεν ὅτι

$$\Theta=\text{ἐμβ. ἐπιφ. }(\text{ΑΓ})\,1/3(\text{ΒΔ}).\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος *(258 β΄)* παρατηροῦμεν ὅτι $\Theta=\frac{1}{3}\pi(\text{ΑΕ})^2.(\text{ΕΓ})-\frac{1}{3}\pi(\text{ΑΕ})^2\,(\text{ΕΒ})$, καὶ προχωροῦμεν ὡς προηγουμένως.

β΄) Ἐὰν ἡ βάσις ΑΓ τέμνῃ τὸν ἄξονα εἴς τι σημεῖον Ε *(Σχ. 259)*, εἶναι προφανῶς Θ=ὄγκ. (ΑΒΕ)—ὄγκ. (ΒΓΕ)=

$$=\text{ἐμβ. ἐπιφ.}(\text{ΑΕ})\,\frac{1}{3}(\text{ΒΔ})-\text{ἐμβ. ἐπιφ.}(\text{ΓΕ})\ 1/3\ (\text{ΒΔ})\quad \text{ἢ}$$

$$\Theta=[\text{ἐμβ. ἐπ.}(\text{ΑΕ})-\text{ἐμβ. ἐπιφ.}(\text{ΓΕ})]\,\frac{1}{3}\text{ΒΔ}\qquad \text{ἢ}$$

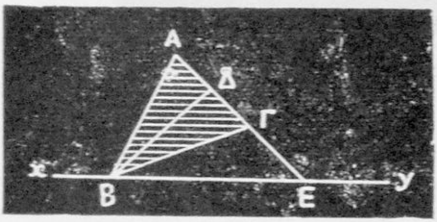
$$\Theta=\text{ἐμβ.ἐπιφ.}(\text{ΑΓ}).\,\frac{1}{3}(\text{ΒΔ}).\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

γ΄) Ἐὰν ἡ βάσις ΑΓ *(Σχ. 260)* εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα, ἀχθῶσι δὲ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα χψ εὐθεῖαι ΑΖ καὶ ΓΕ, καθίσταται φανερὸν ὅτι Θ=ὄγκ. (ΑΒΖ) + ὄγκ. (ΑΖΕΓ)—ὄγκ.(ΒΓΕ). Ἐπειδὴ δὲ ὄγκος (ΑΒΖ) = 1/3π (ΑΖ)²(ΒΖ), ὄγκ. (ΑΖΕΓ)=π(ΑΖ)²(ΖΕ) καὶ ὄγκ. (ΒΓΕ) = 1/3π(ΓΕ)²(ΒΕ) = 1/3(ΑΖ)²(ΒΕ) ἔπεται ὅτι

$$\Theta=1/3\pi(\mathrm{AZ})^2[(\mathrm{BZ})+3(\mathrm{ZE})-(\mathrm{BE})]=1/3\pi(\mathrm{AZ})^2.2(\mathrm{ZE}) \quad \text{ἢ}$$

$$\Theta=1/3(\mathrm{AZ})2\pi(\mathrm{AZ})(\mathrm{ZE}) = 1/3(\mathrm{B}\Delta).2\pi(\mathrm{AZ})(\mathrm{ZE}),$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 351) 2π(ΑΖ)(ΖΕ)=ἐμϐ. ἐπιφ. (ΑΓ), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται Θ=ἐμϐ. ἐπιφ.(ΑΓ) 1/3 (ΒΔ). ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 259.

Σχ. 260.

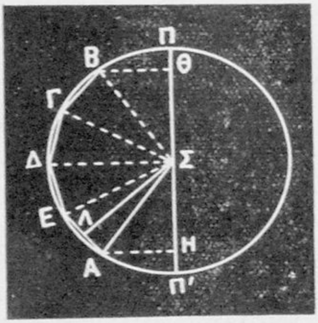
§ 387. **Σφαιρικὸς τομεύς.** — *Σφαιρικὸς τομεὺς καλεῖται πᾶν στερεὸν γραφόμενον ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως στρεφομένου περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτόν.*

Ἡ σφαιρικὴ ζώνη, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως, καλεῖται *βάσις* τοῦ ἀντιστοίχου σφαιρικοῦ τομέως. Οὕτως, ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΣΒ στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον Π΄Π *(Σχ. 261)* γράφει σφαιρικὸν τομέα, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν σφ. ζώνην, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τούτου τομέως. Αἱ ἀκτῖνες ΣΑ, ΣΒ, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται κυκλ. τομεὺς καὶ τυχοῦσα κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ΑΕΔΓΒ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τοῦ κυκλ. τομέως, ἀποτελοῦσι πολυγωνικὸν τομέα ΣΒΓΔΕΑ. Οὗτος κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλ. τομέως περὶ τὴν Π΄Π γράφει στερεόν τι, οὗ ὁ ὄγκος τείνει πρός τι ὅριον, ἐφ᾽ ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλ. γραμμῆς ΑΕΔΓΒ ἀπαύστως διπλασιάζεται.

Το ὅριον τοῦτο καλεῖται ὄγκος τοῦ σφ. τομέως, τὸν ὁποῖον γράφει ὁ κυκλ. τομεὺς ΣΑΒ. Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ὄγκον τοῦτον ὡς ἀκολούθως.

§ 388. Θεώρημα I.—*Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.*

Οὕτως, ἂν σ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σφ. τομέως, τὸν ὁποῖον γράφει ὁ κυκλ. τομεὺς ΣΑΒ καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, λέγω ὅτι σ=$^1/_2$ (ἐμδ. ζων. ΑΒ). Ρ.



Σχ. 261.

Ἀπόδειξις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κυκλ. τομέως ΣΑΒ κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΕΔΓΒ καὶ ἄγομεν τὰς ἀκτῖνας ΣΕ, ΣΔ, ΣΓ. Εἶναι ἤδη φανερὸν ὅτι (ΣΑΕΔΓΒ) = (ΣΑΕ) + (ΣΕΔ) + (ΣΔΓ) + (ΣΓΒ). Ἐπειδὴ δὲ (§ 386) εἶναι (ΣΑΕ)=1/3[ἐμδ. ἐπιφ. (ΑΕ)].(ΣΛ),
(ΣΕΔ)=1/3 [ἐμδ. ἐπιφ. (ΕΔ)](ΣΛ), (ΣΔΓ)=1/3 [ἐμδ. ἐπιφ. (ΓΔ](ΣΛ),
(ΣΓΒ)=1/3 [ἐμδ. ἐπιφ. (ΓΒ)] (ΣΛ), ἕπεται ὅτι
(ΣΑΕΔΓΒ)=1/3 [ἐμδ. ἐπιφ. (ΑΕΔΓΒ)] (ΣΛ), ἥτις ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς, καὶ ἂν ἔχῃ ἡ τεθλ. γραμμή· εἶναι ἄρα καὶ

ὅρ.(ΣΑΕΔΓΒ=1/3 ὅρ. [ἐμδ. ἐπιφ. (ΑΕΔΓΒ)] ὅρ. (ΣΛ).

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ. (ΣΑΕΔΓΒ)=σ ἐξ ὁρισμοῦ,
ὅρ. [ἐμδ. ἐπιφ. (ΑΕΔΓΒ)=ἐμδ. σφ. ζώνης (ΑΒ) καὶ ὅρ. (ΣΛ) = Ρ,
ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται
σ=1/3 [ἐμδ. σφ. ζων. (ΑΒ)]. Ρ. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν υ εἶναι τὸ ὕψος τῆς σφ. ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις σφαιρικοῦ τομέως, θὰ εἶναι ἐμδ. σφ. ζων. (ΑΒ)=2πΡ. υ, ἡ δὲ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης γίνεται $σ = \frac{2}{3} πΡ^2.υ$.

§ 389. Θεώρημα II.—*Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.*

Ἀπόδειξις. Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΣΒ συνεχῶς αὐξανόμενος καταστῇ ἡμικύκλιον ΠΑΠ'. Ἀλλὰ τότε τοῦτο μὲν θὰ γράφῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ τόξον αὐτοῦ θὰ γράφῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἧς ἔστω Ε τὸ ἐμβαδόν. Εἶναι λοιπὸν ἡ σφαῖρα κατὰ ταῦτα σφαιρικὸς τομεὺς ἔχων βάσιν ὅλην τὴν ὄγκον Κ τοῦ κολ. κώνου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta = 1/6\pi(AB)^2.\upsilon$ καὶ $K = 1/3\pi(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\upsilon$, ἕπεται ὅτι

$$T = 1/6\pi(AB)^2\upsilon + 1/3\pi(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\upsilon =$$
$$= 1/6\pi[(AB)^2+2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2].\upsilon.$$

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ θὰ εἶναι $(BH)=\upsilon$,

$$(AH)=\alpha-\beta \quad \text{καὶ} \quad (AB)^2=\upsilon^2+(\alpha-\beta)^2=\upsilon^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἡ προηγουμένη ἄρα ἰσότης γίνεται $T=1/6\pi(3\alpha^2+3\beta^2+\upsilon^2)\upsilon$· ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι

$$T=3/6\pi(\alpha^2+\beta^2)\upsilon^3+1/6\pi\upsilon \quad \text{ἢ} \quad T=1/2\pi(\alpha^2+\beta^2)\upsilon+1/6\pi\upsilon^3. \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀσκήσεις. 657) Δύο παράλληλοι κύκλοι σφαίρας ἀκτῖνος 5 μέτ. κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου καὶ ἀπέχουσιν αὐτοῦ ὁ μὲν 2,5 μέτ., ὁ δὲ ἄλλος $5\sqrt{3}/2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου σφαιρικοῦ τμήματος.

658) Σφαῖρα ἀκτῖνος 3 μέτ. τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 1,5 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖται.

659) Κυκλικὸν τμῆμα ἀκτῖνος 2 μέτ. καὶ χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τετραγώνου στρέφεται περὶ διάμετρον διερχομένην διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ γραφομένου στερεοῦ.

660) Ὁ ὄγκος στερεοῦ γραφομένου ὑπὸ κυκλικοῦ τμήματος εἶνε 3 κυβ. μέτρα, ἡ δὲ προβολὴ τῆς χορδῆς τοῦ κυκλ. τμήματος ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφῆς εἶναι 1 μέτ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Κανονικὰ πολύεδρα.

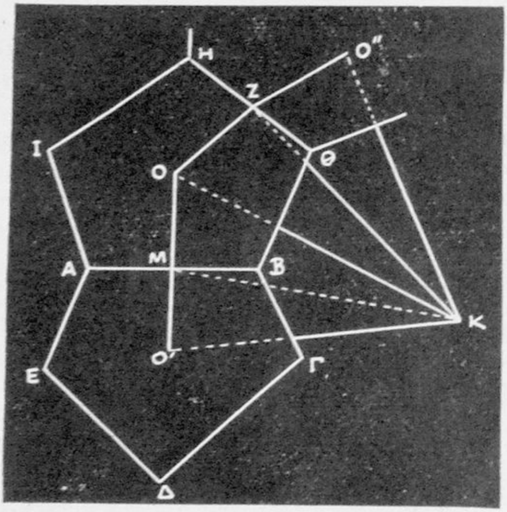
§ 393. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κανονικοῦ πολυέδρου.— *Κανονικὸν πολύεδρον καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι καὶ αἱ ἕδραι εἶναι πᾶσαι ἴσα κανονικὰ εὐθ. σχήματα.*

Ὁ κύβος, τὸ κανονικὸν τετράεδρον π.χ. εἶναι κανονικὰ πολύεδρα. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ ἀκμαὶ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι πᾶσαι ἴσαι· ὁμοίως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἀξιοσημείωτοι εἶναι αἱ ἀκόλουθαι ἰδιότητες τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

§ 394. Θεώρημα Ι.—*Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς σφαῖραν,*

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔστωσαν Ο καὶ Ο΄ τὰ κέντρα δύο ἑδρῶν τεμνομένων κατὰ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ Μ τὸ μέσον αὐτῆς. Τὸ ἐπίπεδον ΟΜΟ′ κάθετον ὂν ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας· ἡ γωνία ἄρα ΟΜΟ′ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ. Ἂν δὲ



Σχ. 264.

ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας εἰς τὰ Ο καὶ Ο′, αὗται θὰ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΜΟ′ καὶ θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Κ.

Ἐπειδὴ δὲ ΟΜ=Ο′Μ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΜΚ, Ο′ΜΚ εἶναι ἴσα καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K}=\mathrm{O'}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K}=\frac{\mathrm{O'MO}}{2}$. Τὸ δὲ τρίγωνον ΟΜΚ εἶναι τελείως ὡρισμένον κατὰ μέγεθος.

Ἐὰν ὅθεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο″ ἕδρας προσκειμένης εἰς τὴν Ο ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Ο″, θὰ τμήσῃ τὴν ΟΚ εἰς τὸ Κ καὶ θὰ εἶναι Ο″Κ=ΟΚ=Ο′Κ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ Κ καὶ ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν. Πᾶσαι ἄρα αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας (Κ,ΚΟ)· τὸ δὲ πολύεδρον εἶναι περιγράψιμον περὶ ταύτην. ὅ. ἔ. δ.

β′) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων ΟΑ=ΟΒ=ΟΘ=...=ΟΙ, Ο′Α=Ο′Β=Ο′Γ κτλ. ἕπεται ὅτι ΚΑ=ΚΒ=ΚΘ=.. =ΚΙ=ΚΕ=ΚΔ=... κτλ.

Ἡ σφαῖρα ἄρα (Κ,ΚΑ) διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, ἤτοι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς ταύτην.

Τὸ κοινὸν κέντρον τῆς εἰς κανονικὸν πολύεδρον ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας καλεῖται *κέντρον* τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς καλεῖται *ἀκτὶς* τοῦ καν. πολυέδρου. Ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου καν. πολυέδρου ἀπὸ ἑκάστης ἕδρας καλεῖται *ἀπόστημα* αὐτοῦ.

Πόρισμα Ι.—*Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον ἀποτελεῖται ἐκ κανονικῶν πυραμίδων ἰσαρίθμων πρὸς τὰς ἕδρας αὐτοῦ.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Ὁ ὄγκος καν. πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις. 661) Ἐκ τοῦ κέντρου Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς εὐθ. τμήματα ΟΕ, ΟΖ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολύεδρον ΕΑΒΓΔΖ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

662) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ὀκταέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

Πλῆθος κανονικῶν πολυέδρων.

§ 395. Θεώρημα Ι.—*Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν κυρτῆς καὶ μὴ κλειστῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν αὐτῆς.*

Ἐὰν δηλ. κυρτὴ καὶ μὴ κλειστὴ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια ἔχῃ ε ἕδρας, κ κορυφὰς καὶ α ἀκμάς, λέγω ὅτι $\varepsilon+\kappa=\alpha+1$. (1)

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\varepsilon=1$, ἀκμαὶ θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς ἕδρας· ἐπειδὴ δὲ $\kappa=\alpha$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon+\kappa=\alpha+1$, ἤτοι ἰσχύει διὰ τοιαύτην ἐπιφάνειαν ἡ (1). Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ (1) ἰσχύει διὰ πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν ε ἕδρας, κ κορυφάς, α ἀκμὰς καὶ μὴ κλειστήν· ἄς νοήσωμεν δὲ ὅτι συνάπτεται μετ' αὐτῆς καὶ μία ἔτι ἕδρα χωρὶς νὰ κλείσῃ ἡ πολυεδρικὴ αὕτη ἐπιφάνεια.

Ἄν ἡ ἕδρα αὕτη ἔχῃ ν πλευράς, λ δὲ ἐξ αὐτῶν συμπίπτωσι μετὰ ἰσαρίθμων ἀκμῶν τῆς ἀρχικῆς ἐπιφανείας, αἱ προστιθέμεναι νέαι ἀκμαὶ εἶναι $(\nu-\lambda)$· ἔχει ἄρα ἡ νέα ἐπιφάνεια $\alpha+(\nu-\lambda)=\alpha'$ ἀκμάς.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν κορυφῶν ν τῆς προστιθεμένης ἕδρας αἱ $(\lambda+1)$ συμπίπτουσι μετὰ προϋπαρχουσῶν κορυφῶν, αἱ προστιθέμεναι κορυφαὶ εἶναι $\nu-(\lambda+1)$· κατ' ἀκολουθίαν ἡ νέα ἐπιφάνεια ἔχει $(\varkappa+\nu-\lambda-1)=\varkappa'$ κορυφάς, ἐν ᾧ ἕδρας ἔχει $\varepsilon+1=\varepsilon'$. Ἐπειδὴ δὲ

$$\varepsilon'+\varkappa'=\varepsilon+1+\varkappa+\nu-\lambda-1=\varepsilon+\varkappa+\nu-\lambda=\alpha+1+\nu-\lambda$$

καὶ $\alpha+\nu-\lambda=\alpha'$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon'+\varkappa'=\alpha'+1$, ἤτοι ἡ (1) ἰσχύει διὰ τὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει $\varepsilon+1$ ἕδρας.

Ἐπειδὴ δὲ ἰσχύει διὰ $\varepsilon=1$, ἕπεται ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ $\varepsilon=2$, εἶτα διὰ $\varepsilon=3$ καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, δι' ὅσας δήποτε ἕδρας, ἀρκεῖ ἡ ἐπιφάνεια νὰ μὴ εἶναι κλειστή.

§ 396. Θεώρημα II (τοῦ Euler).—*Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν κυρτοῦ πολυέδρου ὑπερβαίνει κατὰ 2 τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.*

Ἐὰν δηλ. κυρτὸν πολύεδρον ἔχῃ $\varkappa$ κορυφάς, ε ἕδρας καὶ α ἀκμάς, θὰ εἶναι

$$\varkappa+\varepsilon=\alpha+2. \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πολυέδρου ἀφαιρεθῇ μία ἕδρα, ἡ μένουσα πολυεδρικὴ καὶ μὴ κλειστὴ ἐπιφάνεια ἔχει $\varkappa$ κορυφὰς καὶ α ἀκμάς, διότι οὐδεμία κορυφὴ καὶ ἀκμὴ ἀφαιρεῖται.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ ταύτην ἰσχύει τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι $\varkappa+(\varepsilon-1)=\alpha+1$, ὅθεν $\varkappa+\varepsilon=\alpha+2$. ὅ. ἔ. δ.

§ 397. Ἀριθμὸς καὶ εἴδη καν. πολυέδρων.—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἑκάστη ἕδρα καν. πολυέδρου ἔχῃ μ πλευρὰς καὶ ἑκάστη στερεὰ γωνία ἔχει ν ἕδρας. Ἐὰν τοῦτο ἔχῃ ε ἕδρας, ὁ ἀριθμὸς $\mu\varepsilon$ τῶν πλευρῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς 2α, διότι ἑκάστη ἀκμὴ ἐμετρήθη δίς. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\nu\varkappa=2\alpha$· εἶναι ἄρα $\mu\varepsilon=\nu\varkappa=2\alpha$. Ἐκ τούτων καὶ τῆς $\varkappa+\varepsilon=\alpha+2$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\varepsilon=\frac{4\nu}{2(\mu+\nu)-\mu\nu} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon>0$, ἕπεται ὅτι $2(\mu+\nu)-\mu\nu>0$, ὅθεν $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}>2$.

Ἐκ ταύτης παρατηροῦντες ὅτι $\nu\geqq3$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$, ὅθεν $\mu<6$, εἶναι δὲ καὶ $\mu\geqq3$. Ἔχοντες ἤδη ὑπ' ὄψιν τὴν (1) εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα·

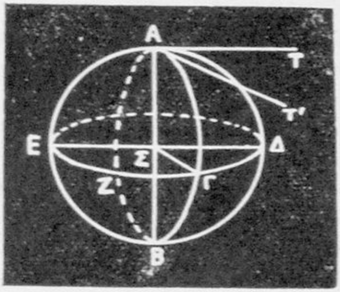
$$\alpha')\ \nu=3\ \left|\begin{array}{l}\mu=3,\ \varepsilon=4\\ \mu=4,\ \varepsilon=6,\\ \mu=5,\ \varepsilon=12.\end{array}\right. \quad \beta')\ \nu=4,\ \mu=3,\ \varepsilon=8, \quad \gamma')\ \nu=5,\ \mu=3,\ \varepsilon=20$$

Κατὰ ταῦτα τὰ δυνατὰ καν. πολύεδρα εἶναι τὰ ἑξῆς. Κανονικὸν τετράεδρον, κανονικὸν ἑξάεδρον (κύβος), κανονικὸν ὀκτάεδρον, πενταγωνικὸν δωδεκάεδρον καὶ τριγωνικὸν εἰκοσάεδρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τρίγωνα.

§ 398. Γωνία καμπύλων γραμμῶν.—*Γωνία δύο τεμνομένων καμπύλων γραμμῶν καλεῖται ἡ γωνία τῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον ἐφαπτομένων αὐτῶν.*

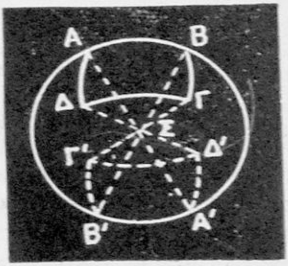


Σχ. 265.

Οὕτω τῶν τόξων ΑΓΒ, ΑΔΒ τῶν μεγ. κύκλων ΑΓΒΖ, ΑΔΒΕ τῆς σφαίρας Σ γωνία εἶναι ἡ γωνία ΤΑΤ΄, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Α ἐφαπτόμεναι ΑΤ καὶ ΑΤ΄ τῶν τόξων τούτων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΤΑΤ΄ εἶναι ἡ πρὸς τὴν δίεδρον ΓΑΒΔ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίπεδος γωνία, ἕπεται ὅτι: *Ἡ γωνία δύο τόξων μεγ. κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς διέδρου, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν.*

ΣΗΜ. Παρατηροῦντες ὅτι ὁ μέγ. κύκλος ΕΓΔ, ὅστις ἔχει πόλον Α, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΒ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ $\widehat{ΓΣΔ}=\widehat{ΤΑΤ'}$.

§ 399. Σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τρίγωνα. — *Σφαιρικὸν πολύγωνον καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ τόξων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.*



Σχ. 266.

Π.χ. τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι σφαιρικὸν πολύγωνον *(Σχ. 266)*. Τὸ ὑπὸ τριῶν τόξων μεγ. κύκλων σφαίρας περιεχόμενον μέρος τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς καλεῖται *σφαιρικὸν τρίγωνον*. Τὰ τόξα, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται σφαιρικὸν πολύγωνον ἢ τρίγωνον, καλοῦνται *πλευραὶ* αὐτοῦ. Αἱ γωνίαι τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου ἢ τριγώνου καλοῦνται γωνίαι αὐτοῦ· αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων καλοῦνται *κορυφαὶ* τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἢ τριγώνου.

Διαγώνιος σφ. πολυγώνου καλεῖται τὸ μεταξὺ δύο μὴ διαδοχικῶν κορυφῶν αὐτοῦ περιεχόμενον τόξον μεγ. κύκλου.

Σφαιρικόν τι πολύγωνον ἢ τρίγωνον λέγεται *κυρτόν*, ἂν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν ἀφίνῃ ὅλον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι κυρτὸν σφαιρικὸν πολύγωνον.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θὰ γίνηται λόγος μόνον περὶ κυρτῶν σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ τριγώνων.

§ 400. Ἀντιστοιχία σφαιρικῶν πολυγώνων ἢ τριγώνων καὶ στερεῶν γωνιῶν. — Τὰ ἐπίπεδα τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ πολύγωνον· περατούμενα δὲ εἰς τὰς τομὰς ἑκάστου ὑπὸ τῶν παρακειμένων ὁρίζουσιν ἀντίστοιχον στερεὰν γωνίαν, ἥτις ἔχει ἕδρας ἰσαρίθμους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου. Οὕτως εἰς τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ *(Σχ. 266)* ἀντιστοιχεῖ ἡ στερεὰ γωνία Σ.ΑΒΓΔ. Ἀντιστρόφως, εἰς ἑκάστην στερεὰν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ κέντρον σφαίρας ἀντιστοιχεῖ ἓν σφαιρικὸν πολύγωνον ἢ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων σφαιρικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας ὑπάρχουσιν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις.

α΄) Αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσαι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, μία πρὸς μίαν. Ἔχει ἄρα : *ἑκάστη ἕδρα μέτρον ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τῆς πλευρᾶς, ἐφ᾿ ἧς βαίνει.*

β΄) *Τὸ μέτρον ἑκάστης διέδρου στερεᾶς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς κειμένων πλευρῶν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου.*

§ 401. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ τριγώνων. — Ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων καὶ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν στερεῶν γωνιῶν συμπεραίνομεν ὅτι :

α΄) *Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ σφαιρ. πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν.*

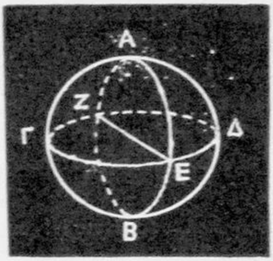
β΄) *Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

γ΄) *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύ-*

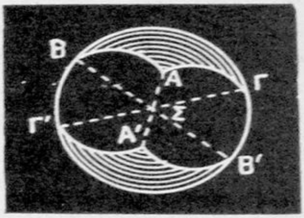
τερον δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον ἓξ ὀρθῶν· ἑκάστη δὲ αὐξηθεῖσα κατὰ 2 ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν σφαιρ. τριγώνου ἀπὸ τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν καλεῖται *σφαιρικὴ ὑπεροχὴ* τοῦ τριγώνου τούτου.

§ 402. Δισορθογώνια καὶ τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα. — Ἐκ τῆς τελευταίας τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων προκύπτει ὅτι δύναται σφαιρικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας (δισορθογώνιον) ἢ καὶ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας (τρισορθογώνιον). Τὸ τρίγωνον π. χ. ΑΔΓ *(Σχ. 265)* ἔχων ὀρθὰς τὰς γωνίας Γ καὶ Δ εἶναι δισορθογώνιον, τὸ δὲ ΑΕΓ *(Σχ. 267)* εἶναι τρισορθογώνιον.



Σχ. 267.



Σχ. 268.

Αἱ περιφέρειαι τριῶν μεγ. κύκλ. σφαίρας καθέτων ἀνὰ δύο διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς 8 τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα. ΑΕΓ,, ΑΕΔ, ΒΕΓ, ΒΕΔ, ΑΖΓ, ΑΖΔ, ΒΖΓ καὶ ΒΖΔ.

§ 403. Συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα.— *Δύο σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα λέγονται συμμετρικά, ἐὰν αἱ κορυφαὶ ἑκατέρου εἶναι συμμετρικαὶ τῶν κορυφῶν τοῦ ἄλλου πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.*

Π. χ. τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ Α′Β′Γ′Δ′ *(Σχ. 266)* εἶναι συμμετρικά· ὁμοίως τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ *(Σχ. 268)* εἶναι συμμετρικά. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ πρὸς δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα ἀντίστοιχοι στερεαὶ γωνίαι εἶναι κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, ἀλλὰ δὲν ἐφαρμόζουσι πλὴν τῶν ἰσοσκελῶν τριέδρων ἕπεται ὅτι:

α') *Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν.*

β') *Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει· μόνον τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι δύο γωνίας ἴσας ἐφαρμόζουσιν ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν των.*

§ 404. Ἴσα ἢ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.—Ἐκ τῶν γνωστῶν περὶ ἰσότητος τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν θεωρημάτων προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες.

Θεώρημα I.—*Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων σφαιρῶν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ ἄλλα ὁμοειδῆ στοιχεῖα ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ τὸ ἓν ἰσοῦται πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἄλλου* (§ 304).

Θεώρημα II.—*Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων σφαιρῶν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ ἄλλα ὁμοειδῆ στοιχεῖα ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ τὸ ἓν ἰσοῦται πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἄλλου* (§ 305).

Θεώρημα III.—*Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων σφαιρῶν ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας ἴσας καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ τὸ ἓν ἰσοῦται πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἄλλου* (§ 306).

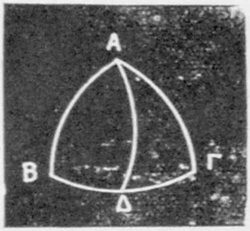
Θεώρημα IV.—*Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἀντικειμένας πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἢ τὸ ἓν ἰσοῦται πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἄλλου* (§ 307).

Ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

§ 405. Θεώρημα I.—*Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς σφ. τριγώνου εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Λέγω ὅτι Β=Γ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ καὶ ΑΔ τὸ μεταξὺ Α καὶ Δ περιεχόμενον τόξον τοῦ μεγ. κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Δ. Τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν γωνίας ἴσας· ἄρα καὶ Β=Γ.



Σχ. 269.

§ 406. Θεώρημα ΙΙ.—Ἐὰν *δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 269)* σφαιρικὸν τρίγωνον, ἐν τῷ ὁποίῳ Β=Γ. Λέγω ὅτι καὶ ΑΓ=ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ Β=Γ, αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΒ καὶ ΣΓ τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου γωνίας Σ.ΑΒΓ εἶναι ἴσαι. Ἡ στερεὰ γωνία ΣΑΒΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της ΣΑ'Β'Γ' καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α'Β'Γ', οὕτως ὥστε τὸ τόξον ΑΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α'Β'· εἶναι ἄρα τόξ. ΑΓ=τόξ. Α'Β'. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ τόξ. ΑΒ=τόξ. Α'Β', ἕπεται τόξ. ΑΒ=τόξ. ΑΓ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 663) Τὸ διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου διερχόμενον τόξον μεγίστου κύκλου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως ἴσας γωνίας.

664) Ἐὰν δύο πλευραὶ σφ. τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄτρακτοι.—Ἰδιότητες αὐτῶν.

§ 407. Ἄτρακτος—Σφαιρικὸς ὄνυξ.—*Ἄτρακτος καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μέγ. κύκλων.*

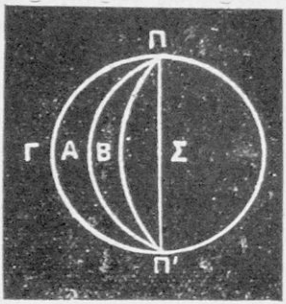
Π.χ. τὸ μέρος ΠΓΠ'ΑΠ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Σ εἶναι ἄτρακτος *(Σχ. 270).*

Σφαιρικὸς ὄνυξ καλεῖται μέρος σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγ. κύκλων αὐτῆς.

Βάσις σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενος ἄτρακτος.

Γωνία ἀτράκτου καλεῖται ἡ γωνία τῶν ἡμιπεριφερειῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται οὗτος.

Γωνία δὲ σφ. ὄνυχος καλεῖται ἡ γωνία τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ὁ ἄτρακτος ἢ ὄνυξ καλεῖται ὀρθογώνιος, ὀξυγώνιος ἢ ἀμβλυγώνιος, ἐὰν ἡ γωνία αὐτοῦ εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Π. χ. ὁ ἄτρακτος ΒΕΑΔ (*Σχ. 267*) καὶ ὁ ἀντίστοιχος σφαιρ. ὄνυξ εἶναι ὀρθογώνιοι. Ὁ ἄτρακτος ΒΕΑΔ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ μεγ. κύκλου ΓΔ, ὅστις ἔχει πόλους τὰς κορυφὰς Α καὶ Β τοῦ ἀτράκτου τούτου, εἰς τὰ τρισορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΕΔ· ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι (§ 404 Θ. III) ἴσα, ἔπεται ὅτι ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος εἶναι διπλάσιος ἑκατέρου τούτων.



Σχ. 270.

§ 408. Θεώρημα Ι.—*Δύο ἄτρακτοι ἢ ὄνυχες τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν ἔχοντες ἴσας γωνίας εἶναι ἴσοι.*

Ἐὰν π.χ. ἡ γωνία τοῦ ἀτράκτου ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ΑΒ (*Σχ. 270*), λέγω ὅτι οἱ ἄτρακτοι οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀντίστοιχοι ὄνυχες εἶναι ἐπίσης ἴσοι.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν ἀτράκτων ΓΑ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι ΓΠΠ'Α καὶ ΑΠΠ'Β εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν τὴν δίεδρον ΓΠΠ'Α στρεφομένην περὶ τὴν ἀκμὴν ΠΠ', μέχρις οὗ ἡ ἕδρα ΠΑΠ' ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΠΒΠ', ἡ ἕδρα ΠΓΠ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΠΑΠ' καὶ ὁ ἄτρακτος ΓΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒ· ὁ δὲ ὄνυξ ΓΠΠ'Α, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ὄνυχος ΑΠΠ'Β. Εἶναι λοιπὸν οἱ ῥηθέντες ἄτρακτοι ἴσοι καὶ οἱ ὄνυχες ἴσοι. ὅ.ἔ.δ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν οἱ ἄτρακτοι ἢ οἱ ὄνυχες ἀνήκωσιν εἰς ἴσας σφαίρας.

Πόρισμα Ι.—*Ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος σφαίρας εἶναι τὸ τέταρτον, τὸ δὲ τρισορθογώνιον τρίγωνον τὸ ὄγδοον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης.*

Πόρισμα ΙΙ.—*Ὁ ὀρθογώνιος ὄνυξ εἶναι τὸ τέταρτον τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει.*

§ 409. Θεώρημα ΙΙ.—*Δύο ἄτρακτοι ἢ ὄνυχες τῆς αὐτῆς ἢ ἴσως σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ γωνίαι αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος πειθόμεθα (§ 201) εὐκόλως ὅτι, ἐὰν ἡ γωνία Γ ἀτράκτου Α πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν λ γείνῃ Γ′, καὶ ὁ ἄτρακτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω δὲ ὅτι γίνεται Α′. Ὥστε, ἂν Γ′=Γ.λ, θὰ εἶναι καὶ Α′=Α.λ ἄρα Α′ : Α=Γ′ : Γ. δ.ἔ.δ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ σφαιρικὸν ὄνυχα.

Πόρισμα I.—*Τὸ μέτρον ἀτράκτου ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τῆς γωνίας του, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν μὲν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος, τῶν δὲ γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία.*

Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ὁ ἀντίστοιχος ἄτρακτος Α εἶναι ὀρθογώνιος, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται (Α′)=(Γ′).

Πόρισμα II.—*Τὸ μέτρον ἀτράκτου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν μὲν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, τῶν δὲ γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία.*

Ἐκ τῆς ἰσότητος Α′ : Α=Γ′ : Γ προκύπτει ὅτι

$$A' : \frac{A}{2} = 2\Gamma', \qquad ἄρα \qquad (A') = (2\Gamma').$$

Πόρισμα III.—*Τὸ ἐμβαδὸν ἀτράκτου εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς 4 ὀρθάς.*

Ἐὰν ὁ ἄτρακτος Α αὐξανόμενος καταστῇ ὁλόκληρος ἐπιφάνεια Ε σφαίρας, ἡ γωνία Γ αὐτοῦ αὐξανομένη γίνεται ἴση πρὸς 4 ὀρθάς. Ἡ ἰσότης ἄρα Α′ : Α=Γ′ : Γ γίνεται Α′ : Ε=Γ′ : 4 ὀρθ, ὅθεν

$$(A') = (E) . \frac{\Gamma'}{4\,ὀρθ.}.$$

Πόρισμα IV.—*Δύο ὄνυχες τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Πόρισμα V.—*Ὁ ὄγκος σφ. ὄνυχος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.*

Ἂν ὁ ὄνυξ Ν ἔχῃ βάσιν Α, παρατηροῦντες ὅτι ἡ σφαῖρα Σ θεωρεῖται ὡς ὄνυξ ἔχων βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς κατανοοῦμεν ὅτι

$$\frac{(N)}{(\Sigma)} = \frac{(A)}{(E)} \qquad ὅθεν \qquad (N) = \frac{(\Sigma)}{(E)} . (A) = (A) . \frac{\rho}{3}.$$

Ἀσκήσεις. 665) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἀτράκτου σφαίρας ἀκτῖνος 2μέτ.; Πόσος δὲ ὁ ὄγκος τοῦ ἀντιστοίχου ὄνυχος;

666) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου σφαίρας ἀκτῖνος 0,5μέτ.;

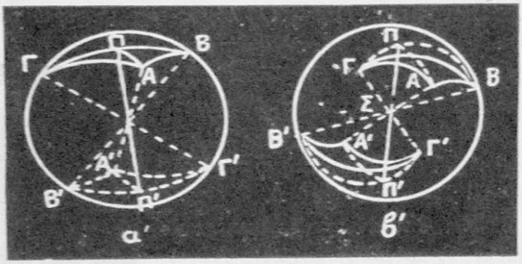
667) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἀτράκτου γωνίας 2|5 ὀρθῆς τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας οὔσης 3μ; Πόσος δὲ ὁ ὄγκος τοῦ ἀντιστοίχου ὄνυχος;

Ἐμβαδὸν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ πολυγώνων.

§ 410. Θεώρημα Ι.— *Δύο συμμετρικὰ σφ. τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστωσαν τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ *(Σχ. 271α′)*. Λέγω ὅτι ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν Π καὶ Π′ εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ καὶ ἀχθῶσι τὰ τῶν μεγ. κύκλων τόξα ΠΑ,ΠΒ,ΠΓ, Π′Α′, Π′Β′, Π′Γ′ θὰ εἶναι ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ (§ 378). Ἐπειδὴ δὲ ΠΑ = Π′Α′ διότι, καὶ ΑΣΠ = Α′Σ′Π′, ΠΒ = Π′Β′, ΠΓ=Π′Γ′, ἕπεται ὅτι καὶ Π′Α′ = Π′Β′=Π′Γ′. Τὰ σφαιρικὰ λοιπὸν τρίγωνα ΠΑΓ, ΠΑΒ, ΠΒΓ, Π′Α′Β′, Π′Α′Γ′, καὶ Π′Β′Γ′ εἶναι πάντα ἰσοσκελῆ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἓν πρὸς ἓν συμμετρικά, ἕπεται (§ 404 β′)



Σχ. 271.

ὅτι εἶναι ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, ἤτοι ΠΑΓ = Π′Α′Γ′, ΠΒΓ=Π′Β′Γ′ καὶ ΠΑΒ = Π′Α′Β′. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἀποτελοῦνται ἐκ μερῶν ἴσων ἓν πρὸς ἕν· εἶναι ἄρα ἰσοδύναμα. ὅ. ἔ. δ.

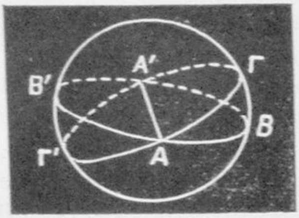
ΣΗΜ. Ἐὰν οἱ πόλοι Π καὶ Π′ κεῖνται ἐκτὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ *(Σχ. 271β′)* θὰ εἶναι

ΑΒΓ=ΠΑΒ+ΠΑΓ—ΠΒΓ, Α′Β′Γ′=Π′Α′Β′+Π′Α′Γ′—Π′Β′Γ′.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι ἴσα ἓν πρὸς ἕν, καὶ κατὰ σειράν, ἕπεται ὅτι πάλιν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσοδύναμα.

§ 411. Θεώρημα ΙΙ.— *Ἐκ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὑπὸ τόξων εἰς ἃ τρεῖς περιφέρειαι μεγ. κύκλων τῆς αὐτῆς σφαίρας διαιροῦσιν ἀλλήλας, δύο κατὰ κορυφὴν ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει γωνίαν τὴν γωνίαν τῆς κοινῆς αὐτῶν κορυφῆς.*

Ἔστωσαν τρεῖς μεγ. κύκλοι ΒΒ′, ΓΓ′ καὶ ΒΓΒ′Γ′ σφαίρας Σ *(Σχ. 272)*. Τούτων αἱ περιφέρειαι διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 8 σφαιρικὰ τρίγωνα. Λέγω ὅτι δύο κατὰ κορυφὴν τοιαῦτα π.χ. τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ′ ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον τῷ ἀτράκτῳ, ὁ ὁποῖος ἔχει γωνίαν Α.



Σχ. 272.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγ. τούτων κύκλων τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ διαμέτρους, ἕπεται ὅτι τοῦ σφ. τριγώνου ΑΒ′Γ′ συμμετρικὸν εἶναι τὸ Α′ΒΓ· εἶναι ἄρα (§ 410) (ΑΒ′Γ′)=(Α′ΒΓ) καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν

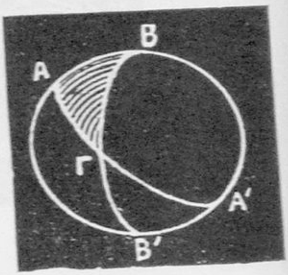
(ΑΒΓ)+(ΑΒ′Γ′)=(ΑΒΓ)+Α′ΒΓ)=ἀτρ. Α. ὅ. ἔ. δ.

§ 412. Θεώρημα III.—*Ὁ λόγος σφ. τριγώνου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τοῦτο, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς σφαιρικῆς αὐτοῦ ὑπεροχῆς πρὸς 8 ὀρθάς.*

Ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 273)* τυχὸν σφαιρικὸν τρίγωνον, οὗ ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ

Α+Β+Γ—2ὀρθ.=υ ὀρθ.

Ἔστω δὲ Ε ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ τρίγωνον ἀνήκει. Λέγω ὅτι (ΑΒΓ) : Ε=υ : 8.



Σχ. 273.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ μέχρι οὗ γίνῃ ὁλόκληρος περιφέρεια, προεκταθῶσι δὲ αἱ ἄλλαι πλευραὶ μέχρις οὗ τμήσωσιν αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′, σχηματίζονται ἐν τῷ αὐτῷ μετὰ τοῦ ΑΒΓ ἡμισφαιρίῳ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα Α′ΒΓ, Α′Β′Γ καὶ ΑΓΒ′.

Ἐπειδὴ δὲ ΑΒΓ + Α′ΒΓ=ἄτρ. Α, ΑΒΓ+ΑΓΒ′=ἄτρ. Β καὶ (§ 411) ΑΒΓ=Α′Β′Γ=ἄτρ. Γ, ἕπεται ὅτι

3ΑΒΓ+Α′ΒΓ+Α′Β′Γ+ΑΓΒ′=ἄτρ.Α+ἄτρ. Β+ἄτρ.Γ, ὅθεν

2ΑΒΓ+Ε/2=ἄτρ.Α+ἄτρ.Β+ἄτρ.Γ καὶ

2ΑΒΓ=ἄτρ.Α+ἄτρ.Β+ἄτρ.Γ—Ε/2. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2.\text{ΑΒΓ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{ἄτρ. Α}}{\text{Ε}} + \frac{\text{ἄτρ.Β}}{\text{Ε}} + \frac{\text{ἄτρ.Γ}}{\text{Ε}} - \frac{1/2\text{Ε}}{\text{Ε}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\text{ἀρτ.} A}{E} = \frac{A}{4\ \text{ὀρ.}}$ κλπ. καὶ $\frac{1/2\,E}{E} = \frac{1/2}{1} = \frac{2\ \text{ὀρθ.}}{4}$,

ἔπεται ὅτι $\frac{2.AB\Gamma}{E} = \frac{A+B+\Gamma-2\text{ὀρθ.}}{4\text{ὀρθ.}}$, ἄρα $\frac{AB\Gamma}{E} = \frac{\upsilon}{8}$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι.— *Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου, ἐὰν ὡς μονὰς τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ἰσοῦται πρὸς τὴν σφαιρικὴν αὐτοῦ ὑπεροχήν, ἤτοι ἐκφράζεται εἰς τρισορθογώνια τρίγωνα ἢ καὶ μέρη αὐτοῦ, δι' οὗ ἀριθμοῦ ἐκφράζεται εἰς ὀρθὰς γωνίας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχή.*

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τρίγωνον, καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης, θὰ εἶναι $E=8\varepsilon$, ἡ προηγουμένη δὲ ἰσότης γίνεται $\frac{AB\Gamma}{8\varepsilon} = \frac{\upsilon}{8}$, ὅθεν $\frac{AB\Gamma}{\varepsilon} = \upsilon$ ἢ $(AB\Gamma) = \upsilon$. Οὕτως, ἂν ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 2/5 ὀρθῆς, θὰ εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\varepsilon} = 2/5$, ὅθεν $AB\Gamma = \varepsilon.2/5$, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι τὰ 2/5 τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου. Ἂν δὲ Ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἰς μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρ. τριγώνου εἶναι $2/5 . \frac{4\pi P^2}{8}$ τετραγ. μέτρα.

§ 413. Θεώρημα IV. — *Τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, ἐὰν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν 2 ὀρθῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ 2.*

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως, ἂν τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον χωρισθῇ εἰς σφαιρικὰ τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται διά τινος κορυφῆς αὐτοῦ καὶ προστεθῶσιν εἶτα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων.

Ἀσκήσεις. 668) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἂν $A=4/5$ ὀρθ. $B=3/5$ ὀρθ. $\Gamma=7/10$ ὀρθ. ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 2 μέτ.

669) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρ. τριγώνου ΑΒΓ, ἂν $A=78^\circ$, $B=120^\circ$, $\Gamma=100^\circ$, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 3,5 μέτ.

670) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ σφ. τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἂν $A=68^\circ$, $B=110^\circ$, $\Gamma=220^\circ$, $\Delta=144^\circ$, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 4 μέτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Στοιχεῖα χωρομετρίας καὶ χωροσταθμήσεως.

§ 414. Προκαταρκτικοὶ ὁρισμοί.—*Ἡ διεύθυνσις τῆς βαρύτητος ἔν τινι τόπῳ καλεῖται κατακόρυφος τοῦ τόπου τούτου.*

Σχ. 274.

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου τόπου καλεῖται *κατακόρυφον* ἐπίπεδον.

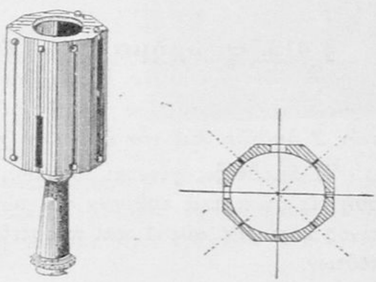
Πᾶν δὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυφον τόπου καλεῖται *ὁριζόντιον* ἐπίπεδον.

Ἡ ἀπόστασις τῶν ὁριζοντίων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ δύο δοθέντων σημείων, καλεῖται *κατακόρυφος ἀπόστασις* τῶν σημείων τούτων.

Ἡ ἀπόστασις δὲ τῶν προβολῶν δύο σημείων ἐπὶ τὸ αὐτὸ *ὁριζόντιον ἐπίπεδον* καλεῖται *ὁριζόντιος ἀπόστασις* τῶν σημείων τούτων.

§ 415. Σκοπὸς τῆς χωρομετρίας. — Χωρομετρικὰ ὄργανα. — *Ἡ χωρομετρία ἔχει σκοπὸν τὴν μέτρησιν καὶ τὴν ἐπὶ φύλλου χάρτου ἀπεικόνισιν γαιῶν μικρᾶς σχετικῶς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς ἐκτάσεως.*

Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σκοποῦ τούτου γίνεται χρῆσις διαφόρων ὀργάνων, ὧν ἁπλούστερα εἶναι τὸ *ἀκόντιον (Σχ. 274)*, ἡ *ταινία* καὶ τὸ *ὀρθόγωνον* ἢ ὁ *χωρομετρικὸς γνώμων (Σχ. 275)*. Τὸ ὀρθόγωνον εἶναι ὀρθὸν κοῖλον ὀκταγωνικὸν πρίσμα ἔχον βάσιν κανονικὸν ὀκτάγωνον. Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας αὐτοῦ ὑπάρχει σχισμή τις καὶ θυρὶς πλατυτέρα, ὧν ὁ κοινὸς ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος. Κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῆς θυρίδος ἑκάστης ἕδρας τείνεται λεπτὸν νῆμα, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν σχισμὴν τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Οὕτω τὸ νῆμα ἑκάστης θυρίδος καὶ ἡ σχισμὴ τῆς ἀπέναντι ἕδρας ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον, ὅπερ καλεῖται *σκοπευτικὸν* ἐπίπεδον.



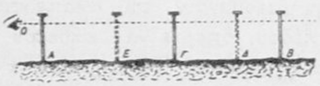
Σχ. 275.

§ 416. Χάραξις εὐθυγραμμίας. — *Καλεῖται εὐθυγραμμία ὡρισμένη ὑπὸ δύο σημείων τοῦ ἐδάφους ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τῶν σημείων τούτων.*

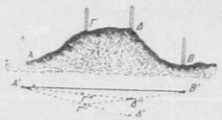
Πρὸς χάραξιν εὐθυγραμμίας διερχομένης διὰ δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ ἐδάφους *(Σχ. 276)* ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

α') Ἐμπήγομεν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β κατακορύφως ἀνὰ ἓν ἀκόντιον. Εἶτα ἱστάμενοι εἰς τὸ σημεῖον Α νεύομεν εἰς τὸν βοηθόν μας, ὅστις ἐμπιγνύει ἀκόντιον Δ, οὕτως ὥστε τοῦτο ν' ἀποκρύπτῃ ἀφ' ἡμῶν τὸ ἀκόντιον Β· εἶτα τοποθετεῖ ἕτερον Γ, οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ἀποκρύπτῃ ἀφ' ἡμῶν τὰ ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Οἱ πόδες τῶν οὕτω τοποθετουμένων ἀκοντίων κεῖνται πάντες ἐπὶ τῆς ὑπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β ὁριζομένης εὐθυγραμμίας.

β') Ἂν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β ὑπάρχῃ ἐδαφικὸν ἔξαρμα, *(Σχ. 277)*, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ φαίνηται ἐκ τοῦ Α τὸ εἰς τὸ Β τοποθετούμενον ἀκόντιον καὶ τἀνάπαλιν, ἡ χάραξις τῆς εὐθυγραμμίας γίνεται ὡς ἀκολούθως. Τοποθετοῦνται δύο ἀκόντια Γ καὶ Δ ὁρατὰ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ οὕτως ὥστε τὸ Δ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΓ. Ἐὰν ἤδη τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΒΔ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἀκόντια Α, Γ, Δ, Β κεῖνται ἐπὶ τῆς ζητουμένης εὐθυγραμμίας. Ἄλλως ὁ εἰς τὸ Β παρατηρητὴς νεύει τὸν βοηθόν του καταλλήλως καὶ τοποθετεῖ τὸ ἀκόντιον Δ εἰς ἄλλην θέσιν Δ″ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΒΓ, ὁ δὲ εἰς τὸ Α παρατηρητής, ἂν ἴδῃ



Σχ. 276.



Σχ. 277

ὅτι τὸ Δ″ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΓ, νεύει καταλλήλως τὸν βοηθόν, ὅστις τοποθετεῖ ἕτερον ἀκόντιον Γ″ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΔ″. Οὕτως ἐξακολουθοῦσι μέχρις οὗ τὸ Δ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΓ καὶ ΒΓ.

§ 417. Μέτρησις τῆς ὁριζοντίου ἀποστάσεως δύο σημείων κεκλιμένου ἐδάφους. — Πρὸς μέτρησιν τῆς ὁριζοντίου ἀποστάσεως δύο σημείων Α καὶ Β *(Σχ. 278)* κειμένων ἐπὶ κεκλιμένου ἐδάφους ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Σχ. 278.

Καθορίζομεν πρῶτον δι' ἀκοντίων τὴν διὰ τῶν σημείων τούτων διερχομένην εὐθυγραμμίαν καὶ στερεοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν ἀρχὴν τῆς ταινίας, ἐνῷ ὁ βοηθὸς τείνει αὐτὴν ὁριζοντίως [1] κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης καὶ ἔστω

(1) Ἡ ὁριζοντιότης τῆς ταινίας ἐξελέγχεται διὰ τῆς ἀεροστάθμης, ἥτις εἶναι γνωστὴ ἐκ τῆς Φυσικῆς.

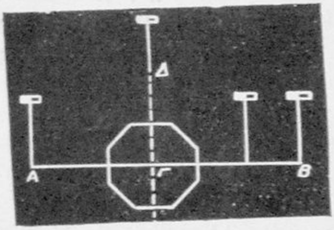
Γ τὸ πέρας τῆς ταινίας. Ἀφήνων ὁ βοηθὸς εἰς τὸ Γ μικρὸν λίθον ἐλεύθερον ὁρίζει τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὀρθὴν προβολὴν Ε τοῦ Γ καὶ ἐμπηγνύει βελόνην εἰς τὸ Ε. Εἶτα προχωροῦμεν ἀμφότεροι ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ἡγουμένου τοῦ βοηθοῦ, μέχρις οὗ στερεώσωμεν τὴν ἀρχὴν τῆς ταινίας εἰς τὸ Ε καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι πέρατος τῆς ἐργασίας. Τὸ μῆκος τῆς ζητουμένης ὁριζοντίου ἀποστάσεως Α'Β εἶναι προφανῶς ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν ΑΓ, ΕΒ, ΖΗ.

ΣΗΜ. Ἂν ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους εἶναι μεγάλη, ὥστε ὁ βοηθὸς δὲν φθάνει νὰ τείνῃ ὁριζοντίως ὅλην τὴν ταινίαν, τείνει μέρος αὐτῆς, ὅσον ἐπιτρέπει τὸ ἀνάστημά του, σημειοῖ δὲ ἑκάστοτε τὸν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος ἀναγραφόμενον ἀριθμόν.

ΣΗΜ. β'. Τὸν τρόπον τῆς διὰ τῆς ταινίας μετρήσεως ὁριζοντίου εὐθυγραμμίας παραλείπομεν ὡς λίαν εὐνόητον. (ὅρα Πρακτ. Γεωμετρίαν μου).

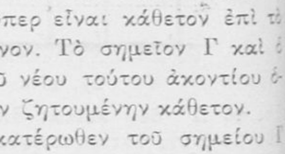
§ 418. Πρόβλημα I. — *Διὰ δεδομένου σημείου Γ εὐθείας ΑΒ (Σχ. 279) νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.*

Λύσις. α') Εἰς τὸ δεδομένον σημεῖον Γ στερεοῦμεν κατακορύφως τὸ ὀρθόγωνον, οὕτως ὥστε ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἀκοντίου Β. Εἶτα τοποθετοῦμεν ἕτερον ἀκόντιον Δ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προηγούμενον. Τὸ σημεῖον Γ καὶ ὁ ποὺς Δ τοῦ νέου τούτου ἀκοντίου ὁρίζουσι τὴν ζητουμένην κάθετον.



Σχ. 279.

β') Ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Γ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ ἴσα πρὸς ἄλληλα *(Σχ. 280)*. Εἶτα στερεοῦντες εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τὰ ἄκρα νήματος ἀρκετὰ ἐπιμηκεστέρου τοῦ τμήματος ΕΔ (ἢ καὶ αὐτῆς τῆς ταινίας τὰ ἄκρα) καὶ κρατοῦντες αὐτὸ διὰ τοῦ μέσου ἀπομακρυνόμεθα τῆς ΑΒ, μέχρις οὗ τὰ ἡμίση τοῦ νήματος καλῶς ταθῶσι. Τὸ σημεῖον Ζ, εἰς ὃ ἐφαρμόζει τὸ μέσον τοῦ νήματος εἶναι σημεῖον τῆς ζητουμένης καθέτου. Ἐμπήγοντες ὅθεν εἰς αὐτὸ ἀκόντιον ὁρίζομεν δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀκοντίου Γ τὴν ζητουμένην κάθετον.



Σχ. 280.

§ 419. Πρόβλημα II.—*Διὰ δεδομένου σημείου Δ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ κειμένου, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν (Σχ. 279).*

Λύσις.—Τοποθετούμενοι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ κρατοῦντες τὸ ὀρθογώνιον οὕτως ὥστε ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀκοντίων αὐτῆς, βαδίζομεν κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ, ἐν ᾧ συγχρόνως ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν σκοπεύομεν πρὸς τὸ ἀκόντιον Δ διὰ τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προηγούμενον. Οὕτω θέλομεν ἐπιτύχει σημεῖόν τι Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀφ' οὗ τὸ ἀκόντιον Δ φαίνεται ἐν τῷ δευτέρῳ τούτῳ σκοπευτικῷ ἐπιπέδῳ. Προφανῶς τὸ ἀκόντιον Δ καὶ τὸ εἰς τὸ Γ τοποθετούμενον ὁρίζουσι τὴν ζητουμένην κάθετον.

Ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων ἐπὶ χάρτου.

§ 420. Ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.—Πολλάκις λαμβάνομεν ἀνάγκην νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ χάρτου ἀγρὸν ἢ ἄμπελον, ἢ οἱονδήποτε γήπεδον, τὸ ὁποῖον ὁ χάρτης δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ μὲ τὰς πραγματικὰς αὐτοῦ διαστάσεις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει παραβλέποντες τὴν κυρτότητα αὐτῶν, ἕνεκα τῆς μικρᾶς ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς ἐκτάσεως αὐτῶν, θεωροῦμεν ταῦτα ὡς ἐπίπεδα σχήματα καὶ γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον. Τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται *σχέδιον* ἢ *διάγραμμα* τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος· ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος τοῦ διαγράμματος πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον σχῆμα καλεῖται *ἀριθμητικὴ κλῖμαξ* ἢ *σμίκρυνσις*. Αἱ συνήθεις ἀριθμητικαὶ κλίμακες εἶναι
$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ. καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{5000}$ κ.τ.λ. Ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ ἀναγράφεται πάντοτε ἐν τῷ φύλλῳ τοῦ

Σχ. 281.

σχεδιαγράμματος· ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτῆς δηλοῖ ποσάκις εὐθύγραμμόν τι τμῆμα τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐν τῷ διαγράμματι ὁμολόγου. Οὕτως, ἂν ἡ κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{1000}$, ἕκαστον εὐθ. τμῆμα τοῦ διαγράμματος χωρεῖ χιλίας φορὰς εἰς τὸ ἐν τῷ ἐδάφει ὁμόλογον. Ὥστε εὐθ. τμῆμα τοῦ σχεδιαγράμματος μήκους

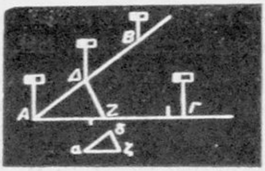
0,35 μ. ἀπεικονίζει εὐθ. τμῆμα τοῦ ἐδάφους μήκους $0,35.1000=350$μ. Ἀντιστρόφως εὐθ. τμῆμα μήκους 100 μέτ. ἀπεικονίζεται ἐν τῷ διαγράμματι δι' εὐθ. τμήματος μήκους 100 μέτ. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}$ μ.

§ 421. Γραφικὴ κλῖμαξ. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τοὺς ὑπολογισμούς, οὓς ἀπαιτεῖ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος διὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν μηκῶν τῶν εὐθ. τμημάτων τοῦ σχεδιαγράμματος εἰς πραγματικὰ καὶ τἀνάπαλιν, μεταχειριζόμεθα τὴν γραφικὴν κλίμακα. Αὕτη ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν αὐτῆς μορφὴν εἶναι γραφικὴ παράστασις ὡρισμένης ἀριθμητικῆς κλίμακος, καὶ κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς. Ἂν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{1000}$, λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. ὧν ἕκαστον ἔχει μῆκος 0,01 μέτ. καὶ ἀπεικονίζει εὐθ. τμῆμα τοῦ ἐδάφους μήκους $0,01.1000=10$ μέτ. Εἰς τὴν ἀρχὴν δὲ ἑκάστου τούτων γράφομεν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 0, 10, 20, 30 κ.τ.λ. Προεκτείνοντες τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἀριστερὰ τοῦ 0 λαμβάνομεν ἕτερον τμῆμα ΑΜ μήκους 0,01 μέτ. καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς 10 ἴσα μέρη, ἅτινα ἀριθμοῦμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Οὕτως ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων μερῶν εἶναι $\frac{1}{10}$ τοῦ ΑΒ ἤτοι ἀπεικονίζει τμῆμα τοῦ ἐδάφους 10 μέτ. $\frac{1}{10}=1$ μέτ. Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος, ὅπερ ἐν τῷ σχεδιαγράμματι ἀπεικονίζεται δι' εὐθ. τμήματος αϐ, θέτομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους διαϐήτου εἰς τὸ α, τοῦ δὲ ἄλλου σκέλους εἰς τὸ ϐ· τηροῦντες εἶτα σταθερὰν τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τούτων τοῦ διαϐήτου μεταφέρομεν ταῦτα ἐπὶ τῆς γραφικῆς κλίμακος καὶ τὸ μὲν εἰς τὸ 0, τὸ δὲ ἄλλο δεξιὰ αὐτοῦ. Ἐὰν τὸ δεύτερον αὐτὸ ἄκρον συμπέσῃ ἐπί τινος τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ διαιρέσεων, ὁ παρ' αὐτὴν ἀριθμὸς δεικνύει τὸ ζητούμενον μῆκος. Ἐὰν δὲ τὸ β' ἄκρον τοῦ διαϐήτου πέσῃ μεταξὺ δύο διαιρέσεων π.χ. μεταξὺ 20 καὶ 30, θέτομεν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ διαϐήτου εἰς τὴν διαίρεσιν 20, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης. Ἐὰν δὲ τὸ ἄκρον τοῦτο πέσῃ π.χ. ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 6 τοῦ τμήματος ΑΜ, τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 26 μέτ. Ἂν δὲ πέσῃ μεταξὺ τῶν διαιρέσεων 6 καὶ 7 τοῦ ΑΜ, τὸ μῆκος θὰ ὑπερϐαίνῃ τὰ 26 μέτρα κατὰ ποσότητα, ἣν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐκτιμῶμεν.

Ἀντιστρόφως, ἂν θέλωμεν ἐπ' εὐθείας τοῦ σχεδιαγράμματος νὰ ὁρίσωμεν εὐθ. τμῆμα ἀπεικονίζον εὐθ. τμῆμα μήκους 37 μέτ. θέτομεν τὸ μὲν ἓν ἄκρον τοῦ διαβήτου εἰς τὴν διαίρεσιν 30, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὴν διαίρεσιν 7 τοῦ ΑΜ. Τὴν ἀπόστασιν δὲ ταύτην τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου μεταφέρομεν ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος τοῦ διαγράμματος.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἡ ἀριθ. κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{100}$, τὰ μεγάλα τμήματα τῆς ἀνωτέρω γραφικῆς κλίμακος παριστῶσι μέτρα, τὰ δὲ μικρὰ δέκατα τοῦ μέτρου.

§ 422. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς τὴν γωνίαν δύο εὐθειῶν τοῦ ἐδάφους.*



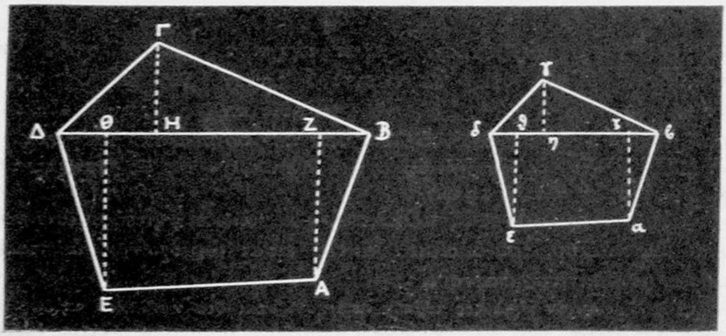
Σχ. 282.

Λύσις. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (*Σχ. 282*) τῆς δεδομένης γωνίας ἀρχόμενοι λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δύο τμήματα ΑΔ καὶ ΑΖ συνήθως ἴσα π. χ. 100 μέτρων, χαράσσομεν καὶ μετροῦμεν τὴν ΔΖ, ἔστω δὲ αὕτη 30 μ. Κατασκευάζομεν εἶτα ἐπὶ φύλλου χάρτου τρίγωνον αδζ ἔχον πλευρὰς 0,1 μέτ., 0,1 μέτ. καὶ 0,03 μέτ.

Ἐπειδὴ (§ 211) τὰ τρίγωνα ΑΔΖ καὶ αδζ εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία α εἶναι ἴση τῇ Α καὶ ἐπομένως εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 423. Ἀπεικόνισις εὐθ. σχημάτων.—*Διὰ τὴν ἀπεικόνισιν εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ γίνεται χρῆσις διαφόρων μεθόδων ἐξαρτωμένων ἐκ τῶν ὀργάνων τὰ ὁποῖα διαθέτομεν.*

Ἐκ τούτων ἁπλούστεραι εἶναι αἱ ἀκόλουθοι ὡς μὴ ἀπαιτοῦσαι

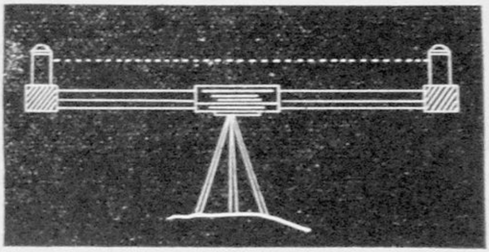


Σχ. 283.

ἄμεσον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μέτρησιν γωνιῶν. α') Κατασκευάζομεν ὡς ἀνωτέρω (§ 422) γωνίαν τινὰ ἴσην τῇ Α καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς ὁρίζομεν τμῆμα αβ ἀπεικονίζον ὑπὸ τὴν ὁρισθεῖσαν κλίμακα τὴν πλευρὰν ΑΒ. Μὲ κορυφὴν β καὶ πλευρὰν αβ κατασκευάζομεν γωνίαν δ ἴσην τῇ Β καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ὁρίζομεν τμῆμα δγ ἀπεικονίζον ὑπὸ τὴν ὁρισθεῖσαν κλίμακα τὴν ΒΓ. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες κατασκευάζομεν τὸ εὐθ. σχῆμα αβγδε προφανῶς ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ.

β') Χαράσσομεν δι' ἀκοντίων καὶ μετροῦμεν πρῶτον μίαν βάσιν συνήθως τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΔΒ καὶ εἶτα τὰς ἀποστάσεις ΑΖ, ΓΗ, ΕΘ τῶν ἄλλων κορυφῶν ἀπὸ ταύτης, μετροῦμεν δὲ καὶ τὰς ἀποστάσεις ΑΖ, ΓΗ, ΕΘ.

Ἀνάγοντες ἔπειτα τὰς μετρηθείσας ταύτας ἀποστάσεις ὑπὸ τὴν ὁρισθεῖσαν κλίμακα χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τμῆμα δδ ἀντίστοιχον πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τὰ σημεῖα ζ, η, θ ἀντίστοιχα τῶν ποδῶν Ζ, Η, Θ. Ὑψοῦμεν ἔπειτα ἐκ τῶν ζ, η, θ καθέ-



Σχ. 284.

τους ἐπὶ τὴν δδ καὶ ἑκάστην κατὰ τὴν προσήκουσαν φορὰν καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀπὸ τῶν ποδῶν ἀρχόμενοι ὁρίζομεν τμήματα ζα, ηγ, θε ἀντίστοιχα πρὸς τὰ ΑΖ, ΓΗ, ΕΘ. Τὸ εὐθ. σχῆμα αβγδε εἶναι τὸ ζητούμενον διάγραμμα τοῦ ΑΒΓΔΕ ὑπὸ τὴν ὁρισθεῖσαν κλίμακα.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ πρὸς ἀπεικόνισιν σχῆμα εἶναι τρίγωνον, ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.

§ 424. Ἀπεικόνισις κύκλου.—*Κυκλικὸν γήπεδον ἀπεικονίζεται διὰ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.*

ΣΗΜ. Καὶ τυχὸν κυκλικὸς τομεὺς ἀπεικονίζεται διὰ κυκλικοῦ τομέως ἴσης γωνίας καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

§ 425. Χωροστάθμησις ἐδαφικῆς περιοχῆς.— Τὸ διάγραμμα περιοχῆς τινος οὐδεμίαν παρέχει ἰδέαν τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ ἐδάφους τῆς περιοχῆς ταύτης.

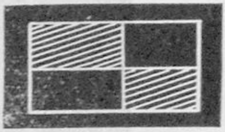
Τοιαύτην ἰδέαν λαμβάνομεν, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν κυριωτέρων τουλάχιστον σημείων αὐτῆς ἀπὸ ὡρισμένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Συνήθως ὡς τοιοῦτον ἐπίπεδον λαμβάνεται τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλεῖται *στάθμη* τῆς θαλάσσης. Ἡ δὲ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ τῆς στάθμης τῆς θαλάσσης καλεῖται ὕψος τοῦ σημείου τούτου. Ἐὰν μ καὶ μ′ εἶναι τὰ ὕψη δύο σημείων Α καὶ Β ($\mu' > \mu$), ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν τούτων εἶναι ἡ κατακόρυφος αὐτῶν ἀπόστασις δ.

Ἐπειδὴ δὲ $\mu' = \mu + \delta$, ἕπεται ὅτι τὸ ὕψος μ′ ὁρίζεται ἐκ τοῦ μ. ἂν μετρηθῇ ἡ κατακόρυφος αὐτῶν ἀπόστασις δ.

Ἡ μέτρησις τῶν κατακορύφων ἀποστάσεων τῶν σημείων ἐδαφικῆς περιοχῆς ἀπὸ ὡρισμένου σημείου καλεῖται *χωροστάθμησις* τῆς περιοχῆς ταύτης. Ἡ χωροστάθμησις γίνεται τῇ βοηθείᾳ διαφόρων ὀργάνων, ὧν ἁπλούστερα καὶ ἐν συνήθει χρήσει εἶναι ἡ ὑδροχωροστάθμη καὶ οἱ στοχοφόροι κανόνες.

§ 426. Ὑδροχωροστάθμη.—Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ μεταλλικοῦ σωλῆνος μήκους ἑνὸς μέτρου περίπου καὶ διαμέτρου 0,05 μ. Οὗτος κάμπτεται κατ᾽ ὀρθὴν γωνίαν κατ᾽ ἀμφότερα τὰ ἄκρα, ἐντὸς τῶν ὁποίων κοχλιοῦνται ἰσοπαχεῖς ὑάλινοι καὶ ἀπύθμενοι κύλινδροι. Τὸ ὄργανον στηρίζεται ἐπὶ τρίποδος καὶ δύναται νὰ στρέφηται ἐλευθέρως ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ. Χύνεται δὲ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ μέχρι τοῦ μέσου τῶν κυλίνδρων ὕδωρ χρωματισμένον, ὅπως καθίσταται καταφανὴς ἡ θέσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐντὸς τῶν κυλίνδρων. Ἐὰν ὁριζοντιωθῇ ὁ σωλὴν τοῦ ὀργάνου, τὸ ὕδωρ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς κυλίνδρους· ἐὰν δὲ στραφῇ οὗτος περὶ ἄξονα κατακόρυφον, τὸ ὕψος τοῦτο μένει ἀμετάβλητον.

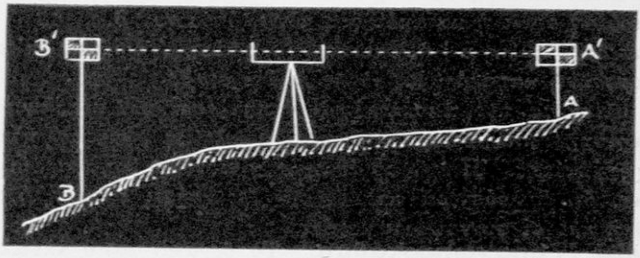
§ 427. Στοχοφόροι κανόνες.—Οὗτοι εἶναι κανόνες μήκους 2 μέτρων κυρίως διηρημένοι εἰς ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.



Σχ. 285.

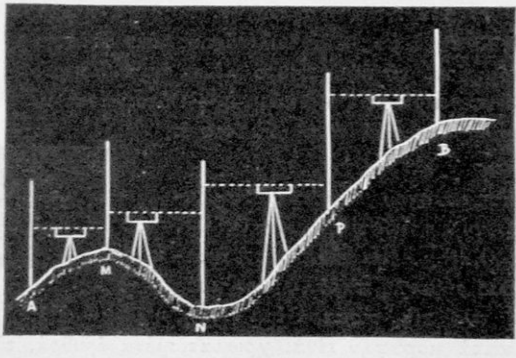
Κατὰ μῆκος ἑκάστου τούτων κινεῖται ξυλίνη πλὰξ ὀρθογώνιος μήκους 0,25—0,30μ. καὶ πλάτους 0,20 μ. Ἡ πλὰξ αὕτη διαιρεῖται διὰ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς της εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Τούτων δύο κατὰ κορυφὴν εἶναι χρωματισμένα ἐρυθρά, τὰ δὲ ἄλλα δύο λευκά. Ἡ πλὰξ αὕτη καλεῖται *στόχος*, ἡ δὲ ἐπιμηκεστέρα γραμμὴ διαιρέσεως αὐτοῦ καλεῖται *γραμμὴ πίστεως* αὐτοῦ. Ὁ στόχος διατίθεται ἐπὶ τοῦ κανόνος οὕτως ὥστε, ὅταν ὁ κανὼν εἶναι κατακόρυφος, ἡ γραμμὴ τῆς πίστεως εἶναι ὁριζόντιος. Διὰ πιεστικοῦ δὲ κοχλίου ὁ στόχος στερεοῦται εἰς οἱανδήποτε θέσιν τοῦ κανόνος.

§ 428. Εὕρεσις τῆς κατακορύφου ἀποστάσεως δύο σημείων.—Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β *(Σχ. 286)*, ὧν ἡ μὲν ὁριζόντιος ἀπόστασις δὲν ὑπερβαίνει τὰ 50 μέτ. συνήθως, ἡ δὲ κατακόρυφος ἀπόστασις αὐτῶν δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μήκους τοῦ



Σχ. 286.

κανόνος. Πρὸς εὕρεσιν τῆς κατακορύφου ταύτης ἀποστάσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Τοποθετοῦμεν καὶ ὁριζοντιοῦμεν τὴν ὑδροχωροστάθμην μεταξὺ τῶν σημείων τούτων καὶ εἰς ἴσην περίπου ἀπ᾽ αὐτῶν ἀπόστασιν ἐν ᾧ ὁ βοηθὸς στερεοῖ εἰς τὸ Α κατακορύφως τὸν κανόνα, οὕτως ὥστε τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἔδαφος.

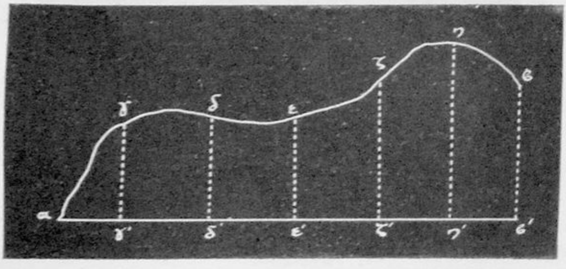


Σχ. 287.

Σκοπεύομεν εἶτα πρὸς τὸν κανόνα διὰ τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ἐντὸς τῶν κυλίνδρων ὕδατος καὶ νεύομεν καταλλήλως τὸν ὁδηγόν, ὅπως ἀνυψώσῃ ἢ καταβιβάσῃ τὸν στόχον ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ γραμμὴ τῆς πίστεως εὑρεθῇ εἰς θέσιν Α′ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν

ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὕδατος (ἐπίπεδον ὁράσεως). Ἀφ' οὗ δὲ ἀναγνώσῃ καὶ ἐκφωνήσῃ μεγαλοφώνως τὸ ὕψος ΑΑ′, ὁ βοηθὸς μεταφέρει καὶ τοποθετεῖ ὁμοίως τὸν κανόνα εἰς τὸ Β καὶ δι' ὁμοίας ἐργασίας εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ΒΒ′ ἤτοι τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ὁράσεως. Εἶναι ἤδη προφανὲς ὅτι ἡ ζητουμένη κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι ἴση πρὸς (ΒΒ′)—(ΑΑ′). Ὅταν ἡ θέσις τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι τοιαύτη ὥστε δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς προηγουμένης μεθόδου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐκλέγομεν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β σειρὰν στάσεων Μ, Ν, Ρ τοιούτων ὥστε ἡ εὕρεσις τῆς κατακορύφου ἀποστάσεως δύο διαδοχικῶν στάσεων νὰ εἶναι δυνατὴ κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον. Εὑρίσκομεν εἶτα τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν Α καὶ Μ, εἶτα τῶν Μ καὶ Ν, τῶν Ν καὶ Ρ καὶ τέλος τῶν Ρ καὶ Β, προτάσσομεν δὲ ἑκάστης τῶν ἀποστάσεων τούτων τὸ + μέν, ἂν τὸ β′ τῶν ἀντιστοίχων σημείων κεῖται ὑψηλότερον, τὸ — δὲ ἀντιθέτως. Προσθέτομεν τέλος τὰς ἀλγεβρικὰς ταύτας ἀποστάσεις καὶ λαμβάνομεν τοῦ ἀθροίσματος τὴν ἀπόλυτον τιμήν, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β. Τούτων ὑψηλότερον κεῖται τὸ Β ἢ Α, καθ' ὅσον τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Οὕτως, ἂν τὸ Μ κεῖται ὑψηλότερον τοῦ Α κατὰ 2,30μ. ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι . . +2,30μ,
ἂν τὸ Ν κεῖται χαμηλότερον τοῦ Μ κατὰ 1,20μ. ἡ
κατ. ἀπόστασις εἶναι . . . . —1,20μ,
ἂν τὸ Ρ. κεῖται ὑψηλότερον τοῦ Ν κατὰ 3,15μ. ἡ
κατ. ἀπόστασις εἶναι . . . . +3,15μ,
καὶ ἂν τὸ Β κεῖται ὑψηλότερον τοῦ Ρ κατὰ 2,80μ.
ἡ κατ. ἀπόστασις εἶναι . . . . +2,80μ,
Οὕτω τὸ Β κεῖται ὑψηλότερον τοῦ Α κατὰ . . +7,05μ.

§ 429. Ἠριθμημένα ἐπίπεδα.—Ἐὰν ἐν τῷ διαγμάμματι



Σχ. 288.

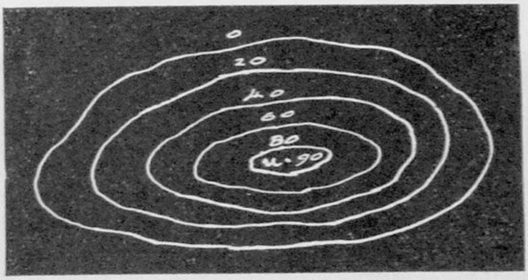
ἐδαφικῆς περιοχῆς σημειώσωμεν διὰ στιγμῶν τὴν ἀντίστοιχον θέσιν, ὅσῳ τὸ δυνατὸν περισσοτέρων σημείων αὐτῆς, παρ' ἑκάστην δὲ στιγμὴν ἀναγράψωμεν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἀπεικονιζομένου σημείου, σχηματίζομεν τὸ ἠριθμημένον ἐπίπεδον τῆς περιοχῆς. Παρατηροῦντες προσεκτικῶς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο δυνάμεθα συνεπικουρούσης καὶ τῆς φαντασίας νὰ σχηματίσωμεν ἰδέαν τοῦ πραγματικοῦ σχήματος τῆς ἀπεικονιζομένης περιοχῆς.

§ 430. Γραφικὴ παράστασις ἐδαφικῆς εὐθυγραμμίας.—Ἐὰν θέλωμεν νὰ αἰσθητοποιήσωμεν τὰς κατὰ τὴν διεύθυνσιν ὡρισμένης εὐθυγραμμίας ΑΒ ἀνωμαλίας ἐδαφικῆς περιοχῆς, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ὁρίζομεν ὅσῳ τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα Α, Γ, Δ,... Η, Β τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης καὶ μετροῦμεν τὴν ὁριζόντιον καὶ κατακόρυφον ἀπόστασιν ἑκάστου τούτων ἀπὸ τοῦ ἑπομένου. Ἀνάγομεν εἶτα ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα τὰς ἀποστάσεις ταύτας καὶ μεταφέρομεν τὰς μὲν ὁριζοντίας ἀποστάσεις αγ′, γ′δ′, δ′ε′,... η′б′ ἐπὶ εὐθείας αб′, τὰς δὲ κατακορύφους γ′γ, δ′δ, ε′ε... бб′ ἐπὶ καθέτων ἐπὶ τὴν αб′ εὐθειῶν εἰς τὰ σημεῖα γ′, δ′... б′.

Ἑνοῦντες διὰ συνεχοῦς γραμμῆς τὰ ἄκρα γ, δ, ε,... τῶν καθέτων τούτων σχηματίζομεν τὴν γραμμὴν αγδεζηб, ἥτις ἀπεικονίζει κατακόρυφον τομὴν τῆς θεωρουμένης ἐδαφικῆς περιοχῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ.

§ 431. Ἰσόσταθμοι γραμμαί.—Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐδαφικῆς περιοχῆς, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος καλεῖται *ἰσόσταθμος γραμμή*.

Ἐὰν ἀπὸ σημείου Ο βλέπωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὁράσεως τὴν γραμμὴν πίστεως εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ κανόνος, ὅταν οὗτος τοποθετεῖ-



Σχ. 289.

ται κατακορύφως εἰς σημεῖα Α, Β, Γ,... Μ ἐδαφικῆς περιοχῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰσοστάθμου ἐπιφανείας. Συνήθως, ὅταν θέλωμεν νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐν σχεδίῳ τὰς ἀνωμαλίας ἐδαφικῆς περιοχῆς καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις χαράσσομεν τὰς ἐπὶ τῆς στάθμης τῆς θαλάσσης ὁριζοντίους προβολάς, ὅσῳ τὸ δυνατὸν περισσοτέρων ἰσοστάθμων γραμμῶν αὐτῆς ἀναγράφοντες παρ' ἑκάστην καὶ τὸ ὕψος τῶν σημείων αὐτῆς. Οὕτω τὸ *(Σχ. 289)* ἀπεικονίζει βουνόν, οὗ ἡ κορυφὴ Κ ἔχει ὕψος 90 μέτ. τὸ δὲ σχῆμα τῶν ἀπεικονιζομένων ἰσοστάθμων γραμμῶν αὐτοῦ βοηθεῖ νὰ κατανοήσωμεν τὸ σχῆμα αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Ζ' βιβλίου.

671) Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ παράγεται, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

672) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κώνου, ὅστις ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος 1 μέτ, βάσιν μικρὸν κύκλον τῆς σφαίρας ταύτης καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δέκατον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

673) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρεφόμενον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

674) Κανονικὸν ἡμιεξάγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ τὴν διάμετρόν του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

675) Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχοντος δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

676) Κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

677) Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς καὶ ἔστωσαν Θ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ὅταν στρέφηται περὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, Θ' δὲ καὶ Θ'' οἱ ὄγκοι τῶν ἄλλων στερεῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\Theta'^2}+\frac{1}{\Theta''^2}=\frac{1}{\Theta^2}$.

678) Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 2 μέτ. εἶναι περιγεγραμμένος κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ ἀπέχει 6 μέτ. τοῦ κέντρου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ σφαῖρα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ κύκλου ἐπαφῆς.

679) Δοχεῖον ἔχον σχῆμα κολ. κώνου ἔχει ὄγκον 1,04272 κ.μ. βάθος 1 μέτ. καὶ ἀκτῖνα μικροτέρας βάσεως 0,40 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ.

680) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α.

681) Πᾶν σημεῖον τοῦ τόξου ὅπερ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν δύο τόξων μεγ. κύκλων ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.

682) Πᾶν σημεῖον ἀτράκτου κείμενον ἐκτὸς τοῦ διχοτομοῦντος τὴν γωνίαν αὐτοῦ τόξου ἀπέχει ἄνισον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.

683) Τὰ τόξα μεγ. κύκλων, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦσι τὰς γωνίας σφ. τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

684) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφ. τριγώνου ΑΒΓ, ἂν
$A=80^{\circ}15'$ $B=68^{\circ}40'$, $\Gamma=90^{\circ}25'$, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 2 μέτ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἀνύσματα.

§ 432. Ὁρισμός, στοιχεῖα καὶ εἴδη ἀνυσμάτων. Κινητὸν σημεῖον ἐπὶ εὐθείας χ΄χ *(Σχ. 290)* κινούμενον μεταβαίνει ἔκ τινος

Σχ. 290.

σημείου Α εἰς ἄλλο Β αὐτῆς γράφον τὸν δρόμον ΑΒ, ὃν καλοῦμεν *ἄνυσμα*. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α, τέλος τὸ σημεῖον Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἤτοι τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ. Ἐὰν τὸ κινητὸν μετέβαινεν ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Α πάντοτε ἐπὶ τῆς χ΄χ κινούμενον, θὰ διέγραφεν ἄλλο ἄνυσμα, τὸ ΒΑ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Β, τέλος Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὥστε:

Ἄνυσμα καλεῖται τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον νοεῖται διαγραφὲν ὑπὸ σημείου κινουμένου ἐπ' αὐτῆς κατά τινα φοράν.

Εἰς ἕκαστον ἄνυσμα διακρίνομεν κατὰ τὰ προειρημένα ἀρχήν, τέλος καὶ φοράν· ὅταν δὲ ὀνομάζομεν ἕκαστον ἄνυσμα προτάσσομεν τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς. Συνήθως δὲ ὑπεράνω τῶν γραμμάτων τούτων χαράσσομεν ὁριζόντιον εὐθ. τμῆμα. Οὕτω τὸ σύμβολον $\overline{\text{ΑΒ}}$ δηλοῖ τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν Α, τέλος Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

Τὰ ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, καλοῦνται *ὁμόρροπα*, μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, *ἀντίρροπα* δέ, ἂν ἔχωσι ἀντίθετον φοράν. Οὕτω τὰ ἀνύσματα $\overline{\text{ΑΒ}}$ καὶ $\overline{\text{ΓΔ}}$ *(Σχ. 290)* εἶναι ὁμόρροπα, τὰ δὲ $\overline{\text{ΑΒ}}$ καὶ $\overline{\text{ΔΓ}}$ εἶναι ἀντίρροπα ἀνύσματα. Συνήθως τὰ ἀντίρροπα ἀνύσματα, ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἄκρα καλοῦνται *ἀντίθετα* ἀνύσματα. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι τὰ $\overline{\text{ΑΒ}}$ καὶ $\overline{\text{ΒΑ}}$ *(Σχ. 290)*.

Ἐὰν δύο ἀνύσματα εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ὁμορρόπως* ἴσα· ἐὰν δὲ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἐφαρμόσιμα, καλοῦνται *ἀντιρρόπως* ἴσα.

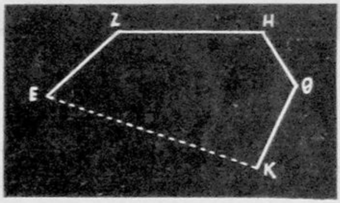
§ 433. Μῆκος ἀνύσματος.—*Καλεῖται μῆκος ἀνύσματος ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἀνυσμάτων.*

Ἂν π. χ. τὸ ἄνυσμα $\overline{O\Theta}$ εὐθείας χ΄χ ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων, μῆκος τυχόντος ἀνύσματος $\overline{\Gamma\Delta}$ τῆς αὐτῆς ἢ ἄλλης παραλλήλου ταύτῃ εὐθείας εἶναι ὁ λόγος $\dfrac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{O\Theta}}$. Σημειοῦμεν δὲ συντόμως τὸ μῆκος τοῦτο οὕτω $(\overline{\Gamma\Delta})$. Κατὰ συνθήκην τὸ μῆκος ἀνύσματος θεωρεῖται θετικὸν μέν, ἂν τὸ ἄνυσμα εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὴν μονάδα $\overline{O\Theta}$, ἀρνητικὸν δέ, ἂν τοῦτο εἶναι ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\overline{O\Theta}$. Εἶναι ὅθεν εὐνόητον ὅτι τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα ἔχουσιν ἴσα μήκη, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ἔχουσιν ἀντίθετα μήκη, ἂν πάντα μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Κατὰ ταῦτα $(\overline{AB})+(\overline{BA})=0$.

Τὰ ὁμόρροπα τῇ μονάδι $\overline{O\Theta}$ ἀνύσματα καλοῦνται *θετικὰ ἀνύσματα* καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται *θετικὴ φορά*· τὰ δὲ ἀντίρροπα τῇ μονάδι ταύτῃ καλοῦνται ἀρνητικὰ ἀνύσματα καὶ ἡ φορὰ αὐτῶν καλεῖται *ἀρνητικὴ φορά*.

§ 434. Ἄξων. — *Πᾶσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς εἶναι ὡρισμένη ἡ θετικὴ κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, καλεῖται ἄξων.*

Τὸ ἄνυσμα $\overline{O\Theta}$ ἄξονός τινος χ΄χ, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἀνυσμάτων καὶ δι' οὗ ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορὰ ἐπ' αὐτοῦ, καλεῖται *διευθῦνον ἄνυσμα* τοῦ ἄξονος τούτου καὶ παντὸς ἄλλου παραλλήλου αὐτῷ. Ἡ ἀρχὴ Ο τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ἄξονός τινος διαιρεῖ αὐτὸν εἰς δύο μέρη ἀπέραντα κοινὴν ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Ο. Ἐκ τούτων τὸ μὲν περιέχον τὸ διευθῦνον ἄνυσμα $\overline{O\Theta}$ καλεῖται *θετικὸς ἡμιάξων*, τὸ δὲ ἕτερον *ἀρνητικὸς ἡμιάξων*. Οὕτω Οχ *(Σχ. 290)* εἶναι ὁ θετικὸς ἡμιάξων καὶ Οχ΄ ὁ ἀρνητικὸς ἡμιάξων τοῦ ἄξονος χ΄χ.



Σχ. 291.

§ 435. Διαδοχικὰ ἀνύσματα. — *Δύο ἢ πλείονα ἀνύσματα λέγονται διαδοχικά, ἂν ἀρχὴ ἑκάστου (πλὴν τοῦ α΄) εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.*

Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ *(Σχ. 290)* καὶ τὰ $\overline{EZ}$, $\overline{ZH}$, $\overline{H\Theta}$, $\overline{\Theta K}$ *(Σχ. 291)*.

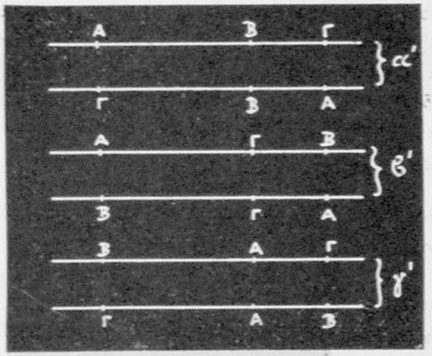
Συνισταμένη ἢ γεωμετρικὸν ἄθροισμα διαδοχικῶν ἀνυσμάτων καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ α΄, τέλος δὲ τὸ τέλος τοῦ τελευταίου.

Οὕτω τῶν $\overline{EZ}$, $\overline{ZH}$, $\overline{H\Theta}$, $\overline{\Theta K}$ συνισταμένη εἶναι τὸ $\overline{EK}$.

§ 436. Σχέσις τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων

τοῦ αὐτοῦ ἄξονος πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

Ἔστωσαν δύο διαδοχικὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$ (*Σχ. 292*) ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κείμενα ἄξονος. Ἐὰν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ (*Σχ. 292α′*) τὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{A\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $(\overline{AB})$, $(\overline{B\Gamma})$, $(\overline{A\Gamma})$ εἶναι ὁμόσημοι, ἀληθεύει ἄρα προφανῶς ἡ ἰσότης $(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})=(\overline{A\Gamma})$ (1).



Σχ. 292.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (*Σχ. 292 β′*) ἀληθεύει ἡ ἰσότης $(\overline{A\Gamma})+(\overline{\Gamma B})=(\overline{AB})$. Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς $(\overline{B\Gamma})$ καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\overline{B\Gamma})+(\overline{\Gamma B})=0$ (§ 433), προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ρηθεῖσα ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν ἄλλων (*Σχ. 292 γ′*).

Ἄρα: *Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.*

§ 437. Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ παραλλήλων ἀνυσμάτων. — Δύο ἀνύσματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ κείμενα ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων χ′χ καὶ ψ′ψ εἶναι προφανῶς παράλληλα. Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ψ′ψ διὰ παραλλήλου μεταθέσεως πλησιάζῃ ἀπαύστως πρὸς τὸν χ′χ, τὸ $\overline{\Gamma\Delta}$ εἰς πᾶσαν θέσιν του εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $\overline{AB}$ καὶ ὅταν ἔτι ὁ ψ′ψ εὑρίσκηται ἐγγύτατα τοῦ χ′χ. Ἕνεκα τούτου δεχόμεθα ὅτι τοῦτο εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $\overline{AB}$, καὶ ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων τούτων μηδενισθῇ, ὅτε κυρίως τὰ ἀνύσματα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος. Ὥστε: *Δύο ἢ πλείονα ἀνύσματα λέγονται παράλληλα, ἐὰν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων.*

Προβολικαὶ ἰδιότητες ἀνυσμάτων.

§ 438. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα. — *Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον.* Ὀρθὴ *δὲ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν προβολὴν τῆς ἀρχῆς, τέλος δὲ τὴν προβολὴν τοῦ τέλους αὐτοῦ.*

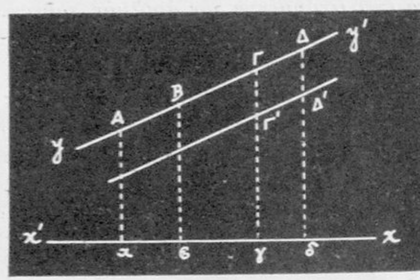
Οὕτω τοῦ $\overline{AB}$ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ $\overline{\alpha\beta}$ *(Σχ. 293).*

ΣΗΜ. Τὴν ὀρθὴν προβολὴν θὰ καλῶμεν ἐν τοῖς ἀκολούθοις ἁπλῶς προβολήν.

§ 439. Θεώρημα I.—*Ὁ λόγος δύο παραλλήλων ἀνυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.*

Ἔστωσαν $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ ἢ $\overline{\Gamma'\Delta'}$ δύο παράλληλα ἀνύσματα κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ψ΄ψ ἢ ἐπὶ παραλλήλων ἀξόνων. Ἔστω δὲ $\overline{\alpha\beta}$ ἡ ἐπὶ ἄξονα χ΄χ προβολὴ τοῦ AB καὶ $\overline{\gamma\delta}$ ἡ προβολὴ τοῦ ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄. Λέγω ὅτι $\overline{AB}:\overline{\Gamma\Delta}=\overline{\alpha\beta}:\overline{\gamma\delta}$ καὶ $\overline{AB}:\overline{\Gamma'\Delta'}=\overline{\alpha\beta}:\overline{\gamma\delta}$.

Ἀπόδειξις. α΄) Αἱ εὐθεῖαι χ΄χ καὶ ψ΄ψ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Ββ, Γγ, Δδ, ἄρα εἶναι $AB:\Gamma\Delta=\alpha\beta:\gamma\delta$ (1)



Σχ. 293.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, καθ' ὅσον καὶ τὰ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι τοιαῦτα, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$, $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$, ἤτοι $\overline{AB}:\overline{\Gamma\Delta}=\overline{\alpha\beta}:\overline{\gamma\delta}$. ὅ.ἔ.δ.

β΄) Ἐὰν αἱ προβάλλουσαι Γ΄γ, Δ΄δ τῶν ἄκρων τοῦ $\overline{\Gamma'\Delta'}$ τέμνωσι τὸν ἄξονα ψ΄ψ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, θὰ εἶναι $\overline{AB}:\overline{\Gamma\Delta}=\overline{\alpha\beta}:\overline{\gamma\delta}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\overline{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ $\overline{\Gamma\Delta}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\overline{AB}:\overline{\Gamma'\Delta'}=\overline{\alpha\beta}:\overline{\gamma\delta}$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I.—*Τῶν ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων ἀνυσμάτων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.*

Περὶ συντεταγμένων.

§ 440. Ὁρισμὸς σημείου ἐπὶ ἄξονος, τετμημένη σημείου.—Ἔστω χ΄χ τυχὸν ἄξων, $\overline{O\Theta}$ τὸ διευθῦνον ἄνυσμα αὐτοῦ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος τούτου. Τὸ μῆκος $(\overline{OM})=\dfrac{\overline{OM}}{\overline{O\Theta}}$ τοῦ ἀνύσματος $\overline{OM}$ καλεῖται *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ. Γενικῶς: *Τετμημένη* *δοθέντος σημείου ἄξονος καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος τοῦ ἄξονος τούτου, τέλος δὲ τὸ δοθὲν τοῦτο σημεῖον.* Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ τετμημένη σημείου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος Οχ ἢ ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ Οχ'. Ἡ ἀρχὴ Ο τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος ἔχει τετμημένην μηδέν.

Κατὰ ταῦτα. *Εἰς ἕκαστον σημεῖον δοθέντος ἄξονος χ'χ ἀντιστοιχεῖ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς* (ἡ τετμημημένη τοῦ σημείου τούτου).

Ἀντιστρόφως: Ἔστω πραγματικὸς ἀριθμὸς π.χ. ὁ 4. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ'χ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ο ἄνυσμα $\overline{OM}$ ἔχον μῆκος 4, τὸ ἄκρον Μ αὐτοῦ ἔχει τετμημένην 4. Ὥστε: *Εἰς πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σημεῖον τοῦ ἄξονος τούτου, ὅπερ ἔχει τετμημένην τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Διὰ τῆς τετμημένης ἄρα σημείου ὁρίζεται τελείως ἡ θέσις αὐτοῦ ἐπὶ δοθέντος ἄξονος.

Ἡ ἀρχὴ Ο τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος καλεῖται καὶ *ἀρχὴ τῶν τετμημένων*, ὁ δὲ ἄξων χ'χ καλεῖται *ἄξων τῶν τετμημένων*. Συνήθως τὴν ἄγνωστον τετμημένην σημείου παριστῶμεν διὰ τοῦ χ.

Ἀσκήσεις. Ἐπὶ δοθέντος ἄξονος τετμημένων νὰ ὁρισθῇ.

685) Τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει $\chi=3$ καὶ τὸ ἔχον $\chi=-4$.

686) Τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει $\chi=2\frac{1}{2}$, τὸ πρὸς τὴν ἀρχὴν συμμετρικὸν αὐτοῦ καὶ ἡ τετμημένη τούτου.

687) Τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει $\chi=-\frac{3}{4}$.

Ἐφαρμογαί.

§ 441. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ ὁρισθῇ τὸ μῆκος ἀνύσματος συναρτήσει τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.*

Σχ. 294.

Λύσις. Ἔστω χ_1 ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς Α καὶ χ_2 ἡ τετμημένη τοῦ τέλους Β ἀνύσματος $\overline{AB}$.

Ἐπειδὴ (§ 436) εἶναι: $(\overline{OA})+(\overline{AB})=(\overline{OB})$ ἢ $\chi_1+(\overline{AB})=\chi_2$, ἕπεται ὅτι:

$$(\overline{AB})=\chi_2-\chi_1. \qquad (1)$$

§ 442. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη χ τοῦ μέσου*

M ἀνύσματος AB ἐκ τῶν τετμημένων χ_1 *καὶ* χ_2 *τῶν ἄκρων αὐτοῦ.*

Λύσις. Ἐπειδὴ (§ 441) εἶναι $(\overline{AM})=\chi-\chi_1$, $(\overline{MB})=\chi_2-\chi$ καὶ $(\overline{AM})=(\overline{MB})$ ἕπεται ὅτι $\chi-\chi_1=\chi_2-\chi$ ὅθεν $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$. (2)

Ἀσκήσεις. 688) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ἀνύσματος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ἀρχὴ ἔχει τετμημένην 3, τὸ δὲ τέλος 7 καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων.

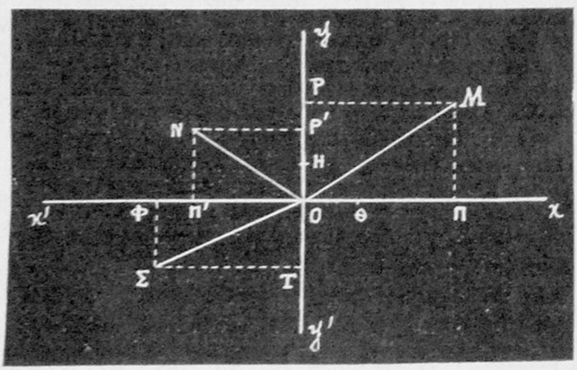
689) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ἀνύσματος, οὗ ἡ μὲν ἀρχὴ ἔχει τετμημένην 2, τὸ δὲ τέλος —4.

690) Ἄνυσμα ἔχει ἀρχὴν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Θ *(Σχ. 294)* πρὸς τὸ Ο καὶ μῆκος 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη τοῦ τέλους καὶ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

691) Ἄνυσμα ἔχει μῆκος —2 καὶ τέλος τὸ σημεῖον Θ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ ἀρχὴ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ μέσου αὐτοῦ.

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐν ἐπιπέδῳ.

§ 443. Ἄξονες συντεταγμένων.—Ἔστωσαν χ′χ, ψ′ψ δύο ἄξονες τεμνόμενοι καθέτως (ὀρθογώνιοι) εἰς τὸ Ο καὶ ἔχοντες διευ-



Σχ. 295.

θύνοντα ἀνύσματα ΟΘ, ΟΗ ἐφαρμόσιμα. Ὁ ἄξων χ′χ, οὗ ὁ θετικὸς ἡμιάξων Οχ στρεφόμενος περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν συναντᾷ ἐκ τῶν ἄλλων ἡμιαξόνων πρῶτον τὸν θετικὸν ἡμιάξονα Οψ, καλεῖται *ἄξων τῶν τετμημένων*, ὁ δὲ ἄλλος ἄξων ψ′ψ καλεῖται *ἄξων τῶν τεταγμένων* καὶ ἀμφότεροι λέγονται *ἄξονες τῶν συντεταγμένων*. Ἡ γωνία χΟψ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων καλεῖται πρώτη γωνία, αἱ δὲ ἄλλαι κατὰ σειρὰν καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καλοῦνται δευτέρα (ἡ ψΟχ′), τρίτη (ψ′Οχ′) καὶ τετάρτη (ψ′Οχ) γωνία τῶν ἀξόνων.

§ 444. Εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι σημείου.—Ἔστωσαν χ′χ καὶ ψ′ψ δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες συντεταγμένων καὶ $\overline{ΟΘ}$, $\overline{ΟΗ}$ τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα αὐτῶν *(Σχ. 295)*. Ἡ τομὴ Ο τῶν ἀξόνων τούτων καὶ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ὁρίζουσι τὸ ἄνυσμα $\overline{ΟΜ}$, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα* ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ Μ. Τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος $\overline{ΟΜ}$ προβολὴ ἐπὶ μὲν τὸν ἄξονα χ′χ εἶναι τὸ $\overline{ΟΠ}$, ἐπὶ δὲ τὸν ψ′ψ τὸ $\overline{ΟΒ}$.

Τὸ μῆκος $(\overline{ΟΠ}) = \dfrac{\overline{ΟΠ}}{\overline{ΟΘ}}$ καλεῖται τετμημένη τοῦ Μ, τὸ δὲ μῆκος

$(\overline{ΟΡ}) = \dfrac{\overline{ΟΡ}}{\overline{ΟΗ}}$ καλεῖται *τεταγμένη* τοῦ Μ. Γενικῶς : *Τετμημένη σημείου καλεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων προβολῆς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.*

Τεταγμένη δὲ σημείου καλεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων προβολῆς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος.

Ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη σημείου καλοῦνται ὁμοῦ *εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι* (¹) ἢ ἁπλῶς *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου τούτου.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο καλεῖται *ἀρχὴ* τῶν συντεταγμένων.

Ἑκατέρα τῶν συντεταγμένων σημείου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ᾿ ὅσον αὕτη εἶναι μῆκος θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ ἀνύσματος. Οὕτω τῶν σημείων τῆς α′ γωνίας ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι θετικαί, τῶν τῆς β′ γωνίας ἡ τετμημένη εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἡ τεταγμένη θετικὴ κτλ.

Πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος χ′χ ἔχει τεταγμένην μηδέν, πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ψ′ψ ἔχει τετμημένην μηδέν.

Τῆς ἀρχῆς Ο ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι μηδέν.

Κατὰ ταῦτα εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων συντεταγμένων ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ).

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν π.χ. 3 καὶ 2. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ χ′χ ἄνυσμα $\overline{ΟΠ}$ ἔχον μῆκος 3 καὶ ἐπὶ τοῦ ψ′ψ ἄνυσμα $\overline{ΟΡ}$ ἔχον μῆκος 2. Ἂν κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΠΜΡ, ὅπερ ἔχει διαστάσεις τὰ ἀνύσματα $\overline{ΟΠ}$ καὶ $\overline{ΟΡ}$, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κορυφὴ Μ αὐτοῦ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 2. Εἰς πᾶν λοιπὸν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον, ὅπερ ὁρίζεται τελείως καὶ ἔχει συντεταγμένας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ὥστε : *Διὰ τῶν συντεταγμένων σημείου ὁρίζεται τελείως ἡ θέσις αὐτοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἀξόνων συντεταγμένων.*

Κατὰ συνθήκην, ὅταν ὁρίζωμεν τὰς συντεταγμένας σημείου, προ-

(¹) Αὗται λέγονται καὶ Καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι, διότι πρῶτος τῷ 1673 μ.Χ. ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς καὶ Φιλόσοφος Καρτέσιος (Descarttes) ὑπέδειξε τὴν χρῆσιν αὐτῶν.

τάσομεν τὴν τετμημένην καὶ εἶτα τὴν τεταγμένην. Ἵνα δὲ δηλώσωμεν ὅτι σημεῖόν τι Α ἔχει τετμημένην 2 καὶ τεταγμένην 5, γράφομεν τὸ σύμβολον Α (2,5) καὶ ἀναγινώσκομεν: τὸ σημεῖον Α δύο, πέντε. Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι εἶναι ἄγνωστοι, παριστῶμεν τὴν μὲν τετμημένην διὰ τοῦ χ τὴν δὲ τεταγμένην διὰ τοῦ ψ. Διὰ τοῦτο ὁ ἄξων τῶν τετμημένων λέγεται καὶ ἄξων τῶν χ, ὁ δὲ τῶν τεταγμένων λέγεται καὶ ἄξων τῶν ψ.

Ἀσκήσεις. Δοθέντων δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων συντεταγμένων νὰ ὁρισθῇ:

692) Τὸ σημεῖον (2,—3) καὶ τὸ (—2, 4).

693) Τὸ σημεῖον (0,4) καὶ τὸ (—3, 0).

694) Τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ πρὸς τὴν ἀρχὴν συμμετρικοῦ τοῦ σημείου (—2, 3);

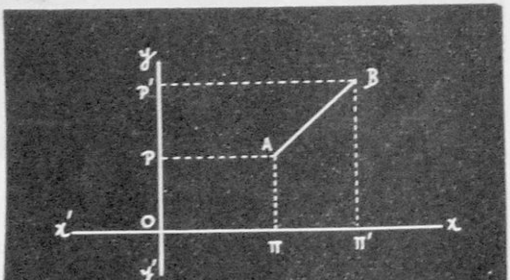
695) Τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ πρὸς τὸν ἄξονα χ΄χ συμμετρικοῦ τοῦ σημείου (3,2);

696) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς διχοτομούσης τὴν πρώτην καὶ τρίτην γωνίαν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

697) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς διχοτομούσης τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην γωνίαν εἶναι ἀντίθετοι.

Συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος.

§ 445. Ὁρισμὸς τῶν συντεταγμένων προβολῶν ἀνύσματος.—Αἱ προβολαὶ ἀνύσματος ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καλοῦνται *συντεταγμέναι προβολαὶ* αὐτοῦ.



Σχ. 296.

Ἰδιαιτέρως δὲ ἡ μὲν ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χ προβολὴ καλεῖται *τετμημένη προβολή*, ἡ δὲ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ *τεταγμένη προβολὴ* τοῦ ἀνύσματος τούτου. Οὕτω τοῦ $\overline{AB}$ *(Σχ. 296)* τετμημένη προβολὴ εἶναι τὸ $\overline{\Pi\Pi'}$, τεταγμένη δὲ προβολὴ τὸ $\overline{PP'}$.

§ 446. Μήκη τῶν συντεταγμένων προβολῶν ἀνύσματος. — Ἔστω τὸ ἄνυσμα $\overline{AB}$ *(Σχ. 296)*, οὗ ἀρχὴ μὲν εἶναι τὸ $A(\chi_1, \psi_1)$ τέλος δὲ τὸ $B(\chi_2, \psi_2)$ καὶ συντεταγμέναι προβολαὶ $\overline{\Pi\Pi'}$ καὶ $\overline{PP'}$. Ἐπειδὴ $(\overline{O\Pi}) + (\overline{\Pi\Pi'}) = (\overline{O\Pi'})$, $(\overline{OP}) + (\overline{PP'}) = (\overline{OP'})$ ἢ $\chi_1 + (\overline{\Pi\Pi'}) = \chi_2$, $\psi_1 + (\overline{PP'}) = \psi_2$ ἕπεται ὅτι

$$(\overline{\Pi\Pi'}) = \chi_2 - \chi_1 \quad \text{καὶ} \quad (\overline{PP'}) = \psi_2 - \psi_1. \qquad (3)$$

Ἀσκήσεις. 698) Ἄνυσμα ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α (3, 5) καὶ τέλος τὸ Β (—2, 3). Νὰ γραφῇ τοῦτο καὶ νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων προβολῶν αὐτοῦ.

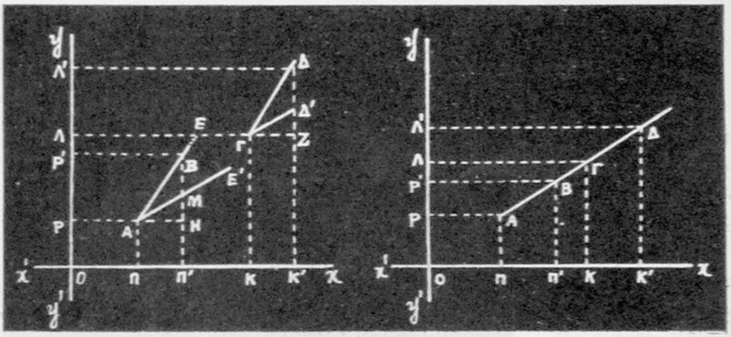
699) Ἄνυσμα ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Γ (3,—2), τετμημένην προβολὴν μήκους 2 καὶ τεταγμένην προβολὴν μήκους 3. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τέλους Δ καὶ νὰ γραφῇ τὸ ἄνυσμα τοῦτο.

700) Νὰ ὁρισθῶσιν ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν α' καὶ γ' γωνίαν δύο σημεῖα Α, Β ἔχοντα τετμημένας ἀντιστοίχως 2 καὶ —2 καὶ νὰ ὁρισθῶσι τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων προβολῶν τοῦ ΑΒ.

701) Ἄνυσμα ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον (—3, 3) καὶ πέρας τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Νὰ γραφῇ τὸ ἄνυσμα τοῦτο καὶ νὰ ὁρισθῶσι τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων προβολῶν αὐτοῦ.

§ 447. Θεώρημα Ι.—*Ἐὰν δύο ἀνύσματα εἶναι παράλληλα, αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ ἑκατέρου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας προβολὰς τοῦ ἄλλου. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστωσαν $\overline{\mathrm{AB}}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ δύο ἀνύσματα παράλληλα, $\overline{\Pi\Pi'}$, $\overline{\mathrm{KK'}}$ αἱ τε-



Σχ. 297.

τμημέναι προβολαὶ καὶ $\overline{\mathrm{PP'}}$, $\overline{\Lambda\Lambda'}$ αἱ τεταγμέναι προβολαὶ αὐτῶν. Λέγω ὅτι $\overline{\mathrm{PP'}} : \overline{\Lambda\Lambda'} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν (§ 439) ὅτι $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}$ καὶ $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\mathrm{PP'}} : \overline{\Lambda\Lambda'}$. Ἄρα $\overline{\mathrm{PP'}} : \overline{\Lambda\Lambda'} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}$. ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\overline{\mathrm{PP'}} : \overline{\Lambda\Lambda'} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}$, τὰ $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι παράλληλα. Τῷ ὄντι· ἐὰν κληθῶσιν Η καὶ Ζ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ προβάλλουσαι ΡΑ, ΛΓ τέμνουσιν ἀντιστοίχως τὰς ΒΠ, ΔΚ', τὰ ἀνύσματα ΗΒ καὶ ΡΡ' εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὰ $\overline{\mathrm{Z}\Delta}$ καὶ $\overline{\Lambda\Lambda'}$ ἐπίσης ἴσα. Ἡ καθ᾽ ὑπόθεσιν ἄρα ἀληθεύουσα ἰσότης γίνεται

$$\overline{\mathrm{HB}} : \overline{\mathrm{Z}\Delta} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ τὸ ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ $\overline{\mathrm{AB}}$ ἀγόμενον παράλληλον ἄνυσμα ἔτεμνε τὴν Κ'Δ εἴς τι σημεῖον Δ', θὰ ἦτο $\overline{\mathrm{HB}} : \overline{\mathrm{Z}\Delta'} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{\mathrm{KK'}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα $\overline{\mathrm{Z}\Delta}$, $\overline{\mathrm{Z}\Delta'}$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα· τὰ σημεῖα ἄρα Δ καὶ Δ' συμπίπτουσι καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι παράλληλον τῷ $\overline{\mathrm{AB}}$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα Ι.—*Ἐὰν ἀνύσματα εἶναι παράλληλα, ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην προβολὴν εἶναι δι' ὅλα ὁ αὐτός.*

§ 448. Συντελεστὴς κατευθύνσεως ἀνύσματος καὶ εὐθείας.—*Ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην προβολὴν ἀνύσματος καλεῖται συντελεστὴς κατευθύνσεως τοῦ ἀνύσματος τούτου καὶ τῆς περιεχούσης αὐτὸ εὐθείας.*

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸ προηγούμενον πόρισμα ἐννοοῦμεν ὅτι: *Παράλληλα ἀνύσματα ἢ εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως.* Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο ἀνύσματα AB καὶ ΓΔ* (ἢ εὐθεῖαι) *ἔχουσι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως, τὰ ἀνύσματα ταῦτα* (ἢ αἱ εὐθεῖαι) *εἶναι παράλληλοι.* Τῷ ὄντι· ἐκ τῆς ἀναλογίας $\overline{PP'} : \overline{\Pi\Pi'} = \overline{\Lambda\Lambda'} : \overline{KK'}$ *(Σχ. 297)* ἕπεται ἡ ἀναλογία $\overline{PP'} : \overline{\Lambda\Lambda'} = \overline{\Pi\Pi'} : \overline{KK'}$, ὅθεν συμπεραίνομεν (§ 447 ἀντ.) ὅτι τὰ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι παράλληλα.

Συνήθως τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως ἀνύσματος ἢ εὐθείας σημειοῦμεν διὰ τοῦ λ. Ἂν δὲ ἀρχὴ ἀνύσματος εἶναι τὸ σημεῖον A (χ_1, ψ_1) καὶ τέλος τὸ B (χ_2, ψ_2), θὰ εἶναι (§ 446) $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$. (1).

Ἐὰν δὲ M (χ, ψ) εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως λ τοῦ $\overline{OM}$ εἶναι $\lambda = \dfrac{\psi}{\chi}$. (2)

Ἀσκήσεις. 702) Νὰ γραφῇ ἄνυσμα ἔχον συντεταγμένας προβολὰς τὰ ἀντίστοιχα διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως αὐτοῦ;

703) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον (3,0) καὶ ἔχουσα συντελεστὴν κατευθύνσεως ἴσον πρὸς τὸν τοῦ ἀνύσματος τῆς ἀσκ. (702).

704) Ἂν $\overline{O\Theta}$, $\overline{OH}$ εἶναι τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων χ'χ, ψ'ψ, νὰ γραφῇ ἄνυσμα ἔχον τετμημένην προβολὴν $(\overline{\Theta\Pi}) = 5$ καὶ τεταγμένην προβολὴν $(\overline{HP}) = 3$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως αὐτοῦ καὶ νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ἀρχῆς εὐθεῖα ἔχουσα τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως.

705) Ἂν $\overline{O\Theta}$, $\overline{OH}$ εἶναι τὰ διευθύνοντα ἀνύσματα τῶν ἀξόνων χ'χ, ψ'ψ, ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ΘΗ;

706) Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ἀρχῆς εὐθεῖα ἔχουσα $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

707) Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ λ δι' ἑκατέραν τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων;

Ἐφαρμογαί.

§ 449. Πρόβλημα Ι.—*Νὰ ὁρισθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἀνύσματος συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.*

Λύσις. Ἔστω M (χ, ψ) τὸ μέσον ἀνύσματος, A (χ_1, ψ_1) ἡ ἀρχὴ καὶ B $(\chi_2\ \psi_2)$ τὸ τέλος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ τὰ AM καὶ MB εἶναι ὁμορρόπως ἴσα θὰ εἶναι (§ 439 Πόρ.) προβ. $(\overline{AM})$=προβ. $(\overline{MB})$, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ προβολικὸς ἄξων. Καὶ ἂν ληφθῇ ὡς τοιοῦτος ὁ ἄξων τῶν χ, θὰ εἶναι προβ. $(\overline{AM}) = \chi - \chi_1$, προβ. $(\overline{MB}) = \chi_2 - \chi$ καὶ ἑπομένως $\chi - \chi_1 = \chi_2 - \chi$.

Ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι $\qquad \chi = \dfrac{\chi_1 + \chi_2}{2}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\qquad \psi = \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2} \qquad (4)$

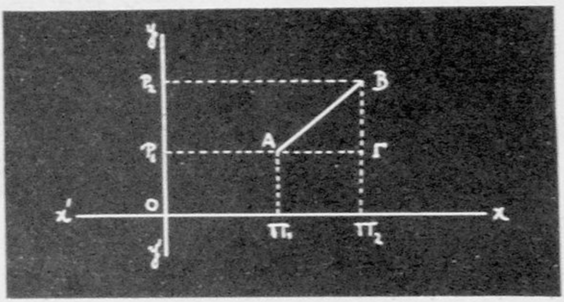
§ 450. Πρόβλημα ΙΙ.—*Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων συναρτήσει τῶν συντεταγμένων αὐτῶν.*

Λύσις. Ἔστωσαν Α (χ_1, ψ_1) καὶ Β (χ_2, ψ_2) δύο σημεῖα, ὧν ζητεῖται ἡ ἀπόστασις (ΑΒ). Ἐπειδὴ *(Σχ. 298)* εἶναι $(\overline{A\Gamma}) = (\overline{\Pi_1\Pi_2}) = \chi_2 - \chi_1$ $(\overline{\Gamma B}) = (P_1P_2) = \psi_2 - \psi_1$ ἡ προφανὴς ἰσότης $(\overline{AB})^2 = (\overline{A\Gamma})^2 + (\overline{\Gamma B})^2$ γίνεται

$$(\overline{AB})^2 = (\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2, \qquad \text{ὅθεν}$$

$$(\overline{AB}) = \sqrt{(\chi^2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}. \qquad (5)$$

Κατὰ ταῦτα ἡ ἀρχὴ Ο ἀπέχει τυχόντος σημείου Μ (χ, ψ) τοῦ



Σχ. 298.

ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων ἀπόστασιν

$$(OM = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}. \qquad (6)$$

Ἀσκήσεις. 708) Ἄνυσμα ἔχει ἀρχὴν Α (3,—4) καὶ τέλος Β (2,—5). Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου αὐτοῦ.

709) Μέσον ἀνύσματος εἶναι τὸ σημεῖον (4,—1), ἀρχὴ δὲ τὸ (3,—4). Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τέλους αὐτοῦ.

710) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ σημείου (3, 4).

711) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α (3, 5) καὶ Β (4, 7) καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου τοῦ $\overline{AB}$.

712) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α (—3, 2) καὶ Β (3,—2) καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου τοῦ $\overline{AB}$.

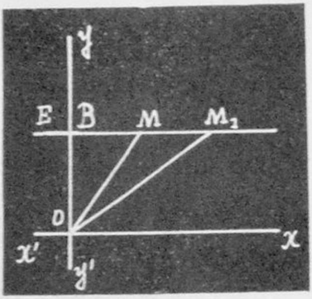
713) Σημεῖόν τι Β (4α, ψ) ἀπέχει τοῦ Α (α, α) ἀπόστασιν 5α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τεταγμένη τοῦ Β.

Ἡ εὐθεῖα γραμμή.

§ 451. Ἐξίσωσις γραμμῆς.—Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι πάντων τῶν σημείων γραμμῆς τινος καὶ μόνον αὐτῶν ταὐτοποιῶσιν ἐξίσωσίν τινα σ (χ, ψ)=0, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καλεῖται ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἀντὶ δὲ νὰ λέγωμεν : ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $\sigma(\chi,\psi)=0$, θὰ λέγωμεν ἁπλῶς ἡ γραμμὴ $\sigma(\chi, \psi)=0$.

Ἐξίσωσις εὐθείας γραμμῆς.

§ 452. Α΄. Ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. — Ἔστω εὐθεῖα Ε *(Σχ. 299)* παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τι σημεῖον Β (0, β)· ἔστω δὲ Μ (χ, ψ) τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης. Ἐπειδὴ προβολὴ τοῦ $\overline{OM}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα Οψ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΒ, ἕπεται ὅτι $\psi=\beta$. Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς $M_1(\chi_1, \psi_1)$ ταὐτοποιῶσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\beta$, θὰ εἶναι $\psi_1=\beta$. Τοῦ ἀνύσματος ἄρα OM_1 προβολὴ ἐπὶ τὸν ψ΄ψ εἶναι τὸ ἄνυσμα ΟΒ καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΒΜ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ψ΄ψ, κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς Ε. Κατὰ ταῦτα τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\beta$ ταὐτοποιοῦσιν αἱ συντεταγμέναι πάντων τῶν σημείων τῆς Ε καὶ μόνον αὐτῶν.



Σχ. 299.

Ἄρα : *Ἡ ἐξίσωσις πάσης εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ ἔχει τὴν μορφὴν $\psi=\beta$.*

Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν ψ, καθ᾽ ὅσον β εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἐὰν $\beta=0$, ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὴν ἀρχήν, ἤτοι συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν χ. Ἄρα : Ὁ ἄξων τῶν χ ἔχει ἐξίσωσιν $\psi=0$.

§ 453. Β΄. Ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. — Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι : *Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\chi=\alpha$.*

Ἡ εὐθεῖα $\chi=\alpha$ τέμνει τὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν χ, καθ᾽ ὅσον ὁ α εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἐὰν $\alpha=0$, ἡ εὐθεῖα συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν ψ. Ἤτοι : *Ὁ ἄξων τῶν ψ ἔχει ἐξίσωσιν $\chi=0$.*

Ἀσκήσεις. 714) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,2) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ ;

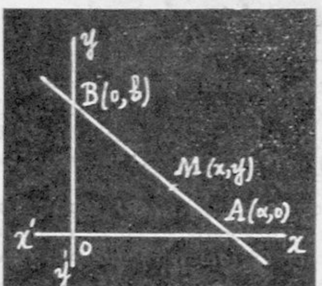
715) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0, —3) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τῶν ἄξονα τῶν χ ;

716) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς σημεῖον (4, 0) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ ;

717) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{1}{2}, 0)$ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ ;

§ 454. Γ΄. Ἐξίσωσις εὐθείας, ἥτις τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς σημεῖα διάφορα ἀλλήλων. — Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα τὸν μὲν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον Α $(\alpha, 0)$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ $B(0, \beta)$ καὶ $M(\chi, \psi)$ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης *(Σχ. 300)*. Τὰ ἀνύσματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{AM}$ ἔχουσιν ἀντιστοίχως συντελεστὰς κατευθύνσεως $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\dfrac{\psi}{\chi-\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\psi}{\chi-\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ὅθεν κατὰ σειρὰν προκύπτουσιν αἱ ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις $\dfrac{\psi}{\beta}=-\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha}$, $\dfrac{\psi}{\beta}=-\dfrac{\chi}{\alpha}+1$ καὶ $\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\psi}{\beta}=1$ (1). Ὥστε αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἐὰν δὲ αἱ συντεταγμέναι (χ_1, ψ_1) σημείου τινὸς M_1 ταὐτοποιῶσι τὴν (1) θὰ εἶναι $\dfrac{\chi_1}{\alpha}+\dfrac{\psi_1}{\beta}=1$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἰσότης.
$\dfrac{\psi_1}{\chi_1-\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἥτις ἐκφράζει ὅτι οἱ συντελεσταὶ κατευθύνσεως τῶν ἀνυσμάτων $\overline{AM_1}$ καὶ $\overline{AB}$ εἶναι ἴσοι. Εἶναι ἄρα ταῦτα παράλληλα, ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, ἕπεται ὅτι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐφ᾽ ἧς κατ᾽ ἀκολουθίαν κεῖται καὶ τὸ M_1 (χ_1, ψ_1).



Σχ. 300.

Ἄρα: Πᾶν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν (1) κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Εἶναι λοιπὸν ἡ (1) ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὥστε πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τοὺς ἄξονας εἰς σημεῖα διάφορα ἀλλήλων ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\psi}{\beta}=1$. Ὁ παρονομαστὴς α καλεῖται *τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν*, ὁ δὲ β καλεῖται *τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν* τῆς εὐθείας ταύτης· ἀμφότεροι δὲ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι γραφείσης τοιαύτης εὐθείας ὁρίζονται ἀμέσως αἱ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν συντεταγμέναι αὐτῆς καὶ ἀναγράφεται ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ὑπὸ τὴν μορφὴν (1).

ΣΗΜ. Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\beta\chi+\alpha\psi-\alpha\beta=0$, ἥτις εἶναι πρωτοβάθμιος πρὸς χ καὶ ψ.

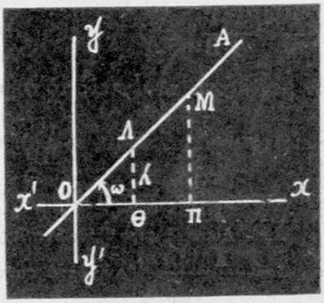
'Ασκήσεις. 718) Νὰ χαραχθῇ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 1 καὶ 2 καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.

719) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν —1 καὶ —1; Νὰ χαραχθῇ αὕτη.

620) Νὰ γραφῇ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν —2 καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.

§ 455. Δ΄. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς.—Ἔστω εὐθεῖα ΟΑ καὶ Μ(χ,ψ) τυχὸν σημεῖον αὐτῆς *(Σχ. 301)*. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἄκρου Θ τοῦ διευθύνοντος ἀνύσματος $\overline{\text{ΟΘ}}$ τοῦ ἄξονος τῶν χ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ψ΄ψ, ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ΟΑ σημεῖον Λ, ὅπερ ἔχει τεταγμένην $(\overline{\theta\lambda})=\lambda$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα $\overline{\text{ΟΛ}}$ καὶ $\overline{\text{ΟΜ}}$ εἶναι παράλληλα, οἱ συντελεσταὶ κατευθύνσεως αὐτῶν εἶναι ἴσοι, ἤτοι $\frac{\psi}{\chi}=\lambda$, ὅθεν $\psi=\lambda\chi$. (1)

Ἐὰν δὲ αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς $\text{Μ}_1(\chi_1\ \psi_1)$ ταὐτοποιῶσι τὴν (1), θὰ εἶναι $\psi_1=\lambda\chi_1$, ὅθεν $\frac{\psi_1}{\chi_1}=\lambda=\frac{\psi}{\chi}$. Ἔχουσιν ἄρα τὰ ΟΜ_1 καὶ ΟΜ ἴσους συντελεστὰς κατευθύνσεως καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι παράλληλα.



Σχ. 301.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι κοινὴν ἀρχήν, ἕπεται ὅτι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΟΑ, ἐφ' ἧς κατ' ἀκολουθίαν κεῖται καὶ τὸ $\text{Μ}_1(\chi_1,\psi_1)$. Κατὰ ταῦτα τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\lambda\chi$ ταὐτοποιοῦσιν αἱ συντεταγμέναι πάντων τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΟΑ καὶ μόνον αὐτῶν.

Εἶναι ἄρα αὕτη ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΟΑ. Ὥστε: *Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\psi=\lambda\chi$, ἔνθα λ εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως αὐτῆς.*

'Ασκήσεις. 721) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως 3; Νὰ γραφῇ αὕτη.

722) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ περιέχει τὸ σημεῖον (2, —2); Νὰ γραφῇ αὕτη.

723) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ περιέχει τὸ σημεῖον (1, —2); Νὰ γραφῇ αὕτη.

724) Ποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις διχοτομεῖ τὴν α΄ καὶ γ΄ γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ποία ἡ ἐξίσωσις τῆς διχοτομούσης τὰς ἄλλας γωνίας αὐτῶν.

§ 456. Βαθμὸς ἐξισώσεως εὐθείας.—Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ περὶ ἐξισώσεως εὐθείας λεχθέντα παρατηροῦμεν ὅτι: *Ἡ ἐξίσωσις πάσης εὐθείας εἶναι πρωτοβάθμιος πρὸς τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ψ.*

§ 457. Τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι

ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν $A\chi+B\psi+\Gamma=0$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου τόπου διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

α΄) Ἂν $A=0$, $B\neq 0$, $\Gamma\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $B\psi+\Gamma=0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\psi=-\frac{\Gamma}{B}$. Παριστᾷ ἄρα (§ 452) τὴν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, -\frac{\Gamma}{B})$. Ἂν $B=0$, $A\neq 0$ καὶ $\Gamma\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $A\chi+\Gamma=0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi=-\frac{\Gamma}{A}$. Παριστᾷ ἄρα (§ 453) τὴν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$. γ΄) $A\neq 0$, $B\neq 0$, $\Gamma\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος κατὰ σειρὰν πρὸς τὰς $A\chi+B\psi=-\Gamma$, $\frac{A\chi}{-\Gamma}+\frac{B\psi}{-\Gamma}=1$.

$\frac{\chi}{-\frac{\Gamma}{A}}+\frac{\psi}{-\frac{\Gamma}{B}}=1$. Παριστᾷ ἄρα (§ 455) τὴν εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τὸν μὲν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον $\Delta\,(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $E\,(0, -\frac{\Gamma}{B})$. Τῆς εὐθείας ταύτης συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι ὁ τοῦ ἀνύσματος ΔE, ἤτοι $-\frac{A}{B}$.

ΣΗΜ. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ πρὸς ψ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi=-\frac{A}{B}\chi-\frac{\Gamma}{B}$. Ἂν δὲ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως αὐτῆς $-\frac{A}{B}$ παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, ἡ δὲ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν διὰ τοῦ 6, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $\psi=\lambda\chi+6$.

δ΄) Ἂν $A\neq 0$, $B\neq 0$ καὶ $\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\psi=-\frac{A}{B}\chi$. Παριστᾷ ἄρα (455) τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως $-\frac{A}{B}$.

ε΄) Ἂν $A=0$, $B\neq 0$, $\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\psi=0$ καὶ παριστᾷ τὸν ἄξονα τῶν χ.

στ΄) Ἂν $A\neq 0$, $B=0$, $\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi=0$ καὶ παριστᾷ τὸν ἄξονα τῶν ψ. Ἄρα: *Πᾶσα ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος πρὸς χ καὶ ψ παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν.*

Ἀσκήσεις. 725) Νὰ κατασκευασθῶσιν οἱ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $\psi=1$ καὶ $3\psi=9$ παριστώμενοι τόποι.

726) Νὰ κατασκευασθῶσιν οἱ τόποι $\chi=-3$ καὶ $2\chi=1$.

727) Νὰ κατασκευασθῶσιν οἱ τόποι $2\chi=6$ καὶ $5\psi=1$.

728) Νὰ κατασκευασθῶσιν οἱ τόποι $\frac{\chi}{2}+\frac{\psi}{3}=1$ καὶ $\frac{\chi}{3}+\frac{\psi}{-2}=1$.

729) Νὰ κατασκευασθῶσιν οἱ τόποι $\frac{\chi}{4}-\frac{\psi}{3}=1$ καὶ $1+\frac{\psi}{2}=\frac{\chi}{5}$.

730) Νὰ κατασκευασθῇ ὁ τόπος $2\chi+\psi-8=0$ καὶ ὁ $3\chi+2\psi+6=0$.

731) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $A\chi+By+\Gamma=0$ εἶναι παράλληλος πρὸς ἄνυσμα, ὅπερ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς $(-B, A)$.

732) Τίνα θέσιν ἔχει πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\psi=\chi$ ἄνυσμα ἔχον συντεταγμένας προβολὰς $(4, 4)$;

733) Νὰ κατασκευασθῇ ὁ τόπος $\chi+\psi=1$ καὶ ὁ $\chi+\psi=-1$.

Ἡ περιφέρεια κύκλου.

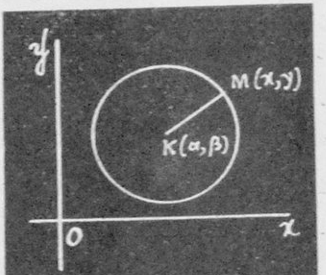
§ 458. Ἐξίσωσις περιφερείας.—Ἔστω περιφέρεια ἔχουσα κέντρον Κ (α, β) καὶ ἀκτῖνα ρ. Ἐὰν $M(\chi, \psi)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, θὰ εἶναι $KM=\rho$.

Ἐπειδὴ δὲ $(KM)^2=(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2$, ἔπεται ὅτι

$$(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\rho^2. \qquad (1).$$

Ἀντιστρόφως. Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι σημείου $M_1(\chi_1, \psi_1)$ ταὐτοποιῶσι τὴν (1), ἤτοι ὅτι $(\chi_1-\alpha)^2+(\psi_1-\beta)^2=\rho^2$. Ἐπειδὴ $(\chi_1-\alpha)^2+(\psi_1-\beta)=(KM_1)^2$, ἔπεται ὅτι $(KM_1)=\rho$· κεῖται ἄρα τὸ M_1 ἐπὶ τῆς περιφερείας (K,ρ). Εἶναι ὅθεν ἡ (1) ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ (α, β) καὶ ἀκτῖνα ρ. Ἐὰν τὸ κέντρον συμπίπτῃ μετὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶναι $\alpha=0$, $\beta=0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\chi^2+\psi^2=\rho^2 \qquad (2)$$



Σχ. 302.

Ἐπειδὴ $(\chi-\alpha)^2=\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2$, $(\psi-\beta)^2=\psi^2-2\beta\psi+\beta^2$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\chi^2+\psi^2-2\alpha\chi-2\beta\psi+\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0$. Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας τεθῇ $-2\alpha=A$, $-2\beta=B$ καὶ $\alpha^2+\beta^2-\rho^2=\Gamma$, αὕτη γίνεται $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$.

§ 459. Τόπος παριστώμενος ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$. Παρατηροῦντες ὅτι $\chi^2+A\chi=\left(\chi+\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}$ καὶ $\psi^2+B\psi=\left(\psi+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{B^2}{4}$ θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(\psi+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}{4} \qquad (4)$$

Ἐὰν δὲ $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2>4\Gamma$, αὕτη γράφεται

$$\left(\chi+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(\psi+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}\right)^2.$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης εἶναι φανερὸν ὅτι αὕτη καὶ ἡ ἰσοδύναμός της $\chi^2+\psi^2+\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$ παριστᾷ περιφέρειαν, ἥτις ἔχει κέντρον $\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},\ -\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ καὶ ἀκτῖνα $\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$.

Ἐὰν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=4\Gamma$ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται $\left(\chi+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(\psi+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2=0$, ἥτις ταὐτοποιεῖται μόνον ὑπὸ τοῦ σημείου $\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$. Χάριν δὲ τῆς γενικότητος λέγομεν ὅτι καὶ αὕτη παριστᾷ περιφέρειαν περιορισθεῖσαν εἰς τὸ κέντρον της. Ἐὰν τέλος εἶναι $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2<4\Gamma$, ἡ ἐξίσωσις (4) οὐδέποτε ἀληθεύει, ἤτοι οὐδένα τόπον παριστᾷ. Χάριν ὅμως γενικότητος λέγομεν ὅτι αὕτη παριστᾷ φανταστικὴν περιφέρειαν.

Ἀσκήσεις. 734) Νὰ γραφῇ ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\psi^2=1$ παριστώμενος τόπος.

735) Νὰ γραφῇ ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $(\chi-2)^2+(\psi+2)^2=4$ παριστώμενος τόπος.

736) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ, κεῖται ἐν τῇ α' γωνίᾳ καὶ ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν ἀξόνων.

737) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ καὶ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν χ εἰς τὴν ἀρχήν.

738) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ καὶ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν ψ εἰς τὴν ἀρχήν.

739) Νὰ γραφῇ ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\psi^2-2\chi+4\psi-4=0$ παριστώμενος τόπος.

740) Νὰ γραφῇ ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\psi^2-6\chi-9=0$ παριστώμενος τόπος.

741) Νὰ γραφῇ ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $2\chi^2+2\psi^2-8\chi-4\psi-2=0$ παριστώμενος τόπος.

742) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα (χ_1, ψ_1), (χ_2, ψ_2), (χ_3, ψ_3).

743) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, ἥτις εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς (1,0), (2,2), (3,1).

744) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας $\chi^2+\psi^2=4$ καὶ τῆς εὐθείας $\psi=\chi\sqrt{3}$.

745) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς εὐθείας $\psi-2\chi-12=0$ πρὸς τὴν περιφέρειαν $\chi^2+\psi^2-2\chi+2\psi-1=0$.

ΤΕΛΟΣ