ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ
ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ καὶ τῇ Σχολῇ τῶν Ν. Δοκίμων

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{13144}{7\text{-}5\text{-}19}$ *κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας.*

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
26, ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

Τυπογραφεῖον Μπλαζουδάκη

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1. **Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.**—α΄) Διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πᾶσαν πρόσθεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, ὄχι ὅμως καὶ πᾶσαν ἀφαίρεσιν. Οὕτω π. χ. δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 2—5, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου· διότι δὲν ὑπάρχει οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν 5 δίδει ἄθροισμα τὸν 2.

α. τὴν α...
αν τῶν...

Θὰ μάθωμεν ἓν νέον εἶδος ἀριθμῶν καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ μετὰ τῶν γνωστῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν, δύνανται νὰ προστεθοῦν, νὰ ἀφαιρεθοῦν, νὰ πολλαπλασιασθοῦν καὶ νὰ διαιρεθοῦν, ἀκόμη δὲ ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ πᾶσα ἀφαίρεσις.

β΄) Νὰ προσθέσωμεν δύο ἀριθμούς, π. χ. τὸν 7 καὶ 5, σημαίνει, καθὼς γνωρίζομεν, νὰ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 7 καὶ τοῦ 5 καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ οὕτω προκύπτον πλῆθος τῶν μονάδων. Ἐνίοτε ὅμως εὑρίσκομεν δύο ἀριθμοὺς τοῦ αὐτοῦ μὲν εἴδους ἀλλὰ μὲ διάφορα γνωρίσματα, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὴν τοιαύτην ἕνωσιν τῶν μονάδων των δίδουν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ μηδέν. Ἐὰν π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 δρ. δώσωμεν τὸ γνώρισμα, ὅτι εἶνε κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχωμεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 5 δρ., ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου, καὶ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, καθεμία μονὰς τοῦ κέρδους ἐξουδετερώνει μίαν τῆς ζημίας, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐξαγόμενον τῆς τοιαύτης ἑνώσεως εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Ὅμοιόν τι εὑρίσκομεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις· π. χ. ἐὰν εἰς διανύσῃ ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον ἕνα ἀριθμὸν βημάτων πρὸς μίαν διεύθυνσιν, ἔστω πρὸς βορρᾶν, καὶ ἔπειτα τὸ αὐτὸ πλῆ-

β. τὴν ἀν-
τιθέτ...
σχέσιν τ...
θετικῶν...
ἀρνητικῶν
. . . .

θος βημάτων πρὸς νότον, ζητεῖται δὲ πόσον θὰ ἀπέχῃ εἰς τὸ τέλος ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως. ²Ἐὰν ἓν σῶμα θερμανθῇ μέχρις ὡρισμένου βαθμοῦ καὶ ἔπειτα ψυχθῇ ἐκ τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ καθ' ὅσους βαθμοὺς ἐθερμάνθη, ζητεῖται δὲ κατὰ πόσον μετεβλήθη ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος κατὰ τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα. Ἐὰν κερδίζῃ τις ἕνα ἀριθμὸν δραχμῶν, καὶ ἔπειτα χάνῃ τὸ αὐτὸ ποσόν.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, λέγομεν ὅτι ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων, ἀλλ' εἶνε **ἀντίθετοι.** Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν διὰ συμβόλου τὴν ἀντίθεσιν αὐτήν, γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο ἀριθμῶν τὸ σημεῖον + (σὺν) πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου τὸ — (πλὴν)· καὶ τὸ μὲν + λέγεται θετικὸν σημεῖον, τὸ δὲ — ἀρνητικὸν σημεῖον.

Ὥστε οἱ δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔχει 5 μονάδας, γράφονται + 5 καὶ — 5, ἀπαγγέλλονται δὲ ἀντιστοίχως οὕτω· *σὺν πέντε, πλὴν πέντε.*

γ') Ἐν γένει, δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἑτερόσημοι,** ἐὰν ὁ εἷς ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον +, ὁ δὲ ἄλλος τὸ —, π. χ. οἱ $+\ 3$ καὶ $-\ 7$, οἱ $-\ 12$ καὶ $+\ \frac{5}{8}$, οἱ $+2{,}17$ καὶ $-\ 6\frac{1}{4}$ εἶναι ἑτερόσημοι. Συνήθως παραλείπεται τὸ σημεῖον + εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ· ἑπομένως ὅταν εἷς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τὸ σημεῖον +.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν ἓν τῶν δύο σημείων + ἢ — λέγονται ***ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί,*** καὶ ***θετικοὶ*** μέν, ἂν ἔχουν τὸ +, ***ἀρνητικοὶ*** δέ, ἂν τὸ —. Π. χ. οἱ

τὸ ση-
-μεῖον ἑκάστου εἴδους
καὶ τὰ ὀ-
-νόματα
ἴδια καὶ ὅμοια

$$14\cdot\ +\ 12\frac{3}{7}.\quad 2{,}15$$

εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ οἱ

$$-\ 3\cdot\ -\ 7\cdot\ -\ 2,\ 13\qquad \text{εἶνε ἀρνητικοί.}$$

Ἀριθμοὶ ἔχοντες τὸ αὐτὸ σημεῖον (εἴτε τὸ σὺν εἴτε τὸ πλὴν) λέγονται **ὁμόσημοι ἀριθμοί. Ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ** ἢ ἀπόλυτοι τιμαὶ δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, καλοῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἂν παραλείψωμεν τὰ σημεῖά των καὶ θεωροῦμεν μόνον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων των. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

$4\cdot\ -8\cdot\ -6\cdot\ +2\cdot\ -3{,}5\cdot\ -3\frac{1}{2}$ εἶνε οἱ

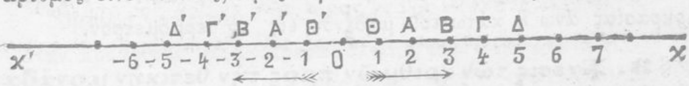
$4\cdot\quad 8\cdot\quad 6\cdot\quad 2\cdot\quad 3{,}5\cdot\quad 3\frac{1}{2}$

* § **2. Παράστασις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων.** — α΄) Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ σημείων μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τὴν ὁποίαν θὰ καλοῦμεν *εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν*. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν π.χ. τὴν x΄x καὶ ἐπ' αὐτῆς ἓν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ τὸ μηδέν. Ἔπειτα λαμβάνομεν πρὸς μίαν διεύθυνσιν, π.χ. πρὸς τὴν Οx, μῆκος ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, π.χ. μὲ 1 δάκ., ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΟΘ. Τὸ σημεῖον Θ παριστάνει τὴν θετικὴν μονάδα +1. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀρθμοὺς +2· +3· 4... ἐὰν λάβωμεν ἐκ τοῦ Ο μῆκος ἴσον μὲ 2· 3· 4...

ἢ τὴν αἰσθητοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν...

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς προηγουμένης, δηλαδὴ κατὰ τὴν Οx΄, λάβωμεν ὁμοίως τὸ μῆκος ΟΘ΄ ἴσον μὲ μίαν μονάδα μήκους, τὸ Θ΄ θὰ παριστάνῃ τὸ —1· κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς — 2· —3· —4...

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα κλασματικὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν $\frac{1}{2}$, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας μῆκος ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, π.χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν διεύθυνσιν Οx μὲν ἀπὸ τοῦ Ο, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε θετικός, πρὸς τὴν Οx΄ δὲ ἂν εἶνε ἀρνητικός.



Σχ (1)

Τὸ μέρος Οx τῆς εὐθείας x΄x λέγεται *θετικὸν τμῆμα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν* καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, τὸ δὲ Οx΄ *ἀρνητικὸν τμῆμα*, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἡ διεύθυνσις Οx λέγεται **θετικὴ** ἡ δὲ Οx΄ **ἀρνητικὴ** καὶ καθεμία σημειώνεται μὲ ἓν βέλος καθὼς εἰς τὸ Σχ. (1).

* Τὰ φέροντα ἀστερίσκον δύνανται νὰ παραλείπωνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν, ἂν δὲν ἐπαρκῇ ὁ χρόνος.

β′) Ἐὰν εἷς ὁδοιπόρος διατρέξῃ 2 μέτρα ἐπὶ τῆς Οx ἀπὸ τοῦ Ο, θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν διὰ τοῦ τμήματος ΟΑ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ δύο μονάδας μήκους τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ ἂν ἄλλος ὁδοιπόρος διατρέξῃ 2 μ. ἐπὶ τῆς Οx′ ἀπὸ τοῦ Ο· ὁ δρόμος οὗτος θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ′. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παριστάνωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ διὰ τμημάτων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν· τὸ μῆκος αὐτῶν μετροῦμεν ἀπὸ τοῦ Ο καὶ εἶνε ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π.χ. μετὰ 2 ἔτη (+2 ἔτη), λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Ο ἓν μῆκος ΟΑ ἴσον μὲ 2 μονάδας μήκους καὶ τὸ σημεῖον Α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν (+2), τὸ δὲ μῆκος ΟΑ τὸ διάστημα +2 ἐτῶν. Ὁμοίως τὸ χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (—3 ἔτ.) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΒ′. Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ διευθύνωνται ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἷς μὲ ταχύτητα 5 χμ. πρὸς τὴν θετικὴν διεύθυνσιν, ὁ δὲ ἄλλος πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μὲ ταχύτητα 4 χμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς τμήματος ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους καὶ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ τμήματος τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, τοῦ ΟΔ, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ ἑνὸς τμήματος ἀντιθέτου τοῦ πρώτου καὶ ἔχοντος μῆκος ἴσον μὲ 4 μονάδας μήκους, τοῦ ΟΓ′. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμόμετρον.

§ **3. Σχέσεις τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὴν θετικὴν μονάδα** — α′) Καθὼς λέγομεν ὅτι πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν της διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, οὕτω θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν της διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Οὕτω ὁ —3 γίνεται ἐκ τῆς —1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς· ὁ $-\frac{3}{5}$ γίνεται ἐκ τοῦ ἑνὸς πέμπτου τῆς —1 ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φοράς.

Ἐπειδὴ ἡ ἀρνητικὴ μονὰς —1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα +1, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖόν της, *θὰ λέγωμεν ὅτι* **καὶ** *πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖόν της καὶ ταύτην ἢ μέρος της ἐπαναλάβωμεν πολλάκις.*

Οὕτω ὁ —7 θὰ λέγωμεν ὅτι γίνεται ἐκ τῆς + 1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της —1, καὶ αὐτὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φοράς· ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν + 1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της — 1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρίς.

β΄) Καθὼς ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 1· 2· 3. 4.... εἶνε ἀτελεύτητος, οὕτω καὶ ἡ σειρὰ —1· —2· —3· —4.... εἶνε ἀτελεύτητος.

«Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν νέων ἀριθμῶν (ἀρνητικῶν) *εἰς τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς διατηροῦνται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν πράξεων (νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως, ἐπιμεριστικὸς νόμος) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν».*

γ΄) Μένει τώρα νὰ δείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, νὰ ἀφαιρέσωμεν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καθὼς καὶ τοὺς ἀπολύτους.

Ὅταν σημειώνωμεν τὰς πράξεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς συνήθως ἐν παρενθέσει μετὰ τοῦ σημείου των πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῶν πράξεων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Π. χ. γράφομεν (—3) + (+5),
ὅταν πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς — 3 καὶ + 5.

Ὁμοίως γράφομεν (—3) —(—8),
ὅταν πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν —3 τὸν —8.

§ **4. Πρόσθεσις.** — *α΄*) Καθὼς ὅταν πρόκειται περὶ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν, οὕτω προκειμένου περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν, δύναται νὰ τεθῇ τὸ πρόβλημα.

«Νὰ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἓν πλῆθος καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ πλήθους τούτου.» Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πρόσθεσις*, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ *προσθετέοι* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *ἄθροισμα*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶνε τὸ + *(σύν)*.

Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον οἱ προσθετέοι εἶνε ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

1) Τὸ ἄθροισμα

$$(+7)+(+5)$$

εἶνε ἴσον μὲ $+12$· διότι 7 θετικαὶ μονάδες καὶ 5 θετικαὶ κάμνουν 12 θετικάς.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα

$$(-7)+(-5)$$

εἶνε ἴσον μὲ -12· διότι 7 ἀρνητικαὶ μονάδες καὶ 5 ἀρνητικαὶ κάμνουν 12 ἀρνητικάς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν,

$$(-3)+(-2)+(-8)=-13\cdot$$

ἐπίσης

$$(+2)+(+6)+(+10)=18$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι

«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προσθετέων».

2) Τὸ ἄθροισμα $(+7)+(-5)$ εἶνε ἴσον μέ $+2$· διότι καθεμία τῶν 5 ἀρνητικῶν μονάδων ἐξουδετερώνεται μὲ μίαν ἀντίστοιχόν της θετικὴν ἐκ τῶν 7, καὶ μένουν μόνον δύο θετικαί. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-7)+(+5)=-2\cdot \quad (-10)+(+10)=0$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\left(+\frac{4}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{1}{4}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι *«διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας διάφορα σημεῖα, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν τῶν ἀπολύτων τιμῶν των ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν καὶ εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὸ σημεῖον ἐκείνου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.»*

β΄) Ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο ἀριθμῶν, ἐὰν μὲν εἶνε ὁμόσημοι, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους των τιμὰς καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τῶν προσθετέων, ἐὰν δὲ ἔχουν διάφορα σημεῖα, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ σημεῖον + καὶ χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν δύο μόνον ἑτεροσήμους. Οὕτω ἔχομεν, ὅτι

$$(-3)+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)=$$
$$(+11)+(-15)=-4.$$

★ γ') Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (§ 2, α'). Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $(-8)+(+3)$ π. χ., ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -8, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδος μήκους, τὸ δὲ οὕτω εὑρισκόμενον σημεῖον παριστάνει τό ἄθροισμα $(-8)+(+3)=-5$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα $(+4)+(-8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ $+4$ καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα α') $(+5)+(-3)$. β') $(-9)+(-3)$. γ') $(-15)+3$. δ') $122+(-83)$. ε') $(-1864)+(+9134)$.

2) Ὁμοίως τά: α') $(-18,1)+13,6$. β') $-9,13+(-92,1)$ γ') $0,13+(-13,4)$.

3) Ὁμοίως τά : α') $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ β') $\left(-3\frac{2}{3}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$ γ') $\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(-6\frac{1}{4}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα. α') $12+(-18)+24$. β') $(-29)+(-13)+(-35)$. γ') $(+13,7)+(-1,118)+9,25$. δ') $8\frac{2}{3}+\left(-17\frac{1}{2}\right)+4\frac{1}{2}$ ε') $\left(-13\frac{1}{5}\right)+26\frac{1}{5}+\left(-1\frac{2}{15}\right)$ ς') $(-8,3)+7,93+(-35,6)$.

2) Ὁμοίως τὰ α') $13+[28+(-24)]$. β') $-125+\left[\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)\right]$. γ') $\left[14\frac{1}{2}+\left(-3\frac{1}{8}\right)\right]+\left[\left(-17\frac{1}{4}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right)\right]$. δ') $[(-13,5)+(-8,4)]+6,1+(-7,5)$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Κερδίζει τις 234 δρ., ἔπειτα χάνει 216 δρ., κερδίζει πάλιν 215 δρ. καὶ χάνει ἐκ νέου 112 δρ. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον; (ἐκ. 121)

234 215 449 328 121

2) Ἔμπορός τις αὐξάνει τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 128 δρ., τὸ

δὲ παθητικόν του κατὰ 312 δρ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει τὸ κεφάλαιόν του; (ἐλ. 184)

3) Ἓν σῶμα θερμανθὲν ἔλαβε θερμοκρασίαν $17,6^{0}$· ἔπειτα ἐψύχθη κατὰ $19,1^{0}$ καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ $3,1^{0}$. Κατὰ πόσους βαθμοὺς ηὐξήθη ἢ ἠλαττώθη ἡ ἀρχική του θερμοκρασία; (ἠλ. $0,16^{0}$).

§ 5. **Ἀφαίρεσις.**—Καθὼς εἰς τοὺς ἀπολύτους ἀριθμοὺς οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἔχομεν τὸ πρόβλημα *«ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν προσθετέων νὰ εὕρωμεν τὸν ἄλλον»*.

Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν λέγεται *ἀφαίρεσις*, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ *μειωτέος* καὶ *ἀφαιρετέος*, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς *διαφορά*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ (—) *πλήν*.

Καὶ ἐδῶ, ἐὰν εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν καὶ προσθέσωμεν εἰς αὐτὴν τὸν ἀφαιρετέον, θὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον.

α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $(+7)-(-5)$, δυνάμεθα ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 7 θετικὰς μονάδας 5 ἀρνητικάς, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς 7 θετικάς 5 θετικάς· ἤτοι θὰ δείξωμεν ὅτι $(+7)-(-5)=(+7)+(+5)=+12$. Πράγματι ἔχομεν ὅτι $(+7)+(+5)+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+7$· διότι εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $(+7)+(+5)+(-5)$ αἱ 5 θετικαὶ μονάδες καὶ αἱ 5 ἀρνητικαὶ ἐξουδετεροῦνται. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν, ὅτι

«διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι

$$(-3)-(-5)=(-3)+(+5)=+2$$

$$12-(+6)=12+(-6)=+6$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{2}{9}\right)=-\frac{2}{9}\cdot$$

* β΄) Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς.

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $(-4)-(+5)=(-4)+(-5)=-9$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν (-4) καὶ προχωροῦμεν ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας. Τοὐναντίον διὰ τὴν διαφορὰν $(-7)-(-4)=(-7)+(+4)$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου (-7) κατὰ 4 μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

γ') Εἶνε εὔκολον τώρα νὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ **ἀφαίρεσις τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν εἶνε πάντοτε δυνατὴ** (§ **1**, α'.) **μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν**, δηλαδὴ ἡ ἀφαίρεσις εἶνε **δυνατὴ καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου.**

Οὕτω ἔχομεν π. χ., ὅτι $3-5=3-(+5)=3+(-5)=-2$ $10-25=10+(-25)=-15$· $1-24=1-(+24)=1+(-24)=-23$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη 1). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραὶ α') $(+6)-(-3)$ β') $(-8)-(+9)$ γ') $(-12)-(-9)$ δ') $(+9)-(-17)$.

2) Ὁμοίως αἱ α') $(+0{,}8)-(-0{,}12)$. β') $1{,}23-(-1{,}45)$· γ') $(-2{,}45)-(+8{,}13)$· δ') $13{,}45-(-1{,}84)$· ε') $6{,}125-(-0{,}12)$

3) Ὁμοίως αἱ α') $1\frac{5}{6}-\left(-3\frac{1}{4}\right)$ β') $3\frac{1}{8}-\left(-6\frac{1}{4}\right)$ γ') $-6\frac{1}{4}-\left(-\frac{4}{9}.\right)$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

α') $12+18-(-17)$· β') $(-12)-(-3)+(+9)$ γ') $21{,}3-3{,}14-(-12)$. δ') $\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$ ε') $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-2\frac{1}{3}\right)-4\frac{5}{6}$.

2) Ἐπίσης τὰ α') $(+13)-\Big((+18)+(-4)\Big)-7$ β') $-18-[-27=(-19)]$· γ') $[(+35)+(-13)]-[(+18)-(-4)]$ δ') $(-4{,}2)-[(-8{,}2)+(-3{,}1)]$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑξῆς πράξεων.

α') $2-5$· β') $3-8$ γ') $5-12$ δ') $15-23$· ε') $125-365$· ϛ') $8{,}41-9{,}04$ ζ') $2-3\frac{4}{5}$

2) Ὁμοίως τὰ α') $14\frac{1}{2}+18\frac{1}{3}-42\frac{1}{4}$. β') $2\frac{4}{5}-3\frac{1}{3}-\left(8\frac{1}{15}-12\frac{1}{6}\right)$.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Αὐξάνει τις τὸ ἐνεργητικόν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικόν του κατὰ 384 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (αὔξ. 768).

2) Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 84 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικόν του κατὰ 64 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (ἐλάτ. 148)

3) Ἀναχωρεῖ τις ἐκ τινος ὡρισμένου σημείου Α καὶ βαδίζει 238 βήματα πρὸς τὰ δεξιά. Πόσα βήματα πρέπει νὰ βαδίσῃ πάλιν πρὸς τὰ δεξιὰ ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἀπέχον τοῦ Α 3846 βήματα; (3608).

4) Χάνει τις 52,34 δρχ. πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 46,3 δρχ. περισσότερον τῶν ὅσων εἶχεν ἀρχικῶς; (98,64).

§ **6. Πολλαπλασιασμός.** — **α)** Καθὼς εἰς τοὺς ἀπολύτους ἀριθμοὺς οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς τίθεται τὸ πρόβλημα «*δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, νὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πρώτου τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος*».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι

$(+8).(+3)=(+8)+(+8)+(+8)=(+24)=24$

Ὁμοίως

$(-8).(+3)=(-8)+(-8)+(-8)=-24.$

Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα π.χ. τοῦ -9 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3, ἤτοι ἔχομεν,

$$(-9).\frac{3}{4}=\frac{(-9)}{4}\cdot 3=\frac{(-27)}{4}=-6\frac{3}{4}$$

β΄) Θὰ ἴδωμεν τώρα πῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον.

$$(+8)\ (-3).$$

Ἐπειδή, καθὼς ὡρίσαμεν (εἰς τὴν § **3**, α΄) τὸ -3 γίνεται ἐκ τῆς 1, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν τρίς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(+8).(-3),$$

θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $+8$, δηλαδὴ τὸν (-8) καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς, ἤτοι θὰ εἶνε

$$(+8).(-3)=(-8).3=(-8)+(-8)+(-8)=-24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν, ὅτι

$$(-8).(-3)=(+8).3=24$$

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι

«διά νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀντέθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν θετικῶς λαμβανόμενον».

Καὶ ἐνταῦθα ἰσχύει ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου, ὅτι τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων. Οὕτω εἶνε

$$(+8).(-3)=-24, \quad -24=(-3).(+8)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ δύο παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶνε ἑτερόσημοι».

γ') Κατὰ ταῦτα προκειμένου περὶ τοῦ σημείου δύο παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου των θὰ ἔχωμεν ὅτι

σὺν	ἐπὶ	σὺν	ἴσον	σὺν
σὺν	ἐπὶ	πλὴν	ἴσον	πλὴν
πλὴν	ἐπὶ	πλὴν	ἴσον	σὺν
πλὴν	ἐπὶ	σὺν	ἴσον	πλὴν.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἂν εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ἐξ αὐτῶν εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ἀρνητικόν· ἂν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε θετικόν. Π. χ.

$$(-3).(+4).(-2).(-1).(-5)=+120$$
$$(-3).(-2).(-1).(+5)=-30.$$

δ') Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα (+1) σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ (—1) δὲ τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτω θὰ εἶνε

$$(-4).1=-4 \cdot \quad (+5).1=+5$$
$$(-5).(-1)=+5 \cdot \quad (+7).(-1)=-7.$$

Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μηδὲν σημαίνει, νὰ θέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἴσον μὲ μηδέν. Οὕτω ἔχομεν, ὅτι $(+3).0=0$. Διότι $(+3).0=0.(+3)=+0+0+0=0$·

$(-7).0=0.(-7)=0.7=0$

ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ μηδὲν εἶνε πάλιν μηδέν.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα α′) $(-4).(+7)$· β′) $(+8).(-4)$. γ′) $(-9).(+12)$ δ′). $(-6).(-5)$. ε′) $(+25).(-18)$.

2) Ὁμοίως τὰ

α′) $\left(1\frac{1}{3}\right).\left(+1\frac{1}{2}\right).\left(-1\frac{1}{3}\right).\left(-5\frac{1}{2}\right)$ β′) $(-3,2).4,5.(-3,4).(-3,2).(-4,5).(-3)$.

γ′) $\left(-5\frac{1}{3}\right).\left(+\frac{3}{4}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ὁμοίως ά) $(-3,4).(-6,2)$· β′) $1,42.(-3,14)$ γ′) $(-1,45).1,6$ δ′) $(-5).(-6).(-3)$· ε′) $\left(+1\frac{1}{2}\right).\left(-1\frac{1}{3}\right).(-4,3)$.

2) Ὁμοίως τά α′) $(-12).4.\left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{5}{8}\right)$ β′) $(-21).(+4).(+6).(-8)$ γ′) $(+7).(-4)(+8).(+3)$ [δ′) $(-0,5).(-3,14)-0,6.(+1,5)$]. $0,2$.

§ 7. **Διαίρεσις — α′)** Καθὼς εἰς τοὺς ἀπολύτους ἀριθμοὺς οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἔχομεν τὸ πρόβλημα «*δοθέντος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος παράγων*». Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *διαίρεσις*, ὁ εἷς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (ὁ παριστάνων τὸ γινόμενον) *διαιρετέος*, ὁ ἄλλος *διαιρέτης* καὶ ὁ ζητούμενος *πηλίκον*, τὸ δὲ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ διὰ (:).

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον $(+8):(+2)$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον +. Διότι τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶνε θετικόν. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8· ἄρα θὰ εἶνε ἴση μὲ $8 : 2 = 4$, ἤτοι θὰ εἶνε

$$(+8) : (+2) = +4.$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι

$(+8) : (-2) = -4 \cdot (-8) : (+2) = -4 \cdot \quad (-8) : (-2) = +4$

Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, διαιροῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον πηλίκον θὰ εἶνε θετικὸν μέν, ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δὲ ἂν ἑτερόσημοι».

β΄) Κατὰ ταῦτα, προκειμένου περὶ τῆς σχέσεως τῶν σημείων τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου θὰ ἔχωμεν

σὺν	διὰ	σὺν	ἴσον	σύν
σὺν	διὰ	πλὴν	ἴσον	πλὴν
πλὴν	διὰ	σὺν	ἴσον	πλὴν
πλὴν	διὰ	πλὴν	ἴσον	σύν.

γ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν ἐν (§ 6, γ΄) ἕπεται ὅτι «*τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν, δύο δ' ἑτεροσήμων ἀρνητικόν*». $-8+(-5) = -13$

$-8-(+5)$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα α΄) $(+18) : (+2)$· β΄) $(+14) : (-2)$. γ΄) $(-15) : (+3)$. δ΄) $(-19) : 6$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶνε α΄) $(-4)\,x = -16$· β΄) $(-3).\,x = 17$ γ΄) $(-14).\,x = 28$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα α΄) $(+0{,}45) : (-0{,}5)$. β΄) $(-126) : (+1{,}8)$ γ΄) $16{,}9 : (-0{,}13)$. δ΄) $\left(4\frac{1}{2}\right) : (-0{,}3)$.

ε΄) $4\frac{1}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right)$.

4) Εὑρεῖν τά α΄) $(-4) : (-5).\,(+15)$· β΄) $4\frac{1}{5} : \left(-1\frac{2}{5}\right) : \left(-2\frac{1}{3}\right)$· γ΄) $(-4{,}5) : (-15) : (+0{,}3)$.

5) Ὁμοίως τὰ α΄) $(-36) : [(-9) - (8)]$ β΄) $-18 : 9 - (-4) : 2$

§ 8. Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.

α΄) *Ὁρισμοί.*—Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τὸ

$$3.\ 3.\ 3.\ 3$$

καλοῦμεν τετάρτην δύναμιν τοῦ 3 καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ 3^4, οὕτω καὶ ἐνταῦθα τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ π. χ. τὸ (—5). (—5) καλεῖται δευτέρα δύναμις τοῦ (—5) καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ $(-5)^2$. Ὁμοίως ἔχομεν

$$(-3).(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$(-7).(-7).(-7) = (-7)^3. = -343$$

Ἐν γένει, *καλοῦμεν δύναμιν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμόν.*

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται *ἐκθέτης* τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως.

Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον* τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ τρίτη δύναμις αὐτοῦ καὶ *κύβος* τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι

$$(-7)^2 = (-7).(-7) = 49$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\alpha^\mu = \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha}_{\mu\ \text{φοράς.}}$$

ὅπου τὸ α φανερώνει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ μ ἀκέραιον καὶ θετικόν.

Ἐφαρμογαί. *1)* Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων α′) $(-5)^3$. β′) $(-7)^2$. γ′) $(+4)^5$ δ′) $(-2)^3$. ε′) $(-2)^5$. ς′) $(-1)^3$.

2) Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ θετικὸν εἶναι ἀριθμὸς θετικός, περιττὸν δὲ ἔχουσα, εἶνε ἀρνητικός.

β΄) Περὶ τῶν α^1 καὶ α^0 ἐὰν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἔχομεν ὅτι

$\alpha^5 = \alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.$

$\alpha^4 = \alpha.\alpha.\alpha.\alpha.$

$\alpha^3 = \alpha.\alpha.\alpha.$

$\alpha^2 = \alpha.\alpha.$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὴν δύναμιν ταύτην διαιρεῖται δι᾽ ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων του. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἶνε δι- ῃρημένον

$\alpha^1 = \alpha^{2-1} = \alpha.\ \alpha : \alpha = \alpha$, ἢ $\alpha^1 = \alpha.$

Ἤτοι· **«ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν».**

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω θὰ λέγωμεν, ὅτι

$\alpha^0 = \alpha^{1-1} = \alpha : \alpha = 1$, ἢ $\alpha^0 = 1$

ὅταν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ἤτοι, **«τὸ α^0 ὅπου τὸ α εἶνε ἀριθμός τις ἀλγεβρικός, διάφορος τοῦ μηδενός, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα».**

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$(-3)^0 = 1$, $45^0 = 1$, $(-10)^0 = 1$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

$(-2)^1 = (-2)$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$, $4{,}3^1 = 4{,}3$

γ΄) Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

1) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅτι *«τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».* Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ἐκθέτης θετικὸς καὶ ἀκέραιος.

Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον

$\alpha^3 . \alpha^2$ θὰ εἶνε

$\alpha^3 = \alpha.\alpha.\alpha$

$\alpha^2 = \alpha.\alpha$ καὶ ἑπομένως

$\alpha^3 . \alpha^2$ εἶνε ἴσον μὲ

$\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha = \alpha^5.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$x^4 . x^2 = x^6$, καὶ ἐν γένει τὸ γινόμενον

$$\alpha^{\mu} . \quad \alpha^{\nu},$$

ὅπου μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ α ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, ἰσοῦται μὲ

$\alpha^{\mu+\nu}$. Διότι ἔχομεν, ὅτι

$$\alpha^{\mu} = \overbrace{\alpha . \alpha \ldots\ldots \alpha}^{\mu \text{ φορὰς}}$$

$$\alpha^{\nu} = \overbrace{\alpha . \alpha \ldots\ldots \alpha}^{\nu \text{ φορὰς}}$$

καὶ ἑπομένως $\alpha^{\mu} . \alpha^{\nu} . = \overbrace{\alpha . \alpha . \ldots\ldots \alpha .}^{\mu \text{ φορὰς}} \; \overbrace{\alpha . \alpha . \ldots\ldots \alpha}^{\nu \text{ φορὰς}} =$

$$= \overbrace{\alpha . \alpha \ldots\ldots\ldots \alpha}^{(\mu+\nu) \text{ φορὰς}} = \alpha^{\mu+\nu}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ γινόμενον

$$\alpha^{\mu} . \alpha^{\nu} . \alpha^{\rho} \ldots\ldots \alpha^{\lambda} = \alpha^{\mu+\nu+\rho+ \ldots\ldots +\lambda},$$

ὅπου τὸ α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός,, τὰ δὲ μ, ν, ρ . , . . . λ ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι «**τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων**».

2) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(2^3)^2.$$

Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ τὸ 2^3, ἤτοι τὸ $2^3 . \quad 2^3$.

Ἀλλὰ τοῦτο ἰσοῦται κατὰ τὰ ἀνωτέρω μὲ

$$2^{3+3} = 2^{3 . 3}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$(\alpha^3)^4 = \alpha^{3 . 4}$$

καὶ ἐν γένει ὅτι

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \nu},$$

ὅπου α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, καὶ μ, ν ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

«Ἂν δύναμίς τις ἀριθμοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν».

Ἐφαρμογή Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

$$[(-2)^2]^3, \quad [(-3)^2]^2, \quad [(-1)^2]^3, \quad [(-1)^3]^3.$$

3) Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν, ὅτι «διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καθένα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν ταύτην». Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$(2.3)^2 = (2.3).\ (2.3) = 2.3.\ 2.3 = 2.\ 2.\ 3.\ 3. = 2^2.\ 3^2$$

$$[(-5).(-3).]^3 = (-5).(-3).(-5).(-3).(-5).(-3)$$
$$= (-5).^3\ (-3)^3$$

καὶ γενικῶς, ὅτι

$$(\alpha\beta\gamma)^\nu = \underbrace{(\alpha\beta\gamma).\ (\alpha\beta\gamma)\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha\beta\gamma)}_{\nu \text{ φορὰς}} = \overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\nu \text{ φορὰς}}.$$

$$\underbrace{\beta.\ \beta.\ \beta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \beta}_{\nu \text{ φορὰς}}\cdot \overbrace{\gamma.\ \gamma.\ \gamma\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \gamma}^{\nu \text{ φορὰς}} = \alpha^\nu.\ \beta^\nu.\ \gamma^\nu.$$

4) Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι «κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων του ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην». Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$$

Διότι τὸ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \overbrace{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{\alpha}{\beta}}^{\mu \text{ φορὰς}} = \frac{\overbrace{\alpha\ \ \alpha\ \ .\ .\ .\ \ \alpha}^{\mu \text{ φορὰς}}}{\beta\ \ \beta\ \ .\ .\ .\ \ \beta} = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu},$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικὸν τὸ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς ἀλγεβρικούς.

5) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῶν δυνάμεων 2^5 καὶ 2^2. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$ ἤτοι ὅτι

«τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις τῶν δυνάμεων εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, οἱ ἐκθέται ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον

$$(-5)^4:(-5)^2=\frac{(-5).(-5).(-5).(-5)}{(-5).(-5)}=(-5).(-5)=(-5)^2=(-5)^{4-2}.$$

Ὁμοίως

$$(-3)^6:(-3)^3=\frac{(-3)(-3).(-3).(-3).(-3).(-3)}{(-3)(-3).(-3)}=(-3)(-3).(-3)=(-3)^3=(-3)^{6-3}$$

καὶ ἐν γένει τὸ πηλίκον

$$\alpha^\mu:\alpha^\nu=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\frac{\overbrace{\alpha\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu\ \text{φορὰς}}}{\underbrace{\alpha\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ \alpha}_{\nu\ \text{φορὰς}}}=\overbrace{\alpha.\ \alpha.\ .\ .\ .\ .\ .\ \alpha}^{\mu-\nu\ \text{φορὰς}}=\alpha^{\mu-\nu},$$

ὅπου α παριστάνει ἀλγεβρικόν τινα ἀριθμὸν καὶ μ, ν θετικοὺς καὶ ἀκεραίους, ὁ δὲ μ εἶνε μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α′) $x^4.x^2$. β′) $y^6.y^3$. γ′) $x^5.x$. δ′) $(-x^2)^2$ ε′). $(-\beta^3)^2$. ς′) $x^2.x$. ζ′) $x^{2\nu}.x$. η′) $x^{2\nu-1}.x$

2) Ὁμοίως τὰ α′) $(4\alpha\beta)^2$. β′) $(-3xy)^3$ γ′) $(5x^2)^2$. δ′) $(-xy\omega)^4$ ε′) $(-\frac{2}{3}x^2y)^2$ ς′) $(-\frac{1}{5}xy^2)^3$. ζ′) $(-\frac{3}{4}x^2)^6$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 9.— α′) Περὶ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων καὶ περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων.

Καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ὅμοια μεταξύ των, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων των, τὰ ὁποῖα λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ τὸν αὐτὸν κανόνα. Οὕτω π.χ. τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Αἱ 2 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 6 δρ. πόσον τιμῶνται αἱ 3 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

2) Οἱ 4 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 28 δρ. πόσον τιμῶνται οἱ 20 πήχ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς πλήθους μονάδων (2 ὀκ., 4 πήχ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἄλλου πλήθους μονάδων (3 ὀκ., 20 πήχ.). Ὡς γνωστόν, πρὸς λύσιν τούτων ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν τιμὴν τῶν δοθεισῶν μονάδων διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τούτων καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν τιμήν. Οὕτω διὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα ἔχομεν ὡς ἐξαγόμενον τὸ

$$\frac{6 \,.\, 3 \text{ δρ.}}{2}, \quad \text{διὰ δὲ τὸ δεύτερον} \quad \frac{28 \,.\, 20 \text{ δρ.}}{4}$$

Χάριν γενικότητος καὶ διὰ τὴν συντομίαν ἀντὶ νὰ μεταχειριζώμεθα τὰς ἐκφράσεις «*ἀριθμός τις ὀκάδων, πήχεων κλπ.*» ἔχει μίαν δοθεῖσαν *τιμήν*, μεταχειριζόμεθα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ νὰ παραστήσωμεν ποσότητας, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ δὲν εἶνε μὲν ἀμέσως ὡρισμένη, ἀλλ' ἡ ὁποία ὁρίζεται, ὅταν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν δι' ὡρισμένων ἀριθμῶν. Οὕτω ἂν ἀντὶ τῶν ἐν λόγῳ γραμμάτων θέσωμεν διαφόρους ἀριθμούς, λαμβάνομεν διάφορα προβλήματα,, διαφέροντα κατὰ τὰς δεδομένας τιμὰς μόνον, ἀλλὰ λυόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος. Οὕτω ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων λύομεν τὸ ἑξῆς γεννικώτερον.

Ἐὰν α μονάδες (ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ) ἑνὸς πράγματος τιμῶνται β δρ. πόσον τιμῶνται γ μονάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος; Πρὸς λύσιν αὐτοῦ λέγομεν. Ἀφοῦ αἱ α μονάδες ἀξίζουν β δρ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται ἡ 1 μονὰς τοῦ αὐτοῦ πράγματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς β δρ. διὰ τοῦ α· ἤτοι ἡ μία μονὰς θὰ τιμᾶται $\frac{\beta}{\alpha}$ δρ., καὶ αἱ γ μονάδες θὰ τιμῶνται $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma$ δρ. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος x τὴν ζητουμένην τιμὴν τῶν γ μονάδων, θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{\beta}{\alpha}\gamma \text{ δρ.}$$

β') Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, οἱ ὁποῖοι παριστάνονται μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, καὶ δύνανται νὰ εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἢ καὶ ἀπόλυτοι λέγονται **γενικοὶ ἀριθμοί.**

γ') Ἡ γραφὴ τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου καλεῖται καὶ τύπος, καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, θὰ καλοῦμεν δὲ αὐτὸν καὶ τοιαύτας γραφάς, τὰς ὁποίας θὰ εὑρίσκωμεν κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, μεταχειριζόμενοι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, **ἀλγεβρικοὺς τύπους.** Οὕτω τοιούτους ἀλγεβρικοὺς τύπους εὑρήκαμεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπιτόκιον, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον, παριστάνοντες αὐτὰ ἀντιστοίχως διὰ τῶν γραμμάτων Τ, Ε, Κ, Χ,

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{K.E.X.}}{100}$$

Ἐπίσης διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ χρόνου ἔχομεν

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{T.\ 100}}{\mathrm{K.E.}}, \qquad \text{κ. ο. κ.}$$

§ **10. Ὁρισμὸς καὶ σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας.**—α') Ἡ Ἄλγεβρα εἶνε γενικωτέρα τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ σκοπὸς αὐτῆς εἶνε νὰ λύῃ τὰ διάφορα προβλήματα ἐκείνης καὶ πολλὰ ἄλλα σχετικὰ πρὸς ἐκεῖνα ἢ καὶ μὴ διὰ γενικωτέρου τρόπου καὶ διὰ συλλογισμῶν γενικωτέρων μὲ τὴν βοήθειαν τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων.

β') Θὰ παριστάνωμεν συνήθως τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν εἰς τὰ διάφορα προβλήματα διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, φ, φ . . . . , τοὺς δὲ ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι ὑποτίθενται γνωστοὶ διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ . . . .

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ κεφάλαιον (ἐπιτόκιον) Κ (Ε), ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπιτόκιον (κεφάλαιον) Ε (Κ), τὸν χρόνον Χ καὶ τὸν τόκον Τ.**

2) α') Εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν τιμὴν

** Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ διατύπωσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ διάφορα δεδομένα, γράφομεν πρὸς συντομίαν τὰ νέα δεδομένα ἐν παρενθέσει.

α μονάδων ἑνὸς πράγματος, ὅταν ἡ μία μονὰς αὐτοῦ τιμᾶται $\frac{\beta}{\gamma}$ δρ. β′) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ τύπου τούτου, ὅταν $\alpha=\frac{5}{8}(2{,}8)$· $\beta=3{,}5\ (6\frac{1}{2})$· $\gamma=4\frac{1}{2}\ (3{,}61)$.

3) α′) Ποῖοι εἶνε οἱ τύποι, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰ μερίδια x, y, ω ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Κ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν λ, μ, ν; β′) Εὕρετε τὴν τιμὴν τῶν τύπων τούτων διὰ $K=25000,\ \lambda=2,\ \mu=\frac{1}{2},\ \nu=\frac{3}{4}$.

4) α′) Ποῖος εἶνε ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ;

β′) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ τύπου τούτου διὰ

$$\alpha=5{,}3\ \left(6\frac{1}{2}\right)\ 6=12\ \left(7\frac{1}{3}\right)\ \mu=\frac{3}{4}\ (8{,}1)$$

§ **11. Ἀλγεβρικὴ παράστασις.**—α′) Ἐὰν δοθοῦν οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ α, 6, γ, καὶ προστεθοῦν οἱ α καὶ 6 εἰς τὸ ἄθροισμα δὲ τούτων προστεθῇ ὁ γ, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐξαγόμενον

$$(\alpha+6)+\gamma.$$

Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ 6 ἀφαιρεθῇ ὁ γ θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+6)-\gamma,$$

ὅπου τὸ $\alpha+6$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ 6.

Ἐν γένει, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τρίτον, θέτομεν τοὺς δύο πρώτους μετὰ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον τοὺς συνδέει, ἐν παρενθέσει ἢ ἐν ἀγκύλαις καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συνδέομεν μὲ τὸν τρίτον διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως. Οὕτω τὸ $(\alpha-6)+\gamma$ φανερώνει, ὅτι εἰς τὴν διαφορὰν $\alpha-6$ θὰ προστεθῇ ὁ γ· τὸ $\alpha-(6-\gamma)$ φανερώνει, ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ $6-\gamma$.

Ἄθροισμα ἴσων προσθετέων γράφομεν συντόμως, γράφοντες ἕνα μόνον τῶν προσθετέων καὶ πρὸ αὐτοῦ ὡς παράγοντα τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, μὲ τὸ σημεῖον σὺν μέν, ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε θετικοί, μὲ τὸ πλὴν δέ, ἂν εἶνε ἀρνητικοί. Οὕτω ἀντὶ τοῦ $\alpha+\alpha+\alpha$ γράφομεν 3α, ἀντὶ τοῦ $(-6)+(-6)+(-6)$ τὸ -36.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν π.χ. τοῦ α καὶ 6 παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha.6$ ἢ τοῦ $\alpha6$, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β ὑπὸ τοῦ $\alpha:\beta$ ἢ ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

ϐ') Τὰ διάφορα σύμϐολα τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ἐν τῇ Ἀλγέϐρᾳ, διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἀριθμοῦ σὺν $(+)$ ἢ πλὴν $(-)$, τὸ γινόμενον $(.)$, τὸ πηλίκον $(:)$, τὸ ἄθροισμα $(+)$, τὴν διαφορὰν $(-)$, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν $(\sqrt{\ })$ ἀριθμῶν κ.τ.λ., καλοῦμεν **ἀλγεϐρικὰ σύμϐολα.**

γ') «***Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ γραμμάτων, συνδεομένων διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων*».**

Οὕτω, ἀλγεϐρικαὶ παραστάσεις εἶνε αἱ

$$\alpha+\beta, \quad \alpha+\beta-(\gamma+\delta), \quad \alpha, \quad 3\alpha\,\beta\gamma, \quad 5\alpha+\beta-3\gamma.$$

Ἐκ τούτων ἡ $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β· ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$· ἡ α παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν α κ. λ. π.

δ') Ἀλγεϐρική τις παράστασις λέγεται **ρητή,** ἐὰν τὰ μόνα σημεῖα τῶν πράξεων τὰ ὁποῖα εἶνε σημειωμένα ἐπὶ τῶν γραμμάτων της εἶνε τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἢ ὑψώσεως εἰς δύναμιν ἀκεραίαν) ἢ διαιρέσεως, ὄχι δὲ ἐξαγωγῆς ρίζης. Οὕτω αἱ παραστάσεις

$$\frac{\alpha}{\beta} \qquad 3\alpha\sqrt{3}\,\frac{\alpha}{\gamma}+\alpha^2\beta. \qquad \frac{x}{3\sqrt{12}}+y$$

εἶνε ρηταί, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχουν, εἶνε σημειωμένη ρίζα τις.

ε') Μία παράστασις ἀλγεϐρικὴ λέγεται **ἄρρητος,** ἐὰν τοὐλάχιστον ἐπὶ ἑνὸς τῶν γραμμάτων της εἶνε σημειωμένη ρίζα τις. Π. χ. αἱ $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha-\sqrt{\alpha^5}\,\beta$, $3\sqrt{x}+y$ εἶνε ἄρρητοι.

Θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ ρητὰς παραστάσεις.

στ') Μία παράστασις λέγεται **ἀκεραία** ἐὰν δὲν περιέχῃ καμμίαν διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων της. Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha+\beta, \qquad 3\alpha^3-\frac{4}{5}\alpha^2\beta+\gamma, \qquad \frac{1}{2}\alpha^2$$

εἶνε ἀκέραιαι, ἐνῷ τουναντίον αἱ

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2-\beta}{\alpha+\beta} \quad \frac{3}{5}\alpha^2 + \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

εἶνε **κλασματικαί**, ἐπειδὴ ἡ μὲν πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β, ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ α^2, κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

1) Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶνε ῥηταί; ἄρρητοι; ἀκέραιαι; κλασματικαί;

$$3\alpha^2\beta-\alpha\beta^2, \ \sqrt{24}\,\alpha^2\beta, \ 3\sqrt{x\,y}-8\alpha, \ \frac{\alpha}{\beta}+\frac{8\beta^2}{\gamma}$$

2) Αἱ παραστάσεις $\sqrt{\alpha^2}$, $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}$, $\dfrac{3\gamma}{\sqrt[3]{\delta^3}}$

εἶνε ῥηταὶ ἢ ἄρρητοι καὶ διατί;

3) Εὕρετε καὶ ἄλλας τοιαύτας παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι μόνον φαινομενικῶς εἶνε ἄρρητοι.

4) Αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶνε ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ καὶ διατί;

$$\frac{3\alpha^2\beta}{4\alpha}, \quad \frac{12\alpha\,(\alpha-\beta)^2}{5\,(\alpha-\beta)}, \quad \frac{8\gamma^2xy^3}{4\gamma\,xy^2}$$

§ **12. Περὶ μονωνύμων.**— α') «**Μονώνυμον λέγεται παράστασις ἐν ᾗ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη**». Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha, \quad -5\,x\,y^2, \quad \frac{2}{5}\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta, \quad -\frac{3\alpha\beta}{4\gamma\delta},$$

εἶνε μονώνυμα. Τὸ μονώνυμον λέγεται **ἀκέραιον**, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ· ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαίρεσιν, λέγεται **κλασματικόν**. Οὕτω ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τὰ μὲν τρία πρῶτα εἶνε ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

Ἐὰν ἐν τῷ μονωνύμῳ ὑπάρχῃ ἀριθμητικός τις παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται **συντελεστὴς** τοῦ μονωνύμου. Οὕτω εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ συντελεσταὶ εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ

$$1, \ -5, \ \frac{2}{5}, \ -\frac{3}{4}.$$

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου λέγεται *κύριον ποσὸν* αὐτοῦ εἶνε δὲ αὐτὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρὰν τὰ

$$\alpha, \quad xy^2, \quad \alpha\beta\gamma\delta, \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ μὴ ἔχοντα συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοιοῦτον τὴν θετικὴν μονάδα· π.χ. τοῦ α συντελεστὴς εἶνε ἡ μονάς, διότι δύναται νὰ γραφῇ 1α, ἐνῷ τοῦ $-\alpha$ εἶνε ὁ -1.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι τὰ μὲν ἔχοντα θετικὸν συντελεστὴν ἢ μονάδα θὰ ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$, τὰ δὲ ἀρνητικὸν τὸ $-$.

Οὕτω τὰ μονώνυμα α, $\quad -5xy\cdot \quad 2\alpha\beta\gamma\cdot \quad \frac{-3}{5}\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$

γράφονται καὶ οὕτω

$$(+1).\ \alpha, \quad (-5).\ xy, \quad (+2)\ \alpha.\beta.\gamma, \quad \left(\frac{-3}{4}\right)\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Ὥστε, τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον $+$ ἢ $-$ εἶνε τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ καὶ δεικνύει τὸ εἶδος αὐτοῦ, τὸ δὲ κύριον ποσὸν τοῦ μονωνύμου θεωρεῖται ὅτι εἶνε θετικόν.

β΄) **Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο ἐν τῷ μονωνύμῳ.** Π. χ. τοῦ μονωνύμου $5\alpha^3\beta$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ γράμμα α εἶνε 3, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ὁ 1· τοῦ $\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2\gamma$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶνε 3, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ὁ 2 καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμός του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶνε μηδέν. Π. χ. τὸ μονώνυμον $3\alpha^3$ εἶνε μηδὲν βαθμοῦ ὡς προς β, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ

$$3\alpha^2 \quad \text{τὸ } 3\alpha^2\beta^0, \quad \text{ἐπειδὴ } \beta^0=1$$

$$\text{καὶ} \quad 3\alpha^2\beta^0=3\alpha^2.\ 1=3\alpha^2.$$

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμματά του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα ἐν τῷ μονωνύμῳ. Π. χ. τὸ μονώνυμον

$$\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3\gamma$$

εἶνε πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β καὶ γ, τρίτου ὡς πρὸς α καὶ γ, καὶ ἕκτου ὡς πρὸς α, β, γ.

γ') **Καλοῦμεν ἄθροισμα δοθέντων μονωνύμων τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν γράψωμεν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ καθὲν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον.** Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν $3\alpha^2$; $-5\beta^2$, $\frac{4}{\gamma^3}$ εἶνε τὸ

$$3\alpha^2-5\beta^2+\frac{4}{\gamma^3}.$$

Ἀσκησεις. Τίνος βαθμοῦ εἶνε καθὲν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς α καὶ β; ὡς πρὸς α; ὡς πρὸς β; ὡς πρὸς γ;

$$3\alpha^2\beta\gamma^3\cdot \qquad -\frac{1}{2}\alpha^3\beta^2\gamma\cdot \qquad \frac{4}{9}\alpha.\beta^5\gamma^2.$$

§ **13. Ὅμοια μονώνυμα καὶ ἀναγωγὴ αὐτῶν.** — α') Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν. Οὕτω τὰ μονώνυμα

$$4\alpha, \qquad \frac{2}{3}\alpha, \qquad -13\alpha$$

εἶνε ὅμοια, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν α, διαφέρουν δὲ μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν. Ἐπίσης τὰ

$$-\frac{30}{41}\beta, \qquad 8\beta, \qquad 7\beta,$$

εἶνε ὅμοια, ἔχοντα κύριον ποσὸν τὸ β, καθὼς καὶ τὰ

$$2\alpha^2\beta, \qquad -5\alpha^2\beta, \qquad 13\alpha^2\beta, \qquad -\alpha^2\beta,$$

ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσον $\alpha^2\beta$.

β') «**Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶνε μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων**». Οὕτω ἔχομεν, ὅτι

$$3\alpha+4\alpha=(\alpha+\alpha+\alpha)+(\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)=7\alpha,$$

$$+3\alpha+(-4\alpha)=(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)+(-\alpha)=-7\alpha\cdot \qquad 8\alpha+(-5\alpha)=3\alpha,$$

$$-3\alpha+4\alpha+\frac{2}{3}\alpha-13\alpha=4\alpha+\frac{2}{3}\alpha+(-3\alpha)+(-13\alpha)$$

$$=\frac{14}{3}\alpha+(-16\alpha)=\frac{14}{3}\alpha+\left(-\frac{48}{3}\alpha\right)=-\frac{34}{3}\alpha\cdot$$

$$2\alpha^2\beta+(-6\alpha^2\beta)+13\alpha^2\beta+(-\alpha^2\beta)=15\alpha^2\beta+(-7\alpha^2\beta)=8\alpha^2\beta.$$

Ἡ ἀντικατάστασις τοῦ ἀθροίσματος ὁμοίων μο-

νωνύμων δι' ἑνὸς τοιούτου λέγεται ἀναγωγή αὐτῶν.

§14. **Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.** — α') Καλοῦμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον, ἐὰν τὰ ἐν τῇ παραστάσει ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν δι' ἀριθμῶν ὡρισμένων καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἵτινες σημειοῦνται ἐν αὐτῇ. Οὕτω,

1ον) Ἐὰν $\alpha=3$ ἡ παράστασις 4α ἔχει τὴν τιμὴν $4.\,3=12$, ἡ δὲ $\alpha^4=\alpha.\,\alpha.\,\alpha.\,\alpha.=3.\,3.\,3.\,3.=81$.

2ον) Ἐὰν $\alpha=5, \beta=6, \gamma=7$, ἡ παράστασις $\frac{9}{14}\alpha\beta\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{9}{14}\,5.\,6.\,7=135$.

3ον) Ἐὰν $\alpha=-2, \beta=1, \gamma=5$, ἡ παράστασις $3\alpha^2-5\beta+2\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $3\,(-2)^2-5.1+2.5=12-5+10=17$.

4ον) Ἐὰν $x=2, y=3, \omega=4$, ἡ παράστασις $\frac{8x^2y}{3\omega^3}$ ἔχει τὴν

$$\frac{8.\,2.\,2.\,3}{3.\,4.\,4.\,4.}=\frac{1}{2}.$$

β') Δύο παραστάσεις λέγονται **ἰσοδύναμοι**, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν, δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Οὕτω αἱ παραστάσεις

$$\alpha^2+\alpha\beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha(\alpha+\beta)$$

εἶνε ἰσοδύναμοι. Διότι ἂν θέσωμεν π. χ.

$$\alpha=2,\ \beta=3,$$

εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς δύο τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 10.

Ἐὰν δύο παραστάσεις εἶνε ἰσοδύναμοι, συνδέονται συνήθως διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος. Οὕτω ἔχομεν

$3\alpha=\alpha+\alpha+\alpha$· $\alpha^3=\alpha.\,\alpha.\,\alpha$· $4\alpha+5\alpha+(-12\alpha)=-3\alpha$, θέτοντες δὲ εἰς καθὲν τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ἀντὶ καθενὸς τῶν γραμμάτων ὡρισμένην τιμήν, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν δι' ἓν καὶ τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς.

Διὰ τοῦτο ἐὰν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν μιᾶς πράξεως, π. χ. τῆς ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων, ἀντικαθιστῶμεν τὰ γράμματα δι' ἀριθμῶν τινων ὡρισμένων, καὶ πρέπει αἱ παραστάσεις αἵτινες συνδέονται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων
α′) $8\mu + 3\mu$· β′) $-8\mu + (-3\mu)$· γ′) $-8\mu + 3\mu$· δ′) $8\mu + (-3\mu)$.
ε′) $6\alpha + \alpha + 8\alpha$· στ′) $\rho + 3\rho + (5\rho + 2\rho)$· ζ′) $2x + (-3x) + (6x)$· η′) $-7\alpha + (-5\alpha + \alpha)$· θ′) $-\alpha + 3\alpha + [(-2\alpha) + 3\alpha]$.
2) Ὁμοίως τά α′) $9\mu + \mu$· β′) $9\mu - (-\mu)$· γ′) $-9\mu - \mu$. δ′) $-9\mu - (-\mu)$· ε′) $7x - 10x - 4x$· στ′) $-\rho + 5\rho - (3\rho - 4\rho)$
3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ γίνῃ ἡ δοκιμὴ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.
α′) $-5x + 3y + (-7x)$, ὅταν $x = -1$, $y = 2$.
β′) $-3x + [(-4x) + 5]$, ὅταν $x = 0$
γ′) $-3x + (-5y) + (-3y) + (-3x]$, ὅταν $x = -2$, $y = -5$
4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν
α′) $\alpha^3 - 5\alpha^2\beta + \beta^3$, ὅταν $\alpha = -1, \beta = 5$, (119),
β′) $\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha - 2\beta)}{3\alpha - 5\beta}$ ὅταν $\alpha = 4, \beta = 5$, $\left(\frac{9}{13}\right)$
γ′) $\alpha(\beta - \gamma) + 6(\gamma - \alpha)$, ὅταν $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = -1{,}7$.
5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων
α′) $(\alpha + \beta)[\alpha^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)]$, ὅταν $\alpha = -5, \beta = 3, \gamma = -2$
β′) $\sqrt{\alpha^3 - 2\beta - 3\gamma} - 3\sqrt{2\alpha^2 + \beta(\alpha + \gamma)}$, ὅταν $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 2$

§ **13. Περὶ πολυωνύμου.** α′) **Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων.** Οὕτω τὰ

$$3\alpha^2 + 5\alpha\delta\gamma - 13\gamma^2, \quad 8\alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\gamma^2 - 6\gamma\delta$$

εἶνε πολυώνυμα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων μονωνύμων

$$3\alpha^2, \quad 5\alpha\delta\gamma, \quad -13\gamma^2,$$

τὸ δὲ δεύτερον τῶν

$$8\alpha^2, \quad -2\alpha\delta, \quad 4\gamma^2, \quad -6\gamma\delta.$$

Καθὲν μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ **ὅρος** αὐτοῦ, θεωρεῖται δὲ θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἂν ὁ συντελεστής του ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$. Πολυώνυμόν τι λέγεται **διώνυμον**, ἐὰν ἔχῃ δύο ὅρους, ὡς τὰ $\alpha + \delta$, $\alpha^2 + \delta^2$, $x^2 + \alpha$, **τριώνυμον** δὲ ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους, ὡς τὰ

$$x^2 + \pi x + \varkappa, \quad \alpha + \beta - \gamma, \quad \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2.$$

β′) **Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα** του λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶνε 1, 2, 3.... τὸ πολυώνυμον λέγεται πρώτου, δευτέρου, τρίτου, ..., βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ

$$3α^2—5αβγ \; — \; 13γ^3$$

εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ α καὶ τρίτου ὡς πρὸς τὸ γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς τὸ β.

γ΄) **Βαθμὸς πολυωνύμου τινὸς ὡς πρὸς δύο τρία .... γράμματά του καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.** Οὕτω τὸ πολυώνυμον $3x^2—3xy+2x—7$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y· τὸ $5α^2—3αβ^2γ+13γ$ εἶνε τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

Περὶ συναρτήσεων. *

§ **16**. **Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** α΄) 1) Ταξειδεύων τις λαμβάνει μαζύ του 350 δρ. καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8 δραχ. Ἐὰν ταξειδεύσῃ ἐπὶ 2 ἡμ. θὰ ἐξοδεύσῃ 8.2 δραχ., ἐὰν τρεῖς, τέσσαρας... ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.3· 8.4 δραχ.... καὶ ἐὰν ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.x$ δρ. θὰ τῷ μείνουν δὲ καὶ $350—8.x$ δρ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχ. θὰ τῷ μείνουν ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τῷ μείνουν μετὰ x ἡμ., θὰ ἔχωμεν, ὅτι

$$y=350^{\text{δρ.}} —8.x^{\text{δρ.}}$$

καὶ ἐὰν εἶνε

$x=5$, τὸ $y=350 - 8.5 = 350 - 40 = 310$ δρ.

2) Εἷς ποδηλάτης διήνυσε 21 χμ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον, ἀπὸ τοῦτον δὲ διήνυε 17 χλ. καθ' ὥραν. Μετὰ x ὥρας διήνυσεν $17.x$ χμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δ' ἐν ὅλῳ $21+17x$ χμ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν, ὅτι

$$y=21+17x. \qquad (1)$$

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ τὸν ὡρισμένον τόπον, δηλ. ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς ἰσότητος (1). Π. χ. ἂν τὸ $x=2$, θὰ ἔχωμεν

$$y=21+17.\ 2=21+34=55\cdot$$

ἂν $x=3$, τότε $y=21+17.3=21+51=72$.

Αἱ ποσότητες x καὶ y αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων λέγονται **μεταβληταί**, ἐνῶ αἱ ποσότητες αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ἓν πρόβλημα λέγονται **σταθεραί**, καθὼς π. χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ταξειδιώτης μαζύ του, ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχὰς διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ὡρισμένον τόπον, εἶνε σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης y συνδέεται μὲ τὴν x, οὕτως ὥστε ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τιμήν τινα ὡρισμένην, εὑρίσκμοεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y, καὶ καλεῖται ἡ μὲν μεταβλητὴ x εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν θέλομεν **ἀνεξάρτητος μεταβλητή**, ἡ δὲ y τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x καλεῖται **συνάρτησις** τῆς x.

Ἐν γένει, *ἐὰν δύο μεταβληταὶ* x *καὶ* y *συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ* x *νὰ εὑρίσκωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς* y, *τότε ἡ* y *θὰ λέγεται συνάρτησις τῆς* x *ἡ δὲ* x *ἀνεξάρτητος μεταβλητή.*

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶνε συνάρτησις τῆς ἀκτῖνός του· διότι ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ διὰ τοῦ y τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἔχωμεν, ὅτι

$$y=\pi x^2$$

καὶ τὸ μὲν π εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος (ἴσος μὲ 3, 141 περίπου) τὸ δὲ y εὑρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὡρισμένη τις τιμή. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν ὡρισμένην α, εἶνε συνάρτησις τοῦ ὕψους του· διότι ἔχομεν ὅτι

$$y=\frac{1}{2}\ \alpha\ x,$$

ἂν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, καὶ y τὸ ἐμβαδόν του.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ

ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶνε συνάρτησις ταῦ ἄλλου (χρόνος, ἐργασία καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κ. λ. π.).

2) Εὕρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διανυόμενον διάστημα καὶ ἡ ταχύτης ἐν τῷ κενῷ, τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος κ.λ.π.), ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

β') Ἔστω μία συνάρτησις y ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ $13+5x$· ἤτοι ἔστω, ὅτι

$$y=13+5x \qquad (2).$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0·1·2.3.... δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν(2) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμάς του. Οὕτω ἔχομεν, ὅτι

διὰ $x=0$ τὸ $y= \quad 13+5.0=13$

διὰ $x=1$ τὸ $y= \quad 13+5.1=18$

διὰ $x=2$ τὸ $y= \quad 13+5.2=23$.

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν

$$y=144-6x$$

ἔχομεν ὅτι

διὰ $x=0, \quad y=144-6.0=144$

διὰ $x=1, \quad y=144-6.1=138$

διὰ $x=2, \quad y=144-6.2=132$.

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις, π. χ. ἡ y, μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x, καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τῆς x γράφωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, καθὼς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως.

Ἐφαρμογαί. 1) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $x=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot -1\cdot$

$-2\cdot -3\cdot \frac{1}{-3} \quad y= 2x+7, \; y=7x-15, \; y=\frac{1}{2}x-32$

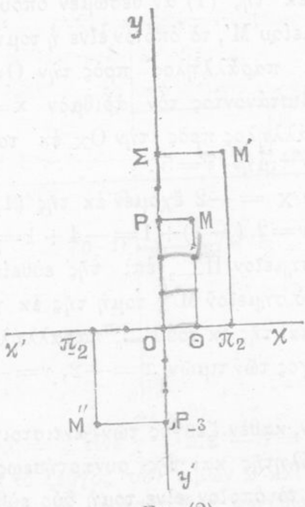
$y=\frac{5}{9}x^2+\frac{4}{9}x+7\cdot \; y=500-25x^2+\frac{3}{5}x$

2) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν καθεμιᾶς τῶν κάτωθι συναρτήσεων

διὰ $x = 0, \frac{1}{2}. 1 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2, 2\frac{1}{2}, \ldots\ldots$

$$y = \frac{3x-5}{2x+3}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4x+1} + 2, \quad y = \frac{1}{x^3+1}$$

§ **17 Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις τῶν τιμῶν συναρτήσεως.** — Καθὼς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς παριστάνομεν (§ 2) διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου



Σχ. (2)

μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως.

α′) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν

$$y = 2 . x + 1 \qquad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν 1, εὑρίσκομεν

$$y = 2 . 1 + 1 = 3.$$

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν $x'x$ καὶ ἐπ' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου ΟΘ = 1), τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν $x = 1$. Τὴν τιμὴν τοῦ y θὰ παριστάνωμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον δι' ἑνὸς σημείου μιᾶς ἄλλης εὐθείας y′ y, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν $x'\,x$ εἰς τὸ σημεῖον O, καὶ τῆς ὁποίας τὸ τμῆμα Oy εἶνε τὸ τμῆμα τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ y τὸ δὲ Oy' τὸ τῶν ἀρνητικῶν (βλ. Σχ. (2)). Οὕτω ἡ τιμὴ τῆς $y=3$ θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου P τῆς Oy. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν Oy καὶ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν Ox, αἱ εὐθεῖαι αὗται κόπτονται εἰς ἕν σημεῖον, ἔστω τὸ M, καὶ θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x=1$ καὶ $y=3$ τῆς (1).

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=2$, καὶ $y=2.2+1=5$, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1) ἂν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2, παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου M′, τὸ ὁποῖον εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Pi_2 M'$, ἡ ὁποία ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Oy ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς $x'\,x$, τοῦ παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x=2$, καὶ τῆς ΣM′ ἡ ὁποία ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Ox ἐκ τοῦ σημείου Σ, τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $y=5$.

Διὰ τὴν τιμὴν $x=-2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$y=2\,(-2)+1=-4+1=-3,$$

εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π_{-2} ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'\,x$, τὸ P_{-3} ἐπὶ τῆς $y'\,y$ καὶ τὸ σημεῖον M″, τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Π_{-2} παραλλήλου πρὸς τὴν $y'\,y$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ P_{-3} παραλλήλου πρὸς τὴν $x'\,x$, παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=-2$, $y=-3$ τοῦ x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐν γένει λοιπόν, καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας $x'\,x$, $y'\,y$ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν $y'\,y$ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ δὲ πρὸς τὴν $x'\,x$ ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ y. Εἶνε φανερόν, ὅτι δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x (ἢ τοῦ y) φέρωμεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y'\,y$ (ἢ τὴν $x'\,x$) καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους ὅση εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x) πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιά) ἂν ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x) εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ ἀριστερὰ) ἂν εἶνε ἀρνητική.

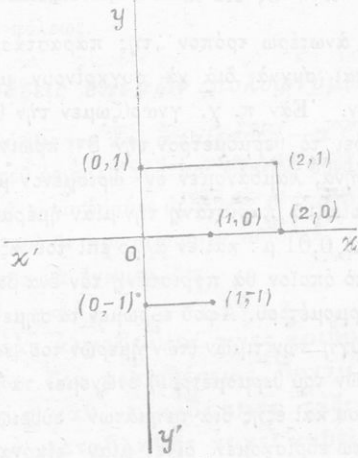
Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν

$$y=2x-3$$

διὰ $x=1$ θὰ εἶνε

$$y=2-3=-1,$$

καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1 καὶ -1 τῆς x καὶ y, ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν -1 τοῦ y ἐπὶ τοῦ Oy' φέρωμεν τμῆμα εὐθείας παραλλήλου τῆς Ox καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν διὰ τοῦ $(1,-1)$ εἰς τὸ σχῆμα (3).



Σχ. (3)

Ὁμοίως διὰ $x=2$ εἶνε $y=2.2-3=+1$· καὶ τὸ σημεῖον $(2,1)$ παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ $+1$, κ. ο. κ.

β') Τὴν εὐθεῖαν $x'\,x$ καλοῦμεν συνήθως **ἄξονα τῶν x** ἢ **τῶν τετμημένων**, τὴν δὲ εὐθεῖαν $y'\,y$ **ἄξονα τῶν y** ἢ **τῶν τεταγμένων**, καὶ τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα **ἄξονας τῶν συντεταγμένων** x καὶ y. Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὁριζόντιον, τὸν δὲ τῶν y κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ y καλοῦμεν ἀντιστοίχως **τετμημένην** καὶ **τεταγμένην** τοῦ σημείου, τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν, καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα **συντεταγμένας** τοῦ σημείου.

Ἐφαρμογαί

Παραστήσατε διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y

τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ x

$$y=x+2,\quad y=\frac{1}{2}x+1,\quad y=\frac{3}{4}x-2,\ y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x^2,$$

$$\text{διὰ}\quad x=0\cdot\ 1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot\ 4\cdot$$

$$y=\frac{1}{2}x^2-x^3,\quad y=-\frac{3}{4}x^2+5,\quad y=\frac{x-1}{2}+1,$$

$$y=\frac{x^2}{2}-3x+1,\quad \text{διὰ}\quad x=0\cdot\ -1\cdot\ -2.\ \frac{3}{2}+1.$$

$$y=x^4-x+3,\ \text{διὰ}\ x=0\cdot 1\cdot -1\cdot -\frac{1}{3},\ 0,\ 1.$$

γ') Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἐὰν π. χ. γνωρίζωμεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμόμετρον τὴν 8ην πρωινὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἕνα μῆνα, λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον μῆκος ὡς μονάδα μήκους, ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔστω τὸ 0,01 μ: καὶ ἓν ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔστω τὸ 0,02 μ., τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ τὸν ἕνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν ἡμερῶν τοῦ μηνὸς καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου) ἑνώνομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς διὰ τμημάτων εὐθειῶν καὶ ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν οὕτω εὑρίσκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν κυμάνσεων τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται συνήθως **γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς, παρατηροῦντες αὐτὴν δὶς τῆς ἡμέρας (τὴν πρωῒαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν καλοῦμεν συνήθως *γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ* τοῦ ἀσθενοῦς.

Ἐφαρμογαί.

1) Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶνε διὰ πάντας τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν $-3^0\cdot$ $-1,1^0\cdot$ $2,3^0\cdot$ $7,5^0\cdot$ $12^0\cdot$ $15,6^0\cdot$ $17,2^0\cdot$ $16,5^0\cdot$ $12,9^0\cdot$ $8^0\cdot$ $2,1^0\cdot$ $-1,6^0$. Λάβετε ὡς

μονάδα μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01 μ. ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ 0,01 μ. καὶ εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

2) Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 32 χιλιάδες καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 κατὰ 41· 36· 35· 34· 33· 39· 45· 54· 83· 75· 59· 56· 57 χιλιάδας. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ 0,005 μ., καὶ ἀπεικονίσατε τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως.

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων.

§ 18. Προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις.—α') Ἐκ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προσθέσεως συνάγομεν ὅτι «τὸ *ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς*».

Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν, ὅτι

$$\alpha+\beta+\gamma=\beta+\alpha+\gamma=\gamma+\beta+\alpha, \quad \kappa.\ o.\ \kappa.$$

Ἐν γένει, «**ἐὰν ἀλγεβρικοί τινες ἀριθμοὶ συνδέωνται μεταξύ των διὰ προσθέσεως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτοὺς καθ' οἱανδήποτε τάξιν χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον νὰ μεταβληθῇ, ἀρκεῖ καθεὶς ἐξ αὐτῶν νὰ διατηρῇ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον**». Διότι δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν πᾶσαν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν, ἑπομένως νὰ ἔχωμεν

$$\alpha+\beta-\gamma=\alpha+\beta+(-\gamma)=\alpha+(-\gamma)+\beta=\alpha-\gamma+\beta=-\gamma+\alpha+\beta.$$

Ὁμοίως

$$\alpha-\gamma-\beta=\alpha+(-\gamma)+(-\beta)=+(-\beta)+\alpha+(-\gamma)=-\beta+\alpha-\gamma.$$

Ἐπίσης ἔχομεν, ὅτι

$$\alpha+(\beta-\gamma)=\alpha+[\beta+(-\gamma)]=\alpha+\beta+(-\gamma)=\alpha+\beta-\gamma=\alpha-\gamma+\beta.$$

$$\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha+[(-\beta)+(-\gamma)]=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

I) «**Διὰ νὰ προσθέσωμεν μονώνυμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν καθ' οἱανδήποτε τάξιν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο καὶ καθὲν μὲ τὸ σημεῖόν του**».

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$15\alpha^2x, \quad -3\alpha^2x, \quad 15\alpha^3y, \quad -\alpha^2x, \quad -\alpha^3y$$

εἶνε $15\alpha^2x-3\alpha^2x-\alpha^2x+15\alpha^3y-\alpha^3y$· καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $15\alpha^2x, -3\alpha^2x, -\alpha^2x$ ἀφ' ἑνός, καὶ τῶν $15\alpha^3y, -\alpha^3y$ ἀφ' ἑτέρου, εὑρίσκομεν

$$11\alpha^2x+14^3y.$$

2) «**Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολυώνυμα, ἀρκεῖ, νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν δοθέντων, διατηροῦντες τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου**».

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$3\alpha^2x+6^3+6+\alpha^4, \; -6^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$$

εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$3\alpha^2x+6^3+6+\alpha^4-6^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν

$$5\alpha^2x+3\alpha^4-2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε πολυωνύμων, σχηματίζομεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν δοθέντων, διατηροῦντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων των.

β΄) Θὰ δείξωμεν, ὅτι «**διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ, νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος**».

Διότι, ὡς γνωστόν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετόν του εἰς τὸν μειωτέον. Οὕτω, ἡ διαφορὰ τοῦ $-\alpha^3$ ἀπὸ τοῦ α^2y εἶνε $\alpha^2y+\alpha^3$· ἡ διαφορὰ τοῦ α^26 ἀπὸ τοῦ $3\alpha^26+5\alpha6^2-6^3$ εἶνε

$$3\alpha^26+5\alpha6^2-6^3-\alpha^26=2\alpha^26+5\alpha6^2-6^3.$$

Ἐὰν ζητῆται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν

$$\alpha^3x, \quad -\alpha^2y, \quad \alpha^3$$

νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ μονώνυμα

$$-\alpha^3x, \quad -3\alpha^2y, \quad -\alpha^4, \quad 2\alpha^2y,$$

εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων, καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων μὲ ἀντίθετον σημεῖον· ἤτοι ἔχομεν

$$\alpha^3x-\alpha^2y+\alpha^3+\alpha^3x+3\alpha^2y+\alpha^4-2\alpha^2y,$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν

$$2\alpha^3 x + \alpha^3 + \alpha^4.$$

Κατὰ ταῦτα

«**διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν ἔπειτα αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του**».

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$3\alpha^2 x - 9\alpha^3 x^2 - 6\alpha^2 x^2$$

ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου

$$9\alpha^2 x + 18\alpha^3 x^2 - \alpha^2 x^2$$

εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$9\alpha^2 x + 18\alpha^3 x^2 - \alpha^2 x^2 - 3\alpha^2 x + 9\alpha^3 x^2 + 6\alpha^2 x^2.$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν

$$6\alpha^2 x + 27\alpha^3 x^2 + 5\alpha^2 x^2$$

γ΄) **Περὶ τῶν παρενθέσεων καὶ τῶν ἀγκυλῶν.**—Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἐὰν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχουν ὅροι, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον $+$, δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων, ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον $-$, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων. Οὕτω

$$\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$$

διότι τὸ σημεῖον $-$ τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως φανερώνει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta - \gamma + \delta$ ἀπὸ τὸ α καὶ κατὰ ἀνωτέρω (§ **18**, β΄) ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του. Ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha - [-(\beta + \gamma) + (\alpha - \beta) - \gamma + \alpha] = \alpha + (\beta + \gamma) - (\alpha - \beta) + \gamma - \alpha =$$
$$= \alpha + \beta + \gamma - \alpha + \beta + \gamma - \alpha = -\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαὶ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$2x-(3x-2y)$,   δοκιμὴ διὰ $x=y=1$.

$3\alpha-3\beta-(12\alpha+9\beta)$,   » » $\alpha=\beta=0$.

$2x+3y-4\omega+(-4x-8y+7\omega)$ » » $x=1, y=2, \omega=3$

$9\alpha-3\beta+(7\beta-3\alpha)$ » $\alpha=2, \beta=1$

$\vartheta-(\mu-\nu)$,   ἐὰν εἶνε $\begin{cases}\vartheta=x+3y-5\omega,\\ \mu=2x-3y+4\omega\\ \nu=x+y+\omega\end{cases}$

$2x+3y+(4x-3y)=5x+4y-(4y-x)$.

$3\alpha+2\beta-(4\alpha-\beta)=2\beta+4\alpha+(\beta-5\alpha)$.

$2x-3y-5\omega-(3x+2y-\omega)=2x+5y+6\omega-(3x+10y+10\omega)$,

$(7\alpha-2\beta)-\left[(3\alpha-\gamma-(2\beta-3\gamma)\right]$ δοκιμὴ διὰ $\alpha=\beta=\gamma=2$

$(9\alpha-4\gamma)-\left[[(3\beta-4\gamma)+5\alpha]-3\beta\right]$, » » »

$16-x-\left(7x-[8-9x-(3-8x)]\right)$, » » $x=2$

$11x-\left(7x-[8x-9x-(12\alpha-6x)]\right)$, » « $x=-1$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν π. χ. α καὶ β αὐξηθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Διατί;

2) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐλαττωθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ. Διατί;

3) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν π.χ. τῶν α καὶ β δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διατί;

(α+μ) + (3α+μ) = 4α+2μ
(α−μ)+(3α−μ)=4α−2μ

Ὁμὰς τρίτη.— 1) Ἓν παιδίον εἶνε α ἐτῶν ὁ δὲ πατήρ του ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν τούτου· πόσην ἡλικίαν θὰ ἔχουν (εἶχον) καὶ οἱ δύο μετὰ (πρὸ) μ ἔτη (ἐτῶν); $(4\alpha+2\mu)\cdot(4\alpha-2\mu)$.

α+(α−β)+(α−2β) = 3α−3β = 3(α−β)
(2α−β)−(α−2β) = 2α−β−α+2β = α+β

2) Εἰς τὴν α′ τάξιν σχολείου τινὸς φοιτῶσιν α μαθηταί, εἰς τὴν β′ β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν γ′ 2β ὀλιγώτεροι τῶν ἐν τῇ α′. α′) πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὅλῳ αἱ τρεῖς τάξεις; β′) πόσους ἔχουν περισσοτέρους αἱ δύο πρῶται τάξεις τῆς γ′; $3(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$.

A = x−3
B = y−(x−3) = y−x+3

3) Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β ὁ πρῶτος ἔχει x δραχ., καὶ οἱ δύο ὁμοῦ y δραχ. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Β 3 δρ. πόσας θὰ ἔχῃ ἕκαστος; $(x-3,\ y-x+3)$.

A=μ, B=3μ, Γ=2·3μ
A+B+Γ = μ+3μ+6μ = 10μ

4) Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δρχ. ἢ ὁ Α, ὁ Γ διπλασίας τῶν

τοῦ Β· ὁ δὲ Α ἔχει μ δραχ· πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς (10 μ).

§ **19. Πολλαπλασιασμός.** — *α')* Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, καλοῦμεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ . . . καὶ παριστῶμεν αὐτὸ διὰ τοῦ α β γ . . . τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον, ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ β πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

Γνωρίζομεν ἐπίσης, ὅτι «*τὸ γινόμενον δσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας.*»

Ἂν διὰ τῶν α, β, γ παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας παράγοντας, θὰ ἔχωμεν,

$$\alpha\beta\gamma = \beta\alpha\gamma = \gamma\alpha\beta. \text{ κ. ο. κ.}$$

οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ.

β') Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων. — *Καλοῦμεν γινόμενον μονωνύμων τὸ μονώνυμον τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας τὰ δοθέντα μονώνυμα.*

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $5\alpha^2\beta^3\gamma, \quad 3\beta\gamma^2.$

θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶνε τὸ

$$(5\alpha^2\beta^3\gamma).\ (3\beta\gamma^2)$$

ἢ τὸ

$$5\alpha^2\beta^3\gamma. \quad 3\beta\gamma^2$$

καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, θὰ ἔχωμεν

$$5\alpha^2\beta^3\gamma. \quad 3\beta\gamma^2 = 5.\ 3.\ \alpha^2.\ \beta^3\ \beta\ \gamma\ \gamma^2 = 15\alpha^2\beta^4\gamma^3.$$

Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν

$$\frac{-4}{3}\alpha^2\beta^4\gamma, \quad \frac{2}{5}\alpha^3\beta^2\gamma, \quad \frac{1}{6}\beta\gamma^2\delta$$

εἶνε

$$\frac{-4}{3}\alpha^2\beta^4\gamma.\ \frac{2}{5}\alpha^3\beta^2\gamma.\ \frac{1}{6}\beta\gamma^2\delta = \frac{-4}{3}\cdot\ \frac{2}{5}\cdot\ \frac{1}{6}\alpha^2\ \alpha^3\ \beta^4\ \beta^2\ \beta\ \gamma\ \gamma\ \gamma^2\ \delta$$

$$= -\frac{4}{45}\alpha^5\ \beta^7\ \gamma^4\ \delta.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι

«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτων γράφομεν καθὲν γράμμα, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μὲ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους τοῦτο ἔχει εἰς τὰ δοθέντα».

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

$$x^7 x^2,\quad y^6 y^3,\quad x^5 x,\quad \alpha^2.\alpha^3.\alpha^4,\quad (x^2)^2,\quad (\beta^3)^2$$

$$x^\nu .x,\quad x^{2\nu}.x,\quad x^{2\nu-1}.x,\quad x^{2\nu-2}.x^2,$$

$$2\alpha\beta.\alpha^2,\quad 3xy^2.\ 4x^2x,\quad (4\alpha\beta)^2,\quad (3xy)^3,$$

$$3\alpha x.4\alpha^3x^2.(-5x^3)^3,\quad (-xy\omega).x^2y^2\omega^2.(-4xy\omega),\quad (2x^2x)^2,$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^2.3xy^2\left(-\frac{1}{5}xy\right)^2.$$

γ') Γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta-\gamma).\ \mu,$$

ὅπου τὸ μ παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta-\gamma).\mu = \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{1\eta} + \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{2\alpha}\ .\ .\ .\ .\ \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{\mu\acute{\eta}}$$

$$= (\overset{1\eta}{\alpha} + \overset{2\alpha}{\alpha} + \ .\ .\ .\ , \overset{\mu\acute{\eta}}{\alpha}) + (\beta+\beta+\ .\ .\ .\ .\ .+\beta)-(\gamma+\gamma+\ .\ .\ .\gamma)$$

$$\alpha.\mu + \beta\mu - \gamma\mu$$

ἤτοι *«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ, νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».*

Ὁ κανὼν οὗτος ἀληθεύει οἱοσδήποτε ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν καὶ ἂν εἶνε ὁ μ, ἀποδεικνύεται δ' ὁμοίως, ἐὰν στηριχθῶμεν εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ **6**, α').

Οὕτω π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ

$$(\alpha + \beta - \gamma).(-\mu)$$

εἶνε ἴσον μέ

$$-(\alpha + \beta - \gamma).\ \mu = (-\alpha - \beta + \gamma).\ \mu = -\alpha\mu - \beta\mu + \gamma\mu.$$

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2).\ 2\alpha\cdot$$

θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2).\ 2\alpha = [\alpha^2 + (-3\alpha\beta) + \beta^2].\ 2\alpha$$

καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ

$$\alpha^2.\ 2\alpha + (-3\alpha\beta).\ 2\alpha + \beta^2.\ 2\alpha = 2\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(5\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 7\beta^3).\ (-3\alpha\beta) = -15\alpha^3\beta^2 + 9\alpha^2\beta^3 - 21\,\alpha\beta^4.$$

Ὥστε « **διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα** ».

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸν πολυώνυμον ὡς ἕνα ἀριθμὸν) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π. χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha.\ (\beta - \alpha + \gamma) = (\beta - \alpha + \gamma).\ \alpha,$$

καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ

$$\alpha\beta - \alpha^2 + \alpha\gamma.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα

$(x^3 + 4x^2 - 5x + 1).\ x^2$, $6\alpha^2.\ (\alpha^2 - 4\beta^2)$

$2\alpha x.\ (\alpha^2 - 2\alpha x + x^2)$ δοκιμαὶ διὰ $x = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

$4x - 2.\ (x + 3)$, $(2\beta - 3\alpha).\ \beta$, $(2\alpha + 3\beta) - (2\beta - 3\alpha).\ \beta$

δοκιμὴ διὰ $x = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

$(2\alpha^2 + 5\beta^2)\ \alpha\beta - (4\alpha^2 - 3\beta^2)\ \alpha\beta$, δοκιμὴ διὰ $\alpha = 1, \beta = 2$.

2) Λῦσαι τὰ ἑξῆς προβλήματα.

α') Ἔκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις· ὁ α' διανύει καθ' ἡμέραν α + μ χιλιόμετρα, ὁ δὲ β' 2μ^χμ ὀλιγώτερα τοῦ α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας; (2ατ)

$\alpha' = (\alpha+\mu)\tau$
$\beta' = (\alpha+\mu) - 2\mu$
θὰ ἀπέχουν κατὰ [illegible]
[illegible]
$(\alpha+\mu)\tau + ((\alpha+\mu) - 2\mu$ [illegible]
$2\alpha\tau$

β') Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶνε α· τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶνε μ· πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμός, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του; (18μ — 9α).

γ′) Ἔκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων $30^{\chi\mu}$ ἡμερησίως· μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων $\gamma^{\chi\mu}$ ἡμερησίως καὶ δευθύνεται πρὸς τὸν α′. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ α′ (β′);

$$(30\tau+\gamma\ (\mu-\tau)\cdot \quad (30\ (\tau+\mu)-\gamma\tau).$$

δ′) *Γινόμενον πολυωνύμων*.—1) Ἔστω πρῶτον ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta).\quad(\gamma+\delta).$$

Ἐὰν τὸ $(\gamma+\delta)$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α, ἤτοι ἐὰν θέσωμεν

$$(\gamma+\delta)=A,$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta).A=\alpha.\ A+\beta A=A.\alpha+A.\beta.$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ Α θέσωμεν τὸ ἴσον του $(\gamma+\delta)$, ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)\cdot\ (\gamma+\delta)=(\gamma+\delta).\ \alpha+(\gamma+\delta)\ \beta=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\ (\gamma-\delta)&=[\alpha+(-\beta)]\ [\gamma+(-\delta)]\\&=\alpha\gamma+(-\beta\gamma)+(-\alpha\delta)+\beta\delta\\&=\alpha\gamma+\beta\delta-\beta\gamma-\alpha\delta.\end{aligned}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

«**Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα**».

2) Ἔστω πολυώνυμόν τι $8x+x^2+16$.

Ἐὰν γράψωμεν αὐτὸ ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος x νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ

$$16+8x+x^2,$$

λέγομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε **διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ** x.

Ὁμοίως ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ x νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι, δηλαδὴ

$$x^2+8x+16,$$

λέγομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε **διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ** x.

Ἐν γένει, **λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε διατε-**

ταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός του, ἐὰν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνουν ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, συνήθως δειατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν (πρὸς εὐκολίαν ἐν τῇ ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων), ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

1ον) $(2x^2-x+3).(x-4)$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 - x+3 \\ & x-4 \\ \hline (1) \ldots\ldots\ldots & 2x^3 - x^2+3x \\ (2) \ldots\ldots\ldots & -8x^2+4x-12 \\ \hline (3) \ldots\ldots\ldots & 2x^3-9x^2+7x-12. \end{array}$$

Τὰ (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ x καὶ ἐπὶ -4 καὶ λέγονται μερικὰ γινόμενα τὸ δὲ (3) ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέγεται τελικὸν γινόμενον.

2ον) $(4x^5-3x^4+x^2-1).(x^3-x+2)$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 4x^5-3x^4+x^2-1 \\ x^3-x+2 \\ \hline 4x^8-3x^7 \quad +x^5 \quad -x^3 \qquad (***) \\ \qquad -4x^6+3x^5 \quad -x^3 \quad +x \\ \qquad\qquad 8x^5-6x^4 \quad +2x^2 \quad -2 \\ \hline 4x^8-3x^7-4x^6+12x^5-6x^4-2x^3+2x^2+x-2. \end{array}$$

3ον) Ἐπίσης διὰ τὸ γινόμενον

$$(x^3-3\alpha x^2+\alpha^3).(2\alpha x-\alpha^2)$$

(***) Ὁ διδάσκων ἐξηγεῖ ὅτι πρὸς εὐκολίαν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος δὲν εἶνε πλῆρες πολυώνυμον, καθὼς τὸ $4x^5-3x^4+x^2-1$, εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα ἀφήνομεν ἀντιστοίχως κενὰς θέσεις ἰσαρίθμους πρὸς τοὺς ἐλλείποντας ὅρους.

ἔχομεν

$$\begin{array}{l} x^3-3\alpha x^2+\alpha^3 \\ \quad 2\alpha x-\alpha^2 \\ \hline 2\alpha x^4-6\alpha^2x^3 \qquad\qquad +2\alpha^4 x \\ \qquad -\alpha^2x^3+3\alpha^3x^2 \qquad\quad -\alpha^5. \\ \hline 2\alpha x^4-7\alpha^2x^3+3\alpha^3x^2+2\alpha^4x-\alpha^5. \end{array}$$

ε') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν οἱ δύο παράγοντες εἶνε διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων των (πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου (πρῶτον καὶ τελευταῖον), διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ γίνῃ ἡ δοκιμὴ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$(2x+3y).(3x-4y)$, $(2\alpha\beta+3\gamma\delta).(3\alpha\beta-4\gamma\delta)$

$x=1$, $y=1$, $\alpha=2$ $\beta=-1$, $\gamma=-2$, $\delta=0$

$(4\rho^2-3\lambda^2).(5\rho^2-4\lambda^2)$, $(2\alpha^2-3\alpha+4).(2\alpha-5)$.

$\rho=-1$, $\lambda=-1$, $\alpha=-2$

$(\mu^2-6\mu\nu+4\nu^2).(3\mu^2+2\mu\nu+2\nu^2)$, $\mu=-2, \nu=1$

$(x+1).(x+2).(x+3)$· δοκιμὴ διὰ $x=-4$.

$(2\alpha+3)(2\alpha-4)(2\alpha+5)$· » » $\alpha=-3$.

$(xy-1)(x^2y^2-2)(x^2y^2+3)$· » » $x=y=-2$

$(x^2+x+1)(x-1)-(x^2-x+1)(x+1)$, δοκιμὴ διὰ $x=3$

$(x^3+3x^2+5x-6)(x-2)-(x^3-4x^2-6x+5)(x-1)$,

$(-x-y)(-\alpha-\beta)$·.

δοκιμαὶ διὰ $x=y=\alpha=\beta=-1$.

§ **20. Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.**—Παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$(\alpha+\beta)^2, \qquad (\alpha+\beta)(\alpha-\beta), \qquad (\alpha+\beta)^3$$

παρουσιάζονται πολὺ συχνά, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα, ἅτινα εὑρίσκομεν, ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Οὕτω ἔχομεν

1) $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

2) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$.

3) $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)=$

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἐὰν εἰς τὴν 1) καὶ 3) γράψωμεν $-\beta$ ἀντὶ τοῦ β, προκύπτει

4) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

5) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$,

ἤτοι

1) «**Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε ἴσον τῷ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, σὺν τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν, σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ**».

2) «**Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν των δίδει γινόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου πλὴν τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου**».

3) «**Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε ἴσος τῷ κύβῳ τοῦ πρώτου, σὺν τῷ τριπλασίῳ τετραγώνῳ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν τῷ τριπλασίῳ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, σὺν τῷ κύβῳ τοῦ δευτέρου**».

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι σημειωμένων πράξεων δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω κανόνων.

$(2x+3y)(2x-3y)$, $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$, δοκιμαὶ διὰ

$$x=3,\ y=1$$

$(3x+4y)^2$, $(6xy-xy^2)^2$, $(2\alpha+\beta)^3$, δοκιμαὶ διὰ

$$x=y=1,\ \alpha=3,\ \beta=-2.$$

2) Νὰ διατυπώσετε τοὺς κανόνας διὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους 4) καὶ 5) κατ' ἀναλογίαν τῶν 1) καὶ 3).

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

$(\alpha+\beta+\gamma)^2$, δοκιμὴ διὰ $\alpha=\beta=1$.

$\alpha x^2+\beta y^2-\gamma\omega^2)^2$· $\alpha=\beta=\gamma=x=y=\omega=2$.

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$, $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$, $(\gamma+\delta-\alpha-\beta)^2$

Εὕρετε ἐκ τῶν παραδειγμάτων αὐτῶν τὸν κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος περισσοτέρων τῶν δύο προσθετέων.

4) Συμπληρώσατε τὸ $\alpha^2+\beta^2$, ὥστε νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha+\beta)^2$· τὸ αὐτὸ ὥστε νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha-\beta)^2$· τὸ $\alpha^4+\beta^4$ ὥστε νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὸ $(\alpha^2+\beta^2)^2$· τὸ αὐτὸ ὥστε νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὸ $(\alpha^2-\beta^2)^2$.

§ 21. Διαίρεσις διὰ μονωνύμου. *α΄) Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.*— Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Οὕτω ἔχομεν, ὅτι

$$(\alpha\beta\gamma\delta):\beta=\alpha\gamma\delta\cdot$$

διότι εἶνε

$$(\alpha\gamma\delta).\beta=\alpha\beta\gamma\delta.$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται καὶ ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοὶ οἱοιδήποτε ἐκ τῶν γνωστῶν, καθὼς καὶ ἡ ἑπομένη.

«Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γενομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ οὕτω προκῦπτον πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τοὺς ἄλλους παράγοντας».

Διότι, ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha\beta):\gamma\cdot$$

λέγω, ὅτι $(\alpha\beta):\gamma=(\alpha:\gamma).\beta$.

Πράγματι τὸ

$$(\alpha\beta):\gamma$$

σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ γ, δίδει γινόμενον τὸν αβ. Ἀλλὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὁ ἀριθμὸς $(\alpha:\gamma).\beta$· ἐπειδὴ

$$(\alpha:\gamma).\beta.\gamma=(\alpha:\gamma).\gamma.\beta=\alpha\beta.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$(\alpha\beta):\gamma=(\alpha:\gamma).\beta.$$

Ἐκ τοῦ κανόνος συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους (§ 8, γ', 5) συνάγομεν, ὅτι «**ἕνα δύναμίς τις ἀριθμοῦ εἶνε διαιρετὴ διὰ δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου νὰ εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου**».

Ἔστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου

$$24\alpha^7 \text{ διὰ τοῦ } 8\alpha^5,$$

ἤτοι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ κλάσματος, ἔχομεν ὅτι

$$24\alpha^7 : 8\alpha^5 = \frac{24\alpha^7}{8\alpha^5} = \frac{24\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha}{8\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha} = 3\alpha^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$20\alpha^5\beta^6 : (-4\alpha\beta^5) = \frac{20\alpha^5\beta^6}{-4\alpha\beta^5} = -5\alpha^4\beta,$$

$$-30\alpha^2\beta^3\gamma^4 : (-20\alpha\beta\gamma^3) = \frac{-30\alpha^2\beta^3\gamma^4}{-20\alpha\beta\gamma^3} = \frac{3}{2}\alpha\beta^2\gamma.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι

«**ἕνα γινόμενόν τι εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον**». Προσέτι ὅτι «**διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ διαιρέτῃ**» (ὑποτίθεται, ὅτι τὸ μονώνυμον τοῦ διαιρετέου διαιρεῖται διὰ τοῦ μονωνύμου τοῦ διαιρέτου).

β') ***Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ ἀκεραίου μονωνύμου.***—Ἐν πρώτοις θὰ δείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. «*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα*».

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν

$$(\alpha+\beta-\gamma):\mu\cdot$$

λέγω, ὅτι εἶνε

$$(\alpha+\beta-\gamma)\ :\mu = (\alpha:\mu) + (\beta:\mu) - (\gamma:\mu).$$

Διότι τὸ $(\alpha+\beta-\gamma):\mu$ σημαίνει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μ, δίδει τὸν $\alpha+\beta-\gamma$. Ἀλλὰ τὸ

$$(\alpha:\mu) + (\beta:\mu) - (\gamma:\mu)$$

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μ δίδει ἐξαγόμενον τὸ $\alpha+\beta-\gamma$, ἄρα

$$(\alpha+\beta-\gamma):\mu = \alpha:\mu + \beta:\mu - \gamma:\mu.$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι.

«**Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμόν τι διὰ ἀκεραίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα**».

Παραδείγματα

1) $(2\alpha^2\beta^3 + 3\alpha^3\beta^2 - 5\alpha^3\beta^3):\alpha\beta = 2\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - 5\alpha^2\beta^2$.

2) $(36\alpha x - 42\alpha y + 48\alpha\omega):(-6\alpha) = -6x + 7y - 8\omega$.

3) $(-8\alpha^5 - 16\alpha^{10}):(-8\alpha^3) = \alpha^2 + 2\alpha^7$.

Ἀσκήσεις

Εὑρεῖν τὰ πηλίκα

α′) $(12x^3y^2 - 18x^4y^4 + 4x^4y^2):2x^2y^2$

δοκιμὴ διὰ $x=2,\ y=1$.

β′) $60x^5y^5:(4x^3y.\ \ 4xy^3)$· δοκιμὴ διὰ $x=-1,\ y=-2$,

γ′) $(x+y)(\alpha+\beta):(x+y)$· » » $x=y=4, \alpha=\beta=1$.

δ′) $(16\alpha^2x^4:\alpha x):6\alpha x^2$· » » $\alpha=3,\ x=-2$,

2) Ὁμοίως τῶν

α′) $(8\alpha^4\beta^2 - 6\alpha^3\beta^3 + 4\alpha^2\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2):(-2\alpha^2\beta^2)$·

β′) $(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1):(\alpha+1)$

γ′) $(x^{\mu+2}y^{\nu} + 2x^{\mu+1}y^{\nu+1} + x^{\mu}y^{\nu+2}):x^{\mu}y^{\nu}$· $= x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

δοκιμὴ διὰ $\alpha=1,\ \beta=2,\ x=2,\ y=1,\ \mu=\nu=1$,

§ **22. Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.** — α′) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 \ \text{ διὰ τοῦ } \ \alpha + 1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3 (§ **19**, ε'). Ἑπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶνε

$$\alpha^3:\alpha=\alpha^2.$$

Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶνε ὁλόκληρον τὸ πηλίκον, διότι (ἐὰν κάμωμεν τὴν δοκιμὴν εὑρίσκομεν)

$$\alpha^2.(\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2,$$

τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3+3\alpha^3+3\alpha+1)-(\alpha^3+\alpha^2)=2\alpha^2+3\alpha+1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασίς τις ἀκόμη, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $(\alpha+1)$, νὰ δίδῃ

$$2\alpha^2+3\alpha+1\cdot$$

ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ

$$2\alpha^2+3\alpha+1 \quad \text{διὰ τοῦ } \alpha+1.$$

Ἔχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος ταύτης εἶνε ἁπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶνε

$$2\alpha^2:\alpha=2\alpha.$$

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $(\alpha+1)$ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον

$$2\alpha^2+3\alpha+1,$$

εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $\alpha+1$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον, ἀλλ' ὅτι πρέπει, νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $(\alpha+1)$ διὰ τοῦ $\alpha+1$.

Ἐπαναλαμβάνομεν πάλιν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εἶνε 1, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶνε

$$\alpha^2+2\alpha+1,$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν γράφοντες, ὡς κατωτέρω, τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθεν τούτου τὸ πηλίκον καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἑκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον σημεῖον, ἵνα γίνεται εὐκόλως ἡ ἀφαίρεσις. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἑκάστοτε ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων.

$$\begin{array}{lr|l}
 & \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 & \alpha+1 \\
 & -\alpha^3-\alpha^2 \quad\quad\quad & \overline{\alpha^2+2\alpha+1} \\
\hline
(1) \ldots\ldots\ldots & 2\alpha^2+3\alpha+1 & \\
 & -2\alpha^2-2\alpha \quad & \\
\hline
(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha+1 & \\
 & -\alpha-1 & \\
\hline
(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Αἱ παραστάσεις (1), (2), (3) εἶνε ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ τελευταῖον καὶ τῆς ὅλης διαιρέσεως.

β') Ἐν γένει, ἀποδεικνύεται ὅτι «**εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμου διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας (ἀνιούσας) δυνάμεις ἑνὸς γράμματος δι' ἄλλου ὁμοίως διατεταγμένου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου (διατεταγμένου ὁμοίως), ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου**».

(*) Διότι ἐὰν $\Delta+\Delta'+\Delta''+\cdots$ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου καὶ $\delta+\delta'+\delta''+\cdots$ τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, παραστήσωμεν δὲ διὰ τοῦ $\Pi+\Pi'+\Pi''+\cdots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου, διαταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots = (\delta+\delta'+\delta''+\ldots\ldots)\ (\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots).$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\delta.\Pi$ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγμένα τὰ πολυώνυμα (**19**, ε'), έπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον Δ τοῦ πρώτου μέλους· ἤτοι ἔχομεν, ὅτι

$$\delta.\ \Pi = \Delta,$$

ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι τὸ Π εἶνε πηλίκον τοῦ Δ διὰ τοῦ δ.

γ') Ἐπίσης ἀποδεικνύεται γενικῶς, ὅτι **μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα ὅρον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τὸ γενόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν διαφορὰν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου, ἵνα εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου.**

(*) Διότι ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Π τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διὰ τοῦ Ρ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων, διὰ Δ τὸν διαιρετέον καὶ διὰ τοῦ Δ' τὸν διαιρέτην, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta = \Delta'\ (\Pi + P) = \Delta'.\ \Pi + \Delta' P$$

ἢ

$$\Delta - \Delta'.\ \Pi = \Delta'.P,$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι $P = (\Delta - \Delta'.\Pi) : \Delta'.$

Ἐφαρμογή. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8$$

διὰ τοῦ

$$x^2 - 4x - 2.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8 & x^2 - 4x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^4 + 4x^3 + 2x^2 \qquad\quad & x^2 + 2x + 3 \\
\hline
2x^3 - 5x^2 - 19x - 8 & \\
-2x^3 + 8x^2 + 4x \quad\; & \\
\hline
3x^2 - 15x - 8 & \\
3x^2 + 12x + 6 & \\
\hline
-\ 3x - 2 &
\end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει παράστασίς τις, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $x^2 - 4x - 2$ νὰ δίδῃ τὸ $-3x-2$, πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν.

δ') Ἤτοι, ἐὰν τὰ δοθέντα πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν μέχρις ὅτου ὁ βαθμὸς τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου εἶνε μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (ἢ μηδέν).

ε΄) Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος δὲν εἶνε μηδέν, λέγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελὴς καὶ ἑπομένως δὲν ἔχομεν ὅτι

ὁ διαιρετέος = διαιρέτην × πηλίκον

καθὼς εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν, ἀλλὰ

ὁ διαιρετέος = διαιρέτην × πηλίκον + ὑπόλοιπον.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων ὁμοίαν πρὸς τὴν τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. — Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των.

$(5\alpha\gamma + 3\beta\gamma - 5\alpha\delta - 3\beta\delta):(5\alpha + 3\beta)$

$(6x^2 - 5xy - 7x - 6y^2 + 17y - 5):(2x - 3y + 1)$·

$(125\mu^3 + x^3):(x^2 - 5\mu x + 25\mu^2)$·

$(x^3 + \alpha^3):(x - \alpha)$, $\quad (x^3 + \alpha^3):(x + \alpha)$,

$(27x^3 - 8y^3):(3x - 2y)$·

$\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right):\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$

$(\alpha^8 x^4 - 81\beta^{12}):(\alpha^6 x^3 - 3\alpha^4\beta^3 x^2 + 9\alpha^2\beta^6 x - 27\beta^9)$.

$(32\alpha^5 + \beta^5):(2\alpha + \beta)$.

Ὁμὰς δευτέρα. — 1) Ἔμπορός τις ἀγοράζει α ὀκάδας ἐμπορεύματός τινος πρὸς μ δραχμὰς ἑκάστην ὀκᾶν, β ὀκ. πρὸς ν δρ. ἑκάστην καὶ γ ὀκ. πρὸς ρ δρ. ἑκάστην· α΄) πόσον τῷ κοστίζει ἑκάστη ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; $\frac{(\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho)}{(\alpha + \beta + \gamma)}$

β΄) πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν; $\frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{(\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho)}$

2) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει α ὀκ. οἴνου μὲ β ὀκ. ἄλλης ποιότητος καὶ μὲ γ ὀκ. ὕδατος. Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται μ δραχμάς, τοῦ δὲ δευτέρου ν δρ. πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος; $\frac{(\alpha\mu + \beta\nu)}{(\alpha + \beta + \gamma)}$

πόσας ὀκάδας μείγματος ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν; $\frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{(\alpha\mu + \beta\nu)}$

3) Ἁμαξοστοιχία τις τρέχει α ὥρας μὲ ταχύτητα τ χιλιομέτρων καθ' ὥραν· ἔπειτα β ὥρας μὲ ταχύτητα τ' χιλ. πόση εἶνε ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν; πόσας ὥρας χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον, ἵνα διατρέξῃ 1 χιλιόμετρον;

$$\frac{(\alpha\tau+\beta\tau')}{(\alpha+\beta)}, \quad \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha\tau+\beta\tau')}$$

§ **23. Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου περιέχοντος τὸν x, διὰ (x—α). — α') «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου τινός, περιέχοντος τὸ x διὰ (x—α), ἀρκεῖ, ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον ἀντὶ τοῦ x τὸν α».**

Ἔστω π. χ., ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(x^3-3x^2+3x+2):(x-1).$$

Ἐὰν διὰ τοῦ π παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν

$$(x^3-3x^2+3x+2)=\pi.\,(x-1)+\upsilon \quad (1).$$

Τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὰς τοιαύτας διαιρέσεις, διότι ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (§ **22, δ'**).

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ $x=1$. Θέτοντες ἐν αὐτῇ $x=1$, εὑρίσκομεν

$$1^3-3.1^2+3.1+2=\upsilon,$$

ἤτοι
$$\upsilon=3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\Pi(x)$ τὸν διαιρετέον, ὁ ὁποῖος ὑποτίθεται ὅτι εἶνε πολυώνυμον, περιέχον τὸν x, διὰ τοῦ $\pi(x)$ τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ x—α, λέγω ὅτι τὸ υ εἶνε ἴσον μὲ Π (α), δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον, ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ α.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι

$$\Pi(x)=\pi(x).\,(x-\alpha)+\upsilon\cdot$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α, λαμβάνομεν

$$\Pi(\alpha)=\pi(\alpha).\,(\alpha-\alpha)+\upsilon$$

ἢ
$$\Pi(\alpha)=\pi(\alpha).\,0+\upsilon=\upsilon$$

Παραδείγματα

1) τὸ $x^5-\alpha^5$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶνε

$$\upsilon=\alpha^5-\alpha^5=0$$

2) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(x^4+\alpha^4):(x-\alpha)$$

εἶνε
$$\alpha^4+\alpha^4=2\alpha^4.$$

3) Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(x^6-\alpha^6):(x+\alpha).$$

Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν ἐν τῷ διαιρετέῳ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ $(-\alpha)$, διότι τὸ $x+\alpha=x-(-\alpha)$. Ὥστε ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν

$$(x^6-\alpha^6):(x-(-\alpha)).$$

Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=(-\alpha)$ ἐν τῷ διαιρετέῳ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε

$$(-\alpha)^6-\alpha^6=\alpha^6-\alpha^6=0$$

β') Εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν, πῶς σχηματίζεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, βλέπομεν, ὅτι οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ πηλίκου εἶνε

$$x^5-\alpha x^4+\alpha^2x^3\cdot$$

διακρίνομεν λοιπόν, ὅτι οἱ ἐκθέται τοῦ x ἐλαττοῦνται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον κατὰ μονάδα, ἐνῷ οἱ τοῦ α αὐξάνουν, πρὸς δέ, ὅτι τὰ σημεῖα τῶν ὅρων εἶνε ἐναλλὰξ θετικὰ καὶ ἀρνητικά. Ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε

$$x^5-\alpha x^4+\alpha^2x^3-\alpha^3x^2+\alpha^4x-\alpha^5,$$

καθὼς βεβαιούμεθα, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.
$(2x^2+x-10):(x-2)$, $(x^2+\alpha x-2\alpha^2):(x-\alpha)$, $(x^2+5x+6):(x+2)$, $(x^2+3x+4):(x+3)$, $(x^3+4x^2-5x+1):(x+1)$. $(x^3+\alpha^3):(x+\alpha)$, $(x^5+\alpha^5):(x+\alpha)$, $(x^7+1):(x+1)$, $(x^3+\alpha^3):(x-\alpha)$, $(x^5+y^5):(x+y)$, $(x^6+y^6):(x+y)$, $(x^6+y^6):(x+y)$.

2) Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$\left(2x^4 + 17^3x^3 - 68x - 32\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν διαίρεσιν.

3) Εὕρετε τίνων διαιρέσεων εἶνε τέλεια πηλίκα τὰ κάτωθι
$x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x^3 + x^2 - x + 1$, $x^3 - x^2 + x - 1$,
$\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$, $x^4 - \alpha x^3 + \alpha^2x^2 - \alpha^3x + \alpha^4$.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ

ἤρχισα 8/2/38

§ **24. Ἀνάλυσις ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων.** — Ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ὅμοιον πρόβλημα παρουσιάζεται καὶ ἐνταῦθα γενικώτερον.

Ἔστω μονώνυμόν τι ἀκέραιον, π. χ. τὸ

$$24\alpha^2\beta^3\gamma.$$

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους του παράγοντας, θὰ εὕρωμεν, ὅτι

$$24\alpha^2\beta^3\gamma = 2^3.3\alpha^2\beta^3\gamma,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ μονωνύμου εἶνε οἱ 2, 3, α, β, γ. Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἔχοντος συντελεστὴν ἀκέραιον ἀριθμόν, γίνεται εὐκόλως, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν συντελεστήν του εἰς πρώτους παράγοντας. Τοὐναντίον ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἁπλοῦν εἶνε δυνατὴ μόνον εἰς ὡρισμένας τινὰς περιπτώσεις, καὶ ἐκ τούτων ἀναφέρομέν τινας κατωτέρω.

α′) Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶνε γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινόν τινα παράγοντα. Οὕτω τὸ

$$\alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu = \mu.(\alpha + \beta - \gamma).$$

Ὁμοίως τὸ $\mu\alpha + \mu = \mu(\alpha + 1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^2 + 6xy = 2x(x + 3y)$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

Ἵνα πολυώνυμόν τι τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων αὐτοῦ νὰ μὴ ὦσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

Ἀσκήσεις

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ

$3x^2-6x^3$, $2\alpha^2-4\alpha$, $5\alpha\beta-5\alpha^2\beta^2$, $3\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2$, $8x^3y^2+4x^2y^3$, $3\alpha^3-\alpha^2+\alpha$, $x^3+x^2y-xy^2$, $\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2$, $3x^4-9x^2-6x^3$, $\alpha\beta^2-\beta\gamma^2+\beta x$, $8\alpha^2x^2-4\alpha^2\beta+12\alpha^2y^2$, $6\alpha^2\beta-3\alpha\beta-12\alpha\beta^2$.

β´ Ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ διαταχθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων νὰ ὑπάρχῃ ὁ αὐτὸς παράγων. Π. χ. τὸ πολυώνυμον

$$\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$$

εἶνε ἴσον πρὸς

$$(\alpha\gamma+\alpha\delta)+(\beta\gamma+\beta\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$3x^2+6\alpha x+\beta x+2\alpha\beta=(3x^2+6\alpha x)+(\beta x+2\alpha\beta)$$
$$=3x(x+2\alpha)+\beta(x+2\alpha)=(3x+\beta)(x+2\alpha).$$

Ἀσκήσεις

Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

$\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta$, $\alpha x-\beta x+\alpha y-\beta y$, $\alpha x-\beta x-\alpha y+\beta y$, $x^2+xy-\alpha x-\alpha y$, $\alpha x-\gamma y-\alpha y+\gamma x$, $x^2-xy-\beta x+\beta y$, $2\alpha\beta-3\alpha\gamma-2\beta y+3\gamma y$, $2x^2-3xy+4\alpha x-6\alpha y$, $\alpha\beta-3\beta\gamma-2\alpha\gamma+6\gamma^2$, $x^3+x-x^2\omega-\omega$, $x^3+4x^2+3x+12$, $3\alpha\gamma-3\alpha x-\gamma+x$, $\omega^4-\omega^3-\omega+1$, $1+\gamma-\gamma^2xy-\gamma^3xy$, $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)-3\gamma(\alpha+\beta)$.

γ´) Ἐὰν τριώνυμόν τι εἶνε τέλειον τετράγωνον· ἤτοι, ἐὰν ἕκαστος τῶν δύο ὅρων του εἶνε τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω τὸ $16\alpha^2-24\alpha\beta+9\beta^2=(4\alpha-3\beta)^2=(4\alpha-3\beta)(4\alpha-3\beta)$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(x+y)(x+y).$$

Ἐπίσης $x^4-2x^2y+y^2=(x^2-y)^2=(x^2-y)(x^2-y)$.

Ἀσκήσεις

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις

$$x^2+6xy+9y^2, \quad \alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2, \quad 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2,$$
$$\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2, \quad \alpha^2-10\alpha\beta+25\beta^2, \quad 4x^2-12\alpha x+$$
$$+9\alpha^2, \quad 4\alpha^2-4\alpha+1, \quad 49y^2-14y\omega+\omega^2, \quad x^2-$$
$$-16x+64, \quad 16\alpha^2+8\alpha x+x^2, \quad 25+80x+64x^2,$$
$$1-20\beta+100\beta^2, \quad (x+y^2)-4\omega.\ (x+y)+4\omega^2,$$
$$(\alpha-\beta)^2-6(\alpha-\beta)+9, \quad 121x^2-286xy+169y^2.$$

δ') Ἐὰν δυώνυμόν τι εἶνε διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$16x^2-9y^6=(4x+3y^3)\ (4x-3y^3).$$

Ὁμοίως
$$\alpha^4-4=(\alpha^2+2)\ (\alpha^2-2).$$

Ἀσκήσεις

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

$$\alpha^4-\beta^2, \quad 1-x^2, \quad x^6-y^6,$$
$$\alpha^2-9\beta^2, \quad x^2-9y^2, \quad (x+y)^2-4\omega^2,$$
$$(\alpha-\beta)^2-9, \quad 49-100y^2, \quad 25x^{10}-16\alpha^8x^9,$$
$$(x+y)^2-\omega^2, \quad (x-y)^2-\omega^2, \quad (x-2y)^2-4\omega^2,$$
$$(\alpha+3\beta)^2-16x^2, \quad (\alpha-\beta)^2-(\gamma-\delta)^2, \quad (2\alpha+\beta)^2-25\gamma^2$$
$$(x+3)^2-(3x-4)^2.$$

ε') Ἐνίοτε διατάσσομεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, οὕτως ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων, ὁπότε ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Π. χ. ἔχομεν, ὅτι

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-9\gamma^2=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-9\gamma^2$$
$$=(\alpha-\beta)^2-9\gamma^2=(\alpha-\beta+3\gamma)\ (\alpha-\beta-3\gamma).$$

Ὁμοίως $12\alpha\beta+9x^2-4\alpha^2-9\beta^2=9x^2-(4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2)$
$$=9x^2-(2\alpha-3\beta)^2=(3x-2\alpha+3\beta)\ (3x+2\alpha-3\beta).$$

στ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς·

$$\alpha^4 + \alpha^2 \beta^2 + \beta^4$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)\ (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta).$$

Π. χ. τὸ

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$
$$= (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1).$$

ζ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

καὶ τὸ μὲν β εἶνε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἔστω τῶν ρ, ρ', τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$x^2 + \beta x + \gamma = (x + \rho)\ (x + \rho').$$

Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον

$$x^2 + 8x + 15,$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$8 = 5 + 3 \text{ καὶ } 5.3 = 15\text{· καὶ διὰ τοῦτο}$$
$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)\ (x + 5).$$

Πράγματι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν ὅτι

$$(x + 3)\ (x + 5) = x^2 + 8x + 15.$$

Ὁμοίως τὸ $x^2 + 11x + 30$

ἰσοῦται μὲ $(x + 5)\ (x + 6)$

εἶνε δὲ $5 + 6 = 11$ καὶ $5.6 = 30$

η') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τὴν τρέψωμεν εἰς γινόμενον, ἐπαναφέροντες αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν. Ἔστω π. χ. τὸ

$$8x^2 - 22x - 21$$

γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{8}\ (8.8x^2 - 22.8x - 21.8)$$

καὶ ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ τοῦ 8x τὸ ω θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{8}\,(\omega^2-22\omega-168)\cdot$$

ἀναλύομεν τὸ $\omega^2-22\omega-168$ εἰς τὸ $(\omega-28)\;(\omega+6)$ καὶ ἔχομεν οὕτω

$$8x^2-22x-21=\frac{1}{8}(\omega-28)\;(\omega+6)\cdot$$

γράφομεν πάλιν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον του 8x καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{8}(8x-28)\,(8x+6)=\frac{4.2}{8}(2x-7)\;(4x+3)=$$
$$=(2x-7)\;(4x+3).$$

Ὁμοίως διὰ τὸ

$$24x^2-70xy-75y^2$$

ἔχομεν

$$\frac{1}{24}(24^2x^2-70.24xy-24.75y^2)$$
$$=\frac{1}{24}\,(\omega^2-70y-1800y^2)\qquad\qquad \omega=24x$$
$$=\frac{1}{24}(\omega-90y)\;(\omega+20y)$$
$$=\frac{1}{24}\,(24x-90y)\,(24x+20y)$$
$$=\frac{6.4}{24}(4x-15y)\;(6x+5y)$$
$$=(4x-15y)\;(6x+5y).$$

θ′) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο κύβων ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρετότητος πολυωνύμου διὰ τοῦ x—α (§ **23**, ἀσκήσεις, 3). Οὕτω π. χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\cdot$ ἑπομένως εἶνε

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\;(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$$

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha-\alpha\beta+\beta^2\cdot$ ἄρα εἶνε

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\;(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2).$$

Κατὰ ταῦτα τὸ

$$x^6+y^9=(x^2+y^3)\;(x^4-x^2y^3+y^6).$$

Τὸ $(x-y)^3+\omega^3=(x-y+\omega)\;[\,(x-y)^2-(x-y)\omega+\omega^2]$

$$=(x-y+\omega)\;(x^2-2xy+y^2-x\omega+y\omega+\omega^2).$$

Ἐφαρμογαὶ

Ὁμὰς πρώτη.— Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

$x^4+x^2y^2+y^4, \lambda^4+\lambda^2+1, 9\alpha^4-15\alpha^2+1, 16\alpha^4-17\alpha^2+1,$
$4\alpha^4-13\alpha^2+1, 9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4, 4x^4-21x^2y^2+6y^4, 4\alpha^4-$
$29\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4, 4\alpha^4+11\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4, 25x^4+31x^2\gamma^2+16\gamma^4.$

Ὁμὰς δευτέρα.— Ὁμοίως αἱ

$x^2+5x+6, x^2-8x+15, x^2+7x+10, x^2+3x-10,$
$x^2+\alpha x-6\alpha^2, x^2-\alpha x-6\alpha^2, x^2+3xy-4y^2, x^2+3xy+2y^2.$

Ὁμὰς τρίτη.— Ἐπίσης αἱ

$2x^2+5x+3, 3x^2-x-2, 5x^2-8x+3, 6x^2+7x+2,$
$15x^2+14x-8, 8x^2+14x\beta-15\beta^2, 6x^2+19xy-7y^2,$
$10x^2-21xy-10y^2.$

Ὁμὰς τετάρτη.— Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ

$\alpha^3+8\beta^3; 27x^3y^3-1, 216\alpha^6-\beta^3, \alpha^3+27\beta^3, 64\alpha^6+125\beta^3,$
$\alpha^3\beta^3+729, 8(x+y)^3+\omega^3, (x^2-3)^3-\omega^3, (y-\omega)^3+(y+\omega)^3$

§ **23. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.** — Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν παραγόντων των, καθενὸς τούτων λαμβανομένου μὲ τὸν ἐλάχιστον τῶν ἐκθετῶν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα.

«**Ἵνα εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δοθεισῶν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἀναλύομεν ἑκάστην τούτων εἰς γινόμενον παραγόντων, καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν παραγόντων, ἑκάστου λαμβανομένου μὲ τὸν ἐλάχιστον τῶν ἐκθετῶν**». Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως ὅπως καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, προκειμένου περὶ ἀριθμῶν.

Οὕτω ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$6\alpha^2\beta^3 = 2.3.\alpha^2\beta^3,\ \ 9\alpha^3\beta^2,\ \ 16\alpha^4\beta^3 = 2^4\alpha^4\beta^3$$

εἶνε τὸ $\alpha^2\beta^2$.

Ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha^2 - \alpha\beta = \alpha(\alpha - \beta),\ \ \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha-\beta)^2$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

εἶνε τὸ $(\alpha-\beta)$.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν παραστάσεων

$12\alpha^2\beta^3\gamma^5,\ \ 16\alpha^3\beta^3\gamma^3,\ \ 24\alpha^4\beta^3\gamma^4$.

$28(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^3,\ \ 35(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2,\ \ 52(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$.

$15x^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu)^3,\ 20x^3(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2,\ 25x^4(\mu+\nu)^3(\mu-\nu)^3$.

§ **26. Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.**—Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, προκειμένου περὶ ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων, οὕτω καὶ ἐνταῦθα

«**Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. δοθεισῶν ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, τρέπομεν ἑκάστην αὐτῶν εἰς γινόμενον παραγόντων, καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων, ἑκάστου λαμβανομένου μετὰ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκθετῶν**». Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, προκειμένου περὶ ἀριθμῶν.

Οὕτω τὸ ἐ. κ. π. τῶν

$$18\alpha^3\beta^2 = 2.3^2.\alpha^3\beta^2,\ \ 9\alpha\beta^2 = 3^2\alpha\beta^2,\ \ 12\alpha\beta = 2^2 3\alpha\beta$$

εἶνε τὸ γινόμενον

$$2^2.3^2.\alpha^3.\beta^2 = 36\alpha^3\beta^2.$$

Ὁμοίως τῶν

$$6(\alpha+\beta),\ \ 4(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta),\ \ 9(\alpha+\beta(\alpha-\beta)^2$$

τὸ ἐ. κ. π. εἶνε

$$2^2.\,3^2(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 = 36(\alpha^2-\beta^2)^2.$$

'Ασκήσεις

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παραστάσεων

$8x(\alpha+2\beta)^3, 9xy(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta), 12x^2y(\alpha-2\beta)^2\cdot$

$(\mu+1), (\mu-1), (\mu^2-2\mu+1), \mu^3-1.$

$(x^5+x^4), (x^5+x), (x^5-x).$

$(3x^4+3x), (5x^3-5x), 10x^2+10x.$

§ **27. Περὶ κλασματικῶν παραστάσεων.** Καθὼς ἐν τῇ 'Αριθμητικῇ, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 7 καὶ 3, παρίσταται διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διερέτην, δηλαδή, $7{:}3=\frac{7}{3}$, οὕτω καὶ ἐνταῦθα τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π.χ. τῶν α καὶ β, παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα. Ἤτοι

«**ἀλγεβρικὸν κλάσμα καλεῖται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἐν γένει ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις· παριστάνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του**».

'Επειδή, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ παραστάσεις, οἱ ὅροι τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος παριστάνουν ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

«**'Εὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται**».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}, \quad \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

'Ομοίως

$$\frac{57\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3.19.\alpha^3\beta\gamma^2}{2.19.\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}.$$

'Επὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος στηριζόμενοι, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα ἀλγεβρικὸν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτό, καὶ ἔχον ὅρους μεγαλυτέρους ἢ μικροτέρους τοῦ δοθέντος.

§ **28. Ἁπλοποίησις κλάσματος.** — Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντος κλάσματος, εὑρίσκομεν ἄλλο ἰσοδύναμόν του καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους λέγεται **ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος.**

Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν δοθὲν κλάσμα, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των.

Οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{(\alpha+5)\,(\alpha+3)}{(\alpha+3)\,(\alpha+2)}=\frac{(\alpha+5)}{(\alpha+2)}.$$

Ἀνάγωγον καλεῖται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι οὐδένα ἔχουν κοινὸν παράγοντα, καὶ ἑπομένως δὲν ἁπλοποιεῖται.

«**Διὰ νὰ κάμωμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον δι' ἁπλοποιήσεως, ἀρκεῖ, νὰ διαιρέσωμεν καθένα τῶν ὅρων του διὰ τοῦ μ. κ. δ. των**».

Ὅθεν πρέπει 1) **νὰ ἀναλύσωμεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενον παραγόντων** 2) **νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος** 3) **νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μ.κ.δ. των**». Οὕτω ἔχομεν.

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2^2\alpha^2\beta^2\gamma}{2.3\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2\alpha}{3\gamma^2}$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha}=\frac{(\alpha-1)\,(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha+\beta)\,(x+\alpha-\beta)}{(x+\beta+\alpha)\,(x+\beta-\alpha)}=\frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha}.$$

Αἱ παραστάσεις

$$2\alpha\beta^2\gamma,\qquad (\alpha-1),\ (x+\alpha+\beta)$$

εἶνε οἱ μ.κ.δ. τῶν ὅρων τῶν ἀντιστοίχων κλασμάτων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα ὥστε νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀνάγωγα ἰσοδύναμα πρὸς αὐτά.

$$\frac{6\alpha^2\beta}{9\alpha\beta^2},\quad \frac{3\alpha\beta^2\gamma}{15\alpha^2\beta^2\gamma^2},\quad \frac{26x^2y^3}{39x\ y^5},\quad \frac{9xy-12y^2}{12x^2-16xy}$$

$$\frac{4x^2+12\alpha x+9\alpha^2}{8x^3+27\alpha^3},\quad \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2},\quad \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}.$$

§ **29. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώ-**

νυμα.— Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἰσοδυνάμους, ἔχοντας τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, οὕτω δυνάμεθα καὶ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, δηλαδὴ εἰς ἄλλα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα, καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Συνήθως ἐπιδιώκομεν τὰ νέα κλάσματα νὰ ἔχουν ὅσω τὸ δυνατὸν ἁπλούστερον παρονομαστήν, ἤτοι τὸ ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων. Διὰ τοῦτο, **διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα** 1) **ἀναλύομεν τὸν παρονομαστὴν καθενὸς εἰς γινόμενον παραγόντων**· 2) **εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν γινομένων τούτων**· 3) **διαιροῦμεν τὸ ἐ. κ. π. διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν, καὶ ἐπὶ καθὲν τῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν ἀντιστοίχων κλασμάτων.**

Παράδειγμα.—Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{\beta}{2\alpha},\quad \frac{\alpha}{3\beta},\quad \frac{1}{4\alpha^2\beta},\quad \frac{1}{6\alpha^2\beta^3}.$$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε τὸ

$$3.2^2.\ \alpha^2\beta^3.$$

διαιροῦντες αὐτὸ διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3,\quad 4\alpha^2\beta^2,\quad 3\beta^2,\quad 2.$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν δοθέντων κλασμάτων ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ πηλίκα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{12\alpha^2\beta^3},\quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{12\alpha^2\beta^3},\quad \frac{3\beta^2}{12\alpha^2\beta^3},\quad \frac{2}{12\alpha^2\beta^3}$$

Ἀσκήσεις

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα, ἀλλ' οὕτως ὥστε τὰ νέα νὰ ἔχουν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{\mu}{2x^3y},\quad \frac{\nu}{2xy^2},\quad \frac{\varrho}{8x^2y^3},\quad \frac{3}{20x^2y^2}.$$

$$\frac{1}{2(\alpha+\beta)^2},\quad \frac{2}{3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},\quad \frac{3}{4(\alpha-\beta)^2}.$$

$$\frac{\alpha}{x^2-4},\quad \frac{\alpha}{x+2},\quad \frac{3}{x^2-4x+4}$$

$$\frac{x}{\alpha\mu+\mu^2},\quad \frac{x}{\alpha^2-\alpha\mu},\quad \frac{1}{\alpha^2-\mu^2}.$$

§ **30. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος.**—α') *Καλοῦμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν κλασματικῆς τινος παραστάσεως τὸν ἀριθμόν, ὃ δποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὰ γράμματα τῆς δοθείσης παραστάσεως δώσωμεν ὡρισμένας τιμάς, καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις.*

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ κλάσματος εἶνε συνήθως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ παρανομαστοῦ του.

Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$\frac{\alpha+1}{\alpha-2}$ διὰ $\alpha = 4$ εἶνε ἴση πρὸς $\frac{4+1}{4-2}$

ἢ πρὸς $\frac{5}{2}$.

Τοῦ $\frac{2\alpha}{3\gamma^2}$ διὰ $\alpha = 1$, $\gamma = 2$

εἶνε ἴση πρὸς

$$\frac{2.1}{3.2^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

β') Ἐνίοτε οἱ ὅροι δοθέντος κλάσματος διὰ τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος αὐτῶν γίνονται ἴσοι μὲ μηδέν, ὅτε ἡ προκύπτουσα τιμὴ τοῦ κλάσματος ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ παράστασις αὕτη εἶνε **ἀόριστος**, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδὲν δίδει γινόμενον μηδέν, πρέπει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ μὴ θεωροῦμεν ὡς τιμὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος τὴν $\frac{0}{0}$, ἀλλὰ ν' ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ κλάσμα, τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ δοθέντος μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὅρων του, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης θὰ παριστάνῃ τὴν ζητουμένην τιμήν.

Οὕτω π. χ. ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} \quad \text{διὰ } x=\alpha$$

δὲν εἶνε ἡ ἀπροσδιόριστος $\frac{0}{0}$, ἀλλ' ἡ 2α, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ

$$\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x-\alpha} = x+\alpha,$$

ἐὰν τεθῇ ἐν τῷ $x+\alpha$ ἀντὶ τοῦ x τὸ α.

γ') Ἐὰν ἡ τιμὴ κλάσματός τινος εἶνε $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμόν τινα διάφορον τοῦ μηδενός, λέγομεν, ὅτι τὸ κλάσμα οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν ἢ ὅτι ἡ τιμή του εἶνε μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου. Διότι οὐδεὶς ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν α. Ἐξ ἄλλου ὅμως ἂν ὁ παρονομαστὴς εἶνε πολὺ μικρός, ἔστω 0,000.... 1 τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha}{0{,}000\ldots1} = \alpha \cdot \frac{1000\ldots}{1} = 1000\ldots\alpha,$$

δηλαδὴ ἀριθμὸς πολὺ μέγας, καὶ ὅσω ὁ παρονομαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ μηδέν, τόσω τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον καὶ ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν.

Διὰ τοῦτο ἐν **πάσῃ διαιρέσει πρέπει νὰ ὑποθέτωμεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ μηδενός.**

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων

$\frac{x^2+2x}{x^2}$ διὰ $x=0$, $\frac{y^3+\alpha^3}{y+\alpha}$ διὰ $y=\alpha$

$\frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$ διὰ $x=\alpha$. $\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$ διὰ $\alpha=\beta$

$\frac{x^2+2\alpha x+\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$ διὰ $x=\alpha$

$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$ διὰ $x=2$, $\frac{\alpha^8-1}{\alpha^2-1}$ διὰ $\alpha=1$.

$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x-1}$ διὰ $x=-1$

§ 31. Προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις κλασμάτων.

Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ οὕτω καὶ ἐνταῦθα, διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα. 1) Ἐὰν μὲν εἶνε ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστήν των. 2) ἐὰν δ' εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα.

Ἀνάλογοι κανόνες ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν δύο κλασμάτων.

Παραδείγματα

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

$$\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\beta}{\nu} = \frac{\alpha\nu+\beta\mu}{\mu\nu}.$$

$$\frac{18xy}{7} - \frac{3xy}{7} - \frac{xy}{7} = \frac{14xy}{7} = 2xy$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} - \frac{2x}{6} = \frac{x}{6}.$$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

$$\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{6} - \frac{(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)}{6} - \frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{6},$$

$$\frac{x(x+y)}{2(x^2+y^2)} - \frac{y(x-y)}{2(x^2+y^2)} - \frac{3x^2+11y^2}{2(x^2+y^2)},$$

$$\frac{23x+5y}{8xy} - \frac{4(2x+y)}{8xy} - \frac{3x+11y}{8xy}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{2\beta(\alpha^2+3\beta^2)} + \frac{(\alpha-\beta)^3}{2\beta(\alpha^2+3\beta^2)},$$

$$\frac{13\alpha-12\beta}{\beta-2\alpha} + \frac{16\alpha-15\beta}{\beta-2\alpha} + \frac{2\beta-7\alpha}{\beta-2\alpha},$$

δοκιμαί, διὰ $\alpha=4$, $\beta=1$, $x=-3$, $y=1$

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τῶν

$$2\alpha + \frac{\beta^2-6\alpha^2}{5\alpha},\quad \alpha - \frac{\alpha^2-1}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha-\beta} - \alpha - \beta,\quad \frac{(x+y)^2}{4xy} - 1.$$

$x^2 + xy + y^2 + \frac{x^3+y^3}{x-y}$, δοκιμαὶ διὰ $\alpha=x=-1, \beta=y=5$.

Ὁμὰς τρίτη. Ὁμοίως τῶν

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4},$$

$\frac{x-y}{xy} + \frac{x+\omega}{x\omega} - \frac{\omega-y}{\omega y}$, δοκιμαὶ διὰ » » $x=1, y=-1, \omega=1$.

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3},\quad \frac{3x}{8} - \frac{5x}{12} + \frac{7x}{6} - \frac{3x}{4}.$$

$\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y} + \frac{2}{xy}$ δοκιμαὶ διὰ $\alpha=5$, $x=1$, $y=-2$.

Ὁμὰς τετάρτη.— Ἐπίσης τῶν

$$\frac{x+4}{x-3}-\frac{x+5}{x-2},\qquad \frac{1}{2\mu+9}+\frac{18}{4\mu^2-81}.$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-5)}+\frac{1}{(x-5)(x-7)}-\frac{1}{(x-1)(x-3)},$$

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}-\frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$$

δοκιμαὶ διὰ $x=\mu=-2$, $\alpha=7$, $\beta=1$, $\gamma=2$.

§ **32. Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ ἀκέραιοι}).$$

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 6, α′) ἐπειδὴ ὁ δεύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὁ $\frac{\gamma}{\delta}$, γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ αὐτῆς, καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ, ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta.\delta}$. Διότι $\frac{\alpha}{\beta.\delta}$ ἐπὶ δ δίδει τὸν $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὥστε ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta\delta}\ \gamma=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta},$$

ἤτοι· **διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρανομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρανομαστῶν των».**

Παραδείγματα

1) $$\frac{12x^2y}{7\omega\tau^2}\cdot\frac{14\omega^2\tau}{3xy^2}=\frac{12.14x^2y\omega^2\tau}{7.3xy^2\omega\tau^2}=\frac{8x\omega}{y\tau}.$$

Παρατηρητέον, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων μὲ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

$$\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\cdot\frac{\alpha-x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\alpha+x}{\alpha^2+x^2}$$

3) $$\frac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha-x)^2}{x^2(\alpha+x)^2}=\frac{\alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x)}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη.— Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι γινομένων

$$9y.\frac{x^2}{3y^2}.\quad\left(\dot{\alpha}\pi.\frac{3x^2}{y}\right),\quad \frac{27\alpha^3\beta^3\gamma^4}{16\delta^3\varepsilon^2\eta}\cdot\frac{8\delta\varepsilon^2\eta^3}{9\alpha^3\beta^2\gamma},\quad\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{3\beta^2\eta^3}{2\delta^2}\right)$$

$$\frac{5\ (\alpha+\beta)}{14\ (\alpha-\beta)}\cdot\quad\frac{7\ (\alpha-\beta)^2}{12\ (\alpha+\beta)^2}\quad\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{5\ (\alpha-\beta)}{24\ (\alpha+\beta)}\right)$$

$$\frac{x^2+xy}{\alpha^2-\alpha\beta}.\quad\frac{x^2+\alpha\beta.}{xy-x^2}\quad\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{(\alpha+\beta)(x+y)}{(\alpha-\beta)(y-x)}\right),$$

Ὁμὰς δευτέρα.— Ὁμοίως τῶν

$$\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right)xy.\ (\dot{\alpha}\pi.\ 2y-2x),\ \left(x+\frac{2xy+y^2}{x}\right)\cdot x,\left(\dot{\alpha}\pi.\ (x+y)^2\right)$$

$$\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{5x^2}-\frac{3}{8x}\right)6x^2,\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{240-96x+45x^2}{20}\right)$$

$$\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\frac{2\beta}{\alpha-\beta},\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{2\beta}{\alpha}\right).$$

$$\left(\frac{9x^2-2xy+4y^2}{106xy}-1\right).\ 4xyy,\left(\dot{\alpha}\pi.\frac{2(9x^2-108xy+4y^2)}{53}\right)$$

$$\frac{xy}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{xy}{x+y}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),\left(\dot{\alpha}\pi.\ \frac{2y}{x+y}\right)$$

Ὁμὰς τρίτη. — 1) Ἔχει τις α δραχμάς· ἐκ τούτων ἐξοδεύει πρῶτον τὸ ὄγδοον, ἔπειτα τὸ πέμπτον καὶ τέλος τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ· πόσα τῷ ἔμειναν; $\left(\frac{41\alpha}{120}\right)$.

2) Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει τὸ τρίτον αὐτῶν καὶ $\frac{5}{6}$ τοῦ ὑπολοίπου πόσα τῷ ἔμειναν; $\left(\frac{\alpha}{9}\right)$. $\alpha-\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{5.2\alpha}{6\cdot 3}\right)=x$

3) Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 20 δρχ. καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου· πόσαι δραχμαὶ τῷ μένουν; $\left(\frac{\alpha}{5}-4\right)$. $\alpha-\left(20+\frac{4(\alpha-20)}{5}\right)$

4) Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ χάνει πρῶτον τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῶν, ἔπειτα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν· τέλος χάνει πάλιν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν; $\left(\frac{\alpha-36}{27}\right)$

$\frac{5}{6}z+\frac{8}{3}(\tau-6)=x$ 5) Ἀπὸ μίαν βρύσιν τρέχουν 5 ὀκ. ὕδατος εἰς 6''· ἀπὸ ἄλλην 8 ὀκ. εἰς 3''· πόσαι ὀκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἐὰν ἡ μὲν πρώτη τρέχῃ ἐπὶ τ'', ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 6'' βραδύτερον, κλείσουν δὲ συγχρόνως; $\left(\frac{7\tau}{2}-16\right)$.

§ **33. Διαίρεσις κλασμάτων.**— Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$$

λέγω, ὅτι τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$. Διότι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta},$$

ἤτοι· **Διὰ νὰ διαρέσωμεν παράστασίν τινα διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν δοθεῖσαν παράστασιν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ δοθέντος κλάσματος.**

Παραδείγματα. $\frac{12\alpha^2}{\beta^2}:\frac{3\alpha\beta^2}{10}=\frac{12\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{10}{3\alpha\beta^2}=\frac{120\alpha^2}{3\alpha\beta^4}=\frac{40\alpha}{\beta^4}$.

$$\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}:\frac{5(\alpha+\beta)^2}{11(\alpha-\beta)}=\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}\cdot\frac{11(\alpha-\beta)}{5(\alpha+\beta)^2}=\frac{3}{2(\alpha+\beta)}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

$\frac{27\alpha^3\beta^2\gamma^4}{8\delta^3\varepsilon^2\lambda}:\frac{18\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4\delta\varepsilon\lambda}$, $\quad\alpha:\left(\alpha.\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

$\frac{(\alpha+x)}{(\alpha-x)}:\frac{(\alpha+x)^2}{(\alpha-x)^2}$, $\qquad\frac{x^2-xy}{\alpha^2+\alpha\beta}:\frac{xy-x^2}{\alpha^2-\alpha\beta}$.

δοκιμαὶ διὰ $x=1$, $\alpha=2$, $\beta=\gamma=3$, $\delta=\varepsilon=\lambda=-2$.

$\frac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-y^2}:\frac{\alpha^4-\beta^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}$, $\quad\left(\text{ἀπ. }\frac{(x^2-y^2)}{(\alpha^2+\beta^2)}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τῶν

$\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta}+1\right):\frac{x}{x^2-1}$. $\quad\left(\text{ἀπ. }\frac{(\alpha^3+\beta^2)}{(\alpha+\beta)}\frac{(x^2-1)}{\beta\alpha^2}\right)$.

$\left(\frac{6x^2}{25y^2}+\frac{9xy}{25}-\frac{x}{y}\right):\frac{3x}{5y}$ δοκιμὴ διὰ $x=y=1$.

$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right):\frac{x}{x^2-1}$ (ἀπ. 2).

$\left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$. (ἀπ. 1).

$\left(\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha\beta+\beta^2\right):\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)$. $\left(\text{ἀπ. } \frac{2(3\alpha^2+\alpha\beta+3\beta)^2}{2\alpha+3\beta}\right)$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔχει τις α δραχμάς· τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ἔπειτα ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσων ἔχει καὶ αὐξάνει ὅσα τῷ μένουν κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν. Πόσα ἔχει εἰς τὸ τέλος; $\left(\text{ἀπ. } \frac{4\alpha}{3}\right)$.

2) Ἔχων τις α δραχμὰς αὐξάνει αὐτὰς κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ των· ἐξοδεύει ἔπειτα β δραχμὰς καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ, ἐξοδεύει δὲ πάλιν β δραχμάς· ὁμοίως αὐξάνει τὸ ὑπολειφθὲν κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ ἐξοδεύει β δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέλος; $\left(\text{ἀπ. } \frac{64\alpha-111\beta}{27}\right)$.

3) Χωρικός τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν $(16\alpha+30)$ ᾠὰ πρὸς πώλησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ὅσων ἔφερε καὶ ἓν ᾠὸν ἐπὶ πλέον· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ἀκόμη ἓν ᾠόν. Ὁμοίως καὶ τρίτην καὶ τετάρτην φοράν. Πόσα ᾠὰ τῷ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος; (ἀπ. α).

§ **34. Σύνθετα κλάσματα.** α') **Καλοῦμεν κλάσμα τι σύνθετον, ἐὰν τοὐλάχιστον εἷς τῶν ὅρων του δὲν εἶνε ἀκέραιος.**

Οὕτω τὸ κλάσμα
$$\frac{3x}{\frac{4x-1}{4}}$$
εἶνε σύνθετον.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ἔπεται ὅτι ἔχομεν

$$\frac{3x}{\frac{4x-1}{4}}=3x:\frac{4x-1}{4}=3x.\frac{4}{4x-1}=\frac{12x}{4x-1},$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι «**διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἁπλοῦν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του**».

β') Συντομώτερος τρόπος, διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἁπλοῦν, εἶνε ὁ ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος συνθέτου κλάσματος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἔστω τὸ κλάσμα

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha-x}-\dfrac{\alpha}{\alpha+x}}{\dfrac{x}{\alpha-x}+\dfrac{x}{\alpha+x}}.$$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν $\alpha-x$, $\alpha+x$ εἶνε τὸ γινόμενον αὐτῶν $(\alpha-x)(\alpha+x)$ πολλαπλασιάζοντες δὲ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x)-(\alpha-x)\alpha}{x(\alpha+x)+x(\alpha-x)}=\frac{\alpha^2+\alpha x-\alpha^2+\alpha x}{\alpha x+x^2+\alpha x-x^2}=\frac{2\alpha x}{2\alpha x}=1.$$

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$$

πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}$$

ἐπὶ $(1-x)$ καὶ εὑρίσκομεν $\dfrac{1-x}{2-x}$ ὥστε ἀντὶ τοῦ δοθέντος ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμόν του

$$\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{2-x}}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τούτου ἐπὶ $2-x$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{2-x}{3-2x}.$$

Ἀσκήσεις

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα

$$\frac{\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\mu}}{\frac{\omega}{\mu}}, \quad \frac{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1-\frac{\nu}{\mu+\nu}}, \text{ δοκιμὴ διὰ } x=y=\omega=\mu=1,\ \nu=2$$

$$\frac{x+\frac{y}{\omega}}{\omega-\frac{y}{\omega}}, \quad \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}}{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}, \text{ δοκιμὴ διὰ } x=2, y=2, \omega=1$$

$$\frac{\frac{\alpha\beta}{\gamma}-3\delta}{3\gamma-\frac{\alpha\beta}{\delta}}, \quad \frac{\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha}{\alpha\beta+\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2+\alpha\beta}} \quad \text{δοκιμὴ διὰ } \alpha=5,\ \beta=2, \gamma=\delta=1.$$

$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x-1}}, \quad \frac{\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}}{\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{\alpha\beta}} \quad \text{δοκιμαὶ διὰ } x=2.\ \alpha=\beta=\gamma=1.$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{δοκιμὴ διὰ } \alpha=1,\ \beta=-1, \gamma=2.$$

$$\frac{1}{\alpha+\frac{\alpha+1}{3-\alpha}}, \quad \frac{x+y}{x+y+\frac{1}{x+y+\frac{1}{x+y}}}$$

δοκιμαὶ διὰ $\alpha=4,\ x=o,\ y=3.$

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{x}}}-\frac{1}{y(xy\omega+x+\omega)}, \text{ δοκιμὴ διὰ } x=2.\ y=\omega=1$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)$$

δοκιμὴ διὰ $\alpha=\beta=\gamma=-2.$

$$\frac{\frac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\frac{x-y-\omega}{x+y-\omega}} \quad \text{δοκιμὴ διὰ } x=3\ \ y=1\ \omega=-1.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ **35. Ἐξισώσεις καὶ ταυτότητες.**— α΄) Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3\alpha=15$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ α ἔχει τὴν τιμὴν 5· ἐπομένως ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ α τὴν τιμὴν 5 θὰ εὕρωμεν

$$3.5=15 \quad \text{ἤτοι} \quad 15=15.$$

Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ α ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἤτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως ἡ ἰσότης $3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$, καθὼς εὐκόλως βλέπομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸν 4.

Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

ἀντικαταστήσωμεν τὸν α καὶ β δι' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, π.χ. τῶν $\alpha=1$ καὶ $\beta=3$, ἢ τῶν $\alpha=5$ καὶ $\beta=7$, βλέπομεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $4=4$, $12=12$. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματά των λάβουν ἁρμοδίας τιμάς, καὶ ἄλλαι αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων. Τὰς πρώτας καλοῦμεν ἐξισώσεις, τὰς δ' ἄλλας ταὐτότητας.

β΄) **Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα αὐτῆς λάβουν ἁρμοδίας τιμάς.**

Ταὐτότης λέγεται ἡ ἰσότης ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς καθενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.

Καλοῦμεν **ἀγνώστους** ἐξισώσεώς τινος τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης.

Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐξισώσεώς τινος λέγονται καὶ **ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως.**

Ἐὰν ἐξίσωσίς τις δὲν ἔχῃ ρίζας, ἐὰν δηλαδὴ δὲν ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται αὕτη ἀδύνατος.

Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεώς τινος διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x,y,ω,φ,.... τοὺς δὲ γνωστοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν α,β,γ,....,

Λύσις ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων της, ἢ ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν της.

γ') **Ἰσοδύναμοι** λέγονται δύο (ἢ περισσότεραι) ἐξισώσεις, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι ἐὰν **1) πᾶσα ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε καὶ ρίζα τῆς δευτέρας· 2) πᾶσα ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης.**

Αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται **μέλη τῆς ἐξισώσεως** (πρῶτον ἢ ἀριστερόν, καὶ δεύτερον ἢ δεξιόν).

Ἐξίσωσίς τις λέγεται ἀριθμητική, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὅρων της περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τοῦ ἀγνώστου· ἐγγράμματος δὲ ἂν τοὐναντίον.

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $7x+12x-3=4x$ εἶνε ἀριθμητική, ἐνῶ ἡ $3x-5\alpha=8\delta+2$ εἶνε ἐγγράμματος.

§ **36. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.**—Διὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεώς τινος στηριζόμεθα συνήθως εἰς τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

α') «**Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος**».

Πράγματι, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$3x=15.$$

Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 4, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$3x+4=15+4,$$

ἡ ὁποία λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Διότι ἡ τιμὴ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εἶνε ὁ 5, καθὼς εὐκόλως φαίνεται καὶ εἶνε

$$3.5=15,$$

Ἀλλ' ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν προκύπτουν ἴσοι· ἤτοι θὰ εἶνε καί

$$3.5+4=15+4. \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ x διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους της 3.5+4, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 15 + 4. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα ὡς εἴδομεν (1). Ὥστε ἡ ῥίζα 5 τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας εἶνε καὶ τῆς πρώτης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ῥίζαν 5, θὰ ἔχωμεν, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x τὸ 5.

$$3.5+4=15+4.$$

Ἂν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 4, θὰ ἔχωμεν $3.5=15$ (2).

Θέτομεν τώρα καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὴν ῥίζαν 5 τῆς δευτέρας, καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους της 3.5, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ 15. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι (2), ἐπομένως ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶνε ῥίζα καὶ τῆς πρώτης.

(*) Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots) \qquad (1),$$

ὅπου τὸ $\sigma(x, y, \ldots)$ καὶ $\varphi(x, y, \ldots)$ παριστάνουν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως, τὰ δὲ x, y,... τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς. Λέγω ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots)+\alpha=\varphi(x, y, \ldots)+\alpha, \qquad (2)$$

ὅπου τὸ α παριστάνει οἱονδήποτε ἀριθμόν, εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἐλύσαμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν καὶ εὕρομεν τὰς τιμὰς $x=\lambda$, $y=\mu$,... τῶν ἀγνώστων, θὰ εἶνε

$$\sigma(\lambda, \mu, \ldots)=\varphi(\lambda, \mu, \ldots).$$

Θέτομεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀντὶ τοῦ x, y,... τὸ λ, μ,. ὅτε ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους εὑρίσκομεν $\sigma(\lambda, \mu, \ldots)+\alpha$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου $\varphi(\lambda, \mu, \ldots)+\alpha$. Ἀλλ' ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ $\sigma(\lambda, \mu, \ldots)$ καὶ $\varphi(\lambda, \mu, \ldots)$ εἶνε ἴσοι καὶ οἱ $\sigma(\lambda, \mu, \ldots)+\alpha$, $\varphi(\lambda, \mu, \ldots)+\alpha$ εἶνε ἴσοι· δηλαδὴ αἱ ῥίζαι τῆς (1) εἶνε ῥίζαι καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εὑρήκαμεν τὰς τιμὰς $x=\lambda', y=\mu'$... ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\sigma(\lambda', \mu',...) + \alpha = \varphi(\lambda', \mu',..) + \alpha.$$

Ἂν θέσωμεν καὶ εἰς τὴν (1) $x=\lambda', y=\mu'$,... θὰ εὕρωμεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\sigma(\lambda', \mu',...)$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον $\varphi(\lambda', \mu',..)$. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ $\sigma(\lambda', \mu',...) + \alpha$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $\varphi(\lambda', \mu',...) + \alpha$, ἕπεται ὅτι καὶ

$$\sigma(\lambda', \mu'...) = \varphi(\lambda', \mu'..)\cdot$$

δηλαδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶνε ῥίζαι καὶ τῆς (1). Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμοι (§ **35**, γ').

β') « **Ἐὰν τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενός), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος**».

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $10x = 40$.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ $\frac{10x}{5} = \frac{40}{5}$,

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης, ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ τοῦ 5, εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν. Διότι, καθὼς εὐκόλως φαίνεται ἡ ῥίζα τῆς πρώτης εἶναι ἡ $x=4$· ἄρα ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ x τὸν 4 εἰς τὴν δοθεῖσαν, ἔχομεν

$$10.4 = 40.$$

Ἐὰν καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\frac{10.4}{5}$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον $\frac{40}{5}$. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα, διότι προκύπτουν ἀπὸ ἴσους ἀριθμούς, ἀφοῦ τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως ἡ ῥίζα $x=4$ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε ῥίζα καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\frac{10x}{5} = \frac{40}{5}$, αὐτὴ θὰ εἶνε ῥίζα καὶ τῆς πρώτης $10x = 40$. Διότι ἡ ῥίζα αὐτὴ εἶνε ἡ 4, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{10.4}{5} = \frac{40}{5}$,

Ἀλλὰ τότε καὶ 10.4 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 40, δηλαδὴ καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν 4.

(*) Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$σ(x, y,...) = φ(x, y,...)$$

εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$σ(x,y,...). α = φ(x,y,...) α,$$

ὅπου τὸ α εἶνε ἀριθμός τις διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὴν προηγουμένην(§ **36**, α', *).

1) Ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ἐπὶ μηδὲν προκύπτει $0=0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ μηδενὸς εἶνε ἀδύνατος (§ 30, γ'), ἕπεται ὅτ ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἀληθεύει, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως εἶνε μηδέν.

2) Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἡ ὁποία περιέχει γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, ἡ νέα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν παράστασιν. Π. χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε $α-β$, πρέπει τὸ $α-β$ νὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενὸς (σημειώνομεν δ' αὐτὸ οὕτω

$$α-β \neq 0 \quad \text{ἢ καὶ} \quad α \neq β).$$

Διότι, ἂν εἶνε $α-β=0$, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, τὴν ὁποίαν ἐξῃρέσαμεν.

3) Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις ἔχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε πάντοτε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Π. χ. ἐξίσωσις $3x=4$ καὶ ἡ $3x(x-2)=4(x-2)$ δὲν εἶνε ἰσοδύναμοι, διότι ἡ δευτέρα ἔχει τὴν ῥίζαν 2, καθὼς φαίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν, ἐνῷ ἡ πρώτη δὲν τὴν ἔχει.

γ') «Ἐὰν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις, ἔχουσα τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης, ἀλλ' ἡ ὁποία δὲν εἶνε, ἐν γένει, ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1). Εἶνε φανερόν, ὅτι πᾶσα ῥίζα ταύτης εἶνε ῥίζα τῆς $A^2=B^2$, (2) προκυπτούσης ἐκ τῆς (1) ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον. Διότι, διὰ τὰς ῥίζας τῆς (1) θὰ εἶνε.

$$\text{τιμὴ τοῦ } A = \text{τιμὴ τοῦ } B$$

και

$$(\text{τιμὴ τοῦ } A)^2 = (\text{τιμὴ τοῦ } B)^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$A^2 - B^2 = B^2 - B^2 = o \qquad (\S\ \mathbf{36}, \alpha')$$

ἢ τὴν

$$A^2 - B^2 = o,$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτω

$$(A - B)(A + B) = o.$$

Ἵνα αὕτη ἐπαληθεύεται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ εἷς τῶν δύο παραγόντων $(A-B)$, $(A+B)$ τοῦ πρώτου μέλους νὰ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν. Ἐὰν εἶνε $A-B=o$ ἐπαληθεύεται καὶ ἡ (1), ἀλλ' ἐὰν $A+B=o$ (3), ἡ (1) δὲν ἐπαληθεύεται. ἐν γένει, διότι ἡ (3) εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A=-B$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, **ἐὰν ἐξισώσεώς τινος ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν ἄλλην, ἔχουσαν τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους της.**

§ **37. Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἓν μέλος ἰσότητος εἰς τὸ ἄλλο.** — α') ἡ ἐξίσωσις

$$x - 6 = \alpha.$$

Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 6, λαμβάνομεν

$$x - 6 + 6 = \alpha + 6,$$

καὶ ἐπειδὴ $-6+6$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, μένει

$$x = \alpha + 6.$$

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει, καὶ ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν μεταφέρωμεν τὸ -6 ἐκ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τὸ δεύτερον μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x+6=\alpha$, λαμβάνομεν $x = \alpha - 6$, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὸν 6, ἢ ἂν μεταφέρωμεν τὸ 6 εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ὅθεν **«εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν του».**

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, **«ἂν ὅρος τις ὑπάρχῃ καὶ**

εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείπωμεν, καὶ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις θὰ εἶνε ἰσοδύναμος».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\gamma - x = \alpha - \beta \qquad (1).$$

Ἐὰν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον της εἰς τὸ ἄλλο μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον, εὑρίσκομεν

$$\beta - \alpha = x - \gamma, \quad \text{ἢ} \quad x - \gamma = \beta - \alpha, \qquad (2).$$

β') Ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ὅρων της. Ὥστε, **«ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεώς τινος προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».**

Προφανῶς ἔχομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A = B$ (ὅπου τὸ A καὶ B παριστάνουν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος της) εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A - B = B - B$, ἢ τὴν $A - B = 0$.

§ 38. Ἀπαλοιφὴ τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως.—Καλοῦμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεώς τινος τὴν εὕρεσιν ἰσοδυνάμου της ἄνευ παρονομαστῶν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x - 9.$$

Ἐὰν τὰ δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, δηλαδὴ ἐπὶ 33 καὶ ἁπλοποιήσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν

$$11x - 3x + 3 = 33x - 297,$$

ἡ ὁποία εἶνε ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἐν γένει, ἐὰν **ἐξίσωσίς τις ἔχῃ ὅρους κλασματικούς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμόν της ἄνευ παρονομαστῶν ἐὰν 1) εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων· 2) πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ἐ. κ. π. 3) ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων.**

Παράδειγμα

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}.$$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε

$$(x-5)\ (x-6)\ (x-8)\ (x-9).$$

Πολλαπλασιάζοντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. καὶ ἁπλοποιοῦντες, εὑρίσκομεν

$$(x-4)\ (x-6)\ (x-8)\ (x-9)-(x-5)^2\ (x-8)\ (x-9)$$
$$=(x-7)\ (x-5)\ (x-6)\ (x-9)-(x-8)^2\ (x-5)\ (x-6),$$

ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης καὶ ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν.

Διὰ τὴν συντομίαν ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν καὶ νὰ ἁπλοποιοῦμεν, ἀρκεῖ, νὰ πολλαπλασιάζωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ. κ. π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου, καὶ νὰ παραλείπωμεν τοὺς παρονομαστάς. Π. χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4}-\frac{2x-1}{5}-1=\frac{2}{3}$$

ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$\frac{\overbrace{3x}^{15}}{4}-\frac{\overbrace{2x-1}^{12}}{5}-\frac{\overbrace{1}^{60}}{1}=\frac{\overbrace{2}^{20}}{3}\qquad \text{ἐ. κ. π. } 60,$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ 15, 12, 60, 20 εἶνε τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3 καὶ ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὅρων, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πλέον τοὺς παρονομαστάς. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκομεν

$$45x-24x+12-60=40.$$

§ **39. Λύσις ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.**— α΄) Ἐξίσωσίς τις, ἔχουσα ἕνα ἄγνωστον, λέγεται **πρώτου βαθμοῦ ἢ ἁπλῆ,** ἐὰν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν της καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτει ἐξίσωσις ἐν ᾗ ὁ ἄγνωστος περιέρχεται εἰς πρῶτον βαθμόν.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις

$$3x - 7 = 14 - 4x, \qquad \alpha x + 6 = \gamma$$

εἶνε πρώτου βαθμοῦ. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐξίσωσίς τις λέγεται δευτέρου, τρίτου... βαθμοῦ, ἐὰν ὁ ἄγνωστος περιέχεται εἰς δεύτερον, τρίτον...βαθμόν.

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x - 7 = 14 - 4x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τὸν δὲ -7 εἰς τὸ δεύτερον, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3x + 4x = 14 + 7,$$

ἐκτελοῦντες δ' εἰς αὐτὴν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν $7x = 21.$

Ἐὰν τὰ δύο μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x=3$, ἥτις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀληθεύει, ἂν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ 3. Ἄρα καὶ ἡ ῥίζα τῆς δοθείσης εἶνε ἡ 3.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$1-4(x-2)=7x-3(3x-1).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ -4 ἐπὶ $(x-2)$ καὶ τοῦ -3 ἐπὶ $(3x-1)$, εὑρίσκομεν,

$$1-4x+8=7x-9x+3.$$

Εἰς αὐτὴν μεταφέρομεν τοὺς ὅρους τοὺς ἔχοντας τὸν x εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τοὺς δὲ ἄλλους εἰς τὸ δεύτερον, ὅτε προκύπτει

$$-4x+9x-7x=3-1-8,$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $\quad -2x=-6.$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ x εἶνε ἡ $x=\frac{6}{2}=3.$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμόν της ἄνευ παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 3.11 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, ἢ καθένα τῶν ἀριθμητῶν ἀντιστοίχως ἐπὶ 11·3·33·33 καὶ εὑρίσκομεν $11x - 3x + 3 = 33x - 297$.

Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς καθὼς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι $x = 12$.

γ') Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι **διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσίν τινα, 1) εὑρίσκομεν ἰσοδύναμόν της ἄνευ παρονομαστῶν (ἐὰν ἔχῃ τοιούτους ἡ δοθεῖσα)· 2) ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον (ἐὰν ὑπάρχουν)· 3) χωρίζομεν τοὺς ὅρους οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον, ἀπὸ τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτὸν ἐν τῇ νέᾳ ἐξισώσει (μεταφέροντες τοὺς μὲν εἰς τὸ ἓν μέλος τῆς ἐξισώσεως τοὺς δὲ εἰς τὸ ἄλλο)· 4) ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶνε πρώτου βαθμοῦ».**

§ **40. Ἐπαλήθευσις.**—Ἐὰν μετὰ τὴν λύσιν δοθείσης ἐξισώσεως ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του, θὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους ἢ μίαν ταὐτότητα, ὡς πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα, ἐὰν ἔχῃ τοιαῦτα. Ἡ ἐργασία αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας δεικνύομεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἀληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται **ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως**. Π.χ. ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x - \alpha}{5} = 2\alpha$, εὑρίσκομεν $x = 11\alpha$, ἀντικαθιστῶντες δ' εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀντὶ τοῦ x τὸ 11α, εὑρίσκομεν $\frac{11\alpha - \alpha}{5} = 2\alpha$ ἢ $11\alpha - \alpha = 10\alpha$, $10\alpha = 10\alpha$, ἡ ὁποία εἶνε ταὐτότης.

§ **41. Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$.**—Ἐκ πάσης ἐξισώσεως, ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον, τὸν x, εἰς πρῶτον βαθμόν, προκύπτει ἰσοδύναμός της τῆς μορφῆς $\alpha x = \beta$ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν x ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι δὲν τὸν ἔχουν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Τὸ α καὶ β θὰ εἶνε ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x = \beta$, ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις· 1) ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = \beta$ ἔχει μίαν ῥίζαν, ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσοτέρας; 2) τί πρέπει νὰ εἶνε τὰ α καὶ β διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ῥίζαν, καὶ τί διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας, ἢ καμμίαν;

'Εὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x=\beta$, εὑρίσκομεν $x=\frac{\beta}{\alpha}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ τιμὴ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶνε ὡρισμένη, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ῥίζαν, ἢ μίαν μόνην λύσιν.

'Εὰν εἶνε $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0.x=\beta$, ἢ $0=\beta$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, καὶ λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἀδύνατος, ἢ ὅτι δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

'Εὰν εἶνε $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, θὰ ἔχωμεν, ὅτι $0.x=0$, ἢ $0=0$ καὶ προφανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, λέγομεν δὲ ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ταὐτότης (§ **35**,**6'**) καὶ ἔχει ἀπείρους ῥίζας τὸ πλῆθος. Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x=\beta$.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x=\beta$.

1) Ἂν $\alpha\neq 0$, β οἱονδήποτε ὑπάρχει μία ῥίζα $x=\frac{\beta}{\alpha}$

2) Ἂν $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ δὲν ὑπάρχει καμμία ῥίζα.

3) Ἂν $\alpha=0$, $\beta=0$ ὑπάρχουν ἄπειροι ῥίζαι (ταὐτότης.)

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνῃ ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων

$5x-4=16$, $3x+4=25$, $24x-7x=34$·

$16x=7x+81$, $14x-79=8x-25$, $4x-14=x-2$.

Ὁμὰς δευτέρα

$5(x+1)+6(x+2)=7(x+3)$.

$4(x+7)-36=13(x-2)$·

$6(3x-1)-8x=140+2(x-1)$·

$6x^2+8x-(x^2-x)=5(x^2+3)+5$·

$5(x-3)-7(6-x)+29=50-3(8-x)$.

Ὁμὰς τρίτη

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{2x+1}{3}-\frac{4x-5}{5}=5.$$

$$2-\frac{7x-1}{6}=3x-\frac{19x+3}{4}.$$

$$\frac{5x+1}{3}+\frac{19x+7}{9}-\frac{3x-1}{3}=\frac{7x-1}{6}.$$

$$\frac{5x-1}{2x+3}=\frac{5x-3}{2x-3} \qquad \frac{9x+20}{36}=\frac{4x-12}{5x-4}+\frac{9x}{4}.$$

Ὁμὰς τετάρτη. — Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$x^2+\beta^2=(\alpha-x)^2 \qquad \left(\grave{\alpha}\pi.\ \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\right).$$

$$(\alpha+x)(\beta+x)=x(x-\gamma) \qquad \left(\grave{\alpha}\pi.\ \frac{-\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

$$\alpha x+2\beta=3\beta x+4\alpha, \qquad \left(\grave{\alpha}\pi.\ \frac{2\beta-4\alpha}{3\beta-\alpha}\right).$$

$$\frac{x}{\alpha+\alpha x}=\frac{\beta}{\gamma+\gamma x}, \qquad \left(\grave{\alpha}\pi.\ \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right).$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{x}{x-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \qquad \left(\grave{\alpha}\pi.\ \frac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha\beta}{\alpha+\alpha\beta+\beta}\right).$$

Ὁμὰς πέμπτη. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{4x}{x+4}-\frac{3x+23}{x^2-16}+\frac{1}{x-4}=4.$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}x+\frac{\alpha+1}{\alpha-1}x=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}.$$

$$\frac{2x+7}{2x+1}-\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{8(x+4)}{4x^2-1}.$$

$$\frac{2x+3}{\alpha}+\frac{3x-2\beta+\alpha-1}{3\alpha\beta+\alpha^2}=\frac{2x-1}{\alpha+3\beta}+\frac{3}{\alpha}$$

$$\frac{3}{14+2x}+\frac{29}{49-x^2}=\frac{1}{14-2x}. \qquad (\grave{\alpha}\pi.\ 18)$$

$$\frac{8\alpha}{(x+2)^2}+\frac{\alpha\beta}{(x-2)^2}-\frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta).$$

$$\frac{x+\alpha}{\alpha x-\alpha^2}-\frac{x-\alpha}{\alpha x+\alpha^2}=\frac{4x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2}.$$

§ 42. Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

α΄) Εἰς τὴν § **9**, γ΄ εὕρομεν ὅτι ἐὰν Κ παριστάνῃ κεφάλαιόν τι, Τ τὸν τόκον του εἰς χρόνον Χ καὶ Ε τὸ ἐπιτόκιον πρὸς τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$T=\frac{K.\ E.\ X}{100} \qquad (1)$$

῾Ο τύπος οὗτος δίδει τὴν τιμὴν τοῦ Τ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ Κ, Ε, Χ. Ἐὰν ὑποτεθοῦν γνωστὰ τὰ Κ, Ε, Χ, καὶ ἄγνωστον τὸ Τ ἡ (1) εἶνε ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς Τ. Ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ Κ, ἢ τὸ Ε, ἢ τὸ Χ, ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα τρία ἄλλα ποσὰ εἶνε γνωστά. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς Κ, ἢ ὡς πρὸς Ε, ἢ ὡς πρὸς Χ, ὑποθέτοντες καθεμίαν φορὰν τὰ ἄλλα γνωστά. Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα ἀπὸ ἕνα καὶ μόνον τύπον, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ ποσὰ τῶν προβλημάτων.

Ἐπίσης ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, Φυσικῇ καὶ Χημείᾳ δυνάμεθα ἐνίοτε διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἐξισώσεων νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις συνδέεται μὲ τὴν λύσιν σχετικοῦ πρὸς αὐτὰ προβλήματος. Οὕτω π. χ. ἐὰν Ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τό ὁποῖον ἔχει βάσεις α καὶ β ὕψος δέ υ, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν,

$$E = \frac{(\alpha+\beta).\upsilon}{2}, \qquad (2)$$

καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ, τοῦ α, ἢ τοῦ β, ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2), θεωροῦντες καθεμίαν φορὰν τὰς ἄλλας ποσότητας γνωστάς. Οὕτω π. χ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ

$$\beta = \frac{2E - \alpha\upsilon}{\upsilon}.$$

Ἂν ε εἶνε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος καὶ ω ὁ ὄγκος του, τὸ βάρος του β θὰ εἶνε $\beta = \varepsilon\,\omega.$ (3)

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ε, ἢ τὸ ω, ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχως, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς ε, ἢ ὡς πρὸς ω, θεωροῦντες τὰς ἄλλας ποσότητας ἀντιστοίχως γνωστάς.

Οὕτω ἔχομεν $\varepsilon = \frac{\beta}{\omega}$, καὶ $\omega = \frac{\beta}{\varepsilon}$.

β′) Εἰς πᾶν πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα πάντοτε εἶνε ἀριθμοί. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα ὡς ἄγνωστα παριστάνομεν συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων x, y, ω,. . . . . τὰ δὲ γνωστὰ δι' ἀριθμῶν ἢ διὰ τῶν α, β, γ, ...

γ′) Διὰ νὰ λυθῇ πρόβλημά τι, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὡρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις· τὰς ἀπαιτήσεις αὐτὰς καλοῦμεν **ὅρους τοῦ προβλήματος.**

Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα καλοῦμεν **ἐπιτάγματα.** Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα *«νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνῃ κατὰ 6».*

Τὸ ἐπίταγμα εἶνε, ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6. Ἑπομένως, ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ x, τὸ διπλάσιόν του θὰ εἶνε $2x$· ἐπειδὴ δὲ τὸ $2x$ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸν x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις $2x$ καὶ $x+6$ νὰ εἶνε ἴσαι. Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2x = x + 6,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 6$.

Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει ποσόν τι, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καλοῦμεν **περιορισμούς.** Π. χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ζητῆται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός.

ϛ') Πρὸς λύσιν προβλήματός τινος ἐργαζόμεθα, ἐν γένει, ὡς ἑξῆς.

1) Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος· δηλαδὴ ἐκφράζομεν δι' ἐξισώσεως τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ζητούμενα μὲ τὰ δεδομένα.

2) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τίς εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα.

3) Ἐξετάζομεν, ἂν ὁ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς πληροῖ καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

Ἐφαρμογαί.

Πρόβλημα 1ον). *«Τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀριθμόν, αὐξηθέντα κατὰ 20· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; ».*

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τριπλάσιόν του θὰ εἶνε $3x$, τὸ δὲ $x+20$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 20. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε τὸ $3x$ ἴσον μὲ

$x+20$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $3x = x + 20$, λύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=10$.

Πρόβλημα 2ον). «*Ὁ Ἰωάννης ἔχει τριπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία, καὶ οἱ δύο δὲ μαζὺ ἔχουν 32. Πόσα μῆλα ἔχει καθείς ;*»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ $3x$, τῶν δύο δὲ μαζὺ διὰ τοῦ $3x+x$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε 32. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+3x=32$, ἐκ τῆς λύσεως δ' αὐτῆς εὑρίσκομεν $x=8$. Ἤτοι ἡ μὲν Μαρία ἔχει 8 ὁ δὲ Ἰωάννης 24 μῆλα.

3ον Πρ. – τοῦ γνωστοῦ ἀθροίσματος δύο ἀγνώστων ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς διατιμώμενος, διάστημα τον ξε-ρον.

Πρόβλημα 3ον). «*Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 18· τὸ τριπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 5· ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί ;*»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶνε $18-x$, τὸ τριπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου $3x$, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου $4(18-x)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ $3x-4(18-x$ εἶνε ἴση μὲ 5, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x-4(18-x)=5,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=11$. Ἄρα οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 11 καὶ 7.

Πρόβλημα 4ον), «*Ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶνε διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του· πρὸ 15 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι των*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, τοῦ πατρὸς θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $2x$. Ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ πρὸ 15 ἐτῶν ἦτο $x-15$, τοῦ δὲ πατρὸς $2x-15$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὸ $2x-15$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $x-15$. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2x-15=3(x-15),$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=30$· ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶνε 30 τοῦ δὲ πατρὸς 60 ἔτη.

Πρόβλημα 5ον). «*Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{13}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$* ».

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{5+x}{13+x}=\frac{1}{2}$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=3$.

Πρόβλημα 6ον). «*Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶνε 6 μ. μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ἰσοδυνάμου του, τὸ δὲ ὕψος 5 μ. μικρότερον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $x.x=x^2$, ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $x+6$, τὸ δὲ ὕψος του διὰ $x-5$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶνε $(x+6)(x-5)$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ τετράγωνον εἶνε ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(x+6)(x-5)=x^2,$$

ἢ

$$x^2+6x-5x-30=x^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=30$. Ὥστε ἡ μὲν βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 36 μ. τὸ δὲ ὕψος 25 μ.

Πρόβλημα 7ον). «*Ὁ Α ἐκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 2 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 3 ἡμ. ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζὺ εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον;*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι ὁλόκληρον τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἐξ ἄλλου ἀφοῦ ὁ Α εἰς 2 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{2}$, ὁ δὲ Β εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου, Καὶ οἱ δύο μαζὺ εἰς 1 ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου.

Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ $x=1\frac{1}{5}$. Ὥστε καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $1\frac{1}{5}$ ἡμ.

Πρόβλημα 8ον). «*Πατὴρ τις εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός του β ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε ἢ ἦτο διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;*».

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς μετὰ x ἔτη θὰ εἶνε $\alpha+x$, τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta+x$.

Ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε διπλασία της τοῦ υἱοῦ, θ
ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha+x=2\ (\beta+x)$,
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\alpha-2\beta$.

Διερεύνησις. Ἐὰν τὸ $\alpha-2\beta$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, τὸ ζητού μενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον, ἐὰν δὲ ἀρνητικός, ἔγινεν εἰς τὸ πα ρελθόν, καὶ ἂν $\alpha-2\ \beta=0$, τὸ $x=0$· ἤτοι ἡ σημερινὴ ἡλικί τοῦ πατρὸς εἶνε διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Πρόβλημα 9ον). *«Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε α, ἡ δ διαφορά των δ· ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί;».*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μεγαλύτερος θὰ παριστάνεται διὰ τοῦ $x+\delta$, τὸ δὲ ἄθροισμά των διὰ τοῦ $x+x+\delta$. Ὥστε ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x+x+\delta=\alpha,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha-\delta}{2}$, οἱ δὲ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ

$$\frac{\alpha-\delta}{2}, \text{ καὶ } \frac{\alpha-\delta}{2}+\delta=\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Πρόβλημα 10ον). *«Ἐργάτης τις τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερός τις τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς β ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι;».*

Ἐὰν τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας τελειώνουν 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. τελειώνουν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ὁμοίως ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰς α ἡμέρας τελειώνει 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ τελειώνῃ τὸ $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{\beta}$ αὐτοῦ. Ἑπομένως καὶ οἱ δύο ἐργάται μαζὺ ἐργαζόμενοι, θὰ τελειώνουν εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}$· ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha\ \beta}{\alpha+\beta}$· ἤτοι καὶ οἱ δύο ἐργάται, μαζὺ ἐργαζόμενοι, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 11ον). *«Ἀπὸ τοῦ σημείου Α κινεῖται σημεῖόν τι ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ_1 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΑΓ· δ δευτερόλεπτα βραδύτερον κινεῖται ἀπὸ τοῦ ση-*

μείου *Β*, *κειμένου μ μέτρα ὄπισθεν τοῦ* **Α,** **ἄλλο** *σημεῖον ἐπίσης ὁμαλῶς καὶ μὲ ταχύτητα* τ_2 **κατὰ δευτερόλεπτον πρὸς** *τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὸ πρῶτον· πότε θὰ* **συναντηθοῦν τὰ δύο** *κινητά;*».

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σημείου. Εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον θὰ κινῆται $x-\delta$ δευτερόλεπτα μέχρι τῆς συναντήσεως. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ δεύτερον θὰ εἶνε $\tau_1 x$, ἐκεῖνος δὲ τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ δεύτερον θὰ εἶνε $\tau_2(x-\delta)$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\tau_2(x-\delta)=\tau_1 x+\mu$.

1ον εὑρεθέντος τοῦ χρόνου τῆς κινήσεως τοῦ 2ου συντάσσεται ἡ ἐξίσωσις διότι εἶνε ... κινήσεως.

Ἐπειδὴ ὁ δρόμος τοῦ δευτέρου, ὁ $\tau_2(x-\delta)$ εἶνε ἴσος μὲ τὸν δρόμον $\tau_1 x$, τὸν ὁποῖον διήνυσεν τὸ πρῶτον, ηὐξημένον κατὰ τὴν ἀπόστασιν μ, καθ' ἣν ἦτο ὀπίσω τὸ δεύτερον, ἀφοῦ τοῦτο ἔφθασε τὸ πρῶτον. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\mu+\tau_2\delta}{\tau_2-\tau_1}.$$

Διερεύνησις. Ἄν τὸ $\tau_2-\tau_1$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ_2 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ τ_1, ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον. Ἄν $\tau_2-\tau_1$ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ_2 εἶνε μικρότερον τοῦ τ_1, ἡ συνάντησις ἔγινε εἰς τὸ παρελθόν, διότι ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ εἶνε ἀρνητική (ὑποτίθεται ὅτι τὸ τ_1, τ_2, δ καὶ μ εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί). Ἄν $\tau_2-\tau_1$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάντησις δὲν θὰ γίνῃ ποτέ, διότι ἡ τιμὴ τοῦ x εἶνε κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν ἀριθμόν τινα ὡρισμένον καὶ παρονομαστὴν μηδέν· ἄρα ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶνε ἀπείρως μεγάλη (§ **30, γ'**).

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Αὐξάνει τις τὸ ἑξαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ 3, τὸ προκύπτον ἄθροισμα ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν 25, τὴν δὲ διαφορὰν διαιρεῖ διὰ 4 καὶ οὕτω λαμβάνει ἐξαγόμενον 1.

Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; (Ἀπ. 3).

2) Ἐὰν εἰς τὸ ἥμισυ ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τρίτον του καὶ 1, προκύπτει αὐτὸς ὁ ἀριθμός· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; (Ἀπ. 6).

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς 4 καὶ 6, ὥστε οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ νὰ ἔχουν πηλίκον $\frac{1}{4}$; (Ἀπ. 2).

4) Ἐὰν διψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 9, αὐξήσωμεν κατὰ 27, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς (§ **19**, γ΄. Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα 2,β΄.) (Ἀπ. 36).

5) Ἓν παιδίον λέγει· ἐὰν προσθέσω τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τῶν μήλων μου καὶ 20 ἀκόμη, θὰ ἔχω 150 μῆλα· πόσα μῆλα ἔχει τὸ παιδίον; (Ἀπ. 120).

6) Ἀφοῦ ἐξώδευσέ τις 20 δρ. ἐκ τῶν χρημάτων του, τὰ ὁποῖα εἶχε, καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ἔμειναν 10 δρ.· πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; (Ἀπ. 60).

7) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β· ἔχω τριπλάσια μῆλα τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ· δός μου 16 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν ἴσον ἀριθμὸν μήλων· πόσα μῆλα εἶχε καθείς; (Ἀπ. 48· 16).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἴς τινα συναναστροφὴν ἦσαν τριπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Μετὰ τὴν ἀναχώρησιν 4 ἀνδρῶν μετὰ τῶν συζύγων των ἔμειναν πενταπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες ἐξ ἀρχῆς; (Ἀπ. 24· 8).

2) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ διαιρούμενος ὁ 25 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 1; (6).

3) Ἠρωτήθη τις πόσων ἐτῶν εἶνε καὶ ἀπεκρίθη· μετὰ μ ἔτη ἡ ἡλικία μου θὰ εἶνε ν φορὰς μεγαλυτέρα ἐκείνης τὴν ὁποίαν εἶχον πρὸ μ ἐτῶν· ποία εἶνε ἡ ἡλικία του; (Ἀπ. $\left(\frac{\mu(\nu+1)}{\nu-1}\right)$

4) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἑξαπλάσιον εἶνε κατὰ 4α μεγαλύτερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ηὐξημένου κατὰ 2α;. (Ἀπ. 3α).

5) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ διαιρούμενος ὁ $\alpha^2+\beta^2$ δίδει πηλίκον $(\alpha-\beta)$ καὶ ὑπόλοιπον $2\beta^2$;. $(\alpha+\beta)$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ποσὸν 100 δρ. πρόκειται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ τριῶν προσώπων εἰς τρόπον ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 20 δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος διπλάσια τοῦ δευτέρου· πόσα θὰ λάβῃ καθείς; (40· 20· 40).

2) Τὸ βάρος τῆς οὐρᾶς ἰχθύος τινὸς ἦτο τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου βάρους του· τὸ σῶμά του ἐζύγιζε 5 ὀκ., ἡ δὲ κεφαλή του τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου βάρους του. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζεν ὁ ἰχθῦς; (Ἀπ. 15).

3) Μία δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ κρουνοῦ εἰς 3, ὑπὸ ἄλλου εἰς ..., καὶ ὑπὸ τρίτου εἰς 6 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας πληροῦται ἡ δεξαμενή, ἐὰν καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ ῥέουν συγχρόνως; ('Απ. $1\frac{1}{3}$)

4) Μία βρύσις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 2, δευτέρα εἰς 4. καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή, ἐὰν ἀνοίξῃ ἡ πρώτη βρύσις καὶ μετὰ μίαν ὥραν καὶ αἱ ἄλλαι δύο; ('Απ. $1\frac{6}{11}$)

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἔκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζός τις, διατρέχων 60 χιλ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμ. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν; ('Απ. 90).

2) Ἐκ δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν 575 χλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι, καθεὶς διευθυνόμενος πρὸς συνάντησιν τοῦ ἄλλου. Ἐὰν ὁ εἷς διανύῃ 60 χμ., ὁ δὲ ἄλλος 55 χμ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν; ('Απ. 5).

3) Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται σῶμά τι, διανῦον 32 μ. εἰς 4″ καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ Β· μετὰ 3″ ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν διεύθυνσιν Β κινούμενον, καὶ διανῦον 60 μ. εἰς 5″· πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον; ('Απ. 6· 72).

Ὁμὰς πέμπτη (γεωμετρικά). 1) Ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του εἶναι 20°· πόση εἶνε καθεμία τῶν γωνιῶν αὐτῶν; (55· 35).

2) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς βάσεως· πόσαι εἶνε αἱ γωνίαι του; ('Απ. 72°· 36°)·

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶνε κατὰ 20° μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της. ('Απ. 60°·80°· 100° 120°).

4) Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικόν τι πολύγωνον, τοῦ ὁποίου καθεμία γωνία εἶνε 144; ('Απ. 10).

5) Ποῖαι εἶνε αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν εἶνε μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 1:2:3:4;. ('Απ. 36· 72· 108· 144).

Ὁμὰς ἕκτη (κινήσεως). 1) Ἀπό τινος τόπου Α ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία τὴν 7ην πρωϊνὴν ὥραν καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν τόπον Β, διανύουσα 30 χμ καθ' ὥραν· 1 ὥρ. βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἄλλη ἁμαξοστοιχία, διανύουσα 60 χμ.

ἐξίσωσις $30x = 60(x-1)$

καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώ την; (2· 60

2) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου, διανύων 12 χμ. τὴν ὥραν· 3 ὥρ. βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου, ἄλλος διανύων 16 χμ. τὴν ὥραν· α΄) πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 χμ.; β΄) πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου 50 χμ..; 9· 24,5 (9· 27

$12x + 3 \cdot 12 = 3 \cdot 16$ ὥστε συμπ... μετὰ χρόνον

3) Τὴν 10ην πρωϊνὴν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τοῦ τόπου Α διανύων 12 χμ. καθ' ὥραν· ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ δεύτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 χμ. καθ' ὥραν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 3 ὥρ.; (11

4: ἔστω μετὰ x ὥρας· ἐν μιᾷ ὥρᾳ $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$ καὶ εἰς x ὥρας $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} = 1$

4) Ἀπὸ δύο τόπων ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ὁδοιπόροι πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου· ὁ εἷς χρειάζεται 7 ὥρ. διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν τόπων, ὁ δὲ δεύτερος 2 ὥρ. ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου· πότε θὰ συναντηθοῦν; $\left(2\frac{11}{12}\right)$

5. ἐὰν κινῶνται ἀντιθέτως ἔχομεν $\alpha x + \beta x = 360$, $x = \frac{360}{\alpha+\beta}$; ἐὰν ὁμόρροπως $\alpha x = 360 + \beta x$, $x = \frac{360}{\alpha-\beta}$

5) Ἀπό τινος σημείου τῆς περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως α^0 καὶ β^0 $(\alpha > \beta)$ κατὰ δευτερόλεπτον· πότε θὰ συναντηθοῦν; α΄) ἂν διευθύνωνται ἀντιθέτως, β) πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν; $\left(\frac{360''}{\alpha x, -\beta}\right)$

6) Πότε θὰ συναντηθοῦν τ' ἀνωτέρω κινητὰ διὰ 2αν 3ην... ... νην φοράν; $\left(\frac{360}{\alpha \mp \beta}\right) \nu$.

7) Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητά, διανύοντα αὐτὴν εἰς χρόνους t_1 καὶ $t_2 (t_1 > t_2)$· πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ 1ην, 2αν, ... νην φοράν, ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν (ἀντίθετον) διεύθυνσιν; $\left(\frac{t_1 \, t_2}{t_1 \mp t_2} \, \nu\right)$

8) Ἀπὸ σημεῖον περιφερείας ἀκτῖνος ρ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ μὲ ταχύτητας τ_1 καὶ τ_2· πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ 1ην, 2αν .... νην φοράν, ἂν ἔχουν ἀντίθετον τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν; $\left(\frac{2\pi\,\varrho}{\tau_1 \pm \tau_2}\,\nu\right)$

9) Μετὰ πόσα λεπτὰ ἀπὸ μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ πρώτων λεπτῶν; $\left(1\frac{1}{11} \text{ ὥρ.}\right)$

10) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται σχηματίζουν ὀρ-

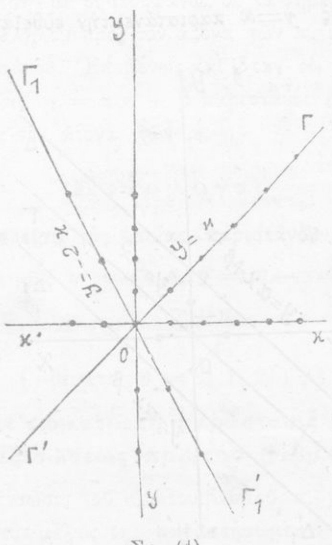
...ὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην φοράν; $\left(\frac{3}{11}, \frac{6}{11} \dots\right)$

11) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται σχηματίζουν ...ωνίαν α^0 διὰ 1ην, 2αν, 3ην,... φοράν; $\left(\frac{\alpha}{330}, \frac{360-\alpha}{330}\right)$.

12) Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων δι...χοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων διὰ πρώτην φοράν;

⋆ § 43. Περὶ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων $y=\alpha x$, $y=\alpha x+\beta$.

Εἰς τὴν § 17 ἐμάθομεν πῶς ἐν γένει παριστάνομεν γεωμετρι-



Σχ. (4)

κῶς μίαν συνάρτησιν.

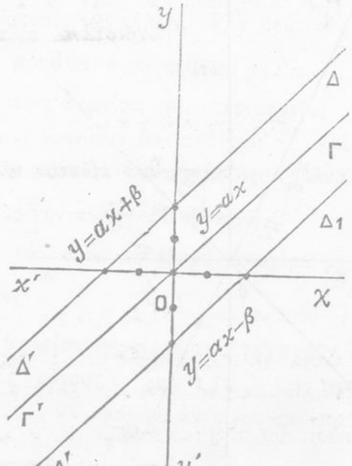
α΄) Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ παριστάνει πάντοτε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ α εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς π. χ. ὁ 1, ὅτε ἡ συνάρτησις εἶνε $y=x$. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$ (1) αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1, ἡ συνάρτησις λαμβάνει

ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς $\qquad 0 \cdot\ 1 \cdot\ 2 \cdot\ 3,$ $\qquad$ (2)
αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1. Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (1) τοῦ x, καὶ ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (2) τοῦ y, παρατηροῦμεν, ὅτι τά σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη τῶν τιμῶν (0,0)· (1,1)· (2,2)..... κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τῆς ΟΓ.

Ἐὰν εἰς τὸν x δώσωμεν τὰς τιμάς $\qquad -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot$
εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ y λαμβάνει τὰς τιμὰς $\qquad -1 \cdot -2 \cdot -3.$
τὰ δὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη

$$(-1,-1), \quad (-2,-2), \ldots\ldots$$

κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓ′, ἡ ὁποία εἶνε προέκτασις τῆς ΟΓ. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $y=x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν ΓΓ′, Σχ. (4).



Σχ. (5)

Ἀνάλογον ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν τὸ α εἶνε ἀρνητικός τις ἀριθμός, π.χ. ὁ -2· εὑρίσκομεν δὲ καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=-2x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν $Γ_1Γ_1'$, Σχ. (4).

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y=ax$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.

β') Τὴν συνάρτησιν $y=\alpha x+\beta$
δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην καθενὸς σημείου τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $y=\alpha x$, προσθέσωμεν τὴν ποσότητα β. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν της ἄνω, ἢ κάτω καθ' ὅσον τὸ β, εἶνε ἀριθμὸς θετικός, ἢ ἀρνητικός.

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν (βλ. Σχ. (5) τὰς εὐθείας $\Delta\Delta'$, $\Delta_1\Delta'_1$).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ x, τὸ y ἰσοῦται μὲ β. Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$ παριστάνει πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τεταγμένην ἴσην μὲ β. Προφανῶς δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἑπομένως καὶ ὅταν τὸ α εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμή, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Ἐφαρμογαὶ

Εὕρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ συναρτήσεις

$$y=3x,\ y=2x+3,\ y=\frac{3}{4}x,\ y=x-\frac{2}{3},\ y=\frac{x}{2}+5,$$
$$y=-\frac{5x}{6}-\frac{1}{8},\ y=+8,\ y=\frac{+1}{2}$$

(θέσατε $x=o, 1, 2, \ldots$)

* § 44. Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ῥίζης ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, π. χ. ἡ $3x-6=0$.

Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος της παραστήσωμεν διὰ τοῦ y, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $y=3x-6$

Διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, δηλαδὴ τὴν $x=2$, τὸ y εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν (2,0) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 μονάδων μήκους ἀπὸ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν ἀξόνων. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴδομεν, ἡ συνάρτησις $y=3x-6$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, ἕπεται ὅτι ἡ ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x. Καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συνάγομεν, ἐν γένει, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν ρίζαν μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$, ἀρκεῖ, νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἢ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y = \alpha x + \beta$, καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

* § **45. Κατασκευὴ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεώς της.**

α') Εἰς τὴν § **43** ἐμάθομεν, ὅτι πᾶσα συνάρτησις, ἡ ὁποία ἔχει τὴν μορφὴν

$$y = \alpha x + \beta \qquad (1),$$

παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν. Ὑπάρχει σύντομος τρόπος συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἥτις καλεῖται **ἐξίσωσις τῆς εὐθείας.** Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἡ ἄγνωστος εὐθεῖα κόπτει τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ τεταγμένη y εἶνε ἴση μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὸ y ἴσον μὲ μηδὲν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x + \beta = 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y θὰ εἶνε ἡ τετμημένη ἴση μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὸ μηδέν, θὰ εὕρωμεν

$$y = \beta,$$

καὶ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος (o, β) ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, εἶνε ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι *διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσίς της· 1) θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ y τὸ μηδέν, καὶ ἀκολούθως λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς x, ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς ὁρίζει τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x· 2) θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὸ μηδέν, καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς τὸ y, οὕτω δ' εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y· 3)* ἑνώνομεν τὰ δύο οὕτω εὑρεθέντα σημεῖα τῶν ἀξόνων δι' εὐθείας, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη.

'Εφαρμογή. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y = 3x - 5$.

Θέτομεν $y = 0$ καὶ ἔχομεν $3x - 5 = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $$x = +\frac{5}{3}$$

Θέτομεν $x = 0$, καὶ μένει $y = -5$. Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $\left(+\frac{5}{3}, 0\right)$ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ τοῦ $(0, -5)$ τοῦ ἄξονος τῶν y. Ἑνοῦντες τὰ σημεῖα αὐτὰ δι' εὐθείας, ἔχομεν ἐκείνην, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y = 3x - 5$.

β') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς $y = \alpha x$, π. χ. ἡ ἐξίσωσις $y = 2x$, παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x = 0$ εἶνε καὶ τὸ $y = 0$, ἑπομένως ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων. Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἓν ἄλλο ἀκόμη σημεῖόν της, θέτομεν $x = 1$ (ἢ ἄλλην τινὰ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς) καὶ εὑρίσκομεν $y = 2$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος $(1, 2)$, καὶ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς O καὶ διὰ τοῦ σημείου τούτου $(1, 2)$

'Εφαρμογαί. Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις

$y = 3x, \quad y = 3x + 1, \quad y = -2x, \quad y = -7x + 1, \quad y = \frac{1}{2}x - 1,$

$3y - 2x = 2, \quad \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}x - 1 = 0, \quad 3y = 2x,$

$2x - 3y + 1 = 0.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ **46. 'Ορισμοί** α'.) Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις, καθεμία τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους x καὶ y καὶ καθένα εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ

$$x + y = 10 \qquad x - y = 2$$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν καθενὸς τῶν ἀγνώστων $x = 6$, $y = 4$ καὶ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐν γένει, **καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.**

β') **Καλοῦμεν λύσιν συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων των, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.**

§ **47. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν συστημάτων.**— α')Δύο(ἢ περισσότερα) συστήματα ἐξισώσεων λέγονται **ἰσοδύναμα**, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων (§ **35**, γ').

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν (ἢ περισσοτέρας) τῶν ἐξισώσεών του δι' ἰσοδυνάμων των προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1 = B_1, \qquad A_2 = B_2, \qquad A_3 = B_3,$$

ὅπου τὰ $A_1, B_1, \ldots$ παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων, εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 - B_2 = 0, \quad A_3 - B_3 = 0 \qquad (\S\ 37,\ \beta').$$

β') «**Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο (ἢ περισσοτέρας) αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν**».

Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1) \qquad A_1 - B_1 = 0, \qquad A_2 - B_2 = 0, \qquad A_3 - B_3 = 0\cdot$$

λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$(2) \quad A_1 - B_1 = 0, \ (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2) = 0, \ A_3 - B_3 - 0,$$

τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐκ τοῦ (1) ἀφοῦ ἐπροσθέσαμεν τὰς δύο πρώτας του ἐξισώσεις κατὰ μέλη, καὶ ἀντεκαταστήσαμεν τὴν δευτέραν του διὰ τῆς κροκυψάσης. Διότι, διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (1), θὰ ἔχωμεν

τιμὴ τοῦ A_1 — τιμὴ τοῦ $B_1 = 0$

» » A_2 — » » $B_2 = 0$

» » A_3 — » » $B_3 = 0\cdot$

ἐπομένως καὶ τιμὴ τοῦ A_1 — τιμὴ τοῦ $B_1=0$,

τιμὴ τοῦ (A_1+A_2) — τιμὴ τοῦ $(B_1+B_2)=0$,

τιμὴ τοῦ A_3 — τιμὴ τοῦ $B_3=0$·

ἤτοι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (2). Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (2) ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (1).

γ') «**Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία αὐτῶν εἶνε λυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἴς τινας μόνον), εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν».**

Ἔστω τὸ σύστημα

(1) $x=A_1(y,\omega,\varphi,\dots)$, $A_2(x,y,\omega,\varphi,\dots)=0$, $A_3(x,y,\omega,\varphi,\dots)=0$,

ὅπου τὰ A_1, A_2, A_3 εἶνε μέλη τῶν ἐξισώσεων, περιέχοντα, ἐν γένει, τοὺς ἀγνώστους $x,y,\omega,\dots$ Λέγω ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

(2) $x=A_1(y,\omega,\dots)$, $A_2(A_1,y,\omega,\dots)=A'_2=0$, $A_3(A_1,y,\omega,\dots)=A'_3=0$,

ὅπου τὰ A_2', A_3' παραστάνουν τὰ ἐξαγόμενα τῶν A_2, A_3, ἀφοῦ ἀντεκατεστάθη τὸ x ὑπὸ τοῦ ἴσου του $A_1(y,\omega,\varphi,\dots)$. Πράγματι, ἂν ἀληθεύσῃ τὸ σύστημα (1) ἢ (2), τὸ x καὶ τὸ A_1 θὰ γίνουν ἴσοι ἀριθμοὶ (μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀγνώστων ὑπὸ τῶν τιμῶν των)· ἀλλὰ τότε καὶ τὸ (2) ἢ τὸ (1) θὰ ἀληθεύσῃ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, διότι τὸ (2) διαφέρει τοῦ (1) κατὰ τὸ ὅτι ἀντὶ τοῦ x ἔχει τεθῆ εἰς τὴν θέσιν του τὸ A_1, ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ταῦτα θὰ εἶνε ἴσοι ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀγνώστων ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ τιμῶν των.

§ 48. Λύσις συστήματος ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Πρὸς λύσιν δοθέντος συστήματος δύο ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους μεταχειριζόμεθα συνήθως τὰς ἑξῆς μεθόδους, στηριζομένας ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

α') **Μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.** 1) Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης μετασχηματίζομεν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (ἢ μίαν αὐτῶν) εἰς τρόπον ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου x (ἢ y) νὰ εἶνε α' ἢ τῆς προσθέσεως. κατ.

Χατζιδάκι ἢ τῆς ἀναγωγῆς κατὰ Λάμπα

ἀντίθετοι. Ἀκολούθως προσθέτομεν τὰς νέας ἐξισώσεις, ὥστε νὰ προκύψῃ ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον τῶν ἀγνώστων. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων, ταύτην δ᾽ ἀντικαθιστῶντες εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἔχουσαν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον, τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν τιμήν, ἐὰν λύσωμεν τὴν τελευτέαν ταύτην.

Παραδείγματα. 1ον) Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 4y = 11. \end{array} \right.$$

Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν x, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ 3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ -2, ὅτε προκύπτει τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$6x + 9y = 24, \qquad -6x - 8y = -22 \cdot$$

προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $y = 2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἢ ἐργαζόμεθα ὁμοίως, ἀπαλείφοντες τὸν y, ἢ θέτομεν εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, π.χ. εἰς τὴν πρώτην, ἀντὶ τοῦ y τὴν τιμήν του 2, ὅτε εὑρίσκομεν

$2x + 6 = 8$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 1$.

2ον) Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x+y}{10} + \dfrac{x-y}{2} = 0 \\[2mm] \dfrac{x+y}{5} + \dfrac{x-y}{2} - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς καθεμιᾶς τῶν ἐξισώσεων τούτων, καὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{array}{r} -3 \\ 8 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 12x - 8y = 0 \\ 7x - 3y = 10. \end{array} \right.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τούτων ἐπὶ -3, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 8 καὶ εὑρίσκομεν

$-36x + 24y = 0$, $56x - 24y = 80 \cdot$ διὰ προσθέσεως τούτων εὑρίσκομεν τὴν $20x = 80$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x = 4$.

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν εἰς μίαν τῶν προηγουμένων καὶ λύομεν ὡς πρὸς y, ὅτε εὑρίσκομεν $y = 6$. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν, θέτομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα (1) ἀντὶ τοῦ x καὶ y τὰς τιμὰς 4 καὶ 6 ἀντιστοίχως καὶ βλέπομεν, ὅτι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

3ον) Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{array}{r|l} \alpha_1 & \alpha x+\beta y=\gamma \\ -\alpha & \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1. \end{array}$

Πολλαπλασιάζομεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ α_1 καὶ $-\alpha$, ὅτε προκύπτουν

$$\alpha\,\alpha_1 x+\alpha_1\,\beta y=\alpha_1\,\gamma$$
$$-\alpha\,\alpha_1 x-\alpha\,\beta_1 y=-\alpha\,\gamma_1\cdot$$

διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)\,y=\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1\cdot$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $y=\dfrac{\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1}{\alpha_1\beta-\alpha\beta_1}=\dfrac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}.$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ $x=\dfrac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}.$

2) Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶνε ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ τὰ πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου διὰ καθενὸς ἐξ αὐτῶν. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$12x+5y=17, \qquad -8x+7y=-1,$$

τὸ ἐ. κ. π. τῶν 12 καὶ 8 εἶνε τὸ 24· πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24 : 12=2, καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24 : 8=3 καὶ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12x+5y=\ \ 17 \\ 3 & -\ 8x+7y=-1 \\ \hline & \ \ 24x+10y=\ \ 34 \\ & -24x+21y=-3. \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει $31y=31$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y=1$, καὶ ἀκολούθως $x=1$.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος λέγεται συνήθως *τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ μέθοδος διὰ τῆς προσθέσεως.*

β') Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.—Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $2x+3y=8, \quad 3x+4y=11 \qquad (1)$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων· ἤτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν, ὅτε λαμβάνομεν

$$x=\frac{8-3y}{2}$$

Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν (1) καὶ εὑρίσκομεν $3.\frac{8-3y}{2}+4y=11.$

Λύομεν ταύτην ὡς πρὸς y, καὶ εὑρίσκομεν $y=2.$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ τοῦ 2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἢ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ $x=\frac{8-3y}{2}$, ὅτε εὑρίσκομεν $x=\frac{8-6}{2}=1.$

γ') **Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.** — Ἔστω τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1).

Διὰ νὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως, ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x, εἰς τὴν πρώτην καὶ δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος· ἤτοι λύομεν καθεμίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τον x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν, καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x=\frac{8-3y}{2}$,

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x=\frac{11-4y}{3}$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶνε ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3y}{2}=\frac{11-4y}{3}$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y=2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἐργαζόμεθα καθὼς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὑρίσκομεν $x=1.$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. — 1) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ διὰ τῶν τριῶν μεθόδων καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσίς των.

$2x+3y=8$, $3x+2y=7$, $\quad 6x-5y=1$, $3x-10y=-7$, $\quad 5x-8y=1$, $3x=21-2y$,

$\alpha x+\beta y=\beta^2$, $x+y=\alpha$, $\quad (\alpha+\beta)x=3(\alpha+\beta)-3$, $x+y=3$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου καὶ νὰ γίνῃ καὶ ἡ ἐπαλήθευσίς των.

$x+y=12$, $x-y=4$, $\quad x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, $\quad 3x+4y=18$, $3x-4y=-6$;

7x+14y = 181
4x−14y = 60

$x = 3y + 34$ $\quad 1,3x = 0,8y + 37 \quad$ $y = \alpha^2 x + \beta^2$
$x = 12y + 40, \quad 1,3x = 10y - 14,5, \quad y = \beta^2 x + \alpha^2,$
$9x - 2y = 84 \quad 11x + 8y = 139$
$y = 73 - 7x, \quad 5x = 9y.$

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα

$7(x-3) = 2(y+2) \quad 2(x+2y) + 3(2x+y) = 10$
$3(x+5) = 2(x+10), \quad 3(2x-y) + x + 8y = 19,$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 6\frac{2}{6} \qquad \frac{4x-1}{3} + \frac{2y-5}{5} = 24$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 9\frac{1}{3}, \qquad \frac{5x+1}{9} - \frac{2-5y}{8} = 15,$$
$$\frac{2x+3y+4}{3x+4y+5} = \frac{3}{4} \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \alpha$$
$$\frac{3x+7y+5}{4x+9y+22} = \frac{1}{2} \qquad \frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = \alpha.$$
$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \alpha^2\beta$$
$$\frac{x}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta^2} = -\beta^2,$$
$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{10}{xy}$$
$$\frac{5}{3x} + \frac{3}{4y} = \frac{49}{12xy},$$
$$\frac{2x+3y}{2x-5y} = \frac{5\alpha^2-\beta^2}{5\beta^2-\alpha^2}, \quad \frac{x+2\alpha^2}{y+3\beta^2} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+2\beta^2},$$
$$\frac{x}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{y+\beta}{\alpha^2-\alpha\beta} \qquad \frac{x}{\alpha^2+\alpha\beta} + \frac{y}{\alpha^2-\alpha\beta} = 2\alpha$$
$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}x + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = 2\alpha, \qquad \frac{x}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2} + \frac{y}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$$

* § 49 Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{cases}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο διά τινος τῶν ἀνωτέρω μεθόδων, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμὰς τῶν x καὶ y

$$x = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \qquad y = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \qquad (2)$$

α΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς $\quad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$

εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, δηλαδὴ

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0, \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta_1 \neq \alpha_1\beta,$$

ἢ καὶ
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \neq \frac{\beta}{\beta_1},$$

τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἐὰν τοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\alpha_1\beta_1$, ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενὸς) αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x καὶ y (2) εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι, καὶ καθὼς βλέπομεν, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν τὴν (2).

β΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ἀλλ' οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων (2) διάφοροι τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα δὲν ἐπιδέχεται καμμίαν λύσιν. Διότι, ἂν τὰς τιμὰς (2) γράψωμεν οὕτω

$$(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)x = \gamma\beta_1 - \gamma_1\beta, \qquad (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\, y = \alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma,$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι $\quad 0 = \gamma\beta_1 - \gamma_1\beta, \qquad 0 = \alpha\,\gamma_1 - \alpha_1\gamma,$

τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων (2) εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀλλὰ καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν (2) τῶν x καὶ y παρατηροῦμεν, ὅτι καθεμία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ κλάσματα (2) εἶνε ἀδύνατος, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης εἶνε μηδέν, ὁ δὲ διαιρετέος ποσότης ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενὸς (§ **30**, γ΄). Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν κλασμάτων (2) αὐξάνουν εἰς ἄπειρον, ὅταν παρονομαστής των τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, διὰ τοῦτο θὰ λέγωμεν ὅτι ὅταν εἶνε

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0,$$

ἀλλ' οἱ $\quad \gamma\beta_1 - \gamma_1\beta \mp 0, \quad \alpha_1\gamma - \alpha_1\gamma \mp 0,$

τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον, ἢ ὅτι ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμόν, ἢ εἶνε ἄπειροι.

γ΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (2) εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, δηλαδὴ $\quad \alpha\,\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$

καὶ τοὐλάχιστον εἷς τῶν ἀριθμητῶν τῶν αὐτῶν κλασμάτων εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, π.χ. $\quad \gamma\,\beta_1 - \gamma_1\,\beta = 0,$

τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων. Διότι ἐκ τῆς

$$\alpha\,\beta_1 - \alpha_1\,\beta = 0$$

ἔχομεν εὐκόλως $\quad \dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1}.$

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\quad \gamma\,\beta_1 - \gamma_1\,\beta = 0$

λαμβάνομεν $\quad \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}, \quad$ συγκρίνοντες δὲ τὰς δύο ἀναλογίας ἔχομεν $\quad \dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}.$

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ, θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \rho,$

καὶ $\alpha = \alpha_1 \rho, \quad \beta = \beta_1 \rho, \quad \gamma = \gamma_1 \rho.$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν α, β, γ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y = \gamma$ τοῦ συστήματος (1), ὅτε προκύπτει

$$\alpha_1 \rho x + \beta_1 \rho y = \gamma_1 \rho,$$

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ ρ (ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενός) ἔχομεν $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1.$

Ἀλλ' αὐτὴ εἶνε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (1). Ὥστε τὸ σύστημα (1) περιορίζεται κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1.$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, δίδομεν εἰς τὸν ἕνα τῶν δύο ἀγνώστων, ἔστω εἰς τὸν y, μίαν οἱανδήποτε τιμήν, π. χ. τὴν $y = 1$, ὅτε ἔχομεν $\alpha_1 x + \beta_1 = \gamma_1,$ καὶ λύοντες ταύτην ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν $x = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1}.$

Ἐὰν εἰς τὸν y δώσωμεν ἄλλας τιμάς, π. χ. τὰς 0· 2.. θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν x τὰς τιμὰς

$$x = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad x = \frac{\gamma_1 - 2\beta_1}{\alpha_1}, \quad \ldots \quad \text{κ. ο. κ.}$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν εἰς τὸν y, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ ἄπειρον πλῆθος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ x. Διὰ τοῦτο τὸ δοθὲν σύστημα κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων καὶ θὰ τὸ καλοῦμεν **ἀόριστον**.

δ') Ἐὰν τύχῃ νὰ εἶνε $\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 0$, τὰ δὲ γ καὶ γ_1 ἢ ἓν ἐκ τούτων διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον. Διότι τὰ μὲν πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) γίνονται μηδέν, τὰ δὲ δεύτερα ἢ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Τέλος ἐὰν εἶνε καὶ τὰ γ, γ_1 ἴσα μὲ μηδέν, αἱ ἐξισώσεις (1) εἶνε ταὐτότητες, καὶ ἐπαληθεύονται δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι

1) **ἐὰν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$, ἢ ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} \neq \frac{\beta}{\beta_1}$, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν.**

2) **Ἐὰν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, καὶ $\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta \neq 0$,**

$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \neq 0$, ἢ ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} \neq \frac{\gamma}{\gamma_1}$ τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.

3) Ἐὰν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ καὶ τοὐλάχιστον εἷς τῶν $\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta$, $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ἢ ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$, τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον.

4) Ἐὰν $\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma = \gamma_1 = 0$, τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον· ἐὰν δὲ $\alpha = \beta = \alpha_1 = \beta_1 = 0$ καὶ τοὐλάχιστον ἓν τῶν γ, γ_1 διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω τὸ σύστημα.

$$x - y + 3 = y - 2x + 10, \qquad 7x - 3y - 2 = x + y + 1$$

ἢ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τοὺς ἀγνώστους ἀπὸ τῶν ἄλλων, καὶ τὰς ἀναγωγὰς

$$3x - 2y = 7 \quad , \quad 6x - 4y = 3.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = -12 + 12 = 0$, $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 9 - 42 = -33 \neq 0$, ἑπομένως τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.

2) Ἔστω τὸ σύστημα $\lambda x + y = 2$, $x + y = 2\lambda$, ὅπου τὸ λ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ποσότης γνωστή. Ἔχομεν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \lambda - 1$. Ἑπομένως, ἐὰν τὸ λ εἶνε διάφορον τῆς 1, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, τὴν

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda - 1} = -2 \;, y = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{\lambda - 1} = 2(\lambda + 1).$$

Ἐὰν τὸ $\lambda = 1$, τὸ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ λ τὸ 1, $x + y = 2$, $x + y = 2$· ἤτοι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην ἐξίσωσιν καὶ εἶνε ἀόριστον.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

$$\lambda x + y = 1 \qquad \lambda x - 2y = \lambda \qquad x + (3\lambda - 1)y = 0$$
$$x + y = \lambda, \qquad (\lambda - 1)x - y = 1, \qquad x + 2y = \lambda - 4$$

2) Προσδιορίσατε τὸ λ, ὥστε τὸ σύστημα

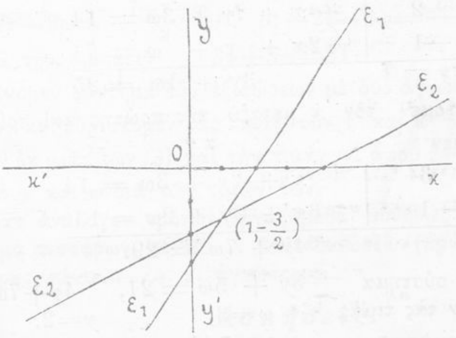
$y = \lambda x + 2, \quad 3y - \lambda = x + 3$ νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν,

οὐδεμίαν, ἀπείρους λύσεις $\left(\lambda = \frac{1}{3}\text{ ἀδύνατον}\right)$

* § **30. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ῥιζῶν συ-τήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους τοῦ ρώτου βαθμοῦ.**

Ἔστω τὸ σύστημα $3x - 2y = 6, \quad x - 2y = 4.$

Ἐὰν λύσωμεν αὐτὸ εὑρίσκομεν $x = 1, y = -\frac{3}{2}$. Τὸ ημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ ιεῖται ἐπὶ καθεμιᾶς τῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας παριστάνουν ἀντι-



Σχ (6)

στοίχως αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἐπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν καθεμίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος, καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των παριστάνει τὰς ῥίζας τοῦ συστήματος (βλ. Σχ. 6).

Ἀσκήσεις

Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν

$3x - 4y = 1 \qquad \frac{3}{4}x - 7y - 1 = 0$

$2x + 3y = 5, \qquad x = 2y,$

$$\frac{1}{2}x - \frac{4}{9}y + 7 = 0, \qquad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$
$$x - 3y + 1 = 0 \qquad 2x - 3y = 0$$

§ 51. Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.

Ἐὰν ἔχωμεν ἕν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους

π. χ. τὸ (1) $\begin{cases} x + 2y + 3\omega = 14 \\ 2x + y + \omega = 7 \\ 3x + 2y + 2\omega = 13 \end{cases}$

δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν διὰ μιᾶς τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν (§ **48**).

α΄) Οὕτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων ἐκ τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 2 & x + 2y + 3\omega = 14 \\ -1 & 2x + y + \omega = 7 \\ \hline & 3y + 1\omega = 25 \end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 3 & x + 2y + 3\omega = 14 \\ -1 & 3x + 2y + 2\omega = 13 \\ \hline & 4y + 7\omega = 29. \end{array}$$

Λύομεν τὸ σύστημα $3y + 5\omega = 21$, $4y + 7\omega = 29$,
καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $\omega = 3$, $y = 2$.

Ἐὰν τὰς τιμὰς τῶν ω καὶ y ἀντικαταστήσωμεν εἰς μίαν τῶν (1), εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x = 1$.

β΄) Τὸ ἀνωτέρω σύστημα λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως ὡς ἑξῆς. Λύομεν τὴν μίαν τῶν (1), ἔστω τὴν πρώτην, ὡς πρὸς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. ὡς πρὸς x, θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς, ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x = 14 - 2y - 3\omega \cdot \qquad (2)$$

ταύτην θέτομεν εἰς τὰς δύο ἄλλας τῶν (1) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεες μὲ δύο ἀγνώστους

$$2(14 - 2y - 3\omega) + y + \omega = 7$$
$$3(14 - 2y - 3\omega) + 2y + 2\omega = 13$$

ἢ μετὰ τὴν διάταξιν $3y + 5\omega = 21$, $5y + 7\omega = 29$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ y καὶ ω. Ἀκολούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν του x.

γ')Τὸ δοθὲν σύστημα (1) λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως ὡς ἑξῆς. Ἀπομονοῦμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν x, εἰς καθεμίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων (1), θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ἀγνώστους ὡς γνωστούς, καὶ εὑρίσκομεν

$$(3)\left\{\begin{aligned} x &= 14-2y-3\omega \\ x &= \frac{7-y-\omega}{2} \\ x &= \frac{13-2y-2\omega}{3} \end{aligned}\right.$$

Τὴν πρώτην τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ x ἐξισώνομεν μὲ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην, οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους

$$14-2y-3\omega=\frac{7-y-\omega}{2},\quad 14-2y-3\omega=\frac{13-2y-2\omega}{3}$$

ἢ μετὰ τὴν διάταξιν $3y+5\omega=21$, $4y+7\omega=29$ οὕτω ἔχομεν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν, καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω· ἀκολούθως εὑρίσκομεν ἐκ μιᾶς τῶν (3) καὶ τὴν τιμὴν x, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν ἐκεῖ τὸ y καὶ ω διὰ τῶν τιμῶν των.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα συνήθως διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα τεσσάρων, πέντε....... ἐξισώσεων (πρώτου βαθμοῦ) μὲ τέσσαρας, πέντε....... ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

Ὁμὰς πρώτη,

$$\left\{\begin{aligned} 4x-3y+2\omega&=4 \\ 2x+5y-3\omega&=3 \\ 5x+6y-2\omega&=11, \end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} 3x+3y+\omega&=33 \\ 3x+y+3\omega&=35 \\ x+3y+3\omega&=37\cdot \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x+y+\omega&=16 \\ 0{,}3x+0{,}2y+0{,}5\omega&=4{,}3, \\ 0{,}5x+0{,}3y+0{,}2\omega&=4 \end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} 3x+3y+\omega&=33 \\ \frac{3}{4}x+y+3\omega&=35 \\ x+3y+3\omega&=37 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 5\tfrac{1}{2}x+3\tfrac{2}{3}y+4\tfrac{1}{2}\omega&=-1 \\ 7\tfrac{1}{2}x+3\tfrac{1}{4}y&=28 \\ 3\tfrac{1}{4}x+4\tfrac{2}{3}\omega&=34{,}5 \end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} x+\frac{1}{2}y&=5 \\ y+\frac{1}{3}\omega&=3 \\ \omega+\frac{1}{4}x&=4. \end{aligned}\right.$$

Ὁμὰς δευτέρα.

$$\begin{cases} \alpha\beta x+\beta\gamma y+\alpha\gamma\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=3 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega=\alpha+\beta+\gamma. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\gamma(\alpha+\beta) \\ \dfrac{x}{\beta}+\dfrac{\omega}{\gamma}=\alpha(\beta+\gamma) \\ \dfrac{y}{\gamma}+\dfrac{\omega}{\alpha}=\beta(\alpha+\gamma). \end{cases}$$

$$(\alpha-\beta)x+(\beta-\gamma)y+(\alpha-\gamma)\quad \omega=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}x+\dfrac{\beta-\gamma}{\beta}y=2 \\ \dfrac{\beta-\gamma}{\beta}y+\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma}\omega=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+\omega=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=k \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega=k^2 \end{cases}$$

Ὁμὰς τρίτη.

$$\begin{cases} \beta x-(\alpha+\beta)y=\beta^2(\alpha+\beta) \\ (\alpha+\beta)y+(\alpha-\beta)\omega=\alpha(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta) \\ (\alpha-\beta)x=\alpha\omega. \end{cases}$$

x=5
y=2
ω=3
φ=4

$$\begin{cases} x+y+\omega+\varphi=10 \\ x-y+\omega-\varphi=6 \\ x+y-\omega+\varphi=4 \\ x+y+\omega-\varphi=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+\omega+\varphi=24 \\ 3y+x+\omega+\varphi=28 \\ 3\omega+\varphi+y+x=32 \\ 3\varphi+\varphi+y+x=36. \end{cases}$$

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά τινα, (στηριζόμενα ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ ἰδιοτήτων) τὸ εἶδος τῶν ὁποίων δὲν εἶνε ὡρισμένον καὶ φανερὸν διὰ καθὲν σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν. Οὕτω π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος

$$(1)\qquad \begin{cases} x+3y+5\omega=3 \\ x:y:\omega=15:5:3, \end{cases}$$

γράφομεν τὴν δευτέραν ὡς ἑξῆς $\dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{\omega}{3}$

καὶ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων θά εἶνε

$$\frac{x}{15}=\frac{3y}{15}=\frac{5\omega}{15}=\frac{x+3y+5\omega.}{45}$$

ἕνεκα τῆς πρώτης τῶν (1) ἔχομεν $\dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{\omega}{3}=\dfrac{1}{15}$

ἑπομένως $x=\dfrac{15}{15}=1,\quad y=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3},\quad \omega=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}.$

2) Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰ κάτωθι συστήματα

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}\omega = 7 \\ x : y = 3 : 4 \\ y : \omega = 8 : 13. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + \omega = 4 \\ x : y = \alpha : \beta \\ x : \omega = \gamma : \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - \omega - \varphi = \mu \\ x : y = \alpha : \beta \\ y : \omega = \gamma : \delta \\ \varphi : y = \varepsilon : \zeta \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu x = \nu y = \rho\omega \\ \alpha x + \beta y + \gamma\omega = \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\varphi}{\delta} \\ \alpha x + \beta y + \gamma\omega + \delta\varphi = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Ἐνίοτε εὐκολύνεται ἡ λύσις συστήματός τινος διὰ καταλλήλου ἀντικαταστάσεως. Π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος

$$\frac{1}{3x-2y+1} + \frac{1}{x+2y-3} = \frac{5}{12}$$
$$\frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12},$$

θέτομεν (1) $x + 2y - 3 = \omega$, καὶ $3x - 2y + 1 = \varphi$, ὅτε

προκύπτει τὸ σύστημα $\quad \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\varphi} = \frac{5}{12}, \quad \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{12}$

Ἂν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{2}{\omega} = \frac{6}{12}$, ἐκ ταύτης δὲ $\omega = 4$. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ φ, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς τῶν φ καὶ ω εἰς τὰς (1), θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τοὺς x καὶ y.

2) Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \mu \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \\ 25x - 9y = 81, \end{cases}$$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5}, \quad \frac{y\omega}{y+\omega} = \frac{18}{7}, \quad \frac{x\omega}{x+\omega} = \frac{36}{23}, \qquad \frac{xy}{\alpha x + \beta y} = \gamma, \quad \frac{x\omega}{\alpha\omega + \gamma x} = \beta, \quad \frac{y\omega}{\beta\omega + \gamma y} = \alpha.$$

Ὁμὰς ἕκτη. 1) Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{cases}$ γραφικῶς· ἤτοι α') τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων, ὅτι εἶνε ἀδύνατον;

2) Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων των;

§ **52. Προβλήματα.** 1) «*Ἐὰν ὁ Α δώσῃ 10 δρ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλάσια τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 10 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δραχμὰς εἶχε καθείς;*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰς δραχμὰς τοῦ Α καὶ διὰ τοῦ y τὰς τοῦ Β, δώσῃ δὲ ὁ Α εἰς τὸν Β 10 δρ. τὰ μὲν χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ μείνουν εἰς τὸν Α θὰ παριστάνωνται διὰ τοῦ $(x-10)$, τὰ δὲ τοῦ Β διὰ τοῦ $(y+10)$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $3(x-10)=y+10$.

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 10 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ εἶνε $x+10=2(y-10)$·
Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα

$$y+10=3(x-10)$$
$$2(y-10)=x+10$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι $y=26$ δρ., $x=22$ δρ.

2) «*Ἐὰν κλάσματός τινος διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, ὁ δὲ παρανομαστὴς ἐλαττωθῇ κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{2}$. *ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ παρανομαστής, αὐξηθῇ δ' ὁ ἀριθμητής του κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{7}$. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα*».

Ἔστω x ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρανομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ἔχωμεν συμφώνως μὲ τὴν ἐκφώνησιν

$$\frac{2x}{y-1}=\frac{1}{2}, \quad \text{ἐξ ἄλλου δὲ} \quad \frac{x+1}{2y}=\frac{1}{7}$$

ἤτοι τὸ σύστημα $\frac{2x}{y-1}=\frac{1}{2}$, $\frac{x+1}{2y}=\frac{1}{7}$ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι $x=5$, $y=21$.

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶνε τὸ $\frac{5}{21}$

3) «*Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ θ' ἀπέχουν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 12 μ. μέν, ἐὰν κινηθοῦν ἐπὶ 12″ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, 204 μ. δέ, ἐὰν πρὸς ἀντιθέτους. Πόση εἶνε ἡ ταχύτης καθενὸς (κινουμένου ὁμαλῶς);*»

Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου καὶ y ἡ τοῦ δευτέρου· μετὰ 12″ τὸ πρῶτον θὰ διατρέξῃ $12x$, τὸ δεύτερον $12y$ μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασίς των θὰ εἶνε τότε $(12x-12y)$ μ., ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ $(12x+12y)$ μ. ἐὰν ἀντίθετον. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$12x-12y=12, \qquad 12x+12y=204,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=9$ μ., $y=8$ μ.

4) «*Ἐὰν εἰς τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τετραπλάσιον ἑνὸς ἄλλου, προκύπτει ἄθροισμα 22· ἐὰν εἰς τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου προστεθῇ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, προκύπτει 29. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί;*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν πρῶτον καὶ διὰ τοῦ y τὸν δεύτερον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου $2x$, τὸ τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου $4y$ καὶ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος $2x+4y=22$.

Ἐξ ἄλλου τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου $3x$ καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου $5y$ ἔχουν ἄθροισμα 29. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα

$$2x+4y=22, \qquad 3x+5y=29,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=3$, $y=4$.

5) «*Ἓν παιδίον λέγει εἰς ἄλλο· ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου, θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ· δός μου τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα εἶχε τὸ καθέν;*».

Ἐὰν διὰ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ διὰ y τὰ τοῦ δευτέρου, τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν μήλων τοῦ πρώτου θὰ παρίστανται διὰ τοῦ $\frac{x}{2}$, τὸ δὲ ἥμισυ τοῦ δευτέρου διὰ $\frac{y}{2}$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$x+\frac{y}{2}=40, \quad y+\frac{x}{2}=35,$$

καὶ λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν ὅτι $x=30$, $y=20$ μῆλα.

6) «*Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τῆς πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δρ. τῆς δὲ δευτέρας β δρ: πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὀκάδων καὶ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ γ δρ.;*»

Ἔστω ὅτι θὰ θέσῃ x ὀκ. ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ y ἐκ τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς $x + y = \mu$, $\alpha x + \beta y = \gamma\mu$, ἐκ τῶν ὁποίων $x = \mu\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$, $y = \mu\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$.

Ἵνα ὑπάρχῃ μία λύσις τοῦ συστήματος, πρέπει νὰ εἶνε $\beta-\alpha \neq 0$, ἢ $\beta \neq \alpha$. Καὶ ἂν $\beta > \alpha$, πρέπει καὶ $\beta \geqq \gamma$, $\gamma \geqq \alpha$, ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y νὰ εἶνε θετικαὶ ἢ μηδέν. Ἂν $\beta < \alpha$, πρέπει καὶ $\beta \leqq \gamma$, $\gamma \leqq \alpha$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἂν $\beta = \alpha$, τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν καὶ $\beta = \gamma$, ὅτε καταντᾷ ἀόριστον. Ἐν γένει, διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶνε $\beta > \gamma > \alpha$, ἢ $\beta < \gamma < \alpha$, δηλαδὴ τὸ γ πρέπει νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν α καὶ β.

7) «*Ἑνὸς τριψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 21· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων του εἶνε διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός*».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ y τῶν δεκάδων, καὶ διὰ τοῦ ω τὸ τῶν μονάδων, ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $100x + 10y + \omega$, κατὰ δὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$x + y + \omega = 21, \qquad x + \omega = 2y$$
$$100y + 10x + \omega = 100x + 10y + \omega - 90,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι

$$x = 8,\ y = 7,\ \omega = 6.$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 876.

8) «*Ὁ Α καὶ Β μαζὺ ἐργαζόμενοι τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 3 ἡμ., ὁ Α καὶ ὁ Γ εἰς 4, ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς* $4\frac{1}{2}$ *ἡμ.* (τὸ αὐτὸ ἔργον). *Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α,Β,Γ, δύναται νὰ τὸ ἐκτελέσῃ;*».

Ἔστω ὅτι εἰς x, y, ω ἡμέρας δύναται ἀντιστοίχως ὁ Α,Β,Γ, νὰ ἐκτελέσῃ μόνος τὸ ἔργον. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ μέρος τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{y}$, καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Τὸ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ παριστάνει πόσον ἔργον ἐκτελεῖ ὁ Α καὶ Β εἰς 1 ἡμέραν. Ἀλλ' αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$· διότι ἀφοῦ οἱ δύο εἰς 3 ἡμ, ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 1 ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν ὅτι

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σκεπτόμενοι ἔχομεν τὸ σύστημα

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{2}{9} \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{4\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}\right)$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{29}{72}$, ἐὰν δ' ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην, καὶ δευτέραν, τῶν (1) διαδοχικῶς, εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega}=\frac{5}{72}$, $\frac{1}{y}=\frac{11}{72}$, $\frac{1}{x}=\frac{13}{72}$

καὶ $\omega=14\frac{2}{5}$, $y=6\frac{6}{11}$, $x=5\frac{7}{13}$.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) 3(α) ὀκ. καφὲ καὶ 2(β) ὀκ. ζακχάρεως ἐκόστιζον 9,12(γ) δρ.· 3 ὀκ. ζακχάρεως καὶ 2(β) ὀκ. καφὲ τῶν αὐτῶν ποιοτήτων 7,68(δ) δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ καὶ τῆς ζαχάρεως; (2,4· 0,96)

2) Ἔχει τις κεφάλαιον 5400(α) δρ. καὶ ἄλλο 6500(β) δρ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 384 δρ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου, καὶ τοὐναντίον, θὰ ἐλάμβανε $5\frac{1}{2}$ (δ) δρ. περισσοτέρας (ὀλιγωτέρας) ὡς τόκον ἢ πρίν. Ποῖον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον καθενός κεφαλαίου;

3) Τριγώνου τινὸς αἱ γωνίαι εἶνε μεταξύ των καθεὶς οἱ 4 : 5 :6. (μ:ν:ρ:). Πόσων μοιρῶν εἶνε αἱ γωνίαι αὐταί; (48^0· 60^0· 72^0).

4) Ποσὸν 8100(α) δρ. πρέπει νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια νὰ εἶνε μεταξύ των καθὼς 2 : 3 : 4 (μ:ν:ρ:). Ποῖα εἶνε τὰ μερίδια; (1800· 2700· 3600).

5) Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5(α) μ. ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6(β) μ. ἀντὶ 122(γ) δρ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξεν τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη (ἐκέρδισεν) ὁ ἀγοραστὴς 2(γ) δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους; (10· 12).

6) Ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶνε $25^0\ 16'\ 18''$·($α^0$)· εὑρεῖν τὰς γωνίας του. ($57^0\ 38'9''$·$32^0\ 22,51''$).

7) Ἐὰν δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶνε ὁμόρροποι, ἔχουν συνισταμένην 16(α) χρ., ἐὰν δὲ ἀντίρροποι 2(β) χρ.

Πόση εἶνε ἡ ἔντασις καθεμιᾶς τούτων ; (9·7)

8) Ἐὰν εἰς τοὺς ὅρους κλάσματός τινος προστεθῇ 1 προκύπτει $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ ἐὰν ἀφαιρεθῇ 1, προκύπτει $\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{\nu+1}.\right)$ Ποῖον εἶνε τὸ κλάσμα ; $\left(\frac{3}{7}\right)$

9) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β· δός μου 10(α) ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω $1\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ τῶν ἰδικῶν σου· ὁ Β ἀπαντᾷ, δός μου 10(β) ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια $\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)$ τῶν ἰδικῶν σου· πόσα εἶχε καθείς ; (20· 30).

Ὁμὰς δευτέρα (κινήσεως). 1) Ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα, δύο κινητά, τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες εἶνε καθὼς 2:3 (μ : ν)· πότε τὸ πρῶτον, ἀναχωροῦν 8'' (τ'') πρὸ τοῦ ἄλλου, θὰ διανύσῃ τὸν δρόμον ΑΒ, ἐὰν καὶ τὰ δύο συγχρόνως ἐπιτυγχάνουν τοῦ σκοποῦ των ; (Διερεύνησις).

2) Ἀπὸ δύο τόπων ἀπεχόντων 1400 (δ) μέτρα μεταξύ των, ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶνται μετὰ 10'' (τ_1'')· ἐὰν ηὐξάνετο ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ 20 (π) $^0/_0$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἠλαττώνετο κατὰ 20 (π_1) $^0/_0$, θὰ συνηντῶντο μετὰ 15 (τ_2'')· Τίνες εἶνε αἱ ταχύτητές των ; (Διερεύνησις).

3) Ἀπὸ δύο σημείων περιφερείας κύκλου, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁρίζεται τόξον α^0, κινοῦνται δύο κινητὰ ἐπὶ τοῦ μικροτέρου τόξου ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ τ_1''· ἐὰν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, συναντῶνται μετὰ τ_2''· πόσων μοιρῶν τόξον διανύει καθὲν κινητὸν εἰς 1'' ; (Διερεύνησις).

Ὁμὰς τρίτη (γεωμετρικά) 1) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς ἔχουν μῆκος 8(α) μ.· 10(β) μ.· 12 (γ) μ.· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου του τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶνε 60 (τ) μ.;

2) Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν ἀκτίνων των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶνε α, β, γ ;

3) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶνε 80(α) $^0/_0$ τῆς βάσεως, εἶνε 54(π) μ. πόσαι εἶνε αἱ διαστάσεις του; (15· 12)

4) Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καὶ ἔχουν ἀπόστασιν

τῶν κέντρων των 0,30 μ. (ἢ λ)· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν ἀκτίνων των, ἐὰν ἔχουν λόγον καθὼς ὁ 2 : 3 (ἢ ὁ μ : ν);

5) Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς καὶ ἔχουν ἀπόστασιν τῶν κέντρων των 20 (λ) μ: ποῖαι εἶνε αἱ ἀκτῖνές των, ἐὰν ἔχουν λόγον καθὼς ὁ 5:3 (μ:ν); (50· 30)

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε 604· ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν διὰ τοῦ δευτέρου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34· νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶνε 6. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν διψήφιον ἀριθμόν, ὅστις σχηματίζεται ἐκ τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, εἰς τὰς μονάδας, λαμβάνομεν 15· ἐὰν προσθέσωμεν ὅμως τὸν διψήφιον, ὅστις σχηματίζεται ἐκ τῶν δεκάδων καὶ μονάδων, εἰς τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, λαμβάνομεν 24. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός. (123).

3) Εἰς τετραψήφιον ἀριθμὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρτίας, καὶ περιττῆς, τάξεως ψηφίων του εἶνε 21, ἡ δὲ διαφορά των 3· ἐὰν σχηματίσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὁμάδας ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ ἀνὰ δύο ψηφία, καὶ ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην ἀπὸ τῆς δευτέρας, εὑρίσκομεν 34, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὁμάδων εἶνε 102· Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; (ἐξαιρετικὴ περίπτωσις).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

§ 53. Ἀνισότητες καὶ ἁπλούσταται ἰδιότητες αὐτῶν.

Καθὼς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ ἐὰν δύο ἀριθμοί, π. χ. οἱ 3 καὶ 5, εἶνε ἄνισοι, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτὴν διὰ τοῦ $3<5$, οὕτω καὶ ὅταν δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἢ μεγέθη, π. χ. α καὶ β, εἶνε ἄνισα, καὶ τὸ α μεγαλύτερον τοῦ β, σημειώνομεν διὰ τοῦ $\beta<\alpha$, ἢ $\alpha>\beta$· **ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται ἀνισότης μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἐννοοῦμεν δὲ δι' αὐτῆς, ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός.** Εἶνε φανερόν, ὅτι τὰ συγκρινόμενα πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδῆ μεγέθη, ἂν δὲν εἶνε ἀφῃρημένοι ἀριθμοί. Αἱ ποσότητες α καὶ β λέγονται ὅροι τῶν δύο μελῶν, ἢ ἁπλῶς **μέλη τῆς ἀνισότητος**.

Δύο ἀνισότητες τῆς μορφῆς $\alpha > \beta$, καὶ $\gamma > \delta$, ἢ τῆς μορφῆς $\alpha < \beta$, καὶ $\gamma < \delta$ λέγονται **ὁμοιόστροφοι,** ἐνῶ αἱ $\alpha < \beta$, καὶ $\gamma > \delta$ **ἑτερόστροφοι.**

Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ προσθέσωμεν, ἀφαιρέσωμεν κλπ. δύο (ἢ περισσοτέρας) ἀνισότητας, θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι θὰ προσθέσωμεν, ἀφαιρέσωμεν κλπ. τὰ ἀντίστοιχα πρῶτα καὶ δεύτερα μέλη ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων.

α΄) **Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος αὐξήσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἢ πολλαπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν.**

Διότι ἔστω $\alpha > \beta$, καὶ $\alpha = \beta + x$, ὅπου x παριστάνει θετικὸν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον β, δίδει ἄθροισμα τὸν α. Ἐὰν τὸ μ παριστάνῃ ἕνα ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν **(§ 36, α΄)** $\alpha \mp \mu = \beta + x \mp \mu$, ἄρα $\alpha \mp \mu > \beta \pm \mu$·

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τῆς $\alpha = \beta + x$, ἔχομεν $\alpha\mu = \beta\mu + x\mu$, καὶ ἑπομένως $\alpha\mu > \beta\mu$, ἐὰν τὸ μ, ἄρα καὶ τὸ μx εἶνε θετικοί. Ὁμοίως ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος ἔχομεν $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\beta}{\mu} + \frac{x}{\mu}$,

καὶ $\frac{\alpha}{\mu} > \frac{\beta}{\mu}$, ἐὰν μ, ὅτε καὶ $\frac{x}{\mu}$, εἶνε θετικοί.

β΄) **Ἂν προσθέσωμεν δύο ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας (ἢ πολλαπλασιάσωμεν, ἂν τὰ μέλη των εἶνε θετικά), προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν.**

Διότι ἔστω $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, καὶ $\alpha = \beta + x$, $\gamma = \delta + y$. Ὅπου x καὶ y παριστάνουν ἀριθμοὺς θετικούς. Ἔχομεν ὡς γνωστὸν (διὰ προσθέσεως τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη) $\alpha + \gamma = \beta + \delta + x + y$ ἄρα καὶ $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha = \beta + x$, $\gamma = \delta + y$, ἕπεται (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη), ὅτι

$\alpha\gamma = \beta\delta + \beta y + \delta x + xy$, ἄρα $\alpha\gamma > \beta\delta$, ὑποτιθεμένου ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ εἶνε θετικοί.

γ') Ἂν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ — 1, προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος.

Διότι ἔστω $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha = \beta + x$· θὰ ἔχωμεν

$$\alpha(-1) = \beta(-1) + x(-1)$$

ἢ $$-\beta = -\alpha + x\,, \quad \text{ἄρα} \quad -\beta > -\alpha.$$

§ **54**. **Ἐφαρμογαί.**—α'). Ἄλλαι ἰδιότητες ἀφορῶσαι τὴν ἀφαίρεσιν ἢ διαίρεσιν ἑτεροστρόφων ἀνισοτήτων δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἐπειδὴ καθεμία ἀφαίρεσις, ἢ διαίρεσις δύναται νὰ μετατραπῆ εἰς πρόσθεσιν, ἢ πολλαπλασιασμόν.

Οὕτω ἔχομεν

1) Ἐκ τῆς $\alpha > \beta$, καὶ τῆς $\gamma < \delta$ ἕπεται $\alpha - \gamma > \beta - \delta$. Διότι, ἐκ τῆς $\gamma < \delta$ ἕπεται ἡ $-\gamma > -\delta$, (§ **53**, γ'). Ἐκ δὲ τῶν

$\alpha > \beta$, $-\gamma > -\delta$, ἔχομεν (§ **53**, β') ἡ $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.

2) Ἐκ τῆς $\alpha > \beta$, καὶ $\gamma < \delta$ ἕπεται ἡ $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$, ἐὰν τὰ μέλη τῶν δοθεισῶν εἶνε θετικά. Διότι ἐκ τῆς $\gamma < \delta$ ἕπεται, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{\gamma\delta}$, ἡ $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\delta}$ καὶ ἐκ τῶν $\alpha > \beta$, $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\delta}$

ἔχομεν (§ **53**, β') $$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}.$$

β') Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων εὑρίσκομεν ὅτι, **ἂν εἰς τινα ἀνισότητα μεταφέρωμεν καθὲν μέλος της εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἀντίθετον σημεῖόν του, προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν.**

Δοθείσης ἀνισότητος τινος, ἐχούσης παρονομαστάς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλην ὁμοιόστροφον, ἀπηλλαγμένην παρονομαστῶν.

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἀνισότητά τινα, ἡ ὁποία ἔχει ἕνα ἄγνωστον εἰς πρῶτον βαθμόν, (νὰ εὕρωμεν διὰ τίνας τιμὰς τοῦ ἀγνώστου ἐπαληθεύεται).

Π. χ. διὰ τὴν $(2x+3)-(x+1) > 5$ ἔχομεν $2x+3-x-1 > 5$, καὶ ἐκ ταύτης μετὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ —1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν ἔχομεν $x > 3$· δηλαδὴ πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι ζητοῦμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς ἀνισότητας $x+3<4$, $x-5>-8$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $x<1$· ὥστε τὴν πρώτην ἐπαληθεύουν οἱ ἀριθμοὶ -1· -2· -3. . .

Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $x>-3$· ἤτοι τὴν δευτέραν ἐπαληθεύουν οἱ ἀριθμοὶ -2· -1· $+1$· $+2$. . . . . .

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν λύσεων συνάγομεν ὅτι οἱ -1· -2 ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο δοθείσας ἀνισότητας.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἐὰν ἀπὸ ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν ἀνισότητα, λαμβάνομεν ἀνισότητα, ἑτερόστροφον τῆς δοθείσης.

2) Ἐὰν ἀνισότητα πολλαπλασιάσωμεν μὲ ἑτερόστροφόν της, τῆς ὁποίας τὰ μέλη εἶνε ἀρνητικά, λαμβάνομεν ἀνισότητα ἑτερόστροφον τῆς πρώτης.

3) Ἐὰν ἰσότητα διαιρέσωμεν μὲ ἀνισότητα, τῆς ὁποίας τὰ μέλη εἶνε θετικὰ (ἀρνητικά), λαμβάνομεν ἀνισότητα ἑτερόστροφον (ὁμοιόστροφον) τῆς δοθείσης.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ πρῶτος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου, τὸ ἄθροισμά των εἶνε μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ δευτέρου, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου.

2) Ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν καθεὶς εἶνε μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ οἱ τρεῖς εἶνε θετικοί.

3) Ἐὰν ἐκ τριῶν ἀριθμῶν καθεὶς εἶνε μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καθεὶς ἐξ αὐτῶν θὰ εἶνε μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

4) Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^2>\alpha\beta$ ($\alpha^2<\alpha\beta$), ἂν τὸ α εἶνε θετικὸς (ἀρνητικός).

5) Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$ ($\alpha<1$), θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu>1$ ($\alpha^\mu<1$), ἐὰν α, μ εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί.

6) Ἐὰν οἱ α, β, γ εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί, θὰ εἶνε καὶ $\alpha+\beta+\gamma)^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἀνισότητας.

α′) $\begin{matrix} 3x+5>0 \\ 5x-12<0 \end{matrix}$ · β′) $\begin{matrix} -4x>15 \\ 5x-28>0 \end{matrix}$ · γ′) $\begin{matrix} -4x-17>0 \\ 9x-12>0 \end{matrix}$ ·

δ′) $\begin{matrix} 8x+7>0 \\ 9x-13>0 \end{matrix}$ · ε′) $\begin{matrix} -7x-48>0 \\ -9x+37>0 \end{matrix}$ · στ′) $\begin{matrix} \dfrac{x}{2}-5>\dfrac{x-1}{4} \\ \dfrac{x}{2}-1<\dfrac{x-7}{3} \end{matrix}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ

§ **55. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς.**— α′) Καθὼς γνωρίζομεν (§ **8**, α′) εἶνε

$$\alpha^4 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha, \qquad \alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha,$$

$\alpha^2 = \alpha.\ \alpha$· τὸ α^1 εἶνε $\alpha^2 : \alpha = \alpha$, τὸ α^0 εἶνε $\alpha : \alpha = 1$.

Διὰ ταῦτα θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ α^{-1} ἰσοῦται μὲ $1 : \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

$\alpha^{-2} =$ μὲ $\dfrac{1}{\alpha} : \alpha = \dfrac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3} = \dfrac{1}{\alpha^2} : \alpha = \dfrac{1}{\alpha^3}$, $\alpha^{-4} = \dfrac{1}{\alpha_4}$,

καὶ γενικῶς $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$. Ἤτοι· **τὸ νὰ ὑψώσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύναμιν, ἔχουσαν ἐκθέτην τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἐκθέτου, καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἀντίστροφον τιμὴν τῆς δυνάμεως ταύτης.**

β′.) Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν § **8**, ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀρνητικοὺς καὶ ἀκεραίους. Οὕτω π. χ. ἔχομεν, ὅτι

$$\alpha^3.\ \alpha^{-5} = \alpha^3.\frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} = \alpha^{3-5}.$$

$$(\alpha\beta)^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha\ \beta)^\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu\ \beta^\nu} = \alpha^{-\nu}\ .\ \beta^{-\nu}.$$

γ′) Ἐὰν $\alpha > \beta$, ἐνῶ α, β εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu > \beta^\mu$, μ ἀκέραιος καὶ θετικός.

Διότι θὰ εἶνε $\alpha^2 > \beta^2$ (§ **53**, β′). Ὁμοίως $\alpha^3 > \beta^3$ καὶ γενικῶς, $\alpha^\mu > \beta^\mu$.

του ορισμου της δυναμεως ως γινομενου ισων παραγοντων
ορίζομεν την δύναμιν μόνον δι ακεραιους θετικους εκθετας.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ

$3^{x-1}+3^{x}+3^{x-1}$ διὰ $x=1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ διὰ

τιμὴ τοῦ X

2) Ὁμοίως αἱ

$x^{\nu}.\, x^{-1}$, $\quad x^{\nu} : x^{-1}$, $\quad 2^5\, 2.2^0.\, 2^{-2}$, $\quad \left((\alpha^{\nu}+1)^{0}\right)^{\rho}$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ

2^{-1}, $\quad 4^{-2}$, $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

$(0,1)^{-1}$, $\quad (0,2^5)^{-2}$, $\quad \frac{1}{4^{-2}}$, $\quad \frac{1}{(0,1)^{-3}}$

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις, καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενά των χωρὶς ἀρνητικοὺς ἐκθέτας.

$$\alpha^{-3}\,.\,\alpha^{-4}\,.\,\alpha^{0}.\,\alpha^{5}, \qquad 2^3.2.^0 2^1.2^{-3}, \qquad 7^8 : 7^{-9}.$$

$$5^3 : 5^{-4}, \qquad x^{\nu}.\, x^{-2\nu} : x^{-\nu}, \qquad (2\alpha\,\beta)^{-3}, \qquad \left(\frac{xy}{z\omega}\right)^{-2},$$

$$(3\alpha^{-3}\,\beta^2\,\gamma^{-4})^{-2} \qquad \left(\frac{2\alpha^{-1}\ \beta^{-2}}{\gamma^{-1}\ \delta^{-2}}\right)^{-2}.$$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί, καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος.

2) Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$ $(\alpha<1)$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\mu}<1$ $(\alpha^{\mu}>1)$, ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικός, τὸ δὲ α θετικός.

3) Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$, θὰ εἶνε, $\alpha^{-3}<\alpha^{-2}<\alpha^{-1}<\alpha^{0}<\alpha^{1}<\alpha^{2}\ldots$

4) Ἐὰν τὸ α εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς 1, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{-3}>\alpha^{-2}>\alpha^{-1}>\alpha^{0}>\alpha^{1}>\alpha^{2}>\alpha^{3}>\ldots$

§ **56. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.** Εἰς τὰς ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας μέχρι τοῦδε ἐξητάσαμεν, οἱ ἄγνωστοι ἦσαν πάντοτε βάσεις τῆς πρώτης δυνάμεώς των. Ὑπάρχουν ἐξισώσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἄγνωστος εἶνε ἐκθέτης δυνάμεως ἐν ᾗ ἡ βάσις εἶνε ἀριθμός τις, ἢ παράστασις γνωστή, π. χ. ἡ ἐξίσωσις $3^x=5$.

Τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις καλοῦμεν **ἐκθετικὰς** τὰς δὲ ἄλλας πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων **ἀλγεβρικάς.** Ἐκθετικὰς ἐξισώσεις δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως, ἰδίως καθ' ἣν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν μορφὴν $\alpha^x=1$, ὅπου τὸ α

$((\alpha^\nu+1)^0)^\rho$

$\alpha^0=1$

εἶνε διάφορον τοῦ 0, τοῦ 1, καὶ τοῦ -1, καθὼς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

Παραδείγματα. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{3x}=\frac{1}{27}$

Δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $3^{3x}.3^3=3^{3x+3}=1$ καὶ ἐκ ταύτης ἔχομεν $3x+3=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται, ὅτι $x=-1$.

στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μονάδος ὡς δυνάμεως ἐχούσης ἐκθέτην 0.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{2x+5}=2^{2x+5}$. Δίδομεν εἰς ταύτην τὴν μορφὴν $\frac{3^{2x+5}}{2^{2x+5}}=1$, ἢ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+5}=1$, ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι $2x+5=0$, καὶ $x=-2\frac{1}{2}$.

(γ) διότι διαιροῦμεν ἴσα ἀριθμῶν ὡς ἔχομεν πηλίκον τὴν μονάδα.

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$

Δίδομεν εἰς τὴν αὐτὴν μορφὴν

$$\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}}=\frac{2^x.2^{-1}-2^x.2^{-3}}{3^x.3^{-3}+3^x.3^{-4}}=\frac{2^x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}{3^x\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)}=\frac{\frac{3}{8}2^x}{\frac{4}{81}.3^x}$$

$$\frac{3.81.2^x}{4.8.3^x}=\frac{3^5\,2^x}{2^5.3^x}=\frac{2^x.2^{-5}}{3^x.3^{-5}}=\frac{2^{x-5}}{3^{x-5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=1$$

καὶ $x-5=0$, ἐξ οὗ $x=5$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$\alpha^{x+\mu}=\alpha^{2\mu}$, $\alpha^{3x+2}=\alpha^{x+4}$, $\gamma^{-x}=\gamma^{x+3}$,

$\beta^{(2x+1)(3x+4)}=\beta^{(3x+1)(2x+5)}$, $(\alpha^\mu)^{x+3}=\alpha^{x+2\nu}$,

$\alpha^{2x+3}\,\alpha^{3x+1}=\alpha^{5x+6}\,\alpha^{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}$.

Ὁμὰς δευτέρα.

$2^{2x}=32$, $(-2)^x=16$, $2^{-x}=32$.

$(-2)^{-x}=-8$, $2^x=0{,}25$, $100^{2x+3}=10$,

Ὁμὰς τρίτη.

$2^x.81=16.3^x$, $625.2^{2x}=16.25^x$,

$3^{2x}.0{,}25=\frac{2^{2x}}{9}$,

$\frac{9^x}{4^x}=2^{2x}\left(\frac{4}{3}\right)^3$, $\frac{4^{2x+3}.64}{9^x}=\frac{5^{2x+1}}{6^{2x}}$.

Ὁμὰς τετάρτη.

$3^x+3^{x-1}=4$, $5^x-5^{x-2}=24$, $3^x+2.3^{x-1}+$
$+3^{x-2}=16$, $3.2^x+7.2^{x-1}+5.2^{x+2}=53$, $\alpha^{x^2+1}+$
$\alpha^{2x-1}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$.

Ὁμὰς πέμπτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματ[α]

$\mu^x.\mu^y.=\mu^8$ $\alpha^{2x}.\alpha^{3y}=18$ $5^{3x}.5^{4y}=(5^6)$

$\dfrac{\mu^x}{\mu^y}=\mu^{-2}$, $\dfrac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3y}}=\alpha^{-6}$, $\dfrac{5^{2x}}{5^{7y}}=5^{-17}$.

§ **57. Περὶ τῆς ἐξισώσεως $x^\mu=\alpha$, ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀκέραιος.—α') Καλοῦμεν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $x^\mu=\alpha$, ὅπου μ εἶνε ἀκέραιος, τὴν εὕρεσιν τῶν ριζῶν αὐτῆς· ἤτοι τῶν τιμῶν τοῦ x, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.**

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέτωμεν τὸν ἐκθέτην μ τῆς ἐξισώσεως ταύτης θετικόν. Διότι, ἂν εἶνε ἀρνητικός, φέρομεν αὐτὴν εἰς ἄλλην μορφήν, ἔχουσαν ἐκθέτην τοῦ ἀγνώστου θετικόν. Π. χ. τὴν $x^{-3}=\alpha$, φέρομεν εἰς τὴν μορφὴν

$$x^{-3}=\frac{1}{x^3}=\alpha \quad \text{ἢ εἰς τὴν} \quad x^3=\frac{1}{\alpha}.$$

β') Ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^\mu=\alpha$, ὅπου α καὶ μ (ἀκέραιος) εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, ἐπιδέχεται, ἐν γένει λύσιν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν θετικὴν ρίζαν της.

Ἔστω πρῶτον ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$ (1)

Ἐπειδὴ $1^2=1$, $2^2=4$, συνάγομεν, ὅτι ἡ ρίζα της περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2, ἑπομένως θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν 1, ...

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ δέκατα τῆς ρίζης, ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ 1,1· 1,2· 1,3··· καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,4 καὶ 1,5· διότι $(1,4)^2=1,96$· $(1,5)^2=2,25$ καὶ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς 1, 4 . . . . .

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ 1,41 καὶ 1, 42· ἑπομένως ὅτι ἔχει τὴν μορφὴν 1,41 . . . . . Μία ἐκ τῶν ἑξῆς περιπτώσεων δύναται νὰ παρουσιασθῇ· ἢ διὰ τῆς ἀνωτέρω πορείας θὰ τύχῃ νὰ εὕρωμεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν ὡς ρίζαν, ἢ δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσω[μεν]

μεν ἐπ' ἄπειρον τὴν πορείαν ταύτην, καὶ διακρίνομεν, ὅτι προκύπτει περιοδικός τις δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὡς ῥίζα· ἢ θὰ διακρίνωμεν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶνε δεκαδικὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἀλλὰ μὴ περιοδικά. Τὸ τελευταῖον αὐτὸ συμβαίνει πραγματικῶς διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1). Διότι, ἐὰν ὡς ῥίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης προέκυπτε δικαδικός τις ἀριθμὸς μὲ ὡρισμένον πλῆθος ψηφίων, ἢ περιοδικός, δύναται οὗτος νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς κλάσματος ἀναγώγου, π. χ. τοῦ $\frac{\pi}{\kappa}$. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ τὴν ἐξίσωσιν (1). Διότι ἀφοῦ τὸ π καὶ κ εἶνε ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\pi^2}{\kappa^2}$ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 2. Ἑπομένως ἡ ῥίζα τῆς (1), ἀφοῦ ὑπάρχει τοιαύτη, εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα, διὰ νὰ εὕρωμεν ποίαν μορφὴν θὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $x^3=5$, $x^4=3$, καὶ ἐν γένει, τῆς $x^\mu=\alpha$ (2), ὅπου α καὶ μ (ἀκέραιος) εἶνε ἀριθμοὶ θετικοί. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει μίαν ῥίζαν θετικήν, εἶνε δὲ αὕτη ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, ἂν τὸ α δὲν εἶνε ἡ μυοστὴ δύναμις ἀριθμοῦ τινος ἐκ τῶν γνωστῶν.

Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλοῦμεν **ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς** ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς (ἀκεραίους, κλασματικοὺς) τοὺς ὁποίους καλοῦμεν **συμμέτρους**. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ

$$8{,}3415721812\ldots\ldots, \qquad 4{,}35718483\ldots\ldots$$
$$-3{,}12567149\ldots\ldots, \qquad 6{,}771781237145\ldots\ldots$$

λέγονται ἀσύμμετροι.

γ') *Ἰδιότητες τῆς ἐξισώσεως* $x^\mu=\alpha$. (Οἱ ἐκθέται τῶν εἰς τὰ κατωτέρω παρουσιαζομένων δυνάμεων ὑποτίθενται σύμμετροι ἀριθμοί).

1) **Ἡ ἐξίσωσις** $x^\mu=\alpha$. **ἔχει μίαν ῥίζαν θετικὴν (ἀρνητικήν), ἐὰν ὁ μ εἶνε περιττὸς τὸ δὲ α θετικὸς (ἀρνητικός).**

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^5=9$, Αὕτη ἔχει ὡς εἴδομεν (**37**, β'), μίαν ρίζαν θετικήν, οὐδεμίαν δ' ἀρνητικήν, διότι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην περιττὸν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνηνικόν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^5=-9$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $-x^5=+9$ ἢ $(-x)^5=+9$ ἡ ὁποία, καθὼς εἴδομεν, ἔχει μίαν ρίζαν θετικὴν διὰ τὸν ἄγνωστον $(-x)$, ἐπομένως τὸ $+x$ ἔχει μίαν ἀρνητικὴν τιμήν.

2) **Ἡ ἐξίσωσις $x^\mu=\alpha$ ἔχει δύο ρίζας (καμμίαν) ἐὰν τὸ μ εἶνε ἄρτιος τὸ δὲ α θετικὸς (ἀρνητικός).**

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4=+9$.

Αὕτη καθὼς εἴδομεν, ἔχει μίαν ρίζαν θετικήν. Ἐὰν τὴν καλέσωμεν $+\beta$, καὶ τό $-\beta$ θὰ εἶνε ρίζα της, διότι εἶνε $(-\beta)^4=\beta^4$.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε $x^4=-9$, δὲν ἔχει καμμίαν ρίζαν, διότι οὔτε θετικὸς οὔτε ἀρνητικός τις ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἄρτιον δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

§ **38. Ὁρισμὸς καὶ παράστασις τῶν ριζῶν.**

α') Ἐὰν ἀποκλείσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ μ εἶνε ἄρτιος καὶ τὸ α ἀρνητικός, ἡ ἐξίσωσις $x^\mu=\alpha$ (1) ἔχει μίαν, ἢ δύο ρίζας (μ περιττὸς, ἢ ἄρτιος).

Τὰς ρίζας τῆς (1) θὰ παριστάνωμεν οὕτω $\sqrt[\mu]{\alpha}$, ἢ $\alpha^{\frac{1}{\mu}}$.

Κατὰ ταῦτα ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)$, ἢ $\alpha^{\frac{1}{\mu}}$ θὰ παριστάνῃ ἕνα (ἢ δύο ἀντιθέτους) ὡρισμένον ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν μ^ην δύναμιν δίδει τὸν α· ἤτοι θὰ εἶνε

$$x=\sqrt[\mu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\mu}} \quad (2), \text{ καὶ } \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\alpha, \text{ ἢ } \left(\alpha^{\frac{1}{\mu}}\right)^\mu=\alpha.$$

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$\sqrt[3]{(-8)}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2, \quad \sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2,$$

$$\sqrt[2]{4}=4^{\frac{1}{2}}=\pm 2, \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{4}=4^{\frac{1}{2}}=\pm 2,$$

καὶ λέγομεν ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ (-8) εἶνε τὸ -2· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8 εἶνε τὸ $+2$, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 4 εἶνε τὸ ± 2 κ. ο. κ. Ἡ ποσότης ἡ ὁποία εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ (ριζικὸν) καλεῖται **ὑπόρριζος ποσότης**, ὁ ἐκθέτης τῆς δοθείσης δυνάμεως (1) **δείκτης τῆς ῥίζης** (2) καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς **ῥίζα**. Οὕτω τῆς ἐξισώσεως $x^3=27$ ἢ $x=\sqrt[3]{27}=72^{\frac{1}{3}}=3$, τὸ 27 εἶνε ἡ ὑπόρριζος ποσότης, τὸ 3 εἶνε ὁ δείκτης τῆς ῥίζης καὶ ἡ ῥίζα ἰσοῦται μὲ 3, ἐνῷ τῆς $x^3=-27$, $x=-3$ ἡ ῥίζα εἶνε -3, τῆς δὲ $x^4=16$, $x=\pm 2$.

β') Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε ὅτι 1) πᾶσα ῥίζα τοῦ 0 εἶνε **ἴση μὲ μηδέν**· διότι $0^\mu=0$, ἄρα $\sqrt[\mu]{0}=0$. $\sqrt{-1}$

2) **Πᾶσα περιττὴ ῥίζα τῆς 1 εἶνε ἴση μὲ 1, πᾶσα δ' ἀρτία ἴση μὲ ± 1.**

3) **Ἡ πρώτη ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε ἴση μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν**, ἤτοι $\sqrt[1]{\alpha}=\alpha$, ἐπειδὴ $\alpha^1=\alpha$.

4) **Ἐὰν ἀριθμόν τινα ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν δύναμιν καὶ τοῦ ἐξαγομένου ἐξάγωμεν τὴν $\nu^{\text{ην}}$ ῥίζαν, εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν ἢ τὸν ἀντίθετόν του ἀριθμόν.**

ἤτοι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$, ἢ $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\pm\alpha$ (ν ἄρτιος).

Οὕτω $\sqrt[3]{2^3}=2$· $\sqrt[4]{2^4}=\pm 2$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Τί σημαίνει

$$3^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{4},\quad (\alpha^\nu)^{\frac{1}{2}},\quad (xy)^{\frac{1}{\mu}};$$

2) Γράψατε μὲ σύμβολα τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν 2 δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον 15· τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος λαμβανόμενος τρὶς ὡς παράγων δίδει ἐξαγόμενον 17.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\sqrt[1]{2}$, $0^{\frac{1}{\nu}}$, $1^{\frac{1}{3}}$

$$(\alpha^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{(\alpha\ \beta)^3},\quad (x^4\ y^4)^{-\frac{1}{4}},\quad (\alpha^6)^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt{x^6}$$

$25^{-\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{3}{9}}$ $8^{-\frac{1}{3}}$. $16^{-\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha}$.

$x^{-\frac{1}{3}}$. $x^{-\frac{1}{3}}$. $x^{-\frac{1}{3}}$.

Ὁμὰς τρίτη. Εὕρετε τὰ

$$4^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{4}}. \qquad 3(\alpha^4)^{\frac{1}{2}}+4\alpha^2-5\sqrt[3]{\alpha^6}$$

$$2\left(\sqrt[2]{2}\right)^3-3.4^{\frac{1}{2}}+9\sqrt[3]{3^3}$$

$$\left(\sqrt[5]{\alpha^2}\right)^2.\left(\sqrt[5]{\alpha^2}\right)^3, \qquad \left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\right)^3\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$$

Ὁμὰς τετάρτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ

$$(3+2^{\frac{1}{2}})(3-2^{\frac{1}{2}}), \qquad (\alpha+\beta^{\frac{1}{2}})(\alpha-\beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$(\sqrt{5}+2^{\frac{1}{2}})(\sqrt{4}-2^{\frac{1}{2}}), \qquad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}),$$

$$(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}), \qquad \left(\alpha\pm\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις νὰ ἐξαχθῇ ἡ κοινὴ ῥίζα ἐκτὸς ὡς παράγων

$$\alpha x^{\frac{1}{3}}+\beta x^{\frac{1}{3}}-\gamma x^{\frac{1}{3}}, \quad \alpha\sqrt[3]{2}+\gamma\sqrt[3]{3}-\beta\sqrt[3]{2}-\delta\sqrt[3]{3}.$$

$$\alpha x^{\frac{1}{\mu}}+\varepsilon y^{\frac{1}{\nu}}-\gamma x^{\frac{1}{\mu}}-\delta y^{\frac{1}{\nu}}, \quad \alpha\sqrt[\mu]{x}+\beta\sqrt[\nu]{y}+\gamma\sqrt[\mu]{x}+\delta\sqrt[\nu]{y}$$

2) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

$$\mu\alpha^{\frac{1}{2}}+\mu\beta^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}-2\beta^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{x}+\alpha\sqrt[3]{y}-\beta\sqrt[3]{x}-\beta\sqrt[3]{y}$$

$$2\alpha x^{\frac{1}{\mu}}-3\beta y^{\frac{1}{\nu}}-3\beta x^{\frac{1}{\mu}}+2\alpha y^{\frac{1}{\nu}}, \quad x^2\alpha^{\frac{1}{\nu}}-y\beta^{\frac{1}{\nu}}+y.\alpha^{\frac{1}{\nu}}-x^2\beta^{\frac{1}{\nu}}.$$

3) Τὰς ἑπομένας παραστάσεις τρέψατε εἰς γινόμενον δύο παραγόντων $x-y$, x^2-y, $\alpha^2-2\beta$.

4) Ἁπλοποιήσατε τὰς παραστάσεις

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}, \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}, \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}.$$

§ 59. **Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.**

α΄) Ὅταν λέγωμεν ἄθροισμα ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 1,73205 . . . . ., . + 1,41421 . . . . ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Σχηματίζομεν ἀπὸ καθένα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν τὰς προσεγγιζούσας τιμὰς

1· 1,7. 1,73· 1,732· 1,7320· 1,73205 . . . .

1· 1,4· 1,41· 1,414· 1,4142. 1,41421 . . . .

προσθέτομεν τὰς ἀντιστοίχους πρώτας, δευτέρας, τρίτας . . . . . ἀνωτέρω τιμὰς καὶ ἔχομεν

2· 3,1· 3,14· 3,146· 3,1462· 3,14626 . . . .

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι μία ὡρισμένη ὁμὰς ψηφίων μένει ἀμετάβλητος. Οὕτω ἀπὸ τὸν τέταρτον ἀριθμὸν καὶ ἑξῆς δὲν μεταβάλλονται τὰ ψηφία 3· 1· 4. 6· ἀπὸ δὲ τοῦ πέμπτου καὶ ἑξῆς τὰ 3· 1· 4· 6· 2. Τὴν πορείαν αὐτὴν ἀκολουθοῦντες, δυνάμεθα νὰ ὡρίσωμεν ὁσαδήποτε ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν μεταβάλλονται, δηλαδὴ θὰ εὕρωμεν ἀσύμμετρόν τινα ἀριθμόν, καὶ τοῦτον θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

β΄) Καλοῦμεν διαφορὰν δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν α καὶ β, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸ β δίδει τὸν α. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ πηλίκον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν α καὶ β, ἤτοι τὸ α : β, θὰ εἶνε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει γινόμενον τὸν α. Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν τὴν δύναμιν ἀσυμμέτρου τινὸς ἀριθμοῦ α. Οὕτω τὸ α^3 θὰ εἶνε τὸ γινόμενον α. α. α, ἐνῷ τὸ α^{-3} θὰ φανερώνῃ τὸ πηλίκον $\dfrac{1}{\alpha^3}$. Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀσυμμέτρων

1,73205 . . . . — 2,41421 . . . .

σχηματίζομεν τὰς προσεγγιζούσας τιμὰς τῶν δοθέντων, ἀφαιροῦμεν ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς πρώτης τὴν δευτέραν καὶ οὕτω εὑρίσκομεν 0· 0,3· 0,32· 0,318· 0,3178· 0,31784 . . . . . .
λαμβάνομεν δὲ ἐκεῖνα τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐν τῇ πορείᾳ τοῦ λογισμοῦ δὲν μεταβάλλονται. Κατὰ ταῦτα ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 0,3178 . . . .

γ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα (τὸ γινόμενον) ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διατηρεῖται ἀμετάβλητον, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων (τῶν παραγόντων). Ἐπίσης εἶνε εὔκολον νὰ διακρίνωμεν, ὅτι αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀσύμμετρον βάσιν.

*§ **60. Παράστασις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διὰ σημείων.** — *α'*) Διὰ νὰ παραστήσωμεν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς διὰ σημείων τῆς γραμμῆς τῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι καθεὶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς μόνου σημείου τῆς γραμμῆς, ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O νὰ εἶνε ἴση μὲ τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν. Μίαν τοιαύτην ἀντιστοιχίαν ἀριθμοῦ καὶ σημείου δεικνύομεν διὰ τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots\ldots,$ τοῦ ὁποίου αἱ προσεγγίζουσαι τιμαὶ εἶνε αἱ

$$1\cdot\ 1{,}4\cdot\ 1{,}41\cdot\ 1{,}414\cdot\ \text{κ. λ. π.}$$

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν 1 ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ κινοῦμεν αὐτὸ συνεχῶς δεξιά, ὥστε κατὰ τὴν κίνησιν νὰ λάβῃ τὸ κινητὸν ὅλας τὰς θέσεις πάντων ἀνεξαιρέτως τῶν σημείων τῆς γραμμῆς μέχρι ἐκείνου, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν 2. Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως δὲν ὑπάρχει προσεγγίζουσά τις τιμὴ ἀριστερὰ τοῦ κινητοῦ, μετὰ τὸ πέρας δ' αὐτῆς κεῖνται πᾶσαι αἱ προσεγγίζουσαι τιμαὶ ἀριστερὰ τοῦ κινηθέντος σημείου, ἐνῷ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως τινές, ἢ πᾶσαι κεῖνται ἀριστερὰ τοῦ κινητοῦ.

Τὸ σημεῖον M διὰ τὸ ὁποῖον διὰ πρώτην φορὰν κεῖνται πᾶσαι αἱ προσεγγίζουσαι ἀριστερά του, θὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει τὸν δοθέντα ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{2}$ καὶ μένει νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, δηλαδὴ τὸ τμῆμα O M, εἶνε ἴσον μὲ $\sqrt{2}$. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὅτι, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τοῦ σημείου M, ὅτι ὄχι μόνον ἡ σειρὰ τῶν προσεγγιζουσῶν τιμῶν 1· 1,4· 1,41· 1,414· κ. λ. π. κεῖνται ἀριστερά του, ἀλλὰ καὶ πᾶσαι αἱ τιμαὶ 2· 1,5· 1,42· 1,415 κεῖνται δεξιά του. Ἐὰν προσδιορίσωμεν π. χ. τὴν ἀπόστασιν $OM > 1{,}41$ καὶ ἐξ ἄλλου $OM < 1{,}42$. Ἐν γένει, ἂν προσδιορίσωμεν τὴν ἀπόστασιν OM ὡς πρὸς ν δεκαδικὰς θέσεις, λαμβάνομεν τὴν $\nu^{\text{ην}}$ προσεγγίζουσαν τιμήν, καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις OM πραγματικῶς εἶνε ἴση μὲ τὴν $\sqrt{2}$.

β΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς καθένα ἀσύμμετρον ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς γραμμῆς τῶν ἀριθμῶν. Ἐν τούτοις δὲν ὡρίσθη, πῶς θὰ εὑρίσκωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο πρὸς τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ προσεγγίζωμεν, ὅσον θέλομεν.

Δι᾽ ὡρισμένους τινὰς ἀσυμμέτρους δυνάμεθα διὰ γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον. Ἐὰν π. χ. κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας μὲ 1, ἡ ὑποτείνουσά του θὰ εἶνε ἴση, ὡς γνωστόν, μὲ $\sqrt{2}$, εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν $\sqrt{2}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς 0 τμῆμα ἴσον μὲ τὴν ἐν λόγῳ ὑποτείνουσαν.

§ **61. Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν.**—α΄) Ἐὰν **ἐκ τῶν δύο ῥιζῶν ἀρτίας τάξεως ἀριθμοῦ θετικοῦ λαμβάνωμεν μόνον τὴν θετικήν**, παρατηροῦμεν ὅτι

ἡ ῥίζα δυνάμεώς τινος θετικῆς δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸν ἐκθέτην καὶ δείκτην της πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἔστω τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ ὅπου α^ν θετικός· Λεγω ὅτι ἰσοῦται μὲ $\sqrt[\mu\varrho]{\alpha^{\nu\varrho}}$, δηλαδὴ ὅτι $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\mu\varrho]{\alpha^{\nu\varrho}}$. Πράγματι τὸ $\sqrt[\mu\varrho]{\alpha^{\nu\varrho}}$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δύναμιν μρ δίδει ἐξαγόμενον τὸν $\alpha^{\nu\varrho}$. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἔχει ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, ἐπειδὴ εἶνε (§ **58**, α΄).

$(\sqrt[\mu]{\alpha^\nu})^{\mu\varrho} = [(\sqrt[\mu]{\alpha^\nu})^\mu]^\varrho = \alpha^{\nu\varrho}$, ἤτοι ὁ $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ εἶνε ἴσος μὲ τὸν $\sqrt[\mu\varrho]{\alpha^{\nu\varrho}}$. Ἐὰν ἀντὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ γράφωμεν $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \alpha^{\frac{\nu\varrho}{\mu\varrho}}, \text{ ὅπου εἶνε } \frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu\varrho}{\mu\varrho}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀρνητικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν τῆς αὐτῆς τάξεως θετικὴν τοῦ ἀντιθέτου του (λαμβανομένην μὲ σημεῖον πλήν), ὡς π. χ. $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{27}$, ἔχομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει, καὶ ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶνε ἀρνητική. Οὕτω εἶνε $\sqrt[3]{-8} = -2 = \sqrt[3\cdot 2]{8^2} = -2$.

β') Γράφοντες τὰς ῥίζας ὑπὸ μορφὴν δυνάμεων, παρατηροῦμεν, ὅτι **δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν μὲ δυνάμεις ἐχούσας ἐκθέτας, κλασματικούς, καθὼς καὶ μὲ ἀκεραίους.** Οὕτω ἔχομεν ὅτι

1) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\varrho}}$. Διότι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu\varrho+\pi\nu}{\nu\varrho}}$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δύναμιν νρ δίδει τὸν $\alpha^{\mu\cdot\varrho+\pi\cdot\nu}$. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὁ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$, ἐπειδὴ εἶνε $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}\right)^{\nu\varrho} = \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu\varrho} . \left(\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}\right)^{\nu\varrho} = \alpha^{\mu\varrho}.\alpha^{\nu\pi} = \alpha^{\mu\varrho+\nu\pi}$.

2) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}. \beta^{\frac{\mu}{\nu}} = (\alpha\beta)^{\frac{\mu}{\nu}}$. Διότι τὸ $(\alpha\beta)^{\frac{\mu}{\nu}}$ φανερώνει τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν ν δύναμιν δίδει τὸν $(\alpha\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\beta^{\mu}$. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὁ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}. \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἐπειδὴ εἶνε $\left[\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}. \beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right]^{\nu} = \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} . \left(\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu}. \beta^{\mu}$.

3) Τὸ $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\pi}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu\cdot\pi}{\nu\cdot\varrho}}$. Διότι τὸ $\alpha^{\frac{\mu\cdot\pi}{\nu\varrho}}$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νρ δύναμιν, δίδει τὸν $\alpha^{\mu\pi}$.

Ἀλλὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ὁ $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\pi}{\varrho}}$. Διότι ἐὰν πρῶτον τὸ ὑψώσωμεν εἰς τὴν δύναμιν ρ. λαμβάνομεν $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\pi}$, τοῦτον δ' ὑψοῦντες εἰς τὴν δύναμιν ν λαμβάνομεν

$$\left[\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\pi}\right]^{\nu} = \left[\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}\right]^{\pi} = \alpha^{\mu\pi}.$$

Ἑπομένως ὁ $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\pi}{\varrho}}$ εἶνε ἴσος μὲ τὸν $\alpha^{\frac{\mu\pi}{\nu\varrho}}$.

§ **62. Ἐφαρμογαί.** — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων συνάγομεν ὅτι

α') **Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ γινόμενον (πηλίκον) δύο ριζῶν διὰ μιᾶς ρίζης.** Οὕτω π. χ. ἔχομεν ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$.

Διότι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}=(\alpha\beta)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$. Ὁμοίως

$$\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}.\sqrt[\mu\nu]{\beta^{\mu}}=(\alpha^{\nu})^{\frac{1}{\mu\nu}}(\beta^{\mu})^{\frac{1}{\mu\nu}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}\beta^{\mu}}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι $\sqrt[\mu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}:\beta^{\mu}}$.

β') **Ἐνίοτε εἶνε προτιμότερον παράγοντά τινα ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ νὰ εἰσαγάγωμεν καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.** Οὕτω εἶνε

$$\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}.\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}.$$

Π. χ.
$$x\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\sqrt{x^2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\sqrt{xy},$$

γ') **Ἐνίοτε εἶνε δυνατὸν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ρίζαν δι' ἄλλης, ἡ ὁποία ἔχει μικρότερον δείκτην.**

Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\sqrt[3]{\alpha^5}=\sqrt[3]{\alpha^3.\alpha^2}=(\alpha^3.\alpha^2)^{\frac{1}{3}}=\alpha\,\alpha^{\frac{2}{3}}=\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}.$$ Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{2^3.3}+\sqrt[3]{3^3.3}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}.$

δ') **Παραστάσεις τῆς μορφῆς** $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\pm\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$. **ἁπλοποιοῦνται κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον, ἐὰν τὸ $\alpha^2-\beta$ εἶνε τέλειον τετράγωνον.**

Ἡ ἀνωτέρω παράστασις προφανῶς εἶνε ἴση μὲ

$$\sqrt{\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\pm\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}\right)^2}=\sqrt{2\alpha+\pm2\sqrt{\alpha^2-\beta}},$$

αὕτη δὲ περιέχει ἓν μόνον ριζικόν, ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν, ὅτι τὸ $\alpha^2-\beta$ εἶνε τέλειον τετράγωνον. Π. χ.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{4-3}}$$
$$=\sqrt{2}.$$

ε΄) **Ἐὰν εἰς τὸν παρονομαστὴν κλάσματός τινος ὑπάρχουν ριζικά, ἐπιδιώκωμεν, νὰ καταστήσωμεν αὐτὸν ρητόν, ἤτοι νὰ εὕρωμεν κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶνε ἀπηλλαγμένος ριζικοῦ.** Τοῦτο γίνεται εὐκόλως εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις π. χ.

1) Ἐὰν τὸ κλάσμα ἔχῃ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{x}}$. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους του ἐπὶ $\sqrt[\mu]{x^{\mu-1}}$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον $\frac{\alpha\sqrt[\mu]{x^{\mu-1}}}{x}$. Π. χ. $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{2}}{2}$

2) Ἐὰν τὸ κλάσμα ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\pm\sqrt{\delta}\pm\sqrt{\varepsilon}\,\ldots\ldots}$$

Καθὼς π. χ. διὰ τὸ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸ $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ καὶ λαμβάνομεν $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}.}{2\sqrt{6}}$ τούτου τοὺς ὅρους πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\sqrt{6}$. καὶ εὑρίσκομεν τό

$$\frac{1}{12}\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\right).$$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ τραποῦν α΄) ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ δείκτην 6. β΄) ἡ $\sqrt[8]{\alpha}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ δείκτην 9. γ΄) ἡ $\sqrt[\mu]{\alpha^3}$ εἰς ἄλλην μὲ δείκτην μ ν.

2) Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους, ἐχούσας τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην.

$\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$,

$\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[12]{\gamma}$, $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\varrho]{\alpha}$.

3) Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν κάτωθι ριζῶν

$$\sqrt[4]{64},\quad \sqrt[6]{48},\ \sqrt[3]{16},\quad \sqrt[2\mu]{\alpha^\mu}.\quad 4$$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι γινόμενα τῶν ριζῶν εἰς μίαν ρίζαν

$$\sqrt{5}.\quad \sqrt{20},\quad \sqrt[3]{4}.\quad \sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{5}.\quad \sqrt[3]{36}.$$

$$\sqrt[3]{xy}.\quad \sqrt{\frac{x}{y}},\quad \sqrt[3]{\alpha^2}.\ \sqrt[3]{\alpha},\quad \sqrt{2\alpha}.\quad \sqrt{3\beta}.\quad \sqrt{5\alpha\beta}$$

$$\sqrt{3}.\quad \sqrt[3]{2},\quad \sqrt{x}.\quad \sqrt[3]{y},\quad \sqrt[3]{x}\quad \sqrt[3]{y}.$$

$$x^{\frac{2}{3}}.\quad y^{\frac{3}{4}},\quad \sqrt[3]{3}.\quad \sqrt[3]{5}.\quad \sqrt[6]{2},\quad \sqrt{2}.\quad \sqrt{5}.$$

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ

$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}\right)^2\qquad \left(2\sqrt[3]{x}+8\sqrt[3]{x^2}\right).\sqrt[3]{x}.$$

$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[4]{\alpha}\right).\sqrt{\alpha},\qquad \left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-3^{\frac{1}{2}}\right).$$

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\pm\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2\quad \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)^2.$$

$$\left(\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}\right)^2,\quad \pm\quad \left(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\gamma\delta}\right)^2$$

3) Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

$$x\sqrt{x^{-1}},\qquad 3\sqrt{5},\qquad \alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\qquad \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Ὁμὰς τρίτη. 1). Νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ τὸν ἁπλούστερον τρόπον τὰ $\sqrt{964}$, $\sqrt{36.49}$, $\sqrt[3]{8,64}$.

2) Νὰ ἀντικατασταθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις δι' ἄλλων εἰς τὰς ὁποίας αἱ ὑπόρριζοι ποσότητες νὰ εἶνε κατὰ κατὰ τὸ δυνατὸν μικρότεραι, $\sqrt{12}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt[3]{16}$,

$\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[4]{240}$, $\sqrt[5]{96}$, $\sqrt{540}$,

$\sqrt{\alpha\beta^2\gamma}$, $\sqrt[3]{\alpha^3\beta\gamma}$, $\sqrt{\rho^3}$,

$\sqrt[3]{\rho^5}$, $\frac{x}{y}\sqrt[3]{xy^3}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$, $\sqrt[\mu]{x^{\mu+\nu}}$.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι πηλίκα των ριζῶν εἰς μίαν ρίζαν

$\sqrt{24} : \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875}$, $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^5}}$

$\sqrt{xy} : \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$, $\sqrt[3]{6\alpha^4} : \sqrt[3]{2\alpha}$.

$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} : \sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\sqrt{\dfrac{3xy}{\omega}} : \sqrt{\dfrac{2x^3y}{\omega^3}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}} : \sqrt[5]{\dfrac{4}{4}}$

2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ

$\left(\sqrt{\alpha\delta}+\sqrt{\beta}\right):\sqrt{\beta}$, $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{15}\right):\sqrt[3]{3}$.

$\left(\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{80}-\sqrt[4]{96}+\sqrt[4]{24}\right):\sqrt[4]{8}$.

Ὁμὰς πέμπτη. Τρέψατε τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητοὺς παρονομαστάς

$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}$, $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3\sqrt{2}}}$, $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}}{o\sqrt[5]{\alpha}}$.

$\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\dfrac{\alpha}{\alpha-\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{\alpha-\sqrt{\beta}}{\alpha+\sqrt{\beta}}$,

$\dfrac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$, $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}}$.

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Ὁμὰς ἕκτη. Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ τραποῦν εἰς ἄλλας, ἐχούσας ἓν ῥιζικόν.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}, \qquad \sqrt{9+2\sqrt{8}}-\sqrt{9-2\sqrt{8}}.$$

§ **63. Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀσυμμέτρους.** — Νὰ ὑψώσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀσύμμετρον π. χ. $3^{\sqrt{2}}=3^{1,414\ldots}$, σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Σχηματίζομεν τὰς δυνάμεις

$$3^{1,4}=3^{\frac{14}{10}}=3^{\frac{7}{5}}=3\sqrt[5]{9}=4,5655\ldots\ldots$$

$$3^{1,41}=3^{\frac{141}{100}}=3\sqrt[100]{3^{41}}=4,7$$

$$3^{1,414}=3^{\frac{1414}{1000}}=3^{\frac{707}{500}}=3\sqrt[500]{3^{207}}=4,7276\ldots\ldots$$

καὶ οὕτω καθεξῆς. Βλέπομεν ὅτι εἰς τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς ὡρισμένη ὁμὰς ψηφίων ἀπό τινος μένει ἀμετάβλητος. Οὕτω ἐξακολουθοῦντες, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὁσαδήποτε ψηφία, τὰ ὁποῖα διατηροῦνται ἀμετάβλητα, προσδιορίζομεν δηλαδὴ τοιουτοτρόπως ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν, καὶ τοῦτον θὰ καλοῦμεν ὡς $3^{1,414\ldots}$ ἢ $3^{\sqrt{2}}$.

§ **64. Ἀνισότητες καὶ ἐξισώσεις.**—α′) Ἡ ἰδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν ἐν (§ **55**, β′) ἰσχύει καὶ ἐὰν τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος, ἔστω τῆς $\alpha>\beta$ (α, β θετικὰ) ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην κλασματικὸν $\frac{\mu}{\nu}$.

Διότι ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι δὲν εἶνε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}>\beta^{\frac{\mu}{\nu}}$, θὰ εἶνε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\leqq\beta^{\frac{\mu}{\nu}}$

Ἀλλὰ τότε ὑψοῦντες καὶ τὰ μέλη ταύτης εἰς τὴν ν δύναμιν, θὰ ἔχωμεν (§ **55**, β′) $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}\leqq\left(\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}$, δηλαδὴ $\alpha^{\mu}\leqq\beta^{\mu}$, ἐνῶ ἐκ τῆς $\alpha>\beta$, ἕπεται ὅτι $\alpha^{\mu}>\beta^{\mu}$.

β′) **Ἐξίσωσίν τινα δυνάμεθα νὰ ἀπαλλάξωμεν ὄχι μόνον τῶν παρανομαστῶν, καθὼς γνωρίζομεν, ἀλλ' εὐκόλως ἐνίοτε καὶ τῶν ῥιζικῶν, ἂν ἔχῃ.** Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν ἂν τὴν μετασχηματίσωμεν ὥστε τὸ ριζικὸν, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ἀπαλλαγῇ, νὰ εὑρίσκεται εἰς τό ἓν μόνον μέλος της, δηλαδὴ ἐὰν τὸ ἀπομονώσωμεν, καὶ ἔπειτα ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸν δείκτην τῆς ρίζης. Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$\sqrt[3]{2x+6}=2$. Ἐὰν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, εὑρίσκομεν $\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^3=2^3$, ἢ $2x+6=8$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται $x=1$.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $4+\sqrt{x^2+5}=x-1$,

ἢ $\sqrt{x^2+5}=x-5$, εὑρίσκομεν, $x^2+5=x^2-10x+25$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x=2$.

Ἐὰν εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν, κα λάβωμεν μόνον τὴν θετικὴν ρίζαν τοῦ $\sqrt{x^2+5}$ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἐπαληθεύεται. Διότι ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος εὑρίσκομεν $4+3$, ἐνῶ ἀπὸ τὸ δεύτερον $2-1$. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν τὴν θετικήν, ἢ ἀρνητικήν, ρίζαν, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν 2, ἐπειδὴ διὰ τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς ρίζης τοῦ $\sqrt{x^2+5}$, ὅταν $x=2$, ἔχομεν -3, καὶ τὸ ἐξαγόμενον εἶνε $4-3=2-1$. Διὰ τοῦτο, **ὅταν συναντῶμεν ρίζαν ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει κατὰ τὴν δοκιμήν, νὰ λαμβάνωμεν τὴν θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς ρίζης.**

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$\sqrt[3]{x+5}=3,\quad 1+\sqrt[5]{7x+5}=3,\quad \sqrt{4x^2+6+9}-2=2x,$$

$$\frac{x+4}{x}-\sqrt{\frac{x+7}{x-1}}=0,\quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{3}}=2,$$

$$\frac{\sqrt{2(x+3)}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2(x+3)}-\sqrt{2x+1}}=1{,}4,\quad \sqrt{\frac{x-1}{2}}+\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2(x+1)}}$$

$$\frac{\sqrt{x+6\nu}+\sqrt[3]{x-13\nu}}{\sqrt{x+6\nu}-\sqrt[3]{x-13\nu}}=5, \qquad \sqrt{x}-1=\sqrt{1+x+\sqrt{x(\beta^2-1)}}.$$

$$\sqrt{2x-1}=8-\sqrt{2x+15}. \qquad (5)$$

$$\sqrt{2(x-2\alpha)}-\sqrt{2x-\alpha}=\sqrt{8x-11\alpha}. \qquad \left(\frac{5}{2}\alpha\right)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+x}{\alpha-\beta}}+\sqrt{\frac{x-\beta^2}{\alpha-\beta}}=\sqrt{\alpha+\beta}. \qquad \left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right)$$

2) Ὁμοίως τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{x^2-2y+7}+1 \\ y&=\sqrt{y^2-\tfrac{5}{2}x-20}+2, \end{aligned} \qquad \left(x=2\frac{2}{3},\ y=5\frac{2}{3}\right)$$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\sqrt[3]{\alpha^{2x+1}}=\sqrt{\alpha^{3x-2}}. \quad \alpha^{\frac{3x+2}{4}}=\sqrt{\alpha^{2x-1}} \qquad \left(\frac{8}{5}\right)$$

$$\sqrt[x+2]{\mu^{x+3}}=\sqrt[x+3]{\mu^{x+2}}, \quad \sqrt[x+2]{2}=\sqrt[2x+2]{4^x}\,\sqrt[5]{0{,}25},$$

$$\sqrt[3]{7^{2x-3}}+\sqrt[3]{7^{2x+3}}=7^3+7^5 \qquad (6)$$

$$3.9^{\frac{x}{2}+1{,}5}-9.9^{\frac{x}{2}}=9.2^{x+3}+8.9^{\frac{\chi}{2}+0{,}5}. \qquad (1)$$

$$3\sqrt[3]{4^{3\chi+1}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9^{3\chi+4}}=6\sqrt[3]{4^{3\chi+4}}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9^{3\omega+7}}. \qquad \left(\frac{5}{6}\right)$$

2) Ὁμοίως τὰ συστήματα

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt[4]{\alpha^{2\chi-3}}}{\sqrt[5]{\alpha^{3y-2}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{\alpha^7}} \\ &\sqrt[3]{\alpha^{5\chi+2y}}. \quad \sqrt{\alpha^{5y+2\chi+4}}=\chi^2. \end{aligned}\right.$$

5 $\quad 2^{y-3}=512, \quad 2y+3x=42.$

§ 65. — Περὶ τῆς συναρτήσεως $y=\alpha^x$ (*ἐκθετικὴ συνάρτησις.*) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha^x$, ὅπου τὸ α εἶνε θετικὸς ἀριθμός. « **Ἡ συνάρτησις $y=\alpha^x$ αὐξάνει (ἐλαττοῦται) αὐξάνοντος τοῦ x, ἐὰν τὸ α εἶνε μεγαλύτερον (μικρότερον) τῆς μονάδος**».

Πρὸς ἀπόδειξιν δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x τιμὴν τινὰ θετικὴν μ, καὶ αὐξάνομεν αὐτὴν κατὰ ν. Λέγω ὅτι $\alpha^{\mu+\nu}>\alpha^{\nu}$ $(\alpha^{\mu+\nu}<\alpha^{\nu})$,

$\alpha > 1 (\alpha < 1)$. Διότι ἂν $\alpha > 1$ $(\alpha < 1)$εἶνε (§ **54**, Ἀσκήσεις, ὁμὰς δευτέρα,5) $\alpha^{\mu} > 1 (\alpha^{\mu} < 1)$,ἐκ ταύτης δ' ἕπεται(§ **53**,β΄),ὅτι $\alpha^{\mu+\nu} > 1 (\alpha^{\mu+\nu} < 1)$. Ἐὰν $\alpha > 1 (\alpha < 1)$ καὶ μ,ν εἶνε ἀρνητικοί, ἔχομεν $\alpha^{\mu} < 1 (\alpha^{\mu} > 1)$ καὶ $^{\mu+\nu} < \alpha^{\nu} (\alpha^{\mu+\nu} > \alpha^{\nu})$.
(§ **55** Ἀσκήσεις, ὁμὰς τρίτη. 2).

Ἀσκήσεις

1)Παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς συναρτήσεις
$y = 1{,}5^{x}$, $y = 1{,}2_{x}$ $y = 1{,}3^{x}$ καὶ δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις αὐταὶ μεταβάλλονται κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν πορείαν.

2) Ἐκ τῆς ἀπεικονίσεως καθεμιᾶς τῶν ἀνωτέρω συναρτήσεων φαίνεται,ὅτι εἰς καθεμίαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία θετικὴ τοῦ y. Ἀλλὰ καὶ τοὐναντίον,ἂν δοθῇ θετική τις τιμὴ τοῦ y μεγαλυτέρα (μικροτέρα) τῆς μονάδος, ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν μία θετικὴ (ἀρνητικὴ) τοῦ x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ **66**. **Φανταστικοὶ ἀριθμοί**.—σ΄)Ἐὰν θέλωμεν νὰ δεχθῶμεν,ὅτι καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ῥίζαν ἀρτίας τάξεως, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους θὰ καλοῦμεν **φανταστικοὺς ἀριθμούς**,τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων **πραγματικούς**. Οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς. Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος θὰ καλοῦμεν φανταστικὴν **μονάδα** καὶ θὰ τὴν παριστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου i·ὥστε θὰ ἔχωμεν $i = \pm\sqrt{-1}$, $i^{2} = -1$.

Ἐκ τῆς φανταστικῆς μονάδος, ἢ μέρους αὐτῆς,γίνονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι $2i = i + i$, $3i = i + i + i$,

$$\frac{5}{8}\,i = \frac{1}{8}i + \frac{1}{8}i + \frac{1}{8}i + \frac{1}{8}i + \frac{1}{8}i$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σχηματίζονται καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$, ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς -1. Π. χ. εἶνε $-4i = (-i) + (-i) + (-i) + (-i)$

β') Οὕτω ἡ ἀρτίας τάξεως ῥίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ φανταστικοῦ.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ -25 γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\sqrt{-25}=\sqrt{-1.25}=\sqrt{i^2.25}=i\sqrt{25}=\pm 5i.$$

Καὶ γενικῶς, θὰ εἶνε $\sqrt{-\alpha^2}=\sqrt{(-1).\alpha^2}=\sqrt{i^2\alpha^2}=\pm\alpha$

Οὕτω $\sqrt{-8}=\sqrt{-1.8}=\sqrt{i^2.8}=\pm i\sqrt{8}$.

γ') Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι $\alpha i.\beta=\alpha\beta i$.

δ') Ὁ πολλαπλσιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμόν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιον. Οὕτω ἔχομεν, ὅτι

$(-i).(-i)=(-i)^2=i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=+1,$

καὶ γενικῶς, $i^{4\nu}=+1,\ i^{4\nu+1}=+i\cdot\ i^{4\nu+2}=-1,$

$i^{4\nu+3}=-i\ ,\ \alpha i.\beta i=\alpha\beta i^2=-\alpha\beta\ ,$

ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀριθμὸν ἀκέραιον.

ε') Ἡ διαίρεσις τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτω ἔχομεν

$\alpha i:\beta i=\dfrac{\alpha}{\beta}\ ,$ καὶ $\alpha:\beta i=\dfrac{\alpha}{\beta i}=\dfrac{\alpha i}{\beta i^2}=-\dfrac{\alpha}{\beta}i\cdot$

§ **67. Μιγάδες ἀριθμοί.** — Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα φανταστικοῦ καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καλοῦμεν **μιγάδα ἀριθμὸν** π. χ. οἱ $3-5i$, $-8+4i$. $9-7i$ εἶνε ἀριθμοὶ μιγάδες. Ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε ἡ $\alpha+\beta i$, ὅπου α καὶ β εἶνε πραγματικοὶ οἱοιδήποτε.

Δύο μιγάδες λέγονται **συζυγεῖς**, ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους των· π. χ. οἱ $7+3i$, $7-3i$ εἶνε συζυγεῖς. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων δίδει ἐξαγόμενα, ἐν γένει, μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτω ἔχομεν, ὅτι:

1) $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i\cdot$

2) $(\alpha-\beta i)-(\gamma+\delta i)=\alpha-\gamma-(\beta+\delta)i.$

3) $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma-\beta\delta+(\beta\gamma+\alpha\delta)i\cdot$

4) $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$

Ἐκ τῶν 1) καὶ 3) συνάγομεν εὐκόλως ὅτι « **τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς πραγματικός**». Δι' ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς τῆς 3) συνάγομεν ὅτι «**αἱ δυνάμεις ἑνὸς μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε, ἐν γένει, μιγάδες ἀριθμοί**».

Ἐὰν ὁ ἐκθέκτης δυνάμεως τοῦ $\alpha+\beta i$ εἶνε $\frac{1}{\nu}$ (ν θετικὸς καὶ ἀκέραιος) τὸ $\left(\alpha+\beta i\right)^{\frac{1}{\nu}}$ παριστάνει ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ $\nu^{\eta'}$ δύναμις εἶνε ἴση μὲ $\alpha+\beta i$. Ἐὰν ὁ ζητούμενος αὐτὸς ἀριθμὸς ἦτο πραγματικὸς, θὰ ἦτο καὶ ἡ ν^{η} δύναμίς του πραγματικὸς. Ἐνῷ πρέπει νὰ εἶνε $\alpha+\beta i$, ἑπομένως ἔχομεν ὅτι «**ἡ ρίζα ἑνὸς μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν μιγάς**».

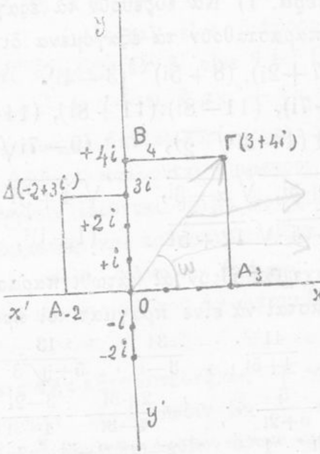
Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ εἶνε μεταξύ των ἴσοι, θά ἔχωμεν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i=0$, ἢ $(\alpha-\gamma)=(\delta-\beta i)$, καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα, εὑρίσκομεν $(\alpha-\gamma)^2=(\delta-\beta)^2 i^2=-(\delta-\beta)^2$, ἀλλ' αὕτη ἀληθεύει μόνον, ὅταν $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶνε ἴσα μὲ μηδὲν, ἐνῷ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν, ὅτι θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι «**ἐὰν δύο μιγάδες εἶνε ἴσοι μεταξύ των, θὰ εἶνε χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη των**» καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς.

H

(*) § **68. Παράστασις τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν διὰ σημείων.**—Καθὼς παρεστήσαμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, οὕτω δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς διὰ σημείων ὡς ἑξῆς.

α') Ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $x'x$ φέρομεν τὴν κάθετον $y'y$ διὰ τοῦ σημείου O, καὶ ἀκολούθως τὸ ἄκρον H τοῦ τμήματος OH, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους θὰ παριστάνῃ τὴν φανταστικὴν μονάδα i. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τό ὁποῖον παριστάνει τὸν 2i· 3i . . . . ., βi, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ O τμῆμα ἴσον μὲ 2, 3, ... : β μονάδας μήκους πρὸς τὴν διεύθυνσιν Oy. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν διεύθυνσιν Oy', θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν $-i, -2i$ $-3i, \ldots, -\beta i$ (βλ. Σχ.(7)).

β′) Διὰ νὰ παραστήσωμεν μιγάδα ἀριθμὸν π.χ. τὸν $3+4i$,



Σχῆμα (7)

εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ τῆς $x'x$ (Σχ. 7), τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, καὶ τὸ B_4, τὸ παριστάνον τὸν $4i$ ἐπί τῆς $y'y$, καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον $OA_3B_4\Gamma$ καὶ ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ Γ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν $3+4i$. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4, καὶ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ἐν γένει, ὅτι ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$, $y'y$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Παραστήσατε διὰ σημείων τοὺς μιγάδας ἀριθμοὺς $5+3i$, $6-5i$ $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}i$.

2) Εὕρετε τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς μιγάδας $4+5i$ καὶ $3-4i$, $5+2i$ καὶ $6-3i$, $6-4i$ καὶ $5-2i$ καὶ τἀντίστοιχα ἀθροίσματα, διαφοράς, γινομένα, πηλίκα των.

3) Ἀποδείξατε ὅτι, ἂν Μ καὶ Μ′ εἶνε τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα δύο συζυγεῖς μιγάδας ἀριθμούς, ἡ εὐθεῖα τῶν ἀριθμῶν x' x διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΜΟΜ′.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων, καὶ νὰ παρασταθοῦν τὰ ἐξαγόμενα διὰ σημείων.

$(5+3i).(7+2i)$, $(8+5i)(3-4i)$. $(2-7i)$, $(9-2i)$.
$(6+7i):(6-7i)$, $(11-8i):(11+8i)$, $(14+15i):(14-15i)$.
$(3+i\sqrt{2})(4-3i\sqrt{2})$, $(9-7i\sqrt{3}):(5+4i\sqrt{3})$.
$\sqrt{\alpha+\beta i}.\sqrt{\alpha-\beta i}$, $\sqrt{4+3i}:\sqrt{4-3i}$
$\sqrt{12-5i}:\sqrt{12+5i}$ $(1+i)^2$, $(1-i)^2$.

4) Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς τρόπον ὥστε οἱ παρανομασταὶ νὰ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί.

$$\frac{13}{2-5i},\quad \frac{41}{4+5i},\quad \frac{34}{3-4i},\quad \frac{13}{5+i\sqrt{3}},\quad \frac{31}{2-3i\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{5-2i}-\frac{3}{5+2i},\quad \frac{2+3i}{4-3i}-\frac{3-2i}{4-3i},$$

$$\frac{7+5i}{7-5i}+\frac{7-5i}{7+5i}-\frac{1}{74}\quad \frac{2-5i}{4-3i}-\frac{2-5i}{5+3i}+\frac{7}{27}$$

$$\frac{6+7i}{7i-3}-\frac{2-5i}{2+7i}-\frac{11}{58}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ **69.** — α′) Ἐξίσωσίς τις λέγεται **δευτέρου βαθμοῦ** ὡς πρὸς ἕνα (περισσοτέρους) ἄγνωστόν της, ἂν εἶνε ἰσοδύναμος μὲ ἄλλην, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶνε πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον (τοὺς ἀγνώστους), τὸ δὲ δεύτερον μηδέν.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις

$$3x^2-4x+6=0,\ 7x^2+6=0,\ 2xy+x^2+1=0,\ \frac{x^2-1}{2}+\frac{2}{5}=0$$

εἶναι β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, καὶ x, y.

β') Ἐξίσωσίς τις β' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν x, (μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν της, τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ τὴν μεταφοράν των εἰς τὸ πρῶτον μέλος) λαμβάνει, ἐν γένει, τὴν μορφὴν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, (1) ὅπου τὰ α, β, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς (πραγματικοὺς) ἢ παραστάσεις γνωστάς, καὶ καλοῦνται συντελεσταί, τὸ δὲ γ καὶ σταθερὸς ὅρος τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, εἶνε δὲ $\alpha \mp 0$.

γ') Ἐὰν ἐν τῇ (1) οἱ συννελεσταὶ εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται πλήρης, ἐὰν δ' εἶνε $\beta = 0$, ἢ $\gamma = 0$, ὅτε θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^2 + \gamma = 0$, ἢ $\alpha x^2 + \beta x = 0$, μὴ πλήρης.

Αἱ ῥίζαι ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀκριβῶς (ἀκέραι-οι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ) καλοῦνται σύμμετροι, ἐνῶ αἱ εὑρισκόμεναι κατὰ προσέγγισιν (ἰσοῦνται δὲ μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς) ἀσύμμετροι. Αἱ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ῥίζαι καλοῦνται μὲ ἕν ὄνομα πραγματικαί, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς φανταστικάς, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἔχῃ ὑπόρριζον ποσότητα ἀρνητικήν.

§ **70. Λύσις τῆς ἐξισωσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$.** -- Ἔστω ὅτι νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $5x^2 - 48 = 2x^2$. (1

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον $3x^2 = 48$. Διαιροῦμεν διὰ 3 τὰ δύο ἴσα, ὅτε προκύπτει $x^2 = 16$. Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο ἴσων, καὶ ἔχομεν ὅτι $x = \mp 4$· δηλαδή, αἱ ῥίζαι εἶνε αἱ 4, — 4

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε περιττὸν νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ x τὸ $\pm$, διότι οὕτω θὰ ἔχωμεν $\pm x = \pm 4$, δηλαδὴ $+x = +4, -x = +4$, καὶ $+x = -4$, $-x = -4$, ἤτοι πάλιν $x = \pm 4$.

Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς μὴ πλήρους ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \gamma = 0$ μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε προκύπτει $\alpha x^2 = -\gamma$, διαιροῦμεν διὰ τοῦ α καὶ ἔχομεν $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$ ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν δύο μελῶν ἔχομεν $x = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$

Ἐὰν τὸ $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, αἱ ῥίζαι θὰ εἶνε πραγματικαί, ἂν δὲ ἀρνητικός, αἱ ῥίζαι θὰ εἶνε φανταστικοὶ ἀριθμοὶ συζυγεῖς, δηλαδή, ἂν τὰς δύο ῥίζας τῆς ἐξισώσεως παραστήσωμεν διὰ τῶν ρ_1, ρ_2 θὰ εἶνε $\rho_1 = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\rho_2 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν

$$\rho_1 = +i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad \rho_2 = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 + 15 = 0$. Μεταφέρομεν τὸ 15 εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε $3x^2 = -15$ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3, ὅτε ἔχομεν $x^2 = -5$, καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{(1-).5} = \pm\sqrt{i^2.5}$ καὶ $x = \pm i\sqrt{5}$ ἢ $\rho_1 = +i\sqrt{5}$, $\rho_2 = -i\sqrt{5}$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

$3x^2 - 2 = x^2 + 6$, $5x^2 + 10 = 6x^2 + 1$, $6x^2 - \frac{1}{6} = 4x^2 + 25$

$$\frac{x^2-9}{4} = \frac{x^2-1}{1}, \qquad \frac{2x^2-4}{7} + \frac{x^2+4}{5} = 8.$$

$$\frac{5}{3x^2} - \frac{3}{5x^2} = \frac{4}{15}, \qquad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{15}{8-x} + \frac{47}{23-x} = 2$$

$\alpha x^2 + \beta = \gamma$, $\alpha x^2 + \beta = \beta x^2 + \alpha$, $x^2 + 2\beta x + \gamma = \beta\,(2x+1)$

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{x}{\alpha} = \frac{9\alpha^2 \cdot x^2}{\sigma x}.$$

§ 71. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x = 0$. —

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 + 5x = 0$ (1)

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x(3x+5) = 0$. Ἵνα τὸ γινόμενον $x(3x+4)$ γίνῃ μηδὲν, ἀρκεῖ ὁ εἷς τῶν παραγόντων του νὰ γίνῃ ἴσος μὲ μηδέν, δηλαδὴ $x = 0$, ἢ $3x + 5 = 0$· ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x = -\frac{5}{3}$. Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς (2) εἶνε 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x = 0$, (3)· Ἐργαζόμενοι καθὼς εἰς τὴν 1), εὑρίσκομεν $x\,(\alpha x + \beta) = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς (2) εἶνε αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$5x^2-7x+9x^2=13x^2-7x,\qquad \frac{3}{2}x^2-6=7\frac{x}{3}-\frac{x}{2},$$

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=\frac{x^2+\alpha x}{\alpha\beta},\qquad \frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha+\beta}=\frac{x^2-x}{\alpha-\beta}.$$

§ **72. Γενικὸς τύπος λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.** Τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἔχομεν $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ τετράγωνον τοῦ β, ὅτε λαμβάνομεν $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἢ $(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, καὶ $2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. ἤτοι ἂν καλέσωμεν ρ_1,ρ_2 τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν τοὺς δύο τύπους

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦτον, εὑρίσκομεν τὰς ρίζας οἱασδήποτε τῶν μορφῶν ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ

Ἐφαρμογή. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$. Τὸ $\alpha=3$, τὸ $\beta=-5$, τὸ $\gamma=2$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀνώτερω τύπον τὰς τιμὰς ταύτας, εὑρίσκομεν

$$x=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6},\ x=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6},\text{ἤτοι } x=1 \text{ καὶ } x=\frac{2}{3}.$$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις διὰ τοῦ ἀνωτέρω τύπου

$$2x^2+3x=14,\qquad 3x^2-5x=12,\qquad x^2-7x=18$$

$$5x^2-x=42,\qquad 6x^2-5x=10,\qquad 11x^2-9x=\frac{10}{9}.$$

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τὰς

$$\frac{3x+5}{x+4}+\frac{2x-5}{x-2}=3,\quad \frac{x-6}{x-2}+\frac{x+5}{2x+4}=1,\quad \frac{3-3x}{2+x}-\frac{1+2x}{1-x}=\frac{9}{2},$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{x+\beta}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha+\beta},\quad \frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{x+\alpha}=\frac{\alpha+x^2}{\alpha^2-x^2}$$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη της τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2.

Οὕτω διὰ τὴν ἐξίσωσιν $4x^2-23x=-30$, προσθέτομεν τὸ $\left(\frac{23}{4}\right)^2$ καὶ ἔχομεν $4x^2-23x+\left(\frac{23}{4}\right)^2=\frac{529}{16}-30=\frac{49}{16}$ ἐξ οὗ $\left(2x-\frac{23}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$; καὶ $2x-\frac{23}{4}=\frac{4}{7}$, $2x-\frac{23}{4}=-\frac{7}{4}$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ῥίζας $x=3\frac{3}{4}$, καὶ $x=2$.

2) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ ἕνα κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον, καὶ ἀκολούθως προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω. Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=-2$. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐπὶ -3, καὶ ἔχομεν $9x^2-15x=6$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν κατὰ τἀνωτέρω $3x-\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2}$, καὶ $x=+2$, $x=-\frac{1}{3}$.

Ὁμὰς τετάρτη 1) Ἐνίοτε δυνάμεθα εὐκόλως νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν β'. βαθμοῦ ὡς ἑξῆς, δι' ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου της εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+7x-60=0$.

Ἐπειδὴ τὸ $x^2+7x-60=(x+12)(x-5)$, (§ **24**, ζ') ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω $(x+12)(x-5)=0$

Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων $x+12$ καὶ $x-5$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, τὸ γινόμενον γίνεται μηδὲν καὶ ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ἑπομένως, ἂν θέσωμεν καθένα τούτων ἴσον μὲ μηδέν, θὰ ἔχωμεν $x+12=0$, $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ῥίζας $x=-12$, $x=5$.

2) Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τῆς μεθόδου ταύτης δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρω τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν $x(x^2-x-6)=0$, ἢ $x(x-3)(x+2)=0$ καὶ αὐτὴ ἐπαληθεύεται διὰ $x=0$, $x=3$, $x=-2$, ἤτοι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης εἶνε $\cdot 3\cdot -2$.

3) Νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἀνωτέρου μεθόδου καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$x^2-5x+4=0,\qquad 6x^2-5x=0,\qquad 2x^2-x-3=0$

$10x^2+x-3+0,\qquad x^2+5x+6=0,\qquad x^3+x^2-6x=0$

$(x-1)(x-3)(^2x+5x+6)=0(2x-1)\ (x-3x^2-5)\ (x-2)=0$

$(x^2+x-2)\ (2x^2+3x-5)=0$

Ὁμὰς πέμπτη. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{x^2+2\alpha\beta\ (\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}=2x,\qquad \frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\alpha+\frac{x-\alpha}{x+\alpha},$$

$$\mu\, x^2-1=\frac{x(\mu^3-\nu^2)}{\mu\ \nu},\qquad (\alpha x-\beta)\ (\beta x-\alpha)-=\gamma^2$$

$$\frac{(2x-\alpha)^2}{2x-\alpha+2\beta}=\beta,\qquad \frac{\alpha x+\beta}{\beta x+\alpha}=\frac{\mu x+\nu}{\nu x+\mu},$$

§ 73. Περὶ τοῦ χαρακτῆρος τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

α΄) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ρ_1, ρ_2 τὰς δύο ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ θετικὸν, αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ποσότητος θετικῆς δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν καὶ εἶνε διπλῆ. Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε τέλειον τετράγωνον, αἱ ῥίζαι εἶνε σύμμετροι, ἄλλως ἀσύμμετροι.

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε ἴσον μὲ μηδὲν, αἱ δύο ῥίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$,

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε ἀρνητικὸν, αἱ ῥίζαι εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ ἀρνητικοῦ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς (§ **66**,), εἶνε δὲ αὗται αἱ

$$\rho_1=\frac{-\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι

1) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τὰ ρ_1, ρ_2 εἶνε πραγματικὰ καὶ ἄνισα.

2) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, τὰ $\rho_1, \rho_2=\frac{-\beta}{2\alpha}=$ πραγματικόν.

3) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τὰ ρ_1,ρ_2 εἶνε φανταστικοὶ συζυγεῖς.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2-5x+6=0$.
Εἶνε $\alpha=1, \beta=-5, \gamma=6$· $\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1$.
Ἑπομένως αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2-12x+12=0$·
εἶνε $\alpha=3, \beta=-12, \gamma=+12$· $\beta^2-4\alpha\gamma=144-144=0$.
Αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x^2-3x+4=0$·
εἶνε $\alpha=2, \beta=-3, \gamma=4$· $\beta^2-4\alpha\gamma=9-32=-23$.
Αἱ ῥίζαι εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς.

β΄) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $2\mu x^2+(5\mu+2)x+(4\mu+1)=0$ ἔχει ῥίζας ἴσας.

Εἶνε $\alpha=2\mu$, $\beta=5\mu+2$, $\gamma=4\mu+1$.
Διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι ἴσαι, πρέπει νὰ ἔχωμεν
$\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἤτοι $(5\mu+2)^2-8\mu(4\mu+1)=0$, καὶ ἐὰν αὐτὴν λύσωμεν ὡς πρὸς μ, εὑρίσκομεν

$$\mu=2 \quad \text{καὶ} \quad \mu=-\frac{2}{7}$$

Ὥστε διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ μ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας ἴσας. Διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ μ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $4x^2+12x+9=0$ καὶ $4x^2-4x+1=0$, καὶ καθεμία τούτων ἔχει ῥίζας ἴσας.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ χαρακτὴρ τῶν ῥιζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν $x^2+5x+6=0$

$x^2+2x-15=0$, $x^2+2x+3=0$

$2x^2-x+5=0$, $6x^2+x-77=0$, $5x^2+8x+\frac{16}{5}=0$

Ὁμὰς δευτέρα. Προσδιορίσατε τὸν μ, ὥστε αἱ ῥίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων νὰ εἶνε ἴσαι.

$(\mu+1)x^2+(\mu-1)x+\mu+1=0$, $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$

$(2\mu-3)x^2+\mu x+\mu-1=0$, $\left(\ldots \frac{6}{7}\right)$

$2\mu x^3+x^2+4x+2\mu x+2\mu-4=0,$

$2\mu x^2+3\mu x-6=3x-2\mu-x^2,$ $\left(\frac{11+4\sqrt{22}}{7}\right)$

$\mu x^2+9x-10=3\mu x-2x^2+2\mu$ $\left(\frac{1+i12\sqrt{19}}{17}\right)$

§ 74. Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

α') Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\qquad(1)$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$\rho_1+\rho_2=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη' ἔχομεν $\rho_1\rho_2=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}$,

εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν $(-\beta)$ καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ

$$\beta^2-(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})^2=\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=4\alpha\gamma\cdot$$

ἑπομένως $\rho_1\rho_2=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$

β') Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

$$\rho_1-\rho_2=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\beta}}{\alpha}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι **«τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἰσοῦται μὲ $\frac{-\beta}{\alpha}$, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν της ἰσοῦται μὲ $\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν αὐτῆς ἰσοῦται μὲ $\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$».**

γ') Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $\rho_1^2+\rho_2^2$ τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ῥίζαι αὐτῆς, θὰ εἶνε

$$\alpha\rho_1^2+\beta\rho_1+\gamma=0,\quad \alpha\rho_2^2+\beta\rho_2+\gamma=0.\qquad(2).$$

Ἐὰν ταύτας προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\alpha(\rho_1^2+\rho_2^2)+\beta(\rho_1+\rho_2)+2\gamma=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\rho_1^2+\rho_2^2=-\frac{\beta(\rho_1+\rho_2)+2\gamma}{\alpha}$ καὶ ἂν ἀντὶ τοῦ $\rho_1+\rho_2$ θέσωμεν τὸ ἴσον του $\frac{-\beta}{\alpha}$, εὑρίσκομεν $\rho_1^2+\rho_2^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ $\rho_1^3+\rho_2^3$, πολλαπλασιάζομεν τὰς (2) ἐπὶ ρ_1 καὶ ρ_2 ἀντιστοίχως, προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη καὶ ἀκολούθως λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἰσότητα ὡς πρὸς $\rho_1^3+\rho_2^3$, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\rho_1^2+\rho_2^2$ καὶ τὸ $\rho_1+\rho_2$ διὰ τῶν ἴσων των, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων, τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x+\kappa=0$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Προσδιορίσατε τὸν μ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(\mu-2)x-(\mu+3)=0$ εἶνε ἴσον μὲ δοθέντα ἀριθμὸν λ $(2-\lambda)$

2) Ποίας σχέσεις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν π καὶ κ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x+\kappa=0$ ἔχουν πηλίκον λ $\left(\frac{\pi^2}{\kappa}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\right)$

3) Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ α,β,γ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶνε ἀνάλογοι ἀντιστοίχως τῶν μ καὶ ν. $\left(\frac{(\mu+\nu)^2}{\mu\nu}=\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)$

4) Προσδιορίσατε τὰ π,κ, εἰς τρόπον ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x+\kappa=0$, νὰ εἶνε 4, τῶν δὲ κύβων τῶν ῥιζῶν 208.

5) Προσδιορίσατε τὸ ν εἰς τρόπον ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-\beta)^2x^2+2(\alpha^2-\beta^2)x+\nu=0$ εἶνε 1) ἴσαι καὶ 2) ἀντίστροφοι.

6) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-10x+\gamma=0$ εἶνε 1) φανταστικαὶ 2) θετικαὶ 3) μία θετικὴ καὶ μία ἀρνητικὴ 4) μία ἴση μὲ μηδέν.

$$\left(\gamma>\frac{25}{3},\quad 0<\gamma\leqq\frac{25}{3},\quad \gamma=0\right)$$

Προσδιορίσατε τὸ κ εἰς τρόπον ὥστε αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 τῆς ἐξισώσεως x^2-$8x+\kappa=0$ νὰ πληροῦν τὰς ἑξῆς σχέσεις 1)$\rho_1=\rho_2$ $\rho_1=3\rho_2$, $\rho_1=\frac{1}{\rho_2}$, $\rho_1=-\frac{1}{\rho_2}$, $3\rho_1-4\rho_2=3$ $\rho_1^2+\rho_2^2=40$. (Ἀπ. 16· 12· 1·—1·15· 12).

§ 75 **Πρόβλημα.**—Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

«**Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενόν των**». Ἔστω π τὸ ἄθροισμα καὶ κ τὸ γινόμενόν των. Ἂν καλέσωμεν ρ_1, ρ_2 τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $\rho_1+\rho_2=\pi$, $\rho_1\rho_2=\kappa$, ἑπομένως τὰ ρ_1, ρ_2 εἶνε αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς του x^2 εἶνε ἡ μονάς, τοῦ x τὸ $-\pi$, ὁ δὲ σταθερὸς ὅρος τὸ κ, δηλαδὴ τῆς $x^2-\pi x+\kappa=0$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

Ἐφαρμογαί.

1) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν
Ἄθροισμα 18· 14·5·—10·5
καὶ γινόμενον 45· 49·—12. 22· 6

§ **76. Περὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν ποῖον εἶνε τὸ σημεῖον καθεμιᾶς τῶν ριζῶν της χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ εἶνε

$\rho_1 \cdot \rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$, $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι

«**1) ἂν τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε θετικόν, αἱ ρίζαι εἶνε ὁμόσημοι (θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ) καὶ ἂν μὲν τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἶνε θετικόν, εἶνε καὶ αἱ δύο θετικαί, ἂν δὲ ἀρνητικόν, ἀρνητικαί.**»

2) Ἂν τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἀρνητικόν, αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἑτερόσημοι· καὶ ἂν μὲν τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἶνε θετικὸν ἀπολύτως μεγαλυτέρα ῥίζα εἶνε ἡ θετική, ἂν ἀρνητικόν, ἡ ἀπολύτως μεγαλύτερα ἡ ἀρνητική.

3) Ἂν τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἴσον μὲ μηδὲν ἡ μία ῥίζα εἶνε ἴση μὲ μηδέν, ἡ δὲ ἄλλη μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$. Ἔχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma=64-48=$θετ. ἄρα ρ_1,ρ_2 ὁμόσημοι $\rho_1+\rho_2=-8$, ἐπομένως, καὶ αἱ δύο εἶνε ἀρνητικαί.

Ἐφαρμογαί.

Εἰς τὰς κάτωθι ἐξισώσεις νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν των χωρὶς νὰ λυθοῦν

$x^2-8x-12=0$, $5x^2-15x-50=0$, $7x^2-14x+7=0$
$3x^2-6x-12=0$, $9x^2-12x+4=0$, $5x^2-15x=0$,

§ 77. Τροπὴ τοῦ τριωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύθη ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ ἔστωσαν ρ_1,ρ_2 αἱ ρίζαι της. Γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶνε

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad (1) \qquad \rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha} \quad (2).$$

Ὑποθέτοντες ὅτι τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, γράφομεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τὸ ἴσον του $-(\rho_1+_2)$ ἐκ τῆς (1) καὶ τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τοῦ $\rho_1\rho_2$ ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2]$$
$$=\alpha[x^2-\rho x_1-\rho_2x+\rho_1\rho_2]$$
ἢ
$$=\alpha[(x-\rho_1)x-\rho_2(x-\rho_1)]$$
ἢ
$$=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$
ἤτοι
$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις

1) Ἂν τὰ ρ_1, ρ_2 εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τοὺς δύο παράγοντας $(x-\rho_1)$ καὶ $(x-\rho_2)$.

2) Ἂν αἱ δύο ρίζαι ρ_1, ρ_2 εἶνε ἴσαι, θὰ εἶνε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2$· δηλαδὴ τὸ τριώνυμον τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ $(x-\rho_1)$.

3) Ἂν αἱ ρίζαι ρ_1,ρ_2 εἶνε μιγάδες ἀριθμοὶ (συζυγεῖς), ἐπειδὴ ἐὰν θέσωμεν $\rho_1=\gamma+\delta i$, εἶνε $\rho_2=\gamma-\delta i$, τὸ $x-\rho_1=$ μὲ $(x-\gamma)-\delta i$ καὶ $x-\rho_2=(x-\gamma)+\delta i$, τὸ δὲ γινόμενον $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=[(x-\gamma)-\delta i][(x-\gamma)+\delta i]=(x-\gamma)^2+\delta^2$· ἤτοι τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Ἐφαρμογαί. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ τριώνυμα.

1) $x^2-9x+18$. Αἱ ρίζαι του εἶνε 3· 6, ἑπομένως ἔχομεν $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$.

2) $2x^2-3x-2$. Αἱ ρίζαι του εἶνε $+2,-\frac{1}{2}$ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

3) $2x^2-12x+18$. Αἱ ρίζαι εἶνε ἴσαι μὲ 3· ἄρα $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως θὰ εἶνε ἴσον μὲ

$$(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)\left(\frac{2x-1}{2}\right).$$

ἢ $\frac{2x^2-7x+3}{2}$, καὶ ἡ ζητούμενη ἐξίσωσις εἶνε $2x^2-7x+3=0$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ ἑξῆς τριώνυμα $x^2-11x+18$, $x^2+3x-28$, $3x^2-21x+36$, x^2-5x+6,

2) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10},\quad \frac{x^2+4x-3}{x^2-4x+5},\quad \frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$$

$$\frac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12},\quad \frac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}.$$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Προσδιορίσατε τὸν $\varkappa$ εἰς τρόπον ὥστε ἐν τῇ ἐξισώσει $x^2-7x+\varkappa=0$ ἡ μία τῶν ριζῶν νὰ εἶνε $3-3\cdot\ \frac{4}{5}\cdot$ μηδέν,

2) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ π εἰς τρόπον ὥστε εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-\pi x+39=0$ νὰ εἶνε $\rho_1=\rho_2$ $\rho_1=-\rho_2\cdot\ \rho_1=$ $=5+i\sqrt{11}$, $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{12}$.

3) Προσδιορίσατε τὸν ν οὕτως ὥστε ἐν τῇ ἐξισώσει

$$(\alpha^2-\beta^2)x^2+2\,(\alpha^2-\beta^2)\,x+\nu=0$$

νὰ εἶνε $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1\rho_2=1$.

4) Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ λάβῃ τὸ γ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $3\,x^2-10\,x+\gamma=0$ ἔχῃ τὰς ρίζας της ἴσας, μίαν ρίζαν ἴσην μὲ μηδέν· ρίζας μιγαδικάς.

§ 78. Περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, καὶ ρ_1,ρ_2 αἱ ρίζαι του κατὰ τάξιν μεγέθους, δηλαδὴ $\rho_1<\rho_2$. Καθὼς γνωρίζομεν, θὰ εἶνε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$$

α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μικρότερον τοῦ ρ_1 ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_2. Τότε τὸ $x-\rho_1$ καὶ τὸ $x-\rho_2$ εἶνε ἀρνητικά· τὸ $(x-\rho_1)$ $(x-\rho_2)$ ὡς γινόμενον δύο ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε θετικὸν τὸ δὲ $\alpha\,(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$ θά ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

β΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ρ_2 ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_1. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ καὶ $(x-\rho_2)$ εἶνε θετικὰ καὶ τὸ $(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$ θετικόν· τὸ δὲ $\alpha(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

γ΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ x εἶνε μεγαλύτερον ρ_1, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ ρ_2, δηλαδὴ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ εἶνε ἀρνητικόν· τὸ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶνε ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων· ἄρα τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι

«ὅταν τὸ x ἔχῃ τιμὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2, δηλαδὴ τοῦ α, ἐνῶ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α».

Ἐν ᾗ περιπτώσει αἱ ῥίζαι εἶνε ἴσαι, ἢ φανταστικαί, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α. Διότι ἂν $\rho_1=\rho_2$, τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2$, ἤτοι ἔχει τ. σημεῖον τοῦ α. Ἂν δὲ αἱ ῥίζαι εἶνε φανταστικαί, τὸ $\alpha x^2+\beta x+$ ὁ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἑπομένως ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἀσκήσεις.

1) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς; ἀρνητικάς; μηδέν;

$2x^2-16x+24$, $\quad -2x^2+16x-24$, $\quad 2x^2-12x+32$,

$-2x^2+16x-32$, $\quad 2x^2-16x+40$, $\quad -2x^2+16x-40$.

2) Δοθέντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ λ, νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν του ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διὰ $x=\lambda$, τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α, τότε τὸ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ρ_1, ρ_2. Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν εἶνε μικρότερον τῆς μικροτέρας ρ_1, ἢ μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρ_2. Ἂν εἶνε $\lambda<\rho_1$, θὰ εἶνε $\lambda<\frac{\rho_1}{2}+\frac{\rho_1}{2}$

καὶ $\lambda<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$, ἢ $\lambda<\frac{-\beta}{2\alpha}$. Ἂν εἶνε $\lambda>\rho_2$, θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$, ἢ $\lambda>\frac{-\beta}{2\alpha}$. Ἀντιστρόφως ἀποδείξατε ὅτι, ἂν $\lambda<-\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε $\lambda<\rho_1$, καὶ ἂν $\lambda>-\frac{\beta}{2\alpha}$, θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\rho_2$. Ἐξ ὧν ἕπεται, ὅτι ἡ σχέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὸ $\frac{-\beta}{2\alpha}$ δίδει τὴν θέσιν τοῦ λ ὡς πρὸς καθεμίαν ρίζαν.

3) Ποία ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν $5\frac{3}{4}$, 5· -1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

$$x^2+3x-2=0, \quad 2x^2+7x-1=0, \quad x^2-4x+3=0$$

4) *Εὕρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *κατὰ προσέγγισιν.* Ἀποδεικνύομεν ἐν πρώτοις ὅτι, ἂν διὰ $x=\lambda_1$, λ_2 (ὅπου λ_1, λ_2 εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοὶ) τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, μεταξὺ τῶν λ_1, λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως.

Διότι $\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

διὰ $\quad x=\lambda_1$ εἶνε $\alpha(\lambda_1-\rho_1)(\lambda_1-\rho_2)$.

διὰ $\quad x=\lambda_2$, εἶνε $\alpha(\lambda_2-\rho_1)(\lambda_2-\rho_2)$ Ἀφοῦ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἑτερόσημα, τὸ πηλίκον των $\frac{(\lambda_1-\rho_1)(\lambda_1-\rho_2)}{(\lambda_2-\rho_1)(\lambda_2-\rho_2)}$ εἶνε ἀρνητικόν. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ὁ παράγων $\frac{\lambda_1-\rho_1}{\lambda_2-\rho_1}$ εἶνε ἀρνητικὸς καὶ ἔστω $\lambda_1-\rho_1>0$, $\lambda_2-\rho_1<0$, τότε καὶ $\lambda_1>\rho_1$, $\lambda_2<\rho_1$, δηλαδὴ $\lambda_1>\rho_1>\lambda_2$ ἤτοι ἡ ρίζα ρ_1 περιέχεται μεταξὺ τῶν λ_1 καὶ λ_2.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας ἐξισώσεως κατὰ προσέγγισιν. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμούς, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$, νὰ εἶνε ἑτερόσημα.

Διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν -3, διὰ $x=1$ ἔχομεν $+2$· ἑπομένως μεταξὺ 0 καὶ 1 περιέχεται μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ 1, δηλαδὴ θέτομεν $x=\frac{1}{2}$ ὅτε εὑρίσκομεν $2-4=-3$, ἑπομένως ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ 1. Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ $\frac{1}{2}=0{,}50$ καὶ 1 εἶνε 0,75 θέτομεν λοιπὸν $x=\frac{3}{4}$, καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμεν 0· ἄρα $\frac{3}{4}$ εἶνε ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Διὰ $x=-1$ ἔχομεν $8+2-3=7$· ἄρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ -1. Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὕρετε αὐτήν.

§ 79. **Λύσις ἀνισοτήτων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.—**
α΄) Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕνα, ἄγνωστον τὸν ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι ἔχει, εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \text{ ἢ } \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0,$$

μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων, ὅτε καὶ ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει διεύθυνσιν. Ὥστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶνε θετκόν, ἢ ἀρνητικόν.

β΄) Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶνε θετικόν. Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τούτων, τὰς ὁποίας θὰ καλοῦμεν ρίζας τῆς ἀνισότητος, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, θέλομεν νὰ ἔχωμεν

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) > 0,$$

καὶ 1) ἂν μὲν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος γίνεται θετικὸν διὰ $x < \rho_1$ καὶ $x > \rho_2$· ὥστε ἂν τὸ $\alpha > 0$ ρίζαι τῆς ἀνισότητος εἶνε πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1, καὶ μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ρ_2.

2) Ἂν $\alpha < 0$, τότε, διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν ρ_1 καὶ ρ_2 τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδὴ θετικόν. Ἑπομένως, ἂν $\alpha < 0$, αἱ ρίζαι τῆς ἀνισότητος εἶνε πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ ρ_1 καὶ ρ_2. Αὐτὰ ἰσχύουν καὶ ἂν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε ἴσαι ἢ φανταστικαί. Ἂν αἱ ρίζαι εἶνε ἴσαι, καὶ τὸ $\alpha > 0$ τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x διάφορον τῆς ρίζης, τὸ τριώνυμον εἶνε θετικόν· δηλαδὴ πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε ρίζαι τῆς ἀνισότητος. Ἂν δὲ $\alpha < 0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἔχει καμμίαν ρίζαν. Ἂν αἱ ρίζαι εἶνε φανταστικαί, καὶ τὸ $\alpha > 0$, ἡ ἀνισότης ἔχει ὡς ρίζαν πάντα πραγματικὸν ἀριθμόν, οὐδεμίαν δὲ ἂν $\alpha < 0$.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2 - 3x + 7 > 0$. Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε φανταστικαὶ τὸ $\alpha = 1 > 0$, ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2 + x - 6 > 0$. Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε αἱ 2 καὶ -3 τὸ $\alpha = 1 > 0$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς ἀνισότητος εἶνε αἱ $x < -3$ καὶ $x > 2$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

$x^2 + 3x - 4 > 0$, $\quad -x^2 + 3x + 6 > 0$,

$\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} < -2$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x; αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἀνισότητας $x^2 - 12 + 32 > 0$, $x^2 - 13x + 22 < 0$; $5x^2 - 7x + 1 < 0$, $x^2 - 9x + 30 < 0$;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$, ἐὰν εἶνε $\alpha < \beta < \gamma$· $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) > 0$, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, $4x^3 - 10x^2 + 48x < 0$·
γράψατε αὐτὴν οὕτω $x(x^2 - 10x + 48) < 0$.

2) Ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἀνισότητας $3x^2 - 5x^2 + 2x > 0$, $x^3 - x^2 + 4x < 0$;

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $3 + \frac{1}{3-x} > \frac{1}{3x+1}$.

4) Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2 + (\mu - 1)x + 2\mu = 0$ ἔχῃ τὰς ρίζας της πραγματικάς, ἴσας, φανταστικάς;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 1$, $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0$.

2) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, ἵνα ἡ ἀνισότης $x^2 + 2x + \lambda > 10$ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x;

(*) § **80. Περὶ τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ πάσας τὰς πραγμα-**

τικὰς τιμάς.—α΄) Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ τῆς μικροτέρας τιμῆς (οἱουδήποτε ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν), τὴν ὁποίαν θὰ παραστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $-\infty$, θὰ τὴν καλοῦμεν δὲ **ἀρνητικὸν ἄπειρον,** μέχρι τῆς μεγαλυτέρας (οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου), τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνομεν διὰ τοῦ συμβόλου $+\infty$, θὰ τὴν καλοῦμεν δὲ **θετικὸν ἄπειρον,** γράφομεν ἐν πρώτοις τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) \text{ ἢ } \alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος ἡ ὁποία περιέχεται ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν, ἂν δὲ ἀρνητικόν, τὸ ἀντίθετον σημεῖον τῆς ἐν ἀγκύλαις ποσότητος.

β΄) **Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε θετικόν.** Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $x=-\infty$, τὸ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε ἴσον μὲ $+\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, μένει πάλιν $+\infty$. Ὥστε διὰ $x=-\infty$ τὸ τριώνυμον γίνεται $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνῃ, λαμβάνον τιμὰς ἀρνητικάς, ἀλλ' ἀπολύτως μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνόν του $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ θετικόν, καὶ ἐλαττοῦται διηνεκῶς.

Ὅταν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται ἴσον μὲ μηδέν, τὸ δὲ τριώνυμον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\alpha$. Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ διηνεκῶς μέχρις ὅτου γίνει $+\infty$, ἡ ποσότης $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε θετική, καὶ αὐξάνει διηνεκῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ $+\infty$· ἄρα καὶ τὸ τριώνυμον αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\alpha$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

γ΄) **Ἐὰν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν.** Τότε διὰ $x=-\infty$ τὸ τριώνυμον εἶνε $-\infty$· διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε ἴσον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\alpha$ καὶ διὰ $x=+\infty$ γίνεται πάλιν $=-\infty$. Ἤτοι ἐνῷ ὅταν τὸ α εἶνε θετικόν, διὰ $x=-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$ τὸ τριώνυμον ἀπὸ $+\infty$ ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνει μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν, διὰ $x=-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$, γίνεται ἴσον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἐλαττοῦται πάλιν μέχρι τοῦ $-\infty$.

δ΄) Ὅταν μία τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης εἶνε μεγαλυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων της, λέγομεν ὅτι αὐτὴ εἶνε **μέγιστον** τῆς μεταβλητῆς. Τοὐναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶνε ἡ μικροτέρα τῶν ἄλλων της, καλοῦμεν αὐτὴν **ἐλάχιστον** τῆς μεταβλητῆς.

ε΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι, **ὅταν τὸ α εἶνε θετικὸν τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου διὰ $x=-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$ εἶνε τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$, καὶ ἡ τιμὴ αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἂν δὲ τὸ α εἶνε ἀρνητικόν, τὸ μέγιστον τοῦ τριωνύμου** εἶνε τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ **καὶ ἀντιστοιχεῖ πάλιν εἰς** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἀσκήσεις

1) Διὰ καθὲν τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ, ἂν ὑπάρχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x εὑρίσκεται τοῦτο καὶ ποῖον εἶνε

$$-x^2+2x+3, \quad 9x^2-6x+1, \quad x^2-8x+12,$$
$$4x^2-5x+3, \quad 5x^2+12x-9, \quad -x^2+6x-9.$$

2) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=y$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ γίνῃ τὸ τριώνυμον ἴσον μὲ τὸ y, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma-y=0$. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ῥίζας πραγματικάς, πρέπει νὰ εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y>0$, ἢ $4\alpha y \geqq 4\alpha\gamma-\beta^2$

Ἑπομένως, ἂν μὲν τὸ α εἶνε θετικόν, θὰ εἶνε $y \geqq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$

δηλαδὴ τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἢ τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ εἶνε τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου, ἂν δὲ τὸ α ἀρνητηκὸν τότε $y \leqq \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$

δηλαδὴ τὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἢ τὸ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ εἶνε τὸ μέγιστον τοῦ τριωνύμου.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}$. Θέτομεν $y=\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}$, (1)

ἢ $\beta x^2-2yx+\alpha(\alpha\beta-2y)=0$. Διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης πραγματικαί. πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$y^2-\alpha\beta(\alpha\beta-2y)\geqq 0, \qquad \text{ἢ} \qquad y^2+2\alpha\beta y-\alpha^2\beta^2\geqq 0.$$

Ἐὰν τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἀνισότητα λύσωμεν ὡς πρὸς y, ἔχομεν ὅτι $y\leqq-\alpha\beta(\sqrt{2}+1)$ καὶ $y\geqq\alpha\beta(\sqrt{2}-1)$·

ἑπομένως τὸ $y=-\alpha\beta(\sqrt{2}+1)$ εἶνε μέγιστον, τὸ δὲ $y=\alpha\beta(\sqrt{2}-1)$ ἐλάχιστον τῆς δοθείσης παραστάσεως. Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν διαδοχικῶς ἀντὶ τοῦ y τὰς δύο αὐτὰς τιμὰς καὶ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς $x=-\alpha(\sqrt{2}+1)$, τὸ δὲ ἐλάχιστον εἰς $x=\alpha(\sqrt{2}-1)$.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι παραστάσεων

$$\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\alpha-x}{\alpha+x}, \qquad \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x},$$

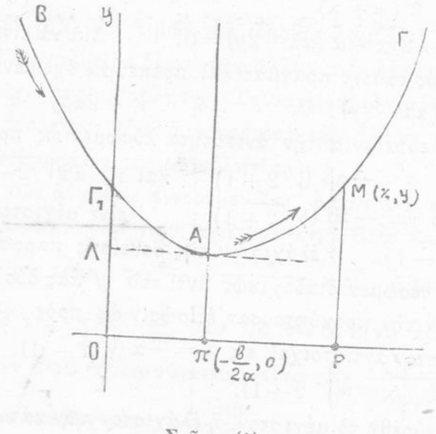
$$\frac{4x^2+1}{x^2-2x+1}, \qquad \frac{1-2x^2}{x^2+4x+4}, \qquad \frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}.$$

* 81. Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν

$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, (1) καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

α΄) **Ὅταν τὸ α εἶνε θετικόν.** Εἴδομεν (§**80**) ὅτι ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ x ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, ἑπομένως ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1), ἂν τὰς τιμὰς τοῦ x θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας τὰς δὲ τοῦ y ὡς τεταγμένας σημείων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους ox, oy, θὰ ἔχῃ ἕνα κλάδον, ὁ ὁποῖος θὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ yox' καὶ εἶνε πολὺ μεμακρυσμένον (ἔχει τετμημένην $-\infty$ καὶ τεταγμένην $+\infty$), διέρχεται δὲ κατερχόμενος διὰ τοῦ σημείου A, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (βλ. Σχ. (8)).



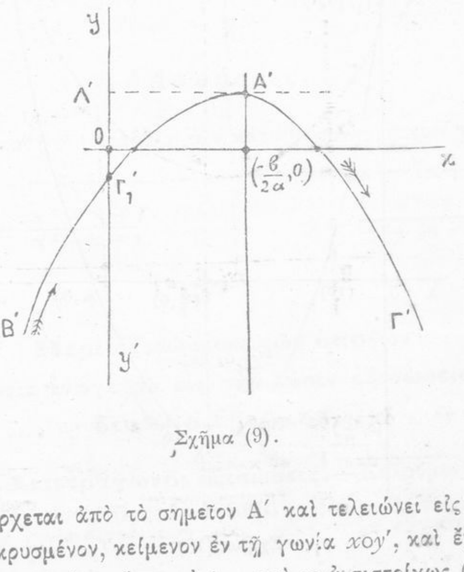
Σχῆμα (8)

Ὅταν τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνῃ εἰς τὸ $+\infty$ ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἄλλον κλάδον τῇ γραμμῆς, ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον ἐν τῇ γωνίᾳ xoy, ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ὅταν τὸ α εἶνε θετικὸν παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ Σχ. (8).

β') **Ὅταν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{-\beta}{2\alpha}$, τὸ y αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἑπομένως διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἕνα κλάδον, ὁ ὁποῖος ἔρχεται ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ $x'oy'$, τοῦ ὁποίου τετμημένη καὶ τεταγμένη εἶνε ἴσαι μὲ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α΄, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$, ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (βλ. Σχ.(9)).

Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $\frac{-\beta}{2\alpha}$ μεχρι τοῦ $+\infty$ τὸ τριώνυμον ἄρα καὶ τὸ y, ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς παριστάνει κλάδον καμπύλης γραμμῆς



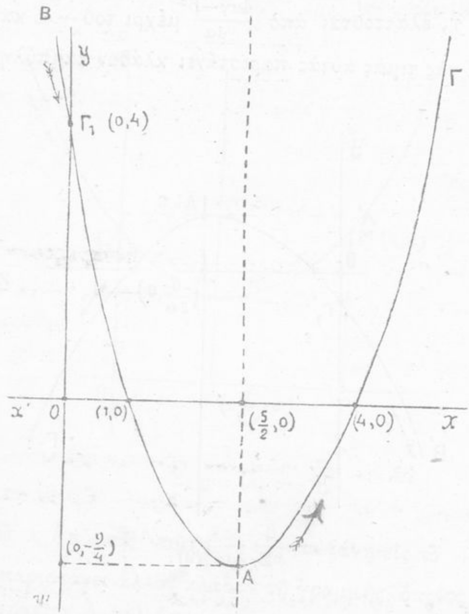
Σχῆμα (9).

ὁ ὁποῖος ἄρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α΄ καὶ τελειώνει εἰς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ xoy', καὶ ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$ καὶ $-\infty$ ἀντιστοίχως (βλ.Σχ. 9)·

Εἰς καθεμίαν τῶν δύο περιπτώσεων διὰ νὰ εὕρωμεν ποῦ κόπτει ἡ καμπύλη τὸν ἄξονα τῶν y, καρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖόν τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x=0$, ἀλλὰ ἂν θέσωμεν $x=0$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $y=\gamma$· ὥστε ἡ καμπύλη κόπτει τὸ ox εἰς τὸ σημεῖον Γ_1 καὶ Γ'_1, ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ. Ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **παραβολή**, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσει μετὰ τοῦ σημείου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

Ἐφαρμογή. Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου $y = x^2 - 5x + 4$. Ἔχομεν $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$ τὸ $x - \frac{5}{2}$ εἶνε ἀρνητικόν, καὶ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ τετράγωνον $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ μηδενὸς καὶ τὸ y ἐλαττοῦ-



Σχῆμα (10).

ται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Ἡ καμπύλη ἔχει ἕνα κλάδον ΒΑ, ἐρχόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην $-\infty$ καὶ $+\infty$ ἀντιστοίχως, καὶ περατούμενον εἰς τὸ σημεῖον Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (βλ. Σχ. (10)). Ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $x - \frac{5}{2}$ εἶνε θετικὸν καὶ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τετράγωνόν του αὐξάνει ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ y αὐξάνει ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομκρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $+\infty$ καὶ $+\infty$. Διὰ $x=0$ τὸ y εἶνε ἴσον μὲ 4· ἄρα ἡ καμπύλη κόπτει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον Γ, $(0,4)$. Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε $x=1$ καὶ $x=4$, ἕπεται ὅτι διὰ $x=1$, $x=4$ τὸ y εἶνε ἴσον μὲ μηδὲν, δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον $P_1(1,0)$ καὶ $P_2(4,0)$ ἡ καμπύλη κόπτει τὸν ἄξονα τῶν x (βλ. Σχ. (10)).

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐξετασθῇ ἡ μεταβολὴ τῶν κάτωθι συναρτήσεων γραφικῶς

$$y=x^2-x-2, \qquad y=3x^2-7x+3$$

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}, \qquad y=\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}.$$

Περὶ ἐξισώσεων τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

§ **82. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.**—Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἕνα ἄγνωστον **διτετράγωνον**, ἐὰν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, γράφομεν $x^2=y$, ὅτε $x^4=y^2$ καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0. \qquad (2)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ y_1 καὶ y_2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς (1), δηλαδὴ τὰς τιμὰς τοῦ x, θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $x^2=y$ ὅπου y

τὴν τιμὴν του y_1 καὶ y_2, ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξίσωσεις $x^2=y_1$, καὶ $x^2=y_2$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$x=\pm\sqrt{y_1},\ x=\mp\sqrt{y_2} \text{ ἢ } x=+\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_2},$$

Αἱ τιμαὶ y_1 καὶ y_2 εἶνε, καθὼς γνωρίζομεν

$$y_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad y_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

ἑπομένως, ἂν παραστήσωμεν διὰ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ τὰς ῥίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν $\rho_1=+\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$, $\rho_2=-\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$

$$\rho_3=\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \rho_4=-\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\nu}}{2\alpha}}$$

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4-10x^2+9=0$. Ἔχομεν $\alpha=1, \beta=-10, \gamma=9$. Ἑπομένως $\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=9\cdot1$ καὶ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4=-3\cdot-1\cdot\ 1\cdot\ 3$.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4+x^2-12=0$.
Εἶνε $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=-12\cdot$

$$\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}=3\cdot-4$$

ἑπομένως εἶνε $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4=\mp\sqrt{3}, \pm2i$.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+x^2+1=0$, εἶνε $\alpha=\beta=\gamma=1$ καὶ $\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{-3.}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$,

ἑπομένως $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4=\pm\sqrt{\frac{-1\pm i\sqrt{3.}}{2}}$ ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει ῥίζας, διότι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν δὲν ἔχει σημασίαν γνωστήν.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$x^4-10x^2+9=0, \qquad x^4+4x^2=5, \qquad x^4+5x^2=\frac{11}{4}$$

$$x^4-\frac{7x^2}{3}=\frac{2}{3}, \qquad 3x^4-14x^2=5, \qquad 4x^4-37x^2+9=0$$

Ὁμὰς δευτέρα.
$\alpha^2\beta^2x^4-(\alpha^4+\beta^4)x^2+\alpha^2\beta^2=0$, $x^4+4\alpha\beta x^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=0$,
$\gamma^4x^4+(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2)x^2-\alpha^2\beta^2$.

§ **83. Ἀνάλυσις τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.**
Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$. Ἐὰν θέσωμεν $x^2=y$ τρέπεται εἰς τὸ $\alpha y^2+\beta y+\gamma$.
Ἀλλ' ἂν y_1 καὶ y_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τούτου, θὰ ἔχωμεν καθὼς γνωρίζομεν (§ 77), ὅτι $\alpha y^2+\beta y+\gamma=\alpha(y-y_1)(y-y_2)$ καὶ ἐπαναφέροντες ἀντὶ τοῦ y τὸ x^2, εὑρίσκομεν

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x^2-y_1)(x^2-y_2)$$

ἢ
$$=(x+\sqrt{y_1})(x-\sqrt{y_1})(x+\sqrt{y_2})(x-\sqrt{y_2})$$

ἢ $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$,
ὅπου $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ
$4x^4-17x^2+4$, $7x^4-35x^2+28$, x^4-13x^2+36.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ σχηματισθῇ ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει ῥίζας τὰς
±3, ±1· $|+\alpha$, $\pm\sqrt{\alpha}$.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ ἐξετασθῇ, ποῖον σημεῖον θὰ ἔχῃ τὸ τριώνυμον $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, ὅταν τὸ x εἶνε ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν, δηλαδὴ 1ον) ἂν $x<\rho_1$· 2ον) ἂν $x>\rho_4$ καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ῥιζῶν, δηλαδὴ 3ον) ἂν εἶνε $\rho_1<x<\rho_2$· 4ον) $\rho_2<x<\rho_3$ καὶ 5ον) $\rho_3<x<\rho_4$. Ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\rho_1<{}_2<\rho_3<\rho_4$· Διακρίνατε δύο περιπτώσεις· I) ὅταν $\alpha>0$· II) ὅταν $\alpha<0$.

2) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-(\lambda^2+1)x+(\lambda^2+3)=0$ ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ῥίζαι της κατὰ 1.

§ **84. Περὶ τῶν ἐξισώσεων αἱ ὁποῖαι ἔχουν ῥιζικά.**—α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x-\sqrt{169-x^2}=17 \qquad (1).$$

Γράφομεν $-\sqrt{169-x^2}=17-x$ ἐὰν δέ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ μέλη ταύτης, εὑρίσκομεν $169-x^2=17^2-34x+x^2$, ἢ $x^2-17x+60=0$. (2) Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν, ὅτι $x=5$, $x=12$. Ἀλλ' ὡς γνωρίζομεν (§ **36**, γ΄), ἡ (2) δὲν εἶνε, ἐν γένει, ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν λοιπόν, ἂν αἱ ρίζαι 5 καὶ 12 τῆς (2) εἶνε καὶ τῆς (1) θέτομεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τό 5 καὶ 12 καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὐταὶ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν (1).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω καὶ ἄλλων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι **διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία ἔχει ριζικά, ἀπομονώνομεν τὰ ριζικὰ εἰς τρόπον ὥστε ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν νὰ προκύπτῃ ἐξίσωσις ἄνευ ριζικῶν** (παράβ. § **64**,β΄)

Ἀκολούθως λύομεν τὴν νέαν ταύτην ἐξίσωσιν καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$· ὑψοῦντες τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν, ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ ριζικόν,

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, $x^2-288x+1136=0$.

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε $x=4$ καὶ $x=284$, ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ $x=4$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{5\alpha+x}+\sqrt{5\alpha-x}=\dfrac{12\alpha}{\sqrt{5\alpha+x}}$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ $\sqrt{5\alpha+x}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἀναγωγὴν $\sqrt{25\alpha^2-x^2}=7\alpha-x$. ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$x^2-7\alpha x+12\alpha^2=0.$$

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε αἱ 3α καὶ 4α, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$\sqrt{x+4}=7, \qquad \sqrt{36+x}=2+\sqrt{x},$$

$x+\sqrt{25-^2x}=7, \qquad x-\sqrt{25-x^2}=1\cdot$

$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1, \qquad \frac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}=\sqrt{\beta}\cdot$

§ **83. Ἐξισώσεις διώνυμοι καὶ τριώνυμοι.** —α΄) Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ λύωμεν καὶ ἐξισώσεις ἀνωτέρου τοῦ β΄ βαθμοῦ. Οὕτω π. χ. ἂν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+27=0$,

θὰ ἔχωμεν $\quad x^3=-27$ καὶ $x=\sqrt{-27}$, ἢ $x=-3$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\quad x^4=16$.

Ἔχομεν $\quad x=\pm\sqrt{16}=\pm\sqrt{4^2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

Τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις καλοῦμεν **διωνύμους**, ἐπειδὴ τὰ πρῶτα των μέλη (ὅταν τὰ δεύτερα εἶνε μηδέν) ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο ὅρους.

Ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἔχει μίαν ρίζαν, τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύο, εὑρίσκεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τρίτου, τετάρτου.... βαθμοῦ ἔχει τρεῖς, τέσσαρας..... ρίζας.

β΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\quad x^6-19x^3-216=0$.

Πρὸς λύσιν αὐτῆς θέτομεν $\quad x^3=y$, ὅτε $\quad x^6=y^2$

καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\quad y^2-19y-216=0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $\quad y=27$ καὶ $y=-8$.

Ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ y τὸ x^2, θά ἔχωμεν

$x^3=27$, $x^2=-8$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο μόνον ρίζας τῆς δοθείσεις ἐξισώσεως τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, δηλαδὴ τὰς

$$x=3 \quad \text{καὶ} \quad x=-2.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις $\quad x^8-97x^4+1296=0$.

Θέτομεν $\quad x^4=y$, $\quad$ ὅτε καὶ $\quad x^8=y^2$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$y^2-97y+1296=0.$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $\quad y=81$, $\quad$ καὶ $\quad y=16$.

Ἑπομένως εἶνε καὶ $\quad x^4=81$, $x^4=16$.

ἄρα $\quad x=\pm 3$, $x\pm 2$

εἶνε αἱ τέσσαρες ρίζαι ἐκ τῶν ὀκτὼ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις. *Ὁμὰς πρώτη*

$$x^5 = 32, \qquad x^6 = 729, \qquad x^5 + 1 = 0$$

Ὁμὰς δευτέρα.

$$x^6 + 4x^3 = 96, \qquad x^{10} - 12x^5 = 56133\cdot$$

$$\frac{\alpha}{x^4} - \frac{2\beta^2}{x^2} = \frac{3\beta^2}{\alpha}, \qquad \alpha x^{11} + \beta x^9 + \gamma x^7 = 0.$$

Ὁμὰς τρίτη.

$$5^x + \frac{125}{5^x} = 30, \qquad 3^{2x} + \frac{531441}{3^{2x}} = 948$$

$$2x - \sqrt{x^3} = -3\sqrt{x}, \qquad \sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^2} = -18\cdot$$

$$7\sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{x^2} = -12$$

§ **86. Περὶ ἀντιστρόφων ἐξισώσεων.**—*α΄)* Θὰ λέγωμεν ὅτι ἐξίσωσίς τις (τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος εἶνε μηδὲν) εἶνε **ἀντίστροφος**, ἐὰν τὸ πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους της εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου καὶ **οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων εἶνε ἴσοι, ἢ ἀντίθετοι** (**ἐὰν τὸ πολυώνυμον δὲν ἔχῃ μεσαῖον ὅρον, ὅταν εἶνε ἀρτίου βαθμοῦ**).

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ἐπίσης ἡ $\alpha x^3 + 6x^2 - 6x - \alpha = 0$ εἶνε ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, καὶ ἡ $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θέσωμεν $x = -1$ εἰς αὐτήν, ἡ ἐξίσωσις ταυτοποιεῖται· ἄρα τὸ πρῶτον μέλος της διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x + 1)$ (§ **23**). Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha$ διὰ τοῦ $x + 1$, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha$· ἄρα $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha =$

$x+1)[\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha]=0$. Ἡ μία ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε προφανῶς ἡ $x=-1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$, ἄρα τὸ πρῶτον μέλος της διαιρεῖται διὰ $x-1$, καὶ ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=(x-1)[\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha]=0$. Εἶνε φανερόν, ὅτι ἡ μία ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε ἡ $x=1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$.

γ΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0$

ἢ $\alpha(x^2-1)(x^2+1)+\beta x(x^2-1)=0$

ἢ $(x^2-1)[\alpha(x^2+1)+\beta x]=0$. Εἶνε φανερὸν ὅτι αἱ δύο ῥίζαι θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2-1=0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x^2+1)+\beta x=0$. Ἡ πρώτη ἔχει ῥίζας τὰς $+1$ καὶ -1.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (1)

Διαιροῦμεν τὰ μέλη της διὰ τοῦ x^2 καὶ ἔχομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0$$

ἢ
$$\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0 \qquad (2)$$

Θέτομεν

$x+\frac{1}{x}=y$, ὅτε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$, ἢ $x^2+\frac{1}{x}+2=y^2$

καὶ $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν

$x^2+\frac{1}{x^2}$, καὶ $x+\frac{1}{x}$ εὑρίσκομεν

$\alpha(y^2-2)+\beta y+\gamma=0$, ἢ $\alpha y^2+\beta y+\gamma-2\alpha=0$,

ἡ ὁποία εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς y.

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν, ἐν γένει, δύο τιμὰς τοῦ y, τὰς ὁποίας ἂς παραστήσωμεν διὰ y_1 καὶ y_2. Ἀντικαθιστῶμεν καθεμίαν τῶν τιμῶν τοῦ y εἰς τὴν $x+\frac{1}{x}=y$ καὶ ἔχομεν $x+\frac{1}{x}=y_1$, $x+\frac{1}{x}=y_2$

ἢ $x^2-xy_1+1=0$, $x^2-xy_2+1=0$

ἤτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὰς ὁποίας ἐὰν λύσωμεν, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐφαρμογή. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Θέτομεν $x+\frac{1}{x}=y$, ὅτε εὑρίσκομεν

$6(y^2-2)-35y+62=0$, ἢ $6y^2-35y+50=0$.

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶνε αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$.

Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

ἢ τὰς $2x^2-5x+2=0$, καὶ $3x^2-10x+3=0$.

Αἱ ῥίζαι τούτων εἶνε αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$

Ἀνὰ δύο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε ἀντίστροφοι, καθὼς βλέπομεν.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$, $3x^3-13x^2+13-3=0$,

$2x^3+7x^2+7x+2=0$, $2x^4+5x^3-5x-2=0$,

$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=41$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$$

ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐπαληθεύεται διὰ $x=-1$.

Πῶς γίνεται τοῦτο;

2) Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0$ ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$ καὶ ἀνάγεται οὕτω εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$$

Πῶς γίνεται τοῦτο; Πῶς εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ πέμπτου βαθμοῦ;

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$$

$$2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$$

$$12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$$

§ **87. Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.** — Ἐνῶ τὴν λύσιν τῶν συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγομεν εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, μόνον εἰς περιπτώσεις τινάς ἀνάγομεν τὴν λύσιν συστήματος β' βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον· ἤτοι καταντῶμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, καὶ ἀφοῦ διὰ τῆς λύσεως ταύτης εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, ἀντικαθισθῶντες αὐτὰς εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν βαθμηδὸν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ἀγνώσων.

α') Τοῦτο συμβαίνει π. χ. ἐὰν ἐκ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ μία εἶνε πρώτου βαθμοῦ. Διότι ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου ἐκ τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἔχει τοὺς δύο εἰς πρῶτον βαθμόν, εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον εἰς δεύτερον βαθμόν.

β') Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐπίσης, ἐὰν εἰς δοθὲν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους δευτέρου βαθμοῦ οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Διότι διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ὅρων τούτων προκύπτει ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν.

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα

$$3x^2-5xy^2-+4y^2-8x+7y=8$$

$$9x^2-15xy+12y^2+11x-3y=32$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ -3 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 1, προσθέσωμεν δὲ τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη; εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $35x-24y=8$. Ἐὰν λύσωμεν ταύτην ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν του εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, προκύπτει μία ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

γ΄) Ἐὰν καθεμία τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἐκτὸς τῶν σταθερῶν ὅρων περιέχῃ μόνον ὅρους μὲ τὸ x^2 καὶ y^2, διὰ διαιρέσεως λαμβάνομεν μία ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὡς ἄγνωστον τὸ $\frac{x}{y}$

Ἐὰν λύσωμεν ταύτην, μὲ τὴν βοήθειαν της δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καθεμίαν τῶν δοθεισῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ y.

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα

$$x^2+3xy-5y^2=208 \quad , \quad xy-2y^2=16\cdot$$

Ἐκ τούτων διὰ διαιρέσεως τῆς πρώτης διὰ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2+3xy-5y^2}{xy-2y^2}=\frac{208}{16}=13$,

ἐκ τῆς ὁποίας ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ y^2, εὑρίσκομεν τὴν

$$\frac{\frac{x^2}{y_2}+3\frac{x}{y}-5}{\frac{x}{y}-2}=13$$

ἢ τὴν
$$\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}-5=13\left(\frac{x}{y}-2\right)$$

ἢ
$$\frac{x^2}{y^2}-10\frac{x}{y}+21=0.$$

Θεωροῦντες ὡς ἄγνωστον τὸν λόγον $\left(\frac{x}{y}\right)$ καὶ λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\frac{x}{y}=7$ καὶ $\frac{x}{y}=3$,

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $x=7y \quad , \quad x=3y$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $5y^2=16$ καὶ $y^2=16$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ ἀκολούθως τὰς τιμὰς τοῦ x.

δ΄) Εἴς τινας περιπτώσεις δυνάμεθα διὰ τῆς εἰσαγωγῆς νέων μεταβλητῶν καὶ διὰ ἐπιτυχοῦς ἀπαλοιφῆς ἀγνώστων μεταξὺ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα μόνον ὅρον καὶ πρὸς ἕνα ἄγνωστον.

Ἀξία ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶνε ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ xy καὶ τὸ $(x+y)$

ἢ τὸ $(x-y)$. Διότι ἐὰν εὕρωμεν π.χ. $x+y=\alpha$ καὶ $xy=\beta$, τότε, καθὼς γνωρίζομεν, τὰ x,y εἶνε αἱ ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία εἶνε τῆς μορφῆς $\omega^2-\alpha\omega+\beta=0$.

Ἐὰν εὕρωμεν ὅτι εἶνε $x-y=\alpha$, καὶ $xy=\beta$, τότε τὸ $x+(-y)$ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\alpha\omega-\beta=0$, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x.(-y)=-\beta$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. (Ἡ μία τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εἶνε πρώτου βαθμοῦ). Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

$$\begin{cases} x^2+xy=105 \\ 2x+3y=38, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy-y^2=7 \\ 4y-3x=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+y=28 \\ 2x-3y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha xy+\beta y=\gamma \\ \alpha x-\varepsilon y=\lambda, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x-y=182 \\ x+y=19, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+3y^2-4y+y=176 \\ 2y-x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2-4x+5y=222 \\ x-y=6, \end{cases}$$

$$\frac{15}{x}+\frac{22}{y}=5 \qquad \frac{9}{x}-\frac{8}{y}=1$$
$$x+y=16, \qquad 2x+y=10,$$

$$\frac{8}{x}+\frac{9}{y}=7 \qquad x+\sqrt{2y+4}=9$$
$$3x-y=3, \qquad 3x-2y=3,$$

$$\frac{7}{x^2}-\frac{2}{y^2}=103 \qquad \frac{5}{x^2}+\frac{2}{y^2}=95$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=11, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y^2}=8,$$

$$\frac{11}{x^2}+\frac{7}{y^2}=\frac{127}{77} \qquad \frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}+33=0$$
$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{19}{77}, \qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1=0$$

Ὁμὰς δευτέρα. (Ἐκ τῆς μιᾶς τῶν δύο ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους). Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα

$9x^2+5x-7y=25$ $2x^2-3xy+9x=29.$

$(x+y)^2-3(x+y)=10,$ $(x-y)^2+7(x-y)=30,$

$14x^2-11xy+4y^2=221$ $8x^2-2xy+7y^2=527$

$(2x-3y)^2+4(2x-3y)=5,$ $(3x+y)^2-9(3x+y)-20=0,$

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=21$ $\frac{2x+3y}{13}=\frac{4}{2x-3y}$

$(x+y+7)(x+y-5)=64,$ $(12-x+y)(x-y+1)=12(x-y),$

$3x^2-7y^2=140$ $5x^2-7x^2=70$

$\frac{x+y-3}{x+y-4}=\frac{3(x+y-14)}{8},$ $\frac{7}{x+y+5}-\frac{8}{x+y-6}=-\frac{3}{x+y-1}$

Ὁμὰς τρίτη. (Προσδιορίζεται ὁ λόγος $\frac{x}{y}$ ἐκ μιᾶς τῶν δύο ἐξισώσεων ἢ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν δοθεισῶν διὰ διαιρέσεως).

$x^2+y^2=100$ $x^2=y^2=56$

$x:y=3:4,$ $x:y=9:5,$

$x^2+xy+y^2=79$ $x^2-xy+y^2=91$

$(x+y):(x-y)=5:2,$ $(x+y):(x-y)=8:3,$

$(x^2+y^2)(x+y)=1080$ $(x^2-y^2)(2x-3y)=192$

$(x^2+y^2)(x-y)=540,$ $(x^2-y^2)(3x+y)=1344.$

Ὁμὰς τετάρτη. (Θεωροῦμεν ὡς μεταβλητὰ τὰ $x+y$ καὶ $x-y$).

$x^2+y^2=\alpha$ $x^2+y^2=73$ $x^2+y^2=97$

$xy=\beta,$ $x+y=24,$ $xy=36,$

$x^2+y^2=125$ $x^2+y^2=585$ $x^2+y^2=\frac{25}{36}$

$3xy=150,$ $4xy=288,$ $6xy=2,$

$x^2-y^2=\alpha$ $x^2-y^2=87$ $x^2+xy=187$

$x+y=\beta,$ $x-y=3,$ $y^2+xy=102,$

$(x+y)^2+\alpha(x+y)=\beta$ $3(x+y)^2-5(x+y)=50$

$(x-y)^2+\gamma(x-y)=\delta,$ $5(x-y)^2+6(x-y)=11,$

$(x-y+xy)(x-y-xy)=(1+xy)(1-xy)$

$x^2-y^2=169-2yx(x+y),$

$\frac{50+\sqrt{x+y}}{x+y-\sqrt{x+y}}=\frac{11}{4},$ $\sqrt{3(19-x+y)}+1=x-y.$

Ὁμὰς πέμπτη. (Θεωροῦμεν ὡς μεταβλητὰ τὰ xy, x^2+y^2 ἢ τὸ $x\pm y$).

$x^2 \pm y^2 = \alpha$ $\qquad$ $2(x^2+y^2)^2 - 7(x^2+y^2) = 1479$

$xy)^2 + \beta(xy) = \gamma,$ $\qquad$ $3x^2y^2 - 2\frac{1}{2}xy - 275 = 0,$

$(x \pm y)^2 + \alpha(x \pm y) = \beta$ $\qquad$ $(x \pm \nu)^2 + \alpha(x \pm \nu) = \beta$

$(xy)^2 + \gamma(xy) = \delta,$ $\qquad$ $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \lambda\left(\frac{x}{y}\right) = \gamma,$

$x + y + \sqrt{x+y-2} = 14,$ $\qquad$ $\frac{x^2\ y^2}{3} - \frac{3xy}{4} = 174.$

Ὁμὰς ἕκτη. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

$x^3 + y^3 = \alpha$ $\qquad$ $x^3 - y^3 = \alpha$

$x + y = \beta,$ $\qquad$ $x - y = \beta,$

$x^3 + y^3 = 19$ $\qquad$ $x^3 - y^3 = 341$

$x + y = 4,$ $\qquad$ $x - y = 11,$

$\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}) = 273$ $\qquad$ $xy = 72$

$x\sqrt{xy} + y^2 = 364,$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + \omega^2 = 289$

$\qquad$ $x + y + \omega = 29,$

$x^2 - y\sqrt{xy} = 585$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = 40$

$\qquad$ $xy = \omega$

$y^2 = x\sqrt{xy} - 234,$ $\qquad$ $x + y = 8.$

§ 88. Προβλήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

— Πρὸς λύσιν προβλήματός τινος τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀκολουθοῦμεν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἤτοι 1ον) ἐκλέγομεν τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος συμφώνως πρὸς τὰ ζητούμενά του· 2ον) σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ σύστημα ἐξισώσεων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων τοῦ προβλήματος· 3ον) λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων καὶ 4ον) κάμνομεν τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος. Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν προβλήματά τινα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Πρόβλημα 1ον). Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως ἐν τῷ ὁποίῳ ὁ ἀριθμὸς 86 γράφεται 321.

Ἔστω x ἡ βάσις τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν. Ἐπειδὴ αἱ 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως ἐν τῷ συστήματι τούτῳ θὰ ἔχουν $2x$ μονάδας πρώτης, αἱ δὲ 3 τῆς τρίτης θὰ ἔχουν $3x^2$ πρώτης, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $3x^2 + 2x + 1 = 86$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=5$, $x=-\frac{17}{3}$. Ἐπειδὴ ἡ βάσις πρέπει νὰ εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός, ἕπεται ὅτι εἶνε 5.

Πρόβλημα 2ον) *Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην;*

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x}-x=4$, λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $x=8$.

Πρόβλημα 3ον). *Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων ἑνὸς κλάσματος εἶνε 120· οἱ δύο ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφηροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν καὶ ἐπροσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖον εἶνε τὸ κλάσμα;*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ὁ παρονομαστὴς θὰ εἶνε $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x+1=\frac{120}{x}-1$ ἢ

$$x(x+2)=120, \quad \text{καὶ} \quad x=10, \quad x=-12,$$

ἐπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα θὰ εἶνε ἢ τὸ $\frac{10}{12}$, ἢ τὸ $-\frac{12}{10}$.

Πρόβλημα 4ον). *Τίς εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν 16, διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ζητουμένου πλὴν 15.*

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\left(\frac{3x}{4}+1\right)=\frac{16}{\left(\frac{4x}{5}-15\right)}$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $x=20$ καὶ $x=-\frac{31}{12}$.

Πρόβλημα 5ον) *Νὰ εὑρεθοῦ δύο ἀριθμοὶ περιττοὶ διαδοχικοὶ τοιοῦτοι ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ εἶνε 8000.*

Ἔστωσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8000\cdot$$

ἢ $\quad 8x=8000 \quad$ καὶ $\quad x=1000.$

Ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε 2001 καὶ 1999

Πρόβλημα 6ον). Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶνε μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 3·2·5· τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶνε ἴσον μὲ 342, νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Ἔστωσαν $3x$, $2x$, $5x$ οἱ τρεῖς ἀριθμοί· θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$9x^2+4x^2+25x^2=342,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=3$, ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε 9·6 καὶ 15.

Πρόβλημα 7ον). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενόν των νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

Ἔστωσαν $x-1, x$ καὶ $x+1$ οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

Θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$(x-1).x(x+1)=5(x-1+x+x+1)$$

ἢ

$$(x^2-1)x=15x,$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $x=\pm 4 \cdot 0 \cdot$ καὶ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε 3·4 καὶ 5, ἢ $-5 \cdot -4 \cdot -3$, ἢ $-1 \cdot 0 \cdot +1$.

Πρόβλημα 8ον) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀκέραιοι διαδοχικοὶ τοιοῦτοι ὥστε ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου των νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστωσαν x, $x+1$, καὶ $x+2$ οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν

$$(x+2)^3=3[(x+1)^3+x^3]$$

ἢ

$$5x^3+3x^2-3x-5=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶνε ἀντίστοφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ἡ μία ῥίζα εἶνε 1, αἱ δὲ δύο ἄλλαι φανταστικαί, ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε ὁ 1·2·3.

Πρόβλημα 9ον). Διὰ ἓν γεῦμα ἐδαπάνησαν 15 ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἀπὸ 36 δραχμὰς ἐν ὅλῳ· νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν, καὶ πόσα ἐξώδευσε καθεὶς, ἐὰν καθεμία γυνὴ ἐδαπάνησε 2 δρ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός.

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε $15-x$, θὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς ἀνδρὸς θὰ εἶνε $\frac{36}{x}$ καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{36}{15-x}$, καὶ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $\frac{36}{16-x}=\frac{36}{x}-2$

ἢ $x^2-52x+270=0$ καὶ $x=\frac{51\pm 39}{2}$ Ἐκ τῶν δύο σημείων ἀπορρίπτεται τὸ $+$, διότι ὅταν $x=\frac{51+39}{2}=45$, θὰ ἔχωμεν 45 ἄνδρας, ἐνῷ ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἦσαν 15. Ὥστε εὑρίσκομεν 6 ἄνδρας καὶ 9 γυναῖκας.

*(*) **Πρόβλημα 10ον)** Σῶμά τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἐν τῷ κενῷ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος υ;*

Τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους, γνωστοὺς ἐκ τῆς Φυσικῆς

$$\upsilon=\alpha t-g\,\frac{t^2}{2}\,,\qquad \tau=\alpha-gt, \qquad (1)$$

ὅπου τὸ τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t, καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $gt^2-2\alpha t+2\upsilon=0$· ἐκ τῆς λύσεως δέ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ t.

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ εἶνε $\alpha^2-2g\upsilon\geq 0$ 1 ἢ $\upsilon\leq\frac{\alpha^2}{2g}$. Ἑπομένως $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$ εἶνε τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἂν ῥιφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α. Ἐὰν εἶνε $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$ αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\alpha}{g}$. Ἑπομένως χρειάζεται $\frac{\alpha}{g}$ χρόνον διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος τὸ κινητόν· εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ ταχύτητα ἴσην μὲ μηδέν. Ἀντικαθιστῶντες πράγματι εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώ-(1) τὸ t διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{g}$, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ μηδέν· ἤτοι $\tau=\alpha-\frac{g\alpha}{g}=0$; Ἐὰν εἶνε $\upsilon<\frac{\alpha^2}{2g}$ αἱ δύο ῥίζαι τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (1) εἶνε πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, καὶ ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει αὐτὰς εἶνε ὁ $t=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2g\upsilon}}{g}$,

1 προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη 2gυ καὶ ἔχομεν $\upsilon\leq\frac{\alpha^2}{2g}$

Καὶ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ t ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα, διότι τὸ σῶμα διέρχεται δὶς ~~δύο φορὰς~~ διὰ ἑκάστου ~~καθενὸς~~ σημείου, κειμένου ἐντὸς τοῦ ὕψους υ, μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον. Αἱ δύο αὐταὶ στιγμαὶ εἶνε ἰσαπεχεῖς ἀπὸ τῆς στιγμῆς $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ τὴν ὁποίαν

1. ἀδύνατον νὰ ὑποτεθῇ $\alpha^2-2g\upsilon<0$ διότι δίδει ῥίζας μιγάδας.

τὸ κινητὸν φθάνει εἰς τὸ μέγιστον ὕψος του. Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι κατὰ τὰς δύο αὐτὰς στιγμὰς οἱ ταχύτητες εἶνε ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Ἐὰν τεθῇ $\upsilon=0$, θὰ ἔχωμεν $t=0$ καὶ $t=\frac{2\alpha}{g}$.

τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρόνος καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

(*) Πρόβλημα 11ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος ἑνὸς φρέατος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἐπέρασαν t δεύτερα λεπτὰ ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἀπὸ τῆς ὁποίας ἀφέθη νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου του μέχρις τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἠκούσθη ὁ κρότος, ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται).

Παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος καὶ διὰ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

1) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1 τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ.

2) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2 τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς τὴν ἀπόστασιν x.

Ἔχομεν τὸν τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x=\frac{1}{2}gt_1^2$

ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τοῦ χρόνου κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶνε καὶ ἡ πτῶσις τοῦ λίθου.

Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}$

Ἐκ τοῦ τύπου $x=\tau t_2$, ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τῆς ταχύτητος τ καὶ τοῦ χρόνου t_2, κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου εὑρίσκομεν $t_2=\frac{x}{\tau}$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{\tau}=t, \text{ ἢ } \sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{\tau},$$

ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες, εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x

$$gx^2 - 2\tau(gt+\tau)x + g\tau^2t^2 = 0. \qquad (1)$$

Ἵνα μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπαληθεύῃ τὴν προηγουμένην πρέπει νὰ εἶνε

$$t - \frac{x}{\tau} > 0, \quad ἢ \quad x < \tau t. \qquad (2)$$

Ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶνε θετικὸν τὸ $\tau^2(\tau+gt)^2 - g^2\tau^2t^2$, ἢ τὸ $\tau^3(\tau+2gt)$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶνε $t^2\tau^2$, τὸ δὲ ἄθροισμά των

$$\frac{2\tau(\tau+gt)}{g},$$

ἤτοι θετικά, ἑπομένως αἱ δύο ρίζαι εἶνε θετικαί.

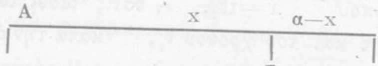
Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶνε (2) τὸ $x < \tau t$ (καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶνε $\tau t . \tau t$ εἶνε δὲ καὶ ἄνισοι) ἕπεται ὅτι ἡ μία τῶν ριζῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ τt καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα, ἥτις καὶ θὰ εἶνε δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα.

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (1) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον πλὴν τοῦ ριζικοῦ· ἤτοι ἔχομεν

$$x = \frac{\tau}{g}\left(\tau + gt - \sqrt{\tau(\tau+2gt)}\right)$$

(*) **Πρόβλημα 12ον**) *Δοθεῖσαν εὐθεῖαν μήκους α νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν (ΑΒ)=α εἰς δύο



Σχῆμα (11)

μέρη, τὰ (Α Γ)=x καὶ (ΓΒ)=α—x, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ x εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ α—x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$ ἢ τὴν $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκόμεν $x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{5\alpha^2}}{2}=\frac{\alpha(\pm\sqrt{5}-1)}{2}$

Διερεύνησις. Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε πραγματικαὶ καὶ μὲ σημεῖα ἀντίθετα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν των εἶνε $-\alpha^2$ Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3, ἐπομένως ἡ πρώτη ρίζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον σύν τοῦ ριζικοῦ, θὰ εἶνε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α, ἄρα δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Ὥστε ἔχομεν

$x=\frac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ Α, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{\alpha}{2}$

Πρόβλημα 13ον) Νά μερισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν 1620. Ποῖα τὰ δύο μέρη;

Ἐὰν διὰ τοῦ x καὶ y παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη, θὰ ἔχωμεν

$$x+y=27 \qquad 4x^4+5y^2=1620.$$

Ἀπαλείφοντες τὸν x εὑρίσκομεν $y^2-24y+144=0$

καὶ $y=12$· ἄρα, $x=15$ καὶ $y=12$.

Πρόβλημα 14ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις (αἱ δύο πλευραὶ) ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶνε 17 μ, τὸ δέ ἐμβαδόν του 120(μ^2).

Ἐὰν διὰ τῶν x καὶ y παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις ἀντιστοίχως, ἔχομεν $xy=120$, $x^2+y^2=17^2=289$, ἐκ τῆς λύσεως δέ τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x=15$, $y=8$.

Πρόβλημα 15ον). Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.

Ἂν διὰ τοῦ x, y παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις, θὰ ἔχωμεν $x-y=17$, $x^2+y^2=625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν

$$x=24, \qquad y=+7.$$

Πρόβλημα 16ον) Δίδεται τρίγωνόν τι ΑΒΓ· προσδιορίσαι ἕν σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, οὕτως ὥστε, ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ διαιρῆται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Παριστάνοντες διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ διὰ τοῦ x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ΑΔ, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ (ΔΕ ἡ παράλληλος τῆς ΓΒ) θὰ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας, ἑπομένως αἱ ἐπιφάνειαί των θὰ εἶνε ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν, ἤτοι θὰ εἶνε $\frac{\mathrm{A\Delta E}}{\mathrm{AB\Gamma}}=\frac{x^2}{\alpha^2}$ Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad x^2=\frac{\alpha^2}{2}, \quad x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

$\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\nu}=\alpha$

Ὁμὰς πρώτη 1) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ μ'ον μέρος πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ν'ον αὐτοῦ δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν α. $\frac{x^2}{\mu\nu}=\alpha$ καὶ $x^2=\alpha\mu\nu$ καὶ $x=\sqrt{\alpha\mu\nu}$ ($\sqrt{\alpha\mu\nu}$).

$\frac{\alpha}{x}=\nu x$ καὶ $\alpha=\nu x^2$, $\frac{\alpha}{\nu}=x^2$ καὶ $x=\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}=\frac{\sqrt{\alpha\nu}}{\nu}$

2) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν α δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ ν—πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· τίς εἶνε ὁ ἀριθμός;

$$\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{\sqrt{\alpha\nu}}{\nu}\right)$$

ἐὰν $x>y$ τότε $x-y=\delta$ ἤτοι $x=y+\delta$ ἀλλὰ $x\cdot y=\nu$ ἀντικαθιστῶντες $(y+\delta)\cdot y=\nu$ καὶ $y^2+\delta y-\nu=0$ καὶ $y=\frac{-\delta\pm\sqrt{\delta^2+4\nu}}{2}$

3) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ δ, εἶνε ἴσον μὲ ν. Τίς εἶνε ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν;

$$\left(\frac{-\delta\pm\sqrt{\delta^2+4\nu}}{2}\right)$$

$x=(x-1)^2-\delta$ καὶ $x+\delta=(x-1)^2$, $x+\delta=x^2-2x+1$ καὶ $x^2-3x-\delta+1=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{9+4\delta}}{2}$

4) Τίς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ δ μικρότερος τοῦ τετραγώνου τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου του;

$$\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{3+\sqrt{9+4\delta}}{2}\right)$$

5) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς διαδοχικοὺς τοιούτους ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀμέσως ἑπομένων τῶν νὰ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{11}{30}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$

$$\left(4\cdot 5,\ -\frac{17}{11}\cdot-\frac{6}{11}\right)$$

$x\cdot y=2$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{5}{12}$

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶνε 2 (γ), εἶνε ἴσον μὲ $1\frac{5}{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Τίνες οἱ δύο ἀριθμοί;

$$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)$$

7) Ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶνε κατὰ 4 (α) μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κατὰ 7 (β) καὶ ἐλαττώσωμεν τὸν παρονομαστὴν κατὰ 5 (γ) προκύπτει κλάσμα μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου κατὰ $1\frac{1}{15}$ $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα. $\left(\frac{11}{15}\right)$

8) Διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ τὸ δεύτερον ψηφίον (ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά) εἶνε κατὰ 2 μικρότερον τοῦ πρώτου. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του, εὑρίσκομεν $2\frac{2}{5}$. Τίς εἶνε ὁ ἀριθμός;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος παρήγγειλε καφὲν ἀντὶ 160 (α) δρ., καὶ τέϊον ἀντὶ 180 (β) δρ., ἔλαβε δὲ 40 (γ) χρ. καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χρ. τοῦ καφέ, ἐὰν τὸ τοῦ τεΐου ἐκόστιζε 5 (δ) δρ. ἐπὶ πλέον; $\left(2\frac{1}{2}\right)$

2) Τὰ ἔξοδα ἑνὸς ταξειδίου εἰς τὸ ὁποῖον ἔλαβον μέρος 3 (α) γυναῖκες ὀλιγώτεραι τῶν ἀνδρῶν, διενεμήθησαν οὕτως ὥστε οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1750(β) δρ, αἱ δὲ γυναῖκες 800(γ) δρ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες, ἐὰν καθεὶς τῶν ἀνδρῶν πληρώσῃ 50 (δ) δρ. περισσότερον ἢ καθεμία γυνή;

(15· 12, 7·4).

3) Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἔργου ἔλαβον μέρος 27(α) πρόσωπα καὶ ἐπληρώθησαν 21 (δ) δρ. διὰ τοὺς ἐνηλίκους καὶ 42 (γ) διὰ τοὺς ἀνηλίκους, ἐνῶ διὰ καθὲν παιδίον ἐπληρώνετο 1,50 (ν) δρ. ὀλιγώτερον ἢ διὰ καθένα ἐνήλικον. Πόσα παιδία ἔλαβον μέρος εἰς τὸ ἔργον; (21)

4) Ἀτμάμαξα θὰ ἐκέρδιζε χρόνον $\frac{2}{3}$(λ) ὥρας ἐπὶ δρόμου 180(α) χιλ, ἐὰν διήνυε 9(τ) χμ, καθ' ὥραν ἐπὶ πλέον. Πόσας ὥρας ἐχρειάζετο διὰ τὴν ὅλην ἀπόστασιν; (4)

5) Ἠγόρασέ τις οἶνον ἀντὶ 30 (α) δρ. Ἐὰν καθεμία φιάλη ἐκόστιζε 25(β) λ. ὀλιγώτερον, θὰ ἐλάμβανε 4(γ) φιάλας ἐπὶ πλέον Πόσας φιάλας ἠγόρασε; (20)

6) Ἔμπορος παρήγγειλε τέϊον ἀντὶ 224 (α) δρ. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ χιλιόγραμμον τούτου ἐκόστιζε 0,96 (β) δρ. ἐπὶ πλέον ἢ

ὅσον εἶχεν ὑπολογίσει, ἔλαβε 3(6) χρ. ὀλιγώτερον τοῦ ὑπολογισθέντος. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον; (8,96).

Ὁμὰς τρίτη (κινήσεως). 1) Δύο ὁδοιπόροι ἀνεχώρησαν ἐκ δύο τόπων, διευθυνόμενοι ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των, σύνηντήθησαν δὲ 3 (6) ὥρ. μετὰ τὴν ἀναχώρησίν των. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διήνυε ὁ πρωτος τήν ὅλην ἀπόστασιν, ἐὰν ἐχρειάζετο $2\frac{1}{2}$ (α) ὥρ. ἐπὶ πλέον ἢ ὁ δεύτερος; (7,5).

2) Δύο ἱππεῖς ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἐχρειάζετο 15″ ($τ''_1$) ὀλιγώτερον τοῦ ἄλλου διὰ ν. διατρέξῃ κυκλικὴν τινα τροχιὰν,συναντῶνται μετὰ 56($τ_2''$),ἐὰν ἐκκινήσουν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς διευθύνσεις ἀντιθέτους. Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται ὁ πρῶτος διὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ὅλην τροχιάν;

3) Βρύσις τις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 24″($τ_1''$) ἐπὶ πλέον ἢ ἄλλη. Πόσα λεπτὰ χρειάζεται ἡ πρώτη, ἐὰν καί αἱ δύο μαζὺ ρέουσαι χρειάζωνται 35″($τ_2''$) διά νά πληρώσουν τὴν δεξαμενήν; (84).

4) Ἀνήρ τις θὰ ἐταξείδευε μὲ ὡρισμένον χρηματικόν ποσὸν, διατεθειμένον διὰ τὸ ταξείδιον,μόνον 9 (α) ἡμ. ἐπὶ πλέον ἢ ἡ σύζυγός του. Ἐπειδὴ ὅμως ἐταξείδευσαν μαζὺ, ἤρκεσε τὸ ἐν λόγῳ ποσὸν διὰ ταξείδιον μόνον 20 (6) ἡμερῶν. Ἐπὶ πόσας ἡμέρας θὰ ἠδύνατο νὰ ταξειδεύῃ μόνος ὁ ἀνήρ;

5) Ἐκ δύο ὑδροσωλήνων ὁ πρῶτος χρειάζεται 9′($τ_1'$) ὀλιγώτερον διὰ νὰ πληρώσῃ δεξαμενήν,ἢ ὁ δεύτερος διὰ νὰ κενώσῃ αὐτήν. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ δύο συγχρόνως,πληροῦται ἡ δεξαμενὴ εἰς 70′($τ_2'$). Εἰς πόσον χρόνον πληροῖ τὴν δεξαμενὴν ὁ πρῶτος σωλήν; (21′).

6) Ἐπὶ τῶν σκελῶν ὀρθῆς γωνίας κινοῦνται δύο σημεῖα ἀπὸ σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀποστάσεις $α_1$ καὶ $α_2$ μέτρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς καὶ μὲ ταχύτητας $υ_1$ καὶ $υ_2$ ἀντιστοίχως πρὸς τὴν κορυφήν· κατὰ τὸ τέλος τῆς κινήσεως ἀπέχουν ἀπόστασιν β. Πόσα δευτερόλεπτα διαρκεῖ ἡ κίνησις; (διὰ $α_1=40$, $α_2=72$. $υ_1=5$, $υ_2=8$ καὶ $β=36$. (15,5′ ·4,93)

7) Πόσον διαρκεῖ ἡ κίνησις, ἐὰν δύο κινητὰ κινοῦνται ἐπὶ τῶν σκελῶν ὀρθῆς γωνίας ἐκ τῶν ἀποστάσεων 32(α) μ. καὶ 37 (β) μ.

ὲ ταχύτητας ἀντιστοίχως $3(\tau_1)$μ. καὶ $4\ (\tau_2)$μ., ἐὰν τὰ σημεῖα
ἰνε τὰ κέντρα κύκλων μὲ ἀκτῖνας $14\ (\rho_1)$ μ. καὶ $15\ (\rho_2)$ μ.
ντιστοίχως, μέχρις ὅτου οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς.
(15,52''· ''.

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Κεφάλαιον α δρ. φέρει τόκον κ δρ., ἐὰν
ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τοῦ χρόνου εἶνε κατὰ δ μεγαλύτερος τοῦ ἐπι-
οκίου. Πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δάνειον; Ἐφαρμογὴ
$\alpha=675$· $\delta=1\frac{1}{3}$· $\kappa=144$· (4 ἔτ. 10 μ.).

2) Κεφάλαιον α δρ. ἔφερε τόκον κ δρ. καὶ θὰ ἔφερε τὸν αὐτὸν
τόκον, ἐὰν ἐτοκίζετο πρὸς δ_1% ὀλιγώτερον, ἀλλὰ ἐπὶ δ_2 ἔτη
περισσότερα. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη; Εφαρμογὴ
$\alpha=2100$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\kappa=420$. (5%).

3) Ἐκ δύο κεφαλαίων ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἦτο κατὰ δ_1
δρ. μικρότερον, ἀλλ' ἐτοκίσθη πρὸς δ_2% ἐπὶ πλέον, ηὐξήθη
εἰς ν_1 ἔτη εἰς κ_1 δρ., τὸ δὲ δεύτερον εἰς ν_2 ἔτη εἰς κ_2 δρ. Πόσον
ἦτο τὸ πρῶτον κεφάλαιον; Ἐφαρμογὴ $\delta_1=300$, $\delta_2=1$,
$\nu_1=5$· $\nu_2=6$· $\kappa_1=625$· $\kappa_2=992$.

4) Δύο ἔμποροι ἐκέρδισαν ἐξ ἐπιχειρήσεώς τινος α δρ. ἐνῷ
ὁ πρῶτος εἶχε διαθέσει δ δρ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Πόσας
δρ. εἶχε διαθέσει ὁ πρῶτος, ἐὰν ἔλαβε ἐν ὅλῳ β δρ.;
Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=660$· $\beta=3960$, $\delta=600$. (3600).

5) Ἐκ δύο ἐμπόρων, οἱ ὁποῖοι κατέθεσαν ὁμοῦ α δρ. διά τινα
ἐπιχείρησιν, ἔλαβεν ὁ μὲν πρῶτος β_1 δρ. μετὰ ν_1 μῆνας, ὁ δὲ δεύ-
τερος β_2 δρ. μετὰ ν_2 μῆνας. Πόσας δρ. εἶχε καταθέσει ὁ καθείς;
Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=5000$· $\beta_1=2544$· $\beta_2=2860$· $\nu_1=9$·
$\nu_2=15$. (2400· 2600).

Ὁμάς πέμπτη. 1) Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν σημείων μεταξὺ
τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ν εὐθείας, συνδεούσας αὐτὰ ἀνὰ
δύο; Ἐφαρμογαὶ $\nu=78$· $\nu=171$· $\nu=300$. (13· 19· 25).

2) Ποῖον πολύγωνον ἔχει ν διαγωνίους; Ἐφαρμογὴ
$\nu=104$· 189. (17· 21).

3) Ἐκ δύο πολυγώνων τὸ πρῶτον ἔχει 6 (ν) πλευρὰς ἐπὶ πλέ-
ον ἢ τὸ δεύτερον καὶ $3\frac{1}{3}$ (μ) φορὰς περισσοτέρας διαγωνίους·
πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ καθέν; (9· 15).

4) Ἐὰν αὐξήσωμεν καθεμίαν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου κατὰ δ μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου τετραγώνου γίνεται μ φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν των; Ἐφαρμογὴ $\delta=3$ $\mu=2\frac{1}{4}$. (6).

5) Ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν $E(\mu^2)$, ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν του εἶνε $\frac{\pi}{\varkappa}$· πόση εἶνε ἡ μικροτέρα τούτων; Ἐφαρμογὴ $E=84$· $\frac{\pi}{\varkappa}=\frac{3}{4}$. $\left(3\sqrt{14}\right)$

6) Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ βάσις εἶνε κατὰ δ_1, καθὲν δὲ τῶν σκελῶν του κατὰ δ_2, μεγαλύτερον τοῦ ὕψους του. Πόση εἶνε ἡ βάσις του; Ἐφαρμογή $\delta_1=19$· $\delta_2=8$ (40· 24).

7) Ἑνὸς ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδόν του εἶνε 192(α) (μ^2) αἱ δὲ διαστάσεις του διαφέρουν κατὰ 4 (β) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν του; (16· 12).

8) Ρόμβου τινὸς ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος α αἱ δὲ διαγώνιοι διαφορὰν δ μέτρα. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ μικροτέρα διαγώνιος; Ἐφαρμογὴ $\alpha=17$· $\delta=14$. (10)

$\frac{\alpha\upsilon}{2}=170$

$\alpha+\upsilon=37$

$\frac{\alpha(37-\alpha)}{2}=170$

9) Τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 170 (α) (μ^2), τὸ ἄθροισμα μιᾶς πλευρᾶς του καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους 37 (β) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης; $\alpha=\frac{37\pm\sqrt{37^2-1360}}{2}=$ (17·40).

$\alpha^2-37\alpha+340=0$

10) Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐν τριγώνῳ διαιρεῖ μίαν πλευράν του εἰς μέρη ἔχοντα μήκη ἀντιστοίχως 11 (α) καὶ 33 (β) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν του, ἐὰν τὸ ἐμβαδόν του εἶνε 264 (γ) (μ^2); (37·15·44).

11) Ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα ρ τὸ μῆκος χορδῆς τινος εἶνε κατὰ δ μ. μεγαλύτερον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσεώς της· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς; Ἐφαρμογὴ $\rho=17$· $\delta=1$. (15)

12) Ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν δύο ἐφαπτομένων ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 24 (α) μ., ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶνε 25 (β) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου; (15·20)·

Ὁμὰς ἕκτη. (Ἐκ τῆς Φυσικῆς). 1) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 (α) μ. ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου του; (3″)

2) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος, ριπτόμενος κατακορύφως, ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $122\frac{1}{2}$ (υ) μ. καὶ ἐπαναπέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος; (10″)

3) Πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως, ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $122\frac{1}{2}$ (υ) μ.; (49)

4) Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1460 (υ) μ. σφαῖρα ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἐὰν ἀναχωρήσῃ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 (τ) μ;

5) Ποίαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 (α) χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 (β) χρ.; (40)

6) Εἰς πόσα δευτερόλεπτα κυλίεται σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ 39,2 (α) μ μῆκος καὶ κατὰ ὕψος 10 (υ) μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω; (5,6″)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

§ 89. **Πρόοδοι ἀριθμητικαί.**— α′) **Ἀριθμητικὴ πρόοδος** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι τῆς προόδου**, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς καθένα ὅρον δίδει τὸν ἑπόμενόν του, λέγεται **λόγος τῆς προόδου**. **Ἡ πρόοδος λέγεται αὔξουσα, ἐὰν ὁ λόγος της εἶνε ἀριθμὸς θετικός, φθίνουσα δὲ ἐὰν ἀρνητικός.**

Οὕτω ἡ σειρὰ 1,2,3,4, ... 48 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ αὔξουσα μὲ λόγον 1,

ἐπίσης ἡ 1,3,5 . . . . 53 μὲ λόγον 2.

Ἡ σειρὰ 35,30,25 . . . . 0 εἶνε πρόοδος φθίνουσα μὲ λόγον — 5.

Ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον της, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha+\omega$, ὁ τρίτος ὑπὸ τοῦ $\alpha+2\omega$ κ.ο.κ. Ὥστε οἱ ὅροι τῆς προόδου θὰ εἶνε

$$\alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega,\ \alpha+3\omega,\ \ldots\ldots$$

β΄) Ἐὰν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς τινος προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ὅρον της.

Πράγματι, ἐὰν α εἶνε ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος τῆς προόδου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ 2ος ὅρος εἶνε $\alpha+\omega$, ὁ 3ος ὅρος εἶνε $\alpha+2\omega$, ὁ 4ος ὅρος εἶνε $\alpha+3\omega$, καὶ οὕτω καθεξῆς βλέπομεν, ὅτι **«ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον της αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων του ὅρων».**

Οὕτω 30ος ὅρος ἰσοῦται μὲ $\alpha+29\omega$. Ἐὰν διὰ τοῦ ν παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ τ τὸν τελευταῖον ὅρον, οἱ προηγούμενοί του θὰ εἶνε $(\nu-1)$ τό πλῆθος· ἄρα θὰ ἔχωμεν ὅτι $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$.

γ΄) **Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

«Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων».

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \kappa, \lambda, \tau$, (1) καὶ λόγος αὐτῆς ὁ ω, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων της ν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι $\beta=\alpha+\omega$, $\gamma=\alpha+2\omega$. ἐξ ἄλλου ὅτι $\tau=\lambda+\omega$, $\tau=\kappa+2\omega$ καὶ επομένως $\lambda=\tau-\omega$, $\kappa=\tau-2\omega$, προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας $\beta=\alpha+\omega$, $\lambda=\tau-\omega$ κατὰ τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\beta+\lambda=\alpha+\tau$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\gamma=\alpha+2\omega$, $\kappa=\tau-2\omega$ εὑρίσκομεν $\gamma+\kappa=\alpha+\tau$.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς (1). Ἂν παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα διὰ τοῦ Σ, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\varkappa+\lambda+\tau$$

ἢ

$$\Sigma=\tau+\lambda+\varkappa+\ldots\ldots+\gamma+\beta+\alpha,$$

καὶ προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\lambda)+(\gamma+\varkappa)+\ldots\ldots\ldots+(\tau+\alpha).$$

Ἐπειδὴ καθὲν τῶν ἐν παρενθέσει ἀθροισμάτων εἶνε ἴσον μὲ $(\alpha+\tau)$, τὸ δὲ πλῆθός των εἶνε ὅσον τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, ἔχομεν ὅτι $2\Sigma=(\alpha+\tau).\nu$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\Sigma=\frac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$, (2

ἤτοι **τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της».**

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον του $\alpha+(\nu-1)\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου, εὑρίσκομεν $\Sigma=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1)\omega]\nu}{2}=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}.\nu$, (3)

Ὁ τύπος αὐτὸς χρησιμεύει, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἄθροισμα Σ, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου.

Παραδείγματα. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ $13^{\text{ος}}$ ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶνε 3 καὶ ὁ λόγος 5. Ἔχομεν $\alpha=3$, $\omega=5$, $\nu=13$.

Ἑπομένως ὁ $13^{\text{ος}}=3+(13-1).5=63$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ δέκατος ὅρος εἶνε 31 καὶ ὁ εἰκοστὸς 61.

Ἔχωμεν $\alpha+9\omega=31$, $\alpha+19\omega=61$.

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς δευτέρας τὴν πρώτην εὑρίσκομεν

$$10\omega=30\ ,\ \text{καὶ}\ \omega=3.$$

Ἑπομένως $\alpha=4$· ἄρα ἡ πρόοδος εἶνε 4, 7, 10, 13 , ...

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα δέκα ὅρων τῆς προόδου

$$2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ \ldots\ldots$$

Ἔχομεν $\alpha=2$, $\omega=3$, $\nu=10$, ἑπομένως ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τόπον (3), εὑρίσκομεν

$$\Sigma=\frac{4+9.3}{2}\,10=155.$$

4) Ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς τινος προόδου εἶνε 3, ὁ τελευταῖος 31 καὶ τὸ ἄθροισμα των 136· νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

Ἂν διά τοῦ ν παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου θὰ ἔχωμεν

$$31=3+(\nu-1).\ \omega.$$

ὅπου ω παριστάνει λόγον της. Ἐξ ἄλλου τὸ ἄθροισμα εἶνε $136=\frac{(3+3)\ \nu}{2}=17.\nu$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\nu=\frac{136}{17}$ $=8$, καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ν εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα, εὑρίσκομεν $\omega=4$. Ὅθεν ἡ πρόοδος εἶνε

3, 7, 11, 15, ... 27, 31.

δ') **Παρεμβολή.** Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ των ὅσους δήποτε ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ τ παραστήσωμεν τοὺς δύο δοθέντας ἀριθμούς, διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ παρέμβληθοῦν, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ σχηματίσωμεν, θὰ εἶνε $(\nu+2)$, ὁ δέ τελευταῖος της ὅρος θὰ εἶνε ὁ τ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu+1)\omega'$, ὅπου τὸ ω′ παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἔχομεν

$\omega'=\frac{\tau-\alpha}{\nu+1}$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ζητουμένην πρόοδον, ἀφοῦ γνωρίζομεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸν τελευταῖον ὅρον της.

Παράδειγμα. Μεταξὺ 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 16 ἀριθμοὶ οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον μετὰ τῶν δοθέντων. Ἔχομεν $\alpha=1, \tau=4,\ \nu=16$, ἑπομένως θὰ εἶνε $\omega'=\frac{4-1}{16+1}=\frac{3}{17}$ ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶνε ἡ

$$1,\ 1+\frac{3}{17}\ ,\qquad 1\frac{6}{17}\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ 4.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὑρεῖν τὸν δέκατον ὅρον τῆς προόδου

9· 13· 17 . . . .

2) Ὁμοίως, εὑρεῖν τὸν δέκατον ὅρον τῆς προόδου

$-3 \cdot -1 \cdot +1 \ldots\ldots$ (15)

3) Εὑρεῖν τὸν ὄγδοον ὅρον τῆς προόδου

$\alpha, \alpha + 3\beta, \alpha + 6\beta, \ldots\ldots$ $(\alpha + 21\beta)$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν. $\left(\omega = \frac{1}{10}\right)$

2) Ὁμοίως μεταξὺ τῶν -4 καὶ 17 νὰ παρεμβληθοῦν τρεῖς ἀριθμοί. $\left(\omega = \frac{21}{4}\right)$

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι προόδων

$5 \cdot 8 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ἐκ 10 ὅρων)

$-4 \cdot -1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ἐξ 7 ὅρων)

$\alpha, 4\alpha, 7\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ἐκ ν ὅρων)

$\frac{10}{15}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ἐξ 21 ὅρων)

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Νὰ λυθοῦν τὰ ἑξῆς προβλήματα. 1) Ὡρολόγιόν τι κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης· πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἑνὸς ἡμερονυκτίου; (156)

2) Ἀγοράζει τις ἓν ἐμπόρευμα καὶ συμφωνεῖ νὰ ἐξοφλήσῃ τὴν ἀξίαν του εἰς 12 (ν) δόσεις. Ἂν ἡ πρώτη δόσις εἶνε 10 (α) δρ., ἡ δευτέρα 15 $(\alpha + \lambda)$ δρ., ἡ τρίτη 20 $(\alpha + 2\lambda)$ δρ. κ. ο. κ., ποία εἶνε ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος; (450)

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι 150 (ν) 11325 $\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 $(2\nu + 1)$.

5) Γνωρίζομεν ὅτι ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92· ὁ 4ος καὶ ὁ 11ος ἔχουν ἄθροισμα 71. Ποῖοι οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς προόδου; (53,75·47,75·37,75·23,25)

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ 12 ὅρων εἶνε 74· τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε 70. Ποία εἶνε ἡ πρόοδος; (2· 5· 8 ....35).

7) Ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ ἐχούσῃ 11 ὅρους τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶνε 176, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων 30. Ποία εἶνε ἡ πρόοδος; (1· 4· 7· 10·...31)

8) Τὸ γινόμενον τῶν πέντε ὅρων φθινούσης ἀριθμητικῆς προόδου εἶνε 42320, τὸ δὲ ἄθροισμά των 40. Ποῖοι εἶνε οἱ πέντε ἀριθμοί; (2· 5. 8· 11· 14)

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν^{os} ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου $1, \frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots$ $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{(\nu+1)}{2}\right)$

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν^{os} ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς

$\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots\ldots$ $\left(\frac{\nu^2+(\nu-2)}{\nu}, \frac{\nu^2(2\nu+1)-3}{3}\right).$

11) Νὰ εὑρεθῇ α΄) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων· β΄) τῶν κύβων, τῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἑξῆς.

Παριστάνομεν διὰ S_1, S_2 τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ ν. Ἔχομεν $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + +\beta^3$· θέτομεν $\beta=1$, ὅτε γίνεται $(\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 . 1 + 3.\ \alpha.\ 1^2 + 1$. Ἀντικαθιστῶμεν τώρα τὸ α διὰ τῶν

$1, 2, 3, \ldots\ldots \nu$ καὶ λαμβάνομεν

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 = 3.\ 1^2 + 3.\ 1 + 1$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3.\ 2^2 + 3.\ 2 + 1$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3.\ 3^2 + 3.\ 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\nu+1)^3 = \nu^3 + 3.\ \nu^2 + 3.\ \nu + 1,$$

προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\nu+1)^3 = 1 + 3\,S_2 + 3\,S_1 + \nu$$

ἢ

$$(\nu+1)^3 = 1 + 3\,S_2 + 3.\ \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu,$$

ἐξ οὗ προσδιορίζομεν τὸ S_2.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ S_3 θὰ χρησιμοποιήσωμεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὸν τύπον

$$(\alpha+1)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3 . 1 + 6\alpha^2 . 1^2 + 4\alpha . 1^3 + 1^4$$

καὶ θὰ εὕρωμεν

$$(\nu+1)^4 = 1 + 4\,S_3 + 6\,S_2 + 4\,S_1 + \nu.$$

12) Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τό ἄθροισμά των εἶνε 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τῶν ἀντιστρόφων των $\frac{25}{24}$. (2· 4· 6· 8).

§ **90. Πρόοδοι γεωμετρικαί.** α΄) **Γεωμετρικὴ πρόοδος** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι τῆς προόδου,** ὁ δὲ ἀριθμὸς ἐπὶ τόν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενόν του λέγεται **λόγος τῆς προόδου. Ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται αὔξουσα, ἐὰν ὁ λόγος της εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, φθίνουσα δὲ ἂν εἶνε μικρότερος αὐτῆς.**

Κατὰ ταῦτα ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots, 64$$

ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε 2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots \frac{1}{64}$

ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχουσαν λόγον $\frac{1}{2}$.

Ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον της, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ παριστάνεται διὰ τοῦ α ω, διότι γίνεται ἐκ τοῦ α διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ω. Ὁ τρίτος ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ $\alpha\,\omega.\,\omega = \alpha\omega^2$, ὁ τέταρτος ὑπὸ τοῦ $\alpha\omega^3$ κ.ο.κ. Ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτω $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \ldots\ldots\ldots$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτο ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος γεωμετρικῆς τινος προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ὅρον της. Οὕτω ὁ 2ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὸν λόγον· ὁ 3ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ λόγου· ὁ 4ος ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ λόγου κ.ο.κ.

Ἐν γένει, **Ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν τῶν προηγουμένων του ὅρων.**

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν διὰ τοῦ τ παραστήσωμεν τὸν νυοστὸν ὅρον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον τὸν ω, θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$.

Παραδείγματα 1) Ὁ δέκατος ὅρος τῆς προόδου

$2, 6, 18, \ldots\ldots$ εἶνε ὁ $2.\,3^9$.

2) Ὁ ἑνδέκατος ὅρος τῆς προόδου $9, 3, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$ εἶνε ὁ $9.\frac{1}{3^{10}}$, διότι εἶνε $\alpha=9$, $\omega=\frac{1}{3}$.

3) Ὁ ἕκτος ὅρος τῆς προόδου $\frac{13}{10}, \frac{13}{100}, \ldots\ldots$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\alpha=\frac{13}{10}$, $\omega=\frac{1}{10}$, θὰ εἶνε $\frac{13}{10}.\frac{1}{10^5}$.

β΄) Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3 \ldots\ldots\ldots \alpha\omega^{(\nu-1)}$ ἐκ ν ὅρων. Ἐὰν διὰ Σ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 \ldots\ldots + \alpha\omega^{(\nu-1)}$, (1)· ἐὰν δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δ' ἐκ τοῦ ἐξαγομένου

$$\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \ldots\ldots + \alpha\omega^\nu$$

τὴν (1) (κατὰ μέλη) προκύπτει

$$\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^\nu - \alpha, \text{ ἢ } \Sigma(\omega-1) = \alpha\omega^\nu - \alpha$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $$\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega-1},$$

ἢ καὶ $$\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega} \quad (2).$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶνε φθίνουσα, καὶ ὅτι ἔχει ἀπείρους ὅρους.

Ὁ ὅρος της $\alpha\omega^{\nu-1} = \tau$ θὰ εἶνε ἀριθμὸς ἐλάχιστος, ἐὰν τὸ ν εἶνε πολὺ μεγάλος ἀριθμός, καὶ θὰ τείνῃ νὰ γίνῃ ἴσος μὲ τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^\nu$ τὸ ἴσον του $\alpha\omega^{(\nu-1)}.\,\omega$, καὶ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{(\nu-1)}$ τὸ τ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\tau\omega}{1-\omega} \quad (2'),$$

παραλείποντες δὲ τὸν ἀφαιρετέον $\frac{\tau\omega}{1-\omega}$, ἐπειδὴ εἶνε ἐλάχιστο ἀριθμὸς καὶ τείνει νὰ γίνῃ μηδὲν καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσοτέρους ὅρους τῆς φθινούσης προόδου, μένει ὡς ἄθροισμα τό

$$\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι

1) «**Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον αὐτῆς, παρονομαστὴν δὲ τὸν λόγον ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα**».

2) «**Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης ἀπείρους ὅρους, εἶνε ἴσον μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἠλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου**».

Παραδείγματα. 1) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2} \ldots\ldots\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, θὰ εἶνε

$$\Sigma = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων

$\frac{25}{100}$, $\frac{25}{100^2}$, ... εὑρίσκομεν ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $\alpha = \frac{25}{100}$, $\omega = \frac{1}{100}$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (3), ὅτε ἔχομεν

$$\Sigma = \frac{25}{100\left(1-\frac{1}{100}\right)} = \frac{25}{99}.$$

3) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots$ εἶνε $\frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8.$

γ') **Παρεμβολή.** Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ν ἄλλους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν καλέσωμεν ω' τὸν λόγον τῆς προόδου, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της θὰ εἶνε $(\nu+2)$, ὁ τελευταῖος ὅρος β θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον α ἐπὶ τὴν ν + 1 δύναμιν τοῦ λόγου ω'· ἤτοι θὰ ἔχωμεν $=\alpha\omega'^{(\nu+1)}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\omega'^{(\nu+1)}=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ἢ} \quad \omega'=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶνε ἡ

$$\alpha, \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha\sqrt[\nu+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \ldots\ldots \beta\cdot$$

Παράδειγμα. Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελέσουν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἔχομεν $\nu=9$, ἄρα $\omega'=\sqrt[10]{2}=2^{\frac{1}{10}}$,

ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶνε $1, 2^{\frac{1}{10}}, 2^{\frac{2}{10}}, 2^{\frac{3}{10}}, \ldots\ldots 2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὅρους

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots\ldots, \qquad \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots,$$

$$2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \ldots \quad 0,8686\ldots, \qquad 0,54444\ldots..$$

2) Εὑρεῖν τὸν εἰκοστὸν ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εἴκοσι ὅρων τῶν προόδων $1, 3, 9, 27, \ldots\ldots; \; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε

$$\omega=\frac{1}{4}, \quad \nu=6, \quad \Sigma=2730.$$

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα γεωμετρικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\tau=384, \omega=2, \nu=8$. (3· 765)

3) Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν 161 καὶ 4347 δύο ἀριθμοὶ ὥστε ν᾽ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος. (483· 1449)

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ σειρὰ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots\ldots$ τῆς ὁποίας οἱ μὲν ἀριθμηται ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ δὲ παρανομασταὶ γεωμετρικήν

5) Ποῦ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots \qquad (4+3\sqrt{2})$$

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν

$$\alpha^{\nu}+\beta\alpha^{\nu-1}+\beta^2\alpha^{\nu-2}+\ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots\ldots$$

ὅπου ὑποτίθεται $\alpha>\beta$. $\left(\frac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha-\beta}, \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\right)$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐν τετραγώνῳ πλευρᾶς α ἑνώνομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ εὑρίσκομεν νέον τετράγωνον· τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν καὶ εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων. $(2\alpha^2)$

2) Νὰ λυθῇ τὸ ἀντίστοιχον πρόβλημα τοῦ προηγουμένου, ἂν ἀντὶ τετραγώνου λάβωμεν τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἔχον πλευρὰν α $\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)$

3) Ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο κύκλον· εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ. ο. κ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων. $(2\pi\rho^2 \cdot 4\rho^2)$

4) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὅτι ὁ τρίτος ὅρος τῆς προόδου εἶνε ἐννεαπλάσιος τοῦ πρώτου. (9·27·81·243.

5) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 221 εἰς τρία μέρη, ὥστε νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος ὅρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν πρῶτον κατὰ 136. (17·51·153

6) Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 248, ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὅροι; (8·40·200

7) Δεῖξαι ὅτι ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ γινόμενον δύο ὅρων, ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ **91.** *Ὁρισμός.* Ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε δύναμις τοῦ 10, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης λέγεται **λογάριθμος** τοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 100 εἶνε ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ 10, ἤτοι ἔχομεν ὅτι $10^2=100$, καὶ ὁ ἐκθέτης 2 λέγεται λογάριθμος τοῦ 100 ὡς πρὸς τὴν βάσιν 10. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $10^3=1000$, ὁ 3 λέγεται λογάριθμος τοῦ 1000 ὡς πρὸς βάσιν 10. Ἐν γένει, ἐὰν δοθείς τις ἀριθμός, ἔστω ὁ Α, εἶνε δύναμίς τις τοῦ 10, π. χ. $10^\alpha=A$, ὁ ἐκθέτης α δυνάμεως ταύτης τοῦ 10 λέγεται λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸ 10 καὶ σημειώνεται οὕτω λογ Α=α, ἀπαγγέλλεται δὲ ὡς ἑξῆς· ὁ λογάριθμος τοῦ Α εἶνε ἴσος μὲ α. Ἐπειδή, καθὼς γνωρίζομεν, εἶνε $10^1=10$, καὶ $10^0=1$, ἕπεται ὅτι «**ὁ λογάριθμος τοῦ 10** (**ὡς πρὸς βάσιν 10**) εἶνε **ἴσος μὲ 1, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς μονάδος μὲ μηδέν**».

§ **92** **Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.**—*α')* Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ἕπεται ὅτι οἱ λογάριθμοι ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ἐκθετῶν δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως. Πράγματι γνωρίζομεν ὅτι

(1) $10^\alpha . 10^\beta = 10^{\alpha+\beta}$ (§ 8,55, 6')

(2) $10^\alpha : 10^\beta = 10^{\alpha-\beta}$

(3) $(10^\alpha)^\nu = 10^{\alpha \cdot \nu}$

ἐὰν δὲ θέσωμεν $10^\alpha=A$, $10^\beta=B$, ὁπότε θὰ εἶνε: $\alpha=$λογ. Α, $\beta=$λογ. Β καὶ $\alpha+\beta=$λογ. Α + λογ. Β.

θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1), ὅτι $A.\ B = 10^{\alpha}.\ 10^{\beta} = 10^{\alpha+\beta}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται, ὅτι $\lambda o\gamma.\ (A.\ B) = \alpha + \beta = \lambda o\gamma. A + \lambda o\gamma. B$

ἤτοι 1) «**Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου** γινομένου **δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων».**

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν ὅτι $A : B = 10^{\alpha} : 10^{\beta} = 10^{\alpha-\beta}$

ἤτοι ὅτι $\lambda o\gamma.\ (A : B) = \alpha - \beta = \lambda o\gamma.\ A - \lambda o\gamma.\ B.$

Ἐπομένως 2) «**Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου».**

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν ὅτι $A^{\nu} = (10^{\alpha})^{\nu} = 10^{\alpha.\ \nu}$, ἤτοι ὅτι $\lambda o\gamma.(A^{\nu}) = \alpha.\ \nu = \nu.\ \lambda o\gamma.\ A$, δηλαδὴ

3) «**Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως».**

Ἡ πρώτη ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους τῶν δύο παραγόντων. Π.χ. ἂν θέλωμεν τὸν $\lambda o\gamma.\ (A.\ B.\ \Gamma.)$, παρατηροῦμεν ὅτι, θεωροῦντες τὸ γινόμενον A. B ὡς ἕνα ἀριθμόν, ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ (A.\ B.\ \Gamma) = \lambda o\gamma.[(A\ B).\ \Gamma] = \lambda o\gamma.\ (A.\ B) + \lambda o\gamma.\ \Gamma$

$$= \lambda o\gamma.\ A + \lambda o\gamma.\ B + \lambda o\gamma.\ \Gamma.$$

Ἡ ἰδιότης (3) ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἶνε κλασματικός, ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Πράγματι, ἂν θέλωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ $A^{\frac{\varkappa}{\varrho}}$ καὶ θέσωμεν $\psi = A^{\frac{\varkappa}{\varrho}}$, ὑψώσωμεν δὲ τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς τὴν ρ δύναμιν, θὰ ἔχωμεν $\psi^{\varrho} = A^{\varkappa}$, καὶ, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ (\psi^{\varrho}) = \lambda o\gamma.\ (A^{\varkappa})$ καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα 3) εἶνε $\varrho\ \lambda o\gamma.\ \psi = \varkappa\ \lambda o\gamma.\ A$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma.\ \psi = \frac{\varkappa}{\varrho} \lambda o\gamma.\ A$,

ἤτοι
$$\lambda o\gamma.\left(A^{\frac{\varkappa}{\varrho}}\right) = \frac{\varkappa}{\varrho}\ \lambda o\gamma.\ A.$$

Ἐπίσης ἂν θέλωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ $A^{-\mu}$, παρατηροῦμεν ὅτι (§ 55), $A^{-\mu} = \frac{1}{A^{\mu}}$, ἐπομένως κατὰ τὴν

125

ἰδιότητα 2 ἔχομεν $\lambda o\gamma.(A^{-\mu}) = \lambda o\gamma.\left(\frac{1}{A^{\mu}}\right) = \lambda o\gamma.1 - \lambda o\gamma.A^{\mu}$

$= 0 - \mu\ \lambda o\gamma.A = -\mu\ \lambda o\gamma.A.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι 4) «**Ὁ λογάριθμος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινος, ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ**».

Διότι εἶνε $\lambda o\gamma.\sqrt{A} = \lambda o\gamma.\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\lambda o\gamma.A.$

Ἐν γένει 5) «**Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε ρίζης ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης**».

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $\lambda o\gamma.\sqrt[\nu]{A} = \lambda o\gamma\left(A^{\frac{1}{\nu}}\right) = \frac{1}{\nu}\lambda o\gamma.A$

Παραδείγματα καὶ ἀσκήσεις

α) $\lambda o\gamma.105 = \lambda o\gamma.(3.5.7.) = \lambda o\gamma.3 + \lambda o\gamma.5 + \lambda o\gamma.7\cdot$

$\lambda o\gamma\left(5\ \frac{2}{3}\right) = \lambda o\gamma.\left(\frac{17}{3}\right) = \lambda o\gamma.17 - \lambda o\gamma.3\cdot$

$\lambda o\gamma.(81) = \lambda o\gamma(3^4) = 4\ \lambda o\gamma.3.$

Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων

$\lambda o\gamma.15 = \lambda o\gamma.3 + \lambda o\gamma.5, \qquad \lambda o\gamma.55 = \lambda o\gamma.11 + \lambda o\gamma.5\cdot$

$\lambda o\gamma.\ 2\ \frac{1}{3} = \lambda o\gamma.7 - \lambda o\gamma.3\cdot \qquad \lambda o\gamma.49 = 2.\lambda o\gamma.7.$

β') Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $10^0 = 1\cdot\ 10^1 = 10\cdot\ 10^2 = 100, \ldots$ ἔχομεν ὅτι $\lambda o\gamma.1 = 0,\ \lambda o\gamma.10 = 1,\ \lambda o\gamma.100 = 2, \ldots\ldots$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν, ὡς γνωστὸν (§ 55)

$10^{-1} = 0,1\cdot \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01, \ldots\ldots$

ἤτοι ὅτι $\lambda o\gamma.\ 0,1 = -1\cdot\ \lambda o\gamma.0,01 = -2\cdot\ \lambda o\gamma.0,001 = -3$

Ἔστω τώρα ἀριθμός τις, περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, π.χ. ὁ 7. Ἐπειδὴ εἰς τὴν τιμὴν 7 τῆς συναρτήσεως $10^x = y$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ x (παράβ. § 65, Ἄσκησις 2), ἕπεται ὅτι ὑπάρχει λογάριθμος τοῦ 7, καθὼς καὶ καθενὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ, εἶνε δὲ οὗτος θετικὸς μέν, ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἀρνητικὸς δέ, ἂν μικρότερος τῆς μονάδος. Ὁ λογάριθμος τοῦ 7 θὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδος καὶ μικρότερον τοῦ λογαρίθμου τοῦ 10, ἤτοι ὁ λογ. 7 θὰ εἶνε μηδὲν σὺν μέρος τῆς 1. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, ἔχομεν ὅτι ὁ λογάριθμος καθενὸς τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν

1 καὶ 10 θὰ εἶνε ἴσος μὲ $0 +$ μέρος τῆς 1

10 καὶ 100 » » » » $1 +$ » » »

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν ἀριθμός τις περιέχεται μεταξὺ 0, 1 καὶ 1 θὰ ἔχῃ λογάριθμον μεγαλύτερον τοῦ λογαρίθμου τοῦ 0, 1 καὶ μικρότερον τοῦ λογαρίθμου τῆς μονάδος· δηλαδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ θὰ εἶνε $-1 +$ μέρος τῆς 1.

Ὁμοίως ὁ λογάριθμος καθενὸς ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν.

0, 01 καὶ 0, 1 θὰ εἶνε $-2 +$ μέρος τῆς 1

0,001 καὶ 0,01 $-3 +$ μέρος τῆς 1

. . . .

Τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος, τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, ἐκφράζεται, συνήθως, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ· ὥστε ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ θὰ εἶνε, ἐν ἐν γένει, ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμός.

γ') Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν λογάριθμόν τινα ἀρνητικόν, οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἀκέραιον μέρος τοῦ ἴσου του νὰ εἶνε ἀρνητικὸν τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν. Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν τὸν ἀρνητικὸν λογάριθμον $-2, 54327$· ἤτοι τὸ $-2 - 0, 54327$. Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν -1 καὶ τὸν $+1$ (τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν του), εὑρίσκομεν· $-3 + 1 - 0{,}54327$ καὶ ἀφαιροῦντες τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν $-3 + 0, 45673$, τὸ ὁποῖον γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς $\overline{3}, 45673$, δηλαδὴ γράφομεν τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τοῦτο μόνον εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι

«διὰ νὰ τρέψωμεν λογάριθμόν τινα ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον ἴσον του, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶνε ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὸν ἀκέραιον (ἀπολύτως θεωρούμενον) τοῦ δοθέντος κατὰ 1 καὶ

γράφομεν τὸ σημεῖον πλὴν ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος».

δ') Ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος ἀποτελεῖται, ἐν γένει, ἐκ δύο μερῶν· ἐξ ἑνὸς ἀκεραίου θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ ἢ καὶ 0, ὅστις καλεῖται **χαρακτηριστικὸν** τοῦ λογαρίθμου, καὶ ἐξ ἑνὸς δεκαδικοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον εἶνε πάντοτε θετικὸς ἀριθμός, ἢ καὶ μηδέν.

Οὕτω εἰς τὸν λογάριθμον 3,52184 τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 3, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τὸ 0,52184. Εἰς τὸν $\overline{2}$,78256 τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε $\overline{2}$, τὸ δὲ δεκαδικὸν 0,78256.

ε') Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν, ὅτι 1) «**ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους του, ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα**».

2) «**ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος** (**γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν**), **τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶνε τόσαι ἀρνητικαὶ μονάδες, ὅση εἶνε ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του, τοῦ κειμένου δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς**».

3) «**ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν δοθέντος λογαρίθμου εἶνε ἀριθμὸς θετικός, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸν λογάριθμον ἀριθμὸς ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν σὺν ἕν**».

4) «**ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν δοθέντος λογαρίθμου εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικός, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὸν λογάριθμον ἀριθμὸς ἔχει ἀκέραιον μηδὲν καὶ τόσα μηδενικὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ὅσας μονάδας (ἀρνητικὰς) ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν πλὴν ἕν**».

Παραδείγματα. 1) Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ. 532,75 εἶνε τὸ 2· διότι τὸ 532,75 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 100, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 1000, ἄρα ὁ λογάριθμός του θὰ εἶνε 2 + μέρος τι τῆς μονάδος.

2) Ὁ λογάριθμος τοῦ 5,3275 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0· διότι ὁ 5,3275 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 1 καὶ μικρότερος τοῦ 10, ἄρα ὁ λογάριθμός του θὰ εἶνε 0 + μέρος τι τῆς 1.

3) Ὁ λογάριθμος τοῦ 0,045 ἔχει χαρακτηριστικὸν −2· διότι ὁ 0,045 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 0,01 καὶ μικρότερος τοῦ 0,1, ἄρα ἔχει λογάριθμον −2 + μέρος τι τῆς 1.

4) Ὁ λογ. 0,00652 ἔχει χαρακτηριστικὸν −3· ὁ λογ. 0,0000732 ἔχει χαρακτηριστικὸν −5.

στ') «**ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί των ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος**».

Πράγματι, ἔστω ἀριθμός τις, π. χ. ὁ 3271 καὶ ὁ λογάριθμός του 3,51468. Ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διαιρέσωμεν διὰ 100 π. χ., θὰ ἔχωμεν $3271 : 100 = 32{,}71$ καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ 32,71 = λογ.3271 − λογ.100(§**92, 2**). ἤτοι λογ. 32,71 = 3,51468 − 2· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 3271 καὶ 32,71 εἶνε τὸ αὐτό.

Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν ὅτι $10^\alpha = A$, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἴσα μέλη ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3, θὰ ἔχωμεν $10^\alpha . 10^3 = A . 10^3$, ἢ $10^{\alpha+3} = A . 10^3$, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν ὅτι λογ. $(A . 10^3) = \alpha + 3$. Ἀλλ' ὁ λογ. $A = \alpha$, ἑπομένως λογ. $(A . 10^3) = \alpha + 3 =$ λογ. $A + 3$. Ὁμοίως ἂν διαιρέσωμεν διὰ 10^2 π. χ., τὰ δύο ἴσα τῆς ἰσότητος $10^\alpha = A$, εὑρίσκομεν ὅτι λογ. $(A : 10^2) =$ λογ. $A - 2$· ἤτοι ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ (διαιρεθῇ) μὲ τὸ 10·100·1000..., ὁ λογάριθμός του αὐξάνει (ἐλαττοῦται) κατὰ 1· 2· 3. . .

Ἐφαρμογαί.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν κάτωθι ἀριθμῶν

λογ. 25, λογ. 4513, λογ. 0,5, λογ. 1,37, λογ. 0,00132,

λογ. $\frac{13}{5}$, λογ. 367,542, λογ. $\frac{1}{256}$.

$\overline{5},67893$
$\overline{8},75928$
$2,91965$

§ **93. Πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων.**—Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγάς τινας, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν.

1) *Πρόσθεσις.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $2,57834$ καὶ $\overline{1},67943$, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2=3$, καὶ $-1=2$, καὶ οὕτω εὑρίσκομεν ἄθροισμα $2,25777$.

2) *Ἀφαίρεσις.* Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\overline{5},67\,893$ τὸν $\overline{8},75\,928$, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ $\overline{8}$ ἴσον $\overline{7}$, διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$, καὶ σὺν $\overline{5}=+2$. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $2,91965$.

3) *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\overline{5},62890$ ἐπὶ 3. Ἔχομεν προφανῶς $\overline{5},62890.3=-5.3+0.62890.3$

$$=-15+1,88670=\overline{14},88670.$$

4) *Διαίρεσις δι' ἀκεραίου.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ $\overline{5},62891$ διὰ τοῦ 3.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\overline{5},62891:3=(-5+0,62891):3$

$$=(\overline{6}+1,62891):3=-2+0,54297=\overline{2},54297.$$

Ὁμοίως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\overline{4},67831$ διὰ τοῦ 3, ἔχομεν $\overline{4},67831:3=(-4+0,67831):3$

$$=(-6+2,67831):3=-2+0,89277, \text{ ἢ } \overline{2},89277.$$

Ἐφαρμογαί.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων. 1) Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\overline{3},18980$· $\overline{5},68853$· $\overline{7},91054$·

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\overline{7},6603$ ἀπὸ $\overline{9},20261$· ὁ $\overline{3},62924$ ἀπὸ τὸν $\overline{1},76540$.

3) Ν. πολλαπλασιασθῇ ὁ $\overline{3},20840$ ἐπὶ 4· 9· 48.

4) Νὰ διαιρεθῇ ὁ $\overline{6},62140$ διὰ 7· 9· 11· (μέχρις ὅτου τὰ πηλίκα ἔχουν πέντε δεκαδικὰ ψηφία).

§ **94. Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.**—Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων (§ **92**) δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμόν, καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἔχωμεν πίνακας, περιέχοντας τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τοὺς πίνακας τούτους καὶ ζητοῦμεν τὸ γινόμενον δύο, ἢ περισσοτέρων, ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων, εἰς τοὺς πίνακας καὶ προσθέτομεν αὐτούς· τὸ ἄθροισμα τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, θὰ εἶνε, ὡς γνωστόν, ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸν λογάριθμον αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας (ἢ τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν) καὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα ὁμοίως μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

Ἐν γένει, ἵνα διὰ τῶν λογαρίθμων καταστήσωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἁπλουστέρας, εἶνε ἀνάγκη, νὰ ἔχωμεν πίνακας, περιέχοντας τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ὑπάρχουν τοιοῦτοι πίνακες, περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου, δοθέντος ἀριθμοῦ, εὑρίσκεται εὐκόλως (§ **92**, ε΄), διὰ τοῦτο οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου μόνον τὸ δεκαδικὸν μέρος, συνήθως μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ πίνακες, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑκάστου λογαρίθμου μὲ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἕκαστον ἢ καὶ δώδεκα.

§ **95. Διάταξις τῶν πινάκων.**—Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας λογαρίθμων πενταψηφίων, δηλαδὴ περιέχοντας τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων ἀκεραίων τινῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς, καὶ ἕκαστον μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἡ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρου πίνακος. Αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν εἶνε γραμμέναι εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἰς τὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ λογάριθμος καθενὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμ-

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	627	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	809	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003

μῆς τῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν λογαρίθμων των κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον, καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

Ὁ ἀστερίσκος ὅστις ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν, καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι

λογ. 500=2,69897

λογ. 5000=3,69897 λογ. 5017=3,70044

λογ. 5063=3,70441 λογ.5129=3,71003.

§ **96. Χρήσεις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.** — Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

1ον) «Όταν, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμόν του»

2ον) «Όταν, δοθέντος λογαρίθμου τινός, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν».

Περίπτωσις πρώτη. α')Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκομεν αὐτό, καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω, οὕτω δ' ἔχομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διότι γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ χαρακτηριστικόν του (§ **92**, ε').

Ἐφαρμογαί. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν 0,003817· 1,141· 0,0845· 107,3.

β') Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, χωρίζομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δι' ὑποδιαστολῆς, ἀφοῦ προηγουμένως εὕρωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου του. Ἐὰν π. χ. ζητῆται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 50735, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶνε 4, χωρίζοντες δὲ τὰ 4 πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 507,5. Ἐπειδή, ὡς γνωστὸν (§**92**, **στ'**), τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶνε τὸ αὐτό, ἕπεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 507,5. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 5073 καὶ 5074· ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,5 θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{λογ. } 5073 = 3{,}70526 \quad , \quad \text{λογ. } 5074 = 3{,}70535$$

καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶνε 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5074, ὁ λογάριθμός του αὐξάνει κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,5 διὰ νὰ γίνῃ 5073,5 ὁ λογάριθμός του θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9 . 0{,}5 = 4{,}5$ ἢ κατὰ πέντε περίπου ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὥστε πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70526 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 5073,5. Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι λογ. 5073,5=3,70531· ἄρα ὁ λογ. 50735=4,70531.

ὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,0735 τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του θὰ εἶνε 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος του θὰ εἶνε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 50735 (§ **92**,στ′). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι λογ. 5,0735=0,70531.

Περίπτωσις δευτέρα. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δοθέντος λογαρίθμου ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός, διακρίνομεν δύο μερικὰς περιπτώσεις.

γ′) Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀπέναντι αὐτοῦ τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἔστω π. χ., ὅτι ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶνε ὁ 3,70140. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 3, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία (§**92**,ε′,**3**), ἄρα εἶνε ἀκριβῶς ὁ 5028. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1},70552$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

δ′) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν ὑπάρχῃ εἰς τοὺς πίνακας, θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἔστω π. χ. ὅτι δίδεται ὁ λογάριθμος 2,70169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 0,70165 καὶ τοῦ 0,70174 τῶν ἀριθμῶν 5031 καὶ 5032. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφέρουν, ὡς βλέπομεν, κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 1. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶνε 3,70165 αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1· ἂν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, καὶ γίνῃ 3,70169 ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος αὐτῆς, ἤτοι κατὰ 0,44...

Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶνε 70169 θὰ εἶνε ὁ 5031,44....Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶνε 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία· ἄρα εἶνε ὁ 503,144.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 6,8347· 35147, 0,95378, $847\frac{3}{9}$ 1,4576.

2) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀντιστοιχοῦντες ἀριθμοὶ ἐκ τῶν δεδομένων λογαρίθμων λογ. $x=0,63147$. λογ. $x=0,68708$· λογ. $x=2,92836$· λογ. $x=2,38221$.

§ **97**. **Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.**— *1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶνε* $x=72,214 \cdot 0,08203$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν

λογ. x= λογ. 72,214 + λογ. 0,08203 (§ **92**, α′, **1**).

Εὑρίσκοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο παραγόντων ἔχομεν

λογ. 72,214=1,85862, λογ. 0,08203=$\overline{2}$,91397.

Ἑπομένως, προσθέτοντες, εὑρίσκομεν ὅτι λογ. x=0,77259· τούτου δ' εὑρίσκοντες τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν, ἔχομεν

$x=5,9236$.

2) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον* $-809,4 \cdot 0,05392 \cdot 2,117$,

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου διὰ τοῦ x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

λογ.x=λογ. 908,4 + λογ. 0,05392 + λογ. 2117.

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι λογ.908,4=2,95828

λογ. 0,05392=$\overline{2}$,73175· λογ. 2,117=0,32572

καὶ διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει ὅτι λογ.x=2,01575.

Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶναι ὁ 103,69 ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε ἀρνητικὸν (§ **6**, **γ′**). ἕπεται ὅτι $x=-103,69$.

3) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον* $x=5250 : 23,487$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

λογ. x=λογ. 5250 − λογ. 23,487.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

λογ. $5250 = 3,72016$, καὶ λογ. $23,487 = 1,37082$ δι' ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ὅτι λογ. $x = 2,34934$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x = 223,53$.

4) *Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶνε* $x = \dfrac{7,56 . 4667 . 567}{899,1 . 0,00337 . 23435}$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν

λογ. x = λογ. 7,56 + λογ. 4667 + λογ. 567

— λογ. 899,1 — λογ. 0,00337 — λογ. 23435.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

λογ. $7,56 = 0,87852$	λογ. $899,1 = 2,95381$
λογ. $4667 = 3,66904$	λογ. $0,00337 = \overline{3},52763$
λογ. $567 = 2,75358$	λογ. $23435 = 4,36986$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

λογ. 7,56 + λογ. 4667 + λογ. 567 = 7,30114

λογ. 899,1 + λογ. 0,00337 + λογ. 23435 = 4,85130

καὶ δι' ἀφαιρέσεως προκύπτει λογ. $x = 2,44984$, εὑρίσκοντες δὲ τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμὸν ἔχομεν $x = 281,73$.

5) *Νὰ εὑρεθῇ τὸ x ἐκ τῆς ἰσότητος* $x = 376^3$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

λογ. x = 3 λογ. 376

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ. $376 = 2,57519$, ἐπομένως καὶ λογ. $x = 3 . 2,57519 = 7,72557$ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $x = 53159000$.

6) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 0,000043461.*

Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt{0,000043461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν λογ. $x = \frac{1}{2}$ λογ. $0,000043461$ ἢ λογ. $x = \frac{1}{2}\ \overline{5},63989$, ἢ λογ. $x = \overline{3},81995$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x = 0,0066062$.

7 *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος*

$$x=\sqrt[5]{\frac{3,1416\cdot 471,21.\sqrt{2.7183}}{30,103^4.\sqrt{0,4343}.\,63,897^4}}$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν εὑρίσκομεν

$$\text{λογ.}x=\frac{1}{5}\Big[(\text{λογ.}\ 3,1416+\text{λογ.}\ 471,21+\frac{1}{2}\text{λογ.}\ 2,7183)-(4\ \text{λογ.}\ 30,103+\frac{1}{2}\text{λογ.}\ 0,4343+\text{λογ.}\ 63,897\Big]$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{rl} \text{λογ.}\ 3,1416 = & 0,49715 \\ \text{λογ.}\ 471,21 = & 2,67863 \\ \frac{1}{2}\text{λογ.}\ 2,7183 = & \underline{0,21715} \\ \text{ἄθροισμα} & 3,39293 \\ 4\ \text{λογ.}\ 30,103 = & 5,91445 \\ \frac{1}{2}\text{λογ.}\ 0,4343 = & \bar{1},81889 \\ 4\ \text{λογ.}\ 63,897 = & \underline{7,22192} \\ \text{ἄθροισμα} & 12,95525 \end{array}$$

καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῶν δύο ἀθροισμάτων, $\overline{10},43768$. Διαιροῦντες τοῦτο διὰ τοῦ 5 εὑρίσκομεν λογ. $x=\bar{2},08754$ ἐκ τοῦ ὁποίου $x=0,01223$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων διὰ λογαρίθμων $849,7.0,7834\cdot$ $3,709.0,008673\cdot$ $5,03^3\cdot$ $-0,007634.6457^5$, $\sqrt{9,068}$, $-7,384.(-5,837)^5$ $0,6539:0,9761$, $\dfrac{2,057.\ 77,12.\ 0,604896.\ 4,771}{7,52.\ 807,133.\ 9,088697.\ 0,0053}$

$$\sqrt[3]{\frac{83,25.\ 0,008756}{0,0327.\ 0,00503}}.$$

2) Νὰ εὑρεθῇ η περιφέρεια κυκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶνε 2,51075. (7,8875)

3) Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος, πίπτοντος ἐν τῷ κενῷ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μέτ. (31,317″)

98. Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων διὰ τῶν λογαρίθμων.—Τὰς ἐκθετικὰς ἐξισώσεις (§ 56) δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ λύωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

Οὕτω π. χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $3^x = 729$ ἔχομεν

x λογ. $3 =$ λογ. 729, καὶ $x = \frac{\text{λογ. } 729}{\text{λογ. } 3} = \frac{2.86273}{0,47712} = 6$.

Ἐπίσης πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\frac{1}{3^x} + 3^x = \frac{6562}{81}$, ἔχομεν μετὰ τὴν ἀπολοιφὴν τῶν παρονομαστῶν $81 + 81 . 3^{2x} = 6562 . 3^x$, ἢ $81 . 3^{2x} - 6562 . 3^x + 81 = 0$, καὶ ἂν θέσωμεν $3^x = \omega$, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ω $81\omega^2 - 6562\omega + 81 = 0$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\omega = \frac{1}{81}$, $\omega = 81$. Ὥστε θὰ εἶνε $3^x = \frac{1}{81}$ καὶ $3^x = 81$, τὰς ὁποίας λύομεν, καθὼς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν, καὶ εὑρίσκομεν $x = -4$ καὶ $x = 4$.

Ὁμοίως λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}$

Ἔχομεν, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων,

x λογ. $\left(\frac{3}{4}\right) =$ λογ. $51,5$· ἐξ οὗ $x = \frac{\text{λογ.} 51,5}{\text{λογ.} 0,75} = -13,701$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$3^x = 177147$, $3^{\frac{x}{2}} = 768$,

$24^{3x-2} = 10000$, $4^{\sqrt{x}} = 243$,

$5^{x^2-3x} = 625$, $x^{x^2-7x+2} = 1$

ἔχομεν $(x^2 - 7x + 2)$.λογ. $x = 0$, ἐξ οὗ, ἢ λογ. $x = 0$ ἄρα $x = 1$, ἢ $x^2 - 7x + 2 = 0$

$6^{x^4 - 18x^2 + 86} = 7776$,

$2^{x+1}+4^x=272$

$\alpha.\alpha^3.\alpha^5.\alpha^7.........\alpha^{2x-1}=\nu$

2) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

$x+y=65$, $\lambda o\gamma.\ xy=3.$

$x^2+y^2=425$, $\lambda o\gamma.x+\lambda o\gamma.y=2.$

$\lambda o\gamma.x+\lambda o\gamma.y=3$ $5x^2-3y^2=11300.$

§ **99. Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων ἄνευ χρήσεως τῶν πινάκων.**— Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἐκθετικὰς ἐξισώσεις ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Οὕτω π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $(\alpha^x)^x=(\alpha^8)^2$ ἐπειδὴ εἶνε $\alpha^{x^2}=\alpha^{16}$. καὶ x^2 λογ. α $=16$ λογ. α, διαιροῦντες διὰ τοῦ λογ. α τὰ δύο ἴσα (ὑποτίθεται ὅτι $\alpha\neq1$) εὑρίσκομεν $x^2=16$, $x=\pm4.$

Ὁμοίως πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$(\alpha^{\beta-x})^x=\alpha^x \quad , \quad (\alpha\neq1)$$

ἔχομεν $(\beta x-x^2)$ λογ. $\alpha=x$ λογ. α, καὶ $\beta x-x^2=x$

ἐκ τῆς ὁποίας $x=0$, καὶ $x=\beta-1.$

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

$(4^{3-x})^{2-x}=1,$ $(10^{5-x})^{6-x}=100,$

$\sqrt[x]{\alpha}=\alpha^x,$ $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

$2^x+4^x=272,$ λογ. $x=$ λογ. $24-$ λογ. 8

2 λογ. $x=$ λογ. $192+$ λογ. $\frac{3}{4}$

5 λογ. $x-$ λογ. $288=3$ λογ. $\frac{x}{2}$

*§ **100. Περὶ τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς βάσιν οἱανδήποτε.**— α) Γενικώτερον, θὰ καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος ὡς πρὸς βάσιν τινά, ἔστω τὴν α, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ α, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Οὕτω π.

π.χ. ἐπειδὴ ἔχομεν $2^3=8, \qquad 3^4=81,$

ὁ λογάριθμος τοῦ 8 ὡς πρὸς βάσιν 2 εἶνε τὸ 3· ὁ λογάριθμος τοῦ 81 ὡς πρὸς βάσιν 3 εἶνε τὸ 4. Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $\alpha^x=\beta,$

ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις, καλεῖται *λογάριθμος τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν* α, καὶ παριστάνεται συμβολικῶς οὕτω

$$\lambda o\gamma_\alpha . \beta = x.$$

Κατὰ ταῦτα οἱ λογάριθμοι, τοὺς ὁποίους ἐξητάσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ἔχουν βάσιν τὸν 10, καὶ διὰ τοῦτο τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τούτων καλεῖται *δεκαδικὸν* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλου οἱουδήποτε, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε βάσιν.

Παρατηρητέον, ὅτι ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων δὲν δύναται νὰ εἶνε οὔτε ἡ μονάς, οὔτε ἀριθμὸς ἀρνητικός· διότι ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $1^x=\beta$

εἶνε ἀδύνατος διὰ τιμὴν τοῦ β διάφορον τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(-\alpha)^x=\beta$ δὲν ἐπιδέχεται πάντοτε λύσιν, π.χ

$$(-10)^x=1000.$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων πρέπει νὰ εἶνε ἀριθμός τις θετικός, καὶ διάφορος τῆς μονάδος.

β΄) Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος β ὡς πρὸς βάσιν τινὰ α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τὸν ἀριθμὸν $\frac{x}{\nu}$ (ὅπου τὸ x εἶνε ἀκέραιος) διὰ τὸν ὁποῖον ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\alpha^{\frac{x}{\nu}} \leqq \beta < \alpha^{\frac{x+1}{\nu}}$$

Ἐὰν ἔχωμεν $\alpha^{\frac{x}{\nu}}=\beta$ τότε τὸ $\frac{x}{\nu}=\lambda o\gamma_\alpha.\beta$.

γ΄) *Εὕρεσις τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος ὡς πρὸς βάσιν 10 κατὰ προσέγγισιν.*

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. Ἔστω $\frac{x}{10}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τότε θὰ ἔχωμεν $10^{\frac{x}{10}} < 2 < 10^{\frac{x+1}{10}}$. Ὑψοῦντες καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν, λαμβάνομεν $10^x < 2^{10} < 10^{x+1}$. Καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, . . . εἶνε οἱ μικρότεροι ἐκ τῶν ἐχόντων ἀκέραιον μέρος 2, 3, 4, ... ψηφία, οὕτω καὶ τὸ 10^x εἶνε ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν ἐχόντων ἀκέραιον μέρος $(x+1)$ ψηφία, ὁ δὲ 10^{x+1} ἐκ τῶν ἐχόντων $(x+2)$ ψηφία. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου τό $2^{10} = 1024$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε τὸ $x = 3$· ὥστε ὁ λογάριθμος τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ὡς πρὸς βάσιν 10 εἶνε 0,3.

Γενικῶς, δεικνύεται ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος β ὡς πρὸς βάσιν 10 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν β εἰς τὴν δύναμιν ν, νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς δυνάμεως β^ν, καὶ τοῦτο νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ 1.

ϛ') *Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.* Ἐκτὸς τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν λογαρίθμων (ἰσχύουν δὲ δι' οἱονδήποτε σύστημα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως), ἔχομεν ἀκόμη τὰς ἑξῆς.

1) **Οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστρόφους εἶνε ἀντίθετοι.**

$$\lambda o \gamma_{\frac{1}{\alpha}} \beta = -\lambda o \gamma_{\alpha} \beta.$$

Διότι ἔστω ὅτι ὁ $\lambda o \gamma_\alpha \beta = x$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\alpha^x = \beta$

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ α^x τὸ ἴσον του $\frac{1}{\alpha^{-x}}$ ἢ τὸ $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-x}$, θὰ ἔχωμεν $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-x} = \beta$, ἀλλὰ τοῦτο φανερώνει ὅτι $\lambda o \gamma_{\frac{1}{\alpha}} \beta = -x$, καὶ ἑπομένως $\lambda o \gamma_\alpha \beta = -\lambda o \gamma_{\frac{1}{\alpha}} \beta$.

2) **Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν εἶνε ἀντίθετοι.**

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $\lambda o \gamma_\alpha \beta = -\lambda o \gamma_\alpha \frac{1}{\beta}$ Διότι ἔστω x ὁ λογάριθμος τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν τὸν α. Θὰ ἔχωμεν τότε $\alpha^x = \beta$, καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ἴσους τούτους, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\beta}$ ἢ καὶ $\alpha^{-x} = \frac{1}{\beta}$, ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτὴ φανερώνει ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{1}{\beta}\right) = -x$,

ἢ $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\lambda o\gamma_\alpha\beta$.

3) **Πᾶς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον, ἄνισοι δὲ ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους ἀνίσους.**

Πράγματι, ἐπειδή, καθὼς εἴδομεν (§ **65**) αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου x αὐξάνεται καὶ ἡ δύναμις α^x ἢ ἐλαττοῦται, καθ' ὅσον εἶνε $\alpha > 1$ ἢ $\alpha < 1$, ἔπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον, καὶ ὅτι οἱ λογάριθμοι δύο ἀριθμῶν ἀνίσων εἶνε ἄνισοι, καὶ μεγαλύτερος μὲν εἶνε ὁ τοῦ μεγαλυτέρου, ἂν τὸ $\alpha > 1$, τοῦ μικροτέρου δὲ ἂν εἶνε $0 < \alpha < 1$.

ε') ***Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων.*** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν α, καὶ ζητοῦμεν τὸν λογάριθμόν του ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω τὴν α_1. Δίδεται δηλ. τὸ $\lambda o\gamma_\alpha\beta$ καὶ ζητεῖται τὸ $\lambda o\gamma_{\alpha_1}\beta$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν $\lambda o\gamma_\alpha\beta$ διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν $\alpha^x = \beta$· καὶ ἂν τῶν δύο τούτων ἴσων ἀριθμῶν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς βάσιν α_1, θὰ ἔχομεν $\lambda o\gamma_{\alpha_1}(\alpha^x) = \lambda o\gamma_{\alpha_1}\beta$. Ἀλλ' ὁ $\lambda o\gamma_{\alpha_1}(\alpha^x) = x.\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha$ (§ 92,3)· ἑπομένως εἶνε $x.\ \lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha = \lambda o\gamma_{\alpha_1}\beta$, καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ ἴσου του, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma_\alpha\beta.\ \lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha = \lambda o\gamma_{\alpha_1}\beta$, ἤτοι «**διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος ὡς πρὸς νέαν βάσιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμόν του ὡς πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς παλαιᾶς βάσεως πρὸς τὴν νέαν**».

Δείξατε ὅτι $\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha.\ \lambda o\gamma_\alpha\alpha_1 = 1$. Διότι διὰ νὰ μετατρέψωμεν λογα α, εἰς τὴν βάσιν α, θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha_1 = \lambda o\gamma_\alpha\alpha_1\ \lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha$ ἤτοι $\lambda o\gamma_\alpha\alpha_1 = \frac{\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha_1}{\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha}$ καὶ ὁμοίως $\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha\cdot\lambda o\gamma_\alpha\alpha_1 = \cancel{\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha}\frac{\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha_1}{\cancel{\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha}}$ ἀλλὰ $\lambda o\gamma_{\alpha_1}\alpha_1 = 1$ ὅ. ἔ. δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ

§101. Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.— Τὰ προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κεφάλαιον δὲν μένει τὸ αὐτὸ καθ᾽ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ἀλλ᾽ εἰς τὸ τέλος ὡρισμένου τινός χρόνου προστίθεται εἰς αὐτὸ ὁ τόκος του, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ μετ᾽ αὐτοῦ νέον κεφάλαιον, λέγονται **προβλήματα ἀνατοκισμοῦ**, ἢ **συνθέτου τόκου**, ἐνῷ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, λέγονται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων προβλήματα ἁπλοῦ τόκου. Ὥστε, προβλήματα ἀνατοκισμοῦ λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος, καὶ ἀποτελεῖ μετ᾽ αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

Πρόβλημα. *1) Δανείζει τις 1500 δρ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4%, κατ᾽ ἔτος· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 6 ἔτη;*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ αἱ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουν τόκον 4 δρ, ἡ 1 δρ. εἰς ἓν ἔτος θὰ φέρῃ τόκον $\frac{4}{100}$ δρ, καὶ αἱ 1500 δρ. θὰ φέρουν $\frac{4}{100}\cdot 1500$ δρ. τόκον. Ἑπομένως, ἐὰν τοκίσωμεν τὰς 1500 δρ. δι᾽ ἓν ἔτος, θὰ λάβωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ

$$1500 \text{ δρ.} + \frac{4}{100}\cdot 1500 \text{ δρ.} \quad \text{ἢ} \quad 1500\left(1+\frac{4}{100}\right)\text{δρ.}$$

Καθὼς βλέπομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν, πόσον θὰ γίνῃ τὸ κεφάλαιον 1500 δρ. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους μετὰ τοῦ τόκου του πρὸς 4%, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\left(1+\frac{4}{100}\right)$. Ἐπειδὴ τὸ νέον κεφάλαιον διὰ τὸ δεύτερον ἔτος θὰ εἶνε $1500\left(1+\frac{4}{100}\right)$, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ γίνῃ τοῦτο μετὰ τοῦ τόκου του μετὰ ἓν ἔτος, δηλαδὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους πρὸς 4%, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\left(1+\frac{4}{100}\right)$· ἤτοι θὰ γίνῃ

$$1500\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{4}{100}\right)=1500\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ $1500\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$ κ. ο. κ. προχωροῦντες, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ ἕκτου ἔτους θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ $\Sigma = 1500\left(1+\frac{4}{100}\right)^6$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν Σ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $1500\left(1+\frac{4}{100}\right)^6$ διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἐν πρώτοις γράφομεν ἀντὶ τοῦ $1+\frac{4}{100}$ τὸ ἴσον του 1,04 καὶ οὕτω ἔχομεν $\Sigma = 1500\,(1{,}04)^6$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\text{λογ.}\Sigma = \text{λογ. } 1500 + 6 \text{ λογ. } (1{,}04).$$

Ἐπὶ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. $1500 = 3{,}17609$

6 λογ. $1{,}04 = 6.0{,}01703 = 0{,}10218$, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως λογ. $\Sigma = 3{,}27827$ καὶ ἐκ τούτου $\Sigma = 1897{,}9$· ἤτοι ὁ τοκίσας τὰς 1500 δρ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 4% θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὅλῳ 1897,90 δρ.

Ἐν γένει, ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, διὰ τοῦ τ τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (ἓν ἔτος, μίαν ἑξαμηνίαν, μίαν τριμηνίαν κ.λ.π.) καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων καθ' ἃς ἀνατοκίζεται, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κεφαλαίου μετὰ ν χρονικὰς μονάδας θὰ εἶνε

$$\Sigma = \alpha\,(1+\tau)^{\nu} \qquad (1).$$

Διότι, ἀφοῦ ἡ 1 δραχμὴ εἰς 1 χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δρ., αἱ α δραχ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον α τ δρ. Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον α δρ. καὶ ὁ τόκος του εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε $\alpha + \alpha\,\tau = \alpha(1+\tau)$ δρ.· ἤτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1+\tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος τὸ ἀρχικὸν ποσὸν α δρ. θὰ γίνῃ $\alpha\,(1+\tau)^2$ κ. ο. κ. εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων θὰ γίνῃ $\Sigma = \alpha\,(1+\tau)^{\nu}$.

Πρόβλημα 2). *Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 6%, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὅλῳ 5000 δραχμάς;*

Ἔχομεν $\Sigma = 5000$, $\tau = 0{,}06$· $\nu = 15$· ἑπομένως, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον(1) εὑρίσκομεν $5000 = \alpha(1{,}06)^{15}$. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma.\ 5000 = \lambda o\gamma.\ \alpha + 15\ \lambda o\gamma.\ 1.06$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ \alpha = \lambda o\gamma.\ 5000 - 15\ \lambda o\gamma.\ 1{,}06$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma.\ 5000 = 3{,}69897$

$15\ \lambda o\gamma.\ 1{,}06 = 15.\ 0{,}02531 = 0{,}37965$, καὶ ἐξ αὐτῶν δι᾽ ἀφαιρέσεως $\lambda o\gamma.\ \alpha = 3{,}31932$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $\alpha = 2086$ δρ.

Πρόβλημα 3). Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 862 δρ., ἀνατοκιζόμεναι κατ᾽ ἔτος, γίνονται μετὰ 5 ἔτη 1048,70 δρ.;

Ἔχομεν $\alpha = 862$, $\nu = 5$, $\Sigma = 1048{,}70$· ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1), εὑρίσκομεν $1048{,}70 = 862\ (1+\tau)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων εὑρίσκομεν
$\lambda o\gamma.\ 1048{,}70 = \lambda o\gamma.\ 862 + 5\ \lambda o\gamma.\ (1+\tau)$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma.\ (1+\tau) = \dfrac{\lambda o\gamma.\ 1048{,}70 - \lambda o\gamma\ 862}{5}$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν
$\lambda o\gamma.\ 1048{,}70 = 3{,}02065$, $\lambda o\gamma.\ 862 = 2{,}93591$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ 1048{,}70 - \lambda o\gamma.\ 862 = 0{,}08474$.
καὶ $\lambda o\gamma.\ (1+\tau) = 0{,}08474 : 5 = 0{,}01695$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $1+\tau = 1{,}0398$, καὶ $\tau = 0{,}0398$.
Αὐτὸς εἶνε ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχ. εἰς 1 ἔτος, ἄρα τὸ ἐπιτόκιον $100\ \tau$ θὰ εἶνε 3,98 δραχ.

Πρόβλημα 4). Μετὰ πόσα ἔτη 12589 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ᾽ ἔτος πρὸς πρὸς 5 °/₀ γίνονται 45818 δρ.;

Ἔχομεν $\alpha = 12589$, $\tau = 0{,}05$, $\Sigma = 45818$.
Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1), εὑρίσκομεν $45818 = 12589\ (1{,}05)^\nu$. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma.\ 45818 = \lambda o\gamma.\ 12589 + \nu\ \lambda o\gamma.\ 1{,}05$ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma.\ 45818 - \lambda o\gamma.\ 12589}{\lambda o\gamma.\ 1{,}05}$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\lambda o\gamma.\ 45818 = 4{,}66104$
$\lambda o\gamma.\ 12589 = 4{,}09999$, $\lambda o\gamma.\ 1{,}05 = 0{,}02119$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶνε 0,56105, ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\nu = \frac{0,56105}{0,02119} = 26$ ἔτη καί τι ἐπὶ πλέον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 27ου ἔτους, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους αἱ 12589 δρ. γίνονται $12589(1,05)^{26}$, ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτὸ τοκισθῇ μὲ ἁπλοῦν τόκον ἐπὶ η ἡμέρας, θὰ φέρῃ τόκον $\frac{12589\ (1,05)^{26} .\ \eta .\ 5}{36000}$ (τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας). Ἐπομένως, τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον θὰ γίνῃ μετὰ 26 ἔτη καὶ η ἡμέρας

$$12589\ (1,05)^{26} + 12589\ (1,05)^{26}\ \frac{\eta .\ 5}{36000}$$

ἢ $12589\ (1,05)^{26}\ \left(1 + \frac{\eta .\ 5}{36000}\right)$ τοῦτο δὲ εἶνε ἴσον μὲ τὸ 45818, ἤτοι ἔχομεν $45818 = 12589\ (1,05)^{26}\ \left(1 + \frac{5 .\ \eta}{36000}\right)$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων ὅτι $\eta = 172$.

Ἐπομένως τὸ δάνειον διήρκεσε 26 ἔτη καὶ 172 ἡμέρας.

Τὸν ἀριθμὸν η εὑρίσκομεν μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν $12589\ (1,05)^{26}$ καὶ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 45818. Ἡ οὕτω προκύπτουσα διαφορὰ παριστάνει τὸν τόκον τοῦ ποσοῦ τῶν $12589\ (1,05)^{26}$ δρ. πρὸς 5 % εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦ τόκου εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ χρόνος.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 4ον, εὕρετε τὸ η διὰ τοῦ ἐκτεθέντος τρόπου, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦ τόκου.

2) Πόσας δρ. θὰ λάβῃ τις, ἐὰν τοκίσῃ 8764 (160,45) δρ. ἐπὶ 9 (17) ἔτη ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 5 (3,5) %;

13595,9 (287,95).

3) Πατήρ τις κατέθεσεν εἴς τινα τράπεζαν 750 δρ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ του ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς $4\frac{1}{2}$ %.

Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱός του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20ου ἔτους τῆς ἡλικίας του;

(1809,85).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ποῖον ἀρχικὸν κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων του ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος

πρὸς $3^1/_2\,^0/_0$ ἐπὶ 20 ἔτη 3730,85; (1875,43).

» 4,5 » » 10 » 14595; (9397,4).

2) Ποῖον ποσὸν ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς $4\,^0/_0$ γίνεται εἰς 12 ἔτη 6 μῆν. 25130 δρ; (15388).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πρὸς πόσον τῆς ἑκατὸν ἐτοκίσθη ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος κεφάλαιον

625 (3200) δρ. ἐπὶ 15(37) ἔτη καὶ ἔγινε 1166,9 (11427,2) δρ.; 4,257%, (3,5).

2) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἐὰν 1000 δρ. εἰς 22 ἔτη γίνονται 2247,7 δρ.;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Εἰς πόσα ἔτη ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος κεφάλαιον 1500 (1879,6) δρ. πρὸς $4,5\,^0/_0$ γίνεται 2371,75 (2919 δρ. (10ἐτ 144ημ.)

2) Πότε κατετέθησαν 630 δρ. εἰς τράπεζάν τινα ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς $4\,^0/_0$, ἐὰν τὴν 1ην Ἀπριλίου 1909 εἶχον γίνει 969,80 δρ.;

Ὁμὰς πέμπτη. 1) Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 100000 δρ. εἰς 8 ἔτη 8 μ. ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς $4\,^0/_0$; (40507,55).

2) Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν ἐπ' ἀνατοκισμῷ καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς $4\,^0/_0$ ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20000 δρ.; (9804,4)

3) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ' ἔτος διὰ νὰ τετραπλασιασθῇ μετὰ 31 ἔτη; (4,5 %).

4) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ, κατ' ἔτος ποσόν τι πρὸς $3,5\,^0/_0$ διὰ νὰ διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ, τετραπλασιασθῇ; 20 ἔτ. 54 ἡμ.· 31 ἔτ. 336 ἡμ.· 40 ἔτ. 108 ἡμ.).

5) Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς Κράτους αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους· μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός του; (56 περίπου).

6) Μία πόλις ἔχει 8000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμός της ἐλαττοῦται κατὰ 160 κατοίκους· ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5000 κατοίκους; (23 περίπου)

§ 102. Πρόβλημα ἴσων καταθέσεων.

Πρόβλημα 1) Καταθέτει τις εἰς τὴν τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος $4^1/_2\,^0/_0$ ποσὸν 2050 δρ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους· πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη;

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 2050 δρ. θὰ μείνῃ 15 ἔτη, ἀνατοκιζομένη πρὸς $4^1/_2\,^0/_0$, ἑπομένως θὰ γίνῃ $2050\ (1,045)^{15}$

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γενομένη κατάθεσις θὰ μείνῃ μόνον 14 ἔτη ἐν τῷ τόκῳ, ἄρα θὰ γίνῃ $2050\ (1,045)^{14}$.

Ὁμοίως ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γίνῃ $2050 (1,045)^{13}$ κ. ο. κ. ἡ τελευταία θὰ μείνῃ μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $2050\ (1,045)$.

Ὥστε τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν θὰ εἶνε $2050 (1,045)^{15} + 2050\ (1,045)^{14} + \ldots\ldots + 2050\ (1,045)$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε (1,045)· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ποσὸν Σ, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ, εἶνε

$$\Sigma = \frac{2050\ (1,045)^{15}.\ (1,045) - 2050\ (1,045)}{0,045}$$

ἢ

$$\Sigma = 2050\ (1,045)\ \frac{(1,045)^{15} - 1}{0,045}$$

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $(1,045)^{15}$. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x = (1,045)^{15}$,

$$\text{λογ.}x = 15.\ \text{λογ.}(1,045) = 0,28680,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x = 1,93554$.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\Sigma = 2050 (1,045)\ \dfrac{0,93554}{0,045}$

ἢ

$$\Sigma = \frac{2050.\ 1,045.\ 935,54}{45}$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν

$$\text{λογ.}\ \Sigma = 2\,050 + \text{λογ.}1,045 + \text{λογ.}935,54 - \text{λογ.}45.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. 2050 = 3,31175

λογ. 1,045 = 0,01912

λογ. 935,54 = 2,97107

ἄθροισμα 6, 30194

$$\text{λογ. } 45 = \quad 1,65321$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν λογ. $\Sigma =$ 4,64873, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\Sigma = 44538$· ἤτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 44538 δρ.

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέτῃ τις εἰς ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους α δρ. εἴς τινα τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητῆται δὲ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κ.ο.κ. ἡ τελευταία $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu}$ καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha\,(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau},$$ ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ τὸ α, ἐὰν δοθῇ τὸ Σ, τὸ τ, καὶ τὸ ν.

Πρόβλημα 2). *Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;*

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ (ν—1) χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ (ν—2) χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἡ τελευταία θὰ εἶνε μόνον α. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \ldots + \alpha(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ $$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{\tau} = \alpha\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau},$$ ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α, τ, ν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ Σ, ν, τ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἔμπορος καταθέτει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 1200 δρ. ἐκ τῶν κερδῶν του εἰς τὴν τράπεζαν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς $4\frac{1}{2}\,\%$· πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους;

2) Ὑπάλληλός τις καταθέτει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 500 δρ. εἰς τὸ ταμιευτήριον ὑπὲρ τῶν τέκνων του ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 3,75 $_0/^0$· πόσα θὰ λάβουν τὰ τέκνα του μετὰ τὴν εἰκοστὴν κατάθεσίν του;

3) Ἡ διατροφὴ καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν ἑνὸς τέκνου καταγράφονται ὑπὸ τοῦ πατρός του εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀνέρχονται δὲ κατὰ μέσον ὅρον εἰς 2000 δρ. ἐτησίως. Πόσα θὰ γίνουν αὐτὰ μετὰ 8 ἔτη, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἀνατοκίζονται κατ' ἔτος πρὸς $3^1/_2{}^0/_0$;

4) Πατήρ τις θέλει νὰ καταθέσῃ ποσόν τι ὡρισμένον κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ τέκνου του, καθὼς καὶ μεθ' ἕκαστον ἔτος τὸ αὐτὸ ποσόν, ἵνα τὰ ποσὰ αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς $5^0/_0$ γίνουν εἰς τὸ τέλος τῶν εἴκοσι ἐτῶν 20000 δρ. Πόση πρέπει νὰ εἶνε ἡ ἐτησία κατάθεσις ;

§ **103. Προβλήματα χρεωλυσίας.**— *Χρεωλυσία* λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιον** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων των ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

***Πρόβλημα** 1). Ἐδανείσθη τις 18500 δρ. πρὸς $4^1/_2{}^0/_0$ ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους. **Πόσον** εἶνε τὸ χρεωλύσιον ;*

Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 18500 δρ. θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη $18500\,(1{,}045)^{12}$. Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ $x(1{,}045)^{11}$, μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται ὅτι ἔμειναν εἰς τὸν τόκον. Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ $x(1{,}045)^{10}$, ἡ τρίτη $x(1{,}045)^{9}$, κ. ο. κ. ἡ τελευταία θὰ μείνῃ x. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν πληρωθέντων ποσῶν μετὰ τῶν τόκων των θὰ εἶνε

$$x + x(1{,}045) + x(1{,}045)^2 + \ldots + x(1{,}045)^{11}$$

ἢ $x\dfrac{(1{,}045)^{12}-1}{0{,}045}$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $x\dfrac{(1{,}045)^{12}-1}{0{,}045} = 18500\,(1{,}045)^{12}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $(1{,}045)^{12}$, θέτοντες αὐτὴν ἴσην μὲ ψ, ὅτε εἶνε $\psi=(1{,}045)^{12}$ καὶ λογ. ψ=12. λογ. (1,045)=0,22944, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi = 1{,}696$.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $(1{,}045)^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου του 1,696 εὑρίσκομεν $x = \dfrac{18500.\ 0{,}045.\ 1696}{696}$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν $\alpha(1+\tau)^\nu = \dfrac{x\{(1+\tau)^\nu-1\}}{\tau}$

λογ. x= λογ. 18500+λογ. 0,045+λογ. 1696 — λογ. 696

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$\tau\alpha(1+\tau)^\nu = x\{(1+\tau)^\nu-1\}$

λογ.	18500	=	4,26717
λογ.	0,045	=	2,65321
λογ.	1696	=	3,22943
	ἄθροισμα		6,14981

$x = \dfrac{\tau\alpha(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu-1}$

λογ. 696 = 2,84261 , ἑπομένως λογ. x=3,30720, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x = 2028{,}6$ δρ.

$\alpha = \dfrac{x\{(1+\tau)^\nu-1\}}{\tau(1+\tau)^\nu}$

Ἐν γένει, ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν ἐπ' ἀνατοκισμῷ καθ' ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα, διὰ τοῦ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων ἐκ x δρ. θὰ εἶνε $x + x(1+\tau) + x(1+\tau)^2 + \ldots + x(1+\tau)^{\nu-1}$

$\dfrac{\tau(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu-1} = \dfrac{x}{\alpha}$

ἢ $$x\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $$x\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^\nu \qquad (1)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Πρόβλημα 2). *Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις,* *ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του εἰς 6 ἔτ. διὰ ἐτησίου χρεωλυσίου 8000 δρ., τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $4^0/_0$;*

Ἔχομεν $x=8000, \quad \nu=6, \quad \tau=0{,}04,$

ζητεῖται δὲ τὸ α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰς τιμὰς τῶν x, ν, τ εὑρίσκομεν $8000.\ \dfrac{(1.04)^6-1}{0{,}04}=\alpha(1{,}04^6)$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\alpha=\dfrac{8000[(1.04)^6-1]}{0{,}04.\ (1{,}04)^6}$. Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν$(1{,}04)^6$, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων $\alpha=4190$ δρ.

Πρόβλημα 3). *Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 20000 δρ. διὰ χρεωλυσίου 1300 δρ., τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $3^0/_0$;*

Ἔχομεν $\alpha=20000, \quad x=1300, \quad \tau=0{,}03$·

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον(1) εὑρίσκομεν

$$1300\,\frac{(1.03)^\nu-1}{0{,}03}=20000\ (1{,}03)^\nu,$$ ἐκ τοῦ ὁποίου

ἔχομεν $1300\ (1{,}03)^\nu-1300=0{,}03.\ 20000\ (1{,}03)^\nu$

ἢ $(1{,}03)^\nu[1300-0{,}03.\ 20000]=1300$

καὶ $(1{,}03)^\nu=\dfrac{1300}{700}=\dfrac{13}{7}$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν ν λογ. $(1{,}03)=$λογ.13—λογ.7, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\nu=20{,}943$ ἔτη. Ἤτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνῃ μετὰ 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶνε κατά τι μικροτέρα τῶν ἄλλων.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Κράτος τι ἐδανείσθη 100 ἑκατομμύρια δρ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς $4^0/_0$, ἐπὶ τῷ ὅρῳ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ἐντὸς 50 ἐτῶν δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον; (4655000).

2) Χρέος τι ἐξοφλεῖται δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶνε 3180 δρ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον $4^1/_2{}^0/_0$; (51800).

3) Ἔμπορος ἐδανείσθη κατὰ τὴν ἔναρξιν τῶν ἐμπορικῶν ἐπιχειρήσεών του 54300 δρ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς $3{,}75^0/_0$. Ἐὰν πληρώνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 5500 δρ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος του;

4) Ἡ ἐξόφλησις χρέους τινὸς πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη ἐπὶ τῷ ὅρῳ, ὅτι ἡ ἀπόσβεσις αὐτοῦ θὰ γίνῃ χρεωλυτικῶς. Καθεμία δόσις (ἐτησία) θὰ εἶνε 461300 δρ., θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσὸν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $4^1/_2{}^0/_0$; (481500).

5) Κράτος τι ἐδανείσθη ποσόν τι διὰ νὰ κατασκευάσῃ στόλον πρὸς $3^3/_4{}^0/_0$. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησίς του ἄρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου, καὶ θὰ πληρώνωνται 158800 δρ. ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσὸν; (1167910).

6) Χρέος ἐξ $1^1/_2$ ἑκατομμυρίων δρ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων δόσεων ἐτησίων, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου· πόσον θὰ εἶνε τὸ χρεωλύσιον, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $3^3/_4{}^0/_0$; (159310,9).

7) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000 διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,3δρ. ἑκάστην;

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20000}{1780,30}$$

Ἡ ἐξίσωσις περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμὸν καὶ διὰ τοῦτο ἡ λύσις της, ἐν γένει, δὲν εἶνε γνωστή. Διὰ τοῦτο καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶνε μεγαλύτερον, ὅσῳ ὁ τ εἶνε μικρότερος. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ διὰ μικροῦ ἀριθμοῦ, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20000}{1780,30}$. Θέτοντες π. χ. $\tau = 0,04$ εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{0,04}\left(1 - \frac{1}{1,04^{16}}\right) = 25\left(1 - \frac{1}{1,04^{16}}\right) = 11,652285,$$

ἐνῷ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τὸ 11,234. Θέτομεν λοιπὸν $\tau = 0,04$ ἔπειτα $\tau = 0,45$, $\tau = 0,0475$ κ. ο. κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

§ **104 Περὶ μεταθέσεων.**—Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ν ἐν ὅλῳ ἀντικείμενα, ἐκ τῶν ὁποίων καθὲν δύναται νὰ διακρίνεται τῶν ἄλλων, π. χ. 7 φιάλας, 10 μῆλα, τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμοὺς κ. λ. π., καὶ θὰ τὰ παριστάνομεν συμβολικῶς διὰ τῶν α_1, α_2, α_3, ... α_ν, θὰ καλοῦμεν δ' αὐτὰ *στοιχεῖα*. Τὰ ν ταῦτα στοιχεῖα δύνανται νὰ τεθοῦν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ πολλοὺς τρόπους. Π. χ. ἂν ἔχωμεν μόνον δύο, α_1 καὶ α_2 δύνανται νὰ τεθοῦν καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_1$. Ἂν ἔχωμεν τρία τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ δύνανται νὰ τεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2,\ \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_3,\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_1,\ \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1.$$

Τὰ διάφορα αὐτὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, καλοῦμεν μεταθέσεις αὐτῶν. Ἐν γένει, «*καλοῦμεν μεταθέσεις ν στοιχείων τὰ διάφορα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν θέσωμεν καὶ τὰ ν στοιχεῖα τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε νὰ διαφέρουν μεταξὺ των κατὰ τὴν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου*»·

Θὰ παριστάνομεν συμβολικῶς τὰς μεταθέσεις ν στοιχείων διὰ τοῦ M_ν ἢ διὰ τοῦ $\nu!$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $M_\nu = 1.2.3.4.....\nu$. Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\nu = 2$, δηλαδὴ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ δύο στοιχεῖα α_1, α_2. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μεταθέσεις των εἶνε δύο, αἱ $\alpha_1\,\alpha_2$, $\alpha_2\,\alpha_1$ ἑπομένως $M_2 = 2 = 1.\ 2.$ Ἐὰν εἶνε τὸ $\nu = 3$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ τρία στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεών των. Λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχειων α_1, α_2, τὰς $\alpha_1\,\alpha_2$, $\alpha_2\,\alpha_1$ καὶ εἰς καθεμίαν ἐξ αὐτῶν παραθέτομεν τὸ τρίτον στοιχεῖον α_3 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἄλλα στοχεῖα. Οὕτω ἀπὸ τὴν $\alpha_1\,\alpha_2$ θὰ προκύψουν αἱ $\alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2$, $\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2$, $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, ἀφοῦ θέσωμεν τὸ α_3 πρὸ τοῦ α_1, μετὰ τὸ α_1, καὶ μετὰ τὸ α_2. Ὁμοίως ἐκ τῆς $\alpha_2\,\alpha_1$ προκύπτουν καθ' ὅμοιον τρόπον αἱ $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_3$· ἤτοι ἐν ὅλῳ ἕξ. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἓξ αὐταὶ μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων εἶνε διάφοροι μεταξὺ των. Διότι ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1\,\alpha_2$ διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τοῦ τρίτου στοιχείου· ἐπίσης ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_2\,\alpha_1$, συγκρινόμεναι πρὸς ἑαυτάς· συγκρινόμεναι δὲ αἱ τελευταῖαι πρὸς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1\,\alpha_2$ εἶνε διάφοροι διότι διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἄλλων στοιχείων, τῶν α_1 καὶ α_2. Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τ.ς μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων διὰ τοῦ ἀνωτέρου τρόπου. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, καὶ ἀποκόψωμεν τὸ στοιχεῖον α_3 ἀπ' αὐτῆς, θὰ προκύψῃ μία μετάθεσις τῶν δύο στοιχείων α_1, α_2· ἂν δὲ ἐπαναφέρωμεν τὸ α_3 εἰς τὴν θέσιν του, εὑρίσκομεν πάλιν τὴν μετάθεσιν τῶν τριῶν στοιχείων. Ἀλλ' αὐτὸ ἀκριβῶς ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, δηλαδὴ ἐλάβομεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχείων, καὶ ἐθέσαμεν τὸ νέον στοχεῖον α_3 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο· ἑπομένως, καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα μετάθεσις τῶν τριῶν στοιχείων ἔχει περιληφθῆ εἰς τὸν πίνακα τῶν σχηματισθεισῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι, αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων προκύπτουν ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν δύο στοιχείων, ἂν εἰσαγάγωμεν τὸ τρίτον στοιχεῖον· εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο στοιχείων· ὥστε ἐκ τῶν M_2 προκύπτουν $M_2.3$ καὶ ἔχομεν $M_3 = M_2.3 = 1.2.3.$

Ἐὰν ἔχωμεν $\nu = 4$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2,\ \alpha_2\,\alpha_1\,\alpha_3,\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_1,\ \alpha_3\,\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1,$$

τῶν τριῶν στοιχείων καὶ εἰς καθεμίαν τούτων θέτομεν τὸ α_4 εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις, δηλαδὴ κατὰ σειρὰν πρὸ τοῦ πρώτου, μεταξὺ πρώτου καὶ δευτέρου, μεταξὺ δευτέρου καὶ τρίτου, τελευταῖον, καὶ οὕτω ἔχομεν ἀπὸ καθεμίαν τῶν τριῶν τέσσαρας τῶν τεσσάρων, ἑπομένως $M_4 = M_3 . 4 = 1.2.3.4.$

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἀκριβῶς, προχωροῦντες, εὑρίσκομεν ὅτι

$$M_5 = M_4 . 5 = 1.2.3.4.5 = 5!$$

$$M_\nu = M_{\nu-1} . \nu = 1.2.3.4. \ldots . (\nu - 1) . \nu = \nu!$$

Ἀσκήσεις

1) Δείξατε ὅτι αἱ μεταθέσεις τῶν τεσσάρων στοιχείων, αἱ σχηματισθεῖσαι κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ ὅτι εἶνε πᾶσαι.

2) Νὰ γενικευθῇ ἡ ἀπόδειξις πρὸς σχηματισμὸν τῶν μεταθέσεων ν στοιχείων· δηλαδὴ νὰ δειχθῇ α΄) πῶς σχηματίζονται αὐ-

ται ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν $(\nu-1)$ στοιχείων· β′) ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των· γ′) ὅτι εἶνε πᾶσαι.

3) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παρακαθήσουν 18 ἄτομα περὶ τράπεζαν;

§ **105 Περὶ διατάξεων.** — Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ \alpha_\mu.$$

Ἐὰν ἐκ τῶν μ τούτων στοιχείων λάβωμεν ν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα προκύπτουν (καὶ καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει πάντοτε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ) νὰ διαφέρουν μεταξύ των ἢ κατὰ τὴν φύσιν, ἢ κατὰ τὴν θέσιν, τοὐλάχιστον ἑνὸς τῶν στοιχείων των, τότε καλοῦμεν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ *διατάξεις τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν λαμβανομένων*. Θὰ παριστάνωμεν τὰς διατάξεις μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ συμβόλου Δ^μ_ν καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\Delta^\mu_\nu=\mu(\mu-1)\,.\,(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1).$$

Παρατηρητέον, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε τὸ ν μικρότερον τοῦ μ· ἂν δὲ εἶνε ἴσον, θὰ ἔχωμεν μεταθέσεις μ στοιχείων.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\nu=1$· δηλαδὴ ὅτι τὰ μ στοιχεῖα λαμβάνομεν ἀνὰ ἕν. Εἶνε φανερὸν, ὅτι αἱ διατάξεις εἶνε ὅσα καὶ τὰ στοιχεῖα, ἤτοι αἱ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots, \alpha_\mu$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι $\Delta^\mu_1=\mu$.

Ἔστω ὅτι $\nu=2$, δηλαδὴ ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα, καὶ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις των ἀνὰ δύο. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν μίαν διάταξιν των ἀνὰ ἕν, ἔστω τὴν α_1, καὶ εἰς αὐτὸ τὸ στοιχεῖόν της παραθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_\mu$, οὕτω δὲ σχηματίζομεν διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο, τὰς

$$\alpha_1\,\alpha_2,\ \alpha_1\,\alpha_3,\ \alpha_1\,\alpha_4,\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_1\,\alpha_\mu$$

ἐν ὅλῳ $(\mu-1)$, διότι $(\mu-1)$ εἶνε τὰ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα παραθέτομεν εἰς τὸ α_1. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ καθεμίαν τῶν διατάξεων ἀνὰ ἕν. Οὕτω ἀπὸ τὴν α_2 θὰ σχηματίσωμεν τὰς

$\alpha_2\,\alpha_1, \alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_2\,\alpha_4,\ \ldots\ldots,\ \alpha_2\,\alpha_\mu$, κ. ο. κ. ἀπὸ τὴν α_μ τὰς $\alpha_\mu\,\alpha_1,\ \alpha_\mu\,\alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\mu\,\alpha_{\mu-1}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι ὅσαι ἔγιναν ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διάταξιν τῶν ἀνὰ ἓν διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοῦ δευτέρου στοιχείου, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων τῶν ἀνὰ ἕν, διαφέρουν κατὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον. Εἶνε δὲ φανερόν, ὅτι αἱ οὕτω σχηματισθεῖσαι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε πᾶσαι. Διότι ἂν ὑπῆρχε ἄλλη τις, καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον στοιχεῖόν της, θὰ προκύψῃ μία τῶν ἀνὰ ἕν. Ἀλλ' ἀκριβῶς ἐλάβομεν πάσας τῶν ἀνὰ ἕν, καὶ παρεθέσαμεν εἰς καθεμίαν τούτων ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα· ἄρα καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα διάταξις τῶν ἀνὰ δύο πάντως περιέχεται εἰς τὰς σχηματισθείσας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, αἱ διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε ἐν ὅλῳ $\Delta^\mu_1 . (\mu-1)$· ἤτοι $\Delta^\mu_2 = \Delta^\mu_1 . (\mu-1) = \mu(\mu-1)$· διότι ἀπὸ καθεμίαν τῶν ἀνὰ ἓν προκύπτουν $(\mu-1)$ τῶν ἀνὰ δύο, καὶ ἐκ τῶν Δ^μ_1 προκύπτουν $\Delta^\mu_1 . (\mu-1)$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν εἶνε $\nu=3$, λαμβάνομεν καθεμίαν τῶν ἀνὰ δύο, καὶ παραθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων στοιχείων, σχηματίζομεν δ' οὕτω τὰς διατάξεις τῶν ἀνὰ τρία. Οὕτω ἐκ τῆς $\alpha_1\,\alpha_2$ σχηματίζομεν τὰς $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_4,\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_5, \ldots\ldots \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_\mu$ ἐν ὅλῳ $(\mu-2)$. Ὥστε ἀπὸ καθεμίαν τῶν ἀνὰ δύο προκύπτουν $(\mu-2)$ τῶν ἀνὰ τρία, καὶ ἐκ Δ^μ_2 προκύπτουν $\Delta^\mu_2 . (\mu-2)$· ὥστε ἔχομεν

$$\Delta^\mu_3 = \Delta^\mu_2 . (\mu-2) = \mu(\mu-1).(\mu-2).$$

Καὶ γενικῶς, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta^\mu_\nu = \Delta^\mu_{(\nu-1)} . (\mu-(\nu-1)) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)$.

1) Δείξατε ὅτι αἱ διατάξεις τῶν μ στοιχείων ἀνὰ τρία καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθησαν ἀνωτέρω εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ πᾶσαι.

2) Γενικεύσατε τὴν ἀπόδειξιν πρὸς εὕρεσιν τῶν διατάξεων μ στοιχείων ἀνὰ ν ἐκ τῶν διατάξεων ἀνὰ (ν—1)· δηλαδὴ δείξατε

α') πῶς σχηματίζονται αἱ ἀνὰ ν ἐκ τῶν ἀνὰ (ν—1)· β') ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των γ') ὅτι εἶνε πᾶσαι.

3) Πόσοι ἀριθμοὶ διψήφιοι ὑπάρχουν, ἔχοντες σημαντικὰ ψηφία διάφορα μεταξύ των; Πόσοι τριψήφιοι;

§ **106. Περὶ συνδυασμῶν.** — α') Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_\mu$. *Καλοῦμεν συνδυασμοὺς τῶν μ τούτων στοιχείων, ἀνὰ ν λαμβανομένων, τὰ διάφορα ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν λάβωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ν ἐκ τῶν μ, οὕτως ὥστε τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ νὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου.* Θὰ παριστάνωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ Σ^μ_ν καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι

εἶνε $$\Sigma^\mu_\nu = \frac{\Delta^\mu_\nu}{M\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ (\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots\ldots\nu}.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν φανταζόμεθα ὅτι ἔχομεν ἕνα συνδυασμὸν τῶν μ ἀνὰ ν. Οὗτος ἔχει ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ (ὑποτίθεται ὅτι $\nu < \mu$). Ἂν εἰς τὰ ν αὐτὰ στοιχεῖα κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐναλλαγὰς μεταξύ των, σχηματίζομεν τὰς μεταθέσεις τῶν ν τούτων στοιχείων, αἱ ὁποῖαι εἶνε M_ν, καθὼς γνωρίζομεν.

Τὸ αὐτὸ φανταζόμεθα ὅτι κάμνομεν εἰς τὰ ν στοιχεῖα καθενὸς συνδυασμοῦ, ὁπότε προκύπτουν ἀπὸ καθένα M_ν ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα μεταξύ των συγκρινόμενα, χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε ν ἐκ τῶν μ, εἶνε μεταθέσεις ν ἀντικειμένων. Ἐπειδὴ ἀπὸ καθένα συνδυασμὸν προκύπτουν M_ν ἐξαγόμενα, ἀπὸ τοὺς Σ^μ_ν συνδυασμοὺς προκύπτουν $\Sigma^\mu_\nu.\ M_\nu$ τοιαῦτα. Ἀλλὰ καθὲν τῶν ἐξαγομένων τούτων, συγκρινόμενον πρὸς τὰ μ δοθέντα στοιχεῖα, εἶνε μία διάταξις τῶν μ ἀνὰ ν, ἐπειδὴ εἶνε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ, τεθειμένα κατά τινα τρόπον. Αἱ διατάξεις αὐταὶ τῶν μ ἀνὰ ν εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν στοιχείων του, διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν στοιχείων τούτων· ὅσαι δὲ προέκυψαν ἀπὸ διαφόρους συνδυασμούς, θὰ διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου. Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ

Σ^{μ}_{ν} αὐταὶ εἶναι πᾶσαι· Διότι ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, αὐτὴ θὰ εἶχε στοιχεῖα ἐκ τῶν μ κατά τινα τάξιν μεταξύ των τεθειμένα. Ἑπομένως, ἡ διάταξις αὐτὴ θὰ προκύπτῃ ἀπὸ συνδυασμόν τινα τῶν μ ἀνὰ ν διὰ μεταθέσεως τῶν στοιχείων του, καὶ ἐπειδὴ ὅλων τῶν συνδυασμῶν μετεθέσαμεν τὰ στοιχεῖα, ἕπεται ὅτι καί ἡ διάταξις αὐτὴ δὲν εἶνε νέα, ἀλλὰ περιέχεται εἰς τὰς ἤδη σχηματισθείσας.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι $\Sigma^{\mu}_{\nu} \,.\, M_{\nu} = \Delta^{\mu}_{\nu}$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι.

$\Sigma = \dfrac{\Delta^{\mu}_{\nu}}{M_{\nu}}$, καὶ ἂν ἀντὶ τῶν Δ^{μ}_{ν} καὶ M_{ν} θέσωμεν τὰ ἴσα των,

εὑρίσκομεν $\Sigma^{\mu}_{\nu} = \dfrac{\Delta^{\mu}_{\nu}}{M} = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots\ldots (\mu-\nu+1)}{1.2. \ldots\ldots\ldots \nu}$

Ἐὰν τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον $(\mu-\nu)(\mu-\nu-1) \ldots\ldots 3.\ 2.\ 1$, εὑρίσκομεν

$$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{\mu(\mu-1) \ldots\ldots (\mu-\nu+1)(\mu-\nu) \ldots\ldots 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2 \ldots\ldots \nu.\ (\mu-\nu)(\mu-\nu-1) \ldots\ldots 3.\ 2.\ 1}$$

ἢ $$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (\mu-\nu)(\mu-\nu+1) \ldots\ldots (\mu-1).\ \mu}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \nu.\ 1.\ 2\ 3 \ldots\ldots (\mu-\nu)}$$

ἢ $$\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{M_{\mu}}{M_{\nu} \cdot M_{(\mu-\nu)}} = \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!}\,.$$

β') «*Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ (μ—ν)*».

Πράγματι, εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὅτι $\Sigma^{\mu}_{\nu} = \dfrac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς $\Sigma^{\mu}_{\mu-\nu}$ ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ ν διὰ τοῦ (μ—ν), ὅτε εὑρίσκομεν

$$\Sigma^{\mu}_{(\mu-\nu)} = \frac{\mu\,!}{(\mu-\nu)!\,(\mu-(\mu-\nu)\,)!} = \frac{\mu\,!}{(\mu-\nu)!\ \nu\,!}$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε τὸ Σ^{μ}_{ν}, ἄρα $\Sigma^{\mu}_{\nu} = \Sigma^{\mu}_{(\mu-\nu)}$.

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν

α') 7 στοιχείων ἀνὰ 3. β') 10 στοιχείων ἀνὰ 7·

γ') 25 στοιχείων ἀνὰ 17.

2) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν τὰ 7 ἡλιακὰ χρώματα, προστιθεμένων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μέλανος, πρὸς σχηματισμὸν τριχρώμου σημαίας;

3) Πότε οἱ συνδυασμοὶ μ στοιχείων ἀνὰ ν γίνονται μεταθέσεις μ στοιχείων;

§ **107. Περὶ τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.**— α΄) Γνωρίζομεν ὅτι

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

$$(x+)^3 = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3.$$

Ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμός, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $(x+\alpha)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1}x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}\alpha^2 + \ldots\ldots$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\ldots\nu}x^{\mu-\nu}.\alpha^\nu + \ldots.\alpha^\mu.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$(x+\alpha)^\mu = (x+\alpha)(x+\alpha)\ldots\ldots(x+\alpha)$$

Σχηματίζομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν μ παραγόντων

$$(x+\alpha), (x+\beta), (x+\gamma)\ldots\ldots, (x+\theta),$$

ἤτοι τὸ $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma), \ldots\ldots (x+\theta)$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ γινομένου τούτου εὑρίσκεται, καθὼς γνωρίζομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα $(x+\alpha)$ ἐπὶ τὸν δεύτερον $(x+\beta)$, τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ $(x+\gamma)$ κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου $(x+\theta)$. Ἂν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον διατάξωμεν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x, θὰ ἔχωμεν προφανῶς πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ μ. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρώτους ὅρους x τῶν δυωνύμων παραγόντων, καὶ εὑρίσκομεν x^μ. Ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν τοὺς πρώτους ὅρους x ἐκ τῶν $(\mu-1)$ δυωνύμων παραγόντων, ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ὑπολειπομένου διωνύμου παράγοντος, καὶ εὑρίσκομεν $\alpha x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ πρώτου διωνύμου παράγοντος λάβωμεν τὸν α καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x· τὸ $\beta x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ δευτέρου παράγοντος λάβωμεν τὸν β καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x. Ὁμοίως ἔχομεν $\gamma x^{\mu-1}, \ldots\ldots, \theta x^{\mu-1}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων δίδει τὸν ὅρον $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots,\ldots+\theta)\,x^{\mu-1}$ τοῦ ἐξαγομένου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν x εἰς τὴν $(\mu-1)$ δύναμιν. Ἀκολούθως λαμβάνομεν τὸν x ἀπὸ $(\mu-2)$ δυωνύμους παράγοντας ἀπὸ δὲ τοὺς ὑπολειπομένους δύο παράγοντας τοὺς δευτέρους ὅρους των, καὶ τοῦτο κάμνομεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Οὕτω εὑρίσκομεν $(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots\ldots+\alpha\theta+\beta\gamma+\ldots\ldots)\,x^{\mu-2}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots\ldots)\,x^{\mu-3}$$

. . . .

Καὶ τέλος λαμβάνομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς δευτέρους ὅρους των διωνύμων, ὅτε εὑρίσκομεν $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\theta$. Ὥστε εὑρήκαμεν

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots\ldots(x+\theta)$$
$$=x^{\mu}+(\alpha+\beta+\ldots+\theta)\,x^{\mu-1}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots)x^{\mu-2}$$
$$+(\alpha\beta\gamma+\ldots\ldots)\,x^{\mu-3}+\ldots\ldots+\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\theta$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\alpha=\beta=\gamma=\ldots\ldots=\theta$, θὰ ἔχωμεν $(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+(\alpha+\alpha+\ldots\ldots+\alpha)\,x^{\mu-1}$

$$+(\alpha^2+\alpha^2+\ldots\ldots)x^{\mu-2}+(\alpha^3+\alpha^3+\ldots\ldots)\,x^{\mu-3}$$
$$+\ldots\ldots+(\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}+\ldots\ldots)x^{\mu-\nu}+\ldots\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων α τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε προφανῶς ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ μ στοιχείων ἀνὰ ἕν, ἤτοι Σ_1^{μ}. Τὸ πλῆθος τῶν α^2 εἶνε Σ_2^{μ}, τῶν α_3 εἶνε Σ_3^{μ} κ.ο.κ. τὸ πλῆθος τῶν α^{ν} εἶνε Σ_{ν}^{μ}. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+\Sigma_1^{\mu}\,\alpha x^{\mu-1}+\Sigma_2^{\mu}\,\alpha^2x^{\mu-2}+\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots+\Sigma_{\nu}^{\mu}\,\alpha^{\nu}x^{\mu-\nu}+\ldots\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Τέλος, ἂν ἀντὶ τῶν Σ_1^{μ}, Σ_2^{μ}, $\ldots\ldots\Sigma_{\nu}^{\mu}$ γράψωμεν τὰ ἴσα των, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον τύπον (*)

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+\frac{\mu}{1}x^{\mu-1}\alpha+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}\alpha^2+\ldots\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\nu}x^{\mu-\nu}\alpha^{\nu}+\ldots\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Ἐφαρμογαί. Διὰ $\mu=4$ ἔχομεν

$$(x+\alpha)^4=x^4+4x^3\alpha+6x^2\alpha^2+4x\alpha^3+\cancel{4x\alpha^4}+\alpha^4$$

Διὰ $\mu=5$ θὰ εἶνε

$$(x+\alpha)^5=x^5+5x^4\alpha+10x^3\alpha^2+10x^2\alpha^3+5x\alpha^4+\alpha^5.$$

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦ $(x-\alpha)^{\mu}$, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον τὸ α διὰ τοῦ

$(-\alpha)$, ὅτε ἐπειδὴ αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ $(-\alpha)$ εἶνε ἀρνητικοί, αἱ δὲ ἄρτιαι, θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν

$$(x-\alpha)^\mu = x^\mu - \frac{\mu}{1}x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}\alpha^2$$

$$-\ldots\ldots\pm\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\nu}x^{\mu-\nu}\alpha^\nu$$

$$\mp\ldots\ldots\ldots\ldots\pm\alpha^\mu.$$

Π. χ. θὰ εἶνε $(x-\alpha)^3 = x^3 - 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 - \alpha^3$

$$(x-\alpha)^4 = x^4 - 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 - 4x\alpha^3 + \alpha^4.$$

γ') Ἰδιότητες τοῦ διωνύμου.

1) Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου $(x+\alpha)^\mu$ τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων του εἶνε ἴσοι.

Πράγματι, οἱ μὲν συντελεσταὶ τῶν ἄκρων ὅρων x^μ καὶ α^μ εἶνε ἴσοι μὲ τὴν μονάδα. Διὰ τοὺς ἄλλους συντελεστὰς παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς εἶνε ἴσοι μὲ

$$\Sigma_1^\mu,\ \Sigma_2^\mu,\ \Sigma_3^\mu,\ \ldots\ldots\ \Sigma_\nu^\mu,\ \ldots\ldots\Sigma_{\mu-2}^\mu,\ \Sigma_{\mu-1}^\mu.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν συνδυασμῶν (§**106**,β') εἶνε

$\Sigma_1^\mu = \Sigma_{\mu-1}^\mu,\ \Sigma_2^\mu = \Sigma_{\mu-2}^\mu \ldots\ldots$ ἐξ' ὧν ἕπεται ἡ ἰδιότης.

2) Ὁ συντελεστὴς οἱουδήποτε ὅρου τοῦ διωνύμου $(x+\alpha)$ εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ προηγουμένου του ὅρου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x ἐν αὐτῷ, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ἐν τῷ ὅρῳ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ συντελεστής.

Οὕτω ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶνε $\frac{\mu}{1}$ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ προηγουμένου του ὅρου, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ 1 ἐπὶ τὸν ἐκθέτην μ τοῦ x εἰς τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐκθέτου 1 τοῦ α εἰς τὸν δεύτερον ὅρον. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι οἱ συντελεσταὶ προχωροῦν αὐξανόμενοι μέχρι τοῦ μέσου ὅρου, ἐκεῖθεν δὲ ἐπαναλαμβάνονται οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ κατ' ἀντίθετον σειράν, ὥστε οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων νὰ εἶνε ἴσοι.

3) Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ διωνύμου $(x+\alpha)^\mu$ εἶνε $(\mu+1)$. Διότι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ ἔχει πάντοτε τοὺς ὅρους πο-

λυωνύμου βαθμοῦ μ ὡς πρὸς τὸ x, ἢ ὡς πρὸς τὸ α, ἄρα ἔχει $(\mu+1)$ ὅρους.

Συνδυάζοντες τὴν ἰδιότητα ταύτην μὲ τὴν προηγουμένην, παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν τὸ μ εἶνε ἀριθμὸς ἄρτιος τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε περιττὸς ἀριθμός, καὶ ὑπάρχει εἷς ὅρος, ὁ μεσαῖος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μέγιστον συντελεστήν.

Ἂν τὸ μ εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, καὶ τότε ὑπάρχουν δύο ὅροι μεσαῖοι, διαδοχικοὶ ἴσοι μεταξύ των, οἱ μέγιστοι τῶν συντελεστῶν.

Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα

$$(x+\alpha)^6, \qquad (x+\alpha)^5, \qquad \left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$$

$$(2\alpha-\beta)^5, \qquad \left(\frac{1}{2}x+3\right)^6, \qquad \left(\frac{2}{3}x-5\right)^4$$

§ **108. Περὶ πιθανοτήτων.** — α′.) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν 15 κλήρους ἐντὸς κυτίου ἠριθμημένους ἀπὸ 1 μέχρι 15. Ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἕνα κλῆρον ἐκ τῶν 15, θέλομεν νὰ μάθωμεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι ὁ κλῆρος, τὸν ὁποῖον θὰ ἐξαγάγωμεν, θὰ φέρῃ τὸν ἀριθμὸν 7.

Ἐπειδὴ καθεὶς τῶν 15 κλήρων ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐξαχθῇ, ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, ἕπεται ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς, π. χ. ὁ 7, ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, θὰ εἶνε τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἤτοι τὸ $\frac{1}{15}$.

Ἐὰν ἐκ τῶν 15 κλήρων ἐξαγάγωμεν δύο, ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς ὡρισμένος ἐξ αὐτῶν, π. χ. ὁ 7, θὰ εἶνε προφανῶς $\frac{2}{15}$, ἂν δὲ ἐξαγάγωμεν τρεῖς θὰ εἶνε $\frac{3}{15}$ κ. ο. κ.

Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι *ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τι παριστάνεται διὰ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ὑποτιθεμένου, ὅτι πᾶσαι αἱ περιπτώσεις εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί.*

β') Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐντὸς κυτίου ἔχομεν 15 βώλους τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἀλλὰ τοὺς μὲν 6 λευκούς, τοὺς δὲ 9 μαύρους. Θέλομεν νὰ μάθωμεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ἂν ἐξαχθῇ κατὰ τύχην εἷς βῶλος ἐκ τοῦ κυτίου, αὐτὸς νὰ εἶνε λευκός.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 15, διότι τόσοι εἶνε οἱ βῶλοι, καὶ καθεὶς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἐξαχθῇ. Ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶνε 6, διότι τόσοι εἶνε οἱ λευκοὶ βῶλοι, ἄρα ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{6}{15}$. Ἂν ζητοῦμεν τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς μαῦρος βῶλος, θὰ εἶνε $\frac{9}{15}$.

γ') Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει βεβαιότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον. Ἂν δὲ ἡ πιθανότης παριστάνεται διὰ τοῦ μηδενός, τότε λέγομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμία πιθανότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον, ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον νὰ συμβῇ.

δ') Ἐν γένει, ἐὰν αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις τοῦ νὰ συμβῇ τι, εἶνε α τὸν ἀριθμόν, αἱ δὲ περιπτώσεις τοῦ ἐναντίου εἶνε β, ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τὸ πρῶτον θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, ἡ δὲ πιθανότης τοῦ ὅτι δὲν θὰ συμβῇ θὰ εἶνε $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν διὰ τοῦ λ τὸν δὲ δεύτερον διὰ τοῦ μ, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda + \mu = 1 \quad , \quad \lambda = 1 - \mu.$$

ε') Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν δύο κύβους τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 1· 2· 3· 4· 5· 6· Ἂν ρίψωμεν αὐτοὺς κατὰ τύχην ἐπὶ τῆς τραπέζης, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔλθουν ἐπάνω, θὰ ἔχουν ἄθροισμα 8;

Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 36. Διότι καθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ἑνὸς κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ καθένα τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου κύβου, ἐκ τούτων δὲ ἔχομεν ἄθροισμα 8, ὅταν εἶνε $2+6 \cdot \; 3+5 \cdot \; 4+4 \cdot \; 5+3 \cdot \; 6+2 \cdot$ ἤτοι 5 ἐν ὅλῳ, ἑπομένως ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε $\frac{5}{36}$.

στ') Ἐντὸς κυτίου ἔχομεν δύο μαύρους βώλους, καὶ δύο λευκούς, τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἐξάγομεν κατ' ἀρχὰς ἕνα ἐξ αὐτῶν, καὶ ἔπειτα δεύτερον, χωρὶς νὰ θέσωμεν τὸν ἐξαχθέντα ἐντὸς τοῦ κυτίου. Ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι καὶ οἱ δύο ἐξαχθέντες βῶλοι θὰ εἶνε λευκοί;

Ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ τὴν πρώτην φορὰν ὁ λευκὸς βῶλος εἶνε $\frac{1}{2}$. Ἐὰν ἐξαχθῇ ὁ λευκὸς βῶλος τὴν πρώτην φοράν, θὰ μείνουν ἐντὸς τοῦ κυτίου δύο μαῦροι καὶ εἷς λευκός. Ἐπομένως ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ τὴν δευτέραν φορὰν ὁ λευκὸς βῶλος θὰ εἶνε $\frac{1}{3}$. Ἡ ζητουμένη πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθοῦν καὶ οἱ δύο λευκοὶ μετὰ τὰς δύο ἐξαγωγὰς λέγω ὅτι εἶνε $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Διότι ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ λ_1, λ_2 τοὺς λευκοὺς βώλους, καὶ διὰ μ_1, μ_2 τοὺς μαύρους, καὶ σχηματίσωμεν τὰς δυνατὰς περιπτώσεις, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1\lambda_2,\quad \lambda_1\mu_1,\quad \lambda_1\mu_2,\quad \lambda_2\lambda_1,\quad \lambda_2\mu_1,\quad \lambda_2\mu_2$$
$$\mu_1\lambda_1,\quad \mu_1\lambda_2,\quad \mu_1\mu_2,\quad \mu_2\lambda_1,\quad \mu_2\lambda_2,\quad \mu_2\mu_1$$

ἤτοι 12 ἐν ὅλῳ, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶνε αἱ πιθαναί, δηλαδὴ ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ