ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΥΠΟ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Γ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

Ἐγκριθεῖσα
ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ΓΣΔ' διαγωνισμῷ
διὰ τὴν τετραετίαν 1910-1914

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ
1910

ΔΡΑΧ. 5.65

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Ἀριθ. *Πρωτ. 18,145* / *Διεκπ. 13,058* — *Ἐν Ἀθήναις τῇ 22 Ὀκτωβρίου 1910*

Πρὸς τὸν κ. Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΝ

Γνωρίζομεν ὑμῖν ὅτι κατ' ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν διδακτικῶν βιβλίων ἐποπτικῆς Ἐπιτροπῆς, ἡ τιμὴ τῆς ***Γεωμετρίας*** διὰ τὰ Γυμνάσια καὶ τὰ ἰσοδύναμα σχολεῖα, ὑπὸ *Στ. Ρηγοπούλου* ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν 28 καὶ 1)4 ὡρίσθη εἰς δραχμὰς πέντε καὶ λεπτὰ ἑξήκοντα πέντε ***(5,65)***.

Τὸ δὲ ἐπιθετέον βιβλιόσημον χρώματος ῥοδίνου ἔσται ἀξίας δραχμῶν τριῶν καὶ λεπτῶν ἑξήκοντα ἑνὸς ***(3,61)***

Ἐντελλόμεθα, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὴν ἀπόφασιν ταύτην, ἐκτυπώσητε δὲ τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου, κάτωθι τῆς θέσεως, εἰς ἣν κατὰ νόμον ἐπικολλᾶται τὸ βιβλιόσημον.

Ὁ Ὑπουργὸς

Α. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

Π. ΖΑΓΑΝΙΑΡΗΣ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Γ. ΡΗΓΟΠΟΥΛΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΝΤΑ

Ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ,ΓΣΑ' διαγωνισμῷ τῶν διδακτικῶν βιβλίων διὰ τὴν τετραετίαν 1910—1914.

Λύσεις τῶν προβλημάτων τῆς ἀκροάσεως Γεωμ- ἔγραψεν
Ἀριστοτέλης Χ. Οἰκονόμου
Κέρκυρα 1911

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ
1910

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί.

1. Τὰ πράγματα, ὧν γνῶσιν λαμβάνομεν διὰ τῶν αἰσθήσεων ἡμῶν καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦμεν *σώματα ὑλικά*, ἔχουσι θέσιν, σχῆμα καὶ ἔκτασιν ἢ μέγεθος.

2. Ὅταν θεωρῶμεν μόνον τὴν θέσιν, τὴν ἔκτασιν καὶ τὸ σχῆμα σώματός τινος, δὲν λαμβάνομεν δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐξ ἧς ἀποτελεῖται, καλοῦμεν αὐτὸ *γεωμετρικὸν σῶμα* ἢ *στερεόν*.

3. Πᾶν γεωμετρικὸν σῶμα ἔχει *μῆκος*, *πλάτος* καὶ *ὕψος*.

4. Τὰ πέρατα ἑκάστου σώματος πάντα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὴν *ἐπιφάνειαν* τοῦ σώματος.

5. Ἡ ἐπιφάνεια μόνον μῆκος καὶ πλάτος ἔχει· τὰ δὲ πέρατα τῆς ἐπιφανείας ἢ μέρους αὐτῆς πάντα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι *γραμμήν*.

6. Ἡ γραμμὴ μόνον μῆκος ἔχει· τὰ πέρατα δὲ γραμμῆς ἢ μέρους αὐτῆς καλοῦνται *σημεῖα*. Τὸ δὲ σημεῖον οὔτε ἔκτασιν ἔχει οὔτε μέρη.

7. Τὸ μέρος εἶναι ἀεὶ ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον· ἤτοι τὰ μέρη τῆς γραμμῆς εἶναι γραμμαί, τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας ἐπιφάνειαι καὶ τὰ μέρη τοῦ σώματος σώματα.

8. Τὰς ἐπιφανείας, τὰς γραμμὰς καὶ τὰ σημεῖα νοοῦμεν καὶ καθ' ἑαυτά, ἀνεξαρτήτως δηλαδὴ τῶν στερεῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν γραμμῶν, ὧν εἶναι πέρατα.

9. *Σχῆμα γεωμετρικὸν* λέγεται σύνολον ἢ σημείων ἢ γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν ἢ στερεῶν.

10. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς γραμμάς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεὰ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν καλοῦμεν αὐτὰ *μεγέθη*.

11. *Γεωμετρία εἶναι ἡ ἐπιστήμη ἡ ἐξετάζουσα τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς θέσεως, τῆς διατάξεως τῶν μερῶν αὐτῶν καὶ τῆς ἐκτάσεως.*

12. *Ἀξίωμα* λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς προφανής.

Ἐπὶ παραδείγματι· *Πᾶν σχῆμα δύναται ν' ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς οὐδόλως αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ.*

13. *Αἴτημα* καλεῖται πρότασις, ἥτις οὔτε ἀμέσως φανερὰ εἶναι, οὔτε ἀπόδειξις ταύτης δύναται νὰ γίνῃ.

14. *Ἀπόδειξις* λέγεται συλλογισμὸς (ἢ σειρὰ συλλογισμῶν) δι' οὗ πειθόμεθα ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

15. *Θεώρημα* εἶναι πρότασις, ἧς ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

16. *Πόρισμα* εἶναι ἄμεσον συμπέρασμα μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

17. *Πρόβλημα* εἶναι πρότασις ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι.

18. *Λύσις δὲ τοῦ προβλήματος* εἶναι ἡ τοῦ ζητουμένου ποίησις.

19. Πᾶσα πρότασις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς *ὑποθέσεως* ἢ τοῦ *δεδομένου* καὶ ἐκ τοῦ *συμπεράσματος* ἢ τοῦ *ζητουμένου*.

20. Δύο προτάσεις λέγονται *ἀντίστροφοι* ἀλλήλων, ἐὰν ἑκατέρα ἔχῃ ὑπόθεσιν τὸ συμπέρασμα τῆς ἑτέρας.

21. Ἡ ἀντίστροφος ἀληθοῦς προτάσεως δυνατὸν νὰ εἶναι ψευδής. Οὕτω, πᾶσαι μὲν αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι σχήματα, ἐνῷ πάντα τὰ σχήματα δὲν εἶναι ἐπιφάνειαι.

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος.

Ὁρισμοί.

22. *Ἴσα* λέγονται δύο σχήματα, ἂν τιθεμένου τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἐφαρμόζωσι καθ' ὅλην τὴν ἑαυτῶν ἔκτασιν, ὥστε πᾶν τοῦ ἑτέρου σημεῖον νὰ εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ ἑτέρου.

23. *Ἰσοδύναμα* ἢ *κατὰ μέρη ἴσα* λέγονται δύο σχήματα, ἂν ἀποτελῶνται ἐκ μερῶν ἀντιστοίχως ἴσων (ἐφαρμοσίμων), δὲν δύνανται δὲ νὰ ἐφαρμόσωσιν ὡς ὅλα.

24. *Ἄνισα* λέγονται δύο σχήματα, ἂν τὸ ἕτερον εἶναι ἴσον πρὸς μέρος τι τοῦ ἑτέρου· καὶ τὸ μὲν πρῶτον λέγεται *μικρότερον* τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ δεύτερον λέγεται *μεῖζον* τοῦ πρώτου.

Σημείωσις. Ἡ τῶν σχημάτων ἰσότης καὶ ἀνισότης σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων ($=, <, >$), δι' ὧν σημειοῦνται καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν ἀριθμῶν.

Ἀξιώματα.

25. 1ον. *Τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσα.*

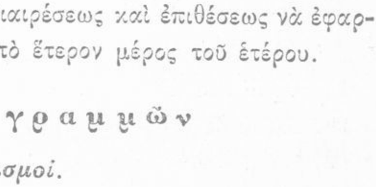
26. 2ον. *Δύο σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἴσα καὶ ἄνισα.* Τουτέστι κατά τινα μὲν τρόπον διαιρέσεως καὶ ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζωσι, κατ' ἄλλον δὲ νὰ εἶναι τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἑτέρου.

Περὶ τῶν γραμμῶν

Ὁρισμοί.

27. Ἡ τῆς εὐθείας γραμμῆς ἔννοια, ἁπλῆ οὖσα, δὲν δύναται νὰ γίνῃ δι' ὁρισμοῦ σαφεστέρα. Τί δὲ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ νοεῖ πᾶς τις. Τὴν δὲ ἰδέαν αὐτῆς σχηματίζει θεωρῶν λεπτὸν τεταμένον νῆμα, ὅπερ ὅσῳ λεπτότερον εἶναι, τόσῳ περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

28. *Τεθλασμένη γραμμὴ* καλεῖται ἡ γραμμή, ἥτις σύγκειται μὲν ἐξ εὐθειῶν, ὡς ὅλον δὲ λαμβανομένη δὲν εἶναι εὐθεῖα.



29. *Καμπύλη* καλεῖται ἡ γραμμή, ἧς οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα.

30. *Μικτὴ* λέγεται ἡ γραμμὴ ἡ ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων γραμμῶν συγκειμένη.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματι, ἡ μὲν ΑΒ εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ ΑΓΔΕΒ τεθλασμένη, ἡ δὲ ΑΖΒ καμπύλη, ἡ δὲ ΑΗΘΙΒ *μικτή*.

Ἀξιώματα.

31. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἑξῆς ἀξιώματα, ἅτινα ἐκφράζουσι τὰς θεμελιώδεις αὐτῆς ἰδιότητας·

α΄. *Ἐκ σημείου εἰς σημεῖον μία μόνη εὐθεῖα γραμμὴ ἄγεται.*

β΄. *Πᾶν μέρος εὐθείας εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.*

γ΄. *Πᾶσα εὐθεῖα δύναται ἐπ' ἄπειρον ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς νὰ αὐξηθῇ καὶ νὰ διατελῇ ἀεὶ εὐθεῖα χωρὶς νὰ διχασθῇ.*

δ.΄ *Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ πάσης ἄλλης εὐθείας οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι δύο οἱαδήποτε πέρατα αὐτῶν.* Ἐὰν δὲ τότε καὶ τὰ ἕτερα πέρατα συμπέσωσιν, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἴσαι, εἰ δὲ μὴ ἡ ἑτέρα θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἑτέρας.

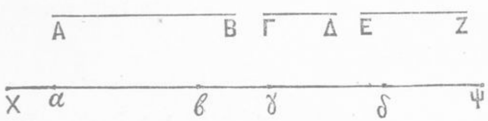
ε΄. *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.*

ς΄. *Ἐκ δύο εὐθειῶν δύναται πάντοτε ἡ μικροτέρα πολλαπλασιαζομένη νὰ ὑπερβῇ τὴν μείζονα.*

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθειῶν.

Ὁρισμοί.

32. *Ἀπόστασις* ἢ *ἀπόστημα* δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα ἑνοῦσα.



33. *Ἄθροισμα* ὁσωνδήποτε εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἣν αὗται ἀποτελοῦσιν, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας.

34. *Διαφορὰ* δὲ δύο εὐθειῶν ἀνίσων λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ἂν ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τῆς μείζονος, ἀποτμηθῇ ἐπ' αὐτῆς μέρος ἴσον τῇ μικροτέρᾳ.

Ἐπὶ παραδείγματι, τῶν μὲν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ ἄθροισμα εἶναι ἡ εὐθεῖα αδ, ἣν εὑρίσκομεν ἀφοῦ λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΨ τὰ ἐφεξῆς μέρη αϐ, ϐγ, γδ ἴσα πρὸς τὰς δεδομένας εὐθείας, τῶν δὲ εὐθειῶν αγ καὶ αϐ διαφορὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ϐγ.

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν εὐθειῶν.

35. Περὶ τῆς τῶν εὐθειῶν ἰσότητος ἀληθεύουσιν αἱ ἑξῆς προτάσεις, ὧν αἱ πλεῖσται ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν ἀριθμῶν·

α'. *Ἂν εἰς ἴσας εὐθείας προστεθῶσιν ἴσαι, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα.*

ϐ'. *Ἂν ἀπὸ ἴσων εὐθειῶν ἴσαι ἀφαιρεθῶσι, τὰ καταλειπόμενα εἶναι ἴσα.*

γ'. *Ἂν εἰς ἀνίσους εὐθείας ἴσαι προστεθῶσι, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἄνισα.*

δ'. *Ἂν ἀπὸ ἀνίσων εὐθειῶν ἴσαι ἀφαιρεθῶσι, τὰ καταλειπόμενα εἶναι ἄνισα.*

ε'. *Ἂν εἰς ἀνίσους εὐθείας προστεθῶσιν ἄνισοι, ἀλλ' ἡ μείζων εἰς τὴν μείζονα, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἄνισα.*

ς'. *Αἱ τῆς αὐτῆς εὐθείας διπλάσιαι, ἴσαι πρὸς ἀλλήλας εἶναι.* (Τοῦτο εἶναι ἄμεσος ἀκολουθία τῆς πρώτης προτάσεως).

ζ'. *Τὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἡμίσεα, ἴσα πρὸς ἄλληλα εἶναι.*

η'. *Ἂν εὐθεῖα τιθεμένη ἐπὶ ἄλλης ἐφαρμόζῃ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἂν τεθῇ ἀντιστρόφως.*

θ'. *Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσι πλείονες εὐθεῖαι, τὸ αὐτὸ πάντοτε προκύπτει ἐξαγόμενον.*

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες αὗται δύνανται νὰ ἀποδειχθῶσιν εὐκόλως, βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων καὶ τῶν ἀξιωμάτων 25 καὶ 26.

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου.

36. *Ἐπίπεδον ἢ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἐφ'

ἧς κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων τῆς ἐπιφανείας. Δεχόμεθα δὲ ὡς ἀξίωμα τὴν ὕπαρξιν τοιαύτης ἐπιφανείας, ἧς εἰκόνα παρέχει ἡμῖν ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος.

37. *Ἐπίπεδον* λέγεται τὸ σχῆμα οὗ πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

38. Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἑξῆς ἀξιώματα·

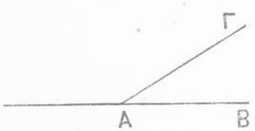
α΄. *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἐφ᾽ ὅσον θέλωμεν πέριξ ἑαυτοῦ κατὰ πάσας τὰς διευθύνσεις.*

β΄. *Πᾶσα εὐθεῖα ἀπεριόριστος, κειμένη ἐν δοθέντι ἐπιπέδῳ, χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε δύο σημεῖα ἀνήκοντα εἰς διάφορα μέρη εἰσὶ πέρατα εὐθείας συναντώσης τὴν δοθεῖσαν, δύο δὲ σημεῖα ἀνήκοντα εἰς τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ πέρατα εὐθείας μὴ συναντώσης τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.*

Παρατήρησις. Τὰ δύο μέρη εἰς ἃ δοθὲν ἐπίπεδον χωρίζεται ὑπὸ δοθείσης ἀπεριορίστου εὐθείας λέγομεν ὅτι κεῖνται *ἑκατέρωθεν* αὐτῆς. Ἔτι δὲ δύο σχήματα (σημεῖα κλπ.) εἰς τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀντιστοίχως κείμενα, λέγομεν ὅτι κεῖνται *ἑκατέρωθεν* τῆς εὐθείας. (Οὕτως, ἐν τῷ σχήματι τῆς § 40, ἡ πεπερασμένη εὐθεῖα ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Α κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΜΝΔ).

Θεώρημα.

39. *Ἂν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι ἔχωσι σημεῖόν τι κοινόν, ἑκατέρα τούτων διαπερᾷ τὴν ἑτέραν.*



Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ, κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἔχουσαι τὸ σημεῖον Α κοινόν. Λέγω ὅτι ἑκατέρα τούτων διαπερᾷ τὴν ἑτέραν, ἤτοι ὅτι, ἑκατέρα τούτων, ὅταν πέραν τοῦ Α προσεκβληθῇ, χωρίζεται ὑπὸ τῆς ἑτέρας εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθεν ταύτης κείμενα.

Τῷ ὄντι, τὰ μὲν σημεῖα τῆς ΑΒ τὰ κείμενα πρὸς τὸ μέρος τοῦ

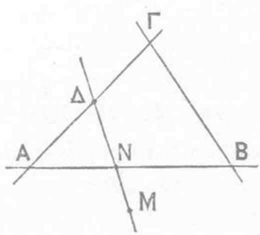
Α πρὸς ὃ κεῖται τὸ Β, κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΓ πρὸς ὃ κεῖται τὸ Β (διότι ἑνοῦνται πρὸς τὸ Β δι' εὐθείας πεπερασμένης μὴ τεμνούσης τὴν ΑΓ, § 38, 6'), τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΒΑ πέραν τοῦ Α κεῖνται πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΑΓ (διότι ἑνοῦνται πρὸς τὸ Β δι' εὐθείας τεμνούσης τὴν ΑΓ). Ἡ ἀπεριόριστος ἄρα εὐθεῖα ΑΒ χωρίζεται ὑπὸ τῆς ΑΓ εἰς δύο μέρη κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς ΑΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΑΓ χωρίζεται ὑπὸ τῆς ΑΒ εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ κείμενα.

Θεώρημα.

40. *Δύο ἐπίπεδα, ἂν ἔχωσι κοινὰ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχοντα κοινὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὅτε θὰ ἔχωσι κοινὰ καὶ πάντα τὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ (36).

Ἔστω δὲ νῦν σημεῖόν τι Μ τοῦ ἐπιπέδου Π, μὴ κείμενον ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· λέγω ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο Μ ἀνήκει καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ. Πρὸς τοῦτο ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Μ πρός τι σημεῖον Ν τῆς εὐθείας ΑΒ, κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, διὰ τῆς εὐθείας ΜΝ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ἢ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Γ, ἢ δὲν θὰ διέρχηται δι' αὐτοῦ, ὅτε τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἢ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΜΝ πρὸς ὃ καὶ τὸ Β, ὡς ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι, ἢ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΜΝ πρὸς ὃ καὶ τὸ Α (διότι τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΝ). Καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὰ σημεῖα Α καὶ Γ θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΝ, ὥστε ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΜΝ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ (38, 6'), κατὰ δὲ τὴν δευτέραν



τὰ σημεῖα Β καὶ Γ θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΝ, ὥστε ἡ ΜΝ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΓ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ ἀναγκαίως θὰ τέμνῃ τὴν τεθλασμένην ΑΓΒ εἴς τι σημεῖον Δ (διάφορον τῶν Α καὶ Β), θὰ ἔχῃ ἄρα δύο σημεῖα διακεκριμένα τὸ Ν καὶ τὸ Δ, ἀνήκοντα εἰς ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ κεῖται ὅλη ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων τούτων.

Ὅθεν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ, ὅπερ ἐλήφθη ὡς ἔτυχεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π, ἀναγκαίως ἀνήκει καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ συμπίπτουσιν.

Πόρισμα.

41. *Πᾶν ἐπίπεδον Π δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου Ρ, οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἐπίθεσις αὕτη γίνεται καὶ ὅταν ἓν τούτων ἀντιστραφῇ.*

Τῷ ὄντι, ἵνα τὸ ἐπίπεδον Π συμπέσῃ πρὸς τὸ Ρ, ἀρκεῖ τρία σημεῖα τοῦ Π μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας νὰ πέσωσιν ἐπὶ τοῦ Ρ, τοῦθ' ὅπερ δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἂν τὸ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων ὁριζόμενον σχῆμα ἀντιστραφῇ.

Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας.

42. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη· τὴν *ἐπίπεδον Γεωμετρίαν*, ἥτις ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, καὶ τὴν *στερεὰν Γεωμετρίαν* ἢ *στερεομετρίαν*, ἥτις ἐξετάζει τὰ σχήματα, ὧν τὰ μέρη δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τοῦ κύκλου.

Ὁρισμοί.

43. *Κύκλος* λέγεται σχῆμα ἐπίπεδον περατούμενον εἰς γραμμήν, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἴσον ἀπέχουσι σημείου ἐντὸς αὐτῆς κειμένου.

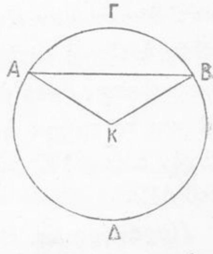
Καλεῖται δὲ τὸ μὲν σημεῖον τοῦτο *κέντρον*, ἡ δὲ γραμμὴ εἰς ἣν περατοῦται ὁ κύκλος *περιφέρεια*.

Ἀκτὶς τοῦ κύκλου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ἠγμένη ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εὐθεῖα καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς περιφερείας. Πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι· διότι ἑκάστη ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων, αἵτινες κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι.

Τόξον λέγεται οἱονδήποτε μέρος τῆς περιφερείας.

Χορδὴ τόξου λέγεται ἡ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἑνοῦσα εὐθεῖα. Καὶ ἕκαστον μὲν τόξον ἔχει μίαν χορδήν, ἐνῷ πρὸς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα.



Οὕτως ἐν τῷ κύκλῳ Κ, τὸ τόξον ΑΓΒ ἔχει χορδὴν τὴν ΑΒ, ἐνῷ ἡ χορδὴ ΑΒ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ δύο τόξα ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ.

Σημείωσις. Λέγοντες ἁπλῶς τόξον ὑποτεινόμενον εἰς χορδήν, θὰ νοῶμεν τὸ μικρότερον τῶν δύο τόξων.

Τμῆμα κύκλου εἶναι μέρος τοῦ κύκλου περιλαμβανόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ· οἷον τὸ σχῆμα ΑΓΒΑ.

Τομεὺς κυκλικὸς λέγεται τὸ σχῆμα τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τόξου καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἠγμένων ἀκτίνων· οἷον τὸ σχῆμα ΚΑΓΒ.

44. Ἐκ τοῦ τῆς περιφερείας ὁρισμοῦ συνάγεται·

1ον. *Ὅτι σημεῖόν τι κεῖται ἐντὸς μὲν κύκλου, ἐὰν ἡ τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασις εἶναι τῆς ἀκτῖνος μικροτέρα, ἐκτὸς δὲ ἂν εἶναι μείζων.*

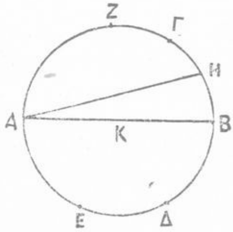
2ον. *Ὅτι δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι.*

Διότι, ἂν τεθῇ ὁ ἕτερος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου οὕτως, ὥστε τὰ κέντρα νὰ συμπέσωσι, θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ ἀκτῖνες, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ αἱ περιφέρειαι· οἱ δὲ κύκλοι θὰ ἐφαρμόσωσι.

Θεώρημα.

45. *Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ διάμετρος διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.



Διότι, ἂν τὸ τμῆμα ΑΓΒ στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΒ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ, διότι ἡ περιστροφὴ δὲν μετέβαλε τὰς ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τῶν σημείων ἀποστάσεις καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ἀδύνατον σημεῖόν τι Γ τοῦ τόξου ΑΓΒ νὰ πέσῃ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΔΒ· διότι οὕτως αἱ ἀκτῖνες θὰ ἦσαν ἄνισοι, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸν τῆς περιφερείας ὁρισμόν. Ἔτι δὲ καὶ τὸ τμῆμα ΑΓΒ θὰ ταυτισθῇ πρὸς τὸ ΑΔΒ. Ἔτι δὲ καὶ τὸ τυχὸν τόξον ΓΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ ἑτέρου τόξου τῆς περιφερείας, τοῦ ΔΕ.

Παρατήρησις. Οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα πλὴν τῶν διαμέτρων διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἴσα.

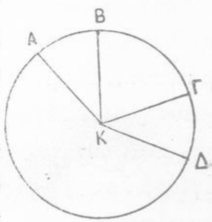
Διότι, ἂν ληφθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ώς ἡ ΑΗ, αὕτη θὰ διαιρῇ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, τὰ ΑΓΗ καὶ τὸ ΑΔΒΗ, ἅτινα θὰ εἶναι ἄνισα· διότι τὸ μὲν ΑΓΗ θὰ εἶναι μέρος τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΗΒ, τὸ δὲ ΑΔΗΒ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ.

Θεώρημα.

46. *Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧς εἶναι μέρος.*

Ἔστω περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ καὶ τόξον τι αὐτῆς τὸ ΑΒ.

Ἂν ἀχθῶσιν αἱ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ΑΒ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, θὰ σχηματισθῇ ὁ τομεὺς ΚΑΒ. Ἂν δὲ μετακινήσωμεν τὸν τομέα τοῦτον ἐπὶ τοῦ κύκλου οὕτως, ὥστε, τοῦ σημείου Κ μένοντος ἀκινήτου, ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος ἄλλης ἀκτῖνος ΚΓ, τότε καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΒ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ἄλλης τινός, οἷον τῆς ΚΔ, καὶ τὸ τόξον ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ, διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΒ ἔπιπτεν ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τομέως ΚΓΔ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τοῦ σημείου τούτου ἀπόστασις θὰ ἦτο μικροτέρα ἢ μείζων τῆς ἀκτῖνος· ὅπερ ἄτοπον.



Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ὁρισμοί.

47. *Ἄθροισμα* τόξων περιφερείας τινὸς λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τούτων, ἂν τεθῶσιν ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἄλλης ἴσης περιφερείας.

Διαφορὰ δὲ δύο τόξων περιφερείας τινὸς λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ὑπολείπεται, ἄν, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τοῦ μείζονος, ἀποτμηθῇ ἀπὸ τούτου μέρος ἴσον τῷ μικροτέρῳ. Οὕτως, ἐν τῷ σχ. τοῦ § 46, τὸ μὲν τόξον ΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ, τὸ δὲ τόξον ΑΒ εἶναι διαφορὰ τῶν τόξων ΑΒΓ καὶ ΒΓ.

Περὶ γωνιῶν.

Ὁρισμοί.

48. Δύο εὐθεῖαι, αἵτινες, ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δὲν ἀποτελοῦσι μίαν μόνην εὐθεῖαν, λέγεται ὅτι σχηματίζουσι γωνίαν. Αἱ εὐθεῖαι αὗται καλοῦνται *πλευραὶ* τῆς γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον ἐξ οὗ αἱ πλευραὶ ἄρχονται *κορυφὴ* τῆς γωνίας.

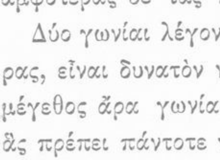
Δύο γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*, ἐὰν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ δύο ἄλλας μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Κατὰ κορυφὴν γωνίαι λέγονται αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων καὶ ἔχουσαι τὴν μὲν κορυφὴν κοινὴν ἀμφοτέρας δὲ τὰς πλευρὰς διαφόρους.

Δύο γωνίαι λέγονται *ἴσαι*, ἄν, τῆς ἑτέρας τιθεμένης ἐπὶ τῆς ἑτέρας, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελεσθῇ ἐξ αὐτῶν μία μόνη γωνία. Τὸ μέγεθος ἄρα γωνίας εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν, ἃς πρέπει πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν ἀπεριορίστως προεκτεινομένας.

Ἐπίκεντρος γωνία ἔν τινι κύκλῳ λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν ἑαυτῆς κορυφὴν ἐν τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου. Τὸ δὲ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον καλεῖται *ἀντίστοιχον* αὐτῆς.

Σημείωσις. Τὰς γωνίας δηλοῦμεν ἢ διὰ μόνου τοῦ τῆς κορυφῆς γράμματος ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, ὧν τὸ μὲν εἶναι τῆς κορυφῆς, τὰ δὲ δύο ἄλλα ἑκατέρας τῶν πλευρῶν. Ἐν δὲ τῇ γραφῇ καὶ τῇ ἀπαγγελίᾳ τὸ τῆς κορυφῆς γράμμα τίθεται ἐν τῷ μέσῳ. Ἐνίοτε παρίσταται ἡ γωνία καὶ δι' ἑνὸς γράμματος, γραφομένου ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς.



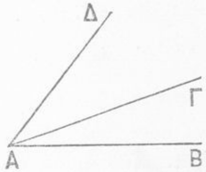
49. Εὐθεῖά τις ΓΔ λέγεται ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν ΑΒ *κάθετος*, ἂν τέμνουσα αὐτὴν σχηματίζῃ τὰς δύο ἐφεξῆς γωνίας ΒΓΔ, ΔΓΑ ἴσας. Ἑκατέρα δὲ τῶν οὕτω σχηματιζομένων γωνιῶν καλεῖται *ὀρθή*.

Ἂν δὲ εὐθεῖά τις, τέμνουσα τὴν ΑΒ, ὡς ἡ ΓΕ, δὲν σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, λέγεται πρὸς τὴν ΑΒ *πλαγία*.

Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν.

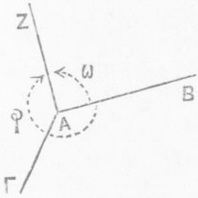
Ὁρισμοί.

50. Ἵνα προσθέσωμεν δύο γωνίας ποιοῦμεν αὐτὰς ἐφεξῆς. Ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν αὐτῶν.



Οὕτως ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΓΑΔ.

Παρατήρησις. Ἂν ἐν τῷ ἀθροίσματι γωνιῶν αἱ ἄκραι πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς τῶν γωνιῶν κορυφῆς (ὥστε δὲν σχηματίζεται γωνία), θὰ δείξωμεν κατωτέρω ὅτι τότε τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Ἂν δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὑπερβαίνῃ τὰς δύο ὀρθάς, ὡς ὅταν αἱ προστιθέμεναι δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΓΑΖ εἶναι ἀμβλεῖαι, ἄθροισμα αὐτῶν δὲν θὰ εἶναι ἡ γωνία ΒΑΖ=ω, ἣν αἱ ἄκραι πλευραὶ σχηματίζουσι, διότι αὕτη εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν. Ἵνα ἄρα καὶ αἱ γωνίαι αὗται ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν γωνίαν, ἀνάγκη εἶναι νὰ δεχθῶμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΖ σχηματίζουσι δύο γωνίας, τὴν ω, ἥτις εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν καὶ καλεῖται *κοίλη γωνία*, καὶ τὴν φ, ἥτις εἶναι μείζων τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν καὶ καλεῖται *κυρτὴ γωνία*.



Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν δύο εὐθειῶν ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν κοίλην γωνίαν αὐτῶν.

51. Ἂν γωνία τις εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων γωνιῶν, ἑκατέρα τούτων καλεῖται *μέρος* τῆς πρώτης.

52. Δύο γωνίαι, ὧν ἡ ἑτέρα ἰσοῦται πρὸς μέρος τι τῆς ἑτέρας

λέγονται *ἄνισοι*· τότε δὲ ἡ μὲν πρώτη καλεῖται *ἐλάσσων* τῆς δευτέρας, ἡ δὲ δευτέρα *μείζων* τῆς πρώτης.

53. *Διαφορὰ* δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἥτις προστιθεμένη εἰς τὴν ἐλάσσονα δίδει ἄθροισμα ἴσον τῇ μείζονι.

Παρατήρησις.

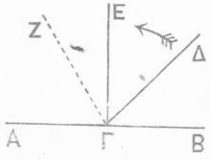
54. Περὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ περὶ τῶν γωνιῶν καὶ ἐν γένει περὶ μεγεθῶν ὁμοειδῶν, ἰσχύουσιν ὅμοιαι ἰδιότητες πρὸς τὰς περὶ τῆς εὐθείας ἰσχυούσας (περὶ ὧν ἐγένετο λόγος ἐν § 35).

Ἀξίωμα.

55. *Δύο ἄνισα ὁμοειδῆ σχήματα, ὧν τὸ μὲν μικρότερον αὐξάνεται συνεχῶς, τὸ δὲ μεῖζον ἐλαττοῦται συνεχῶς, θὰ γίνωσιν ἴσα πρὶν ἢ ἀντιστραφῇ ἡ σχέσις αὐτῶν.*

Θεώρημα.

56. *Ἐξ ἑκάστου σημείου δεδομένης εὐθείας ἄγεται μία μόνη εὐθεῖα ἐπ' αὐτὴν κάθετος.*



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Γ τῆς ΑΒ ἀχθῇ εὐθεῖά τις, οἷον ἡ ΓΔ, καὶ σχηματισθῶσιν αἱ ἄνισοι γωνίαι ΒΓΔ καὶ ΔΓΑ, περιστραφῇ δὲ ἡ ΓΔ περὶ τὸ Γ καὶ πρὸς τὴν μείζονα γωνίαν, φανερὸν εἶναι ὅτι, συνεχῶς ἡ μὲν γωνία ΒΓΔ θὰ αὐξάνηται, ἡ δὲ ΔΓΑ θὰ ἐλαττοῦται, καὶ ὅτι θὰ ὑπάρξῃ θέσις τῆς ΓΔ, οἷον ἡ ΓΕ, καθ' ἣν αἱ γωνίαι ΒΓΕ, ΕΓΑ θὰ εἶναι ἴσαι (55). Οὕτω δὲ ἔχουσα ἡ ΓΕ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος.

Ὅτι δὲ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένη κάθετος εἶναι μία μόνη ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἂν ἡ περιστρεφομένη εὐθεῖα ἐξέλθῃ τῆς θέσεως ΓΕ, αἱ γωνίαι ΒΓΕ καὶ ΕΓΑ δὲν θὰ εἶναι πλέον ἴσαι, κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ εὐθεῖα θὰ εἶναι πλαγία.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι πάσης εὐθείας καὶ παντὸς τόξου ὑπάρχει μέσον· καὶ ὅτι πάσης γωνίας ὑπάρχει διχοτομοῦσα, ἤτοι εὐθεῖα διαιροῦσα τὴν γωνίαν εἰς δύο μέρη ἴσα.

Πόρισμα.

57. *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι.*

Διότι ἂν τεθῇ ἡ ἑτέρα ἐπὶ τῆς ἑτέρας οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ καὶ δύο πλευραὶ νὰ συμπέσωσι, τότε θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ δύο ἄλλαι αὐτῶν πλευραί, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχον ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον δύο διάφοροι κάθετοι (56).

Ὁρισμοί.

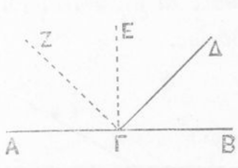
58. *Ὀξεῖα* γωνία λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς γωνίας, *ἀμβλεῖα* δὲ ἡ μείζων ὀρθῆς.

Συμπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσῶται πρὸς ὀρθὴν γωνίαν.

Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσῶται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Θεώρημα.

59. *Αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι αἱ ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων σχηματιζόμεναι εἶναι παραπληρωματικαί.*



Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ, σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ, τεμνομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Διότι, ἂν ἐκ τοῦ τῆς τομῆς σημείου Γ ὑψωθῇ ἡ ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, θὰ εἶναι

$$ΑΓΔ = ΑΓΕ + ΕΓΔ \text{ ὅθεν } ΑΓΔ + ΔΓΒ = ΑΓΕ + ΕΓΔ + ΔΓΒ\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ $ΑΓΕ = 1^{\text{ὀρθ.}}$ καὶ $ΕΓΔ + ΔΓΒ = 1^{\text{ὀρθ.}}$,

ἔπεται ὅτι $ΑΓΔ + ΔΓΒ = 2^{\text{ὀρθ.}}$

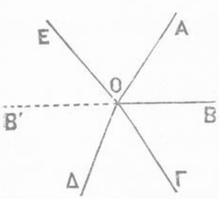
Πόρισμα 1ον.

60. *Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, αἵτινες σχηματίζονται, ἂν ἐκ σημείου Γ εὐθείας ΑΒ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.*

Διότι τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΑ, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς (βλ. σχ. ἐδ. 59).

Πόρισμα 2ον.

61. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΑ, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ Ο ἀγομένων ὁσωνδήποτε εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.*



Διότι, ἂν μία τούτων, οἷον ἡ ΟΒ, προεκταθῇ πέραν τοῦ Ο, θὰ ἔχωμεν (60)

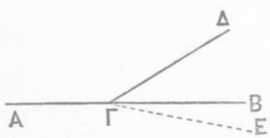
$$\text{ΒΟΓ}+\text{ΓΟΔ}+\text{ΔΟΒ}'=2^{\text{ὀρθ.}}$$

καὶ $$\text{Β}'\text{ΟΕ}+\text{ΕΟΑ}+\text{ΑΟΒ}=2^{\text{ὀρθ.}},$$

ἂν δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΔΟΒ′ καὶ Β′ΟΕ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ΔΟΕ, θὰ προκύψῃ τὸ ζητούμενον.

Θεώρημα.

62. *Ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*



Ἔστω ὅτι $\text{ΑΓΔ}+\text{ΔΓΒ}=2^{\text{ὀρθ.}}$. Λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΓΒ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι, ἂν ἡ ΓΒ δὲν ἦτο ἡ προέκτασις τῆς ΑΓ, ἀλλ' ἄλλη τις, οἷον ἡ ΓΕ, θὰ εἴχομεν $\text{ΑΓΔ}+\text{ΔΓΕ}=2^{\text{ὀρθ.}}$ (59), ὅθεν

$$\text{ΑΓΔ}+\text{ΔΓΕ}=\text{ΑΓΔ}+\text{ΔΓΒ}, \text{ ἤτοι } \text{ΔΓΕ}=\text{ΔΓΒ}\cdot$$

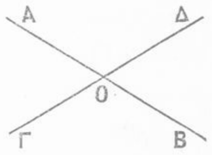
θὰ εἴχομεν ἄρα τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὅλον, ὅπερ ἀδύνατον.

Λοιπὸν ἡ ΓΒ εἶναι προέκτασις τῆς ΑΓ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων *ἀπαγωγικῶν*, ἢ *ἀποδείξεων διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*. Οὕτω δὲ λέγεται ἡ ἀπόδειξις δι' ἧς ἡ ἀλήθεια προτάσεώς τινος ἀποδεικνύεται ἀναγκαίως ἐκ τοῦ ψεύδους τῆς ἀντιφατικῶς αὐτῇ ἀντικειμένης προτάσεως, τουτέστιν ὅταν ἐκ τῆς παραδοχῆς τοῦ ἀντιθέτου ἐξάγωνται συμπεράσματα ἀντιφάσκοντα ἢ εἰς τὴν προϋπόθεσιν ἢ εἰς ἀξιώματα ἢ εἰς ἀποδεδειγμένας προτάσεις.

Σημείωσις. *Ἀντιφατικῶς ἀντικειμένη* τῆς προτάσεως «εἰ ἔστιν Α ἔστι Β» λέγεται ἡ πρότασις «εἰ ἔστιν Α οὐκ ἔστι Β.».

Θεώρημα.



63. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ· λέγω ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσαι.

Διότι (59) $\quad ΑΟΔ+ΔΟΒ=2^{ὀρθ.}$

καὶ $\quad ΔΟΒ+ΒΟΓ=2^{ὀρθ.}$,

κατ' ἀκολουθίαν $\quad ΑΟΔ+ΔΟΒ=ΔΟΒ+ΒΟΓ$,

θὰ εἶναι ἄρα $\quad ΑΟΔ=ΒΟΓ$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ ΑΟΓ=ΒΟΔ.

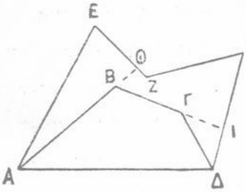
Ὁρισμός.

64. Τεθλασμένη τις γραμμὴ καλεῖται *κυρτή*, ἂν ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς, ἀπεριορίστως ἑκατέρωθεν ἐκτεινομένη, ἔχῃ τὴν ὅλην γραμμὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Θεώρημα.

65. *Πᾶσα κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης τεθλασμένης γραμμῆς τὴν πρώτην περιβαλλούσης καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης.*

Ἔστω ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, ἥτις περιβάλλεται ὑπὸ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης γραμμῆς ΑΕΖΗΔ, ἤτοι περιέχεται ὁλόκληρος ἐν τῷ μέρει τοῦ ἐπιπέδου τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ καὶ τῆς ΑΕΖΗΔ γραμμῆς.



Λέγω ὅτι θὰ εἶναι ἡ ΑΒΓΔ$<$ΑΕΖΗΔ.

Διότι, ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΒΓ πέραν τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν περιβάλλουσαν εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Ι, θὰ ἔχωμεν (31 ε')

$$ΑΒ+ΒΘ<ΑΕ+ΕΘ,\ ΒΓ+ΓΙ<ΒΘ+ΘΖ+ΖΗ+ΗΙ$$
$$\text{καὶ } ΓΔ<ΓΙ+ΙΔ.$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας ταύτας καὶ ἀπὸ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς προκυπτούσης ἀφαιρέσωμεν τὴν ΒΘ καὶ τὴν ΓΙ, θὰ ἔχωμεν τὴν ζητουμένην σχέσιν, ἤτοι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ<ΑΕ+ΕΘ+ΘΖ+ΖΗ+ΗΙ+ΙΔ.$$

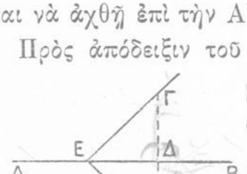
Περὶ καθέτου καὶ πλαγίων.

Θεώρημα.

66. *Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνη ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην κάθετος δύναται νὰ ἀχθῇ.*

Ἔστω ΑΒ ἡ δεδομένη εὐθεῖα καὶ Γ τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ πρόκειται νὰ ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν εἴς τι σημεῖον τῆς ΑΒ εὐθεῖαν, οἷον τὴν ΓΕ. Εἶτα στρέφομεν τὴν γωνίαν ΓΕΒ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτῆς ΕΒ, μέχρις οὗ τὸ Γ πέσῃ ἐπί τινος σημείου Γ' κειμένου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.



Ἐὰν νῦν ἀγάγωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΓ', ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ (38 β'), λέγω ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Διότι, ἂν τὸ μέρος ΓΕΒ τοῦ ἐπιπέδου περιστραφῇ ἐκ νέου

Θέμα ἔχομεν τὴν κάθετον καὶ τὰς πλαγίας καὶ διὰ τὴν κατανόησιν αὐτῶν τὸ θεώρημα εὐθείας καὶ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς ἑνουμένου μετ' αὐτῆς διὰ καθέτου.

περὶ τὴν ΑΒ, τὸ μὲν Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ′, τὸ δὲ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν αὐτοῦ θέσιν, ὥστε αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΓΔΒ, ΒΔΓ′ ὡς ἐφαρμόσιμοι θὰ εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἐφεξῆς καὶ ἴσαι, ἑκατέρα τούτων θὰ ἰσῶται πρὸς ὀρθήν· ἡ ΓΔ ἄρα θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος (41).

Νῦν δὲ λέγω ὅτι οὐδεμία ἄλλη κάθετος ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἄγεται.

Διότι ἂν ἤγετο καὶ ἡ ΓΕ, ἡ γωνία ΓΕΒ θὰ ἦτο ὀρθή, ὡς καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἴση ΒΕΓ′· ἡ γραμμὴ ἄρα ΓΕΓ′ θὰ ἦτο εὐθεῖα (62), ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐκ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ Γ′ μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται (31 α′).

Θεώρημα.

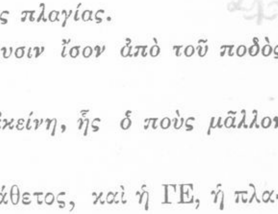
67. *Ἂν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῶσιν ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ κάθετος καὶ πλάγιαι, λέγω ὅτι:*

1ον. *Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.*

2ον. *Δύο πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.*

3ον. *Ἐκ δύο πλαγίων μείζων εἶναι ἐκείνη, ἧς ὁ ποὺς μᾶλλον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.*

1ον. Ἔστωσαν ἡ ΓΔ, ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, καὶ ἡ ΓΕ, ἡ πλαγία. Λέγω ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας.



Διότι, ἂν ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΓΔ ληφθῇ ἡ ΔΘ ἴση τῇ ΔΓ καὶ ἀχθῇ ἡ ΕΘ, τὸ δὲ ἄνω μέρος τοῦ σχήματος περιστραφῇ περὶ τὴν ΑΒ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ω′, ὡς ὀρθαί, εἶναι ἴσαι, θὰ πέσῃ ἡ μὲν ΔΓ ἐπὶ τῆς ΔΘ, ἡ δὲ ΕΓ ἐπὶ τῆς ΕΘ· θὰ εἶναι ἄρα (31 ε′)

$$ΓΔ+ΔΘ<ΓΕ+ΕΘ,$$

ἤτοι $ΓΔ+ΓΔ<ΓΕ+ΓΕ$ καὶ ἄρα $ΓΔ<ΓΕ$.

2ον. Ἔστω ΔΖ=ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ θὰ εἶναι τῇ ΓΕ ἴση.

Διότι, ἂν τὸ μέρος ΓΔΖ στραφῇ περὶ τὴν ΓΔ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΔΕ, διότι αἱ γωνίαι ω καὶ ω'', ὡς ὀρθαί, εἶναι ἴσαι. τὸ δὲ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ε, διότι ΔΖ=ΔΕ· θὰ εἶναι ἄρα ΓΖ=ΓΕ.

Παρατηρητέον δ' ἐπίσης ὅτι καὶ ἡ γωνία ΔΓΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΓΕ· ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι, αἱ ἴσαι πλάγιαι σχηματίζουσι μετὰ τῆς καθέτου γωνίας ἴσας.

3ον. Ἔστω ΔΗ>ΔΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΗ θὰ εἶναι τῆς ΓΖ μείζων.

Διότι, ἂν ἡ ΔΕ ληφθῇ ἴση τῇ ΔΖ, θὰ εἶναι ΓΕ=ΓΖ. Ἂν δ' ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον Ε κείμενον μεταξὺ Α καὶ Δ, ἡ κυρτὴ γραμμὴ ΓΕΘ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ταύτην περικλειούσης ΓΗΘ (65)· καὶ ἂν ληφθῇ τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τούτων, θὰ εἶναι

ΓΕ<ΓΗ καὶ ΓΖ<ΓΗ.

Σημείωσις. Τὰ τούτων ἀντίστροφα, ἤτοι ὅτι, *ἂν μὲν δύο πλάγιαι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἂν δὲ δύο πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἄνισον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου καὶ μᾶλλον ἀπέχει ὁ τῆς μείζονος*, ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς (62, παρατ.).

Πόρισμα 1ον.

68. *Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.*

Διότι οὕτω θὰ ὑπῆρχον πρὸς τὸ αὐτὸ τῆς καθέτου μέρος δύο πλάγιαι ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον.

Πόρισμα 2ον.

69. *Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι πλείονα τῶν δύο κοινὰ σημεῖα.*

Διότι ἂν εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ ἀπεῖχεν ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν τούτων σημείων τῆς εὐθείας, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (68).

Πόρισμα 3ον.

70. *Ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια εἶναι γραμμὴ καμπύλη.*

Διότι, οὐδὲν αὐτῆς μέρος, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (69).

Ὁρισμοί.

71. *Ἀπόστασις* σημείου ἀπὸ εὐθείας καλεῖται ἡ ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀγομένη κάθετος.

72. *Προβολὴ* σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν καλεῖται ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀγομένης καθέτου.

73. *Προβολὴ* δὲ εὐθείας ἐπὶ ἑτέραν εὐθεῖαν καλεῖται τὸ τμῆμα τῆς δευτέρας εὐθείας τὸ ἔχον πέρατα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τῆς πρώτης.

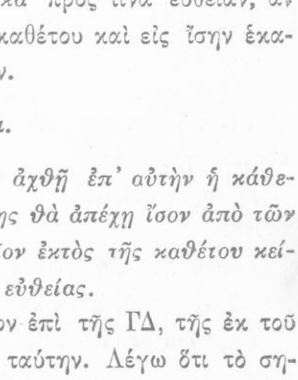
74. Δύο σημεῖα καλοῦνται *συμμετρικὰ* πρός τινα εὐθεῖαν, ἂν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καθέτου καὶ εἰς ἴσην ἑκατέρωθεν τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπόστασιν.

Θεώρημα.

75. *Ἂν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας τινὸς ἀχθῇ ἐπ' αὐτὴν ἡ κάθετος, 1ον) πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας καὶ 2ον) πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον θὰ ἀπέχῃ ἄνισον τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας.*

1ον. Ἔστω τὸ σημεῖον Γ, τὸ κείμενον ἐπὶ τῆς ΓΔ, τῆς ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ ἀχθείσης καθέτου ἐπὶ ταύτην. Λέγω ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β· ἤτοι ΓΑ=ΓΒ.

Διότι αἱ εὐθεῖαι ΓΑ,ΓΒ εἶναι πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἴσον· εἶνε ἄρα (67,2) ἴσαι.



2ον. Ἔστω σημεῖόν τι Ε ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον. Λέγω ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπέχει τοῦ ἄκρου τοῦ κειμένου πρὸς τὸ αὐτὸ τῆς καθέτου μέρος ὀλιγώτερον ἢ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῆς εὐθείας ἄκρου, ἤτοι λέγω ὅτι ΕΒ$<$ΕΑ, ἂν τὰ σημεῖα Ε καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ΔΓ.

Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Η, ἔνθα ἡ ΕΑ τέμνει τὴν κάθετον (38 β'), ἀχθῇ ἡ ΗΒ, θὰ εἶναι (31 ε')

$$\text{ΕΒ} < \text{ΕΗ} + \text{ΗΒ} \text{ ἢ } \text{ΕΒ} < \text{ΕΗ} + \text{ΗΑ},$$

ἤτοι

$$\text{ΕΒ} < \text{ΕΑ}.$$

76. ***Ἀντιστρόφως:*** *Πᾶν σημεῖον ἴσον τῶν ἄκρων εὐθείας ἀπέχον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ἀγομένης ἐπὶ ταύτην καθέτου.*

Διότι, ἂν τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν ἔκειτο ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς δοθείσης εὐθείας, αἱ ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ σημείου ἀποστάσεις θὰ ἦσαν ἄνισοι (75), ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Περὶ πολυγώνων.

Ὁρισμοί.

77. *Πολύγωνον* καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς.

Πλευραὶ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι, εἰς ἃς τοῦτο περατοῦται.

Γωνίαι τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματιζόμεναι.

Κορυφαὶ δὲ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Περίμετρος δὲ τοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Κυρτὸν δὲ λέγεται τὸ πολύγωνον, οὗ ἑκάστη πλευρὰ προσεκβαλλομένη ἀφίνει τὸ σχῆμα ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου καλοῦνται αἱ εὐθεῖαι αἱ δύο αὐτοῦ οὐχὶ διαδοχικὰς κορυφὰς συνδέουσαι.

Τὸ μὲν ὑπὸ τριῶν πλευρῶν ἀποτελούμενον πολύγωνον, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ πάντων ἁπλούστατον, καλεῖται *τρίγωνον* ἢ *τρίπλευρον*, τὸ δὲ ὑπὸ τεσσάρων *τετράπλευρον*, τὸ δὲ ὑπὸ πέντε *πεντάγωνον*.

Ἐκ μὲν τῆς πρὸς ἀλλήλας τῶν πλευρῶν σχέσεως τὸ τρίγωνον καλεῖται

1ον *Ἰσόπλευρον*, ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

2ον *Ἰσοσκελές*, ἐὰν δύο μόνον αὐτοῦ πλευραὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

3ον *Σκαληνόν*, ἐὰν πᾶσαι αὐτοῦ αἱ πλευραὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἄνισοι.

Ἐκ δὲ τοῦ μεγέθους τῶν γωνιῶν τὸ τρίγωνον καλεῖται:

1ον *Ὀξυγώνιον*, ἐὰν αἱ γωνίαι αὐτοῦ πᾶσαι εἶναι ὀξεῖαι.

2ον *Ἀμβλυγώνιον*, ἐὰν μία αὐτοῦ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.

3ον *Ὀρθογώνιον*, ἐὰν μία αὐτοῦ γωνία εἶναι ὀρθή. Τοῦ τριγώνου δὲ τούτου ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ καλεῖται *ὑποτείνουσα*.

Βάσις τριγώνου καλεῖται μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· τοῦ ἰσοσκελοῦς δὲ τριγώνου λαμβάνεται συνήθως βάσις ἡ πλευρὰ ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος.

Ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἔκ τινος αὐτοῦ κορυφῆς ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, ἢ ἐπὶ τὴν ταύτης προέκτασιν.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ μετὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

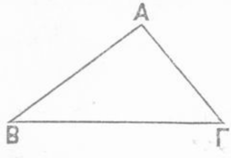
Θεώρημα.

78. *Παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι τοῦ μὲν ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν μικροτέρα, τῆς δὲ διαφορᾶς αὐτῶν μείζων.*

Τῆς προτάσεως ταύτης τὸ μὲν πρῶτον μέρος εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ πέμπτου ἀξιώματος τῆς εὐθείας (31ε), ὥστε

$$ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ.$$

Ἵνα δὲ ἀποδείξω τὸ δεύτερον μέρος, ὅτι δηλαδὴ διὰ πᾶσαν πλευράν, οἷον τὴν ΑΓ, ἔχομεν ΑΓ>ΒΓ—ΑΒ (ὑποτεθέντος ΒΓ>ΑΒ), παρατηρῶ ὅτι ΑΒ+ΑΓ>ΒΓ, ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης.

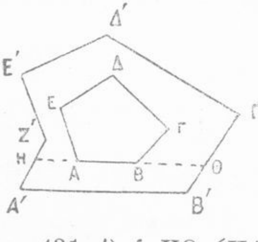


Αἱ σχέσεις αὗται ὑπάρχουσι καὶ εἰς τὰς ἄλλας τοῦ τριγώνου πλευράς, ἀποδεικνύονται δὲ καθ' ὅμοιον τρόπον.

Θεώρημα.

79. *Παντὸς κυρτοῦ σχήματος ἡ περίμετρος εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένης καὶ περικλειούσης αὐτό.*

Ἔστω κυρτόν τι πολύγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕ, περιεχόμενον ἐν τῷ πολυγώνῳ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ', ἤτοι περικλειόμενον ὅλον ὑπὸ τῆς τοῦ δευτέρου περιμέτρου οὕτως, ὥστε οὐδὲν σημεῖον ἐκείνου νὰ κεῖται ἐκτὸς τούτου.



Οὕτως, ἂν ἡ ΑΒ προεκταθῇ ἑκατέρωθεν μέχρι τῶν σημείων Η,Θ καθ' ἃ συναντᾷ τὴν περικλείουσαν γραμμήν, θὰ εἶναι (31 ε') ἡ ΗΘ<ΗΑ'+Α'Β'+Β'Θ, κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΗΘΓ'Δ'Ε'Ζ' μικροτέρα τῆς τοῦ πολυγώνου Α'Β'Γ'Δ'Ε'.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ κυρτὴ γραμμὴ ΒΓΔΕΑ εἶναι μικροτέρα τῆς περικλειούσης αὐτὴν γραμμῆς ΒΘΓ'Δ'Ε'Ζ'ΗΑ, ὡς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα (65), ἕπεται ὅτι, ἂν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας τὰς τεθλασμένας ταύτας γραμμὰς ἡ εὐθεῖα ΑΒ, θὰ προκύψῃ ὅτι, ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ περίμετρος εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ΗΘΓ'Δ'Ε'Ζ'Η. Λοιπόν, κατὰ μείζονα λόγον, ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ περίμετρος εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'.

ἰσότης τριγώνων ὑπάρχει ἐκ τῆς ἰσότητος δύο πλευρῶν ἑκατέρας πρὸς ἑκατέραν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας (80). 2. ἐκ τῆς ἰσότητος μιᾶς πλευρᾶς καὶ

τῶν ταύτῃ προσκειμένων γωνιῶν ἑκατέρας πρὸς ἑκατέραν (81)

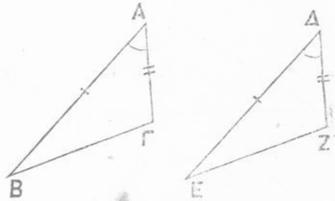
Περὶ τῆς τῶν τριγώνων ἰσότητος.

3. ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν ἑκάστης πρὸς ἑκάστην. (82)

Θεώρημα.

80. *Δύο τρίγωνα, ἂν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.*

Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν Α=Δ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα. Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως, ὥστε ἡ μὲν ΑΒ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΕΔΖ, ὅτε καὶ ἡ ΑΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΖ, τότε τὸ



μὲν σημεῖον Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ε, διότι ΑΒ=ΔΕ, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τοῦ Ζ, διότι ΑΓ=ΔΖ, κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ· ἤτοι τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἐφαρμόσωσι.

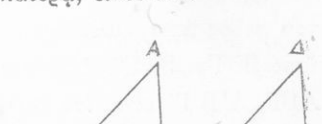
Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

Θεώρημα.

81. *Δύο τρίγωνα, ἂν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ταύτῃ προσκειμένας γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσα.*

Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΓ=ΕΖ καὶ τὰς γωνίας Β=Ε καὶ Γ=Ζ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ, οὕτως ὥστε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ νὰ ταυτισθῇ μετὰ τῆς



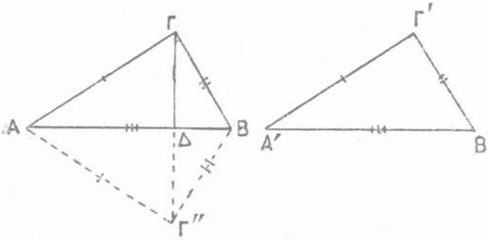
ἴσης αὐτῇ ΕΖ, ἡ δὲ κορυφὴ Α νὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΕΖ πρὸς ὃ κεῖται τὸ Δ, ἡ γωνία Β θὰ ἐφαρμόσῃ ἀναγκαίως πρὸς τὴν ἴσην αὐτῇ γωνίαν Ε, καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν ἴσην αὐτῇ Ζ· τὸ δὲ σημεῖον Α, ὅπερ εἶναι κοινὸν τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΓΑ, θὰ γίνῃ κοινὸν καὶ τῶν

ΕΔ, ΖΔ, κατ' ἀκολουθίαν θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ· ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ θὰ ἐφαρμόσωσι. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Θεώρημα.

82. *Δύο τρίγωνα, ἂν ἔχωσι πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα.*

Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἤτοι ΑΒ=Α'Β',ΒΓ=Β'Γ', ΓΑ=Γ'Α'· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' τεθῇ παρὰ τὸ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ μὲν πλευρὰ Α'Β' νὰ ἐφαρμόσῃ πρὸς τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒ, τὸ δὲ ὅλον τρίγωνον νὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ, εἰς τὴν θέσιν ΑΒΓ'', ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΓ'', θὰ εἶναι

$$ΑΓ=Α'Γ'=ΑΓ'' \text{ καὶ } ΒΓ=Β'Γ'=ΒΓ''.$$

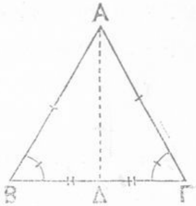
Λοιπόν, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἴσον ἀπέχουσι τῶν Γ καὶ Γ'', ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΓ'' κάθετος (75)· κατ' ἀκολουθίαν αἱ ἴσαι πλάγιαι, ἐπειδὴ ἴσον ἀπέχουσι τοῦ τῆς καθέτου ποδὸς Δ, σχηματίζουσι μετὰ τῆς ΑΒ γωνίας ἴσας (67, 2ον)· ἤτοι ΒΑΓ=ΒΑΓ''· ὅθεν καὶ ΒΑΓ=Β'Α'Γ'. Τὰ δύο ἄρα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα (80).

Παρατήρησις. Ἐν τοῖς ἴσοις τριγώνοις, αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως· κεῖνται δὲ αἱ μὲν ἴσαι πλευραὶ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν, αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Θεώρημα.

83. *Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι τῇ ΑΓ ἴση· λέγω ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι τῇ γωνίᾳ Β ἴση.



Διότι, ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀγάγωμεν εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως ΒΓ (56, παρατ.) τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, θὰ σχηματισθῶσι δύο τρίγωνα, τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ, ἴσα· διότι ἔχουσιν ἑκάτερον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς τοῦ ἑτέρου, ἑκάστην ἑκάστῃ (82), θὰ ἔχωσιν ἄρα καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ Γ.

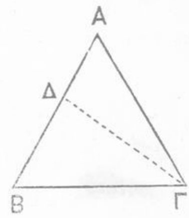
Πόρισμα.

84. *Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.*

Θεώρημα.

85. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ ἔχει τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ Γ· λέγω ὅτι ἔχει καὶ τὴν πλερὰν ΑΓ=ΑΒ.



Διότι, ἂν ἦτο π. χ. ΑΒ>ΑΓ ἐλαμβάνετο δὲ τῆς ΒΑ τὸ τμῆμα ΒΔ ἴσον τῇ ΓΑ καὶ ἤγετο ἡ ΓΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ, ὡς ἔχοντα τὴν μὲν ΒΓ κοινήν, τὴν δὲ ΒΔ ἴσην τῇ ΓΑ, τὰς δὲ περιεχομένας γωνίας ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ἴσας, θὰ ἦσαν ἴσα (80), θὰ ἦσαν δὲ ἴσαι καὶ αἱ δύο τεθλασμέναι ΓΔΒ καὶ ΓΑΒ, ἄρα ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ, ὅπερ ἄτοπον.

Πόρισμα.

86. *Πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.*

Παρατήρησις.

87. Ἐκ προηγουμένων θεωρημάτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς περὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προτάσεις:

α΄. *Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ εὐθεῖα ἡ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ μετὰ* *τοῦ μέσου τῆς βάσεως συνδέουσα, εἶναι ἅμα καὶ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου κάθετος, διχοτομεῖ δὲ καὶ τὴν τῆς κορυφῆς γωνίαν.*

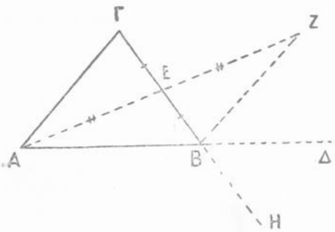
β'. *Ἡ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς διχοτομοῦσα εὐθεῖα διχοτομεῖ καὶ τὴν βάσιν καὶ εἶναι ἐπ' αὐτῆς κάθετος* (80).

γ'. *Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ὑψουμένη κάθετος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς* (76) *καὶ διχοτομεῖ τὴν πρὸς ταύτῃ γωνίαν.*

Θεώρημα.

88. *Ἂν προσεκβληθῇ μία πλευρὰ τριγώνου ἡ ἐκτὸς σχηματισθησομένη γωνία θὰ εἶναι ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν μείζων.*

Ἔστω ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ προσεκβάλλεται μία πλευρὰ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ΓΒΔ εἶναι ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ μείζων.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂν ἀχθῇ ἡ εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ εὐθεῖα ΑΕ, ἐπὶ δὲ τῆς προσεκβολῆς ταύτης ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΑΕ καὶ ἀχθῇ ἡ ΒΖ, τὸ σχηματισθησόμενον τρίγωνον ΒΕΖ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΑΕΓ (79)· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΓΒΖ τῇ ΑΓΕ ἴση. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι τῆς ΓΒΖ μείζων, διότι τὸ σημεῖον Ζ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΒΔ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι καὶ τῆς ΑΓΕ μείζων· ὁμοίως, ἂν προσεκβληθῇ ἡ ΓΒ πέραν τοῦ Β, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ τῇ ΓΒΔ κατὰ κορυφὴν γωνία ΑΒΗ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ταύτῃ ἴση ΓΒΔ, εἶναι τῆς ΓΑΒ μείζων.

Θεώρημα.

89. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθῶν μικρότερον.*

Διότι ἡ γωνία ΑΒΓ μετὰ τῆς ἐκτὸς γωνίας ΓΒΔ (σχ. τὸ ἀνωτέρω) ἀποτελεῖ δύο ὀρθάς· μεθ' ἑκατέρας ἄρα τῶν γωνιῶν ΒΓΑ, ΓΑΒ, αἵτινες εἶναι μικρότεραι τῆς ΓΒΔ, ἀποτελεῖ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν μικρότερον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τῶν γωνιῶν ΑΓΒ καὶ ΓΑΒ τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθῶν μικρότερον.

Πόρισμα 1ον.

90. *Ἂν τρίγωνόν τι ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν, αἱ λοιπαὶ δύο αὐτοῦ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.*

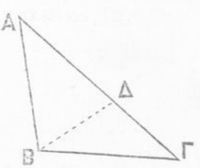
Πόρισμα 2ον.

91. *Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.*

Θεώρημα.

92. *Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων γωνίαι εἶναι ἄνισοι, καὶ μείζων εἶναι ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς μείζονος πλευρᾶς· καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι τῆς ΑΒ μείζων· λέγω ὅτι εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ μείζων τῆς ΑΓΒ.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂν ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς ΑΓ ληφθῇ τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον τῇ ΑΒ, ἀχθῇ δὲ ἡ ΒΔ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ, οὗ ἡ γωνία ΑΒΔ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΓ, διότι τὸ σημεῖον Δ κεῖται μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Γ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τριγώνου ΓΔΒ ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΔΒ εἶναι μείζων τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΔΓΒ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι τῆς ΔΓΒ μείζων, κατὰ μείζονα δὲ λόγον ἡ ΑΒΓ θὰ εἶναι τῆς ΔΓΒ μείζων.

93. *Ἀντιστρόφως:* Ἔστω ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ γωνία ΑΒΓ$>$ΑΓΒ· λέγω ὅτι εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ$>$ΑΒ.

Διότι, ἂν μὲν ἦτο ΑΓ=ΑΒ θὰ ἦτο (83) καὶ Β=Γ, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἂν δὲ ἦτο ἡ ΑΓ>ΑΒ θὰ ἦτο (92) καὶ Β<Γ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΑΓ εἶναι τῆς ΑΒ μείζων.

Θεώρημα.

94. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι, μείζων δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος γωνίας.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ γων ΒΑΓ>Δ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι ΒΓ>ΕΖ.

Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τεθῇ παρὰ τὸ ΑΒΓ εἰς τὴν θέσιν ΑΕ′Γ, οὕτως, ὥστε ἡ ΔΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΒΕ′, θὰ σχηματισθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ΑΒΕ′. Οὕτως ἐὰν ἀχθῇ ἡ τῆς γωνίας ΒΑΕ′ διχοτόμος, αὕτη θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μείζονος γωνίας ΒΑΓ, θὰ εἶναι δὲ εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΒΕ′ κάθετος (87 6′). Ἐπειδὴ δὲ τὸ Γ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου Ε′, θὰ ἀπέχῃ τῶν ἄκρων τῆς ΒΕ′ ἄνισον (75) καὶ θὰ ἔχωμεν ΒΓ>ΓΕ′, ἄρα ΒΓ>ΕΖ.

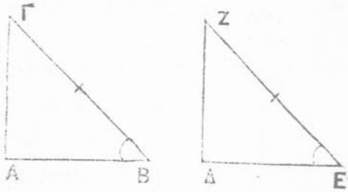
95. *Ἀντιστρόφως : Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι, ὧν μείζων εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος πλευρᾶς.*

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῆς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Θεώρημα.

96. *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἅτινα ἔχουσι ΒΓ=ΕΖ καὶ τὴν γωνίαν Β=Ε· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

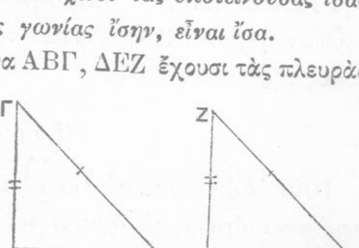


Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Β νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Ε, ἡ μὲν ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΓΑ καὶ ΖΔ θὰ συμπέσωσι, διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΔΕ κάθετοι καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ζ (66). Τὰ δύο ἄρα τρίγωνα, ὡς ἐφαρμόζοντα, εἶναι ἴσα.

Θεώρημα.

97. *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην, εἶναι ἴσα.*

Ἔστω ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΒΓ=ΕΖ καὶ ΓΑ=ΖΔ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

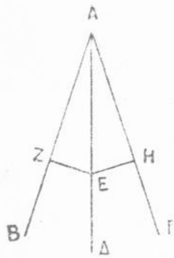


Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως, ὥστε ἡ ΓΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΖΔ, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΕ, διότι αἱ γωνίαι Α καὶ Δ, ὀρθαὶ οὖσαι, εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ε, διότι αἱ πλάγιαι ΓΒ καὶ ΖΕ, ὡς ἴσαι, θὰ ἀπέχωσι τοῦ τῆς καθέτου ποδὸς ἴσον· τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἐφαρμόζοντα, εἶναι ἴσα.

Θεώρημα.

98. *Πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας τῆς διχοτομούσης γωνίαν ἀπέχει τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἴσον.*

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ καὶ σημεῖόν τι Ε κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτομούσης ΑΔ τὴν γωνίαν ταύτην· λέγω ὅτι αἱ ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας κάθετοι ΕΖ καὶ ΕΗ, εἶναι ἴσαι.



Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΑΗΕ, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν κοινὴν καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΖΑΕ ἴσην τῇ ΕΑΗ, εἶναι ἴσα (96)· εἶναι ἄρα καὶ ΕΖ=ΕΗ.

99. *Ἀντιστρόφως. Πᾶν σημεῖον ἀπέχον τῶν πλευρῶν γωνίας ἴσον, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.*

Ἔστω ὅτι ΕΖ=ΕΗ· λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΕ, σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΑΕΖ, ΑΕΗ, ἅτινα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν κοινὴν καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΖ ἴσην τῇ ΕΗ, εἶναι ἴσα (97)· κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΖΑΕ ἰσοῦται τῇ ΗΑΕ· ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Πόρισμα.

100. *Ἐὰν σημείου τινὸς αἱ ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας ἀποστάσεις εἶναι ἄνισοι, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.*

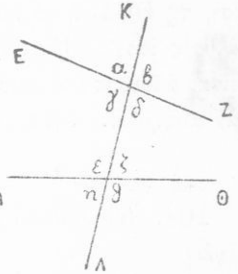
Περὶ παραλλήλων.

Ὁρισμοί.

101. Δύο εὐθεῖαι λέγονται *παράλληλοι*, ἂν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

102. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ τέμνωνται ὑπὸ τρίτης ΚΛ σχηματίζουσιν ὀκτὼ γωνίας. Ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων αἱ μὲν κείμεναι μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ τῆς τεμνούσης

μέρος λέγονται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*, ὡς αἱ δ, ζ καὶ αἱ ε,γ· αἱ δὲ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης λέγονται *ἐντὸς ἐναλλάξ*, ὡς αἱ δ,ε καὶ αἱ γ,ζ· αἱ δὲ γωνίαι, ὧν ἡ μὲν κεῖται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ἡ δὲ ἐκτὸς αὐτῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ τῆς τεμνούσης μέρος, ὡς αἱ ζ, β, αἱ δ, θ κλπ., λέγονται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· αἱ δὲ κείμεναι ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης, ὡς αἱ α,θ, καλοῦνται *ἐκτὸς ἐναλλάξ*· τέλος δὲ αἱ γωνίαι, ὧν ἡ μὲν κεῖται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ἡ δὲ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς τεμνούσης, ὡς αἱ ε,β, λέγονται *ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλάξ*.



ἐντὸς ἐναλλάξ

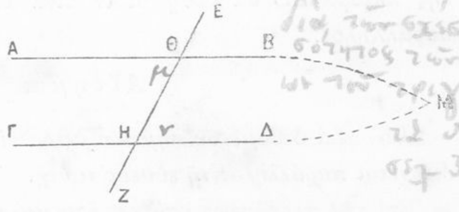
103. Ἐκ τῆς σχ- ἰσότητος τῶν γων. μον. δειχθήτω ἡ παρ. σχέσις τῶν εὐθειῶν.

Θεώρημα.

103. *Ἂν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσιν, ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας, ἢ τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας δύο ὀρθαῖς, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.*

103 α. δεικνύεται διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν γων. τῶν τριγώνων. ἢ διὰ τῶν σχέσεων ἀνισότητος τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου ... Νικολ... σελ. 30

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ ταύτας τέμνουσα, κατὰ τὰ σημεῖα Θ καὶ Η ἀντιστοίχως, εὐθεῖα ΕΖ, καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ γωνία ΑΘΗ εἶναι τῇ ΘΗΔ ἴση, ἢ ὅτι ἡ γωνία ΕΘΒ εἶναί τῇ ΘΗΔ ἴση, ἢ ὅτι αἱ γωνίαι ΒΘΗ καὶ ΘΗΔ εἶναι δύο ὀρθαῖς ἴσαι· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον, τουτέστιν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ προεκτεινόμεναι ἐφ' ἱκανὸν συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Μ. Τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΜΗΘ ἡ ἐκτὸς

103. Ὑποθέτομεν τὸ ἀντίθετον ὅτι τέμνονται. Τότε ἡ ἐξωτερικὴ γων. μ εἶναι μεῖζον τῆς ν (μ>ν). ὥστε ὅταν αἱ γων. μ καὶ ν εἶναι ἄνισοι αἱ εὐθεῖαι τέμν. ὅταν δ' ἴσαι αἱ εὐθεῖαι εἶναι παρ. ... σχέσιν ἀνισότητος ...

γωνία ΑΘΗ θὰ εἶναι ἴση τῇ ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΘΗΔ (ἢ ἡ ΕΘΒ ἴση τῇ ΘΗΔ, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΘΗ καὶ ΘΗΔ δύο ὀρθαῖς ἴσον). Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι ἄτοπα (88,89), ἕπεται ὅτι εἶναι ἀδύνατον αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ συναντηθῶσιν, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

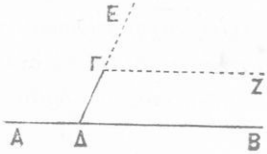
Πόρισμα 1ον.

104. *Δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετοι εἶναι παράλληλοι.*

Πόρισμα 2ον.

105. *Διὰ δεδομένου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου δύναται νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐκτὸς ταύτης κείμενον σημεῖον Γ· λέγω ὅτι διὰ τοῦ Γ δύναται νὰ ἀχθῇ τῇ ΑΒ παράλληλος.



Διότι, ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀχθῇ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΓΔ, θὰ σχηματισθῇ ἡ γωνία ΓΔΒ· ἂν δὲ τὴν γωνίαν ταύτην θέσωμεν οὕτως, ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ Δ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΓ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΓΕ τῆς ΔΓ, ἡ ἄλλη αὐτῆς πλευρὰ ΔΒ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΓΖ, ἥτις θὰ εἶναι τῇ ΑΒ παράλληλος.

Αἴτημα.

106. *Διὰ δεδομένου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνη διέρχεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.*

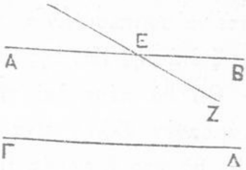
Ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης, ἥτις καλεῖται *αἴτημα* (13) τοῦ Εὐκλείδου, στηρίζεται ἡ περὶ τῶν παραλλήλων θεωρία.

Θεώρημα.

107. *Πᾶσα εὐθεῖα συναντῶσα τὴν ἑτέραν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν συναντᾷ καὶ τὴν ἑτέραν.*

106. Επιστήμη και υπόθεσις Poincaré σελ. 35 και 45

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε συναντῶσα εὐθεῖα ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ προεκτεινομένη συναντᾷ καὶ τὴν ΓΔ.

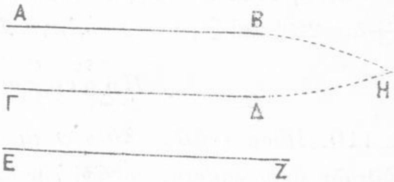


Διότι ἄλλως θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ σημείου τούτου Ε δύο παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΓΔ, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΖ, ὅπερ ἄτοπον (106).

Θεώρημα.

108. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.



Διότι, ἂν δὲν ἦσαν παράλληλοι, θὰ συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Η· θὰ ἦτο ἄρα δυνατὸν ἐκ τοῦ σημείου Η τούτου νὰ ἀχθῶσι δύο παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΕΖ, ἡ ΗΑ καὶ ἡ ΗΓ, ὅπερ ἄτοπον (106).

Θεώρημα. αντίστροφον του 103

109. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἐὰν ὑπὸ τρίτης εὐθείας τέμνωνται, σχηματίζουσι,*

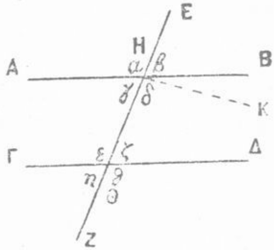
1ον *τὰς μὲν ἐντὸς ἐναλλάξ, ὡς καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ, γωνίας ἴσας,*

2ον *τὰς δὲ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας,*

3ον *τὰς δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς καὶ τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, γωνίας παραπληρωματικάς.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ ταύτας τέμνουσα εὐθεῖα ΕΖ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ζ καὶ 6 εἶναι ἴσαι.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς τεθῇ ἡ γωνία ζ ἐπὶ τῆς β οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν, νὰ πέσῃ δὲ ἡ πλευρὰ ΘΗ τῆς ζ ἐπὶ τῆς ΗΕ τῆς β, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΘΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΒ· διότι, ἂν ἐλάμβανεν ἄλλην τινὰ θέσιν, ἔστω τὴν ΗΚ, θὰ ἦτο ἡ γωνία ΗΘΔ ἴση τῇ ΕΗΚ, καὶ ἄρα (103) ἡ ΗΚ θὰ ἦτο τῇ ΓΔ παράλληλος· οὕτω δὲ θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ σημείου τούτου Η δύο παραλλήλους τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΓΔ, τὴν ΗΒ καὶ τὴν ΗΚ, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον (106)· ἀναγκαίως ἄρα ἡ πλευρὰ ΘΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΒ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ζ εἶναι τῇ β ἴση.



Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta=\gamma$ (63), ἕπεται $\zeta=\gamma$· ἔτι δέ, ἐπειδὴ (59) $\beta+\delta=2^{\text{ὀρθ.}}$ καὶ $\zeta+\theta=2^{\text{ὀρθ.}}$, ἕπεται $\zeta+\delta=2^{\text{ὀρθ.}}$ καὶ $\beta+\theta=2^{\text{ὀρθ.}}$.

Πόρισμα 1ον.

110. *Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ἑτέραν δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἑτέραν.*

Πόρισμα 2ον.

111. *Ἂν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἐχούσας ἄθροισμα μικρότερον δύο ὀρθῶν, αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι προεκβαλλόμεναι συναντῶνται, ἐφ' ὃ μέρος κεῖνται αἱ ῥηθεῖσαι δύο γωνίαι* (1).

---

(1) Τὸ παρὸν πόρισμα συμπίπτει πρὸς τὸ πέμπτον αἴτημα τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου, ἔχον ὡς ἑξῆς: «Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, (ἠτήσθω) ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

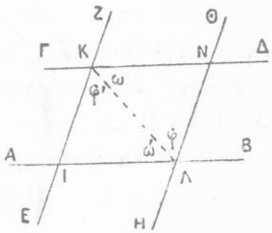
Ἀντὶ τῆς προτάσεως ταύτης χρησιμοποιεῖται συνήθως, πρὸς θεμελίωσιν τῆς θεωρίας τῶν παραλλήλων, τὸ ἄνω (ἐν § 106) αἴτημα.

Διότι, ἂν δὲν συνηντῶντο θὰ ἦσαν παράλληλοι, θὰ ἐσχημάτιζον ἄρα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς, ὅπερ ἄτοπον.

Θεώρημα.

112. *Τὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν μέρη τὰ μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΕΖ καὶ ΗΘ κατὰ τὰ σημεῖα Ι,Λ καὶ Κ,Ν· λέγω ὅτι ΙΚ=ΛΝ καὶ ΙΛ=ΚΝ.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΛ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΙΚΛ καὶ ΚΛΝ ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι θὰ ἔχωσι μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας ταύτῃ γωνίας ἴσας (81)· θὰ εἶναι ἄρα

ΙΚ=ΛΝ καὶ ΙΛ=ΚΝ.

Πόρισμα.

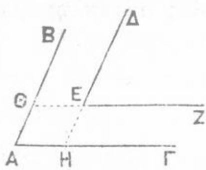
113. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.*

Διότι αἱ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετοι εἶναι παράλληλοι (104).

Θεώρημα.

114. *Ἐὰν δύο γωνιῶν αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἔχωσιν ἀμφότεραι ἢ τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροποι) ἢ ἀντίθετον (ἀντίρροποι), παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν αἱ μὲν δύο πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίρροποι.*

1ον. Ἔστω ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΑΓ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ ΕΖ, τὴν δὲ πλευρὰν ΑΒ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ ΕΔ· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.



Διότι, ἂν ἡ ΔΕ προεκταθῇ θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Η (107)· οὕτω δέ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΗΓ θὰ εἶναι ἴση καὶ τῇ ΔΕΖ καὶ τῇ ΒΑΓ (109), ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΔΕΖ.

2ον. Ἐπίσης ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΘΕΗ· διότι ΘΕΗ =ΔΕΖ· ἔχουσι δὲ αἱ γωνίαι αὗται τὰς πλευρὰς ἀντιρρόπους.

3ον. Ἔστωσαν νῦν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΖΕΗ, αἵτινες ἔχουσι τὰς μὲν πλευρὰς ΑΓ καὶ ΕΖ ὁμορρόπους, τὰς δὲ πλευρὰς ΑΒ καὶ ΕΗ ἀντιρρόπους· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

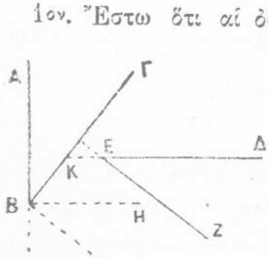
Διότι, ἂν ἐν τῇ ἰσότητι ΔΕΖ+ΖΕΗ=2ὀρθ (59) ἀντὶ τῆς γωνίας ΔΕΖ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἴσην αὐτῇ ΒΑΓ, θὰ ἔχωμεν

ΒΑΓ+ΖΕΗ=2ὀρθ..

Θεώρημα.

115. *Ἂν δύο γωνιῶν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μὲν ἑτέρα εἶναι ὀξεῖα ἡ δὲ ἑτέρα ἀμβλεῖα.*

1ον. Ἔστω ὅτι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετον, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετον· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῶσιν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΕΔ ὁμόρροπος, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΕΖ ὁμόρροπος, ἡ σχηματισθησομένη γωνία ΗΒΘ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ (114). Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν ΒΗ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, ἡ δὲ ΒΘ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος (110), αἱ γωνίαι ΑΒΗ, ΓΒΘ, ὡς ὀρθαί, θὰ εἶναι ἴσαι· ἂν δὲ ἀπὸ τῶν ἴσων τούτων γωνιῶν ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΓΒΗ, θὰ μείνωσιν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΗΒΘ ἴσαι. Λοιπόν, ἐπειδὴ ΗΒΘ=ΔΕΖ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΕΖ.

2ον. Ἔστω νῦν ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒΓ καὶ ἡ ἀμβλεῖα ΚΕΖ ἔχουσι τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ ἐπὶ τὴν ΕΚ κάθετον, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετον· λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Διότι, ἂν ἐν τῇ ἰσότητι ΔΕΖ+ΚΕΖ=2ὀρθ. (59) ἀντὶ τῆς γωνίας ΔΕΖ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

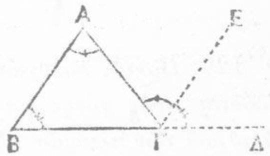
$$ΑΒΓ+ΚΕΖ=2^{ὀρθ.}.$$

3ον. Ἂν τέλος πρόκειται περὶ τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν ΓΒΙ καὶ ΖΕΚ, ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς αὐταῖς παραπληρωματικαὶ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀμβλεῖαι ἔσονται ἴσαι.

Θεώρημα.

116. *Παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς προεκτείνωμεν τὴν μὲν πλευρὰν ΒΓ μέχρι σημείου τινός, οἷον τοῦ Δ, ἐκ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀγάγωμεν τὴν ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλον.



Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ σημεῖον Γ σχηματισθεισῶν τριῶν γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς (60), ἤτοι εἶναι

$$ΒΓΑ+ΑΓΕ+ΕΓΔ=2^{ὀρθ.}. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΓΕ=ΒΑΓ καὶ ἡ ΕΓΔ=ΑΒΓ (109).

Λοιπόν, ἂν ἐν τῇ ἰσότητι (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ τὰς πρὸς αὐτὰς ἴσας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$ΒΓΑ+ΒΑΓ+ΑΒΓ=2^{ὀρθ.}.$$

Πόρισμα 1ον.

117. *Παντὸς τριγώνου ΑΒΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΓΔ (ἥτις σχη-*

ματίζεται ἂν μία πλευρὰ αὐτοῦ προεκβληθῇ) ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β.

Πόρισμα 2ον.

118. *Δύο τρίγωνα, ἂν ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην αὐτῶν γωνίαν ἴσην.*

Πόρισμα 3ον.

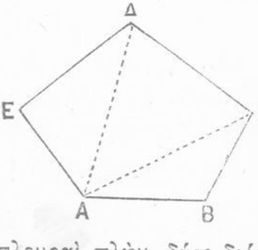
119. *Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν.*

Παρατήρησις.

Τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα θεωρήματα 88 καὶ 89 δύνανται νὰ ἐκληφθῶσι πορίσματα τοῦ θεωρήματος 116. Ἀνάγκη ὅμως νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος 116 προϋποθέτει τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου (§ 106), ἐνῷ αἱ ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων 88 καὶ 89 καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῶν στηριζομένου θεωρήματος 103 δὲν προϋποθέτουσι τὸ αἴτημα τοῦτο.

Θεώρημα.

120. *Παντὸς πολυγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς τόσας ὀρθὰς γωνίας ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, πλὴν τεσσάρων.*



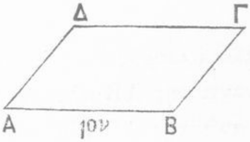
Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ὅπερ ἔχει μ πλευράς· λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι 2μ — 4 ὀρθαί.

Διότι, ἂν ἔκ τινος τῶν κορυφῶν τούτου, οἷον τῆς Α, ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς διαγώνιοι, θὰ διαιρεθῇ τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶναι καὶ αἱ πλευραὶ πλὴν δύο· διότι, ἂν κορυφὴ τῶν τριγώνων τούτων ληφθῇ τὸ σημεῖον Α, ἑκάστη τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου θὰ χρησιμεύσῃ ὡς βάσις ἑνὸς τῶν τριγώνων τούτων, ἐκτὸς τῶν δύο πλευρῶν αἵτινες σχηματίζουσι τὴν γωνίαν Α. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου δὲν διαφέρει τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν πάντων τῶν τριγώνων τούτων, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἑκάστου τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν (116), ἕπεται ὅτι τοῦ πολυγώνου τούτου αἱ γωνίαι θὰ συναποτελῶσι 2(μ—2) ἢ 2μ—4 ὀρθὰς γωνίας.

Περὶ τετραπλεύρων.

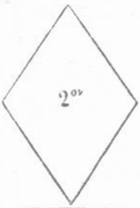
Ὁρισμοί.

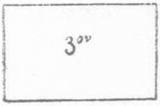
121. Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνονται:



1ον. *Τὸ παραλληλόγραμμον*, οὗ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

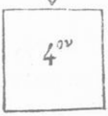
2ον. *Ὁ ῥόμβος*, οὗ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εἶναι ἴσαι.

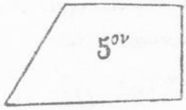




3ον. *Τὸ ὀρθογώνιον*, οὗ αἱ γωνίαι πᾶσαι εἶναι ὀρθαί.

4ον. *Τὸ τετράγωνον*, οὗ καὶ αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· ὅπερ δηλαδὴ εἶναι καὶ ῥόμβος καὶ ὀρθογώνιον.

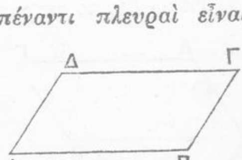




5ον. *Τὸ τραπέζιον*, οὗ δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Θεώρημα.

122. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*



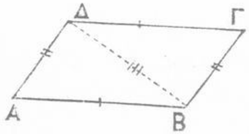
Ἐὰν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, λέγω ὅτι θὰ εἶναι ΑΒ = ΔΓ καὶ ΒΓ=ΑΔ. Διότι εἶναι μέρη παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων (112).

Αἱ δὲ ἀπέναντι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους ἑκάστην ἑκάστῃ (114).

Θεώρημα.

123. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ· λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, θὰ χωρισθῇ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΔΒ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ (82)· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ πλευρᾶς γωνία ΑΔΒ θὰ εἶναι ἴση τῇ κειμένῃ ἀπέναντι τῆς ΔΓ πλευρᾶς γωνίᾳ ΔΒΓ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι (103). Ὡσαύτως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι· διότι αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι.

Λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

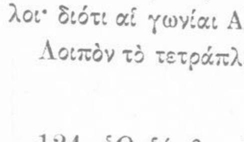
Πόρισμα.

124. *Ὁ ῥόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας.*

Θεώρημα.

125. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τὴν γωνίαν Α=Γ καὶ τὴν γωνίαν Β=Δ· λέγω ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμον.



Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι (120)

$$Α+Β+Γ+Δ=4\text{ὀρθ.} \qquad (1)$$

Ἐὰν δέ, ἐν τῇ ἰσότητι ταύτῃ, ἀντὶ τῶν γωνιῶν Γ,Δ ἀντικαταστήσωμεν τὰς πρὸς αὐτὰς ἴσας Α,Β, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$2A+2B=4^{\text{ὀρθ.}},\ \text{ἢ}\ A+B=2^{\text{ὀρθ.}}. \quad (2)$$

Αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΓ εἶνε παράλληλοι (103).

Ὡσαύτως ἐκ τῆς ἰσότητος (1) εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$2A+2\Delta=4^{\text{ὀρθ.}},\ \text{ἢ}\ A+\Delta=2^{\text{ὀρθ.}}, \quad (3)$$

ἐξ ἧς συνάγομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΔΓ εἶναι παράλληλοι.

Λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

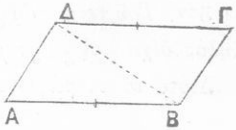
Πόρισμα.

126. *Πᾶν ὀρθογώνιον τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Θεώρημα.

127. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ ἴσας καὶ παραλλήλους· λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

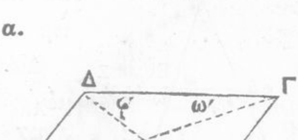


Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν, τὴν ΑΒ=ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΔ=ΒΔΓ (109). Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται ὅτι ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ· καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Θεώρημα.

128. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· καὶ ἀντιστρόφως.*



Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ, ΒΔ. Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΒ, ΓΟΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ=ΓΔ, τὴν γωνίαν φ=φ′ καὶ τὴν γωνίαν ω=ω′ (109), ἕπεται ὅτι ΟΑ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΔ.

129. *Ἀντιστρόφως. Πᾶν τετράπλευρον, οὗ αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης γίνεται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν σχηματιζομένων ἴσων τριγώνων.

Παρατηρήσεις.

130. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν σχηματιζομένων ἴσων τριγώνων.

1ον. *Τοῦ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς γωνίας· καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν παραλληλόγραμμον, οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι πρὸς ἀλλήλας κάθετοι, εἶναι ῥόμβος.*

2ον. *Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἔχον τὰς διαγωνίους ἴσας παραλληλόγραμμον, εἶναι ὀρθογώνιον.*

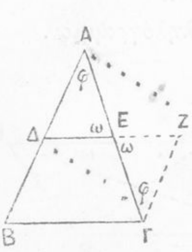
3ον. *Τοῦ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς.*

Διότι τὸ τετράγωνον εἶναι ἅμα ὀρθογώνιον καὶ ῥόμβος.

Θεώρημα.

131. *Ἡ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου ἑνοῦσα εὐθεῖα εἶναι τῇ τρίτῃ πλευρᾷ παράλληλος καὶ ἴση τῷ ἡμίσει αὐτῆς.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ δὲ σημεῖον Δ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τὸ Ε μέσον τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι τῇ ΒΓ παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ ταύτης.



Διότι, ἂν προεκταθῇ ἡ ΔΕ πέραν τοῦ Ε μέχρι τοῦ Ζ, ὥστε ΕΖ=ΔΕ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΖ, τὸ τετράπλευρον ΑΔΓΖ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον (129)· ἡ ΓΖ ἄρα θὰ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΑ, κατ᾽ ἀκολουθίαν καὶ τῇ ΒΔ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΒΓΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. (127)

131 Σχέσις εὐθείας ἑνούσης τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὴν τρίτην πλευράν.

131 σχέσις τῆς ἀγομένης παραλλήλου ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τινος ἑνὸς τριγώνου πρὸς τὰς ἄλλας

132. Δίοδος παραλλήλου ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου πρὸς τὴν ἑτέραν διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης.

Λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι τῇ ΒΓ παράλληλος· ἐπειδὴ δὲ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΖ, διότι ΔΕ=ΕΖ, ἔπεται ὅτι εἶναι τὸ ἥμισυ καὶ τῆς ΒΓ.

132. *Ἀντιστρόφως. Ἡ ἀπὸ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου ἀγομένη πρὸς ἑτέραν πλευρὰν παράλληλος διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς.*

Διότι, ἂν ἡ ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ ἀγομένη τῇ ΒΓ παράλληλος δὲν διήρχετο καὶ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΓ, ἤγετο δὲ ἡ ΔΕ, αὕτη θὰ ἦτο τῇ ΒΓ παράλληλος, ὅπερ ἀδύνατον· διότι θὰ ἦσαν ἐκ τοῦ Δ δύο εὐθεῖαι τῇ ΒΓ παράλληλοι (106).

Πόρισμα.

133. *Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἀγομένη διάμεσος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· καὶ ἀντιστρόφως.*

133 Σχέσις τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γων. ὀρθογ. ~~τριγ. καὶ~~ διαμέσου καὶ τῆς ὑποτειν.

133 Ἀπόδειξις. 1ον φέρομεν τὴν διάμεσον 2ον ἐκ τοῦ μέσου δ τῆς ὑποτειν. παράλληλον τῇ μιᾷ καθέτω κατὰ τὸ 132

αε = γε, συνεπῶς αδ = δγ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Ἂν τέσσαρες γωνίαι ἔχωσι κοινὴν κορυφήν, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσῶται πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, εἶναι δὲ ἡ μὲν α΄ ἴση τῇ γ΄, ἡ δὲ β΄ ἴση τῇ δ΄, αἱ πλευραὶ αὐτῶν θὰ κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς. ἔνεκα τῆς ἰδιότητος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν

2) Δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν αἱ διχοτόμοι κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

3) Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος δὲν δύναται νὰ τέμνηται ὑπ᾽ εὐθείας εἰς πλείονα τῶν δύο σημεῖα. (Ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, βοηθείᾳ τοῦ ἀξιώματος 38, β΄).

4). Ἑκάστη διάμεσος τοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἑκατέρωθεν αὐτῆς πλευρῶν τοῦ τριγώνου. 4. Διότι ἡ διάμεσος εἶναι διαγώνιος παραλληλογράμμου καὶ πλευρὰ τριγώνου.

5) Παντὸς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι μείζων μὲν τῶν δύο τρίτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν διαμέσων, μικροτέρα δὲ τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος αὐτῶν.

5. Διότι ἡ διάμεσος εἶναι πλευρὰ τριγώνου καὶ ὡς τοιαύτη μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν

6) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ὑπάρχει σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων δύο δεδομένων σημείων, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, εἶναι ἡ μεγίστη.

7) Κυρτοῦ τετραπλεύρου ἡ περίμετρος εἶναι μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων καὶ ἐλάσσων τοῦ διπλασίου αὐτῶν ἀθροίσματος.

8) Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ, αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως ἀγόμεναι διάμεσοι εἶναι ἴσαι. Ἐπίσης εἶναι ἴσαι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, ὡς καὶ τὰ εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἀντιστοιχοῦντα ὕψη. Καὶ ἀντιστρόφως.

9) Ἐὰν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ ΒΑΓ ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ληφθῶσι τμήματα ΑΔ, ΑΕ, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας τὰ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοίχως ἴσα ΑΔ′, ΑΕ′, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ′ καὶ Δ′Ε, ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.

10) Σημείου κειμένου ἐντὸς τριγώνου τὸ ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ εἶναι μικρότερον μὲν τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μείζων δὲ τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς.

11) Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ὑπάρχει σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν.

12) Δεδομένων τριῶν σημείων ὑπάρχει εὐθεῖα, ἥτις διερχομένη δι᾽ ἑνὸς τούτων νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων σημείων ἴσον.

13 Χατ. 7.6-37 θεωρ. 88

13) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν γωνίαν ἴσην ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, ἢ αἱ δύο αὐτῶν γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν, εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἄνισοι.

14) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διχοτομῇ καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

15) Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου, παντὸς σημείου αὐτῆς αἱ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως ἀποστάσεις θὰ διαφέρωσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων ὀλιγώτερον ἢ ὅσον αἱ δύο τοῦ τριγώνου πλευραί.

16 σχέσις διαμέσου καὶ τεμνομένης τινος πλευρᾶς τοῦ τριγώνου

16) Ἐν τριγώνῳ γωνία τις εἶναι ὀξεῖα μέν, ἐὰν ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἠγμένη εὐθεῖα εἶναι

τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ταύτης μείζων, ὀρθὴ δὲ ἐὰν εἶναι ἴση, ἀμβλεῖα δὲ ἐὰν εἶναι μικροτέρα· καὶ ἀντιστρόφως.

17) Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετος, 1ον) τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΑΓ, ΔΒΑ θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, 2ον) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΒΑΔ, ΒΓΑ θὰ εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι καὶ 3ον) ἐὰν ἡ κορυφὴ Α ἑνωθῇ μετὰ τοῦ μέσου Ε τῆς ὑποτεινούσης ἡ γωνία ΔΑΕ θὰ εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

18) Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι δύο γωνιῶν τριγώνου, ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης γωνίας τοῦ τριγώνου.

19) Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ ἰσῶται τῷ ἡμίσει τῆς ὑποτεινούσης ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία θὰ εἶναι ἴση τῷ τρίτῳ τῆς ὀρθῆς.

20) Ἡ τὸ μέσον πλευρᾶς τριγώνου μετὰ τοῦ ποδὸς τῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἠγμένης καθέτου ἑνοῦσα εὐθεῖα, σχηματίζει μετὰ τῆς τρίτης πλευρᾶς γωνίαν ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

21) Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ὕψους τριγώνου καὶ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἰσοῦται τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως.

22) Ἐν ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ παντὸς μὲν σημείου τῆς βάσεως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι σταθερόν, παντὸς δὲ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ἡ τῶν αὐτῶν ἀποστάσεων διαφορὰ εἶναι σταθερά.

23) Ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου, κειμένου ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἀπὸ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ ὕψει τοῦ τριγώνου.

24) Αἱ τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου διχοτόμοι σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον, ἔχον τὰς διαγωνίους παραλλήλους ταῖς πλευραῖς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἴσας τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.

25) Ἐὰν ἐν τῷ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ, ἀρχόμενοι ἀπό τινος κορυφῆς, λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς τὰ ἴσα τμήματα ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ καὶ ἀγάγωμεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, θὰ σχηματισθῇ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ, ὅπερ εἶναι τετράγωνον. Ἐπίσης ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, ΔΕ θὰ ὁρίσωσι τετράγωνον, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ.

26) Ἐὰν δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εὐθεῖαι τέμνωσι τὰς πλευρὰς τετραγώνου, τὸ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τούτων ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι τοῦ τετραγώνου πλευρῶν ὁριζόμενον τμῆμα, θὰ εἶναι ἴσον τῷ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων τοῦ τετραγώνου πλευρῶν ὁριζομένῳ τμήματι.

27) Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τραπεζίου ἀγομένη ταῖς βάσεσι παράλληλος διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκατέρας τῶν διαγωνίων καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Τῆς παραλλήλου δὲ ταύτης τὸ μὲν ὑπὸ τῶν διαγωνίων περιλαμβανόμενον τμῆμα ἰσοῦται τῇ ἡμιδιαφορᾷ τῶν βάσεων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πλευρῶν περιλαμβανόμενον ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν βάσεων.

28) Τὸ σχῆμα, οὗ αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου, εἶναι παραλληλόγραμμον.

29) Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ αἱ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ αἱ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνοῦσαι εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ εἶναι τὸ κοινὸν αὐτῶν μέσον.

30) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, αἱ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνοῦσαι εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι.

31) Παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς διάμεσοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ ἀπέχει ἀφ' ἑκάστης τῶν κορυφῶν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ δύο τρίτα τῆς διαμέσου τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς ταύτης ἠγμένης.

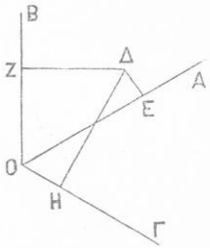
32) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

33) Παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἔχοντος ν πλευρὰς ὁ τῶν διαγωνίων ἀριθμὸς εἶναι $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

34) Εἰς τὴν μείζονα πλευρὰν τριγώνου ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα διάμεσος.

35) Ἐὰν προεκταθῇ τὸ ὕψος ΓΔ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὸ μῆκος ΑΕ=ΓΔ καὶ ἑνωθῶσιν αἱ κορυφαὶ Α, Β μετὰ τοῦ σημείου Ε, δι' εὐθειῶν τεμνουσῶν τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η, ἡ εὐθεῖα ΖΗ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος.

36) Ἐὰν ἐκ σημείου Ο ἀχθῶσι τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, σχηματίζουσαι τὰς γωνίας ΓΟΑ=ΑΟΒ= $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Δ τοῦ κειμένου ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ ἀχθῶσιν αἱ ἐπὶ τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κάθετοι ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ, θὰ ἀληθεύῃ, οὑτινοσδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Δ, ἡ ἰσότης ΔΕ+ΔΖ=ΔΗ.

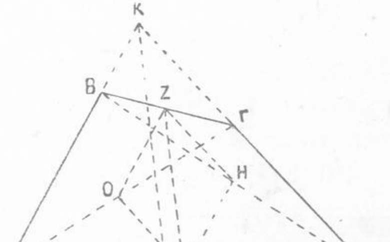


37) Δύο παραλληλογράμμων, ὧν τὸ ἕτερον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ ἑτέρῳ, αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

38) Ἐν ἰσοσκελεῖ τραπεζίῳ αἱ παρ' ἑκατέρᾳ τῶν βάσεων κείμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

39) Ἡ ὑπὸ τῶν διχοτόμων δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματιζομένη γωνία, εἶναι ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

40) Παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, μεῖζον δὲ τοῦ ἡμίσεος ἀθροίσματος αὐτῶν.

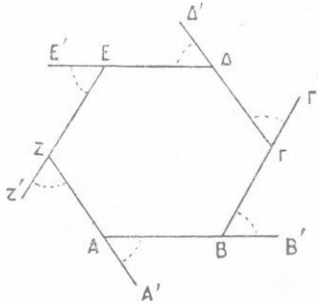


41) Ἐὰν τετραπλεύρου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἡ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἑνοῦσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῇ διχοτομούσῃ τὴν γωνίαν, ἣν αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ προεκτεινόμεναι σχηματίζουσιν.

42) Ἂν δύο γωνιῶν αἱ πλευραί εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, αἱ διχοτομοῦσαι αὐτὰς εὐθεῖαι εἶναι ἢ παράλληλοι ἢ κάθετοι.

43) Αἱ τὰς γωνίας τετραπλεύρου διχοτομοῦσαι εὐθεῖαι σχηματίζουσι τετράπλευρον, ἔχον τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικάς.

44) Ἂν αἱ πλευραὶ κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ προεκταθῶσιν, ἡ μὲν ΑΒ κατὰ τὴν διεύθυσιν ΑΒΒ', ἡ δὲ ἑπομένη ΒΓ κατὰ τὴν ΒΓΓ' καὶ ἐφεξῆς οὕτω, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, αἵτινες οὕτω θὰ σχηματισθῶσι, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθάς.



45) Αἱ δύο ἀπέναντι κορυφὰς παραλληλογράμμου μετὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνοῦσαι εὐθεῖαι, διαιροῦσι τὴν διὰ τῶν ἄλλων κορυφῶν διερχομένην διαγώνιον εἰς τρία μέρη ἴσα.

46) Ἂν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραγώνου σχηματισθῶσιν ἰσόπλευρα τρίγωνα κείμενα ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τῶν τριγώνων τούτων κορυφαὶ θὰ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

47) Ἂν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΒΓΔ=ΑΒΓ+ΑΔΓ.

48) Ἂν ἐν ῥόμβῳ ΑΒΓΔ, οὗ ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΓΕ=ΓΖ=ΓΒ, ἡ γωνία ΒΑΔ θὰ εἶναι τὸ τρίτον τῆς γωνίας ΕΓΖ.

49) Ἐν ῥόμβῳ ἡ δύο παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἀπόστασις ἰσοῦται τῇ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἀποστάσει.

50) Ἂν ἐκ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΑΑ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, αἱ τὰ σημεῖα Α', Γ' ἑνοῦσαι εὐθεῖαι μετὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΒ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

51) Ἂν ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος καὶ ἴση τῇ ΑΔ, ἡ εὐθεῖα ΕΓ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ διπλασία τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

52) Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἀγομένη ἐπὶ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Α κάθετος τέμνει τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΓ εἰς σημεῖα Β', Γ' τοιαῦτα, ὥστε $AB' = A\Gamma' = \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

53) Τί δὲ θὰ συμβαίνῃ, ἂν ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν παραπληρωματικὴν τῆς Α γωνίαν;

54) Ἂν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ σχηματισθῶσιν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τρίγωνα ἰσόπλευρα τὰ ΑΒΓ', ΒΓΑ', ΑΓΒ', νὰ δειχθῇ 1(τι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσαι, 2ον) ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας εἴς τι σημεῖον Ο, 3ον) ὅτι αἱ περὶ τὴν τομὴν Ο σχηματιζόμεναι ἓξ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ 4ον) ὅτι ἡ εὐθεῖα $OA' = OB + O\Gamma$.

55) Ἐὰν ἐν δεδομένῳ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ τὴν γωνίαν Β διχοτομοῦσα, τέμνουσα τὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, νὰ δειχθῇ 1ον) ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΔ καὶ 2ον) ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἠγμένη κάθετος σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ἴσην τῇ τοῦ τριγώνου γωνίᾳ Γ.

56) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν διχοτομοῦσα εὐθεῖα διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἀγομένων διαμέσου καὶ ὕψους τοῦ τριγώνου.

57) Ἂν ἐν ὀρθογωνίῳ καὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῶσιν ἐκ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ αἱ ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ΒΗ, ΓΗ, καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν ληφθῶσι $BE = HB$, $\Gamma Z = H\Gamma$, νὰ δειχθῇ 1ον) ὅτι ἡ γωνία Η εἶναι ὀρθή, 2ον) ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΗ εἶναι ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α διχοτομοῦσα καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, 3ον) ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Α, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ 4ον) ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΕ, ΒΖ ἀλληλοτομοῦνται ἐπὶ τῆς ΑΗ.

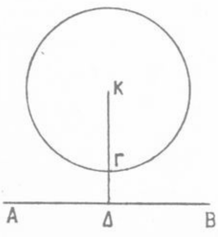
Διάφοροι θέσεις κύκλου πρὸς εὐθεῖαν.

Ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο (69), αἱ κύκλου πρὸς εὐθεῖαν δυναταὶ θέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς·

α΄) Ὅτε οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, β΄) ὅτε ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι καὶ γ΄) ὅτε ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια δύο μόνα ἔχουσι κοινὰ σημεῖα.

Θεώρημα.

134. *Ἂν κύκλος καὶ εὐθεῖα οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπόστημα εἶναι τῆς ἀκτῖνος μεῖζον.*

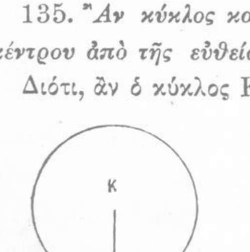


Διότι, ἂν ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ὁ τοῦ ἀποστήματος πούς Δ, σημεῖον ὢν τῆς εὐθείας, θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἄρα τούτου ἀπόστασις θὰ εἶναι τῆς ἀκτῖνος μείζων.

Θεώρημα.

135. *Ἂν κύκλος καὶ εὐθεῖα ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπόστημα εἶναι τῇ ἀκτῖνι ἴσον.*

Διότι, ἂν ὁ κύκλος Κ ἔχῃ μόνον τὸ σημεῖον Γ κοινὸν μετὰ τῆς



εὐθείας ΑΒ, τῶν λοιπῶν αὐτῆς σημείων ἐκτὸς τοῦ κύκλου ὄντων, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἑκάστου τῶν σημείων τούτων ἀπόστασις θὰ εἶναι τῆς ἀκτῖνος μείζων· κατ' ἀκολουθίαν ἐκ πασῶν τῶν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὴν ΑΒ ἀγομένων εὐθειῶν ἐλαχίστη θὰ εἶναι ἡ ΚΓ.

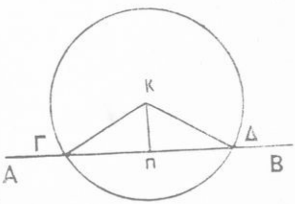
Λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΚΓ, ἡ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον ἀγομένη, εἶναι ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος (67)· ἀπόστημα ἄρα τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΚΓ.

Θεώρημα.

136. *Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπόστημα εἶναι τῆς ἀκτῖνος μικρότερον.*

Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἔχουσα μετὰ τῆς περιφερείας κοινὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

Αἱ εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα Γ,Δ ἀγόμεναι ἀκτῖνες ΚΓ, ΚΔ, ὡς ἴσαι, θὰ εἶναι πλάγιαι· κατ' ἀκολουθίαν ἡ κάθετος ΚΠ θὰ εἶναι ἑκάστης τούτων μικροτέρα· ὁ δὲ πούς αὐτῆς Π θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ ἐν τῷ μέσῳ τῆς χορδῆς ΓΔ (67).



Παρατήρησις. Τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι τὰ ἀντίστροφα καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ὁρισμός.

137. *Ἐφαπτομένη κύκλου* καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας ἔχουσα.

Πόρισμα.

138. *Δι' ἑκάστου σημείου περιφερείας μία μόνη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἄγεται.*

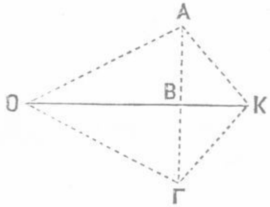
Διότι, ἵνα εὐθεῖά τις ἐφάπτηται κύκλου εἴς τι σημεῖον, πρέπει νὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀγομένης ἀκτῖνος· ἐπειδὴ δὲ μία μόνη εἰς τὸ ἄκρον εὐθείας κάθετος ἄγεται (56), ἕπεται ὅτι μία μόνη εἶναι καὶ ἡ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς περιφερείας ἐφαπτομένη.

Δύο κύκλων διάφοροι πρὸς ἀλλήλους θέσεις.

Θεώρημα.

139. *Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας τῶν κέντρων (διακέντρου) κείμενον, θὰ ἔχωσι καὶ τὸ συμμετρικὸν τούτου ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον εὐθεῖαν σημεῖον κοινὸν καὶ οὐδὲν ἄλλο. Ἡ δὲ τῶν κέντρων τούτων ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μείζων δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Ἔτι δὲ αἱ τοιαῦται περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας.*

Ἔστωσαν Ο καὶ Κ τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν καὶ Α κοινόν τι τούτων σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς τῆς εὐθείας τῶν κέντρων· λέγω 1ον ὅτι αἱ δύο αὗται περιφέρειαι θὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΟΚ.



Πρὸς τοῦτο ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΟΚ κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς ληφθῇ ἡ ΒΓ τῇ ΑΒ ἴση, τὸ σημεῖον Γ θὰ εἶναι τῶν δύο περιφερειῶν σημεῖον κοινόν. Διότι, ἡ μὲν ΟΓ, ὡς ἴση τῇ ἀκτῖνι ΟΑ τοῦ κύκλου Ο, εἶναι τούτου ἀκτίς, ἡ δὲ ΚΓ, ὡς ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΑ τοῦ κύκλου Κ, εἶναι τοῦ κύκλου τούτου ἀκτίς· τὸ σημεῖον ἄρα Γ εἶναι τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Κ κοινὸν σημεῖον.

Λέγω 2ον ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τούτων.

Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο, οἷον τὸ Δ, τοῦτο ἢ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΓ θὰ ἔτεμνεν ἑκατέραν περιφέρειαν εἰς τρία σημεῖα Α, Δ, Γ (69), ἢ θὰ ἔκειτο τὸ Δ ἐκτὸς τῆς ΑΓ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἄτοπον· διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ ἔκειτο μετὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄλλων δύο σημείων, οἷον τοῦ Α, εἰς ἴσην ἑκατέρωθεν τῆς ΟΚ ἀπόστασιν καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν ΟΚ καθέτου· κατ' ἀκολουθίαν θὰ συνέπιπτε μετὰ τοῦ ἑτέρου σημείου Γ.

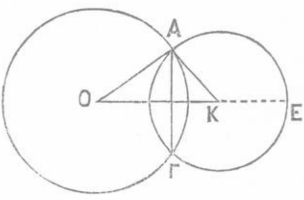
Ἀποδεικνύω 3ον ὅτι ἡ τῶν κέντρων ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μείζων δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν εἰς τὸ ἕτερον κοινὸν σημεῖον, οἷον τὸ Α, αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΚΑ, ἐκ τοῦ σχηματισθησομένου τριγώνου ΟΑΚ θὰ ἔχωμεν (78)

$$\text{ΟΚ} < \text{ΟΑ} + \text{ΚΑ} \text{ καὶ } \text{ΟΚ} > \text{ΟΑ} - \text{ΚΑ}.$$

Λέγω τέλος 4ον ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, ἤτοι μέρος τῆς ἑτέρας κεῖται ἐντὸς καὶ μέρος ἐκτὸς τῆς ἑτέρας.

Διότι ἡ περιφέρεια Κ δὲν δύναται νὰ κεῖται, οὔτε ὅλη ἐκτὸς τῆς Ο, διότι ἡ ΑΓ, ὡς κοινὴ χορδή, κεῖται ἐντὸς τῶν δύο περιφερειῶν, οὔτε ὅλη ἐντὸς τῆς Ο, διότι τὸ σημεῖον Ε, ἔνθα τέμνεται ὑπὸ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΚ, κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο,



διότι $\quad \text{ΟΚ} + \text{ΚΑ} > \text{ΟΑ},$

ἤτοι $\quad \text{ΟΚ} + \text{ΚΕ} > \text{ΟΑ}.$

Ὁ ρ ι σ μ ό ς.

140. Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν μόνον σημεῖον κοινόν, λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον· εἶναι δὲ δυνατὸν ἢ νὰ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός), ἢ νὰ κεῖται ἡ ἑτέρα ἐντὸς τῆς ἑτέρας (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός).

Θ ε ώ ρ η μ α.

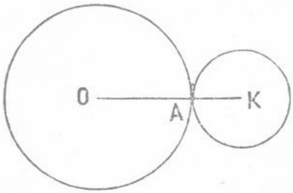
141. *Ἂν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ἡ τῶν κέντρων εὐθεῖα θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.*

Διότι, ἂν τὸ κοινὸν σημεῖον ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διακέντρου εὐθείας, αἱ δύο περιφέρειαι θὰ εἶχον καὶ ἕτερον κοινὸν σημεῖον (139), ὅπερ ἀδύνατον.

Σημείωσις. Ἡ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων, εἶναι τῶν δύο κύκλων κοινὴ ἐφαπτομένη.

Θεώρημα.

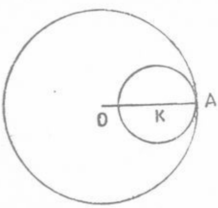
142. *Ἂν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων.*



Διότι, ἂν Α εἶναι τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων κύκλων Ο, Κ, ἐπειδὴ ἡ διάκεντρος εὐθεῖα ΟΚ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ τῆς ἐπαφῆς σημείου Α (141), θὰ εἶναι ΟΚ=ΟΑ+ΑΚ.

Θεώρημα.

143. *Ἂν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων.*

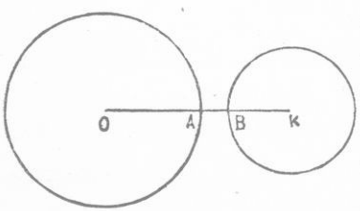


Διότι, ἂν Α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῶν ἐντὸς ἐφαπτομένων κύκλων Ο, Κ, ἐπειδὴ ἡ διάκεντρος εὐθεῖα θὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Α (141), θὰ εἶναι

ΟΚ=ΟΑ—ΚΑ.

Θεώρημα.

144. *Ἂν δύο περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσι, κεῖνται δὲ ἐκτὸς ἀλλήλων, ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων μείζων.*

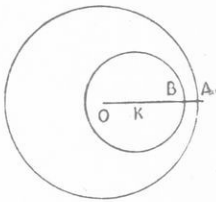


Διότι ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων ΟΑ, ΚΒ καὶ ἐκ τοῦ μέρους ΑΒ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων τοῦ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν κειμένου· εἶναι ἄρα

ΟΚ>ΟΑ+ΚΒ.

Θεώρημα.

145. *Ἂν δύο περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσι, κεῖται δὲ ἡ ἑτέρα ἐντὸς τῆς ἑτέρας, ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων μικροτέρα.*



Διότι ἡ τῶν ἀκτίνων διαφορὰ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς τῶν κέντρων ἀποστάσεως καὶ ἐκ τοῦ μέρους τῆς διακέντρου εὐθείας τοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν· εἶναι ἄρα ΟΚ$<$ΟΑ—ΚΒ.

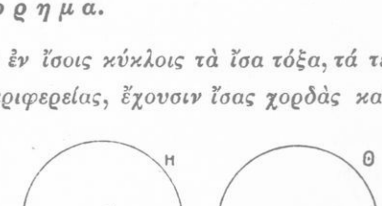
Παρατήρησις.

Τῶν θεωρημάτων τῶν διαφόρων θέσεων δύο κύκλων ἀληθεύουσι καὶ τὰ ἀντίστροφα· ἡ δὲ τούτων ἀλήθεια ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Περὶ τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου.

Θεώρημα.

146. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα, τά τε μείζονα καὶ τὰ ἐλάσσονα ἡμιπεριφερείας, ἔχουσιν ἴσας χορδὰς καὶ ἀντιστρόφως.*



Διότι, ἂν τὰ ἴσα τόξα ΑΒ, ΓΔ ἐφαρμόσωσι, τὰ τούτων ἄκρα θὰ συμπέσωσι [1] καὶ αἱ χορδαὶ ἄρα αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσι, διότι ἔκ τινος σημείου εἰς ἕτερον σημεῖον μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται (31,α').

Ἀντιστρόφως *ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα.*

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἴσων χορδῶν ΑΒ, ΓΔ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΟΓ, ΟΔ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ δύο τρίγωνα

1. Κατὰ τὸ ή τῆς 35

ΚΑΒ, ΟΓΔ, ἅτινα, ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, θὰ εἶναι ἴσα. Λοιπόν, ἂν τοὺς ἴσους κύκλους ἐφαρμόσωμεν οὕτως, ὥστε τὰ ἴσα τρίγωνα νὰ ἐφαρμόσωσι, καὶ τὰ δύο ἐλάσσονα ἡμιπεριφερείας τόξα ΑΕΒ, ΓΖΔ θὰ ἐφαρμόσωσι, διότι τὰ ἄκρα αὐτῶν θὰ συμπέσωσιν, ὄντα τῶν ἴσων τριγώνων κορυφαί· τὰ τόξα ἄρα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ὡσαύτως καὶ τὰ δύο μείζονα ἡμιπεριφερείας τόξα ΑΗΒ, ΓΟΔ εἶναι ἴσα.

Θεώρημα.

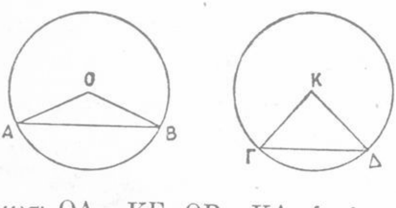
147. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων· καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἡ τῶν προτάσεων τούτων ἀλήθεια γίνεται ἀμέσως φανερὰ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων ἠγμένων ἴσων χορδῶν.

Θεώρημα.

148. *Ἐν ἴσοις κύκλοις τὸ μεῖζον τόξον ἔχει μείζονα χορδήν, τὸ δὲ μικρότερον μικροτέραν, ἐὰν τὰ τόξα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας.*

Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Κ, τὸ δὲ μικρότερον ἡμιπεριφερείας τόξον ΑΒ>ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι τῆς ΓΔ μείζων.



Διότι, ἂν ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΚΓ, ΚΔ καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΒ, ΓΔ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ δύο τρίγωνα ΟΑΒ, ΚΓΔ, ἅτινα θὰ ἔχωσι ΟΑ=ΚΓ, ΟΒ=ΚΔ, ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων, τὴν δὲ γωνίαν ΑΟΒ>ΓΚΔ, διότι ἡ ΑΟΒ βαίνει ἐπὶ μείζονος τόξου· ἡ πλευρὰ ἄρα ΑΒ εἶναι τῆς ΓΔ μείζων (94).

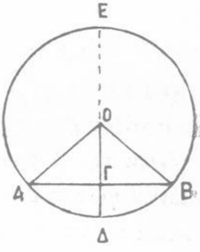
Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Θεώρημα.

149. *Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ἠγμένη εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ τὴν χορδὴν κάθετος, προεκβαλλομένη δὲ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκατέρου τῶν τόξων εἰς ἃ ἡ χορδὴ ὑποτείνει.*

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ, ἐξ οὗ τῆς κορυφῆς ἤχθη εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἡ εὐθεῖα ΟΓ· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΟΓ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, θὰ διαιρῇ δὲ τὴν γωνίαν ΑΟΒ εἰς δύο μέρη ἴσα (87 α').

Ἐὰν δὲ ἡ ΟΓ προεκβληθῇ ἑκατέρωθεν θὰ διαιρέσῃ τὸ τόξον ΑΔΒ εἰς τὰ δύο τόξα ΑΔ, ΔΒ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα, διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΔ, ΔΟΒ εἶναι ἴσαι (147)· θὰ διαιρέσῃ ἐπίσης τὸ τόξον ΑΕΒ εἰς τὰ δύο τόξα ΑΕ,ΕΒ, ἅτινα θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσα, διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΕ, ΕΟΒ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν.



Παρατήρησις. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ἠγμένη εὐθεῖα ἔχει τὰς ἑξῆς τέσσαρας ἰδιότητας·

1ον *Διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.* 2ον *Διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.* 3ον *Εἶναι ἐπὶ τὴν χορδὴν κάθετος.* 4ον *Διαιρεῖ ἑκάτερον τῶν τόξων εἰς ἃ ἡ χορδὴ ὑποτείνει εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ὑπάρχει καὶ δύο μόνας ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἔχουσα.

Περὶ τῶν ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

Ὁρισμοί.

150. *Γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ* λέγεται ἡ γωνία, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι τοῦ κύκλου χορδαί.

Γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν τμήματι καλεῖται ἡ γωνία, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ διέρχονται διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι τοῦ τμήματος βάσις.

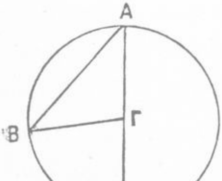
Εὐθύγραμμον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ, λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, οὗ αἱ κορυφαὶ πᾶσαι κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ *κύκλος* λέγεται τότε *περιγεγραμμένος περὶ τὸ σχῆμα*.

Εὐθύγραμμον σχῆμα περιγεγραμμένον περὶ κύκλον λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, οὗ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι τοῦ κύκλου ἐφαπτομένη. Ὁ δὲ *κύκλος* λέγεται τότε *ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ σχήματι*.

Θεώρημα.

151. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας τῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου βαινούσης*.

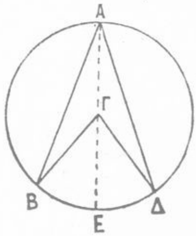
Ἐκ τῆς διαφόρου θέσεως τοῦ κέντρου ὡς πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις· διότι τὸ κέντρον δύναται νὰ κεῖται 1ον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν, 2ον μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ 3ον ἐκτὸς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας.



Ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ κέντρον Γ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΔ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία ΒΓΔ εἶναι τῆς ἐγγεγραμμένης ΒΑΔ διπλασία.

Διότι ἡ γωνία ΒΓΔ, ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι $Α+Β$ τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν (117)· ἀλλὰ $Α=Β$ (83)· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι $ΒΓΔ=2ΒΑΔ$ ἢ $ΒΑΓ=\frac{1}{2}ΒΓΔ$.

Ἔστω δεύτερον ὅτι τὸ κέντρον Γ κεῖται ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΔ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία ΒΓΔ εἶναι τῆς ΒΑΔ διπλασία.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΓΕ, θὰ ἔχωμεν

$$ΒΑΕ=\frac{1}{2}ΒΓΕ \text{ καὶ } ΕΑΔ=\frac{1}{2}ΕΓΔ.$$

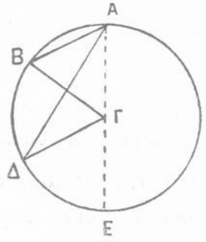
Ἐὰν δὲ αἱ ἰσότητες αὗται προστεθῶσι κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ

$$ΒΑΕ+ΕΑΔ=\frac{1}{2}(ΒΓΕ+ΕΓΔ), \text{ ἤτοι } ΒΑΔ=\frac{1}{2}ΒΓΔ.$$

Ἔστω τρίτον ὅτι τὸ κέντρον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΔ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία ΒΓΔ εἶναι τῆς ΒΑΔ διπλασία.

Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ἐκ τοῦ Α διάμετρος ΑΓΕ, θὰ ἔχωμεν

$$ΒΑΕ=\frac{1}{2}ΒΓΕ \text{ καὶ } ΔΑΕ=\frac{1}{2}ΔΓΕ.$$



Ἂν δὲ αἱ ἰσότητες αὗται ἀφαιρεθῶσι κατὰ μέλη, θὰ προκύψῃ

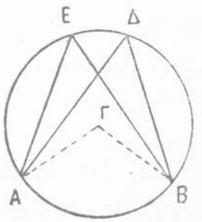
$$ΒΑΕ-ΔΑΕ=\frac{1}{2}(ΒΓΕ-ΔΓΕ),$$

ἤτοι

$$ΒΑΔ=\frac{1}{2}ΒΓΔ.$$

Πόρισμα 1ον.

152. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κύκλου ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις.*



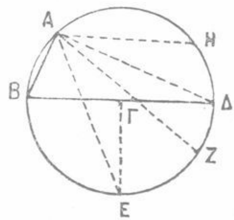
Διότι πᾶσαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, τοῦ κειμένου ἐκτὸς τοῦ τμήματος· εἶναι ἄρα ἑκάστη τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου βαινούσης ἐπικέντρου γωνίας.

Πόρισμα 2ον.

153. *Γωνία ἐγγεγραμμένη εἶναι ἢ ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα,*

ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ταύτης περιλαμβανόμενον τόξον εἶναι ἢ ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ ἢ μικρότερον αὐτῆς ἢ μεῖζον.

Διότι, 1ον ἐὰν τὸ τόξον ΒΕΔ εἶναι ἡμιπεριφέρεια ἡ χορδὴ ΒΔ θὰ εἶναι διάμετρος. Λοιπόν, ἂν ἡ ἀκτὶς ΓΕ ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην κάθετος, θὰ σχηματισθῶσι δύο ὀρθαὶ γωνίαι, ἡ ΒΓΕ καὶ ἡ ΕΓΔ· ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΑΕ, ἑκάστη τῶν σχηματισθησομένων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΒΑΕ καὶ ΕΑΔ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς· τὸ τούτων ἄρα ἄθροισμα θὰ ἰσῶται πρὸς ὀρθὴν γωνίαν.



2ον. Ἂν τὸ τόξον ΒΕΖ εἶναι τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΕΔ μικρότερον, ἡ γωνία ΒΑΖ, ὡς μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΒΑΔ, θὰ εἶναι ὀξεῖα.

3ον. Ἂν τὸ τόξον ΒΕΗ εἶναι τῆς ἡμιπεριφερείας μεῖζον, ἡ γωνία ΒΑΗ, ὡς μείζων τῆς ὀρθῆς ΒΑΔ, θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

Παρατηρήσεις.

154. Ἐκ τοῦ προηγουμένου πορίσματος προκύπτει·

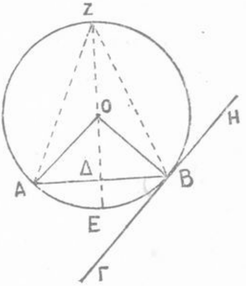
1ον. ***Ὅτι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν ἐχόντων, ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν κοινὴν ὑποτείνουσαν.***

2ον. ***Ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν μὲν βάσιν κοινήν, τὰς δὲ τῆς κορυφῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, εἶναι ἐγγεγραμμένα ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι, τῷ ἔχοντι χορδὴν τὴν κοινὴν βάσιν.***

Θεώρημα.

155. ***Ἐν κύκλῳ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ ἐφαπτομένης καὶ χορδῆς ἐκ τοῦ τῆς ἐπαφῆς σημείου ἠγμένης, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ἠγμένων ἀκτίνων.***

Ἔστω ἡ ὀξεῖα γωνία ΑΒΓ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ σημείου Β ἠγμένων ἐφαπτομένης ΓΒΗ καὶ χορδῆς ΒΑ· λέγω ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΟΒ.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ Ο ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΖΟΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΔ ἡ γωνία ΔΟΒ θὰ εἶναι τῆς ΟΒΑ συμπληρωματική. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (135) καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι τῆς ΟΒΑ συμπληρωματική· ὥστε ἡ ΑΒΓ=ΔΟΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ ΟΔ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΑΟΒ εἰς δύο μέρη ἴσα (87, α')· λοιπὸν εἶναι ΑΒΓ=ΔΟΒ=$\frac{1}{2}$ΑΟΒ.

Ἐπίσης ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΖΒ βαινούσης κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΗ καὶ ἡ γωνία ΖΟΒ (ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ) εἶναι παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΟΒ, θὰ εἶναι

ἡ γωνία ΑΒΗ=ΒΟΖ=$\frac{1}{2}$ κυρτῆς γωνίας ΑΟΒ.

Πόρισμα.

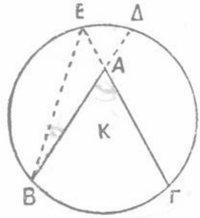
156. *Ἐν κύκλῳ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ τῆς εἰς τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἴση τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ τῇ βαινούσῃ ἐπὶ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου τόξου.*

Διότι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΖΒ ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τῆς ἐπικέντρου ΑΟΒ (151)· καὶ ἄρα ΑΒΓ=ΑΖΒ.

Θεώρημα.

157. *Πᾶσα γωνία, ἧς ἡ κορυφὴ κεῖται ἐντὸς κύκλου, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν τῶν βαινουσῶν ἐπὶ*

τῶν τόξων τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς δεδομένης γωνίας καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

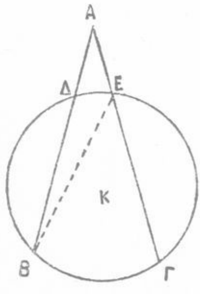


Ἔστωσαν ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς Α ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἂν προεκταθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῆς πέραν τῆς κορυφῆς καὶ μέχρι τῶν σημείων Δ καὶ Ε τῆς περιφερείας, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ χορδὴ ΒΕ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΑΕ θὰ ἔχωμεν (117)

ΒΑΓ=ΒΕΓ+ΕΒΔ.

Θεώρημα.

158. *Πᾶσα γωνία, ἧς ἡ κορυφὴ κεῖται ἐκτὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ τέμνουσι τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν τῶν βαινουσῶν ἐπὶ τῶν δύο τόξων τῆς περιφερείας τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.*

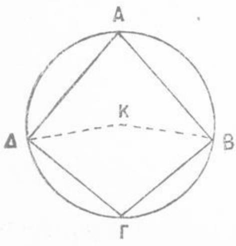


Ἔστωσαν ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ, ἧς ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τέμνουσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Β,Δ καὶ Γ,Ε.

Ἂν ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΒΕ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, θὰ ἔχωμεν (117)

ΒΕΓ=ΒΑΕ+ΑΒΕ

καὶ ἄρα ΒΑΓ=ΒΕΓ—ΔΒΕ.



Θεώρημα.

159. *Παντὸς ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς.*

Ἔστω τὸ ἐν κύκλῳ Κ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΚΔ, ἡ μὲν γωνία Α θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κοίλης ἐπικέντρου γωνίας ΒΚΔ, ἡ δὲ γωνία Γ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΒΚΔ (151)· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἐπικέντρων γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς (61), ἕπεται ὅτι Α+Γ=2$^{ὀρθ.}$, κατ' ἀκολουθίαν καὶ Β+Δ=2$^{ὀρθ.}$.

Κανονικὰ πολύγωνα.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

160. *Κανονικὸν πολύγωνον* καλεῖται τὸ πολύγωνον, οὗ καὶ αἱ πλευραὶ πᾶσαι καὶ αἱ γωνίαι πᾶσαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

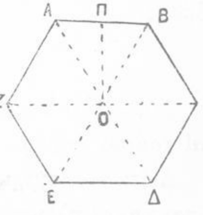
Κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται ἡ *κυρτὴ* πολυγωνικὴ γραμμή, ἧς καὶ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι πᾶσαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Θ ε ώ ρ η μ α.

161. *Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ ἐν κύκλῳ καὶ νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον.*

Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ.

Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ πολυγώνου διχοτομοῦσαι εὐθεῖαι, αὗται θὰ τμηθῶσι, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $\frac{A}{2}$ καὶ $\frac{B}{2}$, ἃς αὗται μετὰ τῆς ΑΒ σχηματίζουσιν, εἶναι τῶν δύο ὀρθῶν μικρότερον (111)· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι τῆς ὀρθῆς μικροτέρα. Λέγω δὲ ὅτι ἡ τούτων τομή, ἥτις ἔστω Ο, ἀπέχει ἴσον καὶ τῶν κορυφῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιστραφῇ περὶ τὴν ΟΒ, ἡ μὲν ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, διότι ἡ ΒΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διότι ΒΑ=ΒΓ· κατ' ἀκολουθίαν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΟΒ· ἡ γωνία ἄρα ΒΓΟ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ. Ὡσαύτως καὶ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΔΟΓ καὶ ἐφεξῆς οὕτως· κατ' ἀκολουθίαν πάντα ταῦτα τὰ τρί-



γωνα εἶναι ἴσα· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἰσοσκελῆ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὰς βάσεις γωνιῶν, συνάγεται ὅτι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ =ΟΖ. Ἡ περιφέρεια ἄρα ἡ ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο ἀκτῖνα δὲ τὴν ΟΑ θὰ διέρχηται διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου· τὸ πολύγωνον ἄρα τοῦτο εἶναι ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ ἐγγεγραμμένον.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ,.. τὰ ἐκ τοῦ Ο ὕψη εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο ἀκτῖνα δὲ ἓν ἐκ τῶν ὑψῶν τούτων, οἷον τὸ ΟΠ, θὰ ἐφάπτηται πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· τὸ κανονικὸν ἄρα τοῦτο πολύγωνον εἶναι περὶ τὸν κύκλον τοῦτον περιγεγραμμένον.

Σημείωσις. Ἐν κανονικῷ πολυγώνῳ τὸ μὲν κοινὸν κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καλεῖται *κέντρον* τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ τοῦ κέντρου τούτου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου ἀπόστασις καλεῖται τοῦ πολυγώνου *ἀπόστημα*, ἡ δὲ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ λέγεται *κεντρικὴ* τοῦ *πολυγώνου γωνία*.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ἑκάστη αὐτῶν, ἐὰν ὁ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀριθμὸς εἶναι μ, ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{\mu}$ μέρος τῶν 4 ὀρθῶν, τ. ἔ. πρὸς τὰ $\frac{4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς.

Θεώρημα.

162. *Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα τόξα, ἀχθῶσι δὲ αἱ τούτων χορδαί, θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν πολύγωνον.*

Διότι τοῦ σχηματισθησομένου πολυγώνου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ αἱ πλευραί, ὡς ἴσων τόξων χορδαὶ (146), καὶ αἱ γωνίαι, ὡς γωνίαι ἐγγεγραμμέναι ἐν τῇ περιφερείᾳ καὶ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι (152). Εἶναι δὲ ἴσα τὰ τόξα ἐφ' ὧν αἱ γωνίαι βαίνουσι, διότι ἕκαστον τούτων προκύπτει ἐκ τῆς ὅλης περιφερείας ἂν ἀπὸ ταύτης ἀφαιρεθῶσι δύο τῶν ἴσων τόξων, εἰς ἃ αὕτη διηρέθη.

Θεώρημα.

163. *Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα τόξα, ἀχθῶσι δὲ*

αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας, θὰ σχηματισθῇ περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον.

Ἔστω ὅτι ἡ περιφέρεια Ο διῃρέθη εἰς ἴσα τόξα καὶ ὅτι ΖΗΘΙΚ εἶναι τὸ ὡς εἴρηται κατασκευαζόμενον περιγεγραμμένον πολύγωνον· λέγω ὅτι τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

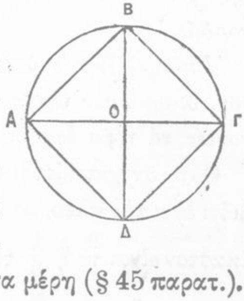
Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ (146), θὰ σχηματισθῶσι τρίγωνα ἴσα, διότι θὰ ἔχωσιν ἴσας μίαν τῶν πλευρῶν καὶ τὰς ταύτῃ προσκειμένας γωνίας (155,81)· θὰ ἦναι ἄρα ἴσαι αἱ γωνίαι Ζ, Η, Θ, Ι, Κ· ἐπειδὴ δὲ τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα εἶναι καὶ ἰσοσκελῆ, θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΗ, ΗΒ, ΒΘ, ΘΓ, . . ., κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῶν ἴσων πλευρῶν τῶν τριγώνων.

Λοιπὸν τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ εἶναι κανονικόν.

Παρατηρητέον ἐπίσης ὅτι, ἂν ἐκ τῶν μέσων τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θὰ σχηματίσωσι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν.

Σημείωσις. Ἂν ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ δύο πολύγωνα εἶναι τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον τὸ δὲ περιγεγραμμένον, ἐγγίζωσι δὲ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα, ταῦτα καλοῦνται *ἀντιστοιχοῦντα.*

Θεώρημα.



164. *Τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἰσὶ διάμετροι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.*

Διότι, ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ δεδομένῳ κύκλῳ Ο τετράγωνον, αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τούτου εἰσὶ διάμετροι, καθὸ διαιροῦσαι τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα μέρη (§ 45 παρατ.).

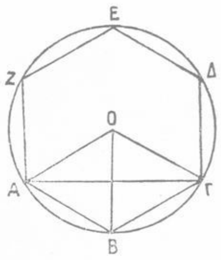
Εἰσὶ δὲ καὶ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ἐφεξῆς ἐπικέντρων γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ...

Θεώρημα.

165. *Τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.*

Ὑποτεθείσθω ΑΒΓΔΕΖ τὸ ἐν τῷ δεδομένῳ κύκλῳ Ο ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.

Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν



τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, διότι ΟΑ=ΟΒ, ἑκατέρα τούτων θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΟΒ, καθὸ ἰσογώνιον, θὰ εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ὅθεν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶναι τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου ἴση.

Πόρισμα.

166. *Ἵνα ἐν δοθέντι κύκλῳ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἓξ τόξα ἐφεξῆς, ἔχοντα ἕκαστον τὴν χορδὴν ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου καὶ ἄγομεν τὰς τούτων χορδάς.*

Ἐπίσης, ἵνα ἐν δοθέντι κύκλῳ ἐγγράψωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη· εἶτα δὲ λαμβάνοντες τὰ τόξα ἐφεξῆς ἀνὰ δύο ἄγομεν τὰς τούτων χορδάς.

Οὕτω σχηματίζεται τρίγωνον, οἷον τὸ ΑΓΕ, ὅπερ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, ὡς χορδὰς ἴσων τόξων (146), ὧν ἕκαστον εἶναι $\frac{2}{6}$ ἢ $\frac{1}{3}$ τῆς περιφερείας.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1). Δύο ἴσαι χορδαὶ κύκλου ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσον, δύο δὲ ἄνισοι ἀπέχουσιν ἄνισον· ἡ δὲ μικροτέρα εἶναι ἡ μᾶλλον τοῦ κέντρου ἀπέχουσα.

2). Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωσι κύκλον, τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα τόξα εἶναι ἴσα.

3). Διὰ σημείου κειμένου ἐντὸς κύκλου δύναται νὰ ἀχθῇ χορδή, ἥτις νὰ εἶναι ἢ ἡ μεγίστη ἢ ἡ ἐλαχίστη τῶν διὰ τοῦ σημείου τούτων διερχομένων χορδῶν.

4). Ἂν διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς δύο κύκλων ἀχθῇ τέμνουσα, αἱ εἰς τὰ ἄκρα τῆς τεμνούσης ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι θὰ εἶναι παράλληλοι.

5). Ἂν διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν τεμνομένων ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι, τὰ ἄκρα τούτων καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον τῆς τομῆς θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

6). Ἂν διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἀχθῶσι δύο χορδαί, αἱ τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν τούτων ἑνοῦσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

7). Παντὸς ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, οὗ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς εἶναι ἄρτιος, τὸ τῶν περιττῆς τάξεως γωνιῶν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀρτίας τάξεως γωνιῶν (ὡς πρώτη γωνία δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε αὐτοῦ γωνία).

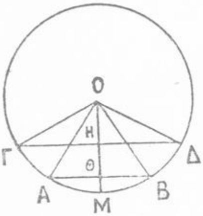
8). Ἂν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἀχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη αὐτῶν κατὰ σημεῖα διακεκριμένα, αἱ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν μετὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης ἑνοῦσαι εὐθεῖαι εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι.

9). Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ δοθέντος.

10). Ἂν τρίγωνόν τι, οἷον τὸ ΑΒΓ, εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ, ἐκ δὲ τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου ΒΓ ἀχθῇ χορδὴ τῇ ΑΓ παράλληλος, ἡ χορδὴ αὕτη θὰ εἶναι τῇ ΑΒ ἴση.

11). Ἂν διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν, ἀχθῇ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ τῶν κέντρων, τῆς παραλλήλου ταύτης τὸ μέρος τὸ περιλαμβανόμενον ἐντὸς τῶν δύο κύκλων θὰ εἶναι τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων διπλάσιον.

12). Ἂν δύο γωνίαι ἐπίκεντροι, οἷον αἱ ΑΟΒ, ΓΟΔ, εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχωσι δὲ τὰς πλευρὰς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, ἑκατέρα δὲ τούτων θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἑτέρας.



13). Ἂν δύο ὁμόκεντροι κύκλοι τέμνωσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, αἱ τὰς τομὰς ἑνοῦσαι χορδαὶ τῶν κύκλων θὰ εἶναι ἀλλήλαις παράλληλοι.

14). Ἂν τρεῖς περιφέρειαι, διερχόμεναι ἀντιστοίχως διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν τριγώνου, τέμνωνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ διέρχωνται καὶ αἱ τρεῖς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

15). Πᾶν ἰσόπλευρον τραπέζιον ἐγγράφεται ἐν κύκλῳ.

16). Αἱ τῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου διχοτόμοι τεμνόμεναι σχηματίζουσι τετράπλευρον, ὅπερ ἐγγράφεται εἰς κύκλον.

Συνεπῶς ῥόμβος αἱ τὸ ῥόμ. σχέδιά δὲν ἐγγράφονται

17). Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον δύο ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς ἐγγράφεται εἰς κύκλον.

18). Ἂν εἰς τὰ ἄκρα δύο χορδῶν κύκλου καθέτως τεμνομένων ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι, θὰ σχηματισθῇ τετράπλευρον, ὅπερ ἐγγράφεται εἰς κύκλον.

19). Ἂν γωνία τις τριγώνου εἶναι ἴση τῷ ἡμίσει ὀρθῆς γωνίας, αἱ τοὺς πόδας τῶν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ταύτης ἠγμένων ὑψῶν μετὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς ἑνοῦσαι εὐθεῖαι εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι.

20). Αἱ ἐκ τῶν ἄκρων διαμέτρου ἀγόμεναι παράλληλοι χορδαὶ εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι, ἡ δὲ τὰ ἄκρα αὐτῶν ἑνοῦσα εὐθεῖα εἶναι διάμετρος.

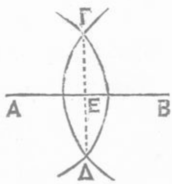
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ἐν τῷ βιβλίῳ τῷδε θὰ πραγματευθῶμεν τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων διὰ τῆς κατασκευῆς περιφερειῶν, ἃς γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου, καὶ εὐθειῶν, ἃς ἄγομεν ποιούμενοι χρῆσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος.

Πρόβλημα 1ον.

167. *Δεδομένης εὐθείας ΑΒ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον.*

Πρὸς τοῦτο γράφομεν δύο περιφερείας ἐχούσας κέντρα μὲν τὰ ἄκρα Α,Β τῆς εὐθείας, ἀκτῖνας δὲ ἴσας ἀλλήλαις καὶ μείζονας τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ (τοῦθ' ὅπερ εὔκολον νὰ γίνῃ). Αἱ δύο αὗται περιφέρειαι θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τὰ Γ καὶ Δ (139), ἡ δὲ ταῦτα ἑνοῦσα εὐθεία ΓΔ θὰ εἶναι ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ κάθετος.

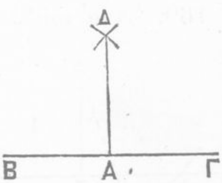


Διότι τὸ σημεῖον Γ, ἴσον ἀπέχον τοῦ Α καὶ τοῦ Β, κεῖται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καθέτου (75)· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου.

Πρόβλημα 2ον.

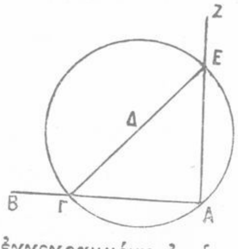
168. *Διὰ δεδομένου σημείου Α ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΒΓ κειμένου, νὰ ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κάθετος.*

Πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ διαβήτου λαμβάνομεν τὰ ἴσα τμήματα ΑΒ, ΑΓ καὶ μετὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ ὡς κέντρων καὶ ἀκτῖνος μείζονος τῆς ΑΒ γράφομεν δύο τόξα, τέμνοντα ἄλληλα εἰς τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



Διότι τὸ σημεῖον Δ, ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Α τῆς ΒΓ ὑψουμένης καθέτου (75).

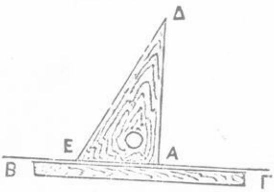
Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Α κεῖται εἰς τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας ΒΑ, δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ προεκταθῇ ἡ ΒΑ πέραν τοῦ Α, τὴν ἐκ τοῦ σημείου τούτου Α ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·



Γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον σημεῖόν τι Δ ἐκτὸς τῆς ΑΒ κείμενον, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΑ· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς δεύτερον σημεῖον, ἔστω τὸ Γ, ἐξ οὗ ἄγομεν τὴν διάμετρον ΓΔΕ καὶ εἶτα τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος, διότι ἡ γωνία ΓΑΕ, ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν ἡμικυκλίῳ, εἶναι ὀρθὴ (153).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν ἐπίσης, διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος, ὡς ἑξῆς·

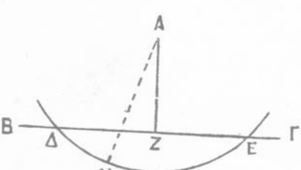
Ἐφαρμόζομεν τὴν ἑτέραν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ



κανόνος, οὗ μίαν τῶν ἀκμῶν ἐφαρμόζομεν προηγουμένως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ. Οὕτω δὲ σύρομεν τὸν γνώμονα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος μέχρις οὗ ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας κορυφὴ ἔλθῃ εἰς τὸ Α· εἶτα δὲ ἄγομεν τὴν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος ὁριζομένην εὐθεῖαν ΑΔ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι ἡ γωνία ΕΑΔ εἶναι ὀρθή.

Πρόβλημα 3ον.

169. *Ἀπὸ τοῦ δεδομένου σημείου Α, τοῦ ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας ΒΓ κειμένου, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.*

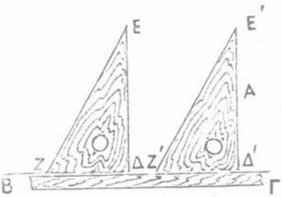


Πρὸς τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ σημείου Η κειμένου πρὸς τὸ ἕτερον τῆς ΒΓ μέρος.

Ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμῃ τὴν ΒΓ (αὐξηθεῖσαν ἂν εἶναι ἀνάγκη) εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τὸ Δ καὶ τὸ Ε (136). Ἂν δὲ ἀχθῇ, διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος (167), ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΔΕ ἐπ' αὐτὴν κάθετος, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ κέντρου Α (149).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος ὡς ἑξῆς·

Ἐφαρμόζεται ἀκμή τις τοῦ κανόνος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, ἡ δὲ ἑτέρα τοῦ γνώμονος κάθετος πλευρὰ ΖΔ ἐπὶ τοῦ κανόνος διατηρουμένου ἀκινήτου. Εἶτα δὲ ὁ γνώμων σύρεται κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ κάθετος πλευρὰ ΔΕ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α, καὶ ἄγεται ἡ ὑπὸ τῆς καθέτου ταύτης ὁριζομένη εὐθεῖα Δ'ΑΕ', ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι ἡ γωνία Ζ'Δ'Α εἶναι ὀρθή.

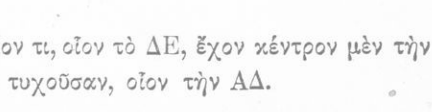


Πρόβλημα 4ον.

170. *Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ Α, ἔχουσα πλευρὰν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ ἕτερον αὐτῆς ἄκρον Β.*

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τόξον τι, οἷον τὸ ΔΕ, ἔχον κέντρον μὲν τὴν κορυφὴν Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν τυχοῦσαν, οἷον τὴν ΑΔ.

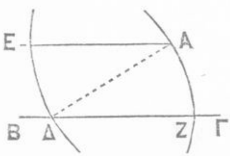
Εἶτα δὲ γράφομεν τόξον τι, οἷον τὸ ΖΗ, ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Β, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΑΔ· οὕτω δέ, ἂν ληφθῇ τὸ τόξον ΖΘ, τὸ ἔχον χορδὴν ἴσην τῇ ΔΕ, ἀχθῇ δὲ ἡ ἀκτὶς ΒΘ, θὰ σχηματισθῇ ἡ γωνία ΖΒΘ, ἥτις θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΑΕ. Διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐπίκεντροι ἐν ἴσοις κύκλοις καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων (147).



Πρόβλημα 5ον.

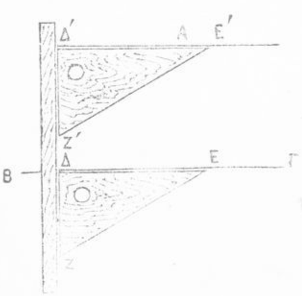
171. *Διὰ δεδομένου σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ ΒΓ.*

Πρὸς τοῦτο μετὰ τοῦ σημείου Α ὡς κέντρου γράφεται τόξον τέμνον τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Δ. Εἶτα δὲ γράφεται τόξον ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Δ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΑ, τέμνον δὲ τὴν ΒΓ κατὰ σημεῖόν τι Ζ· λαμβάνεται δὲ τὸ τόξον ΔΕ=ΑΖ, καὶ ἄγεται ἡ ΑΕ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΔ, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΔΖ καὶ ΔΑΕ εἶναι ἴσαι (147), κατ' ἀκολουθίαν αἱ ΒΓ καὶ ΑΕ εἶναι παράλληλοι.

Διὰ τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος λύεται τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

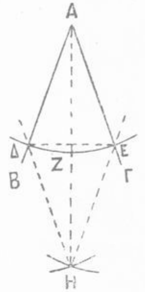


Ἐφαρμόζεται ἐπὶ μὲν τῆς εὐθείας ΒΓ ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ ΔΕ γνώμονος, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας τούτου καθέτου πλευρᾶς ΔΖ κανών. Μετὰ τοῦτο σύρεται ὁ γνώμων κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος μέχρις οὗ ἡ πρώτη τοῦ γνώμονος πλευρὰ ΔΕ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α. Τότε ἄγεται ἡ ὑπὸ τῆς καθέτου ταύτης ὁριζομένη εὐθεῖα Δ'Ε', ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ εὐθεῖαι Δ'Ε' καὶ ΒΓ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος, εἶναι παράλληλοι (104).

Πρόβλημα 6ον.

172. *Δεδομένη γωνία, οἷον ἡ ΒΑΓ, καὶ δεδομένον τόξον, οἷον τὸ ΔΕ, νὰ διαιρεθῶσιν ἑκάτερα εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Πρὸς τοῦτο μετὰ τοῦ σημείου Α ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνος οἱασδήποτε γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμῃ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς δύο σημεῖα ἔστω τὰ Δ καὶ Ε· εἶτα δὲ μετὰ τῶν Δ καὶ Ε ὡς κέντρων καὶ μετὰ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, μείζονος τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας ΔΕ, γράφομεν δύο τόξα τέμνοντα ἄλληλα εἰς τὸ Η, ἄγομεν δὲ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΗ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.



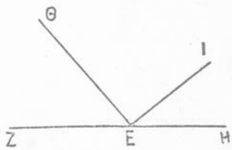
Διότι, ἂν ἀχθῶσιν ἡ ΔΗ καὶ ἡ ΕΗ, τὰ δύο τρίγωνα, ἅτινα θὰ σχηματισθῶσι, τὰ ΑΔΗ, ΑΕΗ, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, θὰ εἶναι ἴσα (82).

Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΔΑΗ καὶ ΗΑΕ, ὡς κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΗ, ΕΗ, εἶναι ἴσαι.

Ἂν δὲ ζητῆται νὰ διαιρεθῇ τὸ τόξον ΔΕ εἰς δύο μέρη ἴσα, ἄγομεν τὴν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ κάθετον· διότι ἡ κάθετος αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου (149).

Πρόβλημα 7ον.

173. *Δεδομένων τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.*

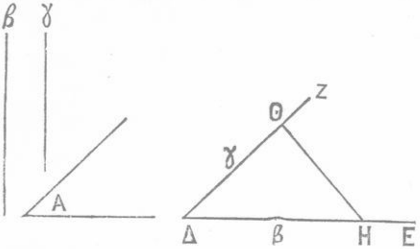


Πρὸς τοῦτο, ἂν ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΖΗ καὶ εἴς τι σημεῖον αὐτῆς, οἷον τὸ Ε, σχηματισθῶσι, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, ἡ γωνία ΖΕΘ=Α καὶ ἡ γωνία ΗΕΙ=Β, ἡ γωνία ΘΕΙ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία. Διότι ἡ γωνία αὕτη μετὰ τῶν δύο δεδομένων Α καὶ Β ἔχει ἄθροισμα δύο ὀρθάς (60).

Πρόβλημα 8ον.

174. ***Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.***

Ἔστωσαν β, γ αἱ δεδομέναι πλευραὶ καὶ Α ἡ δεδομένη γωνία. Ἐπὶ εὐθείας ΔΕ σχηματίζεται ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ Α, λαμβάνεται δὲ εἶτα ἐπὶ μὲν τῆς ΔΕ ἡ ΔΗ=β, ἐπὶ δὲ τῆς ΔΖ ἡ ΔΘ=γ καὶ ἄγεται ἡ ΘΗ, οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΗΘ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.



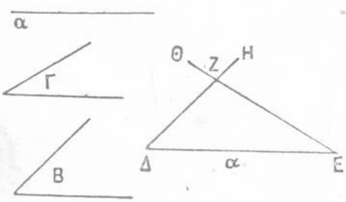
Πάντα δὲ τὰ οὕτω κατασκευαζόμενα τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· διότι ἔχουσιν ἴσας δύο πλευρὰς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην (80).

175

Π ρ ό β λ η μ α 9ον.

175. *Δεδομένων μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι θὰ εἶναι ἢ προσκείμεναι τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, ἢ ἡ ἑτέρα μὲν αὐτῶν προσκειμένη ἡ ἑτέρα δὲ ἀντικειμένη· ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει εὑρίσκομεν τὴν τρίτην γωνίαν (173), καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς δύο τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ προσκειμένας γωνίας.



Τούτου οὕτως ἔχοντος, λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ α καὶ σχηματίζομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΔΕ, δύο γωνίας, τὴν ΕΔΗ, ἔχουσαν πλευρὰν μὲν τὴν ΔΕ κορυφὴν δὲ τὸ Δ, ἴσην δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν δεδομένων, τῇ Β, καὶ τὴν ΔΕΘ, ἔχουσαν πλευρὰν μὲν τὴν ΕΔ, κορυφὴν δὲ τὸ Ε, ἴσην δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν δεδομένων γωνιῶν, τῇ Γ.

Αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΗ, ΕΘ θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Ζ (111), τὸ δὲ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΖΔΕ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

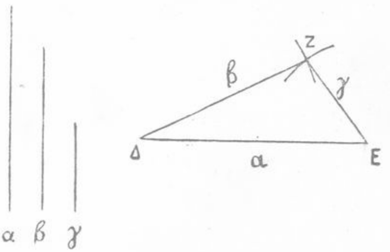
Πάντα δὲ τὰ οὕτω σχηματιζόμενα μετὰ τῶν αὐτῶν στοιχείων τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· διότι ἔχουσιν ἴσην μίαν πλευρὰν καὶ τὰς παρὰ ταύτῃ προσκειμένας γωνίας ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (81).

Πρόβλημα 10ον.

Σακελλ. σ. 82
Χατζηδάκι σ. 71
Νικολάου σ. 71

176. *Ἐκ τριῶν δεδομένων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν α, β, γ εἶναι αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι, λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην τῇ α, καὶ γράφομεν τόξον ἔχον κέντρον μὲν τὸ Δ ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ β· ὡσαύτως γράφομεν τόξον, ἔχον κέντρον μὲν τὸ Ε ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ γ· τὸ τόξον τοῦτο θὰ τέμῃ τὸ πρῶτον εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ἂν δὲ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΔΖ, ΕΖ θὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ὅπερ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον (82).



Πάντα δὲ τὰ οὕτω σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· διότι ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ (82).

Περιορισμός. Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μείζων τῶν δεδομένων εὐθειῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἤ, τοῦθ' ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ μικροτέρα αὐτῶν νὰ εἶναι μείζων τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

Πρόβλημα 11ον.

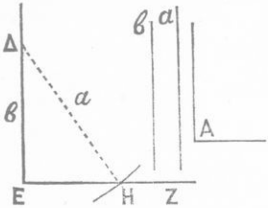
177 Νὰ κατασκ- τὸ τρίγ- ἐκ δύο πλευρ- καὶ μιᾶς γωνίας ἢ ἐκ μιᾶς γωνίας καὶ δύο πλευρῶν

177. *Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τριγώνου καὶ τῆς γωνίας Α, τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α, νὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ διακρίνονται δύο περιπτώσεις·

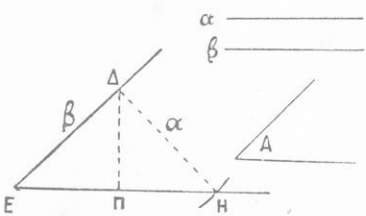
1ον). Ἂν ἡ γωνία Α εἶναι ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΔΕΖ ἴσην τῇ Α καὶ λαμβάνομεν τὴν ΕΔ ἴσην τῇ β, καὶ γράφομεν, μετὰ τοῦ Δ ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνος ἴσης τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ α, τόξον τέμνον τὴν ΕΖ εἰς τι σημεῖον, τὸ Η (136)·

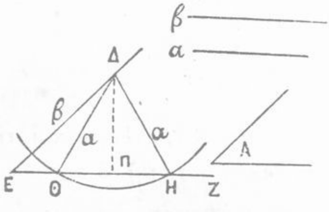
οὕτω δέ, ἀγομένης τῆς ΔΗ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΗ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ πλευρὰ α πρέπει νὰ εἶναι μείζων τῆς β, διότι ἡ γωνία Α, οὖσα ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, εἶναι ἡ μεγίστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ ἀπέναντι ταύτης πλευρὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν πλευρῶν (93).

2ον). Ἂν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, θὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, καὶ ἂν μὲν ἡ α εἶναι ἴση τῇ β ἢ μείζων ~~τῆς β~~, θὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΗ, ὅπερ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον, ἂν δὲ ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β, τὸ μετὰ τοῦ Δ ὡς κέντρου καὶ ἀκτῖνος τῆς ΔΗ=α γραφόμενον τόξον θὰ τέμνῃ μὲν τὴν πλευρὰν ΕΖ εἰς δύο σημεῖα, τὰ Η καὶ Θ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ε, ἂν ἡ πλευρὰ εἶναι μείζων τῆς ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἀγομένης καθέτου ΔΠ (136, παρατ.), ὅτε θὰ σχηματισθῶσι τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΗ καὶ ΔΕΘ, ἅτινα θὰ λύσωσι τὸ πρόβλημα, θὰ ἐφάπτηται δὲ τὸ γραφόμενον τόξον τῆς ΕΖ εἰς τὸ σημεῖον Π, ἂν ἡ πλευρὰ α εἶναι ἴση τῇ καθέτῳ ΔΠ, ὅτε τὸ τρίγωνον ΔΕΠ θὰ λύῃ τὸ πρόβλημα· θὰ εἶναι δὲ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον, ἂν ἡ πλευρὰ α εἶναι καὶ τῆς ΔΠ μικροτέρα, διότι τὸ γραφόμενον τόξον δὲν θὰ τέμῃ τὴν ΕΖ.





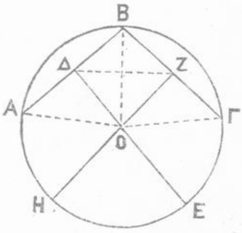
διὰ τι ~~μὴν~~ μείζονα τῆς β εἶναι ἡ προηγηθεῖσα περιπτώσεις ἐσφαλμένως ἀνεγράφη ...

Πρόβλημα 12ον.

178. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων.*

Περιορισμός. Τὰ δεδομένα σημεῖα πρέπει νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (69).

Πρὸς τοῦτο ἂν ἀχθῶσιν αἱ τὰ δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ ἑνοῦσαι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ἐκ μὲν τοῦ Δ, ὅπερ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ, ἀχθῇ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΔΕ, ἐκ δὲ τοῦ Ζ, μέσου τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΖΗ, λέγω ὅτι αἱ κάθετοι αὗται ἱκανῶς αὐξανόμεναι θὰ τέμνωνται εἴς σημεῖόν τι, οἷον τὸ Ο, καὶ ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΟΑ, θὰ διέρχηται διὰ τῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ.



Ἐπειδὴ αἱ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΖΗ καὶ τῆς ἀγομένης εὐθείας ΔΖ σχηματιζόμεναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ΖΔΕ καὶ ΔΖΗ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι μέρος ὀρθῆς, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΖΗ θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο (111). Ἐπειδὴ δὲ ΟΑ=ΟΒ καὶ ΟΒ=ΟΓ, ἕπεται ὅτι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ· κατ' ἀκολουθίαν ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΟΑ θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ. Εἶναι δὲ ἀδύνατον ἄλλη περιφέρεια νὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, διότι δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο (139).

Πόρισμα 1ον.

179. *Τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου εὑρίσκεται ἂν ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου τρία σημεῖα καὶ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης περιφερείας.*

Πόρισμα 2ον.

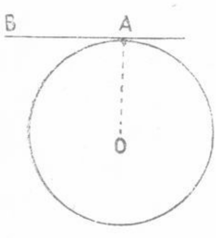
180. *Αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τριγώνου ἀγόμεναι ἐπὶ*

τὰς πλευρὰς κάθετοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

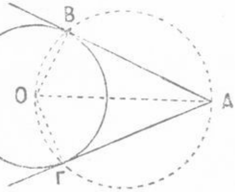
Πρόβλημα 13ον.

181. *Διὰ δεδομένου σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δεδομένου κύκλου.*

Ἂν μὲν τὸ δεδομένον σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἄγεται ἡ ἀκτὶς ΟΑ καὶ ἡ ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ Α κάθετος ΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη (135).



Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἄγεται ἡ τὰ σημεῖα Ο καὶ Α ἑνοῦσα εὐθεῖα ΟΑ καὶ ἐπὶ ταύτης ὡς διαμέτρου γράφεται περιφέρεια, ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τὰ Β καὶ Γ· αἱ δὲ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι αἱ ζητούμεναι.



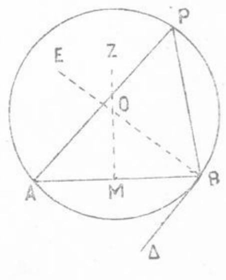
Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΒ, ΟΓ, αἱ γωνίαι ΟΒΑ, ΟΓΑ, ὡς ἐγγεγραμμέναι ἐν ἡμικυκλίῳ, εἶναι ὀρθαὶ (153).

Σημείωσις. Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, ἔτι δὲ καὶ ἡ γωνία ΟΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΟΑΓ. Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ εἶναι ἴσα (97).

Πρόβλημα 14ον.

182. *Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ Γ.*

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν γωνίαν, οἷον τὴν ΑΒΔ, ἔχουσαν πλευρὰν μὲν τὴν ΑΒ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Β καὶ ἴσην τῇ γωνίᾳ Γ· εἶτα δ' ἄγομεν ἐκ μὲν τοῦ Β τὴν ΒΕ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον, ἐκ δὲ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ τὴν ἐπ' αὐτὴν κάθετον ΜΖ· λέγω δὲ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται ἱκανῶς αὐξανόμεναι τέμνονται εἴς τι σημεῖον, οἷον τὸ Ο, ἂν δὲ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον Ο ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΟΒ, τὸ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΔ κείμενον εἶναι τὸ ζητούμενον.



Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΜΖ καὶ ΒΕ προεκβαλλόμεναι συναντῶνται, διότι σχηματίζουσι μετὰ τῆς τεμνούσης αὐτὰς ΑΒ τὰς δύο γωνίας ΒΜΖ ($=1^{\text{ὀρθ.}}$) καὶ ΑΒΕ ($<1^{\text{ὀρθ.}}$), ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Οὕτω δέ, ἂν γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν τὴν τομὴν Ο, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΟΒ, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α, διότι ΟΑ=ΟΒ, θὰ ἐφάπτηται δὲ τῆς ΒΔ εἰς τὸ Β, διότι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ (135)· κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΑΒΔ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΒΔ, εἶναι ἴση τῇ ἐγγεγραμμένῃ ΑΡΒ, τῇ βαινούσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΗΒ τοῦ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΒΔ περιεχομένου (156). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ Γ, ἕπεται ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΡΒ ἰσοῦται ἐπίσης τῇ Γ. Λοιπὸν ἐγράφη ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΡΒ, δεχόμενον τὴν δεδομένην γωνίαν Γ.

Σημείωσις. Ἂν ἡ δεδομένη γωνία ἦτο ὀρθὴ τὸ ζητούμενον τμῆμα θὰ ἦτο ἡμικύκλιον ἔχον διάμετρον τὴν ΑΒ (154, 1ον).

Περὶ ἀναλυτικῆς καὶ συνθετικῆς μεθόδου.

183. Ἐν τῇ λύσει προβλήματος ἢ ἐν τῇ ἀποδείξει θεωρήματος δύο μεθόδων ποιούμεθα χρῆσιν.

Καὶ κατὰ μὲν τὴν ἑτέραν τούτων, θεωροῦντες εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος ἢ ἀληθὲς τὸ ἀποδεικτέον τοῦ θεωρήματος, συνδυάζομεν αὐτὸ μετ' ἄλλων γνωστῶν προτάσεων, προσπαθοῦντες νὰ φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον, ἐξ οὗ νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἂν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι γνωστὸν ὡς ἀληθές, νὰ συμπεράνωμεν δὲ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος, ἂν τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ψευδὲς κατὰ τὰ γνωστά.

Καλεῖται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη *ἀναλυτικὴ* καὶ ὁ τοιοῦτος τοῦ συλλογίζεσθαι τρόπος *ἀνάλυσις*.

Κατὰ δὲ τὴν ἑτέραν τῶν μεθόδων τούτων, ἀπὸ γνωστῶν ἀρχόμενοι καὶ ταῦτα ἢ τὰς ἀκολουθίας τούτων μετὰ γνωστῶν συνδυάζοντες, φθάνομεν τέλος εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἢ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Καλεῖται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη *συνθετικὴ* καὶ ὁ τοιοῦτος τοῦ συλλογίζεσθαι τρόπος *σύνθεσις*.

Ἀκολουθοῦμεν δὲ τὴν μὲν ἀναλυτικὴν μέθοδον, ὅταν ζητῶμεν τὴν λύσιν προβλήματος ἢ τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, τὴν δὲ συνθετικήν, ὅταν θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν τὴν λύσιν ἢ τὴν ἀπόδειξιν, γνωστὴν οὖσαν.

Περὶ τῶν ἀντιστρεπτῶς πρὸς ἀλλήλας συνδεομένων προτάσεων.

184. Ἐν τῇ ἀναλυτικῇ μεθόδῳ, ἂν ἀναχωροῦντες ἔκ τινος προτάσεως ὑποτιθεμένης ὡς ἀληθοῦς, φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον ψευδές, δηλαδὴ ἀντιφάσκον πρὸς τὰ ὡς ἀληθῆ γνωστά, θὰ συναγάγωμεν ἀσφαλῶς ὅτι ἡ πρότασις ἐξ ἧς ἀνεχωρήσαμεν δὲν ἦτο ἀληθής.

Ἂν ὅμως διὰ τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ἀναχωροῦντες ἔκ τινος προτάσεως Α, φθάσωμεν τέλος εἰς ἑτέραν πρότασιν Κ, γνωστὴν ὡς ἀληθῆ, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου ἀναγκαίως ὅτι ἡ πρότασις Α εἶναι ἀληθής. Ἀσφαλῶς ὅμως δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως Κ τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως Α, ἂν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ποιώμεθα χρῆσιν προτάσεων *συνδεομένων πρὸς ἀλλήλας ἀντιστρεπτῶς*.

Καλοῦμεν δὲ δύο προτάσεις *ἀντιστρεπτῶς πρὸς ἀλλήλας συνδεομένας*, ἂν ἑκατέρας τούτων ἡ ἀλήθεια ἕπεται ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς ἑτέρας.

Οὕτως, ἂν ἐκ τῆς παραδοχῆς τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως Α ἕπεται ἡ πρότασις Β καὶ τἀνάπαλιν, ἐκ δὲ τῆς παραδοχῆς τῆς προτάσεως Β ἕπεται ἡ πρότασις Γ καὶ τἀνάπαλιν, ἐφεξῆς δὲ οὕτω, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πρότασίν τινα Κ, ἧς ἡ ἀλήθεια εἶναι ἤδη γνωστὴ ἡμῖν, καὶ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται τἀνάπαλιν ἡ προηγουμένη, θὰ συναγάγωμεν ἀμέσως ἐντεῦθεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως.

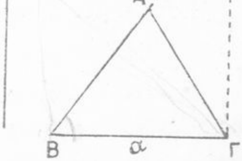
Παρατήρησις. Τῶν ἀντιστρεπτῶς πρὸς ἀλλήλας συνδεομένων προτάσεων ὁ ὁρισμὸς δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Δύο προτάσεις Α καὶ Β λέγομεν ὅτι *συνδέονται πρὸς ἀλλήλας ἀντιστρεπτῶς*, ἂν αἱ δύο προτάσεις «εἰ ἔστιν Α ἔστι Β» καὶ «εἰ ἔστι Β ἔστιν Α», αἵτινες εἶναι *ἀντίστροφοι* ἀλλήλων κατὰ τὰ ἐν § 20 εἰρημένα, εἶναι ἀμφότεραι ἀληθεῖς.

Πρόβλημα 15ον.

185. ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος ἔχουσι δοθῇ μία τῶν πλευρῶν, μία τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

Ἔστω α μὲν ἡ πλευρά, Β δὲ ἡ παρ' αὐτὴν γωνία, δ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.



Περιορισμός. Ἡ εὐθεῖα δ, ἄθροισμα οὖσα τῶν δύο πλευρῶν, πρέπει νὰ εἶναι τῆς α μείζων.

Ἀνάλυσις. Ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εὑρέθη καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ, οὗ ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ+ΒΓ εἶναι ἴσα τοῖς δεδομένοις. Οὕτως, ἂν ἡ μὲν ΒΑ προεκταθῇ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ληφθῇ ἡ ΑΔ, τῇ ΑΓ ἴση, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΔ, θὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, οὗ αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΒΔ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία Β εἶναι γνωσταὶ (διότι ΒΓ=α, ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΑ+ΑΓ=δ).

Τὸ τρίγωνον ἄρα ΒΓΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (174)· ὡς δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρέθη τὸ ΒΓΔ, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ ΑΒΓ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ΒΓΔ νὰ ἀχθῇ ἡ ΓΑ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ τὴν γωνίαν ΔΓΑ ἴσην τῇ ΓΔΒ, ὅτε θὰ ἔχωμεν ΓΑ=ΑΔ.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ἐκθέτομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς.

Σύνθεσις. Σχηματίζομεν τρίγωνον ἔχον δύο μὲν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἴσας ταῖς δεδομέναις εὐθείαις, τὴν δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην τῇ δεδομένῃ· τοῦτο δὲ ἔστω τὸ ΒΓΔ, ὅπερ ἔχει τὴν μὲν ΒΓ ἴσην τῇ α, τὴν δὲ ΒΔ ἴσην τῇ δ, τὴν δὲ γωνίαν ΔΒΓ ἴσην τῇ Β· εἶτα δὲ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΓΑ ἴσην τῇ Δ, οὕτω δὲ ἐσχηματίσαμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ δ εἶνε μείζων τῆς α ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι μείζων τῆς Δ· τούτου ἕνεκα ἡ εὐθεῖα ΓΑ, ἥτις σχηματίζει τὴν γωνίαν ΔΓΑ ἴσην τῇ Δ, κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, θὰ τέμῃ ἄρα τὴν ΒΔ κατά τι σημεῖον, τὸ Α· ἔχομεν δὲ ΑΔ=ΑΓ.

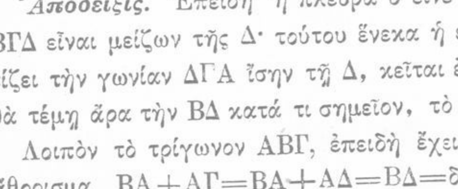
Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἔχει τὴν μὲν ΒΓ=α, τὸ δὲ ἄθροισμα ΒΑ+ΑΓ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΔ=δ, τὴν δὲ γωνίαν Β ἴσην τῇ δεδομένῃ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα. 16ον.

186. Νὰ κατασκ- τὸ τρίγ- ἐκ τῆς περιμ- καὶ δύο γων- τοῦ τριγ- Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην γωνίαν.

186. *Δεδομένων τῆς περιμέτρου καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστω τ μὲν ἡ περίμετρος, Α, Β, Γ δὲ αἱ δεδομέναι γωνίαι.



Περιορισμός. Τῶν τριῶν δεδομένων γωνιῶν τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἂν μία τῶν τούτου πλευρῶν, ἡ

186. ... ἐκ τῆς περιμ- καὶ μιᾶς γων- Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐὰν τὸ τρίγ- εἶνε ἰσοσκ- καὶ ἡ γων- μία τῶν προσκ- τῇ βάσει ἢ ἐὰν τὸ τρίγ- εἶνε ὀρθογ- καὶ ἡ γων- μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τὸ τρίγ- κατασκευάζεται· διὰ πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ κατασκευὴ εἶνε ἀδύνατος

ΒΓ, προεκβληθῇ ἑκατέρωθεν, ληφθῇ δὲ Βϐ=ΒΑ καὶ Γγ=ΓΑ, ἀχθῶσι δὲ αἱ εὐθεῖαι Αϐ καὶ Αγ θὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον Αϐγ, οὗ ἡ μὲν πλευρὰ ϐγ θὰ εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ περιμέτρῳ, αἱ δὲ προσκείμεναι ταύτῃ γωνίαι ϐ καὶ γ θὰ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν δεδομένων γωνιῶν Β καὶ Γ, διότι τὰ τρίγωνα ΑΒϐ καὶ ΑΓγ εἶναι ἰσοσκελῆ (83 καὶ 117)· τὸ τρίγωνον ἄρα Αϐγ δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Ὡς δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρέθη τὸ τρίγωνον Αϐγ, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου Αϐγ δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ ΑΒΓ.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ἐκθέτομεν συνθετικῶς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς.

Σύνθεσις. Σχηματίζομεν τρίγωνον ἔχον μίαν μὲν τῶν πλευρῶν ἴσην τῇ δεδομένῃ περιμέτρῳ, τὰς δὲ προσκειμένας ταύτῃ γωνίας ἴσας πρὸς τὰ ἡμίση τῶν δύο δεδομένων γωνιῶν (175). Ἔστω τοῦτο τὸ Αϐγ, ὅπερ ἔχει τὴν μὲν ϐγ ἴσην τῇ τ, τὴν δὲ γωνίαν ϐ ἴσην τῇ $\frac{B}{2}$, τὴν δὲ γωνίαν γ ἴσην τῇ $\frac{\Gamma}{2}$. Εἶτα δὲ σχηματίζομεν τὴν μὲν γωνίαν ϐΑΒ ἴσην τῇ ϐ, τὴν δὲ γωνίαν γΑΓ ἴσην τῇ γ· αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ τέμωσι τὴν ϐγ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, τὸ οὕτω δὲ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία $ϐA\gamma = 2^{\text{ὀρθ}} - \frac{B}{2} - \frac{\Gamma}{2}$,

ἔτι δὲ εἶναι $A + B + \Gamma = 2^{\text{ ὀρθ}}$,

ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι ἡ γωνία $ϐA\gamma = (A + B + \Gamma) - \frac{B}{2} - \frac{\Gamma}{2}$,

ἤτοι ἡ γωνία $ϐA\gamma = A + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2}$.

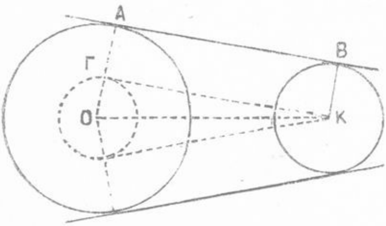
Λοιπὸν ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι, ἐκ τῆς γωνίας ϐΑγ δύναται νὰ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ϐΑΒ καὶ γΑΓ, οὕτω δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑϐΒ καὶ ΑγΓ εἶναι ἰσοσκελῆ θὰ εἶναι ΑΒ=ϐΒ καὶ ΑΓ=Γγ, κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι, ἡ μὲν περίμετρος ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=ϐΒ+ΒΓ+Γγ=τ, αἱ δὲ γωνίαι ΑΒΓ=2ϐ=Β καὶ ΑΓΒ=2γ=Γ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ ἴση τῇ δεδομένῃ Α. Οὕτω δὲ ἐσχηματίσαμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Πρόβλημα. 17ον.

187. *Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων κύκλων.*

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ διακρίνονται δύο περιπτώσεις, διότι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύναται νὰ ἔχῃ τοὺς κύκλους ἢ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ἢ ἑκατέρωθεν.

Α΄.—*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ὅτι τῶν δεδομένων κύκλων Κ καὶ Ο κοινὴ ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΑΒ, ἔχουσα αὐτοὺς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Οὕτως, ἂν ἀχθῶσιν εἰς μὲν τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς ἡ ἀκτὶς ΟΑ, εἰς δὲ τὸ Β ἡ πάντως παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ ΟΑ ἀκτὶς ΚΒ,



ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἡ ΚΓ τῇ ΒΑ παράλληλος, θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΚΓ, ἐξ οὗ θὰ προκύψῃ ὅτι ΓΑ=ΚΒ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΟΓ=ΟΑ—ΚΒ.

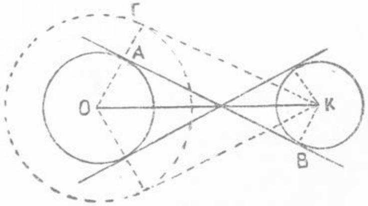
Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος ὁ ἔχων κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΟΓ ἐφάπτεται τῆς ΚΓ (135), πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγεται ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ κατασκευή.

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἔχουσαν κέντρον μὲν τὸ τοῦ μείζονος κύκλου κέντρον Ο, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων τῶν δεδομένων κύκλων, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἑτέρου κύκλου ἄγομεν τὴν ΚΓ τῆς γραφείσης περιφερείας ἐφαπτομένην· εἶτα δὲ ἄγομεν διὰ μὲν τοῦ Γ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἐκ δὲ τοῦ Κ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ ΟΑ.

Οὕτως ἐπειδὴ ἡ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῶν ἀκτίνων τούτων ἑνοῦσα εὐθεῖα ΑΒ, ὡς πλευρὰ τοῦ σχηματισθέντος ὀρθογωνίου ΑΓΚΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ὁμορρόπους ἀκτῖνας ΟΑ, ΚΒ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Β, ἕπεται ὅτι εἶναι τῶν δεδομένων κύκλων κοινὴ ἐφαπτομένη ἔχουσα τοὺς δύο τούτους κύκλους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Διερεύνησις. Ἵνα ἡ τοῦ προβλήματος λύσις ᾖ δυνατή, πρέπει τὸ σημεῖον Κ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΟΓ, ἤτοι νὰ εἶναι ΟΚ>ΟΓ, ὅτε τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΟΓ, ἤτοι νὰ εἶναι ΟΚ=ΟΓ, ὅτε αἱ δύο λύσεις συμπίπτουσιν εἰς μίαν (181)· ἡ κατασκευαζομένη εὐθεῖα θὰ εἶναι ἄρα τότε ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐντός. Ἂν δὲ ΟΚ<ΟΓ, ὅτε ὁ ἕτερος τῶν κύκλων κεῖται ἐντὸς τοῦ ἑτέρου, ἡ τοῦ προβλήματος λύσις εἶναι ἀδύνατος.

Β'.—***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ὅτι τῶν δεδομένων κύκλων Κ καὶ Ο κοινὴ ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΑΒ, ἔχουσα αὐτοὺς ἑκατέρωθεν αὐτῆς.



Οὕτως, ἂν ἀχθῶσιν εἰς μὲν τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς ἡ ἀκτὶς ΟΑ, εἰς δὲ τὸ Β ἡ πάντως παράλληλος τῇ ΓΑ ἀλλ' ἀντίρροπος αὐτῇ ἀκτὶς ΚΒ, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἡ ΚΓ τῇ ΑΒ παράλληλος, τέμνουσα δὲ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΑ εἰς τὸ Γ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΚΓ, ἐξ οὗ θὰ προκύψῃ ΑΓ=ΒΚ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΟΓ=ΟΑ+ΒΚ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος ὁ ἔχων κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΟΓ ἐφάπτεται τῆς ΚΓ, πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου συνάγεται ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ κατασκευή.

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Ο, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δεδομένων κύκλων, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἄγομεν τὴν ΚΓ ἐφαπτομένην τῆς γραφείσης περιφερείας. Εἶτα δὲ ἄγομεν ἐκ μὲν τοῦ Ο τὴν ἀκτῖνα ΟΓ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, ἐκ δὲ τοῦ Κ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ τῇ ΟΓ παράλληλον ἀλλ' ἐναντίαν ἔχουσαν φορὰν (ἀντίρροπον).

Οὕτως, ἐπειδὴ ἡ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΚΒ ἑνοῦσα εὐθεῖα ΑΒ, ὡς πλευρὰ τοῦ σχηματισθέντος ὀρθογωνίου

ΑΓΚΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΚΒ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Β, ἕπεται ὅτι εἶναι τῶν δεδομένων κύκλων κοινὴ ἐφαπτομένη ἔχουσα τοὺς δύο τούτους κύκλους ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

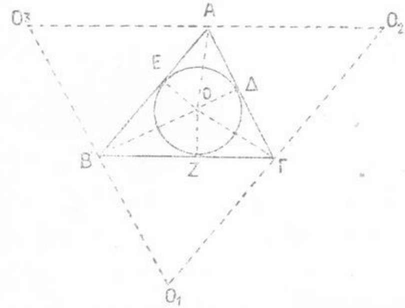
Διερεύνησις. Ἵνα ἡ τοῦ προβλήματος λύσις ᾖ δυνατή, πρέπει τὸ σημεῖον Κ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΟΓ, ἤτοι νὰ εἶναι ΟΚ>ΟΓ, ὅτε τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΟΓ, ἤτοι νὰ εἶναι ΟΚ=ΟΓ, ὅτε αἱ δύο λύσεις συμπίπτουσιν εἰς μίαν· ἡ κατασκευαζομένη εὐθεῖα εἶναι τότε ἡ τῶν κύκλων κοινὴ ἐφαπτομένη, ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐκτός. Ἐὰν δὲ ΟΚ<ΟΓ, οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.

Πρόβλημα 18ον.

188. *Εἰς δεδομένον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.*

Νικ-6-97
φ 159

Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι ἐγράφη κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἔχων κέντρον τὸ Ο. Ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν Δ καὶ Ε ἀγόμεναι ἀκτῖνες ΟΔ, ΟΕ εἶναι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ, ΑΒ (135) καὶ ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α (99). Δι' ὅμοιον λόγον τὸ σημεῖον Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας Β καὶ Γ.



Σύνθεσις. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ διχοτομοῦσαι δύο γωνίας τοῦ τριγώνου, οἷον τὴν Β καὶ τὴν Γ, ἐκ δὲ τῆς τούτων τομῆς Ο (ἥτις εἶναι σημεῖον κείμενον ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ), ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, π. χ. τὴν ΑΓ, ἀχθῇ ἡ ΟΔ κάθετος, γραφῇ δὲ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ Ο, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΟΔ, λέγω ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Διότι αἱ ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ είναι ἴσαι (98)· κατ' ἀκολουθίαν ἂν γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ Ο, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΟΔ, αὕτη θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ καὶ θὰ ἐφάπτηται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, διότι αὗται εἶναι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων κάθετοι (135).

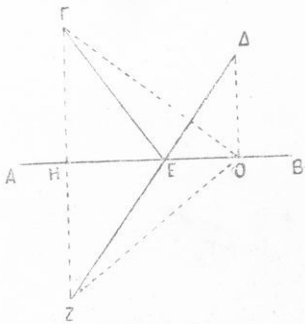
Σημείωσις. Ὡσαύτως δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ τρεῖς ἄλλοι κύκλοι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου οὕτως, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ ἐφάπτηται τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων.

Πρόβλημα 19ον.

189. *Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐξ οὗ αἱ εἰς δύο δεδομένα σημεῖα, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ τῆς εὐθείας μέρος, ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ σχηματίζωσι μετὰ τῶν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου μερῶν τῆς εὐθείας γωνίας ἴσας.*

Ἔστω ἡ μὲν δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὰ δὲ δεδομένα σημεῖα τὸ Γ καὶ τὸ Δ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, καὶ ἄρα ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΕΔ. Ἂν ἐπὶ μὲν τῆς προεκβολῆς τῆς ΔΕ ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΕΓ, ἀχθῇ δὲ ἡ ΓΖ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Η, τὰ σχηματισθησόμενα τρίγωνα ΓΕΗ καὶ ΖΕΗ θὰ εἶναι ἴσα (80)· θὰ εἶναι ἄρα ἡ μὲν ΗΖ=ΗΓ, ἡ δὲ γωνία ΕΗΖ=ΕΗΓ· ἡ ΓΖ ἄρα θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος (49).



Σύνθεσις. Ἂν ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν δοθέντων σημείων, οἷον τοῦ Γ, ἀχθῇ ἡ ΓΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, ἐπὶ δὲ τῆς ταύτης προεκβολῆς ληφθῇ ἡ ΗΖ=ΗΓ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΖΔ, λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ε, ἔνθα αὕτη θὰ τέμῃ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Διότι ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΓΗΕ, ΖΗΕ (80) προκύπτει ὅτι ἡ γωνία ΗΕΓ=ΗΕΖ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΒΕΔ=ΗΕΖ (63)· θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΗΕΓ=ΒΕΔ.

Παρατήρησις. Ἐκ πασῶν τῶν γραμμῶν τῶν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὸ Δ ἀγομένων καὶ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ ἐγγιζουσῶν, ἐλαχίστη εἶναι ἡ ΓΕΔ, ἡ σχηματίζουσα πρὸς τὴν ΑΒ τὰς ἴσας γωνίας· διότι ἰσοῦται τῇ εὐθείᾳ ΖΔ, ἐπειδὴ ΕΓ=ΕΖ, ἐνῷ πᾶσα ἄλλη, οἷον ἡ ΓΟΔ, ἡ ἐγγίζουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ο, ἰσοῦται τῇ τεθλασμένῃ ΖΟΔ.

Σημείωσις. Ὁμοίως εὑρίσκεται ἐπὶ δεδομένης εὐθείας σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ εἰς δύο δεδομένα σημεῖα, κείμενα *ἑκατέρωθεν* τῆς εὐθείας, ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσι μετὰ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῆς εὐθείας (ἐφεξῆς) γωνίας ἴσας.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν τὰ δεδομένα σημεῖα ἴσον ἀπέχωσι τῆς ΑΒ, τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι ἀδύνατον μέν, ἂν τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, ἀόριστον δὲ ἂν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου.

Χατ7-6-86
Win-6-84
Lang-6-33

Περὶ τῶν Γεωμετρικῶν τόπων.

Ὁρισμός.

190. *Ἂν τὰ κοινήν τινα ἰδιότητα ἔχοντα σημεῖα κεῖνται ἐπί τινος γραμμῆς, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχωσι τὴν κοινὴν ταύτην ἰδιότητα, ἡ γραμμὴ λέγεται γεωμετρικὸς τόπος, ἢ ἁπλῶς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ἰδιότητα ἐκείνην.*

Παραδείγματα.

1ον. Τῶν σημείων τῶν ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας ἴσον ἀπεχόντων ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ἀγομένη ἐπ' αὐτὴν κάθετος (75).

2ον. Τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἀπόστασις ἰσοῦται πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν, ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν τὸ δεδομένον σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ (43).

3ον. Τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας, ὁ τόπος εἶναι ἡ τὴν γωνίαν ταύτην διχοτομοῦσα εὐθεῖα (99).

4ον. Τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας ἀπόστασις ἰσοῦται δεδομένῃ εὐθείᾳ, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν παραλλήλων τῇ δεδομένῃ καὶ ἀπεχουσῶν ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ· κεῖνται δὲ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἑκατέρωθεν τῆς δοθείσης (113).

5ον. Τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ εἰς τὰ ἄκρα δεδομένης εὐθείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην δεδομένῃ γωνίᾳ, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο τόξων τῶν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας γραφομένων τμημάτων καὶ τὴν δεδομένην γωνίαν δεχομένων (182)· κεῖνται δὲ τὰ δύο ταῦτα τόξα ἑκατέρωθεν τῆς δοθείσης εὐθείας.

Χρησιμότης τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

191. Ἐν πλείστοις γεωμετρικοῖς προβλήμασι τὸ ζητούμενον εἶναι σημεῖον, ὅπερ ὀφείλει νὰ πληροῖ ἐπιτάγματά τινα, ἵνα λύῃ τὸ πρόβλημα.

Οὕτω τὸ *σημεῖον δεδομένης εὐθείας τὸ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων Α,Β* εἶναι ἡ τομὴ τῆς δεδομένης εὐθείας καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ μέσου τῆς τὰ σημεῖα ταῦτα ἑνούσης εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ (76).

Ἐν τῷ προβλήματι «*νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ*» ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον Κ, ὅπερ ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν δεδομένων σημείων, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ δύο ἐπιτάγματα ΚΑ=ΚΒ καὶ ΚΒ=ΚΓ (178).

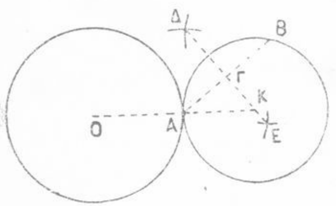
Καὶ τὰ μὲν τὸ πρῶτον ἐπίταγμα πληροῦντα σημεῖα ἔχουσι τόπον τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἐπ' αὐτὴν κάθετον, τὰ δὲ τὸ δεύτερον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα σημεῖα ἔχουσι τόπον τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἐπ' αὐτὴν κάθετον (76). Ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων καθέτων.

Ἐν δὲ τῷ προβλήματι «*εἰς δεδομένον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος*» ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον, ὅπερ ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα· 1ον) νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ 2ον) νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν ΒΑ καὶ ΒΓ. Τούτων ἕνεκα θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτόμων καὶ τῆς γωνίας Α καὶ τῆς γωνίας Β (188). Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα ταῦτα, θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων.

Ἐπειδὴ πάντα τὰ σημεῖα γεωμετρικοῦ τόπου ἔχουσι κοινήν τινα ἰδιότητα, τοιαύτην ὥστε ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν ἰδιότητα ταύτην ἀνήκει εἰς τὸν τόπον, ἡ χρησιμότης τῶν γεωμετρικῶν τόπων ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τῆς *ἀναλυτικῆς* μεθόδου εἶναι μεγίστη (184).

Π ρ ό β λ η μ α 20όν.

192. *Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δεδομένου κύκλου εἰς δεδομένον σημεῖον καὶ δι' ἑτέρου δεδομένου σημείου διερχόμενος.*



Ἔστω Ο μὲν ὁ κύκλος, Α δὲ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον, Β δὲ τὸ ἕτερον τῶν δεδομένων σημείων.

Φανερὸν εἶναι ὅτι, τὸ μὲν τῆς ἐπαφῆς σημεῖον Α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τῶν κέντρων εὐθείας (141), τὸ δὲ κέντρον Κ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Γ τῆς ΑΒ ἐπ' αὐτὴν καθέτου (149).

Λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, καὶ τὴν ἐκ τοῦ μέσου Γ τῆς ΑΒ ἐπὶ ταύτην (τὴν ΑΒ) κάθετον ΓΕ· τῆς δὲ καθέτου ταύτης καὶ τῆς ΟΑ προεκταθείσης ἐν ἀνάγκῃ ἡ τομὴ ὁρίζει τὸ κέντρον, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὴν ἀκτῖνα, τοῦ ζητουμένου κύκλου.

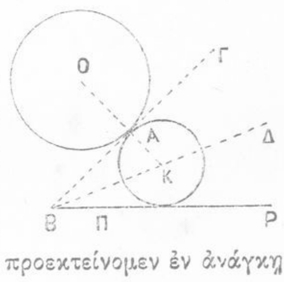
Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα εἶναι πάντοτε δυνατόν, ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ὡς πρὸς τὴν ΟΑ πλαγία, ἢ ἂν τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ΟΑ, ἀδύνατον δέ, ἂν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ διότι τότε ἡ ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΑ (104).

Πρόβλημα 21ον

193. *Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δεδομένου κύκλου εἰς δεδομένον σημεῖον καὶ δεδομένης εὐθείας.*

Ἔστω Ο μὲν ὁ κύκλος, Α δὲ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον, ΠΡ δὲ ἡ δεδομένη εὐθεῖα.

Οὕτω τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς τῶν δύο κύκλων κεῖται ἐπὶ τῆς τῶν κέντρων εὐθείας (141). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΑ κάθετος ΒΓ εἶναι τῶν δύο κύκλων κοινὴ ἐφαπτομένη (141, σημ.), ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῶν δύο εὐθειῶν ΠΡ καὶ ΒΓ. Τὸ κέντρον ἄρα ταύτης θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΒΡ (99).



Λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἄγομεν καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, ἣν προεκτείνομεν ἐν ἀνάγκῃ ἀπεριορίστως, καὶ τὴν εἰς τὸ σημεῖον Α ἐφαπτομένην ΒΓ τοῦ κύκλου Ο.

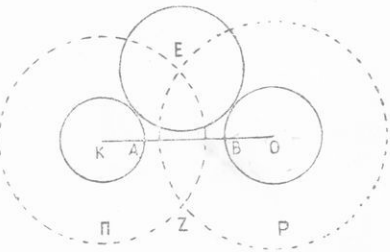
Ἂν δὲ ἀγάγωμεν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΓΒΡ, ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῆς ΟΑ, προεκταθείσης ἐν ἀνάγκῃ, εἶνε τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

Πρόβλημα 22ον

194. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δεδομένων περιφερειῶν ἐκτός, ἔχουσα δὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ α.*

Ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἧς τὸ κέντρον εἶναι ἄγνωστον, ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς ἐπιτάγματα·

1ον) ἔχουσα ἀκτῖνα α νὰ ἐφάπτηται τῆς δεδομένης περιφερείας Κ ἐκτός, 2ον) ἔχουσα ἀκτῖνα α νὰ ἐφάπτηται τῆς δεδομένης περιφερείας Ο ἐκτός.



Καὶ ἂν μὲν τὸ πρῶτον τῶν ἐπιταγμάτων πληροῖ, τὸ κέντρον Λ αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ τοῦ κέντρου Κ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ΚΑ $+$ α (142). Τὸ κέντρον ἄρα Λ θὰ ἔχῃ ἄρα τόπον τὴν περιφέρειαν Π, ἥτις θὰ ἔχῃ κέντρον μὲν τὸ Κ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΚΑ$+$α (142).

Ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον τῶν ἐπιταγμάτων πληροῖ, τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας θὰ ἔχῃ τόπον τὴν περιφέρειαν Ρ, ἥτις θὰ ἔχῃ κέντρον μὲν τὸ Ο ἀκτῖνα δὲ τὴν ΟΒ$+$α. (142).

Τὸ ζητούμενον ἄρα κέντρον θὰ εἶναι τομὴ τῶν δύο περιφερειῶν Π καὶ Ρ.

Λοιπὸν τὸ πρόβλημα, θὰ ἔχῃ δύο λύσεις ἂν αἱ περιφέρειαι Π καὶ Ρ τέμνωνται, μίαν δὲ μόνην ἂν ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐδεμίαν δὲ θὰ ἔχῃ λύσιν, ἂν αὗται μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

Διερεύνησις. Τῶν περιφερειῶν Π καὶ Ρ ἡ μὲν τῶν κέντρων ἀπόστασις εἶναι ΚΟ, αἱ δὲ ἀκτῖνες ΚΑ$+$α καὶ ΟΒ$+$α. Ἵνα ἄρα τέμνωνται πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι (139)

$$\text{ΚΟ} > \text{ΚΑ} - \text{ΟΒ} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΚΟ} < 2\alpha + \text{ΚΑ} + \text{ΟΒ}.$$

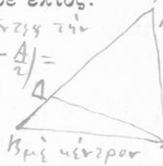
Τῶν ἀνισοτήτων δὲ τούτων ἡ μὲν πρώτη δηλοῖ ὅτι τῶν δεδομένων περιφερειῶν δὲν πρέπει ἡ ἑτέρα νὰ περιλαμβάνῃ τὴν ἑτέραν· ἡ δὲ δευτέρα, ἂν μὲν εἶναι ΚΟ$<$ΚΑ$+$ΟΒ, ἀληθεύει ἐξ ἑαυτῆς, ἂν δὲ εἶναι ΚΟ$>$ΚΑ$+$ΟΒ, ἤτοι ἂν αἱ δεδομέναι περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων (144), ἀνάγκη νὰ εἶναι

$$2\alpha > \text{ΚΟ} - (\text{ΚΑ} + \text{ΟΒ}),$$

ἤτοι ἡ δεδομένη ἀκτὶς δὶς λαμβανομένη νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ μέρος τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τὸ ἐκτὸς τῶν κύκλων κείμενον.

Αἱ περιφέρειαι Π καὶ Ρ θὰ ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς μέν, ἂν εἶναι ΚΟ=ΚΑ−ΟΒ, ἤτοι ἂν καὶ αἱ δεδομέναι περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐντὸς (143)· ἐκτὸς δέ, ἂν εἶναι ΚΟ=2α+ΚΑ+ΟΒ (142), ἤτοι ἂν ἡ δεδομένη εὐθεῖα δὶς λαμβανομένη εἶναι ἴση τῷ τμήματι τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τῷ ἐκτὸς τῶν δεδομένων κύκλων κειμένῳ.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ διερευνᾶται τὸ πρόβλημα καὶ ἂν ἐπιταχθῇ νὰ ἐφάπτηται ὁ κύκλος ἢ ἀμφοτέρων τῶν δεδομένων κύκλων ἐντός, ἢ τοῦ μὲν ἐντὸς τοῦ δὲ ἐκτός.



ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ μία πλευρά, ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης γωνία καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗτινος ἔχουσι δοθῇ τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν.

3) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν.

4) Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ῥόμβος, οὗ ἔχουσι δοθῇ αἱ διαγώνιοι, ἢ μία τῶν διαγωνίων καὶ ἡ πλευρά, ἢ ἡ πλευρὰ καὶ μία τῶν γωνιῶν, ἢ αἱ γωνίαι καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

5) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ καταβιβαζομένων καθέτων.

6) Νὰ ἀχθῇ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν, ἃς δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν μέχρι τῆς τομῆς αὐτῶν.

7) Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα δεδομένην γωνίαν μετὰ δεδομένης εὐθείας.

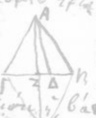
8) Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τοῦ εἰς τὴν ἑτέραν αὐτῶν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

9) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗτινος ἔχουσι δοθῇ ἡ βάσις,

ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

10) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ ἔχουσι δοθῇ αἱ διαγώνιοι καὶ μία πλευρά.

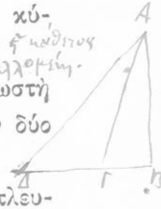
11) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ μία γωνία, τὸ ὕψος καὶ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δεδομένης γωνίας ἀγομένη διάμεσος.



12) Δεδομένων δύο εὐθειῶν παραλλήλων καὶ δύο σημείων, ζητεῖται νὰ ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων τούτων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, αἵτινες μετὰ τῶν δεδομένων εὐθειῶν νὰ σχηματίζωσι ῥόμβον.

13) Ἐκ δεδομένου σημείου νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δεδομένου κύκλου οὕτως, ὥστε τὸ ἐν τῷ κύκλῳ περιλαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον δεδομένῃ εὐθείᾳ.

14) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν κύκλος ἐφάπτηται δεδομένου κύκλου καὶ δεδομένης εὐθείας, ἡ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἑνοῦσα εὐθεῖα θὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τοῦ δεδομένου κύκλου τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν.



15) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ εἶναι γνωστὴ ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

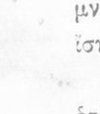
16) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗ ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσιν ἢ ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἴσην δεδομένῃ εὐθείᾳ.

17) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τραπέζιον, οὗ ἔχουσι δοθῇ αἱ πλευραί.

18) Νὰ γραφῇ κύκλος ἔχων κέντρον δεδομένον σημεῖον καὶ τέμνων δεδομένον κύκλον οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι ἴση δεδομένῃ εὐθείᾳ.

19) Δεδομένων δύο κύκλων, ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ ἑτέρου τούτων, ὥστε τὸ ἐν τῷ ἑτέρῳ κύκλῳ περιλαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον δεδομένῃ εὐθείᾳ.

20) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ ἡ βάσις, τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία.



στοιχεῖα ... αἱ τρεῖς γων- ὥστε ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν δεδομ- γ- εἶναι δύο
καὶ ... τῶν εὐθειῶν γραμ- τοῦ τριγ-

21) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς διάμεσος.

22) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ αἱ δύο γωνίαι καὶ τὸ ὕψος.

23) Νὰ ἐγγραφῇ ἐν κύκλῳ τραπέζιον, ἔχον ὕψος ἴσον δεδομένῃ εὐθείᾳ καὶ διαφορὰν τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἴσην ἑτέρᾳ δεδομένῃ εὐθείᾳ.

24) Διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ χορδὴ τοῦ ἑτέρου κύκλου οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ τέμνηται δίχα ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιφερείας.

25) Ἂν διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν τεμνομένων ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι τῶν κύκλων, ἡ διχοτόμος τῆς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένης γωνίας ὁρίζει ἐπὶ τῶν δύο περιφερειῶν δύο τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν ἴσαι γωνίαι.

26) Ἂν γωνία τις τριγώνου ἰσῶται τῷ ἡμίσει ὀρθῆς, αἱ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς μετὰ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν τῶν ἠγμένων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ταύτης ἑνοῦσαι εὐθεῖαι, εἶναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι.

27) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον, οὗ ἔχει δοθῇ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πλευρῶν καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

28) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ἔχει δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.

29) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ἔχει δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀγομένη κάθετος.

30) Νὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ἔχει δοθῇ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀντιστοιχοῦν ὕψος.

31) Νὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ ἔχουσι δοθῇ μία πλευρὰ καὶ δύο διάμεσοι.

32) Περὶ δεδομένον τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

κορυφῆς Α ὁρίζουσα οὕτω τὴν κορυφὴν τοῦ ζητ- τρ- } Βοηθήματα σ- 75 προβλ- 4
εἰργάσθημεν οὕτω, διότι διὰ τὴν κατασκ- τρ- ... τρία ... " 79 " "
στοιχεῖα. ...
νὰ εὑρεθῇ καὶ μία γων- ἡ $90+\frac{\theta}{2}$ ... καὶ ...

33) Περὶ δεδομένον τρίγωνον νὰ περιγραφῇ ἕτερον τρίγωνον ἴσον δεδομένῳ τριγώνῳ.

34) Ἀπὸ δεδομένου σημείου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον οὕτως, ὥστε εἰς τὸ ἕτερον τῶν τμημάτων, εἰς ἃ ὁ κύκλος διαιρεῖται, νὰ ἐγγράφηται γωνία ἴση δεδομένῃ γωνίᾳ.

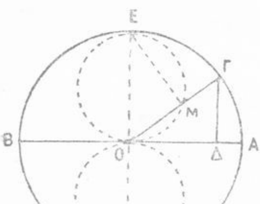
35) Ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἀγαγεῖν δύο παραλλήλους εὐθείας ἐχούσας δεδομένην ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν.

36) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἥτις νὰ ἐφάπτηται δεδομένης περιφερείας καὶ δεδομένης εὐθείας εἰς δεδομένον σημεῖον.

37) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον δεδομένον σημεῖον καὶ τέμνουσα δεδομένην περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἴσα.

38) Νὰ δειχθῇ ὅτι τέσσαρες περιφέρειαι ἔχουσαι χορδὰς τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τετραπλεύρου τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τέσσαρα σημεῖα, ἅτινα εἶναι κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τετραπλεύρου.

39) Ἂν ἐν κύκλῳ Ο ἀχθῇ διάμετρος ΑΒ καὶ τυχοῦσα ἀκτὶς ΟΓ, καὶ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ κάθετος ΓΔ, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΓ τὸ τμῆμα ΟΜ ἴσον τῇ ΔΓ, τίς θὰ εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ;



40) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων κοινὴν βάσιν καὶ ὕψη ἴσα.

41) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν διαγωνίων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐχόντων κοινὴν βάσιν καὶ ὕψη ἴσα.

42) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν δεδομένου κύκλου τῶν διερχομένων διὰ δεδομένου σημείου.

43) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ εἰς δεδομένον κύκλον ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι, ἢ εἶναι ἴσαι δεδομένῃ εὐθείᾳ, ἢ σχηματίζουσι δεδομένην γωνίαν.

38) Ἐπειδὴ ἵνα ἡ τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον δέει νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι γων. παραπληρωματικὰς διὰ τοῦτο ὀφείλομεν νὰ ἀποδείξωμεν τὰς ε καὶ θ τοιαύτας. Πρὸς τοῦτο [illegible] παρατηροῦμεν ὅτι περὶ τὸ σημεῖον ε ὑπάρχουσι 4 ὀρθαὶ ὥστε ηεζ = 4 ὀρθ. [illegible] ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν [illegible] εἶναι παραπληρω- [illegible] ὁμοίως [illegible]

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τεμ. ταύτας καὶ προσχωροῦντες ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς γθη εὑρίσκομεν ε+θ = ΒΓ

44) Δεδομένων γωνίας καὶ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς γωνίας, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ἕτερον σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τοῦ δεδομένου σημείου καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς γωνίας.

45) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τοῦ μέσου εὐθείας σταθεροῦ μήκους, κινουμένης οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ μένωσιν ἐπὶ δύο εὐθειῶν τεμνομένων καθέτως.

46) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ νὰ μένωσιν ἐπὶ δύο εὐθειῶν τεμνομένων καθέτως.

47) Ἂν τρεῖς κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἀνὰ δύο, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τούτων ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

48) Διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν περιλαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον δεδομένῃ εὐθείᾳ.

49) Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δεδομένον κυκλικὸν τομέα.

50) Νὰ διαιρεθῇ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία μέρη ἴσα.

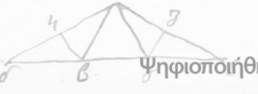
51) Ἂν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ διάμετρος ἡμικυκλίου, γραφῶσιν ἡμικύκλια, ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

52) Δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου ζητεῖται νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς αὐτὸ τρεῖς κύκλοι, ὧν ἕκαστος νὰ ἐφάπτηται δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν δύο ἄλλων κύκλων, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι κύκλοι εἶναι ἴσοι.

53) Εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῆς ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐκτὸς καὶ ἀντιστοίχως ἐφαπτομένων δεδομένης εὐθείας εἰς δύο αὐτῆς σημεῖα, ὅταν αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τούτων μεταβάλλωνται.

54) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἔχουσι δοθῇ ἡ περίμετρος καὶ τὸ ὕψος.

54) Ἐπειδὴ τοῦ ἰσοσκ- τριγ- αἱ παρὰ τὴν βάσιν πλευραὶ ἢ αἱ δύο ἄλλαι πλ- εἶναι ἴσαι ἕπεται ὅτι τὸ ὕψος διχοτομεῖ τὴν περίμετρον. Ἂν ὑποτεθῇ λυθὲν κατεσκευασμένον καὶ ἀναπτυχθῇ ἡ περίμ- ἑνώσωμεν δὲ τὴν κορυφὴν μετὰ τῶν ἄκρων τῆς περιμ- καὶ ὑψώσωμεν καθέτους ἐπὶ τῶν βάσ- τῶν σχ- ἰσοσκ- τριγ- λύομεν τὸ πρόβλ-



ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

Περὶ τοῦ γινομένου μεγέθους ἐπὶ ἀριθμόν.

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες.

195. *Γινόμενον μεγέθους Α ἐπὶ ἀριθμὸν καλεῖται τὸ μέγεθος τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.*

Οὕτω τὸ γινόμενον $A.5$ εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ Α, τ. ἔ. τὸ ἄθροισμα $A+A+A+A+A$, τὸ γινόμενον $A.\frac{2}{3}$ εἶναι μέγεθος ἴσον πρὸς $A.\frac{1}{3}+A.\frac{1}{3}$, τ. ἔ. πρὸς τὰ δύο τρίτα τοῦ Α, καὶ γενικώτερον τὸ γινόμενον $A.\,3.21\ldots$ εἶναι $A+A+A+\frac{A}{10}+\frac{A}{10}+\frac{A}{100}+\ldots$, ἢ $A.3+\frac{A}{10}.2+\frac{A}{100}+\ldots$.

(Ἁπλουστάτη περίπτωσις εἶναι ὅταν τὸ Α δηλοῖ τμῆμα εὐθείας ἢ τόξον κύκλου ἢ γωνίαν).

Παρατήρησις. Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους τινὸς ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν:

$$\begin{aligned} A.(\alpha+\beta) &= A.\alpha+A.\beta, \\ (A+B).\alpha &= A.\alpha+B.\alpha, \\ (A.\alpha).\beta &= A.(\alpha.\beta). \end{aligned}$$

Αἱ ἀποδείξεις γίνονται πρῶτον διὰ τιμὰς τῶν α, β ἀκεραίας, εἶτα δὲ διὰ κλασματικὰς (καὶ τέλος δι' ἀσυμμέτρους, περὶ ὧν ἐν § 202).

Σημείωσις. Συνήθως γράφομεν $5.A$ ἢ $5A$ ἀντὶ $A.5$, καίτοι τοῦ 5 ὄντος πολλαπλασιαστοῦ, ὡς ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς μονωνύμοις (π.χ. $5\alpha^2\beta$), ἐν οἷς προτάσσεται συνήθως ὁ ἀριθμητικὸς παράγων (συντελεστής).

196. *Κοινὸν μέτρον* δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν καλεῖται ὁμοειδὲς μέγεθος, ἐξ οὗ ἐπαναλαμβανομένου ἀποτελοῦνται ἀμφότερα.

Τῶν ὁμοειδῶν μεγεθῶν τὰ μὲν κοινὸν μέτρον ἔχοντα καλοῦνται πρὸς ἄλληλα *σύμμετρα*, τὰ δὲ μὴ κοινὸν μέτρον ἔχοντα *ἀσύμμετρα*.

Προφανὲς εἶναι ὅτι τὰ μεγέθη A καὶ $B=A.\alpha$, ἔνθα τὸ α ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Οὕτως, ὅταν $\alpha=\frac{2}{3}$, τὰ δύο μεγέθη A καὶ B ἔχουσι κοινὸν μέτρον τὸ $A.\frac{1}{3}=B.\frac{1}{2}$.

Ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἀποδειχθῇ (219. Σημ.), ἡ διαγώνιος τετραγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα.

Περὶ τῆς μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

197. *Μέτρησις* μεγέθους B δι' ἄλλου δεδομένου ὁμοειδοῦς μεγέθους A, λαμβανομένου ὡς *μονάδος*, καλεῖται ἡ σύγκρισις τοῦ B πρὸς τὸ A πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρόπου καθ' ὃν παράγεται τὸ B ἐκ τοῦ A καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκεται πόσαι μονάδες καὶ πόσα πολλοστὰ αὐτῆς ἀποτελοῦσι τὸ μέγεθος B, εὑρίσκεται δηλαδὴ ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὡς τὸ μέγεθος B ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ληφθείσης μονάδος A καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς. Καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος *ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως* τοῦ μεγέθους B διὰ τοῦ μεγέθους A.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἂν μὲν τρὶς εἰς τι μέγεθος B ἡ ληφθεῖσα μονὰς A περιέχηται, δηλαδή, ἂν $B=A+A+A$ ἢ $B=A.3$, ὁ τὸ μέγεθος B παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ 3· ἂν δὲ περιέχηται εἰς τὸ B αὕτη μὲν δίς, τὸ δὲ πέμπτον αὐτῆς τρίς, τουτέστι $B=A.2+A.\frac{3}{5}$, ὁ τὸ μέγεθος τοῦτο μετρῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ $2+\frac{3}{5}$, ἤτοι ὁ $\frac{13}{5}$. Ἐν γένει ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ μεγέθους $B=A.\alpha$ διὰ τῆς μονάδος A εἶναι ὁ ἀριθμὸς α.

Παρατήρησις. Ἂν, ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν ἀμέσως μέγεθός τι Β, μετρήσωμεν τὰ μέρη αὐτοῦ καὶ ἀθροίσωμεν τοὺς ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν μερῶν τούτων προκύπτοντας ἀριθμούς, πρόδηλον εἶναι ὅτι θὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Ἂν π. χ. τὸ Β ἀποτελῆται ἐκ δύο μερῶν Α. α καὶ Α. β καὶ ἀθροίσωμεν τοὺς ἐκ τῆς μετρήσεως τούτων διὰ τοῦ Α προκύπτοντας ἀριθμοὺς α καὶ β, τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα α+β θὰ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ Β= Α.α + Α.β διὰ τοῦ Α.

Ἡ ἰδιότης αὕτη, συμπίπτουσα πρὸς τὴν ἐκφραζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου $Α.(α+β)=Α.α+Α.β$, πηγάζει ἐκ τοῦ ὅτι *τὰ ἰσοδύναμα σχήματα ὡς καὶ τὰ ἴσα παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν*· διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν. Καὶ ἀντιστρόφως *τὰ ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν παριστάμενα ὁμοειδῆ σχήματα εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἰσοδύναμα*· διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν τῆς μονάδος μερῶν.

Λόγος δύο μεγεθῶν.

198. Τὸ *ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως* μεγέθους τινὸς Β δι' ἑτέρου μεγέθους ὁμοειδοῦς Α καλεῖται καὶ *λόγος* τοῦ μεγέθους Β πρὸς τὸ μέγεθος Α. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς αὐτοτελὴς ὁρισμός:

Λόγος μεγέθους B *πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς* A *καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων πῶς τὸ μέγεθος Β σύγκειται ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὡς τὸ πρῶτον μέγεθος σύγκειται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.*

Ἐπὶ παραδείγματος, λόγος τοῦ Α.5 πρὸς τὸ Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5, λόγος τοῦ $Α.\frac{2}{7}$ πρὸς τὸ Α ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{7}$, λόγος τοῦ $Β= Α.3+\frac{Α}{10}.2+\frac{Α}{100}+\ldots$, ἤτοι τοῦ Β=Α. (3,21...), πρὸς τὸ Α ὁ ἀριθμὸς 3,21...

Ὁ τοῦ μεγέθους Β πρὸς τὸ ὁμοειδὲς αὐτοῦ μέγεθος Α λόγος παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\frac{Β}{Α}$.

Παρατήρησις. Τοῦ μεγέθους ἄρα Β πρὸς τὸ Α ὁ λόγος εἶναι ὁ ἀριθμὸς α, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ μέγεθος Α δίδει τὸ Β. Ὥστε ἂν Β=Α.α, θὰ ἔχωμεν $\frac{B}{A}=\alpha$, καὶ ἀντιστρόφως.

Θεώρημα.

199. *Δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν ὁ λόγος ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν τῶν τὰ μεγέθη ταῦτα παριστώντων, ἂν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μετρηθῶσιν.*

Διότι, ἂν λόγος τοῦ μεγέθους Β πρὸς τὸ Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3,215..., ἤτοι (198) ἂν εἶναι $B=3A+2\frac{A}{10}+\frac{A}{100}+5\frac{A}{1000}+...$, μετρήσωμεν δὲ τὰ ἴσα μεγέθη, τὰ ἀποτελοῦντα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος, διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος Μ, θὰ εὕρωμεν ἴσους ἀριθμοὺς (197, παρατήρ.) Οὕτως, ἂν μὲν τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ μεγέθους Β παραστήσωμεν διὰ τοῦ 6, τὸν δὲ προκύπτοντα ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ Α διὰ τοῦ α, ὁ τὸ μέγεθος $\frac{A}{10}$ παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{10}$· διότι ἐπειδὴ τὸ μέγεθος $\frac{A}{10}$ δεκάκις ἐπαναλαμβανόμενον γίνεται Α, καὶ ὁ τοῦτο παριστῶν ἀριθμὸς ὀφείλει δεκάκις λαμβανόμενος νὰ γίνηται α· εἶναι δὲ οὗτος ὁ $\frac{\alpha}{10}$. Ὡσαύτως καὶ ὁ τὸ $\frac{A}{100}$ παριστῶν ἀριθμὸς ὀφείλει νὰ εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{100}$ καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Θὰ ἔχωμεν ἄρα $6=3\alpha+2\frac{\alpha}{10}+\frac{\alpha}{100}+5\frac{\alpha}{1000}+...=\alpha(3,215...)$. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 3,215..., ὅστις εἶναι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Β πρὸς τὸ Α, ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ α, τῶν παριστώντων τὰ μεγέθη Β, Α μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος Μ.

Σημείωσις. Ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰδιότης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐκφραζομένην ὑπὸ τοῦ τρίτου τύπου τοῦ § 195 (Παρατ.). Τῷ ὄντι ἂν Α=Μ.α, Β=Μ.6, Β=Α.λ, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, $\lambda=\frac{B}{A}=\frac{6}{\alpha}$, τουτ' ἔστι 6=αλ.

Ἄρα (Μ.α)λ=Α.λ=Β=Μ.6=Μ.(αλ), τ. ἔ. (Μ.α)λ=Μ. (αλ)·

199 Θεώρ- τῆς ἰσότητος τοῦ λόγου δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν μετρηθέντων διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος πρὸς τὸν λόγον τῶν παριστώντων ταῦτα ἀριθμῶν.

Παρατήρησις. Ἐν τοῖς ἑξῆς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας διάφορα μεγέθη ὁμοειδῆ Α, Β..., μετρηθέντα διὰ κοινῆς ὁμοειδοῦς αὐτοῖς μονάδος, θὰ παριστῶμεν διὰ τῶν συμβόλων (Α), (Β),...

Κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν λοιπὸν θεώρημα ἔχομεν πάντοτε $\frac{B}{A}=\frac{(B)}{(A)}$.

Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.

200. Συνήθως μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν εὐθειῶν λαμβάνεται ὁ *βασιλικὸς πῆχυς*, ἢ τὸ *γαλλικὸν* καλούμενον *μέτρον*, ὅπερ εἶναι περίπου ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{40.000.000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐξαγομένου τῆς μετρήσεως δοθείσης εὐθείας εὑρίσκομεν πρῶτον ποσάκις ἡ μονὰς εἰσέρχεται εἰς τὴν μετρητέαν εὐθεῖαν, τὸ μένον τυχὸν ὑπόλοιπον συγκρίνομεν πρὸς τὸ δέκατον τῆς μονάδος (παλάμην) καὶ εὑρίσκομεν ποσάκις περιέχει αὐτό, ἂν δὲ μείνῃ καὶ πάλιν ὑπόλοιπον μετροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς μονάδος (δακτύλου) καὶ ἐφεξῆς οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον, ὅπερ ἢ θὰ μετρῆται ἀκριβῶς διά τινος δεκαδικοῦ πολλοστημορίου τῆς μονάδος, ἢ θὰ εἶναι τόσον μικρόν, ὥστε τὴν μέτρησιν αὐτοῦ νὰ δυνάμεθα νὰ παραλίπωμεν.

Καλεῖται δὲ ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς προκύπτων ἀριθμός, ὁ καὶ παριστῶν τὴν γραμμὴν ταύτην, *μῆκος τῆς γραμμῆς*.

Οὕτως ἂν ΓΔ=5πχ., ὁ ἀριθμὸς (ΓΔ)=5 καλεῖται μῆκος τῆς γραμμῆς ΓΔ μετρηθείσης διὰ τοῦ πήχεος.

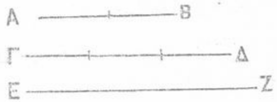
Θεώρημα.

201. *Ἂν εὐθεῖά τις ληφθῇ ὡς μονὰς καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, αἱ μὲν πρὸς τὴν μονάδα* ***σύμμετροι*** *εὐθεῖαι παρίστανται διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (οἵτινες τούτου ἕνεκα καλοῦνται* ***ἀριθμοὶ σύμμετροι****), αἱ δὲ πρὸς τὴν μονάδα ἀσύμμετροι εὐθεῖαι παρίστανται δι' ἀριθμῶν οἵτινες ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ (οἵτινες τούτου ἕνεκα καλοῦνται* ***ἀσύμμετροι****).*

Ἔστω μονὰς μὲν τῶν εὐθειῶν ἡ ΑΒ, σύμμετρος δὲ πρὸς αὐτὴν

201. Θεώρ- παραστάσεως εὐθειῶν πρὸς εὐθεῖαν ἢ μεγεθῶν πρὸς ὁμοειδὲς μέγεθος διὰ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

εὐθεῖα ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ὁ τὴν ΓΔ παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικός. Διότι, ἂν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς ΑΒ, π.χ. πενταπλασία, τὸ μῆκος τῆς ΓΔ μετρηθείσης διὰ τῆς ΑΒ, τ. ἔ. ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ ἰσῶται πρὸς τὸν ἀριθμὸν 5· ἂν δὲ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, περιέχηται ἐν μὲν τῇ ΑΒ δίς, ἐν δὲ τῇ ΓΔ τρίς, πρόδηλον εἶναι ὅτι τὸ μέτρον τοῦτο θὰ εἶναι ἥμισυ τῆς ΑΒ· ἡ ΓΔ ἄρα, ὡς ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ τρὶς ληφθέντος, θὰ παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \text{ ἤτοι διὰ τοῦ } \frac{3}{2}.$$

Ἀντιστρόφως. Εὐθεῖά τις, ἂν παρίσταται δι' ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι πρὸς τὴν μονάδα σύμμετρος.

Διότι, ἂν μὲν παρίσταται δι' ἀριθμοῦ ἀκεραίου, π.χ. τοῦ 5, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος πεντάκις ληφθείσης· εἶναι ἄρα σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα καὶ κοινὸν μέτρον αὐτῶν εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ μονάς· ἂν δὲ παρίσταται δι' ἀριθμοῦ κλασματικοῦ, οἷον τοῦ $\frac{4}{3}$, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τρίτου τῆς μονάδος τετράκις ληφθέντος, ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ μονὰς ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τρίτου αὐτῆς τρὶς ληφθέντος, ἕπεται ὅτι τὸ τρίτον τῆς μονάδος εἶναι κοινὸν μέτρον καὶ τῆς μονάδος καὶ τῆς εὐθείας.

Λοιπὸν καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ εὐθεῖα εἶναι πρὸς τὴν μονάδα σύμμετρος.

202. Ὑποτεθείσθω νῦν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν τῶν εὐθειῶν μονάδα ἀσύμμετρος· λέγω ὅτι ὁ τὴν εὐθεῖαν ταύτην παριστῶν ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Διότι, ἂν τὴν ΕΖ μετρήσωμεν διὰ τῆς μονάδος ΑΒ, θὰ εὕρωμεν ὅτι σύγκειται ἔκ τινος (ἀκεραίου) πολλαπλασίου τῆς μονάδος, οἷον τοῦ ΑΒ.ρ, καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου μικροτέρου τῆς ΑΒ'· ἂν δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετρήσωμεν διὰ τοῦ δεκάτου τῆς ΑΒ, θὰ εὕρωμεν ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου τῆς μονάδος, μὴ ὑπερβαίνοντος τὸ ἐννεαπλάσιον, οἷον τοῦ ΑΒ. $\frac{\rho_1}{10}$, καὶ ἐξ ὑπολοίπου μικροτέρου τοῦ δεκάτου τῆς μονάδος. Ὡσαύτως, ἂν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετρήσωμεν διὰ τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς ΑΒ θὰ εὕρωμεν ὅτι ἀποτελεῖται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ ἑκατοστοῦ, μὴ ὑπερβαίνοντος τὸ ἐννεαπλάσιον, οἷον τοῦ ΑΒ. $\frac{\rho_2}{100}$, καὶ ἐξ ὑπολοίπου, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· ἡ δεδομένη ἄρα εὐθεῖα θὰ σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος ΑΒ ληφθείσης ρ φοράς, καὶ ἐκ τοῦ δεκάτου αὐτῆς ληφθέντος ρ_1 φοράς, καὶ ἐκ τοῦ ἑκατοστοῦ αὐτῆς ληφθέντος ρ_2 φορὰς καὶ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον οὕτως· ὁ τὴν εὐθεῖαν ἄρα παριστῶν ἀριθμὸς θὰ ἰσῶται πρὸς τὸν δεκαδικὸν

$$\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\ldots\ldots,$$

οὗ τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος καὶ δὲν ἔχουσι περίοδον· διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς θὰ ἦτο, κατὰ τὰ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωστά, σύμμετρος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΖ θὰ ἦτο τῇ ΑΒ σύμμετρος, ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Σημείωσις. Ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ περὶ τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ περὶ γωνιῶν (διότι τὰ μεγέθη ταῦτα συγκρίνονται πρὸς ἄλληλα ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι γραμμαί) καὶ ἐν γένει περὶ μεγεθῶν ὁμοειδῶν οἱωνδήποτε.

Μέτρησις τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

Ὁρισμοί.

203. Διὰ τὴν *μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν μονὰς* λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν ἴσην τῇ μονάδι τῶν εὐθειῶν. Ἂν λοιπὸν τὰς εὐθείας μετρῶμεν διὰ τοῦ πήχεως, τὰς ἐπιφανείας θὰ μετρῶμεν διὰ τοῦ *τετραγωνικοῦ πήχεως*, τ. ἔ. τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς τὸν πῆχυν.

Καλεῖται δὲ ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως ἐπιφανείας προκύπτων ἀριθμός, ὁ καὶ παριστῶν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην, *ἐμβαδὸν* τῆς ἐπιφανείας.

Τριγώνου καλεῖται *βάσις* μὲν μία τις τῶν τούτου πλευρῶν, *ὕψος* δὲ ἡ κάθετος ἡ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη.

Παραλληλογράμμου δὲ καλεῖται *βάσις* μὲν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ οἱαδήποτε, *ὕψος* δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Κατὰ ταῦτα τοῦ ὀρθογωνίου τετραπλεύρου *βάσις* καὶ *ὕψος* λαμβάνονται ἀδιαφόρως δύο αὐτοῦ προσκείμεναι πλευραί· καλοῦνται δὲ αἱ πλευραὶ αὗται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου.

Τραπεζίου δὲ καλοῦνται *βάσεις* μὲν αἱ παράλληλοι αὐτοῦ πλευραί, *ὕψος* δὲ ἡ τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις.

Παρατήρησις. Χάριν συντομίας καλοῦμεν πολλάκις *βάσιν* καὶ *ὕψος* τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὰς γραμμὰς τὰς ἐχούσας τὸ αὐτὸ ὄνομα.

Θεώρημα.

2

204. *Ὀρθογωνίου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος* (ἤτοι τῶν παριστώντων ταῦτα ἀριθμῶν).

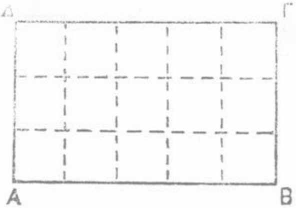
Ἐν τῷ θεωρήματι τούτῳ διακρίνονται πλείονες περιπτώσεις, κατὰ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ ἢ ἀσύμμετροι.

1ον. Ἔστω ὅτι τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἡ μὲν βάσις ΑΒ$=5^{\pi\chi.}$, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ$=3^{\pi\chi.}$, λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο θὰ περιέχῃ τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν πεντάκις ἐπὶ τρία, ἤτοι 5×3 φοράς· ἡ τοῦ ὀρθογωνίου ἄρα ἐπιφάνεια, μετρηθεῖσα διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεος, θὰ παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 15.

Διότι, ἂν ἡ βάσις μὲν ΑΒ διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἰς τρία, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας

204 Θεώρ- τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου τινὸς καθ' ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις

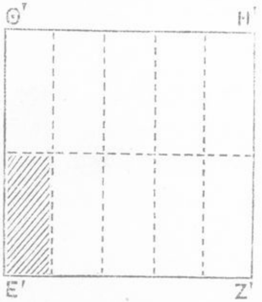
τούτων ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἑτέρᾳ, πρόδηλον εἶναι ὅτι τὸ ὀρθογώνιον θὰ διαιρεθῇ εἰς τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰς ἴσας τῇ μονάδι τῶν εὐθειῶν.



Ἐπειδὴ δὲ αἱ τῇ ΑΒ παράλληλοι θὰ διαιρέσωσιν αὐτὸ εἰς τρία ὀρθογώνια, ὧν ἕκαστον θὰ περιέχῃ πέντε τετράγωνα, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν τετραγώνων τούτων θὰ εἶναι 5×3. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τοῦτο ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς $5 \times 3^{\tau.\pi\chi.}$.

2ον. Ἔστω ὅτι τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ ἡ μὲν βάσις $ΕΖ = \frac{4}{5}^{\pi\chi.}$, τὸ δὲ ὕψος $ΕΘ = \frac{3}{2}^{\pi\chi.}$, λέγω ὅτι ὁ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, μετρηθέντος διὰ τοῦ τ. πήχεως, παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$.

Διότι, ἂν ἡ μὲν ΕΖ διαιρεθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη, ἡ δὲ ΕΘ εἰς 3, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας τούτων ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἑτέρᾳ θὰ διαιρεθῇ τὸ ὀρθογώνιον εἰς 4×3 ὀρθογώνια ἔχοντα πλευρὰς τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος τῶν εὐθειῶν.

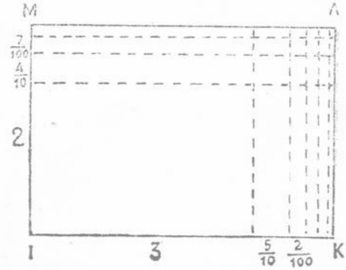


Ἂν δὲ κατασκευασθῇ ἡ μονὰς Ε′Ζ′Η′Θ′ τῶν ἐπιφανειῶν, διαιρεθῶσι δὲ ἡ μὲν Ε′Ζ′ εἰς 5 ἴσα μέρη, ἡ δὲ Ε′Θ′ εἰς 2, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας τούτων ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἑτέρᾳ, θὰ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον εἰς 5×2 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ καὶ τὸ τετράγωνον Ε′Ζ′Η′Θ′ ἔχουσι κοινὸν πολλοστὸν μέρος, περιεχόμενον ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τετράκις ἐπὶ τρία (4×3), ἐν δὲ τῇ μονάδι τῶν ἐπιφανειῶν πεντάκις ἐπὶ δύο (5×2).

Ὁ τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παριστῶν ἀριθμὸς εἶναι $\frac{4\times3}{5\times2}$, ὅστις εἶναι γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{3}{2}$ τῶν παριστώντων τὰς τούτου πλευράς.

3ον. Ἔστω ὅτι τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου ΙΚΛΜ, ἡ μὲν βάσις ΙΚ = 3,528...πχ., τὸ δὲ ὕψος ΙΜ=2,476...πχ. Ἂν αἱ πλευραὶ ΙΚ καὶ ΙΜ διαιρεθῶσιν εἰς τὰ μέρη τῆς μονάδος ἐξ ὧν ἑκάστη σύγκειται, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας τούτων ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἑτέρᾳ, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο θὰ διαιρεθῇ εἰς πλῆθος ὀρθογωνίων ἐχόντων πλευρὰς συμμέτρους τῇ μονάδι· οἱ δὲ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τούτων παριστῶντες ἀριθμοὶ θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς:



$$3.2,\quad \frac{5}{10}.\,2,\quad \frac{2}{100}.\,2,\quad \frac{8}{1000}.\,2,\ \ldots\ldots\ldots$$

$$3.\frac{4}{10},\quad \frac{5}{10}.\frac{4}{10},\quad \frac{2}{100}.\frac{4}{10},\quad \frac{8}{1000}.\frac{4}{10},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$3.\frac{7}{100},\ ,\frac{5}{10}.\frac{7}{100},\quad \frac{2}{100}.\frac{7}{140},\quad \frac{8}{1000}.\frac{7}{100},\ \ldots\ldots\ldots$$

. . . .

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀριθμῶν 3,528... καὶ 2,476..., διότι ἕκαστον μέρος ἑκατέρου τούτων πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ ἑτέρου, ἕπεται ὅτι καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τοῦ ὀρθογωνίου ΙΚΛΜ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ (ΙΚ) ἐπὶ τὸ ὕψος (ΙΜ).

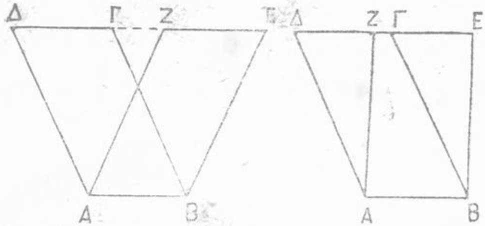
Θεώρημα.

2

205. *Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα καὶ βάσεις καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα.*

205. Θεώρ- τοῦ ἰσοδυνάμου τῶν παραλληλογράμμων τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ὑψῶν.

Ἔστωσαν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, ἅτινα ἔχουσι



τὴν μὲν βάσιν ΑΒ κοινήν, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἔχουσι τὰς ἄνω βάσεις ΓΔ, ΕΖ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ βάσει ΑΒ παραλλήλου.

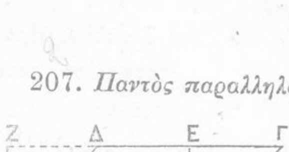
Λέγω ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι κατ᾽ ἀμφοτέρας τὰς τῶν παραλληλογράμμων δυνατὰς θέσεις θὰ ἔχωμεν ΑΔ=ΒΓ καὶ ΑΖ=ΒΕ· ἔτι δὲ καὶ ΔΓ=ΖΕ, διότι ἑκατέρα τούτων ἰσοῦται τῇ ΑΒ. Ἂν δὲ ἐκ τῆς ΔΕ ἀφαιρέσωμεν ἢ τὴν ΔΓ, ἢ τὴν ΖΕ, θὰ ἔχωμεν τὰ ἴσα ὑπόλοιπα ΓΕ καὶ ΔΖ· τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΖΔ καὶ ΒΕΓ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα (82)· τούτου ἕνεκα ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ, ἂν μὲν ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΖΔ θὰ ὑπολειφθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ, ἂν δὲ ἀφαιρεθῇ τὸ ΒΕΓ θὰ ὑπολειφθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΘ. Λοιπὸν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, ἔχοντα καὶ βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα.

206. *Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Θεώρημα.

207. *Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*



Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΕ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα (206). Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι (ΑΒ) $\times$(ΒΕ) (204), ἕπεται ὅτι καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ γενομένῳ (ΑΒ)$\times$(ΒΕ).

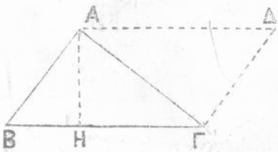
Πόρισμα.

208. *Τῶν παραλληλογράμμων τὰ μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ αὐτῶν ὕψη· τὰ δὲ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ αὐτῶν βάσεις.*

Τοῦτο συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῶν τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν παριστώντων ἀριθμῶν, ἂν στηριχθῶμεν καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος ~~200~~, 199 καὶ ἐπὶ τῆς ἰδιότητος καθ' ἥν, τῶν α, β, γ παριστώντων ἀριθμούς, ἔχομεν $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Θεώρημα.

209. *Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΗΑ, οἷον τὸ ΑΒΓΔ, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τούτου.

Διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα (82).

Πόρισμα.

210. *Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα καὶ βάσεις καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα.* διότι κατατεμνόμενα μετασχηματίζονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον [illegible]

Θεώρημα.

211. *Παντὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι (ΒΓ)$\times$(ΗΑ), τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν θὰ εἶναι ἴσον τῷ $\frac{1}{2}$ (ΒΓ)$\times$(ΗΑ).

Πόρισμα.

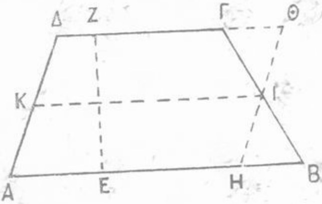
212. *Τῶν τριγώνων τὰ μὲν ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ αὐτῶν βάσεις· τὰ δὲ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ αὐτῶν ὕψη.*

Τῶν τὴν αὐτὴν ἄρα βάσιν ἐχόντων ἰσοδυνάμων τριγώνων ὁ τῶν κορυφῶν αὐτῶν τόπος εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει.

Θεώρημα.

213. *Παντὸς τραπεζίου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεων.*

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς ΒΓ ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΑΔ, προεκταθῇ δὲ ἡ ΔΓ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΗΘ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΒΙΗ καὶ ΓΙΘ, ἅτινα, ἐπειδὴ θὰ ἔχωσι τὴν μὲν πλευρὰν ΒΙ=ΓΙ, τὰς δὲ πρὸς τὰς πλευρὰς ταύτας ΒΙ καὶ ΓΙ προσκειμένας γωνίας ἴσας, θὰ εἶναι ἴσα (81).



Τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΓΔ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗΘΔ, ὡς ἀποτελούμενα ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΒΙΗ καὶ ΓΙΘ καὶ ἐκ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν μέρους ΑΗΙΓΔ, εἶναι ἰσοδύναμα.

Λοιπὸν τοῦ τραπεζίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΗΘΔ, ἤτοι τῷ γινομένῳ $(\text{ΑΗ})\times(\text{ΕΖ})$.

Ἐπειδὴ δὲ ΑΗ=ΔΘ (122) καὶ ΗΒ=ΓΘ, ἔτι δὲ $(\text{ΑΗ})=(\text{ΑΒ})-(\text{ΗΒ})$ καὶ $(\text{ΔΘ})=(\text{ΔΓ})+(\text{ΓΘ})$, ἕπεται ὅτι, ἂν τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας προσθέσωμεν κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν $2\,(\text{ΑΗ})=(\text{ΑΒ})+(\text{ΔΓ})$, ἐξ ἧς $(\text{ΑΗ})=\frac{(\text{ΑΒ})+(\text{ΔΓ})}{2}$.

Λοιπὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ

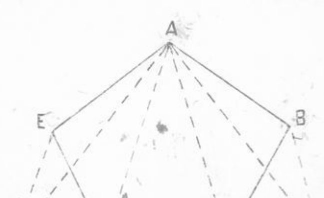
$$(\text{ΕΖ}).\frac{(\text{ΑΒ})+(\text{ΔΓ})}{2}.$$

Σημείωσις. Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ΙΚ τῇ ΑΒ παράλληλος, τὸ Κ θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ· διότι τὰ σχήματα ΑΗΙΚ καὶ ΔΚΙΘ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΑΚ=ΗΙ καὶ ΚΔ=ΙΘ· ἐπειδὴ δὲ ΗΙ=ΙΘ, διότι εἶναι πλευραὶ ἴσων τριγώνων, ἕπεται ὅτι ΑΚ=ΗΙ=ΚΔ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ΚΙ=ΑΗ=$\frac{ΑΒ+ΔΓ}{2}$, ἕπεται ὅτι, τοῦ τραπεζίου τὸ ἐμβαδὸν δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ διὰ τοῦ γινομένου (ΕΖ)×(ΚΙ)· ἤτοι *πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ ἔχοντι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.*

Πρόβλημα

214. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον δεδομένῳ πολυγώνῳ.*

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ. Πρὸς τοῦτο ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν, οἷον τῆς Α, ἂς ἀχθῇ διαγώνιος, ὥστε τὸ ἕτερον τῶν μερῶν εἰς ἃ τὸ πολύγωνον δι' αὐτῆς διαιρεῖται νὰ εἶναι τρίγωνον, π. χ. ἡ ΑΓ, διαιροῦσα τὸ πολύγωνον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ τετράπλευρον ΓΔΕΑ· ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΖ τῇ ΑΓ παράλληλος, συναντῶσα τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΑΖ, τὸ δεδομένον πολύγωνον καὶ τὸ σχηματισθησόμενον ΑΖΔΕ, οὗ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ δεδομένου πολυγώνου, εἶναι ἰσοδύναμα· διότι ἔχουσι τὸ μὲν πολύγωνον ΑΓΔΕ κοινόν, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ ἰσοδύναμα.



Διὰ δευτέρας δὲ ἐργασίας, ἀναλόγου πρὸς τὴν πρώτην, θὰ μετασχηματισθῇ τὸ πολύγωνον ΑΖΔΕ εἰς ἕτερον ἰσοδύναμον, οὗ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι κατὰ μίαν ἔτι μονάδα μικρότερος· οὕτω δὲ τέλος θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΑΖΗ.

Παρατήρησις.

215. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων αἱ ἐπιφάνειαι μετροῦνται καὶ παρίστανται δι' ἀριθμῶν· κατ' ἀκολουθίαν πᾶσα τῶν εὐθειῶν γραμμῶν ἢ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων πρὸς ἀλλήλας ἰσότης τρέπεται εἰς ἀριθμῶν ἰσότητα.

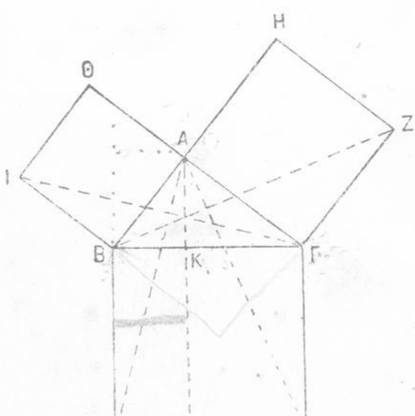
Τῶν σχημάτων ἄρα (εἴτε ἀκεραίων εἴτε διῃρημένων) ἡ ἰσότης ἔχει πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς τῶν ἀριθμῶν ἰσότητος.

Τὸ αὐτὸ δὲ προφανῶς συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀνισότητας.

(Πυθαγόρειον) Θεώρημα.

Χατζηδάκι 114 Νικολάου 116 ... 138

216. *Τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων τοῦ τριγώνου πλευρῶν.*



Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κατασκευασθῶσι τετράγωνα, ἐκ δὲ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ ἡ ΑΚ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ κάθετος, προεκταθῇ δὲ αὕτη μέχρι τοῦ Π, τὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον θὰ διαιρεθῇ εἰς τὰ ὀρθογώνια ΒΔΠΚ καὶ ΚΠΕΓ. Τῶν ὀρθογωνίων τούτων τὸ μὲν ΒΔΠΚ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ ΑΒΙΘ, τὸ δὲ ΚΠΕΓ ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ ΑΓΖΗ. Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ

216 τιμή της υποτεινούσης ορθογ- τριγώνου

1. Η ισότης των γωνιων αποδεικνύεται δι αυξήσεως των ορθών κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα καὶ ὄχι δι ἀφαιρέσεως

καὶ ΓΙ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΙΓ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν μὲν πλευρὰν ΑΒ=ΒΙ, τὴν δὲ πλευρὰν ΒΔ= ΒΓ, τὴν δὲ γωνίαν ΑΒΔ=ΙΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΠΚ, διότι ἀμφότερα ἔχουσι κοινὴν βάσιν, τὴν ΒΔ, καὶ κοινὸν ὕψος, τὸ ΒΚ, τὸ δὲ ΙΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΘΙΒ, διότι ἀμφότερα ἔχουσι κοινὴν βάσιν, τὴν ΒΙ, καὶ κοινὸν ὕψος, τὸ ΑΒ, ἕπεται ὅτι τὸ τετράγωνων ΑΒΙΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΔΠΚ. Ἂν δὲ ἀχθῶσιν ἡ ΒΖ καὶ ἡ ΑΕ, θὰ ἀποδειχθῇ ὡσαύτως ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΚΠΕΓ.

ἰσότης τριγώνων σελ- 27 Θεωρ- 8

Λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΒΓΕΔ, ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΒΚΠΔ καὶ ΚΓΕΠ, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων ΑΘΙΒ καὶ ΑΓΖΗ.

Ἡ ἀποδειχθεῖσα σχέσις παρίσταται διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου (215)

$$(\text{ΒΓ})^2=(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΑΓ})^2.$$

Πόρισμα 1ον.

217. *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τοῦ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζομένου τετραγώνου καὶ τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς·* ἤτοι

$$(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΒΓ})^2-(\text{ΑΓ})^2 \text{ καὶ } (\text{ΑΓ})^2=(\text{ΒΓ})^2-(\text{ΑΒ})^2.$$

Πόρισμα 2ον.

218. *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν·* ἤτοι

προβολη σελ- 23 σχρ- 73

$$(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΒΓ})\times(\text{ΒΚ}) \text{ καὶ } (\text{ΑΓ})^2=(\text{ΒΓ})\times(\text{ΚΓ}).$$

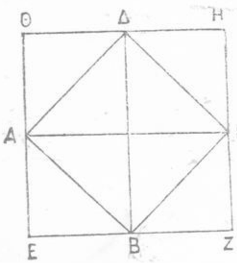
Πόρισμα 3ον.

219. *Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου.*

219. τιμή της διαγωνίου τετραγώνου. και εξ αιτίας αυτης την κατανόησιν των

Διότι, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὄντος ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς, ἕπεται ὅτι

$$(ΑΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2=2(ΑΒ)^2.$$



Τοῦτο δεικνύεται προσέτι ἂν ἐκ μὲν τῶν Α καὶ Γ ἀχθῶσι τῇ ΒΔ παράλληλοι, ἐκ δὲ τῶν Β καὶ Δ τῇ ΑΓ παράλληλοι. Διότι τὸ μὲν τετράγωνον ΕΖΗΘ θὰ ἀποτελῆται ἐξ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων τῷ ΑΕΒ, τὸ δὲ ΑΒΓΔ ἐκ τεσσάρων τοιούτων τριγώνων.

Σημείωσις. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{(ΑΓ)^2}{(ΑΒ)^2}=2$ ἀποδεικνύεται ὅτι *ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, ὅτι δηλαδὴ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΑΒ ἔχουσιν ὡς κοινὸν μέτρον εὐθεῖαν περιεχομένην μ φορὰς ἐν τῇ διαγωνίῳ καὶ ν φορὰς ἐν τῇ πλευρᾷ, θὰ ἔχωμεν (§ 201) $\frac{(ΑΓ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{\mu^2}{\nu^2}$ καὶ ἄρα $\frac{\mu^2}{\nu^2}=2$, ἤτοι $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=2$.

Οὕτω δὲ θὰ προέκυπτεν ὅτι ὁ 2 εἶναι τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ (διότι οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι), ὅπερ ἄτοπον, ὡς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀπεδείχθη.

Λοιπὸν κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα 4ον.

220. *Ἂν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἔχοντι βάσιν καὶ ὕψος τὰς προβολὰς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Διότι, τοῦ τριγώνου ΑΒΚ ὄντος ὀρθογωνίου, προκύπτει ὅτι

$$(ΑΚ)^2=(ΑΒ)^2-(ΒΚ)^2 \text{ ἢ } (ΑΚ)^2=(ΒΔΠΚ)-(ΒΚ)^2.$$

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΠΚ ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τῆς

220 τιμή της καθέτου εκ της κορυ

ΒΚ, θὰ μείνῃ ὀρθογώνιον ἔχον πλευρὰς ἴσας τῇ ΒΚ καὶ τῇ ΚΓ.

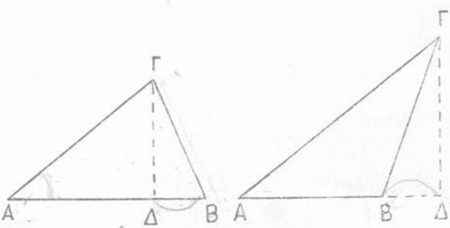
Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν $(ΑΚ)^2=(ΒΚ)\times(ΚΓ)$

Θεώρημα. ἡ τιμὴ τῆς πλευρᾶς τῆς ἀντικειμένης ὀξείας γωνίας τριγώ

221. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας κειμένης πλευρᾶς τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἑτέρας ἐπὶ ταύτην.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, καὶ ΒΓ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρά, ΑΔ δὲ ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι εἶναι

$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΑΒ)\times(ΑΔ)$.



Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν (~~215~~ 216)

$$(ΒΓ)^2=(ΔΒ)^2+(ΔΓ)^2$$

καὶ ἐπειδή, ὅταν μὲν ἡ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα, εἶναι $(ΔΒ)=(ΑΒ)-(ΑΔ)$, ὅταν δὲ ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, εἶναι $(ΔΒ)=(ΑΔ)-(ΑΒ)$, εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἔχομεν

$$(ΔΒ)^2=(ΑΒ)^2-2(ΑΒ)\times(ΑΔ)+(ΑΔ)^2.$$

Καὶ κατ' ἀκολουθίαν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΔΒ)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, θὰ ἔχωμεν

$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2-2(ΑΒ)\times(ΑΔ)+(ΑΔ)^2+(ΔΓ)^2$$

καὶ ἐπειδὴ $(ΑΔ)^2+(ΔΓ)^2=(ΑΓ)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσότητα

$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΑΒ)\times(ΑΔ).$$

Τὸ γιν- εἶναι δυο ὀρθογώνια

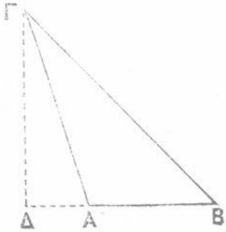
Θεώρημα.

222. *Ἐν παντὶ ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ τῆς ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας κειμένης πλευρᾶς τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι*

222. τιμὴ τῆς πλευρᾶς τῆς ἀντικειμένης ἀμβλείας γωνίας τριγώνου.

τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ηὐξημένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἑτέρας ἐπὶ ταύτην.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ ΔΑ ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ προβολὴ τῆς ΓΑ· λέγω ὅτι εἶναι



$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΑΒ)\times(ΑΔ).$$

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν (~~215~~ 216)

$$(ΒΓ)^2=(ΔΒ)^2+(ΔΓ)^2$$

καὶ ἐπειδὴ $(ΔΒ)=(ΔΑ)+(ΑΒ)$

ἔχομεν $$(ΔΒ)^2=(ΔΑ)^2+(ΑΒ)^2+2(ΔΑ)\times(ΑΒ),$$

καὶ ἄρα, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΔΒ)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, θὰ ἔχωμεν

$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+2(ΑΒ)\times(ΔΑ)+(ΔΑ)^2+(ΔΓ)^2,$$

καὶ ἐπειδὴ $(ΔΑ)^2+(ΔΓ)^2=(ΑΓ)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσότητα

$$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΑΒ)\times(ΔΑ).$$

Πόρισμα.

3

223. *Ἂν ἐν τριγώνῳ μία πλευρὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία εἶναι ὀρθή.*

Διότι κατὰ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα, ἂν ἡ ἀπέναντι γωνία ἦτο ἢ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ταύτης θὰ ἦτο ἢ μικρότερον ἢ μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν.

Θεώρημα περὶ τῶν διαμέσων τριγώνου

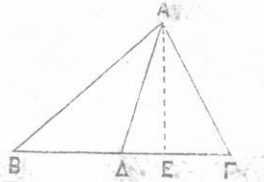
3

224. *Παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τετραγώνῳ τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῶν πλευρῶν τούτων ἀγομένης διαμέσου ηὐξημένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς.*

224 Τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν παντὸς τριγώνου

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α διάμεσος ΑΔ· λέγω ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=2(A\Delta)^2+2(B\Delta)^2.$$



Διότι, ἂν ΔΕ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΔΑ ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν, τῆς γωνίας ΑΔΒ οὔσης ἀμβλείας, ἐκ μὲν τοῦ τριγώνου ΑΔΒ (222)

$$(AB)^2=(B\Delta)^2+(\Delta A)^2+2(B\Delta)\times(\Delta E),$$

ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ (221)

$$(A\Gamma)^2=(A\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2-2(\Delta\Gamma)\times(\Delta E).$$

Ἂν δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη προσθέσωμεν θὰ ἔχωμεν

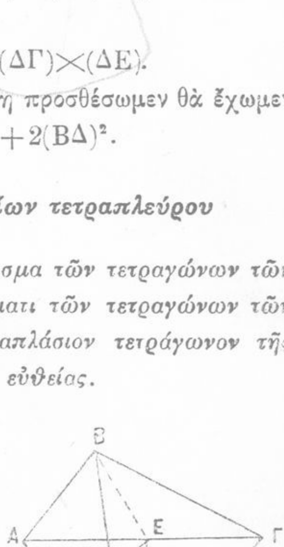
$$(AB)^2+(\Gamma A)^2=2(A\Delta)^2+2(B\Delta)^2.$$

Θεώρημα περὶ τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου

225. *Παντὸς τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων ηὐξημένῳ κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.*

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ τὰ μέσα, Ε,Ζ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα· λέγω ὅτι θὰ εἶναι

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta A)^2=$$
$$(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2+4(EZ)^2$$



Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΕΔ καὶ ΕΖ, ἐκ μὲν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, θὰ ἔχωμεν (224) τὰς ἰσότητας

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2=2(BE)^2+2(E\Gamma)^2$$

καὶ $$(\Gamma\Delta)^2+(\Delta A)^2=2(\Delta E)^2+2(E\Gamma)^2,$$

ἐξ ὧν προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta A)^2=2(BE)^2+2(\Delta E)^2+4(E\Gamma)^2. \quad (\alpha)$$

225. Τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ...

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ θὰ ἔχωμεν (224) τὴν ἰσότητα

$$(\mathrm{BE})^2+(\Delta\mathrm{E})^2=2(\mathrm{Z}\Delta)^2+2(\mathrm{EZ})^2,$$

ἢ $$2(\mathrm{BE})^2+2(\Delta\mathrm{E})^2=4(\mathrm{Z}\Delta)^2+4(\mathrm{EZ})^2,$$

κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰσότης (α) γίνεται

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B}\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=4(\Delta\mathrm{Z})^2+4(\mathrm{EZ})^2+4(\mathrm{E}\Gamma)^2. \quad (\beta)$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{A}\Gamma)=2(\mathrm{E}\Gamma)$ καὶ $(\mathrm{B}\Delta)=2(\mathrm{Z}\Delta)$, Τιμή διαγωνίων

ἕπεται ὅτι $(\mathrm{A}\Gamma)^2=4(\mathrm{E}\Gamma)^2$ καὶ $(\mathrm{B}\Delta)^2=4(\mathrm{Z}\Delta)^2$.

Οὕτως ἄρα ἐκ τῆς ἰσότητος (β) ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B}\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=(\mathrm{A}\Gamma)^2+(\mathrm{B}\Delta)^2+4(\mathrm{EZ})^2.$$

Πόρισμα

3

226. *Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.*

Διότι ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ, ἐπειδὴ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν διαγωνίων συμπίπτουσιν (~~248~~ 128), ἡ εὐθεῖα ΕΖ μηδενίζεται.

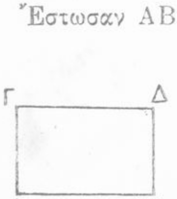
Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Πρόβλημα

4

227. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον δεδομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

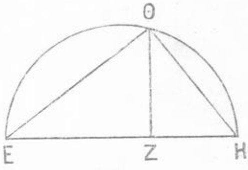
Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ δεδομένου ὀρθογωνίου ΑΒΔΓ. Ἂν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗτινος ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετος νὰ διαιρῇ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη ἴσα ταῖς πλευραῖς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου (220).



Πρὸς τοῦτο ἐπί τινος εὐθείας λαμβάνομεν τὴν μὲν ΕΖ ἴσην τῇ

226 Τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των πλευρών παντός παραλληλογράμμου

ΑΒ, τὴν δὲ ΖΗ ἴσην τῇ ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΕΗ γράφομεν ἡμικύκλιον· οὕτω δὲ ἡ ἐκ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΖΗ ἀγομένη μέχρι τῆς περιφερείας κάθετος ΖΘ, εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



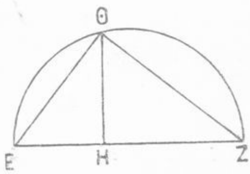
Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΘΕ καὶ ΘΗ, ἐκ τοῦ σχηματισθησομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΘΗ, θὰ ἔχωμεν (220)

$$(Z\Theta)^2 = (EZ)\times(ZH), \text{ ἤτοι } (Z\Theta)^2 = (AB)\times(A\Gamma).$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς:

Ἂν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον τὴν μὲν ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ ΑΒ (ὑποτεθέντος ΑΒ$>$ΑΓ), τὸ δὲ ἕτερον τῶν τμημάτων αὐτῆς (εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης ἐπ' αὐτὴν καθέτου) ἴσον τῇ ΑΓ, ἡ πρὸς τὸ τμῆμα τοῦτο προσκειμένη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ δεδομένῳ ὀρθογωνίῳ (218).

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας λαμβάνεται ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἴση τῇ ΑΒ, ἐπ' αὐτῆς δέ, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου, ἔστω τοῦ Ε, ἡ ΕΗ ἴση τῇ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ ὡς διαμέτρου γράφεται ἡμιπεριφέρεια· οὕτω δέ, ἂν ἐκ τοῦ Η, ἀχθῇ ἡ ΗΘ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετος καὶ ἐκ τοῦ σημείου Θ, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΘΕ, ΘΖ, λέγω ὅτι ἡ ΘΕ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΘΕΖ, θὰ ἔχωμεν (218)

$$(\Theta E)^2 = (EZ)\times(EH), \text{ ἤτοι } (\Theta E)^2 = (AB)\times(A\Gamma).$$

Πόρισμα

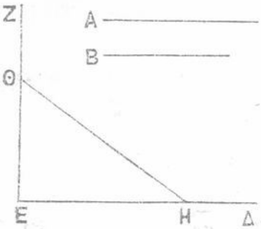
228. *Δεδομένου εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον.*

Διότι πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ σχήματι, καὶ εἶτα τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ.

Πρόβλημα

229. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι δύο δεδομένων τετραγώνων.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.



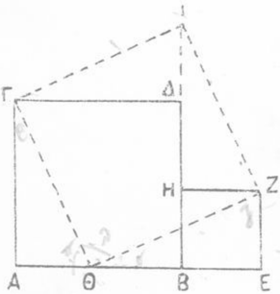
Σχηματίζομεν ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΖΕΔ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν μὲν ΕΗ=Α, τὴν δὲ ΕΘ=Β καὶ ἄγομεν τὴν ΘΗ, ἥτις λέγω ὅτι εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΕΗ, ὅπερ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ ἔχωμεν (216),

$$(\Theta H)^2=(EH)^2+(E\Theta)^2, \text{ ἤτοι } (\Theta H)^2=(A)^2+(B)^2.$$

Ἐπαναλαμβάνοντες δὲ πολλάκις ἐφεξῆς τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε δεδομένων τετραγώνων.

Σημείωσις. Ἂν ζητῆται ἐκ τῶν μερῶν τῶν δεδομένων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον, τὸ πρόβλημα λύεται ὡς ἑξῆς:



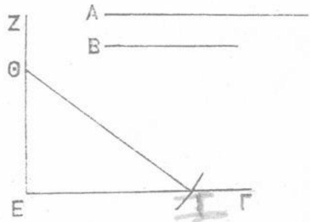
Παραθέτομεν τὰ δεδομένα τετράγωνα ΑΒΔΓ καὶ ΒΕΖΗ, ὡς ἐν τῷ σχήματι δεικνύεται, εἶτα λαμβάνομεν τὴν ΑΘ ἴσην τῇ ΒΕ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΓΘ καὶ ΘΖ· οὕτω δέ, ἂν τὰ προκύψαντα τρίγωνα ΓΑΘ καὶ ΘΕΖ ἀποτμήσωμεν καὶ θέσωμεν αὐτά, τὸ μὲν ΓΑΘ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΙΗΖ, τὸ δὲ ΘΕΖ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΓΔΙ, θὰ ἀποτελεσθῇ τὸ σχῆμα ΓΘΖΙ, ὅπερ ὡς ἀποδεικνύεται εἶναι τετράγωνον.

Πρόβλημα

230. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ δύο δεδομένων τετραγώνων.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.

Σχηματίζομεν ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΖΕΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς αὐτῆς τὴν ΕΘ ἴσην τῇ μικροτέρᾳ τῶν δεδομένων εὐθειῶν Β, καὶ γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ἑτέρᾳ δεδομένῃ πλευρᾷ Α, τέμνουσαν δὲ τὴν ΕΓ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Ι (136). Οὕτω δέ, ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ ΘΙ, λέγω ὅτι ἡ ΕΙ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΕΙ, ὅπερ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ ἔχωμεν

$$(ΕΙ)^2=(ΘΙ)^2-(ΘΕ)^2, \text{ ἤτοι } (ΕΙ)^2=(Α)^2-(Β)^2.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) Παραλληλογράμμου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἡ μὲν 40 πχ., ἡ δὲ 52 πχ., ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. (Ἀπ. $1040.\sqrt{2}$ τ.πχ.).

2) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 8 πχ., 8,4 πχ. καὶ 11,6 πχ. Ζητοῦνται αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου. (Ἀπ. 9,30 πχ., 5,80 πχ. καὶ 9,03 πχ.).

3) Τραπεζίου αἱ βάσεις εἶναι ἡ μὲν 100 πχ. ἡ δὲ 160 πχ., αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη 50 πχ. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. (Ἀπ. 5200 τ.πχ.).

4) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν βάσις εἶναι 9 πχ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 7,5 πχ.

Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. (Ἀπ. 27 τ. πχ.).

5) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι 40,95 πχ., ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 37,8 πχ.

Ζητεῖται ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀγομένη κάθετος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. (Ἀπ. 15,75 πχ., 14,53πχ. καὶ 297,675 τ.πχ.).

6) Τραπεζίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 120 τ. πχ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν βάσεων εἶναι 8,20 πχ., τὸ δὲ ὕψος 3,20 πχ.

Ζητεῖται ἡ ἑτέρα βάσις. (Ἀπ. 66,80 πχ.).

7) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι 30 πχ., τὸ δὲ ἕτερον τῶν τμημάτων εἰς ἃ αὕτη χωρίζεται ὑπὸ τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης ἐπ' αὐτὴν καθέτου εἶναι 20 πχ. Ζητεῖται ἡ ἀχθεῖσα κάθετος καὶ αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας. (Ἀπ. $υ=14,14$ πχ., $β=24,49$ πχ. καὶ $γ=17,32$ πχ.).

8) Παραλληλογράμμου αἱ μὲν προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι 17 πχ. καὶ 32 πχ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν διαγωνίων εἶναι 43 πχ.

Ζητεῖται ἡ ἑτέρα διαγώνιος. (Ἀπ. 27,87 πχ.).

9) Παραλληλογράμμου, οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἡ μὲν 25 πχ., ἡ δὲ 40 πχ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν πλευρῶν 18 πχ., ζητεῖται ἡ περίμετρος. (Ἀπ. 92,16 πχ.).

10) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τραπεζίου, οὗ αἱ μὲν βάσεις εἶναι 32 πχ. καὶ 25 πχ., αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 7 πχ. καὶ 12 πχ.

11) Ἂν ἐπὶ τῶν πλευρῶν δεδομένου κανονικοῦ ἑξαγώνου κατασκευασθῶσι τετράγωνα ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου κείμενα, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ τὰς ἐφεξῆς κορυφὰς τῶν τετραγώνων τούτων ἑνοῦσαι εὐθεῖαι, θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον, οὗ ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ εἶναι ἑνὸς πήχεως.

12) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἔχοντος ὑποτείνουσαν 50 πχ. καὶ ἐμβαδὸν 300 τ.πχ. (Ἀπ. 48,441 πχ. καὶ 12,386 πχ.).

13) Τραπεζίου αἱ μὲν βάσεις εἶναι 32 πχ. καὶ 25 πχ., αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 7 πχ. καὶ 12 πχ. Ζητεῖται τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Ἐὰν δι' ἑκάστης κορυφῆς τετραπλεύρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι δεδομένῃ εὐθείᾳ, τὸ τετράπλευρον ὅπερ θὰ ἔχῃ κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν παραλλήλων τούτων μετὰ τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δεδομένῳ τετραπλεύρῳ.

2) Ἂν ἐν κύκλῳ ἀχθῶσι δύο ἀκτῖνες κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπί τινα διάμετρον θὰ εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ τῆς ἀκτῖνος.

3) Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο χορδαὶ τέμνωνται καθέτως, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων αὐτῶν τμημάτων θὰ εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ τῆς διαμέτρου.

4) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον δεδομένῳ τετραγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην δεδομένῃ εὐθείᾳ.

5) Παντὸς τραπεζίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ πλέον τῷ διπλασίῳ ὀρθογωνίῳ τῶν βάσεων.

6) Τοῦ περὶ κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

7) Ἐὰν ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ληφθῇ σημεῖόν τι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν εἶναι σταθερῶς τὸ αὐτό.

8) Ἐὰν περιφέρεια ἔχῃ κέντρον τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσι σταθερῶς τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

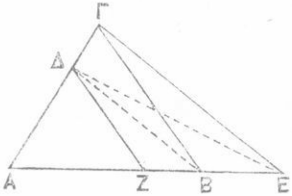
9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων ἔχουσιν ἢ ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἰσοδύναμον δεδομένῳ τετραγώνῳ.

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ εἰς δύο δεδομένας περιφερείας ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἶναι ἴσαι.

11) Εἰς δεδομένον κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον δεδομένην ἐπιφάνειαν $4\alpha^2$.

12) Εὑρεῖν τὸν τύπον τὸν παριστῶντα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν α. (Ἀπ. $E = \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3}$).

13) Εὑρεῖν τὸν τύπον τὸν παριστῶντα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰν α. (Ἀπ. $E = \frac{3\alpha^2}{2}\sqrt{3}$).



14) Ἀπὸ σημείου Δ κειμένου ἐπὶ τῆς περιμέτρου δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

15) Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων Δ, Ε κειμένων ἐπὶ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

16) Δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ΔΕ καθέτου τῇ βάσει αὐτοῦ ΒΓ.

17) Δεδομένον τετράπλευρον νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ δεδομένου σημείου τῆς περιμέτρου.

18) Δεδομένον πολύγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἀγομένης ἐκ δεδομένου σημείου τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

19) Δεδομένον παραλληλόγραμμον νὰ διαιρεθῇ δι' εὐθειῶν ἠγμένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα.

20) Τοῦ τραπεζίου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν.

21) Τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν οὑτινοσδήποτε τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου.

22) Δεδομένον τρίγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἑνουσῶν σημεῖόν τι, ἐντὸς τοῦ τριγώνου κείμενον, μετὰ τῶν τριῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Περὶ ἀναλογιῶν

231. *Ἀναλογία* καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων (198).

Οὕτως ἡ ἰσότης $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ ἢ $A:B=\Gamma:\Delta$ εἶναι ἀναλογία.

Ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἀναγκαῖον εἶναι οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου νὰ εἶναι ἀμφότεροι ἢ ἀριθμοὶ ἢ ὁμοειδῆ μεγέθη· ἀλλ' εἶναι δυνατὸν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι νὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς δύο ἄλλους.

Ἂν ἐν δεδομένῃ ἀναλογίᾳ $A:B=\Gamma:\Delta$ μεγεθῶν οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (197) καὶ παρασταθῶσι δι' ἀριθμῶν, συμμέτρων ἢ ἀσυμμέτρων, (A), (B), (Γ), (Δ), ἔχομεν (κατὰ § 199) $A:B=(A):(B)$ καὶ $\Gamma:\Delta=(\Gamma):(\Delta)$· ὥστε ἡ τῶν μεγεθῶν ἀναλογία τρέπεται εἰς τὴν τῶν ἀριθμῶν ἀναλογίαν $(A):(B)=(\Gamma):(\Delta)$ καὶ ἀντιστρόφως. Κατ' ἀκολουθίαν ἐκ πάσης σχέσεως ἰσχυούσης ἐπὶ ἀναλογίας ἀριθμῶν προκύπτει ἀντίστοιχος σχέσις ἐπὶ ἀναλογίας μεγεθῶν οἱωνδήποτε.

Οὕτως, ὅπως ἐκ πάσης ἀναλογίας ἀριθμῶν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$

ἕπεται ὅτι $$(\alpha+\beta):\beta=(\gamma+\delta):\delta,$$

οὕτω καὶ ἐκ πάσης ἀναλογίας μεγεθῶν $A:B=\Gamma:\Delta$

ἕπεται ὅτι $$(A+B):B=(\Gamma+\Delta):\Delta.$$

Ὡσαύτως, ἂν τὰ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $A:B=\Gamma:\Delta$ μεγέθη εἶναι πάντα ὁμοειδῆ, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ γράψωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $A:\Gamma=B:\Delta$.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἀριθμῶν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, ἂν ἐν τῇ τῶν μεγεθῶν ἀναλογίᾳ $A:B=\Gamma:\Delta$ τὰ μεγέθη A, B, Γ, Δ εἰσὶν εὐθεῖαι ἔχουσαι μήκη (A), (B), (Γ), (Δ), θὰ ἔχωμεν $(A)\times(\Delta)=(B)\times(\Gamma)$. Ἀλλὰ τὸ μὲν γινόμενον $(A)\times(\Delta)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν A, ὕψος δὲ τὴν Δ, τὸ δὲ $(B)\times(\Gamma)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν B, ὕψος δὲ τὴν Γ· οὕτως ἄρα συνάγεται ἥδε ἡ πρότασις :

Ἂν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον δὲ ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παρατ. Ι. Ἂν ἐν ἀναλογίᾳ οἱ δύο μέσοι ὅροι Β καὶ Γ εἶναι ἴσοι, ἡ μὲν ἀναλογία καλεῖται *συνεχής*, ὁ δὲ μέσος καλεῖται *μέσος ἀνάλογος* τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως, *ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εὐθειῶν τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων.*

Τὸ πρόβλημα ἄρα «*εὑρεῖν τὴν μέσην ἀνάλογον δύο δοθεισῶν εὐθειῶν*» ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς:

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ (227).

Παρατ. ΙΙ. Προτιμότερον εἶναι πολλάκις ἐν ταῖς ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν ἐργασίαις νὰ λαμβάνηται ἡ ἀναλογία τῶν μετρούντων τὰ μεγέθη ἀριθμῶν, χάριν εὐκολωτέρας κατανοήσεως καὶ τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ τῶν ἐκ τούτων ἐξαγομένων.

Περὶ μεγεθῶν ἀναλόγων.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

232. *Δύο ἢ πλείονα μεγέθη λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἴσα τῷ πλήθει καὶ ἀντιστοίχως ὁμοειδῆ αὐτοῖς, ἂν γίνωνται ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένου ἑκάστου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἤτοι, ἂν τὰ πρῶτα μεγέθη ἔχωσι πρὸς τὰ δεύτερα ἀντιστοίχως τὸν αὐτὸν λόγον.*

Δηλαδὴ τὰ μεγέθη Α,Β,Γ θὰ λέγωνται ἀνάλογα πρὸς τὰ Α′,Β′,Γ′, ἂν εἶναι $Α=Α'λ$, $Β=Β'λ$, $Γ=Γ'λ$, ἢ $Α:Α'=Β:Β'=Γ:Γ'$.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $Α':Α=Β':Γ=Γ':Γ$, συνάγεται ὅτι: Ἂν τὰ μεγέθη Α,Β,Γ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Α′,Β′,Γ′ καὶ τὰ Α′,Β′,Γ′ θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Α,Β,Γ.

Τὰ δύο μεγέθη τὰ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐξ ἀλλήλων προκύπτοντα καλοῦνται *ἀντίστοιχα* ἢ *ὁμόλογα*.

Περὶ ποσῶν μεταβαλλομένων ἀναλόγως.

Ὁρισμοί.

233. *Δύο ποσὰ λέγομεν ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ἂν τοῦ ἑτέρου μεταβαλλομένου συμμεταβάλληται καὶ τὸ ἕτερον.*

Ἐπὶ παραδείγματος ἡ πλευρὰ τετραγώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· ὁμοίως τόξον κύκλου καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ, πρὸς δὲ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἐν κύκλῳ καὶ τὸ τόξον ἐφ' οὗ αὕτη βαίνει.

234. *Δύο ποσὰ λέγομεν ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως (ἢ ἁπλῶς ὅτι εἶναι ἀνάλογα), ἂν τοῦ ἑτέρου τούτων πολλαπλασιαζομένου ἐπί τινα ἀριθμὸν οἱονδήποτε, καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζηται πάντοτε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· δηλαδή, ἂν πάντοτε αἱ νέαι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι πρὸς τὰς πρώτας ἀνάλογοι.*

Ἂν δηλαδὴ Α καὶ Β εἶναι δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν, μεταβληθῇ δὲ ἡ τοῦ πρώτου τιμὴ ἀπὸ Α εἰς $A' = A.\lambda$, πρέπει καὶ ἡ τοῦ δευτέρου τιμὴ νὰ μεταβληθῇ ἀπὸ Β εἰς $B' = B.\lambda$· τότε δὲ $A' : A = B' : B$, τ. ἔ. αἱ νέαι τιμαὶ Α', Β' θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πρώτας Α, Β.

Λέγομεν δ' ὅτι ποσόν τι μεταβάλλεται πρὸς πολλὰ ἄλλα ἀναλόγως, ἂν μεταβάλληται ἀναλόγως πρὸς ἕκαστον αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται.

Ἐπὶ παραδείγματος, τοῦ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τε τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Θεώρημα.

235. *Ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου.*

Ἔστωσαν Α καὶ Α' δύο τιμαὶ τοῦ ἑτέρου ποσοῦ καὶ Β, Β' αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου· λέγω ὅτι θὰ εἶναι $A' : A = B' : B$.

Τῷ ὄντι, ἂν $A' = A.\lambda$, θὰ ἔχωμεν ἀναγκαίως καὶ $B' = B.\lambda$, καὶ ἄρα $A' : A = B' : B$.

Ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Θεώρημα.

236. *Ἂν δύο ποσὰ ὁμοειδῆ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος αὐτῶν μένει σταθερῶς ὁ αὐτός.*

Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

$$A' : A = B' : B,\quad A'' : A = B'' : B,\quad A''' : A = B''' : B,$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ εἶναι ὁμοειδῆ, αἱ ἀναλογίαι γράφονται (231)

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B},\quad \frac{A''}{B''} = \frac{A}{B},\quad \frac{A'''}{B'''} = \frac{A}{B}.$$

Λοιπὸν

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''} = \frac{A'''}{B'''},$$

ἤ, ἂν ὁ λόγος $A : B$ παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, θὰ εἶναι

$$A = B.\lambda,\quad A' = B'.\lambda,\quad A'' = B''.\lambda,\quad A''' = B'''.\lambda.$$

Ὅτι δὲ ἀληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

Θεώρημα.

237. *Δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἂν τοῦ ἑτέρου διπλασιαζομένου καὶ τὸ ἕτερον διπλασιάζηται, καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζηται, καὶ γενικῶς, ἂν ὁσαπλάσιον γίνῃ τὸ ἕτερον τοσαπλάσιον γίνηται καὶ τὸ ἕτερον.*

Ἔστωσαν A καὶ B δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν, ἅτινα ὑποτίθενται ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων (233) οὕτως, ὥστε εἰς πᾶσαν τιμὴν A τοῦ ἑτέρου *ν' ἀντιστοιχῇ* μία τιμὴ B τοῦ ἑτέρου· λέγω ὅτι, ἂν ἡ ἑτέρα τούτων, ἡ A, πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, οἷον τὸν 2,543... καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ, ἡ B, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τὰ ποσὰ ἄρα εἶναι ἀνάλογα.

Διότι, ἐπειδὴ εἰς τὴν τιμὴν A τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ B τοῦ δευτέρου, εἰς τὴν τιμὴν $A.2$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ $B.2$ τοῦ δευτέρου. Εἰς δὲ τὴν τιμὴν $\frac{A}{10}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{10}$ τοῦ δευτέρου· διότι, ἂν δεκαπλασιασθῇ τὸ $\frac{A}{10}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ δευτέρου καὶ νὰ γίνῃ Β· ἀλλ' ἡ τιμή, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται Β, εἶναι ἡ $\frac{B}{10}$· εἰς τὴν τιμὴν ἄρα $\frac{A}{10}$· 25 θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ $\frac{B}{10}$· 25, ἤτοι ἡ Β. 2,5. Ὡσαύτως εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{100}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{100}$ τοῦ δευτέρου· καὶ ἄρα εἰς τὴν τιμὴν Α. 2,54 θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ Β. 2,54 καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δυνάμεθα εὐκόλως νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως· διότι ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑτέρου ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, ἵνα ἐκ τούτου μόνου συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ πάντα μὴ ἀκέραιον πολλαπλασιαστήν, καὶ ἄρα ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Ἐπὶ παραδείγματος εὐκόλως δεικνύεται (ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς § 147) ὅτι, *ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου ἐφ' οὗ βαίνει.*

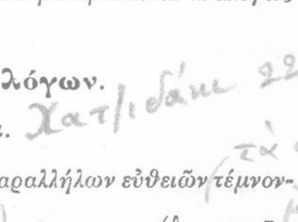
Περὶ εὐθειῶν ἀναλόγων.

Χατζιδάκι 226, 148

Θεώρημα.

τὰ ἀντίστοιχα τμήματα κατὰ ... τῶν μετ... βάλλονται ἀναλόγως

238. *Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν τέμνονται εἰς μέρη μεταβαλλόμενα ἀναλόγως.*



Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ κτλ.· λέγω ὅτι δύο οἱαδήποτε τμήματα ΕΗ, ΗΙ τῆς πρώτης ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἀντίστοιχα ΖΘ, ΘΚ τῆς δευτέρας.

Ἀντίστοιχα δὲ τμήματα καλοῦνται τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ἀπολαμβανόμενα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου, ἀρκεῖ (237) νὰ δείξωμεν ὅτι, ὅταν τμῆμά τι τῆς πρώτης διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ, κτλ., καὶ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα τῆς δευτέρας διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ.

Ἔστω ὅτι τὸ τμῆμα ΗΙ τῆς πρώτης εἶναι τοῦ ΕΗ διπλάσιον, λέγω ὅτι καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ΘΚ τῆς δευτέρας εἶναι τοῦ ΖΘ, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ ΕΗ, διπλάσιον.

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ μέσου Π τῆς ΗΙ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ παράλληλος καὶ ἐκ τῶν Ε, Η, Π αἱ ΕΣ, ΗΤ, ΠΟ τῇ ΓΔ παράλληλοι, ἐκ τῶν σχηματισθησομένων ἴσων τριγώνων ΕΗΣ, ΗΠΤ, ΠΙΟ (81), θὰ ἔχωμεν ΕΣ=ΗΤ=ΠΟ,
ἐπειδὴ δὲ ΕΣ=ΖΘ, ΗΤ=ΘΡ, ΠΟ=ΡΚ (122),
ἔπεται ὅτι ΖΘ=ΘΡ=ΡΚ· καὶ ἄρα τὸ ΘΚ εἶναι τοῦ ΖΘ διπλάσιον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν τὸ τμῆμα ΗΛ εἶναι τοῦ ΕΗ τριπλάσιον, καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐκείνου, τὸ ΘΜ, θὰ εἶναι τοῦ ΖΘ τριπλάσιον· καὶ ἐφεξῆς οὕτω διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Λοιπὸν (237) δύο οἱαδήποτε τμήματα τῆς πρώτης εὐθείας ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ ἀντίστοιχα τῆς δευτέρας· ἤτοι εἶναι

$$ΕΗ : ΗΠ = ΖΘ : ΘΡ,$$
$$ΕΗ : ΠΛ = ΖΘ : ΡΜ, \text{ κ.τ.λ.}$$

Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις στηρίζεται οὐσιωδῶς ἐπὶ τῆς ἰδιότητος καθ' ἣν εἰς δύο τμήματα ἴσα τῆς ΑΒ (π. χ. τὰ ΕΗ, ΠΙ) ἀντιστοιχοῦσι τμήματα ἴσα (ΖΘ, ΡΚ) τῆς ΓΔ.

Πόρισμα 1ον.

239. *Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὁσαδήποτε τμήματα τῆς ἑτέρας τούτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἑτέρας.*

Διότι ἐκ τῶν προηγουμένων ἀναλογιῶν τῇ μεταθέσει τῶν μέσων (231) λαμβάνομεν

$$ΕΗ : ΖΘ = ΗΠ : ΘΡ,$$

$$ΕΗ : ΖΘ = ΠΛ : ΡΜ,$$

ἢ

$$ΕΗ : ΖΘ = ΗΠ : ΘΡ = ΠΛ : ΡΜ,$$

καὶ ἂν εἷς τῶν λόγων τούτων παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, θὰ εἶναι

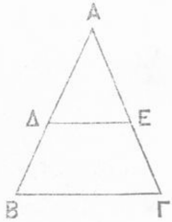
$$ΕΗ = ΖΘ.λ,\ ΗΠ = ΘΡ.λ,\ ΠΛ = ΡΜ.λ,$$

ἤτοι τὰ τυχόντα τῆς ΑΒ τμήματα ΕΗ, ΗΠ, ΕΠ εἶναι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ΓΔ ἀνάλογα (232).

Πόρισμα 2ον.

240. *Ἂν εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου εἶναι τῇ τρίτῃ παράλληλος, τέμνει αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἂν δηλαδὴ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΔΕ εἶναι τῇ ΒΓ παράλληλος, θὰ εἶναι



$$ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ.$$

Διότι τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΒ, καὶ ΑΕ, ΕΓ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ ὑπὸ τῶν ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Α ἀγομένων παραλλήλως τῇ ΒΓ εὐθειῶν (239).

Ἀντιστρόφως. Ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τριγώνου τινὸς ΑΒΓ διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα, ὥστε νὰ εἶναι

$$ΑΔ : ΔΒ = ΔΕ : ΕΓ,$$

ἡ ΔΕ θὰ εἶναι τῇ βάσει ΒΓ παράλληλος.

Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ΑΒ ἓν μόνον ὑπάρχει σημεῖον διαιροῦν αὐτὴν εἰς δεδομένον λόγον.

Παρατήρησις. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχομεν ἐπίσης

$$ΑΔ : ΑΒ = ΑΕ : ΑΓ$$

καὶ

$$ΑΒ : ΔΒ = ΑΓ : ΕΓ.$$

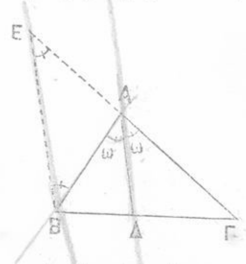
Θεώρημα.

241. *Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι*

αὐτῆς πλευρὰν εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἂν δηλαδὴ ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι ΒΔ : ΔΓ = ΑΒ : ΑΓ.

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ τῇ ΔΑ παράλληλος μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ. Οὕτω δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ, τῆς ΔΑ οὔσης παραλλήλου τῇ βάσει ΒΕ, ἔχομεν (240)



ΒΔ : ΔΓ = ΕΑ : ΑΓ

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ Ε καὶ Β εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι τῇ ΒΑΔ, ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΕ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὑρεθεῖσα ἀναλογία γίνεται ΒΔ : ΔΓ = ΑΒ : ΑΓ.

Ἀντιστρόφως· ἂν ἐν τριγώνῳ εὐθεῖά τις ΑΔ διαιρῇ τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευρὰν ΒΓ εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Διότι ἐπὶ δεδομένης πεπερασμένης εὐθείας ἓν μόνον ὑπάρχει σημεῖον διαιροῦν αὐτὴν εἰς δεδομένον λόγον.

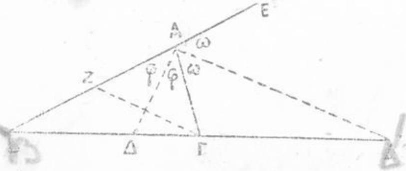
Γ

Θεώρημα.

242. *Ἡ διχοτομοῦσα ἐξωτερικὴν γωνίαν τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν προεκβληθεῖσαν εἰς σημεῖον, οὗ αἱ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ταύτης ἀποστάσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν εἰς αὐτὰς προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Ἔστω τρίγωνόν τι ΑΒΓ καὶ ἡ διχοτόμος ΑΔ' τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΑΕ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι

ΒΔ' : ΓΔ' = ΑΒ : ΑΓ.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ' παράλληλος, θὰ εἶναι (240 Παρατ.) ΒΔ' : ΓΔ' = ΑΒ : ΑΖ.

Γ Ἡ διχοτομοῦσα τὸ παραπλήρωμα γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν προεκβληθεῖσαν εἰς σημεῖον, οὗ . . .

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΑΔ', εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΖ τὴν παράλληλον τῇ ΑΔ', ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΖΓ εἶναι ἰσοσκελές· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΑΖ εἶναι ἴση τῇ ΑΓ, ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ἀναλογία γίνεται

$$Β\Delta' : Γ\Delta' = ΑΒ : ΑΓ.$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παρατ. Ἡ ἄνω ἀπόδειξις δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΕ' παράλληλος τῇ ΑΔ', τέμνουσα τὴν ΑΓ (προεκβληθεῖσαν ἐνταῦθα) εἰς τὸ σημεῖον Ε'.

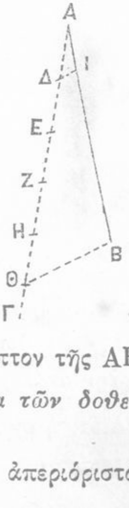
Πρόβλημα 1ον. Χατζιδάκι 148

2

243. *Δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ διαιρεθῇ εἰς ὅσα ἄν τις θελήσῃ ἴσα μέρη, ἢ εἰς μέρη πρὸς δοθείσας εὐθείας ἀνάλογα.*

1ον. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.

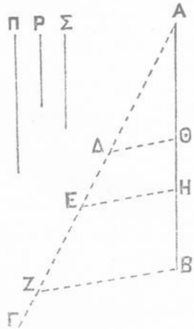
Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου, τοῦ Α, ἂς ἀχθῇ ἀπροσδιόριστός τις εὐθεῖα ΑΓ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τμῆμά τι τὸ ΑΔ, ὅπερ ἂς ἐπαναληφθῇ κατὰ σειρὰν πεντάκις, ἤτοι ΑΔ=ΔΕ=ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ. Ἂς ἑνωθῇ δὲ τὸ ἄκρον Θ τοῦ τελευταίου τμήματος μετὰ τοῦ ἄκρου Β διὰ τῆς ΘΒ, ἐκ δὲ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΙ τῇ ΘΒ παράλληλος· λέγω ὅτι τὸ τμῆμα ΑΙ θὰ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ, ὥστε, ἂν ἐπαναληφθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ ΑΒ θὰ διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.



Διότι, τῆς ΔΙ οὔσης τῇ ΘΒ παραλλήλου, αἱ πλευραὶ ΑΘ, ΑΒ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ι (240)· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΔ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΘ, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ.

2ον. *Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Π, Ρ καὶ Σ.*

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου, τοῦ Α, ἂς ἀχθῇ ἀπεριόριστός τις εὐθεῖα ΑΓ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς τὰ τμήματα ΑΔ=Π,

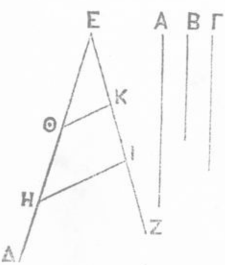


ΔΕ=Ρ καὶ ΕΖ=Σ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΒ καὶ αἱ ἐκ τῶν σημείων Ε, Δ ~~αὐτῆς παράλλη~~λοι ΕΗ, ΔΘ· λέγω ὅτι τὰ μέρη ΑΘ, ΘΗ, ΗΒ, εἰς ἃ αἱ παράλληλοι διαιροῦσι τὴν ΑΒ, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς εὐθείας Π, Ρ, Σ.

Διότι, ἕνεκεν τῶν παραλλήλων ΔΘ, ΕΗ, ΖΒ, τὰ τμήματα ΑΘ, ΘΗ, ΗΒ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι πρὸς τὰς εὐθείας Π, Ρ, Σ (239).

Πρόβλημα 2ον.

244. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.* Ἤτοι, ἂν αἱ μὲν δεδομέναι εὐθεῖαι παρίστανται διὰ τῶν Α, Β καὶ Γ, ἡ δὲ ζητουμένη διὰ τοῦ Χ, ζητεῖται νὰ εἶναι Α : Β=Γ : Χ.



Πρὸς τοῦτο, ἂς σχηματισθῇ γωνία τις ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας αὐτῆς πλευρᾶς ΕΔ ἡ ΕΗ=Α καὶ ἡ ΕΘ=Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ἡ ΕΙ=Γ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΗΙ καὶ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΚ τῇ ΗΙ παράλληλος· λέγω ὅτι ἡ ΕΚ θὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος.

Διότι ἐκ τοῦ τριγώνου ΕΗΙ, τῆς ΘΚ οὔσης παραλλήλου τῇ ΗΙ, ἔχομεν (~~238~~ Παρατ.)

ΕΗ : ΕΘ=ΕΙ : ΕΚ, ἤτοι Α : Β=Γ : ΕΚ. 240

Πόρισμα

245. *Ἵνα δοθεῖσαν εὐθεῖαν Α πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν λόγον Π:Ρ, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Π καὶ Ρ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον Β τῶν εὐθειῶν Ρ, Π καὶ Α.*

Διότι ἡ σχέσις $\mathrm{B}=\mathrm{A}.\frac{\Pi}{\mathrm{P}}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀναλογίαν Ρ : Π=Α : Β.

Περὶ ὁμοιότητος.

Ὁρισμοί.

246. Δύο εὐθύγραμμα σχήματα καλοῦνται *ὅμοια*, ἂν ἔχωσι τὰς μὲν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τὰς δὲ ἀντιστοιχούσας πλευρὰς (ἤτοι τὰς πλευρὰς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τῶν ἴσων γωνιῶν κορυφὰς) ἀναλόγους.

Αἱ τῶν δμοίων σχημάτων ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ λέγονται καὶ *ὁμόλογοι*.

Πρόδηλον εἶναι ὅτι δύο ἴσα σχήματα εἶναι ὅμοια.

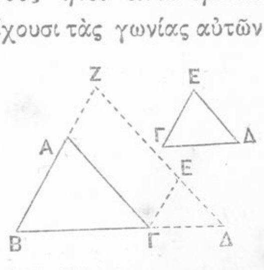
Σημειωτέον δ' ὅτι ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.

Θεώρημα. Χατζιδάκι 233

247. *Δύο τρίγωνα, ἂν ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἤτοι εἶναι ὅμοια.*

Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΕΓΔ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τουτέστι ΓΑΒ=ΔΕΓ, ΑΒΓ=ΕΓΔ, ΒΓΑ=ΓΔΕ· λέγω ὅτι αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· ἤτοι

ΒΓ : ΓΔ = ΓΑ : ΔΕ = ΑΒ : ΕΓ.



Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἃς τεθῶσι τὰ τρίγωνα οὕτως, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΒΓ, ΓΔ νὰ κεῖνται ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἃς προεκταθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΔΕ μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον, τὸ Ζ.

Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΒΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ γωνία ΒΓΑ=ΓΔΕ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι τῇ ΔΕ παράλληλος (103). Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΕΓΔ, ἡ ΑΒ εἶναι τῇ ΕΓ παράλληλος· τὸ σχῆμα ἄρα ΑΓΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΑ εἶναι τῇ ΔΖ παράλληλος, ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΔΖ προκύπτει (240) ΒΓ : ΓΔ=ΒΑ : ΑΖ ἢ ΒΓ : ΓΔ=ΒΑ : ΓΕ, διότι ΓΕ=ΑΖ. Ἂν δὲ ἡ ΒΖ θεωρηθῇ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΒΔΖ βάσις, ἐπειδὴ ἡ ΓΕ εἶναι τῇ βάσει παράλληλος, προκύπτει

ΒΓ : ΓΔ=ΖΕ : ΕΔ ἢ ΒΓ : ΓΔ=ΑΓ : ΕΔ, διότι ΑΓ=ΖΕ.

Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων ἀναλογιῶν, ἐχουσῶν τὸν λόγον ΒΓ:ΓΔ κοινόν, συνάγεται καὶ ἡ ἀναλογία

ΑΓ : ΕΔ=ΒΑ : ΓΕ.

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΓΔ, ἅτινα ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ἄρα ὅμοια.

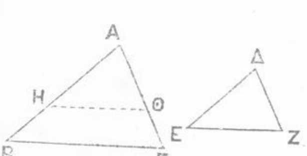
Πόρισμα.

248. *Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχωσι καὶ δύο μόνας γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ (118).*

Θεώρημα.

249. *Δύο τρίγωνα, ἐὰν ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, εἶναι ἄρα ὅμοια.*

Ἔστω ὅτι τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ἤτοι ΑΒ : ΔΕ=ΒΓ : ΕΖ=ΓΑ : ΖΔ· (1)



λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τουτέστιν Α=Δ, Β=Ε καὶ Γ=Ζ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΗ=ΔΕ, ἐκ δὲ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ τῇ ΒΓ παράλληλος. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἕπεται ἡ τῶν πλευρῶν ἀναλογία:

ΑΒ : ΑΗ=ΒΓ : ΗΘ=ΓΑ : ΘΑ. (2)

Ἐπειδὴ δὲ ΑΗ=ΔΕ, ἕπεται ὅτι οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι· τούτων δὲ τῶν λόγων οἱ ἔχοντες τοὺς ἡγουμένους ἴσους θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς ἑπομένους ἴσους· ἤτοι ΗΘ=ΕΖ καὶ ΘΑ=ΖΔ.

Λοιπόν, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΗΘ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα (82), ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων θεωρημάτων συνάγεται ὅτι, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων ἐπάγεται καὶ τὴν τῶν πλευρῶν ἀναλογίαν, καὶ ἀντιστρόφως· καὶ μία ἄρα τῶν συνθηκῶν τούτων ἀρκεῖ, ἵνα τὰ τρίγωνα ὦσιν ὅμοια. Δὲν ἀληθεύει ὅμως τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν σχημάτων τῶν ἐχόντων πλείονας τῶν τριῶν πλευράς.

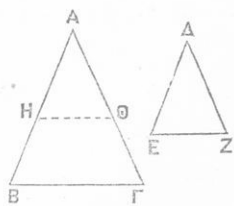
Ἐπὶ παραδείγματος, ῥόμβος καὶ τετράγωνον ἔχουσι μὲν τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς ἀναλόγους, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας· ὡσαύτως ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἔχουσι μὲν τὰς γωνίας ἴσας, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους.

Θεώρημα.

250. *Δύο τρίγωνα, ἐὰν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς ταύτην περιεχούσας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.*

Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσι τὴν γωνίαν Α=Δ καὶ

ΑΒ : ΔΕ=ΑΓ : ΔΖ· (1)



λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ ληφθῇ ἡ ΑΗ=ΔΕ, ἐκ δὲ τοῦ Η ἀχθῇ ἡ ΗΘ τῇ ΒΓ παράλληλος, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας, θὰ εἶναι ὅμοια· κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν

ΑΒ : ΑΗ=ΑΓ : ΑΘ (247) ἢ ΑΒ : ΔΕ=ΑΓ : ΑΘ (2).

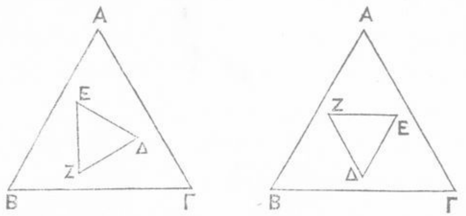
Ἐκ δὲ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ΑΘ=ΔΖ.

Ἀλλ' οὕτω τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην, τὴν Α=Δ, καὶ τὰς ταύτην περιεχούσας πλευρὰς ἴσας, εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι πρὸς τὸ ΑΒΓ ὅμοιον, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ πρὸς τοῦτο ἴσον ΔΕΖ εἶναι πρὸς τὸ ΑΒΓ ὅμοιον.

Θεώρημα.

251. *Δύο τρίγωνα, ἐὰν ἔχωσι τὰς αὐτῶν πλευρὰς ἢ παραλλήλους*

ἢ καθέτους ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ὅμοια· ὁμόλογοι δὲ αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἢ αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.



Ἐπειδή, ὡς ἀπεδείχθη (114, 115), δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς αὐτῶν πλευρὰς ἢ παραλλήλους ἢ καθέτους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι, ἐὰν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἢ παράλληλοι ἢ κάθετοι πρὸς τὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἤτοι ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΓΑ, αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων μόνον τοὺς ἑξῆς τρεῖς τρόπους ἐξαρτήσεως δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουσιν·

ἢ ὅτι 1ον) $A+\Delta=2^{\text{ὀρθ}}$, $B+E=2^{\text{ὀρθ}}$, καὶ $\Gamma+Z=2^{\text{ὀρθ}}$,

ἢ ὅτι 2ον) $A=\Delta$, $B+E=2^{\text{ὀρθ}}$, καὶ $\Gamma+Z=2^{\text{ὀρθ}}$,

ἢ ὅτι 3ον) $A=\Delta$, $B=E$, καὶ $\Gamma=Z$ (~~112~~). 118

Ἀλλὰ δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ οὔτε ἡ πρώτη, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τούτων τριγώνων θὰ ἰσῶται πρὸς ἓξ ὀρθάς, ὅπερ ἀδύνατον, οὔτε ἡ δευτέρα, διότι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν μεῖζον, ὅπερ καὶ τοῦτο ἀδύνατον· μόνη ἡ τρίτη ἄρα σχέσις ἀληθεύει, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια (247).

Θεώρημα.

3

252. *Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, ἂν τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἔκ τινος σημείου ἀγομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ σημείου Ο εὐθειῶν ΟεΕ, ΟζΖ, ΟηΗ, ΟθΘ· λέγω ὅτι εἶναι

$$\varepsilon\zeta : EZ = \zeta\eta : ZH = \eta\theta : H\Theta. \quad (1)$$

Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων οεζ, ΟΕΖ ἔχομεν τὴν αναλογίαν (251) εζ : ΕΖ=οζ : ΟΖ.

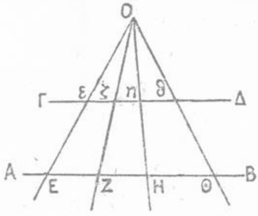
Ὡσαύτως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων οζη, ΟΖΗ ἔχομεν

ζη : ΖΗ=οζ : ΟΖ,

ἕνεκα δὲ τοῦ κοινοῦ λόγου οζ : ΟΖ συνάγεται ἡ ἀναλογία

εζ : ΕΖ=ζη : ΖΗ.

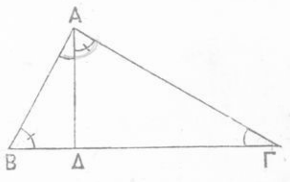
Ὡσαύτως εὑρίσκεται ὅτι ζη:ΖΗ=ηθ:ΗΘ καὶ ἐφεξῆς οὕτω.



Θεώρημα.

253. *Ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετος· 1ον τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἰς ἃ τὸ δοθὲν θὰ διαιρεθῇ, εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον· 2ον ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος τῆς ὑποτεινούσης· καὶ 3ον ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.*

1ον. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ, ὡς ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν Β κοινήν, τὰς δὲ γωνίας Α καὶ Δ ἴσας, ὡς ὀρθάς, ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΔ ἴσην τῇ Γ, εἶναι ἄρα ὅμοια (247). Ὡσαύτως καὶ τὰ τρίγωνα ΓΑΔ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ἡ δὲ γωνία ΓΑΔ ἰσοῦται τῇ Β· κατ' ἀκολουθίαν τὰ τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια πρὸς ἄλληλα.



2ον. Ἐκ τῆς τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΒΓ ὁμοιότητος συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν

ΒΔ : ΑΒ=ΑΒ : ΒΓ.

Ὡσαύτως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΓ, ΑΒΓ ἔχομεν

ΔΓ : ΑΓ=ΑΓ : ΒΓ.

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων βλέπομεν ὅτι ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκειμένου τμήματος τῆς ὑποτεινούσης.

3ον. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ, ὄντων ὁμοίων, ἔχομεν ὅτι ΒΔ : ΑΔ=ΑΔ : ΔΓ· ἤτοι ὅτι ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

Πόρισμα 1ον.

254. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἀναλογιῶν συνάγομεν

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{AB})^2&=(\mathrm{B\Delta})\times(\mathrm{B\Gamma}),\\ (\mathrm{A\Gamma})^2&=(\mathrm{\Delta\Gamma})\times(\mathrm{B\Gamma}),\\ (\mathrm{A\Delta})^2&=(\mathrm{B\Delta})\times(\mathrm{\Delta\Gamma}).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς δύο πρώτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{B\Delta})\times(\mathrm{B\Gamma})+(\mathrm{\Delta\Gamma})\times(\mathrm{B\Gamma}),$$

ἢ

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{B\Gamma})\,[(\mathrm{B\Delta})+(\mathrm{\Delta\Gamma})]=(\mathrm{B\Gamma})^2. \quad (2)$$

Λοιπὸν διὰ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἀποδεικνύονται κατ' ἄλλον τρόπον τὰ ἐν ἐδαφίοις 216—218 ἀποδειχθέντα θεωρήματα.

Πόρισμα 2ον.

255. Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἰσότητας (1) θὰ εὕρωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$(\mathrm{AB})^2 : (\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{B\Delta}) : (\mathrm{\Delta\Gamma}),$$

ἤτοι ὅτι, *ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ εἰς ταύτας προσκείμενα τμήματα τῆς ὑποτεινούσης εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης ἐπ' αὐτὴν καθέτου.*

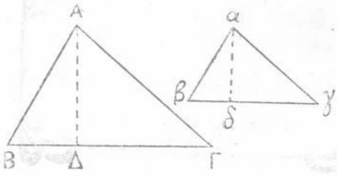
Θεώρημα.

256. *Δύο τρίγωνα ὅμοια ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.*

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, ἅτινα ἔχουσι

$$\mathrm{A}=\alpha,\ \mathrm{B}=\beta,\ \Gamma=\gamma \text{ καὶ } \frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}=\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\gamma\alpha}{\mathrm{\Gamma A}}.$$

Ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν δύο ἴσων γωνιῶν ἀχθῶσι τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, οἷον τὰ ΑΔ, αδ, ληφθῇ δὲ ὁ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων λόγος, θὰ εἶναι



$$\frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\frac{1}{2}(\beta\gamma)\times(\delta\alpha)}{\frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})\times(\Delta\mathrm{A})} \quad ἢ \quad \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{(\beta\gamma)}{(\mathrm{B\Gamma})}\times\frac{(\delta\alpha)}{(\Delta\mathrm{A})} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, αβδ εἶναι ὅμοια, διότι πλὴν τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ β, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας Δ καὶ δ ἴσας, ὡς ὀρθάς, ἔπεται ὅτι

$$\frac{\delta\alpha}{\Delta\mathrm{A}}=\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}=\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}.$$

Ἕνεκα τῶν ἰσοτήτων τούτων ἡ ἀναλογία (1) γράφεται

$$\frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{(\beta\gamma)^2}{(\mathrm{B\Gamma})^2}.$$

Λοιπόν, δύο ὅμοια τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

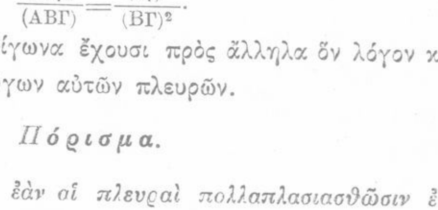
Πόρισμα.

257. *Τριγώνου τινός, ἐὰν αἱ πλευραὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἐμβαδὸν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Πρόβλημα.

258. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον ΑΒΓΔ ὃν λόγον ἡ δεδομένη εὐθεῖα Μ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν.*

Πρὸς τοῦτο ἐπ' εὐθείας τινὸς ΖΕ ἂς ληφθῶσιν ἡ ΘΗ = Ν καὶ ἡ ΗΕ = Μ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΕ ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ ἡμιπεριφέρεια.



Ἐκ τοῦ Η δὲ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΙ ἐπὶ τὴν ΘΕ κάθετος καὶ ἐκ τοῦ Ι αἱ χορδαὶ ΙΘ καὶ ΙΕ· ἐπὶ δὲ τῆς ΙΘ (προεκβαλλομένης ἂν εἶναι ἀνάγκη) ἂς ληφθῇ ἡ ΙΚ ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ τῇ ΘΕ παράλληλος· λέγω ὅτι ἡ ΙΛ εἶναι ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρά.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι τῇ ΘΕ παράλληλος, ἔχομεν (240)·

$$\frac{\text{ΙΛ}}{\text{ΙΚ}}=\frac{\text{ΙΕ}}{\text{ΙΘ}},\ \text{κατ᾽ ἀκολουθίαν}\ \frac{(\text{ΙΛ})^2}{(\text{ΙΚ})^2}=\frac{(\text{ΙΕ})^2}{(\text{ΙΘ})^2},$$

ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΕΘ ἔχομεν

$$\frac{(\text{ΙΕ})^2}{(\text{ΙΘ})^2}=\frac{\text{ΗΕ}}{\text{ΘΗ}}=\frac{\text{Μ}}{\text{Ν}}\ \text{καὶ ἄρα}\ \frac{(\text{ΙΛ})^2}{(\text{ΙΚ})^2}=\frac{\text{Μ}}{\text{Ν}}.$$

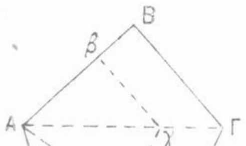
Λοιπόν, ἐπειδὴ ΙΚ=ΑΒ, ἕπεται ὅτι $(\text{ΙΛ})^2 : (\text{ΑΒ})^2 = \text{Μ} : \text{Ν}$.

Ἡ ΙΛ ἄρα εἶναι ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρά.

Θεώρημα.

259. *Δοθέντος πολυγώνου, δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν ἕτερον, ὥστε τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα νὰ ἀποτελῶνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Θὰ εἶναι δὲ τὰ πολύγωνα ταῦτα ὅμοια πρὸς ἄλληλα.*

Τῷ ὄντι, ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἂς ἀχθῶσιν



ἐκ τῆς κορυφῆς Α αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ σημεῖόν τι, οἷον τὸ β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ βγ τῇ ΒΓ παράλληλος, εἶτα δὲ ἡ γδ τῇ ΓΔ παράλληλος, καὶ τέλος ἡ δε τῇ ΔΕ παράλληλος· τὰ τρίγωνα Αβγ, Αγδ, Αδε θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ (247) καὶ ἄρα τὸ σχηματισθὲν πολύγωνον Αβγδε εἶναι οἷον τὸ ζητούμενον.

Λέγω δὲ ὅτι τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Αβγδε εἶναι ὅμοια. Διότι, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Αβγ, ἔχομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ=Αβγ καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=βγΑ· ἕνεκα δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΔ, Αγδ, ἔχομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ=Αγδ. Τούτων δ᾽ ἕνεκα ἡ γωνία ΒΓΔ=βγδ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Προσέτι, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν τριγώνων, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AB}{A\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{A\Gamma}{A\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{A\Delta}{A\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{AE}{A\varepsilon}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα εἶναι ὅμοια (246).

Θεώρημα.

260. *Τῶν ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.*

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ αβγδεζ, ἔχοντα

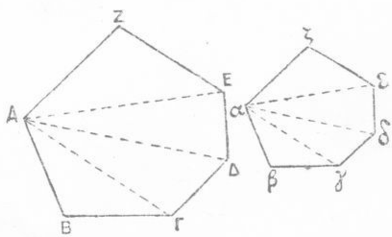
$$A=\alpha,\ B=\beta,\ \Gamma=\gamma,\dots\ \text{καὶ}\ \frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\dots=\rho. \quad (1)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων (1) ἕπεται (198)

$$\alpha\beta=AB.\rho,\ \beta\gamma=B\Gamma.\rho,\ \gamma\delta=\Gamma\Delta.\rho,\dots\dots$$

καὶ ἄρα (195)

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\dots\dots=(AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\dots\dots).\rho,$$



ὅθεν (198) $$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\dots}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\dots}=\rho.$$

Λοιπὸν αἱ περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί.

Ἂν δὲ ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ α δύο τῶν ἴσων γωνιῶν ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ διαγώνιοι ἑκατέρου τούτων, τὰ πολύγωνα θὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ... καὶ τὰ αβγ, αγδ, αδε,..., ἅτινα ἀντιστοίχως θὰ εἶναι ὅμοια, διότι θὰ ἔχωσιν ἢ μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς ταύτην περιεχούσας πλευρὰς ἀναλόγους, ἢ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἐχούσας πάσας τὸν αὐτὸν λόγον ρ· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι (256)

$$\alpha\beta\gamma=AB\Gamma.\rho^2,\quad \alpha\gamma\delta=A\Gamma\Delta.\rho^2,\quad \alpha\delta\varepsilon=A\Delta E.\rho^2,\dots\ (2).$$

Ἂν δὲ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ ἰσότητες (2) προκύπτει (195)

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta=AB\Gamma\Delta EZ.\rho^2\ \text{καὶ ἄρα (198)}\ \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}{AB\Gamma\Delta EZ}=\rho^2.$$

Λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Πόρισμα 1ον

261. *Πολυγώνου τινός, ἂν αἱ μὲν πλευραὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμὸν ρ, αἱ δὲ γωνίαι μείνωσιν αἱ αὐταί, τὸ ἐμβαδὸν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ ρ.*

Πόρισμα 2ον

262. *Δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὅμοιον καὶ ἔχον πρὸς τοῦτο λόγον δοθέντα ἀριθμὸν σ.*

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πλευρᾶς τινος τοῦ δοθέντος, οἷον τῆς ΑΒ, τὴν ἐν τῷ ζητουμένῳ πολυγώνῳ ὁμόλογον, ἥτις θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος λόγον σ πρὸς τὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον.

Θεώρημα.

263. *Ἂν ἐντὸς κύκλου τέμνωνται δύο χορδαί, τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἑκατέρας τούτων σχηματιζόμενα δύο ὀρθογώνια εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστω ὅτι αἱ τοῦ κύκλου Κ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Ο· λέγω ὅτι θὰ εἶναι (ΟΑ)×(ΟΒ)=(ΟΓ)×(ΟΔ).

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΒΔ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΔΟΒ, ἅτινα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ὅμοια (247), καὶ ἄρα ΟΑ : ΟΔ = ΟΓ : ΟΒ· ὅθεν (231) (ΟΑ)×(ΟΒ)=(ΟΓ)×(ΟΔ).

Ἀντιστρόφως· ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (ΟΑ)×(ΟΒ)=(ΟΓ)×(ΟΔ), *τὰ ἄκρα αὐτῶν* Α,Β,Γ,Δ *θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.*

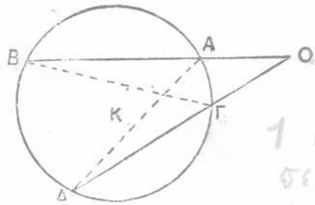
Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Τότε θα έχομεν ΓΟ·ΟΖ = ΒΟ·ΟΑ

Θεώρημα.

264. *Ἂν ἐκ σημείου ἐκτὸς κύκλου κειμένου ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν, τὰ ἐφ' ἑκατέρας τούτων καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένου μέρους αὐτῆς σχηματιζόμενα δύο ὀρθογώνια εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστωσαν αἱ τὸν κύκλον Κ τέμνουσαι εὐθεῖαι ΟΑΒ, ΟΓΔ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι (ΟΑ)×(ΟΒ)=(ΟΓ)×(ΟΔ).



Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΒΓ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ δύο τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΔΑ, ἅτινα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ὅμοια (247)· κατ' ἀκολουθίαν, ἐκ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν, θὰ ἔχωμεν

$$ΟΒ : ΟΔ = ΟΓ : ΟΑ,$$

καὶ ἄρα (231) $\qquad (ΟΑ)\times(ΟΒ)=(ΟΓ)\times(ΟΔ).$

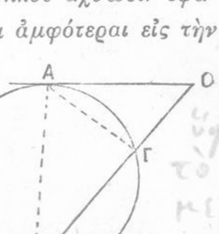
Ἀντιστρόφως· ἂν ἐπὶ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΟΒ, ΟΔ, ληφθῶσι δύο σημεῖα Α, Γ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (ΟΑ)×(ΟΒ)=(ΟΓ)×(ΟΔ), τὰ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Θεώρημα.

265. *Ἂν ἐκ σημείου Ο κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσιν ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ τέμνουσα ΟΓΔ, περατούμεναι ἀμφότεραι εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς· ἤτοι εἶναι*

$$(ΟΑ)^2=(ΟΓ)\times(ΟΔ).$$



Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΑΔ θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΔΑ, ἅτινα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ὅμοια

(247)· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ΟΓ : ΟΑ = ΟΑ : ΟΔ,
καὶ ἄρα (231) $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ) \times (ΟΔ)$.

Ἀντιστρόφως· ἂν εὐθεῖά τις ΔΓ προεκβληθῇ μέχρι σημείου τινὸς Ο, ἐκ δὲ τοῦ Ο ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΟΑ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ) \times (ΟΔ)$, ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Δ, Γ διερχομένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῆς ΟΑ.

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

$(ΑΟ)^2 = ΟΓ \cdot ΟΔ$

Παρατήρησις.

Ἡ τῶν τριῶν προηγουμένων θεωρημάτων πρὸς ἄλληλα συγγένεια εἶναι φανερά· διότι κατὰ τοῦτο μόνον διαφέρουσιν, ὅτι ἐν μὲν τῷ πρώτῳ αἱ χορδαὶ τέμνουσιν ἀλλήλας ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ ἡ ἑτέρα τῶν ἐκ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένου σημείου Ο τεμνουσῶν, ἡ ΟΑΒ, στραφεῖσα περὶ τὸ Ο κατέστη τέλος ἐφαπτομένη, ἀφ' οὗ ἐμηδενίσθη ἡ χορδὴ ΑΒ, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον μέρος αὐτῆς ΟΑ ἐγένετο ἴσον τῇ ἐφαπτομένῃ.

Πρόβλημα

266. *Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον τῷ δεδομένῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον τῷ εὐθυγράμμῳ σχήματι Ρ.*

Ἔστω Α πλευρά τις τοῦ δεδομένου σχήματος Π καὶ Χ ἡ ὁμόλογος ταύτῃ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου σχήματος Σ.

Ἐπειδὴ τὰ σχήματα Π καὶ Σ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι (250)

$$\frac{(Π)}{(Σ)} = \frac{(Α)^2}{(Χ)^2},$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ Ρ, ἕπεται

$$\frac{(Π)}{(Ρ)} = \frac{(Α)^2}{(Χ)^2}.$$

Ἂν δὲ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς Μ καὶ Ν τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὰ σχήματα Π καὶ Ρ τετραγώνων, ὥστε $(Π) = (Μ)^2$ καὶ $(Ρ) = (Ν)^2$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(Μ)^2}{(Ν)^2} = \frac{(Α)^2}{(Χ)^2},$$

ὅθεν $\frac{(\mathrm{M})}{(\mathrm{N})}=\frac{(\mathrm{A})}{(\mathrm{X})}$ ἢ $\mathrm{M}:\mathrm{N}=\mathrm{A}:\mathrm{X}$.

Ἡ τοῦ ζητουμένου ἄρα εὐθυγράμμου σχήματος πλευρὰ X εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Μ, Ν καὶ Α.

Πρόβλημα

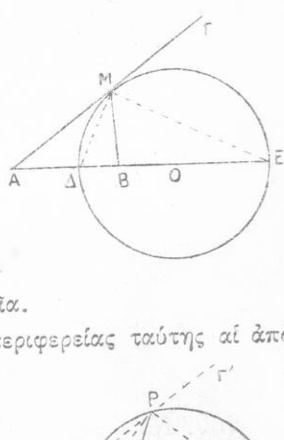
267. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἀποστάσεις ἔχουσι δοθέντα λόγον $\lambda:\mu$ (διάφορον τῆς μονάδος).*

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ Μ σημεῖόν τι τοῦ τόπου, τοιοῦτον δηλ. ὥστε $\mathrm{MA}:\mathrm{MB}=\lambda:\mu$.

Ἂν διχοτομηθῶσιν αἱ γωνίαι ΑΜΒ καὶ ΒΜΓ διὰ τῶν εὐθειῶν ΜΔ, ΜΕ, θὰ εἶναι (241, 242)

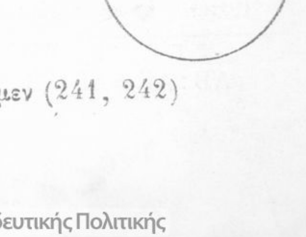
$$\mathrm{MA}:\mathrm{MB}=\Delta\mathrm{A}:\Delta\mathrm{B}=\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=\lambda:\mu.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μὲν σημεῖα Δ καὶ Ε, εἰς ἃ αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τέμνουσι τὴν ΑΒ, μένουσιν ἀμετάβλητα, ἂν ἀντὶ τοῦ Μ ληφθῇ ἄλλο σημεῖον τοῦ τόπου, διότι θὰ εἶναι πάντοτε $\Delta\mathrm{A}:\Delta\mathrm{B}=\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=\lambda:\mu$, ἡ δὲ γωνία ΔΜΕ εἶναι ὀρθή, τὸ σημεῖον Μ, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς καταγραφομένης ἐπὶ τῆς ΔΕ ὡς διαμέτρου. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα περιφερείας θὰ κεῖνται καὶ πάντα τοῦ τόπου τὰ σημεῖα.



Ἀντιστρόφως· παντὸς σημείου τῆς περιφερείας ταύτης αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀποστάσεις ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον $\lambda:\mu$.

Ἔστω τὸ ἐπὶ τῆς ῥηθείσης περιφερείας κείμενον σημεῖον Ρ. Ἂς ἀχθῇ ἡ πρὸς τὴν ΡΔ συμμετρικὴ τῆς ΡΒ εὐθεῖα ΡΑ'.



Ἐπειδὴ αἱ ΡΔ, ΡΕ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α'ΡΒ καὶ ΒΡΓ', θὰ ἔχωμεν (241, 242)

$$\frac{PA'}{PB}=\frac{\Delta A'}{\Delta B}=\frac{EA'}{EB},\quad \text{ὅθεν}\ \frac{\Delta A'}{EA'}=\frac{\Delta B}{EB},$$

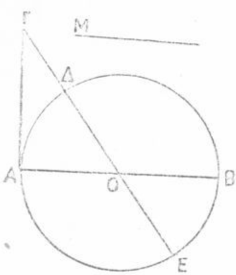
ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{EB}$, τ. ἔ. $\frac{\Delta A}{EA}=\frac{\Delta B}{EB}$,

συνάγομεν ἄρα $\frac{\Delta A'}{EA'}=\frac{\Delta A}{EA}$, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον Α συμπίπτει μετὰ τοῦ Α′ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $PA:PB=\Delta A:\Delta B=\lambda:\mu$.

Πρόβλημα.

268. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον δοθέντι τετραγώνῳ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω πλευρὰ μὲν τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ Μ, δοθεῖσα δὲ εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γραφῇ περιφέρεια, ἀχθῇ δὲ ἡ εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένη ΑΓ τῆς περιφερείας καὶ ληφθῇ ἡ ΑΓ=Μ, ἔτι δὲ ἀχθῇ ἡ διὰ τοῦ Γ καὶ τοῦ Ο διερχομένη εὐθεῖα ΓΔΕ, τὰ δύο τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ θὰ εἶναι αἱ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου προσκείμεναι πλευραί.

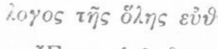


Διότι, ἡ μὲν διαφορὰ ΓΕ—ΓΔ ἰσοῦται τῇ διαμέτρῳ ΔΕ, ἤτοι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον (ΓΔ)×(ΓΕ) ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς (ΑΓ).

Πρόβλημα.

269. *Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεῖζον τούτων νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ Γ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι ἔστω



$AB:A\Gamma=A\Gamma:\Gamma B$ ἢ καὶ (231) $(A\Gamma)^2=(AB)\times(\Gamma B)$.

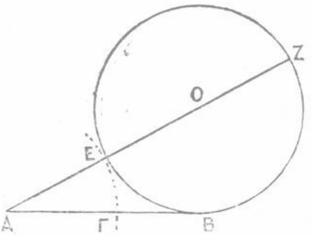
269 Δ- εὐθείας εἰς δύο μέρη ὧν τὸ μεῖζον εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους αὐτῆς.

Ἂν ἀντὶ τῆς (ΓΒ) τεθῇ ἡ ἴση αὐτῇ διαφορὰ (ΑΒ)—(ΑΓ), ἐκτελεσθῇ δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, θὰ εἶναι

$$(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{AB})\times(\mathrm{A\Gamma}) \text{ ἢ } (\mathrm{A\Gamma})^2+(\mathrm{AB})\times(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB})^2$$

καὶ ἄρα $$(\mathrm{A\Gamma})\big((\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{AB})\big)=(\mathrm{AB})^2.$$

Λοιπὸν τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ προηγούμενον· διότι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς ἰσότητος ταύτης ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, αἱ δὲ προσκείμεναι αὐτοῦ πλευραὶ ἔχουσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ.



Οὕτως, ἂν γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον ἴσην τῇ ΑΒ, εἶτα δὲ ἐφαπτομένη ταύτης ἴση τῇ ΑΒ, τὰ δύο τμήματα τῆς τεμνούσης, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς ἐφαπτομένης καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι θὰ εἶναι (265)

$$(\mathrm{AE})\times(\mathrm{AZ})=(\mathrm{AB})^2 \text{ ἢ } (\mathrm{AE})[(\mathrm{AE})+(\mathrm{EZ})]=(\mathrm{AB})^2,$$

τουτέστιν, ἂν ληφθῇ ΑΓ=ΑΕ, θὰ εἶναι

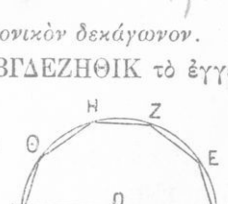
$$(\mathrm{A\Gamma})\times\big[(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{AB})\big]=(\mathrm{AB})^2.$$

Πρόβλημα.

164, 165, 166.

270. *Ἐν δοθέντι κύκλῳ νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον.*

Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δεκάγωνον.



Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶναι $\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς (161, παρατ.)· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $2-\frac{2}{5}$ ἢ $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, διότι ΟΑ=ΟΒ, ἑκατέρα τούτων θὰ ἰσῶται πρὸς

270 ἐγγραφὴ καν-δεκ-. Εὕρεσις πλευρᾶς

275 3ον

$\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ τὴν γωνίαν Β διχοτομοῦσα εὐθεῖα ΒΓ′, τὸ σχηματισθησόμενον τρίγωνον ΒΟΓ′ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ′ΟΒ, ΟΒΓ′ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· θὰ εἶναι ἄρα ΒΓ′=ΟΓ′.

Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ′ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ′ΑΒ, ΒΓ′Α θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· θὰ εἶναι ἄρα ΑΒ=ΒΓ′. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ′ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΟ, θὰ εἶναι (241) ΒΟ : ΒΑ=ΟΓ′ : Γ′Α.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς ΒΟ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρὸς ταύτην ἴσην ΟΑ καὶ ἀντὶ τῆς ΒΑ τὴν ΟΓ′, θὰ ἔχωμεν ΟΑ : ΟΓ′=ΟΓ′ : Γ′Α· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαιρεῖται κατὰ τὸ Γ′ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα ΟΓ′ εἶναι ἴσον τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Λοιπόν, ἵνα ἐγγράψωμεν ἐκ κύκλῳ κανονικὸν δεκάγωνον, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας δέκα ἐφεξῆς τόξα ἔχοντα ἕκαστον χορδὴν ἴσην τῷ μείζονι τμήματι τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, καὶ ἄγομεν τὰς τούτων χορδάς.

Πρόβλημα.

271. *Ἐν δεδομένῳ κύκλῳ νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον.*

Ἂν διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς δέκα ἴσα μέρη, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, δύο ἐφεξῆς τόξα θὰ ἀποτελῶσι τὰ $\frac{2}{10}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας· ἡ χορδὴ ἄρα τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτελουμένου τόξου θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου.

Πρόβλημα.

272. *Ἐν δεδομένῳ κύκλῳ νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.*

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς· ἡ οὕτω λαμβανομένη διαφορὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60}$ ἤτοι πρὸς τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας· ἡ χορδὴ ἄρα τοῦ τόξου τούτου θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.

Παρατήρησις.

273. Ἄν, τῆς περιφερείας οὔσης διῃρημένης εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ὑποδιαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἡ περιφέρεια θὰ διαιρεθῇ εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν μερῶν ἴσων. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν καὶ εἰς 4, 8, 16 κτλ, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσον πρὸς δύναμιν τοῦ 2, ἤτοι 2^{μ}.

Ὁμοίως, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6, 12,...καὶ ἐν γένει εἰς 3.2^{μ} ἴσα μέρη. Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ πενταγώνου ἀρχόμενοι εἰς 10, 20, 40 ... καὶ γενικῶς εἰς 5.2^{μ} ἴσα μέρη· ἀπὸ δὲ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου εἰς 30, 60... καὶ γενικῶς εἰς $3.5.\ 2^{\mu}$ ἴσα μέρη. (1)

παρελθόντος

(1) Μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ ~~παρόντος~~ αἰῶνος ἐνομίζετο ὅτι μόνον τὰ ἀνωτέρω κανονικὰ πολύγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς κύκλον διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου (δηλ. εὐθείας γραμμῆς καὶ τόξων κύκλου). Ἀλλ' ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς *Gauss* ἀπέδειξεν ὅτι διὰ τοιούτων κατασκευῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς ν ἴσα μέρη, ἂν ὁ ν εἶναι ἢ πρῶτος ἀριθμὸς περιεχόμενος ἐν τῷ τύπῳ $2^{\mu}+1$ (οἷοι εἶναι οἱ 5, 17, 257,...), ἢ γινόμενον τοιούτων πρώτων παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου ἅπαξ, ἢ γινόμενον τοιούτων ἀριθμῶν ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 2.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Διὰ τοῦ ἐντὸς τῆς δεδομένης γωνίας ΒΓΔ κειμένου σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ οὕτως, ὥστε τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΔ τὰ μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας περιλαμβανόμενα, νὰ ὦσιν ἴσα.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τριπλάσιον δεδομένου τετραγώνου. Θ 260

3) Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δύο δεδομένα ὅμοια πολύγωνα Π καὶ Ρ καὶ ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.

4) Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τριγώνου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

5) Νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι δύο τούτων διαδοχικαὶ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τοῦ μείζονος τμήματος αὐτῶν ἰσουμένου τῇ πλευρᾷ τοῦ πενταγώνου.

6) Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πεντάγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην δεδομένῃ εὐθείᾳ.

7) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἰσοῦται τῷ τριπλασίῳ τῆς ἀκτῖνος τετραγώνῳ.

8) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ, οὗ ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 πχ.

9) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἅτινα εἶναι ἐγγεγραμμένα ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα 3 πχ.

(Απ. Ἐγγ. τρ. $= \frac{3}{4}\sqrt{3}\ \alpha^2 = 11$ τ.πχ., 69134..., ἐγγ. τετρ. $= 2\alpha^2 = 18$ τ.πχ., ἐγγ. ἑξάγ. $= \frac{3}{2}\sqrt{3}\ \alpha^2 = 23$ τ.πχ., 38268....

21 10) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δεδομένου κύκλου καὶ δεδομένης εὐθείας καὶ διερχόμενος διὰ δεδομένου σημείου.

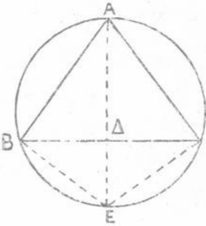
11) Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δεδομένου κύκλου.

12) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δύο δεδομένων κύκλων καὶ διερχόμενος διὰ δεδομένου σημείου.

13) Ἐὰν ἐκ σημείου Ο κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσιν ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ καὶ ἡ τέμνουσα ΟΑ, ἥτις συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ, νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΟΔ):(ΟΓ)=(ΑΔ)^2:(ΑΓ)^2$.

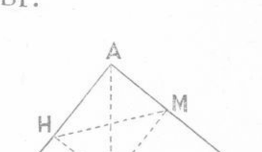
14) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος 1ον) δεδομένης εὐθείας καὶ διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων, ἢ 2ον) δύο δεδομένων εὐθειῶν καὶ διερχόμενος διὰ δεδομένου σημείου. 16

15) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, τὸ τμῆμα τῆς ἐξωτερικῆς κοινῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης, τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων τῆς ἐπαφῆς περιλαμβανόμενον, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν διαμέτρων τῶν δύο κύκλων.



16) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΔΕ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τριγώνου ΑΒΓ, ἡ χορδὴ ΓΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ΕΔ καὶ τῆς ΑΕ.

17) Δεδομένου τριγώνου, οἷον τοῦ ΑΒΓ, νὰ ἀχθῶσιν ἡ διάμεσος ΑΜ καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΜΒ, ΑΜΓ, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ.



18) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἐκ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀχθῶσιν αἱ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ κάθετοι, ΔΜ καὶ ΔΗ, τὸ τρίγωνον ΑΜΗ θὰ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον.

9 + 19) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀπὸ δύο δεδομένων εὐθειῶν ἀποστήματα ἔχουσι δεδομένον λόγον.

20) Ἂν ἐκ σημείου τινὸς Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου

τριγώνου ΑΒΓ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν, τέμνουσα εἰς τὸ Ε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περιφέρειαν καὶ εἰς τὸ Ζ καὶ τὸ Η τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ εἶναι

$$(\Delta E)^2 = (\Delta Z) \times (\Pi H).$$

21) Ἂν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

22) Ἂν ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ὡς διαμέτρων γραφῶσιν ἡμιπεριφέρειαι τέμνουσαι εἰς τὰ σημεῖα Ε,Ζ τὰ εἰς τὰς πλευρὰς ταύτας ἀντιστοιχοῦντα ὕψη, θὰ ἔχωμεν ΒΕ=ΒΖ.

23) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν τοιούτων, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων νὰ εἶναι ἴσον δεδομένῳ τετραγώνῳ.

24) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, τὰς δὲ πλευρὰς τὰς περιεχούσας δύο ἄλλας γωνίας ἀναλόγους, ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια ἢ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.

25) Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν, αἵτινες τὴν γωνίαν ταύτην περιέχουσι.

26) Νὰ ἀχθῇ παραλλήλως ταῖς βάσεσι τραπεζίου τινὸς ΑΒΓΔ εὐθεῖα, ἥτις νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ βάσεις.

27) Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ δὲ τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου σημείου ἀπόστασις εἶναι διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου σημείου ἀποστάσεως.

28) Ἀπὸ δεδομένου σημείου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς τομῆς δύο δεδομένων εὐθειῶν, ἃς δὲν δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν μέχρις οὗ συναντηθῶσιν.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΙΣΤΩΝΤΕΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

274. Γεωμετρικῶν τινων προβλημάτων ἡ λύσις ἐξαρτᾶται πολλάκις ἐκ τοῦ προσδιορισμοῦ μιᾶς ἢ πλειόνων ἀγνώστων γραμμῶν ἐξ ἄλλων γραμμῶν δεδομένων.

Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ μὲν τῶν πρώτων τοῦ ἀλφαβήτου γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, τὰ μήκη γνωστῶν γραμμῶν (εὐθειῶν) μετρηθεισῶν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἥτις συνήθως μένει ἀόριστος, διὰ δὲ τῶν τελευταίων γραμμάτων, τῶν χ, ψ, ω, τὰ μήκη ἀγνώστων γραμμῶν, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν σχέσεις τινὰς τῶν μηκῶν τούτων, ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ σχήματος προκυπτούσας, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀλγέβρας, διὰ τύπων, οἵτινες θὰ δεικνύωσι τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰς γνωστὰς εὐθείας πρὸς εὕρεσιν τῶν μηκῶν τῶν ἀγνώστων εὐθειῶν.

Ἀντιστρόφως, δεδομένου τοιούτου τινὸς τύπου δυνάμεθα πολλάκις νὰ εὕρωμεν κατασκευὴν δι' ἧς νὰ προκύπτῃ, ἐκ τῶν δεδομένων γραμμῶν, ἡ γραμμὴ ἡ ἔχουσα μῆκος παριστάμενον ὑπὸ τούτου τοῦ τύπου.

Ἐνταῦθα θὰ ἑρμηνεύσωμεν γεωμετρικῶς τοὺς ἑξῆς μόνους τύπους, οἵτινες συχνάκις ἀπαντῶσιν ἐν τῇ λύσει τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων, ὅταν αὕτη εἶναι ἐφικτὴ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

1ον. Ὁ τύπος $\chi = \frac{\alpha . \beta}{\gamma}$, δεικνύει ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμὴ χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος ὡς πρὸς τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμὰς α, β, γ· θὰ εὕρωμεν ἄρα ταύτην διὰ τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἥν ἐδείξαμεν ἐν τῷ προβλήματι 244.

2ον. Ὁ τύπος $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$, δεικνύει ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο δεδομένων γραμμῶν α καὶ β· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εὑρεθῇ ἡ ἄγνωστος γραμμὴ διὰ τοῦ προβλήματος 227.

3ον. Ὁ τύπος $\chi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, δεικνύει ὅτι ἡ ἄγνωστος γραμμὴ χ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουσι τὰ δεδομένα μήκη β καὶ α (174).

4ον. Ὁ τύπος $\chi=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, δεικνύει ὅτι ἡ ἄγνωστος γραμμὴ χ εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ μὲν ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος α, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχει μῆκος β (177).

Ἡ γραφικὴ ἄρα κατασκευὴ τῶν δύο τελευταίων τύπων θὰ γείνῃ συμφώνως πρὸς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων 174 καὶ 177.

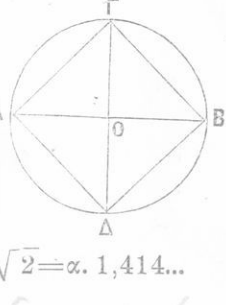
5ον. Ὁ τύπος $\chi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$, ἂν ληφθῇ $\rho^2=\alpha^2+\beta^2$, γίνεται $\chi=\sqrt{\rho^2-\gamma^2}$· κατ' ἀκολουθίαν δύο διαδοχικαὶ κατασκευαί, κατὰ τὰ προηγούμενα (3ον, 4ον), θὰ προσδιορίσωσι τὴν ἄγνωστον γραμμὴν χ.

Σημείωσις. Παρατηρητέον ὅτι ὑπάρχουσι καὶ τύποι ὁρίζοντες γραμμὰς μὴ δυναμένας νὰ κατασκευασθῶσιν ἐκ τῶν δεδομένων μόνον διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Τοιοῦτος εἶναι ὁ τύπος $\chi=\alpha\sqrt[3]{2}$, ὅστις ὁρίζει γραμμὴν μὴ δυναμένην νὰ κατασκευασθῇ καθ' ὃν εἴπομεν τρόπον ἐκ τῆς ἐχούσης μῆκος α.

Προβλήματα
ὧν ἡ λύσις ἐκφράζεται δι' ἀλγεβρικῶν τύπων.

Πρόβλημα. 1ον

275. *Ἐκ τῆς ἀκτῖνος δεδομένου κύκλου, οἷον τῆς α, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν ἑξῆς ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων· τετραγώνου, τριγώνου, δεκαγώνου καὶ πενταγώνου.*



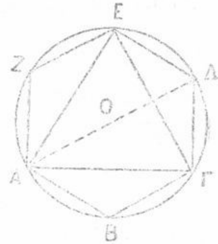
1ον **Τοῦ τετραγώνου** (164)

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΓ, ἔχομεν $(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{O\Gamma})^2$ ἢ $(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{OA})^2.2$, ἕπεται ὅτι $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{OA}).\sqrt{2}=\alpha.\sqrt{2}=\alpha.\ 1,414...$

275 Ἐν τῷ προβλ- τούτῳ διαιρετέον τὴν ἐγγραφὴν τῆς εὑρέσεως τῆς πλευρᾶς....

Λοιπὸν τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2.

2ον Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (166)



Ἂν πρὸς τοῦτο ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον (165), τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἀχθῇ δὲ ἡ διάμετρος ΑΔ, ἐκ τοῦ σχηματισθησομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ, θὰ ἔχωμεν (217)

$$(A\Gamma)^2=(A\Delta)^2-(\Gamma\Delta)^2,$$

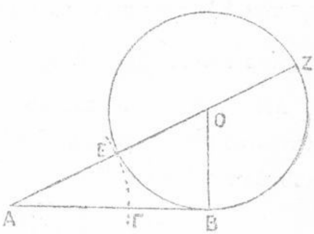
καὶ ἄρα, ἐπειδὴ ΓΔ=ΟΑ, $(A\Gamma)^2=4(OA)^2-(OA)^2=3(OA)^2$,

ἤτοι $(A\Gamma)=(OA)\sqrt{3}=\alpha\sqrt{3}=\alpha.\ 1{,}732\ldots$

Λοιπὸν τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ $\sqrt{3}$.

3ον Τοῦ δεκαγώνου (270)

3ον εγγρ φὴ ἐν 27



Ἐν τῷ σχήματι (ἐδ. 269) τῷ χρησιμεύοντι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μείζονος μέρους ΑΓ εὐθείας ΑΒ διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἔχομεν

$$(AO)^2=(AB)^2+(BO)^2,$$

καὶ ἐπειδὴ $(BO)=\frac{(AB)}{2}$,

ἕπεται ὅτι $(AO)^2=(AB)^2+\frac{(AB)^2}{4}=5\,\frac{(AB)^2}{4}$,

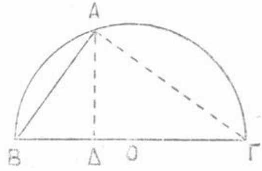
καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(AO)=\frac{(AB)}{2}\sqrt{5}$.

Ἀλλὰ ΑΕ=ΑΟ—ΕΟ· ὥστε τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου, ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα α=(ΑΒ), ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι (270)

$$(AE)=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)\ \text{ἢ}\ (AE)=\alpha.\ 0{,}61803\ldots$$

Πρόβλημα 2ον.

276. *Ἐκ τῆς χορδῆς τόξου νὰ εὑρεθῇ ἡ τοῦ διπλασίου τόξου χορδή.*



Ἔστω ὅτι ἡ δεδομένη χορδὴ εἶναι ἡ ΑΒ. Ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ κάθετος, θὰ ἔχωμεν

$$(\mathrm{B\Gamma})\times(\mathrm{A\Delta})=(\mathrm{AB})\times(\mathrm{A\Gamma}),$$

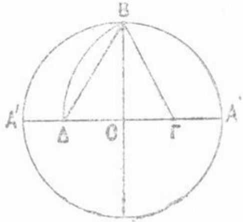
διότι ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· θὰ εἶναι ἄρα

$$(\mathrm{A\Delta})=\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{B\Gamma})}\times(\mathrm{A\Gamma}) \text{ ἢ } (\mathrm{A\Delta})=\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{B\Gamma})}\sqrt{(\mathrm{B\Gamma})^2-(\mathrm{AB})^2}.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $(\mathrm{OB})=\alpha$ καὶ $(\mathrm{AB})=\delta$ καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{2}$ τὴν ΑΔ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου, ὅπερ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒ, θὰ ἔχωμεν $\gamma=\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}$. (1)

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ὑπολογιζομένη ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου πλευρά, ἐκ τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου (275, 3ον), εὑρίσκεται ὅτι εἶναι

$$\gamma=\frac{\alpha}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\alpha.1,175....$$



Παρατήρησις. Ἂν ἐν τῷ κύκλῳ Ο ἀχθῶσιν αἱ διάμετροι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, γραφῇ δὲ τόξον ἔχον κέντρον μὲν τὸ Γ, ὅπερ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΑ, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΓΒ, τὸ τόξον τοῦτο θὰ τέμῃ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ′ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Δ· ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου πλευρά.

Διότι, ἐπειδὴ $(\mathrm{\Gamma\Delta})=(\mathrm{\Gamma B})=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$,

ἕπεται ὅτι $(\mathrm{O\Delta})=(\mathrm{\Gamma\Delta})-(\mathrm{\Gamma O})=\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$·

ἤτοι ἡ ΟΔ εἶναι ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου πλευρὰ (275, 3ον). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου δὲ τριγώνου ΒΔΟ ἔχομεν

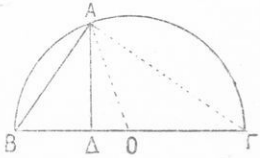
$$(\text{Β}\Delta)^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}\left(10-2\sqrt{5}\right).$$

Λοιπὸν ἡ τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Πρόβλημα 3ον.

277. *Ἐκ τῆς χορδῆς τόξου ἐλάσσονος ἡμιπεριφερείας νὰ εὑρεθῇ ἡ τοῦ ἡμίσεος τοῦ τόξου τούτου χορδή.*

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ τοῦ ἡμικυκλίου ΒΑΓ κάθετος ΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δεδομένης χορδῆς· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή.



Ἂν δὲ σχηματίσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΒΓ})\times(\text{Β}\Delta) \text{ ἢ } (\text{ΑΒ})^2=(\text{ΒΓ})\times\left((\text{ΟΒ})-(\text{Ο}\Delta)\right).$$

Ἂν δὲ παραστήσωμεν τὴν μὲν ἀκτῖνα ΟΑ διὰ τοῦ α, τὴν δὲ ΑΔ διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{2}$, θὰ ἔχωμεν

$$(\text{Ο}\Delta)=\sqrt{(\text{ΟΑ})^2-(\text{Α}\Delta)^2}=\sqrt{\alpha^2-\frac{\gamma^2}{4}}$$

καὶ ἄρα

$$(\text{ΑΒ})^2=2\alpha\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\frac{\gamma^2}{4}}\right).$$

Λοιπὸν ὁ τὴν χορδὴν ΑΒ παριστῶν τύπος εἶναι

$$(\text{ΑΒ})=\sqrt{2\alpha^2-2\alpha\sqrt{\alpha^2-\frac{\gamma^2}{4}}},$$

$$\text{ἢ } (\text{ΑΒ})=\sqrt{\frac{2\alpha^2+\gamma\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{2\alpha^2-\gamma\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Ὅτι δὲ αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ (ΑΒ) εἶναι ἴσαι ἐπαληθεύομεν λαμβάνοντες τὰ τετράγωνα αὐτῶν.

Παρατήρησις I. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ τύπου (1) $\gamma=\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{4\alpha^2-\delta^2}$ (276), διὰ τῆς ὡς πρὸς δ ἐπιλύσεως τῆς ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκυπτούσης *διτετραγώνου* ἐξισώσεως $\delta^4-4\delta^2\alpha^2+\alpha^2\gamma^2=0$.

Παρατήρησις II. Καθ' ὅμοιον τρόπον λύεται τὸ ἀνάλογον πρόβλημα, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ τόξον, οὗ δίδεται ἡ χορδὴ γ, εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας. Ἡ μεταξὺ γ καὶ δ σχέσις ἐκφράζεται καὶ ἐνταῦθα ὑπὸ τοῦ τύπου (1), ὥστε ἰσχύει καὶ πάλιν ἡ ἄνω διτετράγωνος ἐξίσωσις. Ἡ τιμὴ ὅμως τοῦ δ δίδεται νῦν ὑπὸ τοῦ τύπου $\delta=\sqrt{2\alpha^2+2\alpha\sqrt{\alpha^2-\frac{\gamma^2}{4}}}$,

ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου: $\delta=\sqrt{\frac{2\alpha^2+\gamma\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{2\alpha^2-\gamma\alpha}{2}}$.

Πρόβλημα 4ον.

278. *Δεδομένου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ, νὰ περιγραφῇ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἕτερον κανονικὸν πολύγωνον τῷ δεδομένῳ ὅμοιον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τούτου πλευρά.*

Ἐν τοῖς ἔμπροσθεν (162, 163) εἴδομεν τίνι τρόπῳ ἐγγράφονται καὶ περιγράφονται περὶ κύκλον κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν, οἷον μ.

Νῦν δὲ λέγω ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα, καθὸ κανονικὰ καὶ ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν, εἶναι καὶ ὅμοια.

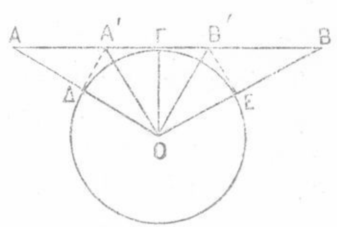
Διότι ἔχουσι τὰς μὲν πλευρὰς ἀναλόγους, διότι ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ἑτέρου πρὸς ἑκάστην τοῦ ἑτέρου εἶναι ὁ αὐτός· τὰς δὲ γωνίας ἴσας, διότι, ἐπειδὴ παντὸς πολυγώνου ἔχοντος μ πλευρὰς τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν εἶναι 2μ—4 ὀρθαί, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου τῶν κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶναι $\frac{2\mu-4}{\mu}$ ἢ $2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθαί.

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πλευρὰν διὰ τοῦ α, τὴν δὲ τοῦ κύκλου ἀκτῖνα διὰ τοῦ ρ, τὴν δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου πλευρὰν διὰ τοῦ 6, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΗΒ, ΟΒΠ, ἐν οἷς $\frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΒΠ}}=\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΠ}}$, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ὁμοίου πολυγώνου πλευρὰν παριστῶν τύπος εἶναι $6=\frac{2\alpha\rho}{\sqrt{4\rho^2-\alpha^2}}$. (3)

Πρόβλημα 5ον.

279. *Δεδομένης τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου περὶ κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἐφαπτόμεναι, ἡ εὐθεῖα Α'Β' θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΟΑ' θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΟΑ, θὰ προκύψῃ ἡ ἀναλογία (241)



$$\frac{\text{ΓΑ}'}{\text{ΟΓ}}=\frac{\text{Α}'\text{Α}}{\text{ΟΑ}}=\frac{\text{ΓΑ}'+\text{Α}'\text{Α}}{\text{ΟΓ}+\text{ΟΑ}}=\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΟΓ}+\text{ΟΑ}}. \qquad (1')$$

Ἂν δὲ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΑ

ἔχομεν $$(\text{ΟΑ})=\sqrt{(\text{ΟΓ})^2+(\text{ΓΑ})^2},$$

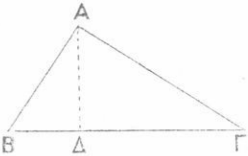
λαμβάνομεν $$(\text{ΓΑ}')=\frac{(\text{ΟΓ})\times(\text{ΓΑ})}{(\text{ΟΓ})+\sqrt{(\text{ΟΓ})^2+(\text{ΓΑ})^2}}. \qquad (2')$$

Ἂν δὲ παραστήσωμεν τὴν μὲν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου διὰ τοῦ ρ, τὴν δὲ δεδομένην πλευρὰν ΑΒ διὰ τοῦ α, τὴν δὲ τοῦ ζητουμένου πλευρὰν Α'Β' διὰ τοῦ α', ὁ ἄνω τύπος (2') γράφεται

$$\alpha'=\frac{\alpha\rho}{\rho+\sqrt{\rho^2+\frac{\alpha^2}{4}}}. \qquad (4)$$

Πρόβλημα 6ον

280. *Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὁ τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο παριστῶν τύπος (211) εἶναι

$$\text{Ε}=\frac{1}{2}\,(\text{ΒΓ})\times(\text{ΑΔ}), \qquad (1)$$

ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος (ΑΔ).

Ἀλλὰ (217) $$(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΑΓ})^2-(\text{ΔΓ})^2. \qquad (2)$$

Ὥστε ὁ ὑπολογισμὸς τῆς (ΑΔ) ἀνάγεται εἰς τὸν τῆς ΔΓ.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ (221) $(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΒΓ})^2-2\,(\text{ΒΓ})\times(\text{ΔΓ})$,

προκύπτει $(\text{ΔΓ})=\dfrac{(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΒΓ})^2-(\text{ΑΒ})^2}{2\,(\text{ΒΓ})}$, ἢ $(\text{ΔΓ})=\dfrac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha}$, (3)

τεθέντος $\alpha=(\text{ΒΓ}),\ \beta=(\text{ΓΑ}),\ \gamma=(\text{ΑΒ})$.

Ὁ τύπος ἄρα (2) καθίσταται $(\text{ΑΔ})^2=\beta^2-\left(\dfrac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha}\right)^2$,

$$\text{ἢ}\quad (\text{ΑΔ})^2=\left(\beta+\frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha}\right)\left(\beta-\frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha}\right),$$

$$\text{ἢ}\quad (\text{ΑΔ})^2=\frac{1}{4\alpha^2}\left[\,(\beta+\alpha)^2-\gamma^2\,\right]\left[\,\gamma^2-(\beta-\alpha)^2\,\right],$$

ἤτοι $(\text{ΑΔ})=\dfrac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)}$.

Ἐὰν νῦν ἐν τῷ τύπῳ (1), ἀντὶ τῆς (ΑΔ) ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς, θὰ προκύψῃ ὁ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ παριστῶν τύπος

$$\text{Ε}=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha+\gamma-\beta)\,(\beta+\gamma-\alpha)}. \qquad (4)$$

Ἂν δὲ τὴν τοῦ τριγώνου περίμετρον $\alpha+\beta+\gamma$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ 2τ, θὰ ἔχωμεν

(6) $\beta+\gamma-\alpha=2\,(\tau-\alpha),\ \gamma+\alpha-\beta=2\,(\tau-\beta)$

καὶ $\alpha+\beta-\gamma=2\,(\tau-\gamma)$,

ὁ τύπος ἄρα (4) γράφεται

$$\text{Ε}=\sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}. \qquad (5)$$

(6). $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$
$\beta+\gamma=2\tau-\alpha$
$\beta+\gamma-\alpha=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha)$ ἀναλόγως καὶ αἱ λοιπαὶ ἰσότητες.

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι κατάλληλος πρὸς λογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι τὸ ὑπόρριζον εἶναι γινόμενον πλειόνων παραγόντων καὶ δὴ θετικῶν, ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων δύο.

Σημ. Ὁ τύπος (3) ἰσχύει ὅταν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα. Ἐν τούτοις ὁ τύπος (4) ἰσχύει εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, ὡς εὐκόλως δεικνύεται.

Ἐφαρμογή.

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι (εἰς πήχεις)

$$\alpha=456{,}4,\quad \beta=518{,}5,\quad \gamma=592{,}3.$$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (5) τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma E=\frac{1}{2}[(\lambda o\gamma\tau+\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)].$$

Ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ διατάσσεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{rlcrl}
\alpha = & 456{,}4 & \qquad & \tau-\alpha= & 327{,}2\\
\beta = & 518{,}5 & & \tau-\beta= & 265{,}1\\
\gamma = & 592{,}3 & & \tau-\gamma= & 191{,}3\\
\hline
2\tau = & 1567{,}2 & & \tau= & 783{,}6\ (*)\\
\tau = & 783{,}6 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda o\gamma\,\tau = & 2{,}89409\\
\lambda o\gamma(\tau-\alpha)= & 2{,}51481\\
\lambda o\gamma(\tau-\beta)= & 2{,}42341\\
\lambda o\gamma(\tau-\gamma)= & 2{,}28171\\
\hline
2\ \lambda o\gamma\ E= & 10{,}11402\\
\lambda o\gamma\ E= & 5{,}05701\\
\text{ὅθεν}\ E= & 114028^{\tau.\pi\chi.},20.
\end{array}$$

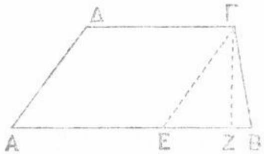
(*) Ἐξελέγξεως χάριν ἀθροίζομεν τὰς τιμὰς τῶν τ—α, τ—β, τ—γ, ἵνα ἴδωμεν ἂν πράγματι προκύπτῃ ἐξαγόμενον =τ.

Πρόβλημα 7ον.

281. ***Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἂς παριστῶνται κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν α,β,γ,δ.

Ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ παράλληλος, θὰ



εἶναι (ΑΕ)=(ΔΓ)=γ· κατ' ἀκολουθίαν (ΕΒ)=α—γ καὶ (ΓΕ)=(ΔΑ)=δ. Ἂν δὲ παραστήσωμεν τὸ μὲν τοῦ τραπεζίου ἐμβαδὸν διὰ τοῦ Ε, τὸ δὲ τοῦ τριγώνου ΕΒΓ διὰ τοῦ Ε′, τὸ δὲ κοινὸν αὐτῶν ὕψος ΖΓ διὰ τοῦ υ, θὰ ἔχωμεν

$$E=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\,\upsilon \text{ καὶ } E'=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\,\upsilon.$$

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει

$$\frac{E}{E'}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}, \text{ ὅθεν } E=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}E'.$$

Ἐπειδὴ δὲ, κατὰ τὰ προηγούμενα (280), ἔχομεν

$$E'=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)(\alpha-\gamma-\beta+\delta)(\alpha-\gamma+\beta-\delta)},$$

συνάγομεν ὅτι

$$E=\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)(\alpha-\gamma-\beta+\delta)(\alpha-\gamma+\beta-\delta)}.$$

Χρησιμότης τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ ἐν τῇ λύσει γεωμετρικῶν προβλημάτων.

282. Ἂν τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, εἰς ἃ ζήτημά τι τῆς γεωμετρίας ἀναφέρεται, αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ ἢ εἶναι ἢ ὑποτίθενται γνωσταὶ (ὅτε διὰ γραμμάτων αὗται παρίστανται), ἐν τῇ λύσει τοιούτου τινὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ προβῶμεν καὶ ἀλγεβρικῶς. Ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις τὰς μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ τῶν ἀγνώστων μεγεθῶν ὑπαρχούσας, πρέπει νὰ προσπαθῶμεν νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις τὰς μεταξὺ τῶν μεγεθῶν τούτων ὑπαρχούσας, αἵτινες συνήθως ἐκφράζονται δι' ἐξισώσεων· ἐκ δὲ τῆς ἐπι-

λύσεως ἢ τῆς ἐξισώσεως ἢ τοῦ συστήματος ἐξισώσεων, ἅτινα οὕτω προκύπτουσι, θὰ εὕρωμεν τὴν ζητηθεῖσαν ἢ τὰς ζητηθείσας ἀριθμητικὰς τιμὰς παρισταμένας δι' ἀλγεβρικῶν τύπων.

Οἱ οὕτως εὑρισκόμενοι τύποι, οἷοι εἶναι οἱ ἐν § 274 μνημονευθέντες $\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\chi=\sqrt{\alpha\beta}$, $\chi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\chi=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ κτλ, ὡς καὶ οἱ εὑρεθέντες κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἄνω, ἀπὸ 275—281, προβλημάτων, δεικνύουσι διὰ τίνων ὑπολογισμῶν δυνάμεθα νὰ πορισθῶμεν τὰς τιμὰς τῶν ἐν τῷ προκειμένῳ ζητήματι ἀγνώστων μεγεθῶν.

Ἐκ δὲ τῆς τῶν τύπων τούτων ἐξετάσεως δυνάμεθα, ὡς εἴπομεν καὶ ἐν ἐδ. 274, νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὴν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου κατασκευὴν τῶν ζητουμένων μεγεθῶν, ὁσάκις τὸ ζήτημα εἶναι τοιοῦτον, ὥστε εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος νὰ ἀρκῶσι τὰ ὄργανα ταῦτα.

Οὕτω δὲ ἐπιτυγχάνεται καὶ ἡ καθαρῶς γεωμετρικὴ ἐπίλυσις καὶ πολλῶν ζητημάτων, ἐν οἷς οὔτε δεδομένοι εἶναι οὔτε ζητοῦνται ἀριθμοί.

Κατὰ ταῦτα ἐν τῇ λύσει παντὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος τρία τινὰ πρέπει νὰ ποιῶμεν.

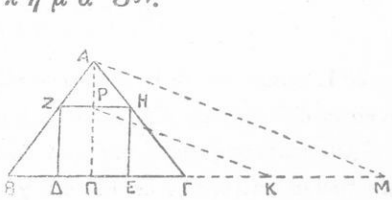
1ον) Νὰ εὑρίσκωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος.

2ον) Νὰ λύωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἢ τὰς ἐξισώσεις.

3ον) Νὰ διερευνῶμεν τὴν λύσιν αὐτῶν κατασκευάζοντες ἅμα καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ὁσάκις τοῦτο ζητεῖται.

Πρόβλημα 8ον.

283. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δεδομένον τρίγωνον.*



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΕΗΖ τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, οὗ ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ τῆς τοῦ τριγώνου βάσεως ΒΓ. Ἂν παραστήσωμεν τὴν μὲν τοῦ τριγώνου βάσιν ΒΓ διὰ τοῦ α, τὸ δὲ ὕψος ΑΠ διὰ τοῦ υ, τὴν δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ΖΗ διὰ τοῦ χ, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΖΗ καὶ ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν (247)

$$\frac{ΖΗ}{ΒΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ} \text{ καὶ } \frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΑΡ}{ΑΠ}, \text{ ὅθεν } \frac{ΖΗ}{ΒΓ}=\frac{ΑΡ}{ΑΠ}.$$

Ἂν δὲ ἀντὶ τοῦ (ΑΡ) τεθῇ τὸ ἴσον (ΑΠ)—(ΡΠ) $=υ-χ$,

θὰ ἔχωμεν $\frac{χ}{α}=\frac{υ-χ}{υ}$, ἐξ ἧς εὑρίσκεται $χ=\frac{αυ}{α+υ}$.

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ συνάγεται ὅτι ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν δεδομένων εὐθειῶν α, $α+υ$ καὶ υ (244).

Λοιπόν, ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτήν, λαμβάνομεν τὴν μὲν ΠΚ =ΒΓ, τὴν δὲ ΚΜ=ΑΠ, ἄγομεν δὲ τὴν ΑΜ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον αὐτῇ εὐθεῖαν ΚΡ, ἥτις τέμνει τὸ ὕψος ΑΠ εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Οὕτως ἡ ΠΡ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Ἂν δὲ ἐκ μὲν τοῦ Ρ ἀχθῇ ἡ ΖΗ τῇ ΒΓ παράλληλος, ἐκ δὲ τῶν Ζ καὶ Η αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΖΔ καὶ ΗΕ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΔΕΗΖ.

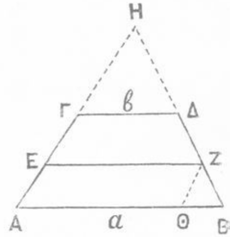
Σημείωσις. Παρατηροῦντες ὅτι $\frac{ΑΗ}{ΗΓ}=\frac{ΑΡ}{ΗΕ}=\frac{ΑΡ}{ΖΗ}=\frac{ΑΠ}{ΒΓ}=\frac{υ}{α}$, ἀγόμεθα εἰς τὴν ἑξῆς ἑτέραν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος λύσιν.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγεται εὐθεῖα παράλληλος τῇ τοῦ τριγώνου βάσει ΒΓ καὶ ἴση τῷ ὕψει αὐτοῦ ΑΠ, τὸ δὲ ἄκρον τῆς ἀχθείσης εὐθείας ἐπιζευγνύεται μετὰ τοῦ σημείου Β. Οὕτω τὸ σημεῖον Η, εἰς ὃ ἡ ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ΑΓ, εἶναι μία τῶν κορυφῶν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρόβλημα 9ον.

284. *Διαιρέσαι δεδομένον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ΕΖ παραλλήλου τῇ βάσει τοῦ τραπεζίου.*

Ἂν παραστήσωμεν τὰς μὲν πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ τοῦ τραπεζίου διὰ τῶν α καὶ β, τὴν δὲ ΕΖ διὰ χ, προεκτείνωμεν δὲ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΑΓ, ΒΔ μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Η, ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον ΑΒΖΕ εἶναι διαφορὰ τῶν τριγώνων ΗΑΒ, ΗΕΖ, ἔτι δὲ καὶ τὸ τραπέζιον ΕΖΔΓ εἶναι διαφορὰ τῶν τριγώνων ΗΕΖ καὶ ΗΓΔ, καὶ ἐπειδὴ τὰ τραπέζια ταῦτα ὑπετέθησαν ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν



$$(\text{ΗΑΒ})-(\text{ΗΕΖ})=(\text{ΗΕΖ})-(\text{ΗΓΔ}).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΗΑΒ, ΗΕΖ, ΗΓΔ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (256), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\text{ΗΑΒ})}{\alpha^2}=\frac{(\text{ΗΕΖ})}{\chi^2}=\frac{(\text{ΗΓΔ})}{\beta^2}=\rho,$$

ἔνθα ὁ ρ παριστᾷ τὴν τιμὴν τῶν λόγων τούτων.

Ἂν ἐν τῇ προηγουμένῃ σχέσει ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τοὺς ἴσους ἀντιστοίχως ἀριθμοὺς $\alpha^2.\rho$, $\chi^2.\rho$, $\beta^2.\rho$, εἶτα δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ ρ, θὰ προκύψῃ ἡ σχέσις $\alpha^2-\chi^2=\chi^2-\beta^2$, ἐξ ἧς συνάγεται ὅτι $2\chi^2=\alpha^2+\beta^2$.

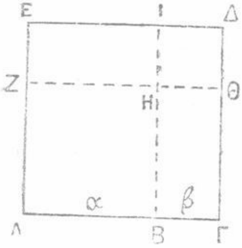
Λοιπὸν πρῶτον θὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευραὶ εἶναι α καὶ β. Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ τοῦ γ τὴν ὑποτείνουσαν τούτου, θὰ ἔχωμεν $2\chi^2=\gamma^2$· ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος χ παριστᾷ τὴν πλευρὰν τετραγώνου, οὗ ἡ διαγώνιος εἶναι γ.

Λοιπόν, ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ ληφθῇ ἡ ΑΘ ἔχουσα μῆκος τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ, ἐκ δὲ τοῦ Θ ἀχθῇ ἡ ΘΖ τῇ ΑΓ παράλληλος, ἐκ δὲ τοῦ Ζ ἡ ΖΕ τῇ ΑΒ παράλληλος, τὰ δύο τραπέζια, εἰς ἃ τὸ δεδομένον θὰ διαιρεθῇ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρατηρήσεις.

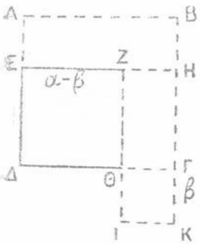
285. Πλὴν τῶν προβλημάτων, δι' ὧν ἡρμηνεύσαμεν τὴν μεταξὺ τῆς Ἀλγέβρας καὶ τῆς Γεωμετρίας σχέσιν, παραθέτομεν ἐνταῦθα καὶ γεωμετρικάς τινας κατασκευάς, δι' ὧν καταφαίνεται γεωμετρικῶς ἡ ἀλήθεια ταυτοτήτων τινῶν γνωστῶν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας.

αον) Ὁ τύπος $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$



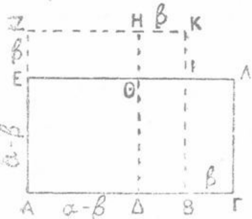
δηλοῖ ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι ἄθροισμα δύο εὐθειῶν, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν ηὐξημένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τούτων, ὕψος δὲ τὴν ἑτέραν.

βον) ὁ τύπος $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$



δηλοῖ ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις εἶναι διαφορὰ δύο εὐθειῶν, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τούτων, ὕψος δὲ τὴν ἑτέραν.

γον) ὁ τύπος $(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$



δηλοῖ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν δύο τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Εἰς δεδομένον τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο ἔχον περίμετρον ἴσην δεδομένῃ εὐθείᾳ.

2) Εἰς δεδομένον κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον δεδομένον ἐμβαδόν.

3) Νὰ διαιρεθῇ δεδομένον τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα δεδομένον λόγον μ : ν.

4) Εἰς δεδομένον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον δεδομένον ἐμβαδόν. Ποῖον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

5) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ ἔχοντι πλευρὰν α.

7) Δεδομένων τῶν πλευρῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ τριγώνου τούτου καὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τοῦ πρώτου τριγώνου.

8) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ἑτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

9) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση δεδομένῃ εὐθείᾳ α, ἡ δὲ ἑτέρα κάθετος εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς α.

10) Ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος νὰ ἀποδειχθῇ τὸ πόρισμα τοῦ ἐδ. 220.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

Περὶ ὁρίων.

Ὁρισμοί.

286. *Μεταβλητὸν* καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι λαμβάνει διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις.

287. *Σταθερὸν* δὲ καλεῖται τὸ ποσόν, ὅπερ ἐν ὑπολογισμῷ τινι μένει ἀεὶ τὸ αὐτό. Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, ἐπίσης ὁ τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ λόγος εἶναι σταθερὸς κ.τ.λ.

288. *Ὅριον* μεταβλητοῦ ποσοῦ λέγεται σταθερὸν ποσὸν ὡρισμένον, ἂν ἡ τοῦ μεταβλητοῦ ποσοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ διαφορὰ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεδομένης ποσότητος, νὰ μένῃ δὲ (μικροτέρα) τοιαύτη καὶ διὰ πάσας τὰς τιμάς, ἃς εἶτα τὸ μεταβλητὸν λαμβάνει.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος.

1ον. Τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ χορδῆς, ἧς τὰ ἄκρα τείνουσι νὰ συμπέσωσι, τὸ ὅριον εἶναι ἡ τοῦ κύκλου ἀκτίς.

2ον. Ἑκατέρας τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ὅριον εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία.

3ον. Ἂν τριγώνου μὴ ἰσοσκελοῦς μία γωνία τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, αἱ δὲ ταύτην περιέχουσαι πλευραὶ εἶναι σταθεραί, τὰ τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ὅρια εἶναι τῆς μὲν ἑτέρας τὸ μηδέν, τῆς δὲ ἑτέρας αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

4ον. Κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος μ πλευρὰς ἡ γωνία ἰσοῦται πρὸς $\frac{2\mu-4}{\mu}$, ἤτοι $2-\frac{4}{\mu}$. Ἂν δὲ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ἀεὶ αὐξάνηται καὶ ἡ γωνία θὰ αὐξάνηται· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς μ δύναται νὰ καταστῇ τόσον μέγας, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{\mu}$ νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, συνάγεται ὅτι ὅριον τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου εἶναι 2 ὀρθαί.

5ον. Ἂν δεδομένης εὐθείας ΑΒ ληφθῇ τὸ μέσον γ, εἶτα δὲ τὸ

Α γ γ΄ Β μέσον γ΄ τῆς εὐθείας γΒ καὶ ἐφεξῆς οὕτω, προφανῶς τὸ σημεῖον γ θὰ προχωρήσῃ ἀεὶ πρὸς τὸ πέρας Β τῆς ΑΒ, ὥστε ἡ τῆς μεταβλητῆς ταύτης εὐθείας Αγ ἀπὸ τῆς σταθερᾶς ΑΒ διαφορὰ νὰ καταστῇ μικροτέρα πάσης εὐθείας.

Οὕτως ἡ ΑΒ εἶναι τὸ ὅριον τῶν εὐθειῶν Αγ, Αγ΄....

Θεώρημα.

289. *Δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια τὸ ἄθροισμα ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἤτοι, ἂν ὅρα$=$Α καὶ ὅρβ$=$Β (ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α καὶ β παριστῶντος τὰς διαφόρους τιμὰς μεταβλητοῦ τινος ποσοῦ), λέγω ὅτι θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ}(\alpha+\beta)=\text{ὅρα}+\text{ὅρβ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ὅρ}(\alpha+\beta)=A+B.$$

Διότι ἡ διαφορὰ $(A+B)-(\alpha+\beta)$, ἢ τὸ ἴσον αὐτῇ ἄθροισμα $(A-\alpha)+(B-\beta)$, γίνεται μικρότερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ μένει τοιοῦτον διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha+\beta$.

Τῷ ὄντι, ἵνα τοῦτο γίνῃ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἀρκεῖ ἑκατέρα τῶν διαφορῶν $A-\alpha$, $B-\beta$ νὰ γίνῃ καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{2\mu}$, ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως συμβαίνει (288).

Προφανῶς δὲ ἡ πρότασις αὕτη ἐπεκτείνεται καὶ περὶ τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ εἰς πεπερασμένον πλῆθος.

Παρατ. *Ὡσαύτως δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια ἡ διαφορὰ ἔχει ὅριον τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι δεικνύεται ὁμοίως ὅτι ἡ διαφορὰ $(A-B)-(\alpha-\beta)$, ἥτις γράφεται καὶ $(A-\alpha)+(\beta-B)$, γίνεται καὶ μένει μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\mu}$.

Θεώρημα.

290. *Δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια τὸ γινόμενον ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἤτοι, ἂν ὅρ $\alpha = A$ καὶ ὅρ$\beta = B$, λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\text{ὅρ}(\alpha.\beta) = \text{ὅρ}\alpha.\ \text{ὅρ}\beta \ \text{ἢ}\ \text{ὅρ}(\alpha.\beta) = A.B.$$

Διότι, ἂν αἱ μεταβληταὶ διαφοραὶ $\alpha - A$ καὶ $\beta - B$ παρασταθῶσι διὰ τῶν ἀριθμῶν ε καὶ η, θὰ εἶναι $\alpha - A = \varepsilon$ καὶ $\beta - B = \eta$ ἢ $\alpha = A + \varepsilon$ καὶ $\beta = B + \eta$, ὥστε

$$\alpha\beta = AB + A\eta + B\varepsilon + \varepsilon\eta \ \text{ἢ}\ \alpha\beta - AB = A\eta + B\varepsilon + \varepsilon\eta.$$

Λοιπὸν ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ AB ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha\beta$ θὰ γίνῃ μικροτέρα τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἂν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $A\eta$, $B\varepsilon$, $\varepsilon\eta$ γίνῃ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{3\mu}$. + Τοῦτο δὲ θὰ συμβῇ, ὅταν αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνωσι μικρότεραι τοῦ $\frac{1}{3\lambda\mu}$, τοῦ λ ὄντος ἀκεραίου μείζονος τοῦ A καὶ τοῦ B· τοῦτο δὲ γίνεται, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνονται καὶ μένουσι μικρότεραι παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ (288). Εἶναι ἄρα

$$\text{ὅρ}(\alpha.\beta) = A.B, \ \text{ἤτοι}\ \text{ὅρ}(\alpha.\beta) = \text{ὅρ}\alpha.\ \text{ὅρ}\beta.$$

Προφανῶς ἡ πρότασις αὕτη ἐκτείνεται καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου περισσοτέρων παραγόντων πεπερασμένου ὅμως πλήθους. Κατ/. Ε. εξ. 186

Παρατ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν α μεταβλητὸν καὶ β σταθερόν, θὰ ἔχωμεν ὅρ$(\alpha.\beta) = \beta$. ὅρα.

Θεώρημα.

291. *Δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια τὸ πηλίκον ἔχει ὅριον τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων αὐτῶν, ἂν τὸ τοῦ διαιρέτου ὅριον διαφέρῃ τοῦ μηδενός.*

Ἤτοι, ἂν ὅρ$\alpha = A$ καὶ ὅρ$\beta = B$ (ἔνθα $B \neq 0$), λέγω ὅτι θὰ εἶναι ὅρ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ὅρ}\alpha}{\text{ὅρ}\beta}$, ἢ ὅρ$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$.

+ ὡρισμένου πολλοστοῦ τοῦ $\frac{1}{\mu}$

1 διότι δὲν δυνάμεθα νὰ ἀσυγχωρήσωμεν τὸ $\frac{A}{B}$ ἀλλὰ τὸ $\frac{A+\varepsilon}{B+\eta}$ ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος τὸ $\frac{A}{B}$.

Διότι ἔστω ὅτι αἱ μεταβληταὶ διαφοραὶ $\alpha - A$ καὶ $\beta - B$ εἶναι

$$\alpha - A = \varepsilon \text{ καὶ } \beta - B = \eta, \text{ ἢ } \alpha = A + \varepsilon \text{ καὶ } \beta = B + \eta,$$

$$\text{καὶ ἄρα } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A+\varepsilon}{B+\eta}, \text{ ἤτοι } \frac{\alpha}{\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\varepsilon - A\eta}{B(B+\eta)} \quad 1$$

ἢ καὶ

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\varepsilon}{B(B+\eta)} - \frac{A\eta}{B(B+\eta)}.$$

Λοιπὸν ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $\frac{A}{B}$ ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ γίνῃ μικροτέρα τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ $\frac{1}{\mu}$, ἂν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν $\frac{B\varepsilon}{B(B+\eta)}$ καὶ $\frac{A\eta}{B(B+\eta)}$ γίνῃ τοῦ $\frac{1}{2\mu}$ μικρότερος.

Πρὸς τοῦτο, τοῦ μεταβλητοῦ γινομένου $B(B+\eta)$ ἔχοντος ὅριον τὸ B^2 (290, παρατ.),[1] διάφορον τοῦ 0, ἂν ληφθῇ μονάς τις $\frac{1}{\rho}$ μικροτέρα τοῦ $B(B+\eta)$ καὶ ἀκέραιός τις ἀριθμὸς λ μείζων καὶ τοῦ B καὶ τοῦ A, γίνῃ δὲ καὶ μείνῃ ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν ε καὶ η μικρότερος τοῦ $\frac{1}{2\rho\lambda\mu}$ (ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως γίνεται, κατὰ § 288),

1 διότι τὸ $B\eta$ τείνει πρὸς τὸ 0

ἤτοι, ἂν εἶναι $B < \lambda$, $A < \lambda$ καὶ $\varepsilon < \frac{1}{2\rho\lambda\mu}$, $\eta < \frac{1}{2\rho\lambda\mu}$,

θὰ εἶναι καὶ $\quad B\varepsilon < \frac{1}{2\rho\mu}$ καὶ $A\eta < \frac{1}{2\rho\mu}$,

ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\quad \frac{1}{\rho} < B(B+\eta)$, τ. ἔ. $\frac{1}{B(B+\eta)} < \rho$,

ἔπεται ὅτι $\quad \frac{B\varepsilon}{B(B+\eta)} < \frac{1}{2\mu}$ καὶ $\frac{A\eta}{B(B+\eta)} < \frac{1}{2\mu}$.

ἡ ἀνισότης ἀντεστράφη

Οὕτως ἄρα ἡ διαφορὰ $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{A}{B}$ θὰ γίνῃ καὶ θὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\mu}$.

Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν ὅρ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$, ἤτοι ὅρ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ὅρ } \alpha}{\text{ὅρ } \beta}$.

Παρατ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν β μεταβλητὸν καὶ τοιοῦτον ὥστε ὅρ$\beta \neq 0$, τὸ δὲ α σταθερόν, θὰ ἔχωμεν ὅρ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\text{ὅρ } \beta}$.

Σημείωσις. Ποσότης μεταβλητὴ α δύναται νὰ τείνῃ πρὸς ὅριον A εἴτε ἐκ τιμῶν διαρκῶς μειζόνων, εἴτε ἐκ τιμῶν διαρκῶς ἐλασσόνων, εἴτε ἐκ τιμῶν ἄλλοτε ἐλασσόνων καὶ ἄλλοτε μειζόνων. Δυνατὸν δηλ. ἡ διαφορὰ $\alpha - A = \varepsilon$ νὰ εἶναι ἢ διαρκῶς *θετική*, ἢ διαρκῶς *ἀρνητική*, ἢ ἄλλοτε μὲν ἀρνητικὴ ἄλλοτε δὲ θετική. Οὕτως ὁ μὲν ἀριθμὸς $1+\frac{1}{10^\mu}$ (οὗ διαδοχικαὶ τιμαὶ $2, \frac{11}{10}, \frac{101}{100}, \frac{1001}{1000}, \dots$) τείνει εἰς τὴν 1 ἐκ τιμῶν μειζόνων, ὁ δὲ ἀριθμὸς $1-\frac{1}{10^\mu}$ (οὗ διαδοχικαὶ τιμαὶ $0, \frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, \dots$) τείνει εἰς τὴν 1 ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς $1+\frac{1}{(-10)^\mu}$ (οὗ διαδοχικαὶ τιμαὶ $2, \frac{9}{10}, \frac{101}{100}, \frac{999}{1000}, \dots$) τείνει εἰς τὴν 1 ἐκ τιμῶν ἐναλλὰξ μειζόνων καὶ ἐλασσόνων.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν προτάσεων 285—291 ἰσχύουσι διὰ πάσας τὰς περιπτώσεις, ἀνάγκη ὅμως, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ τοῦ (ἐν ἐδ. 288) ὁρισμοῦ τοῦ *ὁρίου*, νὰ θεωρῆται ἡ *ἀπόλυτος τιμὴ* τῆς διαφορᾶς α—Α (διὰ νὰ εἶναι δηλ. ὅρα=Α, πρέπει ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς α—Α νὰ γίνηται καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης θετικῆς ποσότητος, ὁσονδήποτε μικρᾶς).

Θεώρημα.

292. *Ἐὰν μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμὸς α ἀπείρους λαμβάνων τιμὰς ἀεὶ αὐξάνηται, μένῃ δὲ ἐλάσσων δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ Α, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ὅριον.*

Διότι ὁ μεταβλητὸς οὗτος ἀριθμὸς α θὰ ὑπερβαίνῃ μέν τινας τῶν ἀκεραίων $0, 1, 2, 3, \dots \rho, \rho+1, \dots$ οὐχὶ δὲ πάντας (π.χ. οὐχὶ τοὺς μείζονας τοῦ Α).

Ἔστω δὲ ὅτι ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἐφεξῆς ὑπερβαίνει μὲν τὸν ρ οὐδέποτε δὲ τὸν ρ+1.

Ὡσαύτως ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\rho, \rho+\frac{1}{10}, \rho+\frac{2}{10}, \dots, \rho+\frac{10}{10}$ θὰ εὑρίσκωνται δύο ὧν μεταξὺ ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἐφεξῆς θὰ περιλαμβάνηται ὁ ἀριθμὸς α, ἔστωσαν δὲ οὗτοι ὁ $\rho+\frac{\rho_1}{10}$ καὶ ὁ $\rho+\frac{\rho_1+1}{10}$.

Ἂν δὲ ἐξακολουθήσωμεν οὕτω, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν ὡρισμένον, τὸν $\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\dots$, ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ Α, ὅστις θὰ εἶναι ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ α.

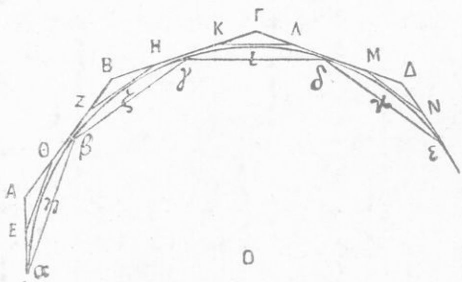
Διότι προφανῶς ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ α ἀπὸ τοῦ οὕτως εὑρεθέντος γίνεται καὶ μένει μικροτέρα παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ.

Παρατ. Ὁμοίως, ἂν *θετικὸς* ἀριθμὸς ἀεὶ ἐλαττῶται, ἀναγκαίως τείνει πρὸς ὅριον, ὅπερ δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσον τῷ μηδενί.

Μέτρησις τῆς περιφερείας.

Θεώρημα.

293. *Περιγεγραμμένου περὶ κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ἴσον πλῆθος πλευρῶν αἱ περίμετροι, ἂν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀεὶ διπλασιάζηται, ἔχουσι μήκη τείνοντα πρὸς κοινὸν ὅριον.*



Ἔστω αβγδε... τὸ ἐν τῷ κύκλῳ Ο ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον καὶ ΑΒΓΔ... τὸ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένον ἀντίστοιχον κανονικὸν πολύγωνον.

Ἂν ὁ τῶν τόξων αβ, βγ, γδ,... ἀριθμὸς διὰ τῆς ἑκάστου τούτων εἰς δύο ἴσα μέρη διαιρέσεως διπλασιασθῇ, σχηματισθῇ δὲ τὸ νέον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον αηβζγ ... καὶ τὸ νέον ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον ΕΘΖΗΚ..., ἐπαναληφθῇ δὲ καὶ ἐπὶ τῶν νέων τούτων πολυγώνων ἡ αὐτὴ ἐργασία καὶ ἐφεξῆς ἀεὶ οὕτως, λέγω ὅτι ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου περίμετρος, ἧς τὸ μῆκος ἔστω σ, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου, ἧς τὸ μῆκος ἔστω Σ, θὰ τείνωσι πρὸς κοινὸν ὅριον.

Ἵνα τοῦτο ἀποδείξωμεν θὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς·

1ον) Ὅτι ἡ περίμετρος σ βαίνει ἀεὶ αὐξανομένη.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον αηβζγ... περικλείει τὸ πολύγωνον αβγδ... ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι μείζων τῆς τοῦ περικλειομένου.

2ον) Ὅτι ἡ περίμετρος Σ βαίνει ἀεὶ ἐλαττουμένη.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΕΘΖΗΚ... περικλείεται ὑπὸ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ.... ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ περικλείοντος (79).

3ον) Ὅτι αἱ διάφοροι τιμαὶ τῆς περιμέτρου σ εἶναι μικρότεραι πάσης τιμῆς τῆς περιμέτρου Σ.

Διότι πᾶν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον περικλείεται ὑπὸ παντὸς περιγεγραμμένου.

Ἡ ποσότης ἄρα σ, ἥτις βαίνει ἀεὶ αὐξανομένη, μένει δὲ ἀεὶ μικροτέρα σταθερᾶς τινος ποσότητος (ἤτοι τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ Σ), τείνει πρὸς ὅριον (292).

Ὡσαύτως ἡ ποσότης Σ, ἥτις βαίνει ἀεὶ ἐλαττουμένη, μένει δὲ ἀεὶ μείζων σταθερᾶς τινος ποσότητος (ἤτοι τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ σ), τείνει ἐπίσης πρὸς ὅριον (292).

294. Νῦν δὲ λέγω ὅτι τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἰσὶν ἴσα.

Τῷ ὄντι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον καὶ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον, περὶ ὧν νῦν ὁ λόγος, ὡς ἔχοντα ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ὅμοια (278)· κατ' ἀκολουθίαν αἱ περίμετροι αὐτῶν σ καὶ Σ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν (260)· ἐπειδὴ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τὸ ἀπόστημα ἰσοῦται τῇ τοῦ δεδομένου κύκλου ἀκτῖνι Α, ἂν τὸ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἀπόστημα παραστήσωμεν διὰ τοῦ α θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Sigma}{\sigma}=\frac{A}{\alpha}.$$

Ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων τούτων ἀεὶ διπλασιάζηται, τὸ ἀπόστημα α θὰ τείνῃ πρὸς τὴν ἀκτῖνα Α, καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν (291) $\frac{\text{ὅρ}\,\Sigma}{\text{ὅρ}\,\sigma}=\text{ὅρ}\,\frac{\Sigma}{\sigma}=\text{ὅρ}\,\frac{A}{\alpha}=\frac{A}{\text{ὅρ}\alpha}=1$, τ. ἔ. ὅρ Σ = ὅρσ.

Σημείωσις. Τὸ οὕτως εὑρισκόμενον κοινὸν ὅριον τῶν Σ καὶ σ θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος Λ.

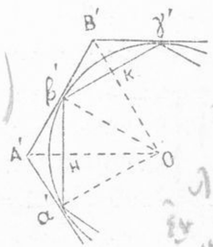
*295. Λέγω δὲ προσέτι ὅτι *παντὸς ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου περὶ κύκλον πολυγώνου, οὗ ἑκάστη πλευρὰ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἡ περίμετρος τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον* Λ, ὅπερ εἶναι τὸ ἤδη εὑρεθέν.

Πρὸς τοῦτο, ἂν $\alpha'\beta'\gamma'$.... εἶναι τὸ τυχὸν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ Ο πολύγωνον (οὐχὶ ἀναγκαίως κανονικὸν) καὶ $A'B'\Gamma'$.... τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον, καὶ σ', Σ' αἱ τούτων περίμετροι, ἀποδεικνύω πρῶτον ὅτι, ὅταν πᾶσαι αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου πολυγώνου τείνωσι νὰ μηδενισθῶσιν, ἔχομεν ὅρ$\frac{\Sigma'}{\sigma'}=1$.

Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων $O\alpha'H$ καὶ $O\alpha'A'$ ἔχομεν

$$\frac{(\alpha'A')+(A'\beta')}{(\alpha'\beta')}=\frac{(\alpha'A')}{(\alpha'H)}=\frac{P}{(OH)}\quad\left[\text{ἔνθα } (O\alpha')=P\cdot\right]$$

ὡσαύτως $\dfrac{(\beta'B')+(B'\gamma')}{(\beta'\gamma')}=\dfrac{P}{(OK)}$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.



Ἂν δὲ λάβωμεν τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ ἀθροίσωμεν καὶ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἐν αὐτοῖς κλασμάτων, τὸ ἐξαγόμενον $\frac{\Sigma'}{\sigma'}$ ὅπερ θὰ εὕρωμεν θὰ εἶναι κλάσμα περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου τῶν πρώτων κλασμάτων, ἤτοι ἂν $\frac{\Sigma'}{\sigma'}=\theta$, ὁ ἀριθμὸς θ θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου τῶν κλασμάτων $\frac{P}{(OH)}$, $\frac{P}{(OK)}$,...

Ἂν δὲ τὸ πολύγωνον μεταβάλληται οὕτως, ὥστε πᾶσαι αἱ πλευραὶ νὰ τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν, πᾶσαι αἱ ἀποστάσεις (ΟΗ), (ΟΚ),... θὰ τείνωσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα Ρ καὶ κατ' ἀκολουθίαν πάντες οἱ λόγοι $\frac{P}{(OH)}$, $\frac{P}{(OK)}$,... θὰ ἔχωσιν ὅριον τὴν μονάδα· τοῦτο δὲ θὰ εἶναι καὶ τὸ ὅριον τοῦ θ· θὰ εἶναι ἄρα ὅρ $\frac{\Sigma'}{\sigma'}=1$.

Νῦν δὲ παρατηρῶ ὅτι, ἐπειδὴ σ' εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου, θὰ εἶναι τοῦτο μικρότερον καὶ τοῦ ὁρίου Λ τῶν ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ θεωρηθεισῶν περιμέτρων Σ.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ Σ′ εἶναι μεῖζον τῆς περιμέτρου παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου, θὰ εἶναι μεῖζον καὶ τοῦ ὁρίου Λ τῶν προηγουμένως θεωρηθεισῶν περιμέτρων σ, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\sigma' < \Lambda < \Sigma' \text{ καὶ ἄρα } 1 < \frac{\Lambda}{\sigma'} < \frac{\Sigma'}{\sigma'}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\frac{\Sigma'}{\sigma'}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα, καὶ ὁ λόγος $\frac{\Lambda}{\sigma'}$, ὡς περιεχόμενος μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ $\frac{\Sigma'}{\sigma'}$, θὰ ἔχῃ ὡσαύτως ὅριον τὴν μονάδα, τ. ἔ. ὅρ$\frac{\Lambda}{\sigma'} = 1$. Θὰ εἶναι ἄρα ὅρσ′ $= \Lambda$· διότι

(α) διότι ἂν διαιρέσωμεν τὴν μεταβλητὴν τὴν Λ: $\frac{\Lambda}{\sigma'}$

$$\text{ὅρ}\sigma' = \text{ὅρ}\left(\Lambda : \frac{\Lambda}{\sigma'}\right) = \Lambda : \text{ὅρ}\frac{\Lambda}{\sigma'} = \Lambda \text{ (291, παρατ.).}$$

Ἐντεῦθεν πάλιν συνάγομεν ὅτι καὶ ὅρ $\Sigma' = \Lambda$·

διότι (290) $\quad \text{ὅρ}\Sigma' = \text{ὅρ}\left(\frac{\Sigma'}{\sigma'} \cdot \sigma'\right) = \text{ὅρ}\frac{\Sigma'}{\sigma'} \cdot \text{ὅρ}\sigma' = \text{ὅρ}\sigma' = \Lambda.$

Ἀμφότεραι ἄρα αἱ περίμετροι Σ′ καὶ σ′ ἔχουσι κοινὸν ὅριον τὸ Λ.

Παρατήρησις α′. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς ἰσότητος ὅρ$\frac{\Sigma'}{\sigma'} = 1$ ἐστηρίχθημεν ἐπὶ τῆς ἰδιότητος καθ' ἣν τὸ κλάσμα

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\mu}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu}$$

ἔχει τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu}$, ἅτινα ὑποτίθεται ὅτι ἔχουσιν ὅρους θετικοὺς καὶ τιμὰς οὐχὶ πάσας ἴσας.

Ἡ ἰδιότης δ' αὕτη δεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὅτι $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda_1, \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \lambda_2, \dots, \frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu} = \lambda_\mu$

καὶ ὅτι ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, ἐλάχιστος μὲν εἶναι ὁ λ′ μέγιστος δὲ ὁ λ″.

Θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$\lambda'(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_\mu)<\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+....+\alpha_\mu\lambda_\mu$$
$$<\lambda''(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_\mu),$$

ὅθεν ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα ἰδιότης

$$\lambda'<\frac{\beta_1+\beta_2+.....+\beta_\mu}{\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_\mu}<\lambda''.$$

Παρατήρησις β'. Ἡ ἰδιότης καθ' ἣν ὁρ$\frac{\Sigma'}{\sigma'}=1$ ἀποδεικνύεται εὐκόλως (ὡς ἐν § 294), ὅταν τὰ πολύγωνα, ὧν τὰς περιμέτρους παρεστήσαμεν διὰ τῶν σ', Σ', εἶναι κανονικά.

Σημ. Ἐν τῇ ἄνω ἀποδείξει ἀντὶ *μηκῶν περιμέτρων πολυγώνων* λέγομεν πολλάκις χάριν συντομίας ἁπλῶς *περίμετροι πολυγώνων*.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

296. *Τὸ μῆκος ὅπερ εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον τῶν μηκῶν τῶν περιμέτρων τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων, ὧν πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἀεὶ ἐλαττοῦνται καλεῖται* ***μῆκος τῆς περιφερείας.***

Ἡ δὲ εὐθεῖα, ἧς τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καλεῖται ***ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας.***

Παρατηρητέον δ' ὅτι τὸ *ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας* εἶναι εὐθεῖα μείζων τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ἐλάσσων τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα ἔχουσα τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Θ ε ώ ρ η μ α.

√297. *Τῶν κύκλων αἱ περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.*

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐγγράφομεν εἰς τοὺς δύο δεδομένους κύκλους δύο ὅμοια πολύγωνα (κανονικὰ ἢ μή).

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ὁμοίων τούτων πολυγώνων (278) αἱ περίμετροι σ καὶ Σ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν (260), αἵτινες πάλιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ τῶν κύκλων ἀκτῖνες α καὶ Α, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν $\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\alpha}{A}$ (1).

Ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀπεριορίστως αὐξάνηται, ὁ λόγος $\frac{\sigma}{\Sigma}$ θὰ τείνῃ πρὸς τὸν λόγον $\frac{\gamma}{\Gamma}$ τῶν δύο περιφερειῶν καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ (2).

Πόρισμα 1ον.

298. *Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.*

Διότι ἡ ἀνωτέρω δειχθεῖσα ἀναλογία (2) $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ γράφεται

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A} \text{ ἢ } \frac{\gamma}{2\alpha}=\frac{\Gamma}{2A}.$$

Λοιπὸν ὁ λόγος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ δύο οἱουσδήποτε κύκλους.

Παρίσταται δὲ ὁ σταθερὸς οὗτος λόγος ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ γράμματος π.

Πόρισμα 2ον.

299. *Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος α εἶναι 2πα.*

Μῆκος τόξου κύκλου.

Ὁρισμοί.

300. ***Μῆκος τόξου** κύκλου τινὸς εἶναι τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης περὶ τὸ τόξον τεθλασμένης γραμμῆς, ἐχούσης πέρατα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ ἧς πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἀπεριορίστως ἐλαττοῦνται.*

Τοῦ ὁρίου τούτου ἡ ὕπαρξις ἀποδεικνύεται διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν, δι' ὧν ἀπεδείχθη καὶ ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου τοῦ δίδοντος τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας. Πρὸς τοῦτο δὲ πρῶτον μὲν θὰ θεωρήσωμεν κανονικὴν ἐγγεγραμμένην ἢ περιγεγραμμένην τεθλασμένην γραμμήν, ἧς ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἀεὶ θὰ διπλασιάζηται, εἶτα δὲ θὰ μεταβῶμεν εἰς ἡντιναδήποτε τεθλασμένην γραμμήν.

Ἀνάπτυγμα δὲ τόξου *καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἧς τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τόξου.*

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι παντὸς τόξου κύκλου τὸ ἀνάπτυγμα εἶναι μεῖζον μὲν πάσης ἐγγεγραμμένης ἐν αὐτῷ τεθλασμένης γραμμῆς (καὶ τῆς χορδῆς ἄρα τοῦ τόξου), ἔλασσον δὲ πάσης περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ τεθλασμένης γραμμῆς.

Παρατήρησις. Καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείχθη (ἐν ἐδ. 297) ὅτι δύο κύκλων αἱ περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὅν λόγον καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, οὕτω δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἐν *διαφόροις κύκλοις δύο τόξα ὅμοια* (ἀντιστοιχοῦντα δηλ. εἰς ἐπικέντρους γωνίας ἴσας) *ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων εἰς οὓς ἀνήκουσιν.*

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ π.

301. Ἵνα κατὰ προσέγγισιν ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν π, πρέπει νὰ ἐγγράφωμεν εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, οὗ γινώσκομεν τὴν πλευράν, οἷον ἑξάγωνον, καὶ νὰ περιγράφωμεν περὶ τὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἴσου ἀριθμοῦ πλευρῶν· θὰ ὑπολογίσωμεν δὲ διὰ μὲν τοῦ τύπου (3) τοῦ προβλήματος 278 τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τούτου, διὰ δὲ τῶν τύπων (2) καὶ (4) τῶν προβλημάτων 277 καὶ 279 τὰς πλευράς, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰς περιμέτρους, τοῦ τε ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἅτινα ἔχουσιν ἑκάστοτε διπλάσιον ἢ τὰ προηγούμενα ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων τούτων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται καὶ ἡ περιφέρεια, γίνεται μᾶλλον μικρά, ἐφ' ὅσον ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἀπεριορίστως αὐξάνεται (295), ἕπεται ὅτι οὕτω θὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεθ' ὅσης ἂν θέλῃ τις προσεγγίσεως.

Ἂν δὲ ληφθῇ μήκους μονὰς ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος, ὁ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἡ μὲν πλευρά, μετρηθεῖσα διὰ τῆς διαμέτρου, ἔχει μῆκος $\frac{1}{2}$, ἡ δὲ περίμετρος 3, τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ἡ δὲ περίμετρος $2\sqrt{3}$.

Οὕτως, ἂν ὑπολογίσωμεν καὶ τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, ἅτινα ἔχουσι 12,24,.... πλευρὰς καὶ τὰς περιμέτρους τῶν πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχούντων περιγεγραμμένων, θὰ σχηματίσωμεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Ἀριθμ. πλευρῶν	*Περίμ. ἐγγεγρ. πολυγ.*	*Περίμ. περιγεγρ. πολυγ.*
6	3,00000...	3,40410.....
12	3,10582...	3,21539.....
24	3,13262...	3,15966.....
48	3,13935...	3,14609.....
96	3,14103...	3,14271.....
192	3,14145...	3,14187.....
384	3,14155...	3,14166.....

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου βλέπομεν ὅτι, ἂν μὲν προχωρήσωμεν μέχρι τοῦ πολυγώνου 96 πλευρῶν, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εὑρίσκεται περιλαμβανόμενος μεταξὺ τοῦ 3,141 καὶ τοῦ 3,143· κατ' ἀκολουθίαν, ἂν ληφθῇ ὡς προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ π ὁ ἀριθμὸς 3,142, τὸ προκῦπτον λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$· ἐὰν δὲ προχωρήσωμεν μέχρι τοῦ πολυγώνου 384 πλευρῶν, εὑρίσκομεν προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π τὴν 3,1416, ὅτε τὸ προκῦπτον λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10000}$.

Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης (287--212 π.Χ.) προσδιώρισε προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ εὗρεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς π περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $3\frac{10}{71}$ καὶ τοῦ $3\frac{10}{70}$.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{7}=3,1428...$ εἶναι καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ π, διαφέρουσα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Τῆς δὲ προσεγγιζούσης τιμῆς ταύτης γίνεται συνήθως χρῆσις ἕνεκα τῆς ἁπλότητος αὐτῆς.

Ὁ δὲ Πτολεμαῖος (87—165 περίπου μ.Χ.) εὗρε προσεγγίζουσαν τιμὴν τοῦ π τὸν ἀριθμὸν $\frac{377}{120}=3,14166...$

Ὁ δὲ Μέτιος (1571—1635), Ὁλλανδὸς γεωμέτρης, εὗρε μᾶλλον προσεγγίζουσαν καθ' ὑπεροχὴν τιμὴν τοῦ π, ἥτις εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{355}{113}=3,1415929...$

Ἄλλοι δὲ κατόπιν μαθηματικοὶ εὗρον τιμὰς τοῦ π μᾶλλον προσεγγιζούσας· νῦν δὲ εἶναι τοῦ π γνωστὰ δεκαδικὰ ψηφία πλείονα τῶν ἑπτακοσίων.

Δὲν δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ π, διότι ἀπεδείχθη ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ἀσύμμετρος, δηλαδὴ δὲν εἶναι ἴσος πρὸς οὐδένα ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικόν (196).

Τὰ πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ π εἶναι $\pi=3,141592653....$

Συνήθως ὡς προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ π λαμβάνεται ὁ καθ' ὑπεροχὴν πλησιάζων ἀριθμὸς 3,1416.

Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Θεώρημα.

302. *Τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ πολυγώνου τείνει εἰς ὅριον ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν. Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ ὅριον τείνει καὶ τὸ ἐμβαδὸν περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον πολυγώνου, οὗ αἱ πλευραὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.*

Ἵνα δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει τὸ ὅριον τοῦτο καὶ ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἑκάστη πλευρὰ τείνει πρὸς τὸ 0, ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν ἐργασίας, ἣν καὶ διὰ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. Πρῶτον θεωροῦμεν τὰ ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα, ὧν ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἀεὶ διπλασιάζεται, ὡς καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦντα περιγεγραμμένα πολύγωνα.

Οὕτω δὲ αἱ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων ἐπιφάνειαι βαίνουσιν ἀεὶ αὐξανόμεναι, διότι ἑκάστη τούτων περιλαμβάνει τὴν προηγουμένην ἐντὸς αὐτῆς, μένουσι δὲ ἀφ' ἑτέρου μικρότεραι τῆς ἐπιφανείας παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου. Λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι αὗται τείνουσι πρὸς ὅριον (292).

Αἱ δὲ τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων ἐπιφάνειαι βαίνουσιν ἀεὶ ἐλαττούμεναι, διότι ἑκάστη τούτων κεῖται ἐντὸς τῆς προηγουμένης, εἶναι δὲ ἀφ' ἑτέρου ἑκάστη τῶν ἐπιφανειῶν τούτων μείζων τῆς ἐπιφανείας παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Λοιπὸν καὶ ἡ τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων ἐπιφάνεια τείνει πρὸς ὅριον (292).

Λέγω νῦν ὅτι τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι ἴσα.

Διότι παντὸς ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου ὁ τῶν ἐπιφανειῶν λόγος ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος, ὅστις τείνει πρὸς τὴν μονάδα (294).

Σημ. Ἐν τοῖς ἑξῆς θέλομεν παραστήσει διὰ τοῦ γράμματος Ε τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν ὁρίων τούτων, ἣν λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ τετραγώνου ἐπὶ παραδείγματος καὶ θεωροῦντες διαδοχικῶς τὰ ἐκ $4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{\nu}, \ldots$ πλευρῶν κανονικὰ πολύγωνα.

* 303 Ἂν δὲ νῦν λάβωμεν οἱονδήποτε ἐγγεγραμμένον πολύγωνον $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ (σχ. § 295) καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν περιγεγραμμένον πολύγωνον $\mathrm{A'B'\Gamma'}\ldots$, θέσωμεν δὲ μόνην συνθήκην ὅτι τῶν πολυγώνων τούτων ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἀπεριορίστως αὐξάνεται οὕτως, ὥστε ἑκάστη πλευρὰ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἀποδεικνύομεν ὡσαύτως ὅτι:

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ εἶναι μικροτέρα τοῦ Ε.

Διότι Ε εἶναι τὸ ὅριον περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ἅτινα πάντα εἶναι τοῦ $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ μείζονα· ἐπειδὴ δὲ τὸ Ε περιλαμ-

6άνεται μεταξὺ παντὸς ἐγγεγραμμένου καὶ παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου, ἕπεται ὅτι διαφέρει ἑκάστου τούτων ὀλιγώτερον ἢ ὅσον τοῦτο διαφέρει τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῷ.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Διότι ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων $\alpha'\beta'\mathrm{A}'$, $\beta'\gamma'\mathrm{B}'$,... καὶ ἄρα ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$\frac{1}{2}\Big((\alpha'\beta')(\mathrm{A'H})+(\beta'\gamma')(\mathrm{B'K})+...\Big)<\frac{1}{2}\Big((\alpha'\beta')+(\beta'\gamma')+...\Big)\,\upsilon,$$

ἔνθα $\mathrm{A'H}$, $\mathrm{B'K}$... (σχ. § 295) εἶνε τὰ ὕψη τῶν τριγώνων $\alpha'\beta'\mathrm{A}'$, $\beta'\gamma'\mathrm{B}$,.., τὸ δὲ υ παριστᾷ τὸ μέγιστον τῶν ὑψῶν τούτων.

Ὁ παράγων δὲ $(\alpha'\beta')+(\beta'\gamma')+...$ διατελεῖ μικρότερος τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου πολυγώνου, τὰ δὲ ὕψη $\mathrm{A'H}$, $\mathrm{B'K}$,... τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, (διότι τὰ μήκη ΟΗ, ΟΑ', ἐπὶ παραδείγματος, τείνουσιν ἀμφότερα πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ τούτων διαφορὰ $\mathrm{A'H}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν).

Ὅριον ἄρα τοῦ γινομένου $[(\alpha'\beta')+(\beta'\gamma')+...]\,\upsilon$ εἶνε τὸ μηδέν.

Ἐκ τούτου ἄρα ἕπεται ὅτι: Τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων τὰ ἐμβαδὰ τείνουσι πάντα πρὸς κοινὸν ὅριον Ε.

Ὁ ρ ι σ μ ό ς.

304. *Ἐμβαδὸν κύκλου καλεῖται τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον πολυγώνου, οὗ πᾶσαι αἱ πλευραὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.*

Θ ε ώ ρ η μ α.

305. *Τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς τούτου περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

Θεωρήσωμεν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον οὗ αἱ πλευραὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.

Τοῦ κανονικοῦ τούτου πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς αὐτοῦ περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἑαυτοῦ ἀποστήματος (διότι διὰ τῶν εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγομένων ἀκτίνων τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα). Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀπεριορίστως αὐξάνηται, ἡ μὲν περίμετρος τείνει πρὸς τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας, τὸ δὲ ἀπόστημα πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ἂν θεωρήσωμεν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Πόρισμα 1ον.

306. *Τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα α τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ* $\pi\alpha^2$. Διότι $2\pi\alpha \times \frac{\alpha}{2} = \pi\alpha^2$.

Πόρισμα 2ον.

307. *Δύο κύκλων αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.*

Διότι, ἂν τῶν κύκλων αἱ μὲν ἀκτῖνες εἶναι α καὶ Α, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ε καὶ Ε, θὰ ἔχωμεν (199)

$$\varepsilon : E = \pi\alpha^2 : \pi A^2, \text{ ἤτοι } \varepsilon : E = \alpha^2 : A^2.$$

Σημείωσις. Τὸ περίφημον πρόβλημα τοῦ *τετραγωνισμοῦ* τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου δεδομένῳ κύκλῳ.

Ὡς δὲ ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου συνάγεται, ἡ πλευρὰ αὕτη εἶνε μέση ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἥτις ἂν ἦτο γνωστή, τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἦτο λελυμένον.

Λοιπὸν τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἀνάγεται ἀκριβῶς εἰς ἐκεῖνο περὶ οὗ ὡμιλήσαμεν ἐν ἐδ. 299· δηλαδή:

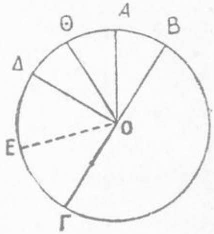
Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος περιφερείας, ἧς εἶνε γνωστὴ ἡ ἀκτίς.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, δὲν δύναται γεωμετρικῶς νὰ λυθῇ τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ὡς ἀπεδείχθη ἐν ἔτει 1882 ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Lindemann, διὰ τῆς γενικεύσεως θεωρήματος ὀφειλομένου εἰς τὸν Γάλλον γεωμέτρην Hermite.

Θεώρημα.

308. *Τοῦ κυκλικοῦ τομέως τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ τόξου τοῦ τομέως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

Διότι, ἐπειδὴ προφανῶς οἱ τοῦ αὐτοῦ κύκλου τομεῖς ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον καὶ τὰ τόξα αὐτῶν (147), ἕπεται ὅτι διὰ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα ΟΑ καὶ διὰ τὸν ἐν αὐτῷ τομέα ΑΟΒ ἔχομεν



τομ. ΑΟΒ : κύκλ. ΟΑ = τόξ. ΑΒ : περιφ. ΟΑ·

ὅθεν ἐμβ. τομ. ΑΟΒ $=$ (τόξ. ΑΒ) $\times \frac{\text{ἐμβ. κύκλ. ΟΑ}}{\text{(περιφ. ΟΑ)}}$

$=$ (τόξ. ΑΒ) $\times \frac{1}{2}$(ΟΑ). Διότι

ἐμβ. κύκλ. ΟΑ $=$ (περιφ. ΟΑ) $\times \frac{1}{2}$(ΟΑ).

Εἰς τὸ αὐτὸ δὲ ἐξαγόμενον φθάνομεν ἂν θεωρήσωμεν (ὡς ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεωρήματος 305) τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ὡς ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγωνικοῦ τομέως, οὗ πᾶσαι αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ τῆς (ἐν παρατηρήσει τοῦ ἐδ. 300 σημειωθείσης) ἰδιότητος τῶν *ὁμοίων* τόξων, ἕπεται ὅτι *αἱ ἐπιφάνειαι δύο κυκλικῶν τομέων ὁμοίων* (ὧν δηλ. αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι) *ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων* (παράβ. ἐδ. 307).

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος ταύτης (ἀνακαλυφθείσης ὑπὸ *Ἱπποκράτους τοῦ Χίου*, 420 π.Χ.) δύναται νὰ γίνῃ καὶ θεωρουμένων τῶν τομέων ὡς ὁρίων πολυγώνων.

Μέτρησις τῶν γωνιῶν.

309. Ἐπειδὴ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τόξα ἐφ᾽ ὧν βαίνουσι (235), συνάγεται ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου δύο γωνιῶν ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου τῶν τόξων, ἅτινα περιλαμβάνονται μὲν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν, ἔχουσι δὲ ἀκτῖνα μὲν τὴν αὐ-

τήν, κέντρα δὲ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν. Ἂν δὲ ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφήν, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν σύγκρισιν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Πρὸς εὐκολίαν δὲ τῆς τῶν τόξων συγκρίσεως ἡ περιφέρεια διῃρέθη εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται μοῖραι· ὧν ἑκάστη ὑποδιῃρέθη εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται λεπτὰ πρῶτα, ὧν ἕκαστον πάλιν ὑποδιῃρέθη εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται λεπτὰ δεύτερα.

Πρὸς τὴν μέτρησιν δὲ τῶν τόξων λαμβάνεται συνήθως μονὰς ἢ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας ἢ τὸ τόξον τὸ ἔχον μῆκος ἴσον τῇ ἀκτῖνι.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ εὑρισκόμενος ἐκ τῆς μετρήσεως τόξου κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον λέγομεν συνήθως ὅτι παριστᾷ τὸ τόξον τοῦτο *εἰς μέρη ἀκτῖνος*.

Ἂν δὲ ἐν κύκλῳ ἀχθῶσι δύο διάμετροι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, θὰ σχηματίσωσι 4 γωνίας ὀρθὰς καὶ θὰ διαιρέσωσι τὴν περιφέρειαν εἰς 4 μέρη ἴσα, ἤτοι εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια, ὧν ἕκαστον θὰ ἀποτελῆται ἐξ 90 μοιρῶν.

Ἂν δὲ ἓν τῶν τόξων τούτων διαιρέσωμεν εἰς τὰς ἐξ ὧν ἀποτελεῖται μοίρας καὶ ἀγάγωμεν ἀκτῖνας εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς διαιρέσεως, ἡ ὀρθὴ γωνία, ἥτις συνήθως λαμβάνεται μονὰς τῶν γωνιῶν, θὰ διαιρεθῇ εἰς 90 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον θὰ εἶναι γωνία μιᾶς μοίρας. Ἂν δὲ πάλιν τὸ μιᾶς μοίρας τόξον διαιρέσωμεν εἰς τὰ ἐξ ὧν ἀποτελεῖται πρῶτα λεπτὰ καὶ ἀγάγωμεν ἀκτῖνας εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς διαιρέσεως, ἡ μιᾶς μοίρας γωνία θὰ διαιρεθῇ εἰς 60 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον θὰ εἶναι ἡ γωνία ἑνὸς λεπτοῦ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἡ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ γωνία θὰ διαιρεθῇ εἰς 60 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον θὰ εἶναι ἡ γωνία ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ.

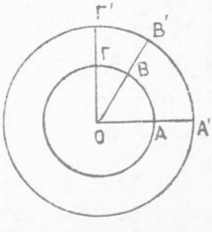
Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἵνα γωνία τις μετρηθῇ ἀρκεῖ νὰ μετρηθῇ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον. Ἡ γωνία δὲ 32 μοιρῶν 15 λεπτῶν καὶ 24 δευτέρων λεπτῶν γράφεται ὧδε: $32^0\ 15'\ 24''$. Τὰς δὲ γωνίας τὰς μικροτέρας τοῦ δευτέρου λεπτοῦ παριστῶμεν διὰ τῶν δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

Θεώρημα.

310. *Ἂν γραφῇ τόξον κύκλου ἔχον κέντρον τὴν κορυφὴν γωνίας, ληφθῇ δὲ μονὰς τῶν γωνιῶν ἡ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐπίκεντρος, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ ἔχοντος ἀνάπτυγμα ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἡ γωνία αὕτη ἔχει μέτρον τὸν λόγον τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανομένου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα.*

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ὁσηδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκτίς, ἂν ἡ γωνία εἶναι ἡ αὐτή, ὁ εἰρημένος λόγος εἶναι σταθερός.

Διότι (300) $\frac{\text{τόξ ΑΓ}}{\text{τόξ Α'Γ'}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΑ'}}$ καὶ ἄρα (231) $\frac{\text{τόξ ΑΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{τόξ Α'Γ'}}{\text{ΟΑ'}}$.



Οὕτω δέ, ἂν τῶν γωνιῶν μονὰς ληφθῇ ἡ ΑΟΒ, δι' ἣν τόξΑΒ = ΟΑ, δηλ. $\frac{\text{τόξ ΑΒ}}{\text{ΟΑ}} = 1$, τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ κύκλῳ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΟΒ περιλαμβανόμενον τόξον Α'Β', θὰ εἶναι ὡσαύτως ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΟΑ', ἕνεκα τῆς ἀναλογίας $\frac{\text{τόξ Α'Β'}}{\text{ΟΑ'}} = \frac{\text{τόξ ΑΒ}}{\text{ΟΑ}}$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία αὕτη ΑΟΒ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη.

Ἐπειδὴ δὲ (235) $\frac{\text{γων ΑΟΓ}}{\text{γων ΑΟΒ}} = \frac{\text{τόξ ΑΒ}}{\text{τόξ ΑΓ}}$, καὶ ἐπειδὴ τῆς γωνίας ΑΟΒ δι' ἣν τόξ ΑΒ=ΟΑ ληφθείσης μονάδος τῶν γωνιῶν, ὁ πρῶτος λόγος εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΟΓ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται ἁπλούστερον ὧδε: (γων ΑΟΓ) $= \frac{\text{τόξ ΑΓ}}{\text{ΟΑ}}$.

Παρατήρησις. *Οὕτω τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας μέτρον εἶναι ὁ ἀριθμὸς* $\frac{\pi\alpha}{2} : \alpha = \frac{\pi}{2}$, *τῆς δὲ γωνίας* 180^0 *ὁ ἀριθμὸς* π.

Τύποι ἀλλαγῆς μονάδος

311. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ θ εἶναι ἑκάτερος τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τῆς αὐτῆς γωνίας κατὰ τοὺς δύο ῥηθέντας τρόπους, ἐκ τῆς ἀναλογίας $\mu : 180 = \theta : \pi$ (199), προκύπτουσιν οἱ ἑξῆς τύποι

$$\mu = \frac{180\,\theta}{\pi} \text{ καὶ } \theta = \frac{\pi\mu}{180},$$

δι' ὧν γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἑτέρου τῶν ἀριθμῶν μ καὶ θ εὑρίσκεται ὁ ἕτερος. (Οὕτω π. χ. διὰ τὴν γωνίαν ΑΟΒ τὴν βαίνουσαν ἐπὶ τόξου ἴσου πρὸς τὴν ἀκτῖνα, δι' ἣν δηλ. $\theta = 1$, ἔχομεν $\mu = \frac{180}{\pi} = 57^0\ 17'\ 48''$....)

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Ἀποδεικτέον ὅτι ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος α τὸ τόξον μ μοιρῶν ἔχει μῆκος $\frac{\alpha\mu\pi}{180}$, ὁ δὲ τομεὺς μ μοιρῶν ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{\alpha^2\mu\pi}{360}$.

2) Ἂν δύο τόξα ἴσου μήκους εἶναι τὸ μὲν $17^0\ 25'\ 10''$, τὸ δὲ $61^0\ 18'\ 40''$, ἡ δὲ τοῦ πρώτου ἀκτὶς εἶναι 2πχ,7, τίς θὰ εἶναι ἡ τοῦ δευτέρου τόξου ἀκτίς ;

(***Ἀπ.*** Ἂν παραστήσωμεν τὴν μὲν ζητουμένην ἀκτῖνα διὰ τοῦ α', τὰς δὲ ἐπικέντρους γωνίας διὰ ω καὶ ω' καὶ τὴν τοῦ δεδομένου κύκλου ἀκτῖνα διὰ τοῦ α, θὰ ἔχωμεν $\alpha\omega=\alpha'\omega'$· κατ' ἀκολουθίαν $\alpha'=$0πχ, 767...).

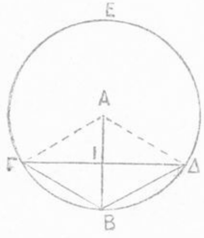
3) Ἂν γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν σημεῖόν τι δεδομένης περιφερείας, ἀκτῖνα δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ δεδομένῳ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, τίς θὰ εἶναι ἡ τῶν δύο κύκλων κοινὴ ἐπιφάνεια ; (Ἀπ. $E=\alpha^2(\pi-1)$.)

4) Διαιρέσαι κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα α εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' ὁμοκέντρου κύκλου.

(Ἀπ. Ἂν ἡ ζητουμένη ἀκτὶς εἶναι χ, θὰ ἔχωμεν $\chi^2=\frac{\alpha^2}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.)

5) Εὑρεῖν τὰς ἀκτῖνας δύο ὁμοκέντρων κύκλων, ὧν τὸ μὲν μεταξὺ τῶν περιφερειῶν μέρος τῆς ἐπιφανείας αὐτῶν εἶναι 1000τ.πχ., ἡ δὲ τῶν ἀκτίνων διαφορὰ 6 πχ.

(Ἀπ. $\alpha=$ 2πχ,525... καὶ $\alpha'=$ 23πχ,525...)



6) Ὑπολογίσαι κατὰ προσέγγισιν 0, 01 τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΓΒΔ καὶ ΓΕΔ, ὅταν ἡ χορδὴ ΓΔ διέρχηται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκτῖνος ΑΒ, ἥτις εἶναι ἐπ' αὐτὴν κάθετος.

$$\left(\text{Ἀπ. } \frac{\Gamma B\Delta}{\Gamma E\Delta}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}=0,24...\right)$$

7) Εὑρεῖν τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ τῷ ἔχοντι πλευρὰν 5πχ. ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ περὶ τὸ αὐτὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

('Απ. Ε=6τ.πχ.,5450 καὶ Ε΄=26τ.πχ.,18...)

8) Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ πήχεως.

$\left(\text{'Απ. } \rho=\sqrt{\frac{1}{\pi}}=\sqrt{0{,}318909...}=0^{\pi\chi.}, 5642...\right)$

9) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς εἶναι 15πχ, ἡ δὲ γωνία 24°. $\left(\text{'Απ. } E=\frac{15^2.\ 24\pi}{360}=47^{\tau.\pi\chi.},121....\right)$

10) Εὑρεῖν τὸ μῆκος τόξου 32°, οὗ ἡ ἀκτὶς εἶναι 12 πήχεων.

$\left(\text{'Απ. } \frac{12.\ 32\pi}{180}=\frac{32\ \pi}{15}=6^{\pi\chi}, 7018....\right)$

11) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τοῦ ἔχοντος γωνίαν 60° καὶ ἀκτῖνα ἑνὸς πήχεως. ('Απ. 0τ.πχ,9236...).

12) Εὑρεῖν τὰς γωνίας τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ πολυγώνου, οὗ αἱ κορυφαὶ διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τόξα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 8, 6 καὶ 4.

13) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν περιεχομένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν χορδή τις τοῦ μείζονος κύκλου ἐφαπτομένη τοῦ μικροῦ ἔχῃ μῆκος 10 πήχεων.

('Απ. Ε= 78τ.πχ.,54...).

14) Ἀποδεῖξαι ὅτι, ἂν ἐκ τοῦ μέσου τόξου ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα ἑτέρου τόξου εὐθεῖαι, θὰ σχηματίσωσι μετὰ τῶν χορδῶν τῶν τόξων τρίγωνα ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ.

15) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς εἶναι 12πχ.,30, ἡ δὲ γωνία 40°35΄. $\left(\text{'Απ. } E=\frac{(12{,}30)^2.\ 2435\pi}{360.\ 60}=53^{\tau.\pi\chi.},5804....\right)$

16) Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τοῦ τομέως τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα 10πχ. καὶ ἐμβαδὸν 125 τ.πχ.. $\left(\text{'Απ. } \frac{360.125}{100.\pi}=143^0\ 14'\ 20''...\right)$

17) Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, οὗ ὁ τομεὺς 25° ἔχει ἐμβαδὸν 150 τ. πήχεων.

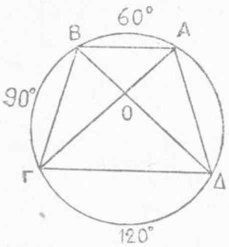
('Εκ τοῦ τύπου $E=\frac{\alpha^2\mu\pi}{360}$, ἔπεται $\alpha=\sqrt{\frac{360.\,E}{\pi\mu}}$· ὅθεν $\alpha=26$πχ,2...)

18) Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δεδομένον τομέα.

19) Ἐὰν ἐπὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα ἡμικυκλίου ἠγμένων ἀκτίνων γραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ πρώτου κείμενα, νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

20) Ἀποδεῖξαι ὅτι ἡ ὑπὸ δύο χορδῶν ἐντὸς κύκλου τεμνομένων σχηματιζομένη γωνία ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανομένων τόξων.

21) Ἀποδεῖξαι ὅτι ἡ ὑπὸ δύο χορδῶν ἠγμένων ἐκ σημείου ἐκτὸς κύκλου σχηματιζομένη γωνία ἔχει μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανομένων τόξων· ἔτι δὲ ἀποδεῖξαι ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα χορδὴ γίνῃ ἐφαπτομένη.



22) Ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα α ληφθῶσιν ἐφεξῆς τὰ τόξα $AB=60^\circ$, $B\Gamma=90^\circ$ καὶ $\Gamma\Delta=120^\circ$, ζητεῖται

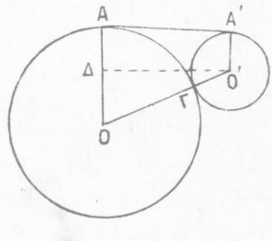
1ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου, οὗ αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

2ον) Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τμήματα τῶν διαγωνίων τούτων καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

$$\left(\text{'Aπ.}\ (OB)=(OA)=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},\ (O\Gamma)=(O\Delta)=\frac{\alpha\sqrt{6}}{2},\ E=\frac{(2+\sqrt{3})\alpha^2}{2}.\right)$$

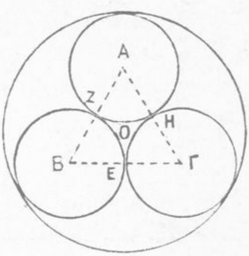
23) Ἂν ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα α ἀχθῶσι δύο χορδαὶ παράλληλοι ἀλλήλαις καὶ ἴσαι ἡ μὲν τῇ πλευρᾷ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπὸ τῶν δύο τούτων χορδῶν περιεχομένου μέρους τοῦ κύκλου; $\left(\text{'Aπ.}\ \frac{\pi\alpha^2}{6}\right)$

24) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐν ᾧ ἡ τοῦ τόξου 120^0 χορδὴ εἶναι 3 πήχεων. ('Απ. $E=\pi\alpha^2=3\pi$ τ.πχ.)



25) Εἰς δύο δεδομένας περιφερείας Ο καὶ Ο', ἐχούσας ἀκτῖνας α καὶ $\frac{\alpha}{3}$ καὶ ἐφαπτομένας ἀλλήλων ἐκτὸς εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἄγεται ἡ κοινὴ τούτων ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΑΑ', καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ ἐμβαδὰ 1ον) τοῦ τραπεζίου ΑΟΟ'Α' καὶ 2ον) τοῦ μέρους ΑΓΑ' τοῦ περιλαμβανομένου ὑπὸ τῶν τόξων τῶν δύο περιφερειῶν καὶ τῆς ἀχθείσης ἐφαπτομένης.

$$\left(\text{'Απ. 1ον } \frac{4\alpha^2}{9}\sqrt{3},\ \text{2ον } \frac{\alpha^2}{54}\left(24\sqrt{3}-11\pi\right)\cdot\right)$$



26) Ἂν τρεῖς ἴσοι κύκλοι Α, Β καὶ Γ ἐφάπτωνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ 1ον) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΖΕΗ τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν τριῶν κύκλων καὶ ὁριζομένης ὑπὸ τῶν τόξων ΖΕ, ΕΗ καὶ ΗΖ, ἅτινα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἑκάστου κύκλου, ὑποτεθέντος ὅτι ἡ ἀκτὶς τούτων εἶναι 6πχ, καὶ 2ον) τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας, ἂν ἕκαστος τῶν τριῶν τούτων κύκλων ἐφάπτηται ἐντὸς δεδομένου κύκλου Ο, ἔχοντος ἀκτῖνα α πήχεων.

$$\left(\text{'Απ. 1ον } 5^{\text{τ.πχ}},814\ldots \text{ καὶ 2ον } \left(\frac{3\alpha}{2\sqrt{3}+3}\right)^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right).\right)$$

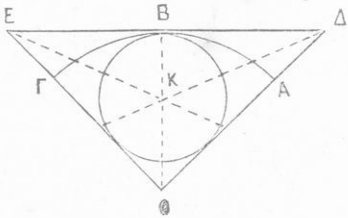
27) Ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα α εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος χορδὴν ἴσην τῇ πλευρᾷ τοῦ ἐγγεγραμμένου α) τετραγώνου $\left(\text{'Απ. } \frac{(\pi-2)\,\alpha^2}{4}\right)$, β) ἰσοπλεύρου τριγώνου $\left(\text{'Απ. } \frac{(4\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{12}\right)$, γ) κανονικοῦ ἑξαγώνου $\left(\text{'Απ. } \frac{(2\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{12}\right)$ καὶ

δ) κανονικοῦ ὀκταγώνου $\left('\text{Απ}.\ \frac{(\pi-2\sqrt{2})\alpha^2}{8}.\right)$

28) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον τὸ ἔχον ἐμβαδὸν 10 τετρ. πήχεων.

$$\left('\text{Απ}.\ E=\pi\frac{20\sqrt{3}}{9}=12^{\tau.\pi\chi.},0920...\right)$$

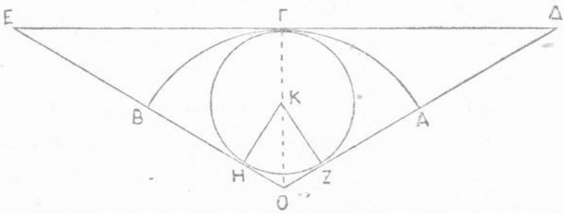
29) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυκλικῷ τομεῖ τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα α καὶ γωνίαν 60^0. $\left('\text{Απ}.\ E=\frac{\pi\alpha^2}{9}.\right)$



30) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυκλικῷ τομεῖ τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα α καὶ γωνίαν 90^0.

$$\left('\text{Απ}.\ \pi\,(3-2\sqrt{2})\alpha^2.\right)$$

31) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυκλικῷ τομεῖ τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα α καὶ γωνίαν 120^0.



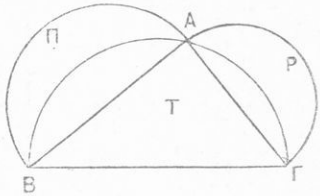
Ἐπειδὴ ἡ γωνία $ZKH=60^0$, ἕπεται ὅτι ΚΟ εἶναι ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ τὸ ὕψος εἶναι ΚΗ. Θὰ ἔχωμεν ἄρα $(KO)=\frac{2\,(KH)}{\sqrt{3}}$· ὥστε $\alpha=(KH)+\frac{2\,(KH)}{\sqrt{3}}$· ὅθεν $(KH)=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου $K=3\pi\,(7-4\sqrt{4}\,)\,\alpha^2$.

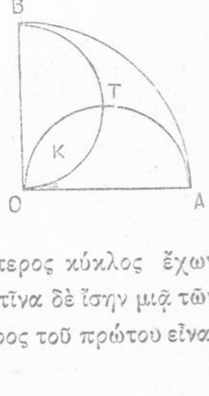
32) Ἂν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων ΑΔ καὶ ΒΔ ὡς ἐπὶ διαμέτρων γράψωμεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας δύο ἡμιπεριφερείας, τὸ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν περιλαμβανόμενον μέρος τοῦ κύ-

κλου είναι ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ τῷ ἔχοντι διάμετρον τὴν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ κάθετον εὐθεῖαν ΔΕ.

33) Ἂν ἐπὶ μὲν τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γραφῇ ἡμικύκλιον περιέχον τὸ τρίγωνον τοῦτο, ἐπὶ δὲ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενα, τῶν ἡμικυκλίων τούτων τὰ μέρη Π καὶ Ρ τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται *μηνίσκοι* τοῦ Ἱπποκράτους, 420 π.Χ.) ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ δοθὲν τρίγωνον Τ· ἤτοι εἶναι $\Pi+\mathrm{P}=\mathrm{T}$.



34) Ἀποδεῖξαι ὅτι, ἂν ἐπὶ δύο καθέτων ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ κύκλου, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, γραφῶσι δύο ἡμιπεριφέρειαι, τῶν δύο ἡμικυκλίων τὸ κοινὸν μέρος Κ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ μεταξὺ τῶν γραφεισῶν ἡμιπεριφερειῶν καὶ τοῦ τεταρτημορίου τῆς ἀρχικῆς περιφερείας μέρος Τ.



35) Ἂν εἰς τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς περιγραφῇ κύκλος, ἔπειτα δὲ γραφῇ ἕτερος κύκλος ἔχων κέντρον μὲν τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀκτῖνα δὲ ἴσην μιᾷ τῶν καθέτων πλευρῶν, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ.

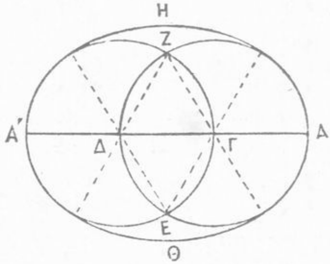
36) Ἂν ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ὡς ἐπὶ διαμέτρου γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς **ΑΒ** καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια.

37) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου καμπυλογράμμου τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τριῶν ἴσων περιφερειῶν ἐχουσῶν κέντρα μὲν τὰς κορυφὰς δεδομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ πλευρᾷ α τοῦ τριγώνου τούτου.

$\left(\text{Ἀπ.}\ \mathrm{E}=\frac{\alpha^2}{2}(\pi-\sqrt{3})\right)$

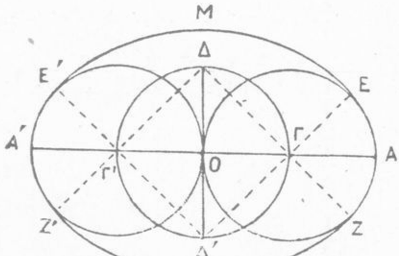
38) Ἂν γραφῶσι τεταρτημόρια περιφερείας ἔχοντα κέντρα μὲν τὰς κορυφὰς δεδομένου τετραγώνου, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ πλευρᾷ α τοῦ τετραγώνου τούτου, κείμενα δὲ ἐντὸς τοῦ τετραγώνου, θὰ σχηματισθῇ καμπυλόγραμμον τετράπλευρον, ἐντὸς τοῦ τετραγώνου κείμενον, οὗ ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν. $\left(\text{'Απ. } E = \frac{\alpha^2(\pi+3)(1-\sqrt{3})}{3}.\right)$

39) Ἂν δεδομένη εὐθεῖα ΑΑ΄ μήκους 2α διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΑ΄, γραφῶσι δὲ περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα μὲν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἀκτῖνας δὲ τὸ τρίτον τῆς δεδομένης εὐθείας, εἶτα δὲ γραφῶσι περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα μὲν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τῶν τομῶν τῶν δύο περιφερειῶν, ἀκτῖνας δὲ τὰς διαμέτρους τῶν κύκλων τούτων, θὰ προκύψῃ τὸ ᾠοειδὲς σχῆμα ΑΗΑ΄ΘΑ, οὗ ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ ἡ περίμετρος Σ.



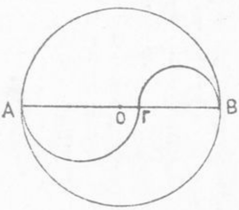
$$\left(\text{('Απ. } E = \frac{4}{9}\alpha^2\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \Sigma = \frac{16}{9}\pi\alpha.\right)$$

40) Δεδομένη εὐθεῖα ΑΑ΄ διηρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ΑΓ=ΓΟ=ΟΓ΄=Γ΄Α΄ καὶ ἐγράφησαν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα τὰ σημεῖα Γ, Ο, Γ΄ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ $A\Gamma = \frac{1}{4}\cdot AA'$. Εἶτα δὲ ἤχθη ἡ ΔΔ΄ ἐπὶ τὴν ΑΑ΄ κάθετος καὶ τέλος ἐγράφησαν τὸ τόξον ΕΜΕ΄, τὸ ἔχον κέντρον τὸ Δ΄ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Δ΄Ε, καὶ τὸ τόξον ΖΝΖ΄, τὸ ἔχον κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΔΖ=Δ΄Ε. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος Σ τοῦ ᾠοειδοῦς σχήματος ΑΜΑ΄ΝΑ, ὑποτεθέντος (ΑΑ΄)=2α.



$$\left(\text{('Απ. } E = \frac{\alpha^2}{4}[\pi\ (2+\sqrt{2}) - 2] \text{ καὶ } \Sigma = \frac{\pi\alpha}{2}(2+\sqrt{2}).\right)$$

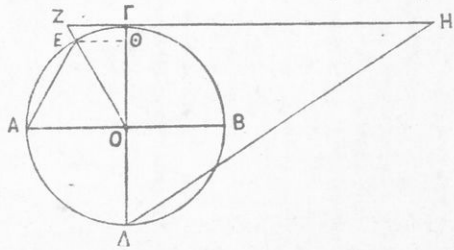
41) Ἂν ἡ διάμετρος ΑΒ κύκλου διαιρεθῇ εἰς δύο τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ, ἐφ' ἑκάστου δὲ τούτων, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γραφῶσιν ἡμιπεριφέρειαι κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, θὰ σχηματισθῇ ὑπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν τούτων γραμμὴ διαιροῦσα τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ τμήματα ταῦτα τῆς διαμέτρου.



42) Δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ἂν γραφῇ τόξον κύκλου ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Α, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΑΒ, τέμνον δὲ εἰς τὸ Ε τὴν πέραν τοῦ Α προέκτασιν τῆς ΔΑ, καὶ εἶτα γραφῇ ἕτερον τόξον κύκλου ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Γ, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΓΒ, τέμνον δὲ εἰς τὸ Ζ τὴν πέραν τοῦ Γ προέκτασιν τῆς ΔΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κύκλου τόξον ΕΖ τὸ ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Δ, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΔΕ, θὰ εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τόξων ΒΕ καὶ ΒΖ.

43) Ἂν ἡ διάμετρος κύκλου διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἀχθῇ ἡ ἐπὶ τὴν διάμετρον μέχρι τῆς περιφερείας κάθετος, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ τὴν ἀρχὴν τοῦ μέσου ἀναλόγου τμήματος μετὰ τοῦ ἄκρου τῆς καθέτου ταύτης ἑνοῦσα εὐθεῖα, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ χορδὴ αὕτη θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν δύο χιλιοστῶν τῆς ἀκτῖνος ἴση τῷ τετάρτῳ τῆς περιφερείας.

44) Ἂν ἐν κύκλῳ Ο ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διάμετροι, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, ἐκ δὲ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΕ ἴση τῇ ἀκτῖνι καὶ εἶτα ἡ ΟΕ τέμνουσα εἰς τὸ Ζ τὴν εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, ληφθῇ δὲ ἡ ΖΗ ἴση τῷ τριπλασίῳ τῆς ἀκτῖνος, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΗ εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,00001 τῆς ἀκτῖνος ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ.



ΓΝΩΣΕΙΣ ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑΣ

312. *Ἡ χωρομετρία (τοπογραφία, κατωτέρα γεωδαισία) ὑποκείμενον ἔχει τὰς μετρήσεις καὶ διανομὰς γαιῶν μικρᾶς ἐκτάσεως, ἔτι δὲ καὶ τὴν ἐπὶ χάρτου καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισιν αὐτῶν.*

Ἡ χρησιμοποιουμένη ἐπιφάνεια πρὸς παράστασιν ἐδαφικῆς τινος ἐκτάσεως εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς αὐτῆς ([1]).

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ταύτης λαμβάνεται ὡς ἐμβαδὸν τῆς εἰρημένης ἐδαφικῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ μέτρησις αὐτοῦ δύναται νὰ γίνῃ ἢ ἀμέσως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἢ διὰ τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ, ὅπερ γίνεται δι' ἁπλῶν ἐργασιῶν, ὡς θὰ εἴπωμεν κατωτέρω.

Τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη, ἅτινα πρέπει ἀμέσως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς νὰ μετρηθῶσιν, εἶναι εὐθεῖαι καὶ γωνίαι· διότι δι' αὐτῶν καὶ μόνον ὁρίζεται καὶ πᾶν ἄλλο γεωμετρικὸν μέγεθος (ἐμβαδὸν κλπ.)

Τὴν ὁριζόντιον δὲ προβολὴν σχήματός τινος τοῦ ἐδάφους ποριζόμεθα μετροῦντες οὐχὶ τὴν ὑπὸ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ὁριζομένην εὐθεῖαν, οὐδὲ τὴν ὑπὸ δύο τοιούτων εὐθειῶν περιεχομένην γωνίαν, ἀλλὰ τὰς ὁριζοντίους προβολὰς τῶν εὐθειῶν καὶ γωνιῶν τοῦ μετρητέου σχήματος, διὰ καταλλήλων ὀργάνων καὶ καταλλήλων μεθόδων, περὶ ὧν κατωτέρω θὰ εἴπωμεν.

Α΄. Ὑποτύπωσις ἐδαφικῆς ἐκτάσεως καὶ μέθοδοι ὑποτυπώσεως.

Ὁρισμοί.

313. *Ἐπίπεδος ὑποτύπωσις ἢ διάγραμμα λέγεται ἡ ἐπὶ χάρτου*

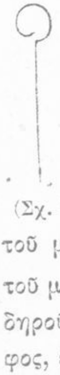
([1]) Προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου λέγεται ὁ *πούς* τῆς *καθέτου* τῆς καταβιβαζομένης ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (βλ. στερεὰν Γεωμετρίαν). Ἡ *ὁριζοντιότης* ἐπιπέδου ἐλέγχεται διὰ τῆς ἀεροστάθμης, ἡ δὲ διεύθυνσις τῆς ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καθέτου *(κατακορύφου)* ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ νήματος τῆς στάθμης. Τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ ἐπιπέδου προβολῶν τῶν σημείων γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας ἀποτελεῖ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου προβολὴν τῆς γραμμῆς ἢ τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισις τῆς ὁριζοντίου προβολῆς μέρους τινὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς.

Μέθοδοι δὲ ὑποτυπώσεως λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι ὧν ποιούμεθα χρῆσιν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς πρὸς ἄλληλα θέσεως σημείων τοῦ ἐδάφους καταλλήλως ἐκλεγομένων, ὥστε διὰ τῆς μετρήσεως νὰ καθορίζωνται τὰ ἐπ' αὐτοῦ πράγματα, οἷον οἰκίαι, δένδρα, ἀγροί, *ὅσα πρόκειται νὰ παρασταθῶσιν ἐν τῷ διαγράμματι.*

Χάραξις σημείου καὶ εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους

314. Τὸ μῆκος εὐθείας γραμμῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μετροῦντες τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων αὐτῆς σημείων. Πρέπει δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα νὰ εἶναι καταφανῆ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους· εἰ δὲ μή, σημειοῦμεν αὐτὰ ἢ διὰ σιδηρῶν βελονῶν (Σχ. 1), ἢ δ   μικρῶν πασσάλων ἐκ ξύλου, ἢ δι' ἀκοντίων (Σχ. 1), ἢ   ἄλλων προχείρων μέσων.



(Σχ. 1)

(Σχ. 1)

Εἶναι δὲ τὰ ἀκόντια ῥάβδοι, συνήθως ἐκ ξύλου, ἔχουσαι μῆκος $1\frac{1}{2}$ —3 μέτρων καὶ ἐγκάρσιον τομὴν ἢ κύκλον, ἔχοντα διάμετρον περίπου 0, 04 τοῦ μέτρου, ι.άγωνον κανονικόν, ἔχον πλευρὰν 0,02 τοῦ μέτρου. Φέρουσι δὲ ἐν μὲν τῷ κάτω ἄκρῳ κωνικὸν σιδηροῦν περίβλημα, ἵνα ἐμπηγνύωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, ἐν δὲ τῷ ἄνω μικρὸν σῆμα ἐξ ὀθόνης ἢ ἐκ μεταλλικῆς πινακίδος χρώματος ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ, ἵνα διακρίνωνται ἐξ ἀποστάσεως. Πρὸς τοῦτο καὶ τὰ ἀκόντια εἶναι κεχρωματισμένα κατὰ ζώνας δι' ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ χρώματος ἐναλλάξ.

Ἵνα δὲ ἡ μέτρησις εὐθυγραμμίας τινὸς εἶναι ἀκριβὴς δέον νὰ γίνηται πάντοτε κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς· τούτου ἕνεκα, ὅταν τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι μέγα, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν κατὰ τὴν μέτρησιν νὰ ἐκτραπῶμεν τῆς διευθύνσεως αὐτῆς, σημειοῦμεν δι' ἐνδιαμέσων ἀκοντίων ἐμπηγνυομένων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διάφορα σημεῖα τῆς καταμετρητέας γραμμῆς.

Καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη ἐργασία *στοιχισμός*.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐμπηγνύομεν τρία ἀκόντια, ὧν τὰ μὲν δύο εἰς τὰ τῆς εὐθυγραμμίας ἄκρα Α καὶ Β, τὸ δὲ τρίτον ἐπί τινος σημείου τῆς εὐθείας ταύτης, κειμένου μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ὁ καθορισμὸς δὲ τοῦ σημείου τούτου γίνεται ὡς ἑξῆς· ὁ μὲν μετρητὴς ἱστάμενος ἐπί τινος σημείου, οἷον τοῦ Ο, τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ,

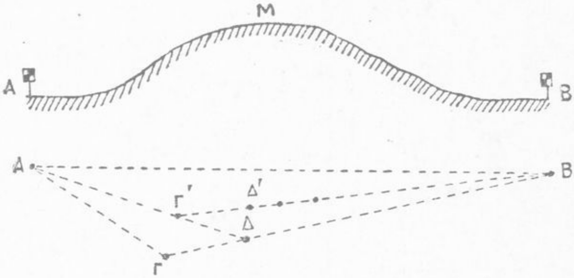
(Σχ. 2)

ἀπέχοντος τοῦ Α δύο περίπου μέτρα, σκοπεύει ἐφαπτομένως πρὸς τὰ ἀκόντια Α καὶ Β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν, ὁ δὲ βοηθὸς αὐτοῦ κρατῶν ἀκόντιον χωρεῖ κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸ σημεῖον Β καὶ τοποθετεῖ τοῦτο κατακορύφως ἐπί τινος σημείου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ βοηθός, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, τοποθετεῖ τὸ ἀκόντιον ἐκτὸς τῆς εὐθυγραμμίας, π.χ. εἰς τὸ Γ' ἢ εἰς τὸ Γ'', ὁ μετρητὴς χωρὶς νὰ μετακινηθῇ ὁδηγεῖ τὸν βοηθὸν διὰ σημείων νὰ μετακινηθῇ οὕτως, ὥστε νὰ τοποθετήσῃ τὸ ἀκόντιον ἀκριβῶς ἐπὶ σημείου τῆς εὐθυγραμμίας, οἷον τοῦ Γ, ὅπερ θὰ ἐννοήσῃ ὁ μετρητής, διότι τὸ ἀκόντιον Γ θὰ ἀποκρυβῇ ὑπὸ τοῦ Α. Ὁμοίως δὲ τοποθετοῦνται καὶ ἄλλα ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης ἀκόντια.

*315. Ἂν, μεταξὺ τῶν ἐν τοῖς ἄκροις ἀκοντίων Α καὶ Β (Σχ. 3), παρεμπῖπτον ἐδαφικόν τι ἔξαρμα ΑΜΒ παρακωλύῃ τὴν ὄψιν τοῦ ἑτέρου ἀκοντίου ἀπὸ τοῦ ἑτέρου, πρὸς στοιχισμὸν τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης ΑΒ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὁ βοηθὸς τοποθετεῖ κατακορύφως ἀκόντιον ἐπί τινος τοῦ ἐξάρματος σημείου, οἷον τοῦ Γ, ὥστε νὰ φαίνωνται ἐξ αὐτοῦ τὰ ἀκόντια Α καὶ Β, κειμένου δὲ ὅσον τὸ δυνατὸν πλησιέστερον πρὸς τὴν εὐθυγραμμίαν ΑΒ, ὁ δὲ παρατηρητὴς ἱστάμενος ἐν τῷ σημείῳ Β τοποθετεῖ διὰ βοηθοῦ κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον ἀκόντιον Δ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ ἀκόντιον Α νὰ εἶναι ὁρατὸν ἐκ τοῦ σημείου Δ. Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ καὶ τὸ ἀκόντιον Δ θὰ κεῖται ἐπ' αὐτῆς. Βεβαιοῦται δὲ ὁ βοη-



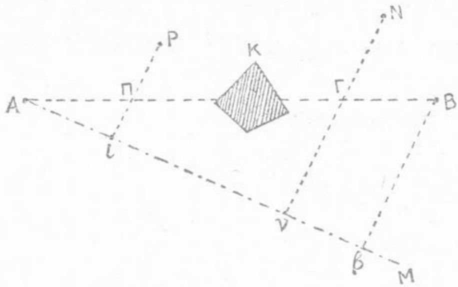
(Σχ. 3)

θὸς περὶ τούτου παρατηρῶν ἀπὸ τοῦ Δ τὸ Α. Ἂν δὲ τὸ ἀκόντιον Γ εὑρεθῇ ἐκτὸς τῆς εὐθυγραμμίας ΔΑ, φροντίζει οὗτος νὰ μετατοπισθῇ τοῦτο εἰς τὸ Γ' ἐπὶ τῆς ΔΑ. Κεῖται δὲ ἡ γραμμὴ Γ'Β πλησιέστερον πρὸς τὴν ΑΒ ἢ ἡ ΓΒ. Ἂν δὲ ἐπαναλάβωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην ἀπὸ τοῦ Γ' καὶ φέρωμεν τὸ ἀκόντιον Δ εἰς Δ' ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας Γ'Β, ἐξακολουθήσωμεν δὲ οὕτω, θὰ κατορθώσωμεν μετά τινας ἀναζητήσεις νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόντια Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ.

Ὁμοία ἐργασία γίνεται καὶ ὅταν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δύνανται μὲν νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς σκοποί, ἀλλ' ἡ ἐπ' αὐτῶν στάσις εἶναι ἀδύνατος.

Παρατήρησις. Ἂν τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β παρεμπῖπτον κώλυμα Κ (Σχ. 4) εἶναι οἰκία ἢ συστὰς δένδρων ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Τοποθετοῦμεν ἀκόντιον Μ καθ' ἡντιναδήποτε διεύθυνσιν καὶ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ φαίνωνται ἀπ' αὐτοῦ τὰ ἀκόντια Α καὶ Β. Ἐπὶ τῆς νέας δὲ εὐθυγραμμίας ΑΜ ἀναζητοῦμεν τὸν πόδα β τῆς ἐκ τοῦ σημείου Β ἀγομένης ἐπ' αὐτὴν καθέτου, ποιοῦμενοι χρῆσιν ὀργάνου καλουμένου *γνώμονος*, ὅπερ κατωτέρω περιγράφομεν, καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις Αϐ καὶ Ββ. Εἶτα ἐκλέγομεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθυγραμμίας ΑΜ σημεῖόν τι ν καὶ τοποθετοῦμεν ἀκόντιον εἰς τὸ Ν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπὶ τὴν ΑΜ καθέτου, ἥτις ἄγεται διὰ τοῦ γνώμονος



(Σχ. 4)

ἀπὸ τοῦ σημείου ν. Εἶτα μετροῦμεν τὴν Αν καὶ οὕτως ἐκ τῶν γνωστῶν (Βϐ),(Αν),(Αϐ) διὰ τῆς σχέσεως $\frac{\chi}{(B\text{ϐ})}=\frac{(A\nu)}{(A\text{ϐ})}$ ὑπολογίζομεν τὴν χ.

Μετὰ δὲ ταῦτα, ἐπὶ τῆς νΝ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ν λάβωμεν τὸ μῆκος (νΓ) ἴσον πρὸς τὴν χ, τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ. Ἐκτελοῦντες δὲ καὶ ἐπὶ ἑτέρου σημείου ι τῆς ΑΜ ἐργασίαν ὁμοίαν τῇ ἐπὶ τοῦ ν γενομένῃ, προσδιορίζομεν καὶ ἕτερον σημεῖον Π τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ· οὕτω δὲ καθορίζεται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἑκατέρωθεν τοῦ κωλύματος Κ ἡ ζητουμένη εὐθυγραμμία ΑΒ.

Προσδιορισμὸς τῆς τομῆς δύο εὐθυγραμμιῶν.

316. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθυγραμμιῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 5), ἐφ' ὧν τῶν ἄκρων ὑψοῦνται ἀκόντια, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐφ' ἑκατέρας τῶν εὐθυγραμμιῶν ὁρίζομεν ὡς ἀνωτέρω ἓν σημεῖον, οἷον τὸ Ε καὶ τὸ Ζ, εἰς ἃ ἐμπηγνύομεν κατακορύφως ἀνὰ ἓν ἀκόντιον. Οὕτω δέ,

(Σχ. 5)

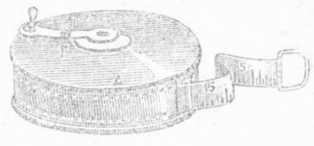
ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῶν δύο ἀκοντίων Α καὶ Ε τῆς εὐθυγραμμίας

ΑΕΒ, χωροῦμεν ἀεὶ ἐπ' αὐτῆς καὶ διὰ τοῦ ἀκοντίου, ὃ φέρομεν, σκοπεύομεν διαδοχικῶς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὸ σημεῖον Η, ὅπερ εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθυγραμμιῶν ΑΕ καὶ ΓΖ.

Μετροταινία.

317. Μετὰ τὸν στοιχισμὸν τῆς εὐθυγραμμίας προβαίνομεν εἰς τὴν καταμέτρησιν τοῦ μήκους αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο ποιούμεθα χρῆσιν διαφόρων ὀργάνων, ἀναλόγως πρὸς τὴν ἐπιζητουμένην ἀκρίβειαν. Κατὰ τὰς συνήθεις δὲ μετρήσεις μεταχειριζόμεθα τὴν ***μετροταινίαν*** (Σχ. 6). Ἀποτελεῖται δὲ αὕτη ἐκ λινῆς ταινίας, ἐχούσης πλάτος μὲν περίπου 0μ,015, μῆκος δὲ ἢ 10 ἢ 20 ἢ 25 μέτρων, ἐφ' ἧς σημειοῦνται διαιρέσεις ἀνὰ μέτρον, ὑποδεκάμετρον καὶ ὑφεκατόμετρον.



(Σχ. 6)

Ἡ ταινία αὕτη, περιελισσομένη περὶ ἄξονα διὰ στροφάλου Γ, ἐγκλείεται ἐντὸς δερματίνου περιβλήματος.

Αἱ τελειότεραι μετροταινίαι περιέχουσιν ἐντὸς τῆς λινῆς ταινίας σύρματα μεταλλικά, δι' ὧν περιορίζονται αἱ τοῦ μήκους αὐτῶν μεταβολαί, αἱ ἐκ τῆς χρήσεως μάλιστα προερχόμεναι.

Μέτρησις εὐθείας γραμμῆς κειμένης ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.

318. Ἔστω νῦν ΑΒ (Σχ. 7) ἡ εὐθυγραμμία ἧς τὸ μῆκος προτιθέμεθα νὰ ὁρίσωμεν. Ἐν τῇ καταμετρήσει ἡ μετροταινία φέρεται ἀεὶ ὑπὸ δύο ἀνδρῶν, ὧν ὁ μὲν *καταμετρητὴς* ἕπεται, ὁ δὲ *βοηθὸς* αὐτοῦ

(Σχ. 7)

προηγεῖται. Ὅταν δὲ ἡ μετροταινία τελείως ἀναπτυχθῇ, ὁ μὲν καταμετρητὴς θέτει τὸ ἄκρον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς ἀφετηρίας τῆς μετρήσεως, οἷον τοῦ Α, σημαίνει εἰς τὸν βοηθὸν νὰ κινῆται ἀεὶ ἐπ' αὐτῆς, ὁδηγούμενος ὑπὸ τῶν ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ ἐμπεπηγμένων ἀκοντίων, ὁ δὲ βοηθός, ἐκτείνων τὴν μετροταινίαν κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ καταμετρητοῦ ὑποδειχθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ στηρίζων τὸ ἄκρον αὐτῆς ἐφ' οὗ ἵσταται σημείου, οἷον τοῦ α, σημειοῖ τοῦτο διὰ σιδηρᾶς βελόνης, ἢ ἄλλου τινὸς ὀργάνου, καὶ ἐκφωνεῖ τὸν ἀριθμὸν ἕν.

Μετὰ ταῦτα προχωροῦσιν ἀμφότεροι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγραμμίας, κρατοῦντες ὅσον τὸ δυνατὸν τεταμένην τὴν μετροταινίαν, μέχρις οὗ ὁ καταμετρητὴς φθάσῃ εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ βοηθοῦ ἐμπηχθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους βελόνην, ἐφ' ἧς τὸν πόδα θέτει τὸ ἄκρον τῆς μετροταινίας καὶ ἐπαναλαμβάνει τὴν αὐτὴν καὶ ἀνωτέρω ἐργασίαν μετὰ τοῦ βοηθοῦ, ὅστις, ὁρίζων δεύτερον σημεῖον β, ἐκφωνεῖ τὸν ἀριθμὸν δύο. Χωρεῖ δὲ ἡ ἐργασία οὕτω μέχρι τοῦ τέλους τῆς μετρήσεως. Ὅταν δὲ ἡ μετροταινία μεταφέρηται ἀπὸ τμήματός τινος τῆς μετρουμένης εὐθυγραμμίας εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον, ὁ καταμετρητὴς ἀφαιρεῖ ἀπὸ τοῦ ἐδάφους τὴν βελόνην, ἐφ' ἧς εἶχε τεθῆ τὸ ἄκρον τῆς μετροταινίας.

Ἂν δὲ τὸ τελευταῖον τμῆμα δΒ τῆς μετρουμένης εὐθυγραμμίας εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους τῆς μετροταινίας, ὁ βοηθὸς, ἐκτείνων τὴν μετροταινίαν ἀπὸ τοῦ σημείου δ πρὸς τὸ Β, παρατηρεῖ τὸν ἐπ' αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Β ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν.

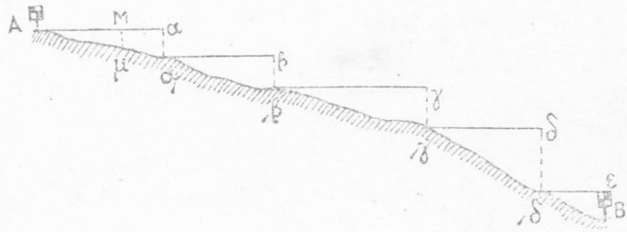
Οὕτω δέ, ἂν ἡ μετροταινία, ἔχουσα π.χ. 10 μέτρων μῆκος, μετηνέχθη τετράκις ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ δ, τὸ δὲ τελευταῖον τμῆμα δΒ εὑρέθη ἴσον πρὸς $6^{\mu},25$, τὸ ὅλον μῆκος τῆς ΑΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς $4\times10+6,25=46^{\mu},25$.

Μέτρησις εὐθείας γραμμῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο σημείων κειμένων ἐπὶ κεκλιμένου ἐδάφους.

319. Προκειμένου νὰ ὁρίσωμεν τὴν ὁριζόντιον ἀπόστασιν δύο σημείων Α καὶ Β (Σχ. 8) κειμένων ἐπὶ ἐδάφους κεκλιμένου, ἐργαζόμεθα χωροῦντες μᾶλλον ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἀφ' οὗ στοι-

χίσωμεν δι' ἀκοντίων, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, τὴν εὐθυγραμμίαν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ὁ καταμετρητὴς θέτει τὸ ἄκρον τῆς μετροταινίας εἰς τὸ ση-



(Σχ. 8)

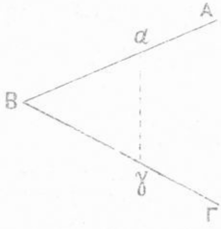
μεῖον Α καὶ κατευθύνει ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας τὸν βοηθόν, ὅστις ἐκτείνει *ὁριζοντίως* τὴν μετροταινίαν Αα, διὰ βαρυδίου δὲ ἢ διὰ μικροῦ λίθου, ὃν ἀφίνει νὰ καταπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀπὸ τοῦ σημείου α, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους *κατακορύφου* προβολῆς α' τοῦ α, σημειοῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν προβολὴν α' καὶ ἐκφωνεῖ τὸν ἀριθμὸν ἕν. Μετὰ τοῦτο χωροῦσιν ἀμφότεροι ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ, μέχρις οὗ ὁ καταμετρητὴς φθάσει εἰς τὸ σημεῖον α', ἐφ' οὗ θέτει τὸ ἄκρον τῆς μετροταινίας καὶ ἐπαναλαμβάνουσι τὴν αὐτὴν καὶ ἀνωτέρω ἐργασίαν μέχρι τοῦ τέλους τῆς μετρήσεως.

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ἔδαφος εἶναι πολὺ ἐπικλινές, ὥστε τὰ ὕψη αα', ββ',... νὰ εἶναι μείζονα τοῦ ἀναστήματος τοῦ βοηθοῦ, ἡ τάνυσις τῆς μετροταινίας ὁριζοντίως εἶναι δύσκολος, εἰ μὴ ἀδύνατος. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δὲν ποιοῦμεν χρῆσιν ὅλης τῆς μετροταινίας, ἀλλὰ μέρους αὐτῆς, οἷον τοῦ ΑΜ, ἔχοντος μῆκος ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων, καὶ τοιοῦτον ὥστε τὸ ὕψος Μμ νὰ εἶναι μεῖζον τοῦ ἀναστήματος τοῦ βοηθοῦ.

2ον *Μέτρησις τῶν γωνιῶν.*

320. Πρὸς ὑποτύπωσιν ἐδαφικῆς τινος ἐπιφανείας εἴπομεν ὅτι, πλὴν τοῦ μήκους τῶν γραμμῶν, ἔχομεν ἀνάγκην καὶ τοῦ μεγέθους τῶν γωνιῶν, ἃς αἱ συναντώμεναι εὐθυγραμμίαι σχηματίζουσιν.

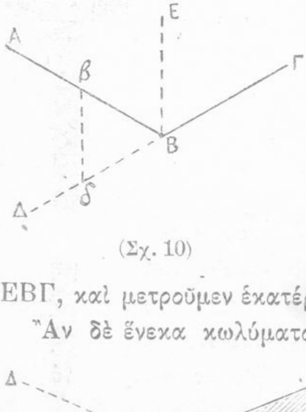
Ἐν τῇ στοιχειώδει χωρομετρίᾳ τὰ μεγέθη τῶν γωνιῶν, δι' ἔλλειψιν εἰδικῶν ὀργάνων, προσδιορίζονται κατὰ τὸν ἑξῆς ἁπλοῦν τρόπον, καθιστῶντα εὔκολον τὴν μεταφορὰν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ σχεδίου.



(Σχ. 9)

Ἐπὶ παραδείγματος, ἵνα ὁρίσωμεν τὸ μέγεθος τῆς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ (Σχ. 9) σχηματιζομένης γωνίας ΑΒΓ λαμβάνομεν ἐφ' ἑκατέρας τούτων ἀνὰ ἓν σημεῖον, οἷον τὸ α καὶ τὸ γ, καὶ μετροῦμεν διὰ τῆς μετροταινίας τὰς ἀποστάσεις Βα, Βγ, καὶ αγ. Πρὸς μείζονα δὲ ἀκρίβειαν τῆς ἐπὶ τοῦ διαγράμματος γραφικῆς τῶν γωνιῶν κατασκευῆς, δέον νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῶν σημεῖα α καὶ γ εἰς ἴσας περίπου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀποστάσεις.

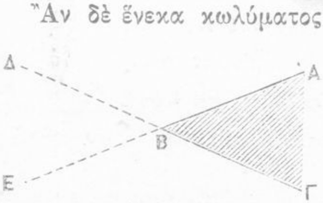
Τὸν τρόπον τῆς μεταφορᾶς τῆς γωνίας ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἐκθέσωμεν ἐν τῷ περὶ καταρτισμοῦ αὐτοῦ μέρος (331).



(Σχ. 10)

Σημείωσις. Ἂν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι πολὺ ἀμβλεῖα (Σχ. 10), ἢ προεκτείνομεν ἀντιθέτως τὴν ἑτέραν πλευράν, οἷον τὴν ΒΓ, καὶ μετροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίαν ΑΒΔ, ἢ διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΑΒΓ δι' εὐθείας ΒΕ εἰς δύο ἄλλας, τὴν ΑΒΕ καὶ τὴν ΕΒΓ, καὶ μετροῦμεν ἑκατέραν τούτων.

Ἂν δὲ ἕνεκα κωλύματος δὲν δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ἐντὸς



(Σχ. 11)

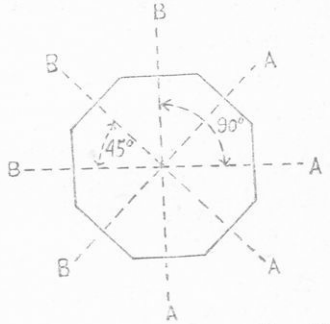
γωνίας τινός, οἷον τῆς ΑΒΓ (Σχ. 11), μετροῦμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον ἢ τὴν ἑτέραν τῶν παραπληρωματικῶν αὐτῆς γωνιῶν ΑΒΔ, ΓΒΕ, ἢ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΔΒΕ, ἃς εὑρίσκομεν προεκτείνοντες ἀντιθέτως τὰς πλευρὰς ΒΑ, ΒΓ.

Προσδιορισμὸς καθέτου διευθύνσεως.

321. Πολλάκις κατὰ τὴν ὑποτύπωσιν ἐδαφικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἀνάγκη νὰ καθορίσωμεν διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ ἑτέραν δεδομένην. Πρὸς τοῦτο δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν δύο ὄργανα, τὸν *γνώμονα τοῦ χωρομέτρου ἢ ὀρθόγωνον* καὶ τὴν γνωστὴν *μετροταινίαν*.

Γνώμων τοῦ χωρομέτρου ἢ ὀρθόγωνον.

322. Τὸ ὄργανον τοῦτο (Σχ. 12) ἀποτελεῖται ἐξ ὀκταγωνικοῦ μεταλλικοῦ κοίλου *πρίσματος* [1], ἐφ' οὗ ἑκάστης ἕδρας ὑπάρχει ἀνατομὴ (α) καὶ θυρὶς (β), καθ' ἧς τὸν ἄξονα εἶναι τοποθετημένον λεπτὸν νῆμα. Ἔχουσι δὲ αὗται διατεθῆ οὕτως, ὥστε ὁ ἄξων τῆς ἀνατομῆς ἕδρας τινὸς μετὰ τοῦ νήματος τῆς ἐκ διαμέτρου ἀντικειμένης θυρίδος νὰ ἀποτελῇ ἓν ἐπίπεδον, καλούμενον *σκοπευτικὸν ἐπίπεδον*.



(Σχ. 12)

Ἐν τῷ ὀργάνῳ ἄρα τούτῳ ὑπάρχουσι τέσσαρα σκοπευτικὰ ἐπίπεδα ΑΒ συγκλίνοντα πρὸς ἄλληλα ὑπὸ γωνίαν 45°.

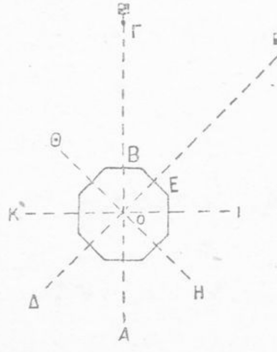
Τὸ ὄργανον τοῦτο προσαρμόζεται ἐπὶ ξυλίνης ῥάβδου Γ, ἧς τὸ κατώτατον ἄκρον ἔχει περιβληθῆ ὑπὸ κωνικοῦ σιδηροῦ πεδίλου, ἵνα εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος ἐμπηγνύηται. Καλεῖται δὲ αὕτη ἡ ῥάβδος *ποὺς τοῦ γνώμονος*.

---

(1) Ὑπάρχουσι καὶ γνώμονες ἔχοντες σχῆμα κοίλου ὀρθοῦ *κυλίνδρου*, διατάξεως ἀναλόγου πρὸς τὴν τοῦ περιγραφομένου καὶ τῆς αὐτῆς χρήσεως.

Χρῆσις τοῦ ὀργάνου. Ἐμπηγνύομεν τὸν πόδα τοῦ ὀργάνου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὅσον τὸ δυνατὸν κατακορύφως, ὅπερ βεβαιούμεθα διὰ νήματος, φέροντος κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον μικρὸν βάρος καὶ κρεμωμένου παρὰ τὸν πόδα, ὃν μετακινοῦμεν μέχρις οὗ συμπέσῃ μετὰ τοῦ νήματος. Εἶτα δὲ προσαρμόζομεν ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ τὸ ὄργανον. Καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη τοῦ ὀργάνου διάθεσις *τοποθέτησις ἐν στάσει.* Οὕτως, ἂν διὰ μιᾶς ἀνατομῆς παρατηρήσωμεν τὸ νῆμα τῆς ἐκ διαμέτρου ἀπέναντι θυρίδος, θὰ καθορίσωμεν σκοπευτικὸν ἐπίπεδον, ὅπερ θὰ εἶναι κατακόρυφον, ἂν ὁ πούς τοῦ ὀργάνου ἐνεπάγῃ κατακορύφως.

Ἵνα τὸ ὄργανον εἶναι ἀκριβές, πρέπει τὰ διάφορα σκοπευτικὰ ἐπίπεδα νὰ συγκλίνωσι πρὸς ἄλληλα ὑπὸ γωνίαν 45^0· τοῦτο δὲ βεβαιούμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ τοποθετήσωμεν τὸ ὄργανον ἐν στάσει ἐπί τινος σημείου τοῦ ἐδάφους (Σχ. 13), παρατηροῦμεν διὰ τῆς ἀνατομῆς καὶ διὰ τοῦ νήματος τῆς ἐκ διαμέτρου ἀντικειμένης θυρίδος, καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην ἐμπηγνύομεν κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, 50 μέτρα περίπου μακρὰν ἀπὸ τοῦ ὀργάνου, ἀκόντιον Γ· ἄνευ δὲ μετακινήσεως τοῦ ὀργάνου, παρατηροῦντες διὰ τῆς ἐγκοπῆς τῆς παρακειμένης ἕδρας κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΔΕ, τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτῆς κατακορύφως ἕτερον ἀκόντιον Ζ. Οὕτω δὲ ἔχομεν καθωρισμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν γωνίαν ΓΟΖ. Εἶτα περιστρέφομεν ἠρέμα καὶ ὁριζοντίως τὸν γνώμονα μέχρις οὗ τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον ΑΒ διέλθῃ διὰ τοῦ ἀκοντίου Ζ. Τούτου γενομένου, πρέπει τὸ σκοπευτικὸν ἐπίπεδον ΗΘ νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἀκοντίου Γ· ἄλλως ἡ γωνία ΕΟΒ δὲν θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΟΘ. Αἱ γωνίαι ἄρα αὗται διαφέρουσι τῶν 45^0, καὶ κατ' ἀκολουθίαν πρέπει τὸ ὄργανον νὰ διορθωθῇ.



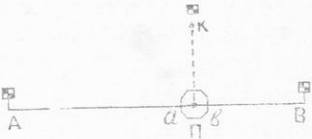
(Σχ. 13)

Προβλήματα.

323. Διὰ τοῦ ὀρθογώνου λύονται τὰ ἑξῆς δύο θεμελιώδη προβλήματα.

1ον) *Νὰ ἀχθῇ ἐπί τινα εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος ἀπὸ δεδομένου σημείου Π κειμένου ἐπ' αὐτῆς.*

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ ὄργανον ἐν στάσει ἐπὶ τοῦ δεδομένου σημείου Π καὶ περιστρέφομεν ἠρέμα τὸν γνώμονα ὁριζοντίως, μέχρις οὗ ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων (αβ) διέλθῃ διὰ τοῦ ἀκοντίου Β τῆς δεδομένης εὐθυγραμμίας (Σχ. 14). Τούτου ἐπιτευχθέντος παρατηροῦμεν καὶ ἀντιθέτως κατὰ τὴν διεύθυνσιν βα, διότι αὕτη πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἑτέρου ἀκοντίου Α· ἄλλως συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον Π δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ· δι' ὃ μετατοπίζομεν τὸ ὄργανον καταλλήλως μέχρις οὗ ἐκπληρωθῇ ἡ συνθήκη αὕτη.



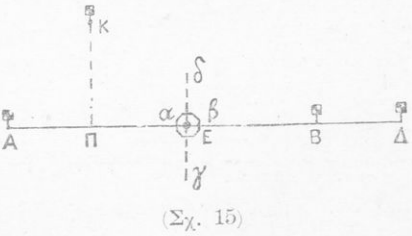
(Σχ. 14)

Εἶτα, χωρὶς νὰ μετακινήσωμεν τὸ ὄργανον, ἐκτελοῦμεν παρατήρησιν διὰ τοῦ ἐπὶ τὸ προηγούμενον ἐπίπεδον (αβ) καθέτου σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τούτου τοποθετοῦμεν κατακορύφως ἀκόντιον Κ, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν εὐθυγραμμίαν ΠΚ, ἥτις εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Π ἐπὶ τὴν ΑΒ ζητουμένη κάθετος.

324. 2ον) *Ἐκ δεδομένου σημείου Κ, κειμένου ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, νὰ ἀχθῇ ἐπ' αὐτὴν κάθετος.*

Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὴν ἑξῆς δοκιμαστικὴν ἐργασίαν.

Ἔστω ΑΒ ἡ δεδομένη εὐθυγραμμία (Σχ. 15), ἧς τὰ ἄκρα ἔχουσι σημειωθῆ διὰ κατακορύφων ἀκοντίων, καὶ Κ τὸ δεδομένον σημεῖον, ἐξ οὗ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κάθετος, καὶ εἰς ὃ ἔχει ὡσαύτως ἐμπηχθῇ ἄλλο κατακόρυφον ἀκόντιον.



(Σχ. 15)

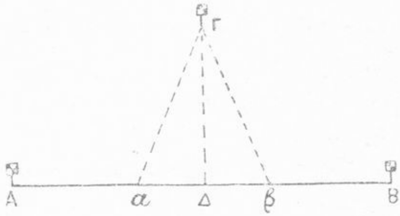
Πρὸ πάσης ἄλλης ἐργασίας τοποθετοῦμεν, κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (315), κατακορύφως ἀκόντιον ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθυγραμμίας, ἢ μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, ἢ ἐπί τι σημεῖον τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, οἷον τὸ Δ. Τὸ τρίτον τοῦτο ἀκόντιον θὰ διευκολύνῃ πολὺ τὴν κατόπιν ἐργασίαν, διότι δι' αὐτοῦ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀκραίων θὰ ἀνευρίσκωμεν εὐκόλως σημεῖα τῆς δεδομένης εὐθυγραμμίας, ἐφ' ὧν θὰ τοποθετῶμεν διαδοχικῶς τὸ ὄργανον ἐν στάσει.

Εἶτα ἐκλέγοντες σημεῖόν τι τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ, οἷον τὸ Ε, ὅπερ ἐξ ὄψεως ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου, τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ ὄργανον ἐν στάσει καὶ περιστρέφομεν τὸν γνώμονα ὁριζοντίως, μέχρις οὗ ἓν τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων, οἷον τὸ αϐ, συμπέσῃ μετὰ τῆς διευθύνσεως ΒΔ.

Εἶτα, ἄνευ μετακινήσεως τοῦ ὀργάνου, ποιοῦμεν δευτέραν παρατήρησιν διὰ τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου γδ, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ αϐ. Ἐὰν δὲ κατὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην διακρίνωμεν τὸ ἐπὶ τοῦ δεδομένου σημείου Κ ἀκόντιον, βεϐαιούμεθα ὅτι τὸ σημεῖον Ε εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου καὶ ἄρα ἡ ΚΕ εἶναι ἡ κάθετος· ἄλλως μετακινοῦμεν τὸ ὄργανον, πάντοτε ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ καὶ οὕτως ὥστε νὰ πλησιάζωμεν πρὸς τὴν πιθανὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου σημείου, καὶ τοποθετοῦντες διαδοχικῶς ἐπ' αὐτῆς τὸ ὄργανον ἐν στάσει ἐπαναλαμϐάνομεν τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἐργασίαν τῶν παρατηρήσεων, μέχρις οὗ ἐπιτύχωμεν σημεῖόν τι Π τῆς εὐθυγραμμίας τοιοῦτον, ὥστε ἐνῷ τὸ ἓν τοῦ ὀργάνου σκοπευτικὸν ἐπίπεδον θὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς διευθύνσεως ΒΔ, τὸ ἐπ' αὐτὸ κάθετον νὰ διέρχηται διὰ τοῦ εἰς τὸ Κ ἐμπεπηγμένου ἀκοντίου. Λοιπὸν τὸ σημεῖον τοῦτο Π εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου καὶ ἄρα ἡ ΚΠ ἡ ζητουμένη κάθετος.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ δύο τοῦ γνώμονος διαδοχικὰ σκοπευτικὰ ἐπίπεδα συναντῶνται ὑπὸ γωνίαν 45^0, εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τοῖς ἀνωτέρω δυσὶ προβλήμασι, δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἢ ἐπὶ δεδομένης εὐθυγραμμίας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετ' ἐκείνης γωνίαν 45^0.

325. Ὡσαύτως διὰ τῆς μετροταινίας, ἢ ἐλλειπούσης αὐτῆς διὰ λεπτοῦ σχοινίου, ὑποδιῃρημένου διὰ κόμβων ἢ ἄλλως εἰς ἴσα μέρη, δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν καθέτους ἐπί τινα εὐθυγραμμίαν. Π.χ., ἵνα ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ (Σχ. 16) ἀγάγωμεν ἐπ' αὐτὴν κάθετον, λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Δ, εἰς ἴσην ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν, δύο σημεῖα τῆς εὐθυγραμμίας, τὸ α καὶ

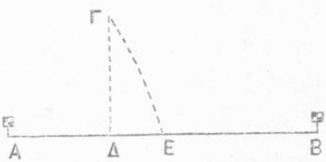


(Σχ. 16)

τὸ β, καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξαρτῶμεν τὰ ἄκρα τῆς μετροταινίας, ἣν ἐντείνομεν ἐκ τοῦ μέσου Γ τοῦ μήκους αὐτῆς. Οὕτω δὲ ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (76).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Μετροῦμεν ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ (Σχ. 17) καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ μῆκός τι ΔΕ ἴσον πρὸς 3 ἢ πρὸς 6 μέτρα καὶ εἶτα τοποθετοῦμεν ἐπὶ μὲν τοῦ σημείου Δ τὴν ἀρχὴν τῆς μετροταινίας, ἐπὶ



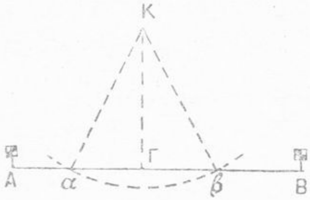
(Σχ. 17)

δὲ τοῦ Ε τὴν διαίρεσιν αὐτῆς 9μ ἢ 18μ. Κρατοῦντες δὲ τὴν μετροταινίαν ἀπὸ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς τῶν 4μ ἢ 8μ καὶ ἐκτείνοντες αὐτὴν προσδιορίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὸ σημεῖον Γ, ὅπερ μετὰ τοῦ Δ ἑνούμενον ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος, διότι πληροῖ τὴν σχέσιν

$$(\Gamma\Delta)^2+(\Delta E)^2=(\Gamma E)^2.$$

326. Ἵνα δὲ ἀγάγωμεν ἐπὶ δεδομένην εὐθυγραμμίαν ΑΒ κάθετον ἀπὸ σημείου Κ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου (Σχ. 18), λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης καὶ πλησίον τῆς πιθανῆς θέσεως τοῦ ποδὸς τῆς ζητουμένης καθέτου σημεῖόν τι α, καὶ διὰ τῆς μετροταινίας γράφομεν τό-

ξον περιφερείας, ἐχούσης κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Κ, ἀκτῖνα δὲ

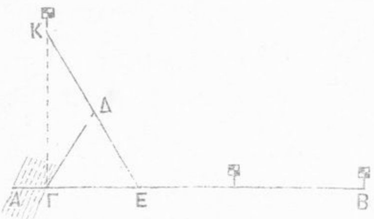


(Σχ. 18)

ἴσην τῇ Κα, τεμνούσης δὲ τὴν εὐθυγραμμίαν ΑΒ εἴς τι σημεῖον β. Οὕτω τῆς αβ τὸ μέσον Γ εἶναι ὁ ποὺς τῆς ζητουμένης καθέτου, ἤτοι τῆς ΚΓ (149).

Ἂν δὲ ἕνεκα κωλύματος δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ τόξον, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν, ὡς καὶ ἀνωτέρω, σημεῖόν τι Ε ἐπὶ τῆς δεδομένης



(Σχ. 19)

εὐθυγραμμίας ΑΒ καὶ ἐντείνομεν τὴν μετροταινίαν ἀπὸ τοῦ Κ εἰς τὸ Ε (Σχ. 19). Εἶτα λαμβάνοντες τὸ μέσον Δ τῆς ΚΕ καὶ περιστρέφοντες περὶ αὐτό, ὡς περὶ κέντρον, τὸ τμῆμα ΔΚ τῆς μετροταινίας, μέχρις οὗ τὸ ἄκρον Κ πέσῃ ἐπί τινος σημείου Γ τῆς εὐθυγραμμίας ΑΒ (136), εὑρίσκομεν τὸν πόδα Γ τῆς ζητουμένης καθέτου ΚΓ (153, 168).

Β΄. Καταρτισμὸς τῶν διαγραμμάτων.

Περὶ τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος.

327. Ἐλέχθη ἤδη ὅτι, ὅπως ἐπιτύχωμεν τὴν ἀπεικόνισιν τοῦ σχήματος ἐπιφανείας τινὸς τοῦ ἐδάφους μετὰ τῶν ἐν αὐτῇ παραλλαγῶν καὶ φυσικῶν ἢ τεχνητῶν ἀντικειμένων, πρέπει νὰ προβάλωμεν αὐτὴν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς ἀδύνατον νὰ γίνῃ ἀπεικόνισις τῆς ὁριζοντίας ταύτης προβολῆς, ἐν ᾗ νὰ διατηρῶνται αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις τῶν διαφόρων γραμμῶν, διὰ τοῦτο ἐπὶ τοῦ διαγράμματος λαμβάνομεν ἀντὶ σχήματος ἴσου ἕτερον σχῆμα ὅμοιον αὐτῇ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἀεὶ σταθερὰ σχέ-

σις τῶν *πραγματικῶν μηκῶν* τῆς ὁριζοντίας προβολῆς πρὸς τὰ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἀντίστοιχα αὐτῶν ἀνάλογα μήκη.

Ἡ τῶν πραγματικῶν δὲ μηκῶν πρὸς τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν ἀνάλογα μήκη σταθερὰ σχέσις καλεῖται *ἀριθμητικὴ κλῖμαξ* καὶ παριστᾷ τὸν *λόγον ὁμοιότητος* τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου εἰκόνος τῆς ὁριζοντίου προβολῆς πρὸς αὐτὴν τὴν ὁριζόντιον προβολὴν τοῦ μετρηθέντος χωρίου γῆς. Λαμβάνεται δὲ συνήθως, ὡς ἀριθμητικὴ κλῖμαξ, *κλασματικὴ μονὰς* ἔχουσα παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἂν τὸ μὲν πραγματικὸν μῆκος γραμμῆς τινος ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἶναι Λ, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἀντίστοιχον εἶναι λ, θὰ ἔχωμεν $\frac{\lambda}{\Lambda}=\frac{1}{M}$ (1), ἔνθα ὁ Μ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10, καὶ συνήθως ἴσος πρὸς ἕνα τῶν ἀριθμῶν 100, 200, 500, 1000, 2000 καὶ 5000. Χωρομετρικαὶ ἄρα ἀποτυπώσεις, ἐκτελούμεναι ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{1000}$, ἢ $\frac{1}{5000}$, εἶναι τοιαῦται, ὥστε 100, 200,... ἢ 5000 πήχεις ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους παρίστανται ἐπὶ τοῦ διαγράμματος δι' ἑνὸς μόνου πήχεως.

Χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος. Ὅταν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ διαγράμματός τινος εἶναι γνωστή, δυνάμεθα δι' ἁπλῶν ἀριθμητικῶν πράξεων νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ πραγματικὸν μὲν ὁριζόντιον μῆκος γραμμῆς τινος τοῦ ἐδάφους, ἂν εἶναι δεδομένον τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀντίστοιχον, τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου δὲ ἀντίστοιχον, ἂν εἶναι δεδομένον τὸ πραγματικὸν ὁριζόντιον τῆς γραμμῆς μῆκος. Διότι ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν ὅτι $\Lambda=\lambda.\,M$ καὶ $\lambda=\frac{\Lambda}{M}$, ἐξ ὧν συνάγομεν τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας.

1) Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸ πραγματικὸν ὁριζόντιον μῆκος γραμμῆς τινος τοῦ ἐδάφους, ἂν εἶναι δεδομένον τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἀντίστοιχον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τοῦτο ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς κλίμακος.

2) Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος παραστατικὸν μῆκος γραμμῆς τινος, ἂν εἶναι δεδομένον τὸ ἀντίστοιχον πραγματι-

κὸν αὐτῆς μῆκος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ δεύτερον τοῦτο μῆκος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ τοῦ διαγράμματος εἶναι $\frac{1}{200}$, τὸ δὲ πραγματικὸν μῆκος γραμμῆς τινος τοῦ ἐδάφους εἶναι 50^{μ}, τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἀντίστοιχον θὰ εἶναι $\lambda=\frac{50}{200}=0^{\mu},25$. Ἀντιστρόφως δέ, ἄν, ἐργαζόμενοι κατὰ τὴν ἀνωτέρω κλίμακα, ἔχωμεν δεδομένον ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος γραμμῆς τινος εἶναι $0^{\mu},25$, τὸ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος Λ θὰ εἶναι $\Lambda=0^{\mu},25\times200=50$ μέτρων.

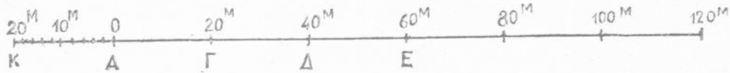
Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος ἐφαρμόζεται εἰς γραμμικὰ μήκη οὐχὶ δὲ καὶ εἰς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν. Ἵνα δὲ ἀναγάγωμεν πραγματικόν τι ἐμβαδὸν εἰς τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἐμβαδὸν ἢ ἀντιστρόφως, πρέπει ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει νὰ διαιρέσωμεν τὸ πραγματικὸν ἐμβαδὸν διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἐμβαδὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦτο (260).

Περὶ τῆς ἁπλῆς κλίμακος ἢ κλίμακος σχεδιάσεως.

328. Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος ἀπαιτεῖ ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων, πρὸς ἀποφυγὴν καταναλώσεως μακροτέρου χρόνου καὶ ἐνδεχομένων σφαλμάτων, ποιούμεθα χρῆσιν τῆς καλουμένης *κλίμακος σχεδιάσεως* ἢ *ἁπλῆς κλίμακος*, ἥτις οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ σχῆμα παρέχον γραφικὴν τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος παράστασιν.

Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν τοιαύτην κλίμακα, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν $\frac{1}{2000}$, λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας τινὸς ΑΒ (Σχ. 20) διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ,.... ἴσα πρὸς $0^{\mu},01$, ὧν ἕκαστον κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀριθμητικὴν κλίμακα $\frac{1}{2000}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς

0,$^{\mu}$01$\times$2000=20$^{\mu}$, καὶ σημειοῦμεν ἐπὶ μὲν τῆς ἀρχῆς Α τῆς ληφθείσης εὐθείας τὸν ἀριθμὸν 0$^{\mu}$, ἐπὶ δὲ τοῦ Γ τὸν ἀριθμὸν 20$^{\mu}$,



(Σχ. 20)

ἐπὶ δὲ τοῦ Δ τὸν ἀριθμὸν 40$^{\mu}$ κ. ἑ. ο. Εἶτα προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ τὸ μῆκος ΑΚ, ὅπερ λαμβάνεται ἴσον πρὸς 0,$^{\mu}$01 καὶ καλεῖται *πτέρνα* τῆς κλίμακος, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς 10 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον ἔχον μῆκος 0$^{\mu}$,001 θὰ ἀντιστοιχῇ κατὰ τὴν ληφθεῖσαν κλίμακα εἰς 0$^{\mu}$,001$\times$2000=2$^{\mu}$. Ἀρχόμενοι δὲ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς ἀριστερὰ τοῦ 0 διαιρέσεως σημειοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς 2$^{\mu}$, 4$^{\mu}$, 6$^{\mu}$, 8$^{\mu}$, 10$^{\mu}$,....,20$^{\mu}$, ἢ ἁπλούστερον σημειοῦμεν μόνον 10$^{\mu}$ εἰς τὴν ὑπὸ μείζονος γραμμῆς παριστωμένην μεσαίαν διαίρεσιν καὶ 20$^{\mu}$ εἰς τὴν τελευταίαν.

Οὕτω κατασκευάζομεν καὶ πᾶσαν ἄλλην ἁπλῆν κλίμακα, ἥτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική.

329. *Χρῆσις τῆς ἁπλῆς κλίμακος.*

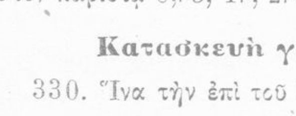
α^{ον}) Ἂν τὸ πραγματικὸν μῆκος εὐθείας γραμμῆς εἶναι 84$^{\mu}$, ζητῆται δὲ νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς ἁπλῆς κλίμακος $\frac{1}{2000}$ τὸ ἀντίστοιχον ἀνάλογον μῆκος, θέτομεν τὴν μὲν ἑτέραν τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 80$^{\mu}$, τὴν δὲ ἑτέραν ἐπὶ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τῆς πτέρνας, ἥτις παριστᾷ 4$^{\mu}$. Οὕτω δὲ ἡ τῶν δύο αἰχμῶν τοῦ διαβήτου ἀπόστασις θὰ παριστᾷ τὸ ζητούμενον μῆκος.

β^{ον}) Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐλήφθη διὰ τοῦ διαβήτου τὸ μῆκος εὐθείας τινὸς γραμμῆς ἐπί τινος διαγράμματος, κατηρτισμένου κατὰ τὴν κλίμακα $\frac{1}{2000}$, ζητεῖται δὲ διὰ τῆς ἁπλῆς κλίμακος, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος αὐτῆς, θέτομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑτέρου σκέλους τοῦ διαβήτου ἐπί τινος διαιρέσεως τῆς κλίμακος οὕτως, ὥστε ἡ τοῦ ἑτέρου σκέλους αἰχμὴ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πτέρνας· οὕτως, ἂν μὲν ἡ αἰχμὴ αὕτη πέσῃ ἐπί τινος διαιρέσεως τῆς πτέρνας, αἱ ὑπὸ τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου δεικνυόμενοι ἀριθμοὶ θὰ παριστῶσι τὸ ζητούμενον πραγματικὸν μῆκος· ἂν δὲ ἡ ἐπὶ τῆς πτέρνας κειμένη αἰχμὴ τοῦ διαβήτου πέσῃ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν διαιρέσεων αὐτῆς, τότε ἐκτιμῶμεν ἐξ ὄψεως πόσον εἶναι το ἐπὶ πλέον τμῆμα τῆς διαιρέσεως. Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, ἂν ἡ ἑτέρα τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου κεῖται ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 60μ, ἡ δὲ ἑτέρα ὑπερβαίνῃ τὴν γ΄ διαίρεσιν τῆς πτέρνας κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ μιᾶς διαιρέσεως αὐτῆς, τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος θὰ εἶναι 66μ,50.

Σημείωσις. Ὑπὸ τῶν ἐμπόρων πωλοῦνται μικροὶ κανόνες, συσυνήθως ξύλινοι, ἔχοντες μῆκος 0μ,20 περίπου, διῃρημένοι δὲ εἰς χιλιοστὰ τοῦ μέτρου καὶ καλούμενοι *διπλᾶ ὑποδεκάμετρα*. Τοιοῦτον κανόνα δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς ἁπλῆν κλίμακα, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ποῖον πραγματικὸν μῆκος παριστᾷ τὸ 1 χιλιοστὸν ἀριθμητικῆς τινος κλίμακος. Τοῦτο εὐκόλως προσδιορίζομεν, ἂν τὸν παρονομαστὴν τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 1000. Οὕτω κατὰ τὰς κλίμακας $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{2000}$, τὸ 1 χιλιοστὸν παριστᾷ 0,μ5, 1μ, 2μ.

Κατασκευὴ γωνιῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου.

330. Ἵνα τὴν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ σχηματιζομένην γωνίαν ΑΒΓ (Σχ. 21) ἀναπαραστήσωμεν ἐπὶ τοῦ διαγράμματος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δύο ἴσα περίπου τμήματα ΒΕ, ΒΖ, ἑνοῦντες δὲ τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῆς εὐθείας ΕΖ μετροῦμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΒΖΕ. Εἶτα σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον βζε, τὸ ἔχον τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας πρὸς τὰ ὑπὸ τὴν αὐ-



(Σχ. 21)

τὴν κλίμακα ἀνηγμένα μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΖΕ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ οὕτω σχηματισθὲν τρίγωνον βζε εἶνε ὅμοιον τῷ ΒΖΕ (249), ἕπεται ὅτι θὰ ἔχῃ τὴν γωνίαν αὐτοῦ εβζ ἴσην τῇ δεδομένῃ ΕΒΖ.

Μονάδες ἐπιφανείας.

331. Διὰ τοῦ Β. Διατάγματος τῆς 28ης Σεπτεμβρίου 1836, δι' οὗ εἰσήχθη παρ' ἡμῖν τὸ δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα, καθωρίσθησαν μονάδες ἐπιφανείας τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* (□ μ.) ἢ ὁ *βασιλικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς* καὶ τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, ὅπερ ἰσούμενον πρὸς 1000 τετρ. μέτρα εἶναι τετράγωνον, οὗ ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς $31^{\mu}62$, περίπου. Κατὰ δὲ τὰς συνήθεις τῶν ἐπιφανειῶν μετρήσεις, ἰδίᾳ δὲ τῶν γηπέδων, γίνεται ἀνεπισήμως χρῆσις τοῦ τετραγ. *τεκτονικοῦ πήχεως* (□ τεκτ. π.), ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου, τοῦ τεκτονικοῦ πήχεως ἰσουμένου πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

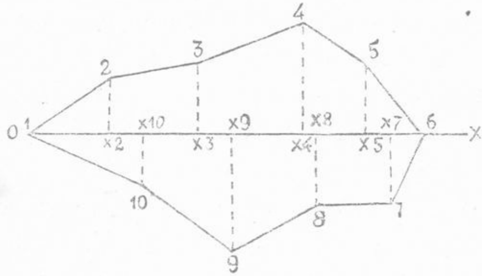
Ὑποδιαιρεῖται δὲ τὸ τετραγ. μέτρον εἰς 100^2 *τετραγ. ὑφεκατόμετρα* (□ ὑφεκ.) καὶ εἰς 1000^2 *τετραγ. ὑποχιλιόμετρα* (□ ὑποχ.), ἤτοι εἰς τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν ἴσην πρὸς 1 ὑφεκατόμετρον καὶ πρὸς 1 ὑποχιλιόμετρον. Ἔτι δὲ ἔχομεν τὸ *τετραγ. δεκάμετρον* $=100^{\tau.\mu}$, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 10^{μ}, τὸ *τετραγ. ἑκατόμετρον* $=10000^{\tau.\mu}$, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 100^{μ} καὶ τὸ *τετραγ. χιλιόμετρον* $=1000000^{\tau.\mu}$, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 1000^{μ}.

Ἁπλαῖ μέθοδοι καταμετρήσεως.

Ἐκθέτομεν νῦν ἁπλᾶς μεθόδους καταμετρήσεως διὰ τοῦ ὀρθογώνου καὶ τῆς ἁλύσεως μικρᾶς ἐδαφικῆς ἐκτάσεως καὶ ἀπεικονίσεως ταύτης ἐπὶ τοῦ χάρτου.

332. **Α΄. Διὰ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων.**

α΄. *Ἀναγραφὴ τοῦ σχήματος.* Ἵνα καταμετρήσωμεν πολύγωνον μικρᾶς ἐδαφικῆς ἐκτάσεως ἐμπηγνύομεν πασσάλους εἰς πάσας τούτου τὰς κορυφὰς καὶ ἀριθμοῦμεν αὐτοὺς (1), (2), (3)... (Σχ. 22) καθ' ὡρισμένην φοράν. Εἶτα δὲ ἐκλέγομεν τὴν μείζονα τοῦ σχήματος διαγώνιον (1) (6), ἣν καὶ *ἄξονα τετμημένων* καλοῦμεν, ἐφ' ἧς ἱστάμενοι δυνάμεθα νὰ βλέπωμεν πάσας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, διὰ δὲ τοῦ ὀρθογώνου ἄγομεν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα καθέτους, ὧν τοὺς πόδας σημειοῦμεν διὰ πασσάλων.



(Σχ. 22)

Ὅταν δὲ ταῦτα συντελεσθῶσι, μετροῦμεν, ἢ διὰ τῆς ἁλύσεως ἢ ἢ διὰ τῆς ταινίας, τὰς ἀπό τινος τοῦ ἄξονος σημείου Ο, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς ἀρχήν, ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων, ἤτοι τὰ τμήματα OX_2, OX_3..., ἅτινα καὶ *τετμημένας* καλοῦμεν, τὰ δὲ πρὸς ταῦτα ἀνάλογα μήκη μεταφέρομεν ἐξ ὄψεως ἢ ὑπὸ κλίμακα ἐπί τινος τοῦ αὐτοσχεδίου (*προχείρου διαγράμματος*) εὐθείας, ἐφ' ἧς λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ τῶν τετμημένων σημειόν τι, ὥστε ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις τῶν σημείων X_2, X_3,... νὰ ὁρισθῇ ὡς οἷόν τε ἀκριβέστατα.

Μετὰ δὲ τοῦτο μετροῦμεν καὶ τὰς ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἀχθείσας καθέτους $X_2(2)$, $X_3(3)$,..., ἃς καὶ *τεταγμένας* καλοῦμεν, τὰ δὲ τούτων ἀνάλογα μήκη μεταφέρομεν ἐξ ὄψεως ἢ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα ἐπὶ τοῦ αὐτοσχεδίου καὶ πρὸς τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος ΟΧ ἀντίστοιχα τοῦ ἐπιπέδου μέρη, ὥστε νὰ καθορισθῶσι καὶ αἱ πρὸς ἀλλήλας θέσεις τῶν τοῦ σχήματος κορυφῶν (2), (3),.... Ἔτι δὲ πρὸς *ἔλεγχον* τῆς ἐργασίας μετροῦμεν καὶ τὰς πλευρὰς (1)(2), (2)(3),... τοῦ πολυγώνου.

β'. Ἀπεικόνισις τοῦ σχήματος. Τὴν ἐπὶ χάρτου ἀκριβῆ τοῦ σχήματος καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισινποριζόμεθα, ἂν ἐργασθῶμεν μεθοδικῶς καὶ μετὰ τάξεως, διότι σφάλμα γενόμενον εἰς τὴν μεταφορὰν τοῦ μήκους πλευρᾶς ἢ τοῦ μεγέθους γωνίας ἐπιφέρει τὴν ἀλλοίωσιν τοῦ σχήματος, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀναγκάζει ἡμᾶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τὰς ἐργασίας. Τὴν δὲ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχεδίασιν ἀρχόμεθα ἀπὸ σημείου τοιούτου, ὥστε τὸ διάγραμμα τῆς ὑποτυπωτέας ἐκτάσεως νὰ περιλαμβάνηται ὅλον ἐπὶ τοῦ χάρτου τούτου.

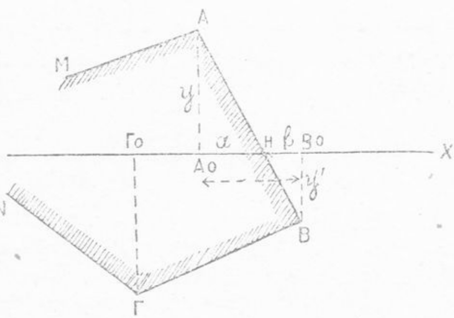
Πρὸς τοῦτο, ἐν τῷ μέσῳ περίπου τοῦ χάρτου, ἐφ' οὗ πρόκειται νὰ σχεδιάσωμεν, χαράσσομεν γραμμήν τινα OX (Σχ. 22), παριστῶσαν τὴν διαγώνιον, τὴν ληφθεῖσαν ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, ἐπ' αὐτῆς δέ, ἀφοῦ λάβωμεν σημεῖόν τι ὡς ἀρχὴν τῶν τετμημένων, μεταφέρομεν τὰ ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα, π. χ. $\frac{1}{1000}$, ἀντιστοιχοῦντα ἀνάλογα μήκη τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μετρηθεισῶν τετμημένων OX_2, OX_3,..... Εἶτα ἐκ τοῦ πέρατος ἑκάστης τῶν τετμημένων τούτων ὑψοῦμεν τὰς ἐπὶ τὴν OX καθέτους $X_2(2)$, $X_3(3)$,..., ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὰ ἑκατέρωθεν τῆς OX ἀντίστοιχα τοῦ ἐπιπέδου μέρη, καὶ νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα ἀνάλογα μήκη τῶν ἀντιστοίχων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μετρηθεισῶν καθέτων. Διὰ τῆς ἑνώσεως δὲ δι' εὐθειῶν τῶν ἄκρων τῶν καθέτων τούτων ἐπιτυγχάνεται τὸ ζητούμενον, ὅμοιον πρὸς τὸ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, σχῆμα. Εἶναι δὲ ἀνάγκη τὰ ἀνάλογα μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ σχήματος νὰ συμφωνῶσι πρὸς τὰ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἀντίστοιχα αὐτῶν μήκη, ἂν ἡ ἐργασία καὶ ἡ σχεδίασις ἐγένοντο ἄνευ λάθους.

γ'. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος. Διὰ τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα OX καθέτων, ὧν τὰ μήκη ἔστωσαν ψ_1, ψ_2, ψ_3..., χωρίζεται ἡ τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἀποτελεῖ τοῦ ὅλου σχήματος τὸ ἐμβαδόν, ὅπερ ὁρίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$2E=(\chi_2-\chi_1)(\psi_2+\psi_1)+(\chi_3-\chi_2)(\psi_3+\psi_2)+\dots$$
$$+\dots+(\chi_6-\chi_5)(\psi_6+\psi_5),$$

ἔνθα ἡ τετμημένη χ_1 καὶ αἱ τεταγμέναι ψ_1 καὶ ψ_6 (αἵτινες πᾶσαι ἔχουσι τιμὴν ἴσην τῷ 0) εἰσήχθησαν διὰ τὴν τοῦ τύπου συμμετρίαν.

Παρατήρησις α΄. Ὅταν τεταγμέναι τινὲς πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἄξονος κείμεναι εἶναι πολὺ μεγάλαι ὡς πρὸς τὰς τοῦ ἑτέρου μέρους καὶ ὑπερβαίνωσι τὰ πεντήκοντα μέτρα, ὁ ἄξων τῶν τετμημένων δύναται νὰ μὴ εἶναι διαγώνιος τοῦ σχήματος, ἀλλὰ νὰ τέμνῃ μίαν ἢ καὶ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, οἷον τὴν ΑΒ (Σχ. 23).



(Σχ. 23)

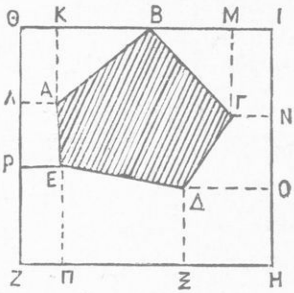
Παρατήρησις β΄. Ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς τύπος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς σχῆμα οἷον τὸ ἔναντι (Σχ. 23), ἐν ᾧ τὸ τρίγωνον BB_0H ἀποτελεῖ μέρος τοῦ τραπεζίου $\Gamma_0\Gamma BB_0$. Διότι ἂν καλέσωμεν χ, χ', χ'' τὰς τετμημένας τῶν σημείων Γ, Β, Η καὶ ψ, ψ', ψ'' τὰς τετμημένας τῶν αὐτῶν σημείων, (ἐξ ὧν ἡ ψ'' ἰσοῦται πρὸς μηδέν), θὰ ἔχωμεν

$$2\ \text{ἐμβ}\ \Gamma_0\Gamma BH\Gamma_0 = 2\ \text{ἐμβ.}\ \Gamma_0\Gamma BB_0 - 2\ \text{ἐμβ.}\ HB_0B$$
$$=(\chi'-\chi)(\psi+\psi')-(\chi'-\chi'')(\psi'+\psi''),$$

ἄρα $\quad 2\ \text{ἐμβ.}\ \Gamma\Gamma_0 BH\Gamma_0=(\chi'-\chi)(\psi+\psi')+(\chi''-\chi')(\psi'+\psi'').$

Παρατήρησις γ΄. Ὅταν ἡ μετρητέα ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ (Σχ.

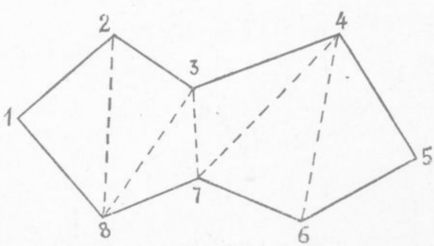
24) εἶναι ἢ δάσος ἢ ἕλος, ὥστε νὰ μὴ δύναται ἀμέσως νὰ μετρηθῇ, σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς εὐθύγραμμόν τι σχῆμα περιέχον αὐτήν, οἷον τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν τῆς μετρητέας ἐπιφανείας καταβιβάζομεν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου καθέτους, ἃς μετροῦμεν, μετροῦντες ἅμα καὶ τὰς μεταξὺ τῶν ποδῶν αὐτῶν ἀποστάσεις. Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχηματισθέντων ἐξωτερικῶν σχημάτων ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὅλου ὀρθογωνίου.



(Σχ. 24)

Β′. Διὰ τῶν διαγωνίων καὶ τῶν πλευρῶν.

333. α′. ***Ἀναγραφὴ τοῦ σχήματος.*** Ὅταν δὲν ἔχωμεν τὸ κατάλληλον ὄργανον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καθέτων, διαιροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος εἰς τρίγωνα ὡς οἷόν τε πλησιάζοντα νὰ εἶναι ἰσόπλευρα (Σχ. 25), καὶ ἀφοῦ μετρήσωμεν τὰς διαγωνίους (2)(8), (3)(8) ...... καὶ πάσας τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, μεταφέρομεν τὰ ἀνάλογα αὐτῶν μήκη ἐπὶ τοῦ προχείρου αὐτοσχεδίου.



(Σχ. 25)

β′. *Ἀπεικόνισις τοῦ σχήματος.* Πρὸς ἀπεικόνισιν τοῦ σχήματος κατασκευάζομεν διὰ τοῦ διαβήτου κατὰ σειρὰν ἕκαστον τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, αἵτινες εἶναι πρὸς τὰς μετρηθείσας ἀνάλογοι (Σχ. 25).

Ἵνα δὲ μὴ τὰ ἐκ τῆς κατασκευῆς προκύπτοντα ἀναπόφευκτα σφάλματα συσσωρεύωνται πάντα πρὸς τὸ ἕτερον τοῦ σχήματος μέρος, ἀρχόμεθα τῆς κατασκευῆς ἀπὸ τριγώνου κειμένου ἐν τῷ μέσῳ περίπου τοῦ σχήματος καὶ ἐξακολουθοῦμεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν τούτου μέχρι τέλους.

Πρὸς *ἔλεγχον* δὲ τῆς τε μετρήσεως καὶ τῆς σχεδιάσεως πρέπει, ἐκτὸς τῶν ἀπαραιτήτων πρὸς ἀπεικόνισιν τοῦ σχήματος γραμμῶν, νὰ μετρῶνται καὶ ἄλλαι γραμμαὶ π. χ. αἱ (7) (5), (7) (1),..., ὧν τὰ μήκη ἀνάγκη νὰ συμφωνῶσι πρὸς τὰ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀντίστοιχα.

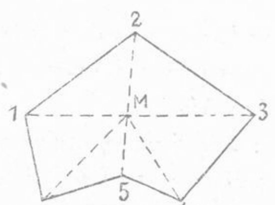
γ'. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ τὸ ὅλον σχῆμα ἀποτελεῖται ἐκ σειρᾶς συνεχομένων τριγώνων, ὧν αἱ πλευραὶ μόναι ἐμετρήθησαν, ἂν ὑπολογίσωμεν ἑκάστου τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου (280)

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

καὶ ἀθροίσωμεν αὐτά, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου σχήματος.

Γ'. Διὰ τῶν ἀκτίνων.

334. Ὅταν τὸ μετρητέον ἔδαφος περιορίζηται ὑπὸ πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἧς αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐγγὺς ἀλλήλων (Σχ. 26), λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ σχήματος κατάλληλόν τι σημεῖον καὶ εἶτα μετροῦμεν τοῦ σημείου τούτου τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν (1), (2)... τοῦ σχήματος καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος.



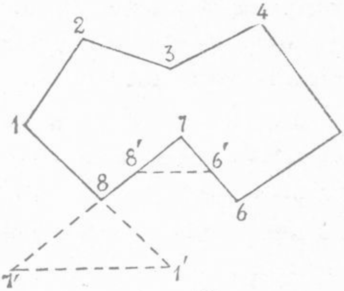
(Σχ. 26)

Οὕτω δὲ ἡ τοῦ σχήματος σχεδίασις καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ θὰ γίνωσιν ὡς ἀνωτέρω.

Δ'. Διὰ τῆς ὁδεύσεως.

* 335. Ὅταν τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πρὸς καταμέτρησιν ἐπιφανείας

εἶναι ἀπρόσιτον (Σχ. 27), καταμετροῦμεν μόνον τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας προσδιορίζομεν ὧδε.



(Σχ. 27)

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν π.χ. τῆς γωνίας (8), προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς (1)(8), (7)(8) καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς (8) μήκη ἴσα, ἢ ἀνάλογα πρὸς τὰ μεγέθη τῶν πλευρῶν, (8) (1')=(8) (7')=15 ἢ 20 μέτρα περίπου, εἶτα δὲ μετροῦμεν καὶ τὴν εὐθεῖαν (1') (7')· οὕτω, γνωρίζοντες πάσας τὰς πλευρὰς τοῦ ἐξωτερικοῦ τριγώνου (1') (7') (8), δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν τοῦ δεδομένου σχήματος γωνίαν (1') (8) (7')=(1) (8) (7).

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς γωνίας (7) ἥτις εἰσέχει εἰς τὸ σχῆμα.

Ἡ τοιαύτη μέθοδος καλεῖται *μέθοδος ὁδεύσεως.*

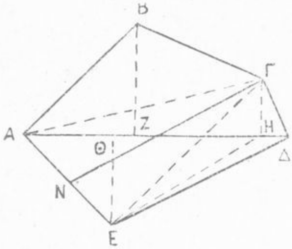
Περὶ διανομῆς ἐδαφικῶν ἐκτάσεων.

336. Σχετικὸν πρὸς τὴν χωρομετρίαν θεωρεῖται καὶ τὸ ζήτημα τῆς ὑποδιαιρέσεως ἐδαφικῶν ἐκτάσεων εἰς μέρη ἴσα ἢ ἄνισα, ἢ χάριν γεωμετρικῶν ἐργασιῶν ἢ ἕνεκα ἄλλων λόγων.

Ζήτημα 1ον. Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΖΕ ἤχθη ἡ μείζων διαγώνιος ΑΔ καὶ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΒΖ, ΓΗ, ΕΘ. Εὑρέθη δὲ ΑΖ=45μ,20, ΖΒ=32μ,60, ΖΗ=25μ,30, ΗΓ=23μ,50, ΗΔ=18μ,50, ΘΔ=47μ,20, ΕΘ=52μ,30 καὶ ΑΘ=41μ,80.

Ζητεῖται δὲ 1ον) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου καὶ 2ον) νὰ μερισθῇ ἡ ἐπιφάνεια εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας ἠγμένης ἀπὸ τοῦ Γ.

Πρὸς τοῦτο, διὰ τὸ 1ον) ὑπολογίζομεν διαδοχικῶς τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαφόρων αὐτοῦ μερῶν καὶ εἶτα ἀθροίζοντες ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ ἰσοῦται πρὸς 3991τμ,15.



(Σχ. 28)

Διὰ δὲ τὸ 2ον) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ χωρισμοῦ θὰ διέλθῃ κάτωθεν τῆς ΓΑ, διότι τὸ τρίγωνον ΓΒΑ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ τετραπλεύρου ΔΓΒΑ καὶ τοῦ τριγώνου ΔΓΑ· κατ' ἀκολουθίαν δὲ ἰσοῦται πρὸς

1663τμ,80—1045τμ,75=618τμ,05.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐδαφικῆς ἐκτάσεως ἰσοῦται πρὸς 1995τμ,575, ἕπεται ὅτι ἐλλείπουσιν ἔτι ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΒΑ 1377τμ,525, ὅπως τοῦτο γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης ἐδαφικῆς ἐκτάσεως.

Νῦν πρέπει νὰ καθορισθῇ ἂν ἡ γραμμὴ διαιρέσεως συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΑΕ. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου ΓΑΕ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν ΑΘΓ+ΑΕΘ+ΓΘΕ· ἂν δὲ ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος ΑΕΘ+ΓΘΕ θέσωμεν ΑΕΘ+ΘΕΗ=ΑΕΗ θὰ ἔχωμεν

ΓΑΕ=ΑΘΓ+ΑΕΗ=491,15+1843,575=2334τμ,725.

Λοιπὸν τὸ σχῆμα ΓΒΑΕ περιλαμβάνει 2952τμ,775 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τοῦ πολυγώνου κατὰ 957τμ,20. Τὴν ἐπιφάνειαν ἄρα ταύτην πρέπει ἡ γραμμὴ διαιρέσεως ΓΝ νὰ ἀποκόψῃ ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΑΕ.

Λοιπὸν πρέπει νὰ ἀχθῇ αὕτη οὕτως, ὥστε νὰ διαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΓΑΕ εἰς δύο μέρη ΝΕΓ καὶ ΑΝΓ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς 957τμ,2 καὶ 1377τμ,525. Οὕτως ἡ γραμμὴ χωρισμοῦ ΓΝ ὀφείλει νὰ διαιρέσῃ τὴν ΑΕ εἰς δύο μέρη, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοί. Ἀλλὰ $(\text{ΑΕ})=\sqrt{(\text{ΑΘ})^2+(\text{ΕΘ})^2}=66^{\mu},95$. Ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως Ν δέον νὰ εὑρίσκηται εἰς ἀπόστασιν 27μ,49 ἀπὸ τοῦ σημείου Ε.

Ζήτημα 2ον. Ποιῆσαι τὸν αὐτὸν μερισμὸν δι' εὐθείας ἀγομένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ε.

ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΙΣ

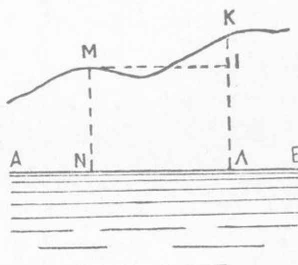
337. *Ἡ χωροστάθμησις σκοπεῖ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὕψους τῶν κυριωτάτων τοῦ ἐδάφους σημείων ἀπὸ ἐπιφανείας καλουμένης χωροσταθμικῆς ἐπιφανείας.*

Χωροσταθμικαὶ ἐπιφάνειαι ὑπάρχουσιν ἄπειροι, ὧν *κυριωτάτη εἶναι ἡ τῆς θαλάσσης ἐπιφάνεια.* Ὅταν ἄρα λέγωμεν ὕψος ἢ *ἀπόλυτον ὕψος* σημείου τινὸς τοῦ ἐδάφους νοοῦμεν τὴν *κατακόρυφον* αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἀπόστασιν.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ τὸ ὕψος τοῦτο παριστῶν καλεῖται *ὑψοδείκτης.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἡ χωροσταθμικὴ ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ΑΒ (Σχ. 29), ὕψη τῶν σημείων Μ καὶ Κ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΝΜ καὶ ΛΚ.

Ἡ *διαφορὰ ὕψους* δύο σημείων Μ καὶ Κ μετρεῖται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν σημείων τούτων, μεταξὺ τοῦ σημείου τούτου καὶ τῆς χωροσταθμικῆς ἐπιφανείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ἑτέρου.



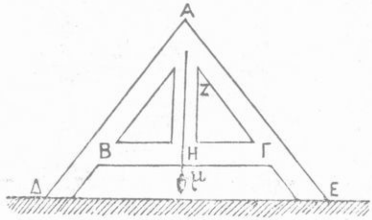
(Σχ. 29)

Τὴν περιωρισμένης ἐκτάσεως χωροσταθμικὴν ἐπιφάνειαν, κυρτὴν καὶ ταύτην οὖσαν, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ἐπίπεδον *(ὁριζόντιον)* ἐπιφάνειαν.

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τοὺς ὑψοδείκτας τῶν σημείων ἐκτάσεώς τινος πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν ὑψοδείκτην ἑνὸς ταύτης σημείου καὶ εἶτα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς διαφορὰς τῶν ὑψῶν ἑκάστου τῶν ἄλλων σημείων ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου.

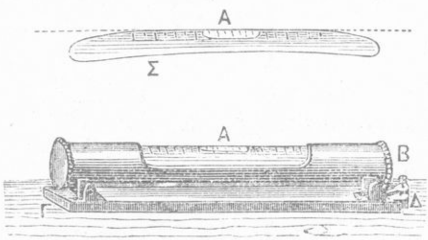
338. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους σημείων ἐκτάσεώς τινος ποιούμεθα χρῆσιν διαφόρων ὀργάνων συμφώνως πρὸς τὴν ἐπιζητουμένην ἀκρίβειαν. Ἐνταῦθα θὰ περιγράψωμεν ἁπλᾶ τινα ὄργανα, ὧν γίνεται χρῆσις εἰς τὰς εὐκολωτέρας τοιαύτας ἐργασίας.

1ον. *Τὸ ἀλφάδιον. Τὸ ἀλφάδιον ἢ ἡ στάθμη τῶν τεκτόνων* (Σχ. 30) ἀποτελεῖται ἐκ ξυλίνης γωνίας ΔΑΕ συνήθως ὀρθῆς, ἧς τὰ δύο σκέλη, ἰσομήκη ὄντα, ἑνοῦνται διὰ διάπηγος ΒΓ ἐπίσης ξυλίνου καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας. Ἐκ τῆς κορυφῆς δὲ Α κρέμαται νῆμα Αμ, εἰς οὗ τὸ ἄκρον εἶναι δεδεμένον βαρύ τι σῶμα, εἰς τὸ μέσον δὲ Η τοῦ διάπηγος ὑπάρχει λεπτὴ χαραγή, ἧς ἔμπροσθεν πρέπει νὰ σταματήσῃ τὸ νῆμα Αμ, ὅταν οἱ πόδες Δ,Ε κεῖνται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.



(Σχ. 30)

2ον Τὸν *φυσαλιδωτὸν χωροβάτην* ἢ *τὴν ἀεροστάθμην*. Τὸ ὄργανον τοῦτο (Σχ. 31), σύγκειται ἐκ μικροῦ κυλινδρικοῦ ὑαλίνου σωλῆνος Σ, πεπληρωμένου δι' οἰνοπνεύματος ἢ αἰθέρος, σχηματίζοντος φυσαλίδα, ἥτις, ἐλαφροτέρα οὖσα, καταλαμβάνει ἀεὶ τὸ ὕψιστον τοῦ σωλῆνος μέρος Α.



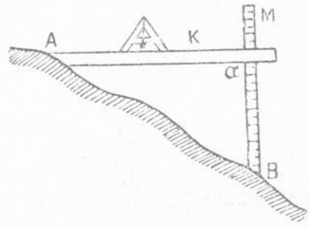
(Σχ. 31)

Ὁ ὑάλινος σωλὴν ἐγκλείεται σταθερῶς ἐντὸς ἑτέρου κυλινδρικοῦ μεταλλικοῦ σωλῆνος Β, φέροντος πρὸς τὰ ἄνω μικρὸν ἄνοιγμα Α, ἐπιτρέπον τὴν θέαν τῆς κινήσεως τῆς φυσαλίδος, καὶ προσηρμοσμένου ἐπὶ ἐπιπέδου μεταλλικῆς βάσεως ΓΔ. Τὸ ὄργανον εἶναι κατεσκευασμένον οὕτως ὥστε ἡ φυσαλὶς καταλαμβάνει μέρος τι τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος, περιοριζόμενον ὑπὸ δύο χαραγῶν, ὅταν ἡ βάσις ΓΔ τοῦ ὀργάνου κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου *ὁριζοντίου*.

Προσδιορισμὸς τῆς διαφορᾶς ὕψους δύο σημείων.

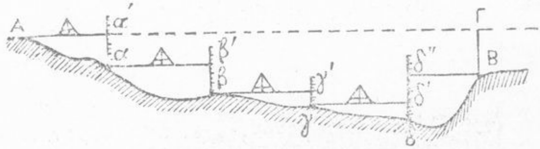
339. 1ον) Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν διαφορὰν ὕψους τῶν σημείων Α, Β, ἅτινα ἐλάχιστον ἀλλήλων ἀπέχουσι, π. χ. 4 μέτρα (Σχ. 32), θέ-

τομεν ἐπὶ τοῦ Α τὸ ἄκρον εὐθυγράμμου κανόνος Κ, ἐξ ὄψεως διατιθεμένου ὁριζοντίως καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, ἐπ' αὐτοῦ δὲ πάλιν θέτομεν τὸ ἀλφάδιον ἢ τὸν χωροβάτην· εἶτα ἀνυψοῦμεν ἢ καταβιβάζομεν τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ κανόνος μέχρις οὗ τὸ ἐπ' αὐτοῦ ὄργανον καταδείξῃ ὅτι οὗτος ἐγένετο ὁριζόντιος. Δι' ἑτέρου κανόνος Μ, διῃρημένου εἰς μέτρα καὶ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου καὶ ὑψουμένου κατακορύφως ἐπὶ τοῦ σημείου Β, μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν Βα, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορὰ τοῦ ὕψους τῶν σημείων Α καὶ Β.



(Σχ. 32)

2ον) Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τὴν διαφορὰν ὕψους τῶν δύο σημείων Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις εἶναι μείζων τοῦ μήκους τοῦ κανόνος Κ (Σχ. 33), ἐργαζόμεθα ὁμοίως διὰ διαδοχικῶν ὁριζοντίων μεταφορῶν τοῦ κανόνος.



(Σχ. 33)

Ἐκλέγομεν μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ἄλλα διάμεσα σημεῖα, ὡς τὰ α, β, γ, δ, ὀλιγώτερον τοῦ μήκους τοῦ κανόνος Κ ἀλλήλων ἀπέχοντα, καὶ ὁρίζομεν ὡς ἀνωτέρω τὰς διαφορὰς τοῦ ὕψους τῶν διαδοχικῶν τούτων σημείων· ἤτοι τὴν (αά) τῶν Α καὶ α, τὴν (ββ') τῶν α καὶ β, τὴν (γγ') τῶν β καὶ γ, τὴν (δδ') τῶν γ, δ καὶ τὴν (δδ'') τῶν δ, Β. Οὕτως ἡ μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Α (Σχ. 33) διαφορὰ ὕψους ἰσοῦται πρὸς (αα')+(ββ')+(γγ')+(δδ')−(δδ''), εἴτε πρὸς (αα')+(ββ')+(γγ')+(δ''δ), ἂν τὴν (δ''δ) θεωρήσωμεν ὡς ἀρνητικήν. Τῶν σημείων ἄρα Α καὶ Β ἡ τοῦ ὕψους ὁλικὴ διαφορὰ ΒΓ ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν διαδοχικῶν τούτων μερικῶν διαφορῶν ὕψους.

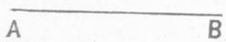
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

Περὶ τμημάτων εὐθείας.

Ὁρισμοί.

340. *Τμῆμα εὐθύγραμμον* καλεῖται μέρος εὐθείας περατούμενον εἰς δύο σημεῖα καὶ θεωρούμενον γραφὲν ὑπὸ σημείου κινηθέντος ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν περάτων τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἕτερον.

Ἐν παντὶ ἄρα τμήματι διακρίνονται τρία τινά· ἡ *ἀρχή*, τὸ *τέλος* καὶ ἡ φορὰ ἢ ἡ *διεύθυνσις* καθ' ἣν τὸ τμῆμα ἐγράφη. Ὑπάρχουσιν ἄρα δύο τμήματα ἔχοντα πέρατα τὰ σημεῖα Α καὶ Β· τούτων τὸ ἕτερον, ὑπὸ τοῦ συμβόλου ΑΒ παριστάμενον, ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ Α, τέλος δὲ τὸ Β, φορὰν δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, τὸ δὲ ἕτερον, ὑπὸ τοῦ ΒΑ παριστάμενον, ἔχει ἀρχὴν μὲν τὸ Β, τέλος δὲ τὸ Α, φορὰν δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.



341. Δύο τμήματα, οἷα τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ, ὧν δηλαδὴ ἑκάτερον ἔχει ἀρχὴν τὸ πέρας τοῦ ἑτέρου, λέγονται *ἀντίθετα*.

342. Δύο τμήματα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἂν μὲν τὴν αὐτὴν φορὰν ἔχωσι, λέγονται *ὁμόρροπα*, ἂν δὲ ἀντίθετον, λέγονται *ἀντίρροπα*.

Σημείωσις. Ἐν τοῖς ἑξῆς, χάριν συντομίας, λέγοντες τμήματα *παράλληλα* θὰ ἐννοῶμεν παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἄρα καὶ τὰ κείμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

343. Δύο τμήματα θεωρούμενα κατά τινα τάξιν καλοῦνται *διαδοχικά*, ἂν τὸ τέλος τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου.

344. Δύο τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ παραλλήλων εὐθειῶν τμήματα, ἂν μὲν εἶναι ἐφαρμόσιμα καὶ ὁμόρροπα λέγονται *ὁμορρόπως ἴσα* (ἢ ἁπλῶς *ἴσα*), ἂν δὲ εἶναι ἐφαρμόσιμα καὶ ἀντίρροπα λέγονται *ἀντιρρόπως ἴσα*.

340. Τὸν ὁρισμὸν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος
Τὰς ἰδιότητας " "
341. Τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀντιθέτων τμημάτων
342. " " ὁμορρόπων καὶ ἀντιρρόπων "
343. " " διαδοχικῶν "

345. Παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων *γεωμετρικὸν ἄθροισμα* λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ἔχον ἀρχὴν μὲν τὴν τοῦ πρώτου τμήματος ἀρχήν, τέλος δὲ τὸ τοῦ τελευταίου τμήματος τέλος, ἂν τὰ τμήματα ἐπὶ παραλλήλου εὐθείας *διαδοχικῶς* τεθέντα τηρῶσι τὸ ἑαυτῶν μέγεθος καὶ τὴν φοράν.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἐπὶ εὐθείας δοθῶσιν ὁπωσδήποτε πλείονα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ,..., γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ, εἶναι τὸ τμῆμα ΑΓ, γεωμετρικὸν δὲ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ εἶναι τὸ τμῆμα ΑΔ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Γινόμενον τμήματος ΑΒ *ἐπὶ ἀριθμὸν ἀκέραιον* μ λέγεται τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα μ τμημάτων ὁμορρόπως ἴσων τῷ ΑΒ. Τὸ νέον δὲ τοῦτο τμῆμα εἶναι ὁμόρροπον τῷ ἀρχικῷ.

Ἔτι γενικώτερον ὀνομάζομεν *γινόμενον* τμήματος ΑΒ *ἐπὶ ὁντιναδήποτε θετικὸν ἀριθμὸν* α, τὸ τμῆμα τὸ ὁμόρροπον τῷ ΑΒ καὶ ἐφαρμόσιμον πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒ.α (καθὰ τοῦτο ὡρίσθη ἐν ἐδ. 195).

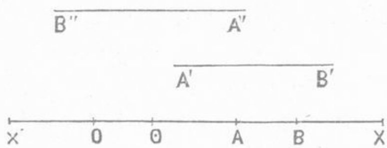
Τέλος *γινόμενον τμήματος ΑΒ ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν*, α καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου τμήματος ΒΑ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν −α· εἶναι δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο τμῆμα ἀντίρροπον τῷ ΑΒ.

346. *Λόγος δύο τμημάτων* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *παραλλήλων* (ἢ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας) λέγεται ὁ ἀριθμὸς α, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ τμῆμα ΑΒ, δίδει γινόμενον ΑΒ. α τμῆμα ὁμορρόπως ἴσον τῷ ΓΔ. Ἡ *ἀπόλυτος τιμὴ* τοῦ οὕτως ὁριζομένου λόγου δύο τμημάτων παραλλήλων, συμπίπτει πρὸς τὸν λόγον τῶν τμημάτων τούτων, καθ' ἃ οὗτος ὡρίσθη ἐν ἐδ. 198. Ἐνταῦθα ὅμως ὁ λόγος θεωρεῖται μετὰ σημείου. *Καὶ θετικὸς μὲν ἀριθμὸς εἶναι ὁ λόγος δύο τμημάτων παραλλήλων, ἂν τὰ τμήματα εἶναι ὁμόρροπα, ἀρνητικὸς δέ, ἂν εἶναι ἀντίρροπα.*

Ὁ λόγος τοῦ τμήματος ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ παρίσταται καὶ ἐνταῦθα διὰ τοῦ συμβόλου $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}$. Ὥστε, ἂν ἔχωμεν $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}=\alpha$, θὰ ἔχωμεν καὶ ΓΔ=ΑΒ.α καὶ ἀντιστρόφως. Ὁ λόγος $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}$ καλεῖται καὶ *μῆκος* τοῦ τμήματος ΓΔ μετρηθέντος διὰ τοῦ ΑΒ.

345. Τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων
Τὸ γινόμενον τμήματος ἀπὶ ἀκέραιον + ἢ −
346. Τὸν λόγον δύο τμημάτων παραλλήλων

347. Ἵνα εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ἐπὶ δεδομένης εὐθείας Χ'Χ, ἢ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν Χ'Χ, κειμένου, τὸ *μῆκος* δι' ἀριθμοῦ παραστήσωμεν, δέον προηγουμένως νὰ λάβωμεν κατὰ βούλησιν ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας τμῆμά τι ΟΘ ὡς μονάδα, ὅτε ὁ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ παριστῶν ἀριθμὸς $(\mathrm{AB})=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{O\Theta}}$ ἔσται θετικὸς μέν, ἂν τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι τῷ τμήματι ΟΘ ὁμόρροπον, ἀρνητικὸς δέ, ἂν εἶναι ἀντίρροπον.



Συνάγεται ἄρα 1ον) ὅτι εἰς πᾶν τῆς εὐθείας Χ'Χ ἢ τῇ εὐθείᾳ Χ'Χ παράλληλον τμῆμα θὰ ἀντιστοιχῇ εἷς ἀριθμὸς πραγματικός (θετικός, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν), καὶ τἀνάπαλιν, εἰς δοθέντα πραγματικὸν ἀριθμόν, θὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένου μεγέθους καὶ φορᾶς τμῆμα, οὗ ἡ θέσις ὁρίζεται, ἂν ἡ τούτου ἀρχὴ ὁρισθῇ· καὶ 2ον) ὅτι τὰ μὲν ὁμορρόπως ἴσα τμήματα θὰ παριστῶνται ὑπὸ ἀριθμῶν ἴσων, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ὑπὸ ἀριθμῶν ἀντιθέτων· καὶ τἀνάπαλιν. Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν

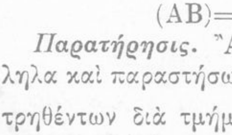
$$(\mathrm{AB})=-(\mathrm{BA}) \text{ καὶ } (\mathrm{AB})+(\mathrm{BA})=0.$$

Παρατήρησις. Ἂν ἔχωμεν δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλα καὶ παραστήσωμεν διὰ (ΑΒ) καὶ (ΓΔ) τὰ μήκη αὐτῶν, μετρηθέντων διὰ τμήματος παραλλήλου ΟΘ, ἡ σχέσις $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB}}=\frac{(\Gamma\Delta)}{(\mathrm{AB})}$ ἀληθεύει οὐ μόνον κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὸ σημεῖον.

Θεώρημα.

348. *Τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος δύο τμημάτων κειμένων διαδοχικῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἰσοῦται τῷ ἀλγεβρικῷ ἀθροίσματι τῶν μηκῶν τῶν δοθέντων τμημάτων.*

Ἔστωσαν τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τριῶν σημείων Α,Β,Γ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐχόντων ἡντιναδήποτε πρὸς ἄλληλα θέσιν· λέγω ὅτι περὶ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν θὰ ἀληθεύῃ πάντοτε ἡ ἰσότης (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).

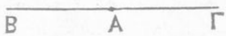


Διότι, ἂν μὲν τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Γ, τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ θὰ εἶναι ὁμόρροπα, πρόδηλον ἄρα εἶναι ὅτι θὰ ἔχωμεν (ΑΒ)+(ΒΓ)=(ΑΓ).

348 Μῆκος τοῦ γεωμ- ἀθροίσμ- δύο διαδοχικῶν τμημάτων

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Α κεῖται μεταξὺ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ θὰ ἔχωμεν

$$(\mathrm{BA})+(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})$$

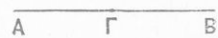


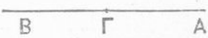
ἢ $(\mathrm{AB})+(\mathrm{BA})+(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})$,

ἤτοι $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})$.

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Β, θὰ ἔχωμεν $(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{\Gamma B})=(\mathrm{AB})$ ἢ

$(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{\Gamma B})+(\mathrm{B\Gamma})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})$, ὅθεν $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})$.





Λοιπὸν ἡ σχέσις $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})$ ἀεὶ ἀληθεύει, ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τῶν σημείων Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας θέσις.

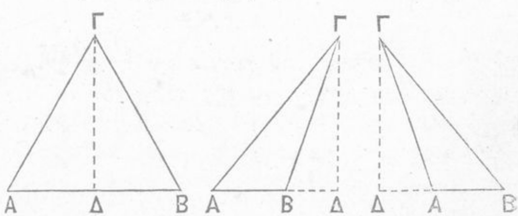
Παρατ. Ι. Ὁμοία πρότασις ἀληθεύει περὶ τμημάτων ἁπλῶς παραλλήλων δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Παρατ. ΙΙ. Ἐκ τῆς ἄνω ἀποδειχθείσης προτάσεως συνάγομεν ὅτι ἡ σχέσις $\mathrm{O\Theta}.(\alpha+\beta)=\mathrm{O\Theta}.\alpha+\mathrm{O\Theta}.\beta$ (βλ. ἐδ. 195) ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ πολλαπλασιασταὶ α καὶ β δὲν εἶναι ἀμφότεροι θετικοί.

Γενικότης διαφόρων τύπων λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ κανόνος περὶ σημείων.

349. Διὰ τῆς παραδοχῆς θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν μηκῶν δυνάμεθα νὰ περιλαμβάνωμεν ἐν μιᾷ προτάσει ἢ ἐν ἑνὶ τύπῳ θεωρήματα, ὧν ἄλλως ἡ διατύπωσις θὰ ἦτο διάφορος.

Παραδείγματα.



1ον) Ἡτισδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ γωνία Α τριγώνου τινὸς ΑΒΓ, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἐπὶ τῆς ΑΒ *προβολὴν* ΑΔ τῆς ΑΓ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$(\mathrm{B\Gamma})^2=(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2-2(\mathrm{AB})\,(\mathrm{A\Delta}), \quad (1)$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῶν πάντοτε ἀληθευουσῶν σχέσεων

1 $(\mathrm{B\Gamma})^2=(\mathrm{B\Delta})^2+(\mathrm{\Delta\Gamma})^2,\ (\mathrm{A\Delta})^2+(\mathrm{\Delta\Gamma})^2=(\mathrm{A\Gamma})^2$

καὶ (348) $(\mathrm{B\Delta})=(\mathrm{BA})+(\mathrm{A\Delta})$.

1 $(B\Delta)^2 = BA^2 + 2BA\cdot A\Delta + A\Delta^2$
$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2$
$+ = BA^2 + A\Gamma^2 + 2BA\cdot A\Delta$
$A\Gamma^2 - 2AB\cdot A\Delta$

Εἶναι δὲ τὸ ἐν τῷ τύπῳ (1) γινόμενον (ΑΒ) (ΑΔ) θετικόν, ἀρνητικὸν ἢ μηδὲν, καθ' ὅσον ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ἢ ὀρθὴ (παράβ. ἐδ. 221 καὶ 222).

2ον) Μεταξὺ τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τεσσάρων ὡντινωνδήποτε σημείων Α, Β, Γ, Δ εὐθείας, ὑπάρχει πάντοτε ἡ σχέσις

$$(\mathrm{B\Gamma})\,(\mathrm{A\Delta})+(\mathrm{\Gamma A})\,(\mathrm{B\Delta})+(\mathrm{AB})\,(\mathrm{\Gamma\Delta})=0,$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (348)

$$(\mathrm{B\Gamma})=(\mathrm{B\Delta})-(\mathrm{\Gamma\Delta}),\ (\mathrm{\Gamma A})=(\mathrm{\Gamma\Delta})-(\mathrm{A\Delta}),\ (\mathrm{AB})=(\mathrm{A\Delta})-(\mathrm{B\Delta}).$$

+ 3ον) *Θεώρημα τοῦ Stewart.* Αἱ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις τριῶν σημείων Α, Β, Γ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐχόντων ἡντιναδήποτε πρὸς ἄλληλα θέσιν καὶ σημείου τινὸς Δ οἱουδήποτε συνδέονται πάντοτε ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{A\Delta})^2+(\mathrm{\Gamma A})\,(\mathrm{B\Delta})^2+(\mathrm{AB})(\mathrm{\Gamma\Delta})^2+(\cancel{\mathrm{AB}})^{4A}\,(\mathrm{B\Gamma})\,(\mathrm{\Gamma A})=0.$$

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ εὐθείας.

350. ***Ἕκαστον σημεῖον δεδομένης εὐθείας δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν δι' ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀντιστρόφως.***

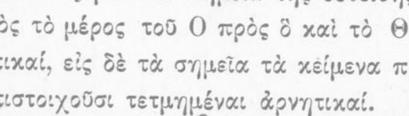
Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα τῆς δεδομένης εὐθείας καὶ ἔστωσαν τὸ Ο καὶ τὸ Θ. Τότε εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $(\mathrm{OM})=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O\Theta}}$, ὁ παριστῶν

X′ Ο Θ Μ X

τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΟΜ μετρηθέντος διὰ τοῦ ΟΘ ὡς μονάδος. Καλεῖται δὲ τὸ μὲν τμῆμα ΟΜ, ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς (ΟΜ), *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ, τὸ δὲ σταθερὸν σημεῖον Ο, ἀφ' οὗ τὰ τμήματα ΟΜ μετροῦνται, *ἀρχὴ τῶν τετμημένων*.

Καὶ εἰς μὲν τὰ σημεῖα τῆς δοθείσης εὐθείας ΟΧ τὰ κείμενα πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς ὃ καὶ τὸ Θ ἀντιστοιχοῦσι τετμημέναι θετικαί, εἰς δὲ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ Ο ἀντιστοιχοῦσι τετμημέναι ἀρνητικαί.

+ 3ον



(4) βδ+δγ = βγ
βγ = βδ−γδ
γδ+δα = γα
γδ = γδ−αδ

(4) θεωρ...

τα 2ε μέλη μετασχηματιζόμενα και προστιθέμενα μηδενίζονται ...
έκαστος προσθετέος είναι μηδέν. βδ.αδ.(αδ−βδ)+αδ.γδ(γδ−αδ)+
γδ.βδ(βδ−γδ)+αβ.βγ.γα=0

Ἰδιαιτέρως δὲ τοῦ μὲν σημείου Ο ἡ τετμημένη ἰσοῦται πρὸς 0, τοῦ δὲ Θ ἡ τετμημένη ἰσοῦται πρὸς τὴν θετικὴν μονάδα.

Οὐ μόνον δὲ δεδομένου σημείου τῆς εὐθείας ΟΧ ἡ τετμημένη εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἂν δηλαδὴ δοθῇ πραγματικός τις ἀριθμὸς α, θὰ ὑπάρχῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ ἓν σημεῖον Μ καὶ μόνον ἓν ἔχον τετμημένην ἴσην τῷ ἀριθμῷ τούτῳ· τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο κεῖται πρὸς τὸ μέρος μὲν τοῦ Ο πρὸς ὃ καὶ τὸ Θ, ἂν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, πρὸς τὸ ἕτερον δὲ μέρος, ἂν ὁ α εἶναι ἀρνητικός.

Θεώρημα.

παράστασις τμήματος ἐπὶ ἄξον

351. *Ἂν ἐπὶ ἄξονος ΟΧ ληφθῇ τμῆμά τι ΑΒ, δύναται ὁ τὸ τμῆμα τοῦτο παριστῶν ἀριθμὸς νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος.*

Διότι ἐκ τῆς σχέσεως (ΑΒ)=(ΑΟ)+(ΟΒ) (348), ἕπεται ὅτι

$$(AB)=-(OA)+(OB).$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη, ἂν παραστήσωμεν τὴν μὲν τετμημένην τοῦ Α διὰ τοῦ α, τὴν δὲ τοῦ Β διὰ τοῦ β, γράφεται ὧδε

$$(AB)=\beta-\alpha.$$

Λοιπὸν τὸ μῆκος τμήματος ΑΒ κειμένου ἐπὶ ἄξονος ΟΧ εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τῆς τοῦ τέλους αὐτοῦ τετμημένης ἀφαιρεθῇ ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς.

Ἐφαρμογαί.

1) *Παντὸς τμήματος M_1M_2 κειμένου ἐπὶ ἄξονος ΟΧ ἡ τοῦ μέσου Μ τετμημένη χ ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν τετμημένων χ_1 καὶ χ_2 τῶν τοῦ τμήματος ἄκρων M_1 καὶ M_2.*

Διότι, ἐπειδὴ $(M_1M)=(MM_2)$, τὸ δὲ $(AM_1)=\chi-\chi_1$ (351), τὸ δὲ $(M_2B)=\chi_2-\chi$, θὰ ἔχωμεν $\chi-\chi_1=\chi_2-\chi$· ὅθεν $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$.

2) Ἐὰν τῶν ἄκρων M_1 καὶ M_2 τοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ κειμένου τμήματος M_1M_2 αἱ τετμημέναι εἶναι χ_1 καὶ χ_2, ἡ τετμημένη χ τοῦ

αα=0
βγ.(αδ)² = (βδ).(αδ)² − (γδ)(αδ)² } ἐξ ὧν διὰ τῆς
γα.(βδ)² = (γδ)(βδ)² − (αδ)(βδ)² } προσθέσεως ἐξα...
αβ(γδ)² = (αδ)(γδ)² − (βδ)(γδ)² } γενικῶς ...

σημείου Μ, τοῦ διαιροῦντος τὸ τμῆμα M_1M_2 κατὰ δοθέντα λόγον λ. οὕτω δηλ. ὥστε $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, εἶναι $\chi=\frac{\chi_1+\lambda\chi_2}{1+\lambda}$.

3) Δεδομένων ἐπ' εὐθείας τῶν σημείων $A_1, A_2,\dots A_\mu$, τῶν ἐχόντων τετμημένας τὰς $(OA_1)=\alpha_1$, $(OA_2)=\alpha_2,\dots$, $(OA_\mu)=\alpha_\mu$, ζητεῖται ἡ τετμημένη χ σημείου τινὸς Α τοιούτου, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1(AA_1)+\lambda_2(AA)_2+\dots+\lambda_\mu(AA_\mu)=0. \qquad (1)$$

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ $(AA_1)=\alpha_1-\chi$, $(AA_2)=\alpha_2-\chi,\dots\dots\dots$, $(AA_\mu)=\alpha_\mu-\chi$, ἂν ἐν τῇ ἰσότητι (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν (AA_1), $(AA_2),\dots$ τὰ ἴσα αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

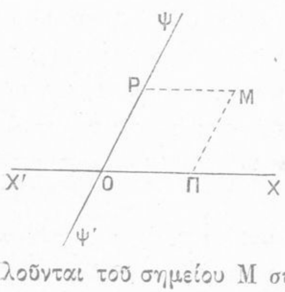
$$\lambda_1(\alpha_1-\chi)+\lambda_2(\alpha_2-\chi)+\dots+\lambda_\mu(\alpha_\mu-\chi)=0,$$

ὅθεν
$$\chi=\frac{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\dots\dots+\lambda_\mu\alpha_\mu}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\mu}.$$

Περὶ εὐθυγράμμων συντεταγμένων τῶν σημείων ἐπιπέδου.

Ὁρισμοί.

352. Ἵνα σημείου τινὸς Μ τὴν ἐπὶ ἐπιπέδου θέσιν ὁρίσωμεν, ἄγομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθείας Χ'ΟΧ καὶ Ψ'ΟΨ τεμνομένας εἴς τι σημεῖον Ο, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Μ ἄγομεν τὰς ΠΜ καὶ ΜΡ πρὸς τὰς Ψ'ΟΨ καὶ Χ'ΟΧ παραλλήλους· καὶ ἡ μὲν πρώτη τέμνει τὴν Χ'ΟΧ εἴς τι σημεῖον Π καὶ ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα ΟΠ, ἡ δὲ δευτέρα τέμνει τὴν Ψ'ΟΨ εἴς τι σημεῖον Ρ καὶ ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς τὸ τμῆμα ΟΡ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἀντιστρόφως τὸ σημεῖον Μ ὁρίζεται τελείως, ἂν τὰ τμήματα ΟΠ καὶ ΟΡ εἶναι δεδομένα· διότι τοῦτο θὰ εἶναι τομὴ τῶν ἐκ τῶν περάτων Π καὶ Ρ τῶν τμημάτων τούτων πρὸς τὰς εὐθείας Ψ'ΟΨ καὶ Χ'ΟΧ ἀγομένων παραλλήλων.



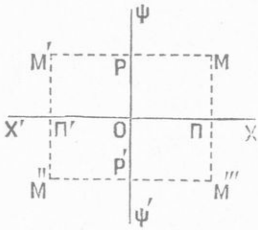
Τὰ δύο τμήματα ΟΠ καὶ ΟΡ καλοῦνται τοῦ σημείου Μ *συντεταγμέναι*. Καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ Χ'ΟΧ κείμενον τμῆμα ΟΠ ὀνομάζεται *τετμημένη*, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ Ψ'ΟΨ κείμενον τμῆμα ΟΡ *τεταγμένη* τοῦ σημείου Μ. Αἱ δὲ εὐθεῖαι Χ'ΟΧ καὶ Ψ'ΟΨ καλοῦνται *ἄξονες συντεταγμένων*. Καὶ ἡ μὲν Χ'ΟΧ καλεῖται *ἄξων τῶν τετμημένων*, ἡ δὲ εὐθεῖα Ψ'ΟΨ *ἄξων τῶν τεταγμένων*· τὸ δὲ σημεῖον Ο *ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων*.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ δὲ (ΟΠ) καὶ (ΟΡ), οἱ παριστῶντες τὰ τμήματα ΟΠ καὶ ΟΡ μετρηθέντα διὰ καταλλήλων μονάδων, καλοῦνται ἐπίσης *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου Μ, καὶ δὴ ὁ μὲν (ΟΠ) *τετμημένη*, ὁ δὲ (ΟΡ) *τεταγμένη* τοῦ Μ. Παρίστανται δὲ συνήθως αἱ συντεταγμέναι (ΟΠ) καὶ (ΟΡ) διὰ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις, ἃς τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ ἔχῃ, ἡ μὲν τετμημένη αὐτοῦ, ἡ ΟΠ, θὰ φέρηται ἢ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τἀνάπαλιν, ἡ δὲ τεταγμένη, ἡ ΟΡ, ἢ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἢ τἀνάπαλιν, ἕπεται ὅτι, ἵνα σημείου τινὸς Μ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ τὰς συντεταγμένας ΟΠ καὶ ΟΡ ἀκριβῶς δι' ἀριθμῶν παραστήσωμεν, πρέπει πρότερον νὰ ὁρίσωμεν τὴν μονάδα μήκους καὶ τὴν ἐφ' ἑκατέρου τῶν ἀξόνων θετικὴν φοράν. Λαμβάνεται δὲ συνήθως θετικὴ φορὰ ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος Χ'ΟΧ ἡ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἐπὶ δὲ τοῦ Ψ'ΟΨ ἡ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ (ΟΠ)=χ καὶ (ΟΡ)=ψ, οἱ τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων παριστῶντες, θὰ εἶναι θετικοὶ μέν, ἂν ἡ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Χ'ΟΧ, Ψ'ΟΨ φορὰ τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων ΟΠ καὶ ΟΡ εἶναι θετική, ἀρνητικοὶ δέ, ἂν ἡ φορὰ αὕτη εἶναι ἀρνητική.

Λοιπόν, ἂν δοθῶσιν οἱ ἄξονες καὶ ὁρισθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ μονάδες μήκους καὶ αἱ θετικαὶ διευθύνσεις, πᾶν τοῦ ἐπιπέδου σημεῖον θὰ ἔχῃ δύο συντεταγμένας ἀκριβῶς ὡρισμένας κατά τε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ σημεῖον· δύο δὲ διάφορα σημεῖα θὰ ἔχωσιν ἢ ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας διαφόρους, ἢ τοὐλάχιστον τὴν ἑτέραν.

Σημεῖον δέ τι τοῦ ἐπιπέδου κείμενον μὲν ἐν τῇ γωνίᾳ ΧΟΨ θὰ ἔχῃ ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας θετικάς, ἐν δὲ τῇ γωνίᾳ Χ'ΟΨ' θὰ ἔχῃ ἀμφοτέρας ἀρνητικάς, ἐν δὲ τῇ γωνίᾳ ΨΟΧ′ θὰ ἔχῃ τὴν μὲν χ ἀρνητικήν, τὴν δὲ ψ θετικήν, ἐν δὲ τῇ γωνίᾳ Ψ′ΟΧ θὰ ἔχῃ τὴν μὲν χ θετικήν, τὴν δὲ ψ ἀρνητικήν. Ἂν δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων κεῖται τὸ σημεῖον, τοῦτο θὰ ἔχῃ τὴν τεταγμένην ἴσην τῷ μηδενί· ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων θὰ ἔχῃ τὴν τετμημένην ἴσην τῷ μηδενί, ἐν δὲ τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων θὰ ἔχῃ ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας ἴσας τῷ μηδενί.



Οὐ μόνον δὲ δεδομένου σημείου τοῦ ἐπιπέδου αἱ συντεταγμέναι ὡς πρὸς δεδομένους ἄξονας εἶναι ἐντελῶς ὡρισμέναι, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δοθῶσι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χ, ψ, θὰ ὑπάρχῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σημεῖον καὶ μόνον ἓν ἔχον συντεταγμένας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἂν δὲ οἱ ἄξονες, ὡς συνήθως συμβαίνει, ληφθῶσι πρὸς ἀλλήλους *κάθετοι*, αἱ τοῦ σημείου Μ συντεταγμέναι θὰ εἶναι αἱ ἀπὸ τῶν ἀξόνων ἀποστάσεις αὐτοῦ.

Καλοῦνται δὲ οἱ τοιαῦται συντεταγμέναι *ὀρθογώνιοι*· ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς περὶ τοιούτων μόνον θὰ διαλάβωμεν.

Παρατήρησις. Τοιούτων συντεταγμένων ἐγένετο ἤδη χρῆσις ἐν ἐδ. 334 2

Συντεταγμέναι προβολαὶ τμήματος εὐθείας.

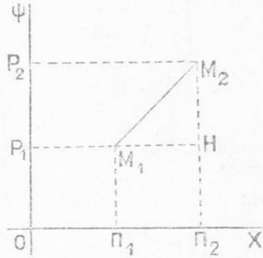
Ὁρισμοί.

353. *Προβολὴ* σημείου ἐπὶ ἄξονα καλεῖται ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα καθέτου.

354. *Προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος* ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος τὸ ἔχον ἄκρα τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος. Οὕτω τοῦ τμήματος $M_1 M_2$ αἱ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων ΟΧ, ΟΨ προβολαὶ εἶναι τὰ τμήματα $\Pi_1 \Pi_2$ καὶ P_1P_2, ἅτινα

καλοῦνται καὶ *συντεταγμέναι προβολαὶ* τοῦ τμήματος M_1M_2.

Καλεῖται δὲ τὸ μὲν τμῆμα $\Pi_1\Pi_2$ *τετμημένη προβολὴ* τοῦ τμήματος M_1M_2, τὸ δὲ P_1P_2 *τεταγμένη προβολὴ* τοῦ αὐτοῦ τμήματος.



Ἂν δὲ ἐκ μὲν τοῦ σημείου M_1 ἀχθῇ εὐθεῖα τῷ ἄξονι ΟΧ παράλληλος, ἐκ δὲ τοῦ M_2 εὐθεῖα τῷ ἄξονι ΟΨ παράλληλος, αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Η οὕτως, ὥστε αἱ τοῦ τριγώνου M_1HM_2 πλευραὶ M_1H καὶ HM_2 θὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰς συντεταγμένας προβολὰς $\Pi_1\Pi_2$ καὶ P_1P_2 τοῦ εἰρημένου τμήματος M_1M_2.

Πρόβλημα

355. *Δεδομένων τῶν συντεταγμένων χ_1, ψ_1 καὶ χ_2, ψ_2 τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος M_1M_2 νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη α καὶ β τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ προβολῶν.*

Ἐπειδὴ

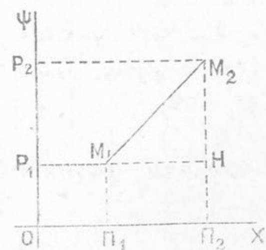
$\chi_1=(O\Pi_1)$, $\chi_2=(O\Pi_2)$, $\alpha=(\Pi_1\Pi_2)$,

$\psi_1=(OP_1)$, $\psi_2=(OP_2)$, $\beta=(P_1P_2)$,

καὶ (348) $(\Pi_1\Pi_2)=(O\Pi_2)-(O\Pi_1)$,

$(P_1P_2)=(OP_2)-(OP_1)$,

θὰ ἔχωμεν $\alpha=\chi_2-\chi_1$ καὶ $\beta=\psi_2-\psi_1$.



Λοιπὸν *αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τμήματος ἰσοῦνται πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος* (Βλ. καὶ ἐδ. 351).

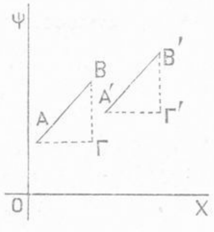
Διὰ τῶν τύπων τούτων δυνάμεθα, ἔχοντες τὰς συντεταγμένας τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τμήματος καὶ τὰς συντεταγμένας τοῦ τμήματος προβολάς, νὰ εὑρίσκωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος. Διότι $\chi_2=\chi_1+\alpha$ καὶ $\psi_2=\psi_1+\beta$.

Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν τὸ τμῆμα τὸ ἔχον δοθεῖσαν ἀρχὴν καὶ δοθείσας προβολάς, ἄγομεν ἐκ μὲν τοῦ σημείου M_1 τὸ τμῆμα M_1H τῷ ἄξονι ΟΧ παράλληλον καὶ ἔχον μῆκος α, ἐκ δὲ τοῦ Η τὸ τμῆμα HM_2 τῷ ἄξονι ΟΨ παράλληλον καὶ ἔχον μῆκος β· τὸ οὕτω δὲ εὑρισκόμενον τμῆμα M_1M_2 εἶναι τὸ ζητούμενον.

Θεώρημα.

356. *Δύο τμημάτων παραλλήλων αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ εἶναι ἀνάλογοι, ἔχουσι δὲ πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ παράλληλα τμήματα.*

Ἔστωσαν δύο παράλληλα (342 Σημ.) τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′.



Ἂν σχηματίσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ Α′Γ′Β′ ἔχοντα ἀνὰ δύο τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας, ὥστε αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ μὲν τμήματος ΑΒ νὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ, αἱ δὲ τοῦ τμήματος Α′Β′ ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰ τμήματα Α′Γ′, Γ′Β′ (354), λέγω ὅτι θὰ ἔχωμεν $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}=\frac{\Gamma'B'}{\Gamma B}$.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ Α′Γ′Β′, καθὸ ἔχοντα τὰς πλευρὰς παραλλήλους, εἶναι ὅμοια (251), ἕπεται ὅτι ἔχουσι καὶ τὰς ὑπὸ τῶν παραλλήλων πλευρῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας.

Λοιπόν, ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ Α′Γ′ θὰ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι (114)· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ΓΒ καὶ Γ′Β′ θὰ εἶναι τοιαῦται.

Αἱ ἀνωτέρω ἄρα ἀναλογίαι ἀληθεύουσιν οὐ μόνον ὡς πρὸς τὰς ἀπολύτους τιμάς, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὰ σημεῖα (346).

Καὶ τὸ ἀντίστροφον δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀληθεύει· ἤτοι: **Δύο τμήματα, ἂν ἔχωσι τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους, εἶναι παράλληλα.**

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν δύο τμήματα ΑΒ (α,β) καὶ Α′Β′ (α′,β′), ἔχοντα τὰς ὁμωνύμους αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους, καὶ δὴ α′=α.λ, β′=βλ· λέγω ὅτι τὰ τμήματα εἶναι παράλληλα.

356. Σχέσις τῶν ὁμωνύμων συντεταγ- προβολῶν δύο τμημάτων παραλλήλων.

Διότι ἔστω Α'Β'' τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἀρχὴν τὸ Α' καὶ ὁμορρόπως ἴσον τῷ ΑΒ.λ τμήματι. Τὸ τμῆμα Α'Β'' θὰ ἔχῃ (κατὰ τὰ ἄνω ἀποδειχθέντα) συντεταγμένας προβολὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ τμήματος ΑΒ, καὶ δὴ ἐχούσας μήκη α.λ, β.λ· ἤτοι ἴσας πρὸς τὰς τοῦ τμήματος Α'Β'. Ὥστε τὰ δύο τμήματα Α'Β', Α'Β'', ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ συντεταγμένας προβολὰς ἴσας, ἀναγκαίως συμπίπτουσι· τὸ Α'Β' ἄρα εἶναι παράλληλον τῷ ΑΒ.

Πόρισμα

357. *Δύο τμήματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα ἔχουσι τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσας καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἐφαρμογαί.

1) *Δεδομένων δύο σημείων M_1 (χ_1, ψ_1) καὶ M_2 (χ_2, ψ_2) νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας M_1M_2 τὸ σημεῖον M (χ, ψ) οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν* $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα M_1M καὶ MM_2 εἶναι παράλληλα (342 Σημ.), αἱ ὁμώνυμοι αὐτῶν προβολαὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τμήματα, ὥστε (355, 356) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi - \chi_1}{\chi_2 - \chi} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\psi - \psi_1}{\psi_2 - \psi} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

ὅθεν
$$\chi = \frac{\mu_1\chi_1 + \mu_2\chi_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{\mu\psi_1 + \mu_2\psi_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Καθ' ἣν δὲ περίπτωσιν $\mu_1 = \mu_2$, ὅτε τῆς εὐθείας M_1M_2 μέσον εἶναι τὸ Μ, θὰ ἔχωμεν

$$\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}.$$

2) *Δεδομένων τῆς ἀρχῆς M_1 (χ_1, ψ_1) τμήματός τινος M_1 M_2 καὶ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ προβολῶν (α, β), νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας M_1M_2 σημεῖόν τι M (χ, ψ) ἔχον τὴν ἰδιότητα* $\frac{M_1\,M}{M_1\,M_2} = \theta$.

Ἐπειδὴ αἱ τῶν τμημάτων M_1 Μ καὶ M_1 M_2 ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τμήματα (302), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi-\chi_1}{\alpha}=\theta \quad \text{καὶ} \quad \frac{\psi-\psi_1}{\beta}=\theta\cdot$$

ὅθεν $$\chi=\chi_1+\alpha\theta \quad \text{καὶ} \quad \psi=\psi_1+\beta\theta. \tag{1}$$

Οἱ δὲ τύποι οὗτοι λύουσι τὸ ἑξῆς ζήτημα·

Σημεῖόν τι κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ δοθείσης εὐθείας M_1M_2 καὶ εἰς μὲν τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν M_1, μετὰ παρέλευσιν δὲ χρόνου ἴσου τῇ μονάδι εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν M_2. Ζητεῖται ἡ θέσις τοῦ σημείου μετὰ χρόνον ϑ.

3) *Ἐκ δεδομένων σημείων, ἤτοι τῶν $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, εὑρίσκομεν ἄλλα σημεῖα $B, \Gamma, \ldots M$ ὡς ἑξῆς· διαιροῦμεν τὴν μὲν εὐθεῖαν A_1A_2 εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ A_1B καὶ τὸ BA_2, τὴν δὲ BA_3 εἰς τρία ἴσα μέρη, ὧν πρῶτον ἔστω τὸ $B\Gamma$, τὴν δὲ ΓA_4 εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ὧν πρῶτον ἔστω τὸ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Νῦν ζητεῖται τοῦ τελευταίου σημείου τῆς διαιρέσεως, τοῦ M, ὅπερ* ***μέσον σημεῖον*** *τῶν δεδομένων καλεῖται, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ συντεταγμέναι.*

$$\left(\text{Ἀπ.}\ \chi=\frac{\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_\nu}{\nu},\ \psi=\frac{\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_\nu}{\nu}.\right)$$

4) *Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παραλληλογράμμῳ τὰ τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἀπέναντι κορυφῶν ἀθροίσματα εἶναι ἴσα.*

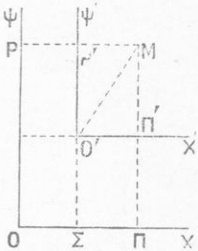
Ἀλλαγὴ τῶν συντεταγμένων.

358. Ἡ ἀπό τινος συστήματος ἀξόνων συντεταγμένων εἰς ἕτερον σύστημα μετάβασις γίνεται τῇ βοηθείᾳ τύπων, δι᾽ ὧν παρίστανται αἱ πρὸς τὸ ἕτερον τῶν συστημάτων τούτων συντεταγμέναι σημείου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου, ἂν αἱ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὸ ἕτερον τῶν συστημάτων συντεταγμέναι εἶναι γνωσταί.

Διακρίνονται ἐνταῦθα τρεῖς περιπτώσεις, ἐξαρτώμεναι ἐκ τῆς πρὸς ἀλλήλους τῶν ἀξόνων θέσεως.

359. 1) *Οἱ δεύτεροι ἄξονες $O'X'$, $O'\Psi'$ εἶναι πρὸς τοὺς πρώτους OX, $O\Psi$ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι.*

Οἱ δεύτεροι δὲ οὗτοι ἄξονες θὰ εἶναι ἀκριβῶς ὡρισμένοι, ἐὰν αἱ τῆς ἀρχῆς αὐτῶν Ο' πρὸς τοὺς πρώτους ἄξονας συντεταγμέναι (α, β) εἶναι γνωσταί.



Ἔστωσαν σημείου τινὸς Μ τοῦ ἐπιπέδου αἱ μὲν πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΨ συντεταγμέναι χ καὶ ψ, αἱ δὲ πρὸς τοὺς ΟΧ', ΟΨ' χ' καὶ ψ'.

Ἐπειδὴ (348)

(ΟΠ)=(ΟΣ)+(ΣΠ) καὶ (ΠΜ)=(ΠΠ')+(Π'Μ),

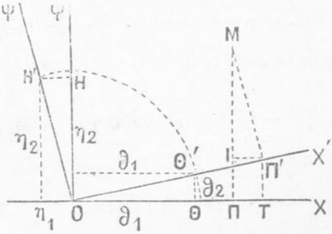
θὰ ἔχωμεν

$$\chi=\alpha+\chi' \quad \text{καὶ} \quad \psi=\beta+\psi'. \qquad (1)$$

Λοιπὸν οἱ τύποι (1) εἶναι οἱ συνδέοντες ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰς παλαιὰς συντεταγμένας (χ,ψ) τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὰς νέας αὐτοῦ συντεταγμένας (χ',ψ').

360. 2) *Τῶν δευτέρων ἀξόνων, τῶν ΟΧ', ΟΨ', ἡ μὲν ἀρχὴ Ο συμπίπτει πρὸς τὴν τῶν πρώτων ΟΧ, ΟΨ, αἱ δὲ διευθύνσεις εἶναι διάφοροι τῶν διευθύνσεων τῶν πρώτων.*

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀξόνων ΟΧ, ΟΧ', ΟΨ, ΟΨ' τὰ σημεῖα Θ, Θ', Η, Η', ἅτινα ἀπέχουσι τῆς ἀρχῆς ἀποστάσεις ἴσας τῇ θετικῇ μονάδι. Ἔστωσαν δὲ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΨ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Θ' αἱ θ_1, θ_2, τοῦ δὲ Η' αἱ η_1, η_2. Ἔστω δὲ ἔτι καί, τοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Μ, οὗ συντεταγμέναι εἶναι ὡς πρὸς μὲν τοὺς πρώτους ἄξονας αἱ χ, ψ, ὡς πρὸς δὲ τοὺς δευτέρους αἱ χ', ψ'. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Μ ἀχθῶσι πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΨ καὶ ΟΨ' παράλληλοι, αἱ ΠΜ καὶ Π'Μ, θὰ ἔχωμεν (348)



$$\chi=(\text{ΟΠ})=(\text{ΟΤ})+(\text{ΤΠ}). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τμήματα ΟΠ' καὶ ΟΘ' εἶναι παράλληλα, θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς τετμημένας αὐτῶν προβολὰς (302), τ. ἔ. θὰ ἔχωμεν (356)

$$\frac{(\text{ΟΤ})}{\theta_1}=\frac{\chi'}{1}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad (\text{ΟΤ})=\theta_1\chi'.$$

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὰ τμήματα Π΄Μ καὶ ΟΗ΄ εἶναι παράλληλα, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\text{ΤΠ})}{\eta_1}=\frac{\psi'}{1}, \quad \text{ὅθεν} \quad (\text{ΤΠ})=\eta_1\psi'.$$

Τούτων ἕνεκα ἐκ τοῦ τύπου (1) προκύπτει ὁ τύπος

$$\chi=\theta_1\chi'+\eta_1\psi'. \qquad (2)$$

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Π΄ ἀχθῇ ἡ Π΄Ι τῷ ἄξονι ΟΧ παράλληλος, θὰ ἔχωμεν $\psi=(\text{ΠΜ})=(\text{ΠΙ})+(\text{ΙΜ})=(\text{ΤΠ}')+(\text{ΙΜ}), \quad (3)$

ἀλλὰ $\frac{(\text{ΤΠ}')}{\theta_2}=\frac{\chi'}{1}$, ὅθεν $(\text{ΤΠ}')=\theta_2\,\chi'$,

καὶ $\frac{(\text{ΙΜ})}{\eta_2}=\frac{\psi'}{1}$, ὅθεν $(\text{ΙΜ})=\eta_2\,\psi'$.

Οὕτως ἐκ τοῦ τύπου (3) προκύπτει ὁ τύπος

$$\psi=\theta_2\chi'+\eta_2\psi'. \qquad (4)$$

Λοιπὸν τὸ προταθὲν πρόβλημα λύεται ὑπὸ τῶν τύπων (2) καὶ (4).

Ἂν δὲ ἐπιλύσωμεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (4) ὡς πρὸς χ', ψ', ἢ ἂν παραστήσωμεν διὰ (θ_1', θ_2') καὶ (η_1', η_2') τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων Θ καὶ Η ὡς πρὸς τοὺς δευτέρους ἄξονας ΟΧ΄, ΟΨ΄, θὰ ἔχωμεν $\chi'=\theta_1'\chi+\eta_1'\psi$ καὶ $\psi'=\theta_2'\chi+\eta_2'\psi$.

* 361. 3) *Οἱ δεύτεροι ἄξονες ΟΧ΄ ΟΨ΄ ἔχουσι καὶ ἄλλην ἀρχὴν καὶ τὰς διευθύνσεις ἀλλοίας ἢ οἱ πρῶτοι ΟΧ, ΟΨ.*

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἵνα εὕρωμεν τοὺς τύπους τοὺς συνδέοντας τὰς σημείου τινὸς Μ πρώτας συντεταγμένας χ, ψ, πρὸς τὰς δευτέρας χ', ψ', ποιούμεθα χρῆσιν βοηθητικοῦ συστήματος ἀξόνων Ο΄Χ΄΄, Ο΄Ψ΄΄, ἐχόντων ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν Ο΄ τῶν δευτέρων ἀξόνων, ὄντων δὲ πρὸς τοὺς πρώτους ΟΧ, ΟΨ παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Οὕτως, ἐὰν τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸ τρίτον τοῦτο σύστημα ἀξόνων συντεταγμέναι εἶναι αἱ χ'', ψ'', θὰ ἔχωμεν

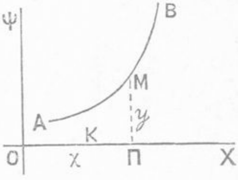
$$\chi=\alpha+\chi'', \qquad \psi=\beta+\psi'', \qquad (1)$$

καὶ $\chi''=\theta_1\chi'+\eta_1\psi', \qquad \psi''=\theta_2\chi'+\eta_2\psi', \qquad (2)$

καὶ ἄρα (359,360) $\left.\begin{aligned}\chi&=\alpha+\theta_1\chi'+\eta_1\psi',\\ \psi&=\beta+\theta_2\chi'+\eta_2\psi'.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$

Ἐξισώσεις γραμμῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

362. Ἂν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γραμμῆς τινος, τῆς ΑΒ, λάβωμεν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς γραμμῆς τὰς συντεταγμένας χ, ψ, ὡς πρὸς σύστημά τι ἀξόνων ΟΧ, ΟΨ, θὰ ἴδωμεν ὅτι, τοῦ σημείου Μ κινουμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς, αἱ τούτου συντεταγμέναι χ καὶ ψ ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ *συμμεταβάλλονται.*



Ἂν δὲ γραμμή τις εἶναι γεωμετρικῶς ὡρισμένη, ὁ τρόπος τῆς συμμεταβολῆς τῶν συντεταγμένων χ, ψ, τοῦ ἐπὶ τῆς γραμμῆς κινουμένου σημείου Μ ὁρίζεται ὑπὸ ἐξισώσεως σ(χ,ψ)=0, ἐν ᾗ εἰσέρχονται, μετὰ τῶν μεταβλητῶν συντεταγμένων χ καὶ ψ τοῦ σημείου Μ, καὶ σταθεραὶ ποσότητες ἐκ τοῦ ζητήματος δεδομέναι.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη καλεῖται ἐξίσωσις τῆς θεωρουμένης γραμμῆς.

Ἐν γένει ἐξίσωσις γραμμῆς τινος καλεῖται ἡ ἐξίσωσις, ἥτις ἐκφράζει τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην εἰς ἣν δέον νὰ ὑπόκεινται αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου, ἵνα τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς.

Ἀντιστρόφως ὀνομάζεται γραμμὴ παριστανομένη ὑπὸ ἐξισώσεώς τινος σ(χ,ψ)=0 ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

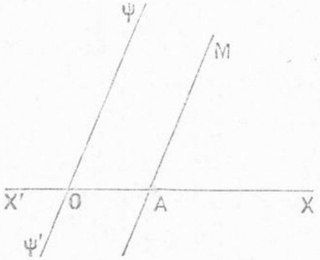
Ἵνα ἄρα γραμμή τις παριστάνηται ὑπὸ ἐξισώσεώς τινος σ(χ,ψ)=0, πρέπει ἡ ἐξίσωσις αὕτη νὰ ἐπαληθεύηται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τῆς γραμμῆς καὶ μόνον ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τούτων.

Σημ. Συστηματικὴ χρῆσις τῶν συντεταγμένων καὶ τῆς παραστάσεως τῶν γραμμῶν κλπ. δι' ἐξισώσεων πρὸς λύσιν γεωμετρικῶν ζητημάτων γίνεται ἐν τῇ *Ἀναλυτικῇ Γεωμετρίᾳ*, ἧς ἡ ἐπινόησις ὀφείλεται εἰς τοὺς Γάλλους Fermat καὶ Καρτέσιον.

Θεώρημα.

363. *Πᾶσα εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου ὡς πρὸς τὰ χ καὶ ψ. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσα πρώτου βαθμοῦ ἐξίσωσις παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν.*

Πρῶτον ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ δεδομένη εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων ΟΨ, τέμνει δὲ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων εἰς σημεῖόν τι Α, οὗ ἡ τετμημένη ἔστω α, ἡ τετμημένη χ παντὸς σημείου Μ τῆς εὐθείας θὰ ἰσῶται πρὸς α. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, οὗ ἡ τετμημένη χ ἰσοῦται πρὸς α, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

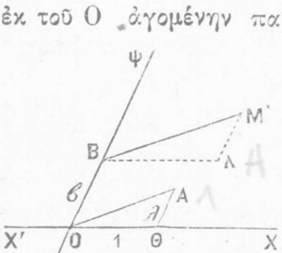


Ἐξίσωσις ἄρα τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι $\chi = \alpha$ (1). Διότι αὕτη ἐκφράζει τὴν *ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν* συνθήκην εἰς ἣν δέον νὰ ὑπόκεινται αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου, ἵνα τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εἰρημένης εὐθείας.

(Ἰδιαιτέρως ὁ ἄξων ΟΨ ἔχει ἐξίσωσιν $\chi = 0$).

Δεύτερον ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ θεωρουμένη εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα ΟΨ κατά τι σημεῖον Β (0, β), τοιοῦτον δηλ. ὥστε (ΟΒ)=β, εἶναι δὲ Λ (1, λ) τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ σημείου Θ (1, 0) τοῦ ἄξονος ΟΧ ἀγομένη παρὰ τὸν ἄξονα ΟΨ εὐθεῖα συναντᾷ τὴν ἐκ τοῦ Ο ἀγομένην παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ θεωρουμένη εὐθεῖα θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν

$$\psi = \lambda\chi + \beta. \qquad (2)$$



Καὶ πρῶτον παρατηρῶ ὅτι, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ τυχὸν σημεῖον Μ (χ, ψ), τὰ τμήματα ΒΜ καὶ ΟΛ, καθὸ παράλληλα, θὰ ἔχωσι τὰς συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς (χ, ψ—6) (355) καὶ (1, λ) ἀναλόγους (356), ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\frac{\psi-6}{\lambda} = \frac{\chi}{1}$, ὅθεν $\psi-\beta=\lambda\chi$, εἴτε $\psi=\lambda\chi+\beta$. Παντὸς ἄρα σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν (2).

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, οὗ αἱ συντεταγμέναι ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν (2), κεῖται ἐπὶ τῆς θεωρουμένης εὐθείας.

Διότι, ἂν σημείου τινὸς Μ τοῦ ἐπιπέδου αἱ συντεταγμέναι (χ, ψ) ἔχωσι τὴν ἰδιότητα $\psi=\lambda\chi+\beta$, εἴτε $\frac{\psi-\beta}{\lambda}=\frac{\chi}{1}$, τὰ τμήματα ΒΜ καὶ ΟΛ, καθὸ ἔχοντα τὰς προβολὰς αὐτῶν ἀναλόγους, θὰ εἶναι παράλληλα. Τὸ σημεῖον ἄρα Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Μ παραλλήλως πρὸς τὸ τμῆμα ΟΛ, ἤτοι ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας.

Λοιπὸν οὕτως ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος. *Διότι καὶ αἱ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ αἱ τέμνουσαι αὐτὸν παρίστανται ὑπὸ ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων* (*αἱ μὲν πρῶται ὑπὸ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς* $\chi=\alpha$, *αἱ δὲ δεύτεραι τῆς μορφῆς* $\psi=\lambda\chi+\beta$).

Ἀποδείξωμεν νῦν τὸ ἀντίστροφον· ὅτι δηλαδὴ πᾶσα ἐξίσωσις *πρώτου* βαθμοῦ ὡς πρὸς χ καὶ ψ

$$A\chi+B\psi+\Gamma=0 \qquad (3)$$

(ἐν ᾗ τὰ Α καὶ Β δὲν εἶναι συγχρόνως ἴσα τῷ μηδενὶ) παριστᾷ εὐθεῖαν.

Διακρίνομεν καὶ ἐνταῦθα δύο περιπτώσεις.

1ον. Ὑποτεθείσθω ὅτι ὁ συντελεστὴς Β τοῦ ψ ἰσοῦται πρὸς 0, ἐνῷ $A\neq 0$.

Ἡ ἐξίσωσις (3) δύναται τότε νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi=\alpha, \quad \text{τεθέντος } \alpha=-\frac{\Gamma}{A}.$$

Ὥστε παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι ΟΨ, τέμνουσαν τὸν ἄξονα ΟΧ κατὰ τὸ σημεῖον $A(\alpha, 0)$.

2ον. Ὑποτεθείσθω ὅτι $B\neq 0$.

Λύοντες τότε τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς ψ λαμβάνομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\psi=\lambda\chi+\beta$,

τεθέντος $\lambda=-\frac{A}{B}$, $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη συμπίπτει, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, πρὸς τὴν παριστῶσαν τὴν εὐθεῖαν τὴν τέμνουσαν τὸν ἄξονα ΟΨ κατὰ τὸ σημεῖον Β(0,β) καὶ παράλληλον πρὸς τὸ τμῆμα ΟΛ τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς (1,λ).

Ἀπεδείχθη ἄρα ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς (3), ἐν ᾗ τὰ Α καὶ Β δὲν εἶναι συγχρόνως ἴσα τῷ μηδενί, παριστᾷ εὐθεῖαν.

Παρατήρησις Ι. Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει (3) τὸ Α ἔχει τιμὴν $=0$, ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται $B\psi+\Gamma=0$, εἴτε $\psi=\beta$ (4), τεθέντος $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$. Ἡ ἐξίσωσις (4), εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς (2), ἀντιστοιχοῦσα εἰς $\lambda=0$, παριστᾷ δὲ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι ΟΧ καὶ τέμνουσαν τὸν ἄξονα ΟΨ κατὰ τὸ σημεῖον Β (0, β). — ὅπως ἡ συνθέτα ἡ παράλληλη τῷ ἄξονι ΟΧ

Παρατήρησις ΙΙ. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως

$$A\chi+B\psi+\Gamma=0,$$

εὐκόλως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κατὰ τὰ ῥηθέντα τὴν εὐθεῖαν, ἣν αὕτη παριστᾷ. Διότι, ἂν μὲν $B=0$, ὅτε ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΨ, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Α (α, 0) καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα ΟΧ, λαμβάνοντες $(OA)=\alpha=-\frac{\Gamma}{A}$.

Ἂν δὲ $B\neq0$, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Β(0,β) καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα ΟΨ, λαμβάνοντες $(OB)=\beta=-\frac{\Gamma}{B}$, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου Β ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὸ τμῆμα ΟΛ τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς (1, λ), ὅπου $\lambda=-\frac{A}{B}$.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα $3\chi-7=0$ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΨ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα ΟΧ εἰς τὸ σημεῖον Α $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$· ἡ δὲ εὐθεῖα $5\chi-2\psi+20=0$ τέμνει τὸν ἄξονα ΟΨ εἰς τὸ σημεῖον Β (0, 10) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ τμῆμα $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

Παρατήρησις III. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐξισώσεως γραμμῆς (362) ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σημεῖον Μ (χ_1, ψ_1) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $A\chi+B\psi+\Gamma=0$, εἶναι νὰ ἔχωμεν $A\chi_1+B\psi_1+\Gamma=0$. Οὕτω τὸ σημεῖον (2, 1) ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν $5\chi-2\psi-8=0$, οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ σημεῖον (3, 1).

Ἵνα εὕρωμεν τὸ σημεῖον Α $(\alpha, 0)$, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ συναντᾷ τὸν ἄξονα ΟΧ, ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς σχέσεως $A\alpha+\Gamma=0$, ἥτις δηλοῖ ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Α $(\alpha, 0)$ ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας. Οὕτως εὑρίσκομεν $\alpha=-\frac{\Gamma}{A}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Β $(0, \beta)$, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα ΟΨ ἰσοῦται πρὸς $(OB)=\beta=-\frac{\Gamma}{B}$, (τοῦθ' ὅπερ καὶ ἐκ τῶν ἄνω γνωστόν).

Ἵνα ἡ εὐθεῖα $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ διέρχηται διὰ τῆς ἀρχῆς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ συντεταγμέναι (0, 0) τοῦ σημείου Ο νὰ ταυτοποιῶσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας. Πρέπει δηλαδὴ καὶ ἀρκεῖ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ Γ νὰ εἶναι ἴση πρὸς 0.

Ὅταν $\Gamma\neq 0$, ἤτοι ὅταν ἡ εὐθεῖα δὲν διέρχηται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο, κατασκευάζομεν εὐκόλως τὴν εὐθεῖαν ταύτην προσδιορίζοντες τὰ σημεῖα Α $(\alpha, 0)$ καὶ Β $(0, \beta)$ καθ' ἃ αὕτη τέμνει τοὺς ἄξονας. Καθ' ἃ δὲ ἀνωτέρω εἴδομεν, ἔχομεν $\alpha=-\frac{\Gamma}{A}$ καὶ $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα $3\chi-4\psi+24=0$ τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Α $(-8, 0)$ καὶ Β $(0, 6)$. Ἡ δ' εὐθεῖα $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=1$ τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Α $(\alpha, 0)$ καὶ Β $(0, \beta)$.

Παρατήρησις IV. Ἡ εὐθεῖα $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ εἶναι ἀεὶ παράλληλος πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς Β καὶ —Α.

Διότι ἂν μὲν $B=0$, καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ τμῆμα $(B, -A)$ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ. Ἂν δὲ $B\neq 0$, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ τμῆμα $(1, \lambda)$, ἔνθα $\lambda=-\cancel{\frac{B}{A}}$, $\frac{A}{B}$

ὅπερ πάλιν εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ τμῆμα (Β,—Α), ἕνεκα τῆς ἀναλογίας τῶν ὁμωνύμων προβολῶν.

Ὁ ἀριθμὸς $\lambda = -\frac{B}{A}$ καλεῖται *συντελεστὴς κατευθύνσεως* τῆς εὐθείας $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$.

Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι συντελεστὰς κατευθύνσεως ἴσους καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι $\psi = 5\chi + 3$ καὶ $\psi = 5\chi - 2$, αἵτινες ἔχουσι τὸν αὐτὸν κατευθύνσεως συντελεστὴν 5, εἶναι παράλληλοι, καθὸ παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ τμῆμα (1, 5).

Ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι $15\chi - 21\psi + 11 = 0$ καὶ $10\chi - 14\psi - 9 = 0$, ἔχουσαι τὸν αὐτὸν κατευθύνσεως συντελεστὴν $\frac{3}{7}$, εἶναι παράλληλοι.

Λοιπόν, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ καὶ $A'\chi + B'\psi + \Gamma' = 0$ εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $A : B = A' : B'$ τῶν συντελεστῶν τοῦ χ καὶ τοῦ ψ.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ ἔχουσι κατευθύνσεως συντελεστὴν $\lambda = 0$, αἱ δὲ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ ἔχουσι τὸν $\lambda = \pm\infty$.

Παρατήρησις V. Ἐὰν δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ

$$A\chi + B\psi + \Gamma = 0$$
$$A'\chi + B'\psi + \Gamma' = 0$$

παριστῶσι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἀναγκαίως ἔχουσι τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστὰς ἀναλόγους, ἔχομεν δηλ.

$$A : B : \Gamma = A' : B' : \Gamma'.$$

Διότι, ἂν μὲν ἡ εὐθεῖα, ἣν παριστῶσιν αἱ ἐξισώσεις αὗται, εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΨ, θὰ ἔχωμεν $B = B' = 0$ καὶ $A : \Gamma = A' : \Gamma'$. (Διότι ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα ΟΧ εἰς σημεῖον ἔχον τετμημένην $-\frac{\Gamma}{A} = -\frac{\Gamma'}{A'}$.)

Ἂν δὲ ἡ εὐθεῖα, ἣν παριστῶσιν αἱ ἐξισώσεις, δὲν εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΨ, ὅτε $B \neq 0$ καὶ $B' \neq 0$, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἔχῃ κατευθύνσεως συντελεστὴν $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ καὶ θὰ τέμνῃ τὸν ἄξονα

ΟΨ εἰς σημεῖον ἔχον τεταγμένην $-\frac{\Gamma}{B}=-\frac{\Gamma'}{B'}$ θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$A:B:\Gamma=A':B':\Gamma'.$$

Ὅτι δὲ δύο ἐξισώσεις, οἷαι αἱ δοθεῖσαι, παριστῶσι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὅταν ὑπάρχωσιν αἱ ἀναλογίαι $A:B:\Gamma=A':B':\Gamma'$, ἤτοι ὅταν $A'=A\rho$, $B'=B\rho$, $\Gamma'=\Gamma\rho$, συνάγομεν ἐκ τοῦ ὅτι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ρ, ὥστε αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι. Πᾶν ἄρα σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς ἑτέρας εὐθείας θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας εὐθείας (διότι αἱ συντεταγμέναι του, ἂν ἀληθεύωσι τὴν ἑτέραν ἐξίσωσιν, θὰ ἐπαληθεύωσι καὶ τὴν ἑτέραν). Αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι συμπίπτουσι. (*)

Τομὴ δύο εὐθειῶν.

364. *Πρόβλημα. Δεδομένων τῶν ἐξισώσεων δύο εὐθειῶν νὰ εὑρεθῇ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν.*

Ἔστωσαν $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ καὶ $A'\chi+B'\psi+\Gamma'=0$ αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν, ὧν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ κοινὴ τομή.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου ὀφείλουσι νὰ ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρας τὰς δεδομένας ἐξισώσεις. Κατ' ἀκολουθίαν *ἡ εὕρεσις τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.*

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἐν λόγῳ κοινοῦ σημείου ἐπαληθεύουσι προφανῶς πάσας τὰς ἐξισώσεις

$$\rho\,(A\chi+B\psi+\Gamma)+\rho'\,(A'\chi+B'\psi+\Gamma)=0,$$

τὰς προκυπτούσας ἐκ τῶν δοθεισῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ δύο σταθεροὺς πολλαπλασιαστὰς ρ καὶ ρ' καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη.

Ὑποθέτοντες δὲ διαδοχικῶς $\rho=B'$, $\rho'=-B$ καὶ $\rho=-A'$, $\rho'=A$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις.

$$\left.\begin{aligned}(AB'-BA')\chi+(\Gamma B'-B\Gamma')&=0\\(AB'-BA')\psi+(A\Gamma'-\Gamma A')&=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(*) Ἐν γένει δύο ἐξισώσεις ἰσοδύναμοι παριστῶσι πάντοτε τὴν αὐτὴν γραμμήν.

αἵτινες πρέπει ἐπίσης νὰ ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τοῦ δοθέντος σημείου.

Διακρίνομεν νῦν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

1ον. Ὅταν $AB' - BA' \neq 0$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι, διότι θὰ εἴχομεν $AB' - BA' = 0$ ἕνεκα τῆς ἀναλογίας τῶν συντελεστῶν Α, Β πρὸς τοὺς συντελεστὰς Α′, Β′ (363, παρατ. IV), καὶ ἄρα τέμνονται εἰς ἓν καὶ μόνον σημεῖον, οὗ αἱ συντεταγμέναι ὀφείλουσι νὰ ἐπαληθεύωσι τὰς ἐξισώσεις (2).

Ἀλλ᾽ αἱ ἐξισώσεις (2) ἐπιδέχονται καὶ αὗται κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην μίαν καὶ μόνην λύσιν, τὴν

$$\chi = \frac{B\Gamma' - \Gamma B'}{AB' - BA'}, \quad \psi = \frac{\Gamma A' - A\Gamma'}{AB' - BA'}. \qquad (3)$$

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ἄρα ταύτην αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἔχουσιν ἓν μόνον σημεῖον κοινόν, οὗ αἱ συντεταγμέναι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (3).

Εὐκόλως ἄλλως τε ἐπαληθεύομεν ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν τύπων (3) ὁριζόμεναι τιμαὶ τῶν χ, ψ ταυτοποιοῦσι τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (1).

2ον. Ὅταν $AB' - BA' = 0$, εἴτε $A : B = A' : B'$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἢ εἶναι παράλληλοι ἢ συμπίπτουσι (363, IV).

Καὶ ἂν μὲν $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \neq \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι,

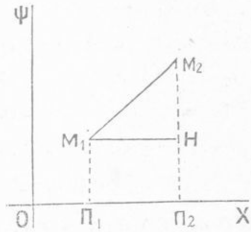
ἂν δὲ $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουσι (363, V).

Παρατήρησις. Ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι χωρὶς νὰ συμπίπτωσιν, ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμητῶν $B\Gamma' - B'\Gamma'$, $\Gamma A' - A\Gamma'$ τῶν τύπων (3) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός· ἐνῷ, ὅταν αἱ εὐθεῖαι αὗται συμπίπτωσιν, ἀμφότεροι οἱ ἀριθμηταὶ οὗτοι εἰσὶν ἴσοι τῷ μηδενί.

Παραδείγματα. Αἱ εὐθεῖαι $5\chi + 3\psi - 13 = 0$, $6\chi - 7\psi - 5 = 0$ ἔχουσι κοινὸν τὸ σημεῖον (2,1), αἱ εὐθεῖαι $10\chi - 15\psi + 7 = 0$, $8\chi - 12\psi + 3 = 0$ εἶναι παράλληλοι, αἱ δὲ εὐθεῖαι $\chi + \psi - 5 = 0$, $2\chi + 2\psi - 10 = 0$ συμπίπτουσι.

Μῆκος τμήματος.

365. *Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος $M_1\ M_2$, οὗ δίδονται τὰ ἄκρα διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν $(\chi_1,\ \psi_1)$ καὶ $(\chi_2 \cdot \psi_2)$.*



Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐκ τῶν ἄκρων M_1 καὶ M_2 ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι $M_1\Pi_1$ καὶ $M_2\Pi_2$ παράλληλοι τῷ ἄξονι ΟΨ καὶ ἡ M_1H παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΧ, ἐκ τοῦ σχηματισθησομένου ὀρθογωνίου τριγώνου M_1HM_2 θὰ ἔχωμεν

$$(M_1M_2)^2 = (M_1H)^2 + (HM_2)^2.$$

Αἱ πλευραὶ M_1H καὶ HM_2 τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰς συντεταγμένας προβολὰς τοῦ τμήματος $M_1\ M_2$ (354), ὥστε θὰ ἔχωμεν (355) $(M_1H) = \chi_2 - \chi_1$, $(HM_2) = \psi_2 - \psi_1$, ὅθεν

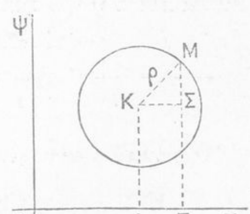
$$(M_1M_2)^2 = (\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2. \qquad (1)$$

Οὕτως ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $M_1\,(5,\ 9)$ καὶ $M_2\,(8,\ 5)$ ἔχει μῆκος $(M_1M_2) = \sqrt{(8-5)^2 + (5-9)^2} = 5$.

Ἡ δὲ ἀπόστασις (OM) τοῦ τυχόντος σημείου M (χ, ψ) τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $(OM) = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$.

Ἐξίσωσις περιφερείας.

366. Ἡ δεδομένης περιφερείας κύκλου ἐξίσωσις εὑρίσκεται ἂν ἐκφρασθῇ ἀλγεβρικῶς ἡ κοινὴ ἰδιότης τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ταύτης· ὅτι δηλαδὴ ἀπέχουσι τοῦ κέντρου σταθερὸν μῆκος.



Λοιπὸν ἔστω K $(\alpha,\ 6)$ τὸ κέντρον τοῦ δεδομένου κύκλου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ. Ἔστω δὲ σημεῖόν τι M (χ, ψ) ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου. Κατὰ ἐδ. 365 θὰ ἔχωμεν

$$(KM)^2 = (\chi - \alpha)^2 + (\psi - 6)^2.$$

Ὥστε, ἂν τὸ σημεῖον M ἀνήκῃ εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅτε $(KM) = \rho$, θὰ ἔχωμεν

$$(\chi - \alpha)^2 + (\psi - 6)^2 = \rho^2. \qquad (1)$$

Λοιπὸν παντὸς σημείου τῆς ῥηθείσης περιφερείας αἱ συντεταγμέναι (χ,ψ) ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν (1).

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν σημείου τινὸς Μ τοῦ ἐπιπέδου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν (1), θὰ ἔχωμεν $(\mathrm{KM})^2=\rho^2$, ὥστε τὸ σημεῖον τοῦτο θ' ἀνήκῃ εἰς τὴν περιφέρειαν.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι *ἡ ἐξίσωσις* (1) *παριστᾷ τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον* Κ (α,β) *καὶ ἀκτῖνα τὴν* ρ.

Ἀξιοσημείωτοι μερικαὶ περιπτώσεις εἶναι αἱ ἑξῆς :

1ον. Ἂν κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι ἡ ἀρχὴ Ο, ἤτοι ἂν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἀποβαίνει $\chi^2+\psi^2=\rho^2$. (2)

2ον. Ἂν τὸ κέντρον, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ ἀπέχῃ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι, θὰ εἶναι $\alpha=\rho$ καὶ $\beta=0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) ἀποβαίνει

$$(\chi-\rho)^2+\psi^2=\rho^2 \quad \text{ἢ} \quad \psi^2=2\rho\chi-\chi^2. \qquad (3)$$

Ἡ *γενικὴ* ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὧδε

$$\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2+\psi^2-2\beta\psi+\beta^2-\rho^2=0.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $-2\alpha=\mathrm{A}$, $-2\beta=\mathrm{B}$ καὶ $\alpha^2+\beta^2-\rho^2=\Gamma$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\chi^2+\psi^2+\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0. \qquad (4)$$

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (4), ἂν παριστᾷ τόπον τινά, θὰ παριστᾷ περιφέρειαν.

Διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη, γραφεῖσα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(\psi+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{4}-\Gamma, \qquad (5)$$

ἐκφράζει ὅτι ἡ τοῦ σημείου (χ,ψ), τοῦ πληροῦντος τὴν ἐξίσωσιν, ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ σημείου $\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ εἶναι ἀεὶ ἡ αὐτὴ καὶ ἴση πρὸς $\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{4}-\Gamma}$.

Λοιπόν, ἂν μὲν εἶναι $\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{4}-\Gamma>0$ ὁ κύκλος (5) θὰ εἶναι πραγματικός, ἔχων κέντρον μὲν τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ ἀκτῖνα δὲ ἴσην πρὸς $\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{4}-\Gamma}$.

Ἐὰν δὲ $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (5) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\left(\chi+\frac{A}{2}\right)^2+\left(\psi+\frac{B}{2}\right)^2=0$. Θὰ ἐπαληθεύηται ἄρα μόνον ἐὰν $\chi+\frac{A}{2}=0$ καὶ $\psi+\frac{B}{2}=0$, τουτέστι μόνον εἰς τὸ σημεῖον $\left(\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Κατὰ τὴν περίπτωσιν δὲ ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) παριστᾷ περιφέρειαν περιορισθεῖσαν εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς.

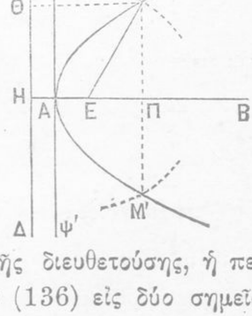
Ἐὰν δὲ $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma<0$, ἡ ἐξίσωσις (5) δὲν θὰ ἀληθεύηται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων οὐδενὸς σημείου, διότι τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος, ὂν ἄθροισμα δύο τετραγώνων, οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικὸν διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ καὶ τοῦ ψ.

Περὶ παραβολῆς.

367. *Παραβολὴ καλεῖται καμπύλη ἐπίπεδος, ἧς ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἴσον δεδομένου σημείου καὶ δεδομένης εὐθείας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένης.*

Καλεῖται δὲ τὸ μὲν δεδομένον σημεῖον *ἑστία* τῆς *παραβολῆς*, ἡ δὲ δεδομένη εὐθεῖα *διευθετοῦσα αὐτῆς.*

Ἂν τῆς παραβολῆς εἶναι δεδομέναι καὶ ἡ ἑστία Ε καὶ ἡ διευθετοῦσα ΔΔ', δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖα τῆς παραβολῆς ταύτης ὡς ἑξῆς. Ἄγομεν τὴν ΕΗ ἐπὶ τὴν ΔΔ' κάθετον. Οὕτω δὲ τὸ μέσον Α τῆς ΕΗ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς. Ἂν δὲ ἀχθῇ εὐθεῖα, οἷον ἡ ΠΜ, τῇ διευθετούσῃ παράλληλος καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν μείζονα τῆς ΑΗ, γραφῇ δὲ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον μὲν τὴν ἑστίαν Ε ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ ΠΗ, ἤτοι τῇ ἀποστάσει τῆς ἀχθείσης παραλλήλου ἀπὸ τῆς διευθετούσης, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμῃ τὴν παράλληλον (136) εἰς δύο σημεῖα Μ, Μ', ἅτινα θὰ εἶναι τῆς παραβολῆς· διότι ἡ ἐξ ἑκατέρου τούτων



ἀγομένη ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν κάθετος ἰσοῦται τῇ ΠΗ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τῇ ἀκτῖνι ΜΕ. Ἂν δὲ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐπαναληφθῇ καὶ δι' ἄλλας τῇ διευθετούσῃ παραλλήλους καὶ ὁρισθῇ οὕτως ἱκανὸς τοιούτων σημείων ἀριθμός, ἑνωθῶσι δὲ ταῦτα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ ἔχωμεν τόξον τῆς παραβολῆς.

Καλοῦνται δὲ τὸ μὲν σημεῖον Α *κορυφὴ* τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ΗΒ *ἄξων* αὐτῆς.

Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς. Χατζ. σχ. 216

368. Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς, τῆς ἐχούσης ἑστίαν μὲν τὸ σημεῖον Ε διευθετοῦσαν δὲ τὴν ΔΔ', λαμβάνομεν ἄξονας συντεταγμένων τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς καὶ τὴν ἐπ' αὐτὸν ἐκ τοῦ Α κάθετον, παριστῶμεν δὲ διὰ μ τὸ μῆκος τῆς ΗΕ. Οὕτως, ἂν τὸ Μ (χ, ψ) εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς, θὰ ἔχωμεν (ΕΜ)=(ΘΜ),

ἀλλὰ (365) $(ΕΜ)^2=(ΕΠ)^2+(ΠΜ)^2=\left(χ-\frac{1}{2}μ\right)^2+ψ^2,$

-σχ. 255

ἐπειδὴ δὲ $(ΘΜ)=(ΗΠ)=(ΗΑ)+(ΑΠ)=\frac{1}{2}μ+χ,$

θὰ εἶναι $\left(χ-\frac{1}{2}μ\right)^2+ψ^2=\left(\frac{1}{2}μ+χ\right)^2$, εἴτε $ψ^2=2μχ.$

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι *ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι* $ψ^2=2μχ$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $ψ=\pm\sqrt{2μχ}$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν

1ον) Ὅτι ἡ παραβολὴ κεῖται ὅλη δεξιὰ τοῦ ἄξονος ΟΨ, διότι εἰς ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς χ οὐδεμία πραγματικὴ τιμὴ τῆς ψ ἀντιστοιχεῖ.

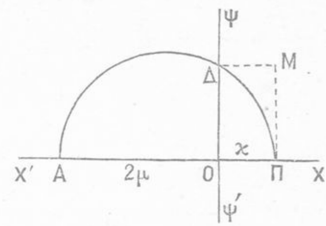
2ον) Ὅτι τὰ σημεῖα αὐτῆς εἶναι ἀνὰ δύο *συμμετρικὰ* (74) πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ.

3ον) Ὅτι τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ τοῦ ψ τιμὴ αὐξάνεται ἀπολύτως ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$.

Προσδιορισμὸς σημείων τῆς παραβολῆς ἧς δίδεται ἡ ἐξίσωσις.

369. Ἂν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις $ψ^2=2μχ$ τῆς παραβολῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν σημεῖα αὐτῆς ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν τετμημένην τινὰ θετικήν, τὴν (ΟΠ)=χ, καὶ πρὸς τὰ ἀρνητικὰ τοῦ ἄξονος ΟΧ τὴν (ΟΑ) =′—2μ καὶ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἔχουσαν διάμετρον τὴν ΑΠ. Οὕτω δέ, ἂν ἐκ τοῦ Π ὑψωθῇ ἡ ΠΜ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΧ κάθετος καὶ ἴση τῇ ΟΔ, τὸ ἄκρον αὐτῆς Μ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς.



Διότι $(\text{ΟΔ})^2=(\text{ΑΟ}).(\text{ΟΠ})$, ἤτοι $\psi^2=2\mu\chi$.

Περὶ συναρτήσεων.

370. Ἂν δύο ποσὰ μεταβλητὰ (286) ἐξαρτῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων οὕτως, ὥστε ἡ τοῦ ἑτέρου μεταβολὴ νὰ συνεπάγηται τὴν τοῦ ἑτέρου μεταβολήν, λέγομεν ὅτι τὰ μεταβλητὰ ταῦτα ποσὰ εἶναι τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου *συνάρτησις*. Τούτων δὲ τὸ μὲν ἕτερον, ὅπερ δυνάμεθα αὐθαιρέτως νὰ μεταβάλλωμεν, καλεῖται *ἀνεξάρτητον μεταβλητόν*, τὸ δὲ ἕτερον, οὗ ἡ τιμὴ ὁρίζεται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ αὐθαιρέτως μεταβαλλομένου, καλεῖται ἐκείνου *συνάρτησις*.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως περιεχούσης ἕνα μεταβλητὸν ἀριθμὸν εἶναι τούτου συνάρτησις. Οὕτως, ἂν τὸ μὲν χ παριστᾷ μεταβλητὸν ἀριθμόν, τὰ δὲ α, β, γ δεδομένους σταθεροὺς ἀριθμούς, ὁ τύπος $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, ἐξ οὗ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν τὰς εἰς αὐθαιρέτους τιμὰς τοῦ χ ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ ψ, ὁρίζει τὸν ἀριθμὸν ψ ὡς συνάρτησιν τοῦ χ.

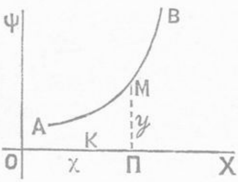
Θέλοντες δὲ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ψ εἶναι συνάρτησίς τις τοῦ χ ὡρισμένη γράφομεν ἐν γένει $\psi=\sigma(\chi)$.

Περὶ γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων.

371. Τῇ βοηθείᾳ γραμμῆς δυνάμεθα νὰ ποιήσωμεν αἰσθητὰς τὰς διαδοχικὰς τιμάς, ἃς λαμβάνει συνάρτησις ἀνεξαρτήτου τινὸς μεταβλητοῦ ποσοῦ, λαμβάνοντος πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας ἔν τινι διαστήματι.

ἢ ὡρισμένην
370 Τὴν ἀναγκαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τοῦ ἑτέρου δύο ποσῶν διὰ τῆς αὐθαιρέτου τοῦ ἄλλου, τὸ ὁποῖον οὕτω καλοῦμεν ἀνεξάρτητον μεταβλητόν, λέγομεν συνάρτησιν τοῦ ἄλλου καὶ διατυποῦμεν οὕτω ψ = σ(χ)

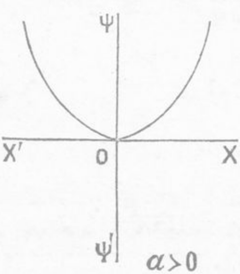
Πρὸς τοῦτο ἔστω συνάρτησίς τις ψ=σ(χ) τοῦ μεταβλητοῦ ποσοῦ χ. Ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ληφθῇ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων X′X, Ψ′Ψ, ἔτι δὲ ληφθῇ καὶ αὐθαίρετος τοῦ μήκους μονάς, ἡ μέθοδος ἣν ἐφαρμόζομεν συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σημείων, ἐχόντων τετμημένας μὲν τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμάς, ἃς τὸ μεταβλητὸν ποσὸν χ αὐθαιρέτως λαμβάνει, τεταγμένας δὲ τὰς πρὸς ταύτας ἀντιστοίχους τῆς συναρτήσεως σ(χ) τιμάς. Πρὸς τοῦτο ἐν τῇ συναρτήσει σ(χ) ὑποθέτομεν τὸ χ λαμβάνον πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας ἐν δεδομένῳ διαστήματι, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ψ, ἣν ὑποθέτομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν. Ἕκαστον

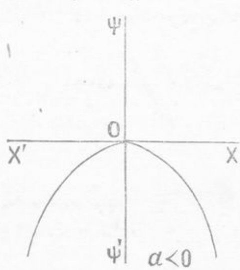


ζεῦγος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν χ καὶ ψ ὁρίζει ἓν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου (352), ἔχον συντεταγμένας τὰς τιμὰς ταύτας τῶν χ καὶ ψ. Τῶν σημείων δὲ τούτων τὸ σύνολον ἀποτελεῖ γραμμήν, ἥτις ἀπεικονίζει τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς θεωρουμένας τιμὰς τοῦ χ.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος. *1ον Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\lambda\chi+\beta$*, ἐν ᾗ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ χ μεταβαλλόμενον ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ · τόπος τῶν σημείων (χ, ψ), δι᾿ ἃ ἰσχύει ἡ σχέσις $\psi=\lambda\chi+\beta$, εἶναι, καθὰ γνωρίζομεν (363), εὐθεῖα γραμμή.

2ον Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2$.



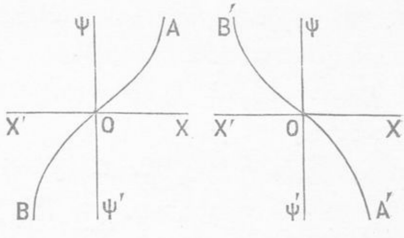


Ἂν $\alpha>0$ τὸ $\psi=\alpha\chi^2$ διὰ τιμὰς τοῦ χ αὐξανομένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ · ἐπίσης διὰ τιμὰς τοῦ χ ἐλαττουμένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἂν δὲ $\alpha<0$ τὸ ψ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς αὐξανομένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ὡς καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς ἐλαττουμένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $=-\infty$, ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$.

Ἐκ τῶν ἐν ἐδ. 312 ἐκτεθέντων γινώσκομεν ἄλλως ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἀληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\alpha\chi^2$, ἀποτελεῖ παραβολήν, ἔχουσαν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $\Psi\Psi'$ καὶ κειμένην ἢ πρὸς τὰ ἄνω τοῦ ἄξονος $X'X$, ἂν ὁ ἀριθμὸς $\alpha>0$, ἢ πρὸς τὰ κάτω, ἂν ὁ $\alpha<0$. (Ἐνταῦθα $2\mu=\alpha$).

3ον *Ἔστω ἡ συνάρτησις* $\psi=\alpha\chi^3$.

Ἂν $\alpha>0$, τὸ $\psi=\alpha\chi^3$ διὰ τιμὰς τοῦ χ αὐξανομένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, διὰ τιμὰς δὲ τοῦ χ ἐλαττουμένας ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$. Ἂν δὲ $\alpha<0$, μεταβαλλομένου τοῦ χ ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ τὸ ψ μεταβάλλεται ἐκ τοῦ $+\infty$ πρὸς τὸ $-\infty$· διὰ δὲ $\chi=0$ ἔχομεν καὶ $\psi=0$.

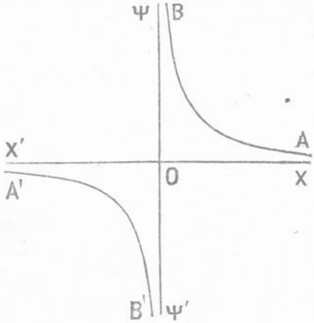


Κατὰ ταῦτα ὁ τόπος τῶν σημείων (χ, ψ) δι' ἃ ἔχομεν $\psi=\alpha\chi^3$ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας 1) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O, 2) ὅταν μὲν $\alpha>0$, ἡ καμπύλη ἀνέρχεται ἐκ τῶν κάτω καὶ ἀριστερὰ εἰς τὰ ἄνω καὶ δεξιά, ὅταν δὲ $\alpha<0$, ἡ καμπύλη κατέρχεται ἐκ τῶν ἄνω καὶ ἀριστερὰ εἰς τὰ κάτω καὶ δεξιά.

4ον *Ἔστω ἡ συνάρτησις* $\psi=\dfrac{\alpha}{\chi}$.

Ἂν $\alpha>0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν ὁ χ θετικὸς ὢν ἐλαττῶται καὶ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, αἱ τοῦ ψ ἀντίστοιχοι θετικαὶ τιμαὶ αὐξανόμεναι θὰ τείνωσιν εἰς τὸ $+\infty$ (διότι, ἵνα $\dfrac{\alpha}{\chi}>\mu$, ἀρκεῖ $\chi<\dfrac{\alpha}{\mu}$)· ἂν δὲ ὁ χ θετικὸς ὢν αὐξάνηται, αἱ τοῦ ψ ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἐλαττούμεναι θὰ τείνωσιν εἰς τὸ 0 (διότι, ἵνα $\dfrac{\alpha}{\chi}<\varepsilon$, ἀρκεῖ $\chi>\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$).

Κατ' ἀμφοτέρας ἄρα τὰς περιπτώσεις αἱ τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τῶν ἀξόνων ἀποστάσεις ἀεὶ ἐλαττούμεναι θὰ τείνωσιν εἰς τὸ 0· οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν τὸ ἑκατέρωθεν ἐκτεινόμενον ἐπ' ἄπειρον τόξον τῆς καμπύλης AB.



Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἀντιθέτους τιμὰς τῆς χ ἀντιστοιχοῦσι τιμαὶ τῆς ψ ἀντίθετοι, τὰ σημεῖα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ χ θὰ εἶναι *συμμετρικὰ* τῶν πρώτων πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο· οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν καὶ ἕτερον κλάδον Α'Β' τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παριστωμένης καμπύλης, κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ Χ'ΟΨ' τῶν ἀξόνων.

Καλεῖται δὲ ἡ μὲν καμπύλη αὕτη *ὑπερβολή*, τὸ δὲ σημεῖον Ο *κέντρον* αὐτῆς, οἱ δὲ πρὸς οὓς ἀναφέρεται ἄξονες *ἀσύμπτωτοι αὐτῆς*.

Ἂν δὲ $\alpha < 0$, πρόδηλον εἶναι ὅτι οἱ τῆς καμπύλης κλάδοι θὰ κεῖνται ἐν γωνίαις Ψ'ΟΧ καὶ ΨΟΧ'.

Σημείωσις. Δύο σημεῖα Μ,Μ' καλοῦνται *συμμετρικὰ* ὡς πρός τι σημεῖον Ο, ἂν τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς εὐθείας ΜΜ'.

Γραφικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

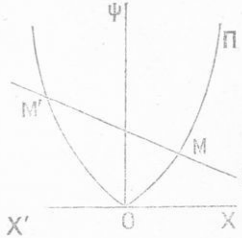
372. Τῶν μάλιστα χρησίμων τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων ἐφαρμογῶν μία, ἣν νῦν θὰ ἀναπτύξωμεν, εἶναι καὶ ὁ κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸς τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων.

Παραδείγματα

1ον. *Ἔστω ἡ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἧς οἱ συντελεσταὶ α,β,γ, εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ θεωρῆται ἐξαγόμενον τῆς απαλοιφῆς τοῦ ψ ἀπὸ τῶν ἐξισώσεων $\psi=\chi^2$ καὶ $\alpha\psi+6\chi+\gamma=0$,ἐξ ὧν ἡ μὲν πρώτη παριστᾷ παραβολὴν Π, ἡ δὲ δευτέρα εὐθεῖαν Ε.

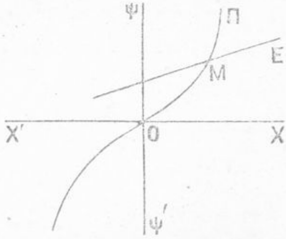
Λοιπὸν ἂν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χάρτου κατασκευασθῶσιν ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα αἱ ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων παριστάμεναι γραμμαὶ Π, Ε, αἱ τῶν κοινῶν τούτων σημείων Μ, Μ΄ τετμημέναι θὰ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς εἰρημένης ἐξισώσεως (1).



Διότι, ἂν χ', ψ' εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ, θὰ ἔχωμεν ἅμα $\psi'=\chi'^2$ καὶ $\alpha\psi'+6\chi'+\gamma=0$, ἢ ἀπαλείφοντες τὸν ψ' θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\alpha\chi'^2+6\chi'+\gamma=0$, ἥτις δεικνύει ὅτι τὸ χ' εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἂν ἄρα ἡ εὐθεῖα Ε τέμνῃ τὴν παραβολὴν Π, ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικάς· ἂν δὲ ἐφάπτηται, ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ ἔχῃ δύο ῥίζας ἴσας· ἂν δὲ τέλος ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ παραβολὴ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν, ἡ ἐξίσωσις (1) θὰ ἔχῃ δύο ῥίζας φανταστικάς.

2ον *Ἔστω ἡ τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξίσωσις* $\alpha\chi^3+\beta\chi+\gamma=0$. (2)



Ἡ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λύσις δύναται νὰ γείνῃ ὡς καὶ ἡ τῆς τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεως (1), ἂν ζητηθῶσιν αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων Μ, τῶν γραμμῶν Π καὶ Ε τῶν παρισταμένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $\psi=\chi^3$ καὶ $\alpha\psi+6\chi+\gamma=0$, ὧν ἐξαγόμενον ἀπαλοιφῆς δύναται νὰ θεωρῆται ἡ δεδομένη ἐξίσωσις (2).

3ον. Ὡς ἐφαρμογὴν τῆς γραφικῆς τῶν συναρτήσεων παραστάσεως ἀναφέρομεν ἕτερον τρόπον λύσεως τῆς τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξισώσεως $\chi^3+\pi\chi+\varkappa=0$. (3)

Πρὸς τοῦτο, ἂν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀμφότερα τὰ μέλη πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ χ, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις $\chi^4+\pi\chi^2+\varkappa\chi=0$. (4)

Εἶτα δὲ, ἂν τεθῇ $\psi=\chi^2$, (5)

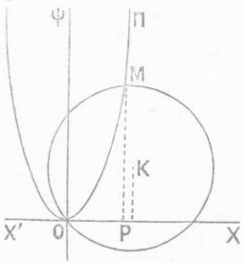
ἐκ τῆς (4) θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις $\psi^2+\pi\psi+\varkappa\chi=0$. (6)

Ἀλλ' ἀντὶ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ἡ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$\chi^2+\psi^2+\kappa\chi+(\pi-1)\psi=0, \quad (7)$$

ἥτις παριστᾷ (311) κύκλον, διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων διερχόμενον, οὗ αἱ τοῦ κέντρου Κ συντεταγμέναι α, β εἶναι $\alpha=-\frac{\kappa}{2}$, καὶ $\beta=-\frac{\pi-1}{2}$.

Οὕτω τῆς ἐξισώσεως (3) ῥίζαι εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς (5) καὶ τοῦ κύκλου (7), ἐξαιρέσει τοῦ 0. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ποιώμεθα χρῆσιν πάντοτε τῆς αὐτῆς παραβολῆς (5), συνάγεται ὅτι διὰ τῆς καμπύλης ταύτης, ἐπιμελῶς ἅπαξ κατασκευασθείσης, καὶ διὰ κύκλου, καταλλήλως ἑκάστοτε προσδιοριζομένου, εἶναι δυνατὸν νὰ λύωμεν κατὰ προσέγγισιν πάσας τὰς τοιαύτης μορφῆς τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξισώσεις. Ἂν δὲ τὸ σχῆμα εἶναι ἐπιμελῶς κατεσκευασμένον, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (3) κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, ὅπερ ἐν τῇ πράξει συνήθως ἀρκεῖ.



Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ γραφικῆς κατασκευῆς ἡ λύσις ἄλλων κατηγοριῶν ἐξισώσεων.

Χρῆσις τοῦ τετραγωνιστὶ κεχαραγμένου χάρτου.

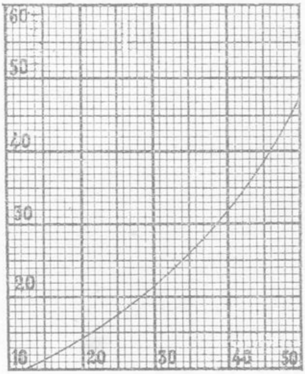
373. Τοῦ τετραγωνιστὶ κεχαραγμένου χάρτου γίνεται χρῆσις ἐν τῇ πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ, ἐν τῇ ἐφηρμοσμένῃ Μηχανικῇ, τῇ Τοπογραφίᾳ, τῇ Φυσικῇ, τῇ Μετεωρολογίᾳ, τῇ Στατιστικῇ κλπ. Εἶναι δὲ ἐπὶ τοῦ τοιούτου χάρτου κεχαραγμέναι εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν ἄλλαι εὐθεῖαι κάθετοι σχηματίζουσαι μετ᾽ ἐκείνων τετράγωνα ἢ ὀρθογώνια ἴσα. Συνηθεστέρα χρῆσις γίνεται τοῦ λεγομένου *χιλιοστομετρικοῦ* χάρτου, ἐφ᾽ οὗ εἶναι κεχαραγμένα τετραγωνικὰ

χιλιοστόμετρα, διὰ ζωηροτέρων δὲ γραμμῶν καὶ τετραγωνικὰ ὑφεκατόμετρα.

Ἐν τῇ Φυσικῇ δὲ ἰδίᾳ ἡ χρῆσις αὐτοῦ εἶναι συνηθεστάτη:

1ον) Διότι εὐκολύνει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν φυσικῶν νόμων, γινομένην διὰ γραφῆς καμπύλης δηλούσης τὴν σχέσιν δύο μεγεθῶν ἐξαρτωμένων ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐπὶ παραδείγματος, ἂν γινώσκωμεν τὰς ἀποκλίσεις γαλβανομέτρου καὶ τὰς ἀντιστοίχους ἐντάσεις τοῦ ῥεύματος τοῦ προκαλοῦντος τὰς ἀποκλίσεις ταύτας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐπὶ τοῦ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου καμπύλην, λαμβάνοντες τὰς μὲν ἀποκλίσεις ὡς τετμημένας, τὰς δὲ ἐντάσεις ὡς τεταγμένας. Εἰκονίζει δὲ ἡ καμπύλη αὕτη τὸν νόμον τοῦ φαινομένου. Πολλάκις δέ, ἐκ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης ὁδηγούμενοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τοῦ νόμου διατύπωσιν. Ὁ δὲ τρόπος οὗτος τῆς τῶν τύπων εὑρέσεως εἶναι συνηθέστατος ἐν τῇ φυσικῇ.

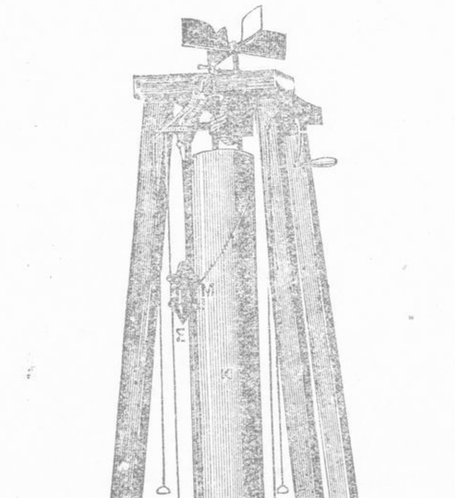


2ον) Διότι δι' αὐτοῦ παρίσταται ἡ συνεχὴς μεταβολὴ φαινομένου τινός, δηλουμένη, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, διὰ καμπύλης, οἷαι εἶναι αἱ γραφόμεναι ὑπὸ τῶν λεγομένων *αὐτογραφικῶν συσκευῶν*.

Τοῦ χάρτου τούτου γίνεται προσέτι χρῆσις εἰς τὰς ταχείας τοπογραφικὰς ὑποτυπώσεις, εἰς τὰς ὑποτυπώσεις τῶν στρατιωτικῶν τοῦ ἐδάφους ἀναγνωρίσεων καὶ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὁδοιπορικῶν σχεδίων. Ἔτι δὲ εἰς τὴν ἰατρικὴν καὶ ἰδίᾳ τὴν θεραπευτικήν, ἔνθα συνήθως σημειοῦται διὰ μὲν τῶν τετμημένων ὁ χρόνος, διὰ δὲ τῶν τεταγμένων ἢ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν σφυγμῶν, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναπνοῶν κλπ.

Πρὸς τούτοις διὰ τοιαύτης γραφικῆς παραστάσεως τῶν ἐξαγομένων τῆς ἀπογραφῆς τοῦ πληθυσμοῦ χώρας τινὸς δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν τε ζώντων καὶ τῶν θνησκόντων γράφοντες ἐπὶ τοῦ τετραγωνιστὶ κεχαραγμένου χάρτου δύο καμπύλας, ὧν αἱ μὲν τετμημέναι παριστῶσι τὴν ἡλικίαν, αἱ δὲ τεταγμέναι τῆς μὲν ἑτέρας τὸ πλῆθος τῶν ζώντων, τῆς δὲ ἑτέρας τὸ πλῆθος τῶν θνησκόντων. Ὡσαύτως δι' ἄλλης καμπύλης ἐπὶ τοῦ τετραγωνιστὶ κεχαραγμένου χάρτου γραφομένης δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὸν μέσον ὅρον τῆς ζωῆς τοῦ πληθυσμοῦ χώρας τινός. Τῆς καμπύλης δὲ ταύτης αἱ μὲν τετμημέναι παριστῶσι τὴν ἡλικίαν, αἱ δὲ τεταγμέναι τὸν μέσον ὅρον τῆς διαρκείας τῆς ζωῆς.

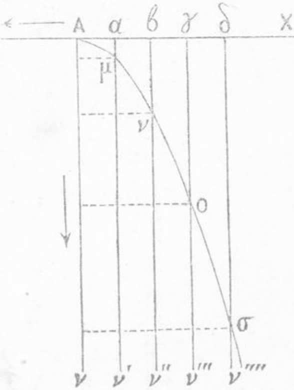
Μηχανὴ τοῦ Morin.



374. Μία τῶν ἀξιολογωτάτων ἐφαρμογῶν τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν συναρτήσεων ἀπαντᾷ ἐν τῇ *μηχανῇ τοῦ Morin*, ἥτις εἶναι τὸ πρῶτον ἐφευρεθὲν *αὐτογραφικὸν* ὄργανον. Διὰ τῆς μηχανῆς ταύτης πῖπτον σῶμα Σ, ἐφ' οὗ εἶναι προσηρμοσμένη μολυβδὶς M, ἀναγκάζεται νὰ διαγράψῃ καμπύλην, δι' ἧς δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν γεωμετρικῶς πάσας τὰς λεπτομερείας τῆς πτώσεως τοῦ σώματος καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς νόμους αὐτῆς. Τὴν μηχανὴν ταύτην ἀποτελεῖ

κυρίως κατακόρυφος ξύλινος κύλινδρος Κ, δυνάμενος νὰ περιστρέφηται περὶ τὸν ἑαυτοῦ ἄξονα. Πρὸ ἑκάστου δὲ πειράματος καλύπτομεν τὸν κύλινδρον διὰ χάρτου κεχαραγμένου εἰς τετράγωνα ἢ εἰς ὀρθογώνια οὕτως, ὥστε ἡ μὲν ἑτέρα τῶν παραλλήλων πλευρῶν σειρὰ νὰ εἶναι ὁριζόντιος, ἡ δὲ ἑτέρα κατακόρυφος. Θὰ χρησιμεύσωσι δὲ αἱ μὲν κατακόρυφοι πρὸς μέτρησιν τοῦ διαστήματος τοῦ διανυομένου ὑπὸ τοῦ κατὰ μῆκος τοῦ κυλίνδρου πίπτοντος σώματος Σ, αἱ δὲ ὁριζόντιοι πρὸς διαίρεσιν τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως εἰς μέρη ἴσα. Κατὰ δὲ τὴν πτῶσιν τοῦ σώματος ἡ μολυβδὶς, ἂν μὲν ὁ κύλινδρος δὲν στρέφηται, γράφει μίαν τοῦ κυλίνδρου γενέτειραν, ἂν δὲ στρέφηται ἰσοταχῶς, γράφει καμπύλην.

Μετὰ τὸ πείραμα, ἂν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου ἐπὶ ἐπιπέδου ἀναπτύξωμεν, ζητήσωμεν δὲ τὴν σχέσιν ἥτις συνδέει τὰς τετμημένας πρὸς τὰς τεταγμένας ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης, θὰ εὕρωμεν ὅτι, ἂν ὁ κύλινδρος περιεστράφη ἰσοταχῶς, ἡ διαγραφεῖσα καμπύλη εἶναι *παραβολή*, ἔχουσα κορυφὴν τὴν ἀρχικὴν τοῦ κινητοῦ θέσιν καὶ ἄξονα τὴν διὰ τῆς ἀρχικῆς ταύτης θέσεως τοῦ κινητοῦ κατακόρυφον. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ νόμου τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων $\psi = \frac{1}{2} g \chi^2$, ἔνθα χ παριστᾷ τὸν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς πτώσεως παρελθόντα χρόνον εἰς δευτερόλεπτα καὶ ψ τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ κινητοῦ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον διάστημα, τὸ δὲ g ἔχει σταθερὰν τιμήν.



Ἡ μηχανὴ τοῦ *Morin* ἐγένετο ἀφορμὴ ἐφευρέσεως πολλῶν ***αὐτογραφικῶν*** ὀργάνων, οἷον τοῦ βαρογράφου, τοῦ ἀνεμογράφου, τοῦ θερμογράφου, τοῦ παλιρροιογράφου καὶ ποικίλων ἠλεκτρικῶν καὶ μαγνητικῶν ὀργάνων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Εὑρεῖν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, οὗ αἱ τῶν κορυφῶν συντεταγμέναι εἶναι (2, 1), (5, 8) καὶ (—1, 0).

2) Δεδομένων τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν διαμέσων.

$$\left(\text{'Απ. } \chi=\frac{\chi_1+\chi_2+\chi_3}{3},\ \psi=\frac{\psi_1+\psi_2+\psi_3}{3}\right).$$

3) Δεδομένης τῆς ἐξισώσεως $\psi^2-\chi^2=6$ (παριστώσης *ὑπερβολήν*), εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς αὐτῆς γραμμῆς εἰς ἄξονας διχοτομοῦντας τὰς γωνίας τῶν πρώτων ἀξόνων. ('Απ. $\chi'\psi'=3$.)

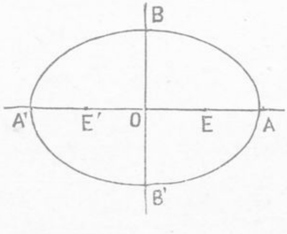
4) Εὑρεῖν τὰς ἰδιότητας τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{6^2}=1 \quad \text{εἴτε} \quad \psi=\pm\frac{6}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$$

παριστωμένης γραμμῆς, ἥτις καλεῖται *ἔλλειψις*, καὶ κατασκευάσαι αὐτήν.

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ καμπύλη αὕτη τέμνει τὸν μὲν ἄξονα ΟΧ εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α′ ἔχοντα τετμημένας $+\alpha$ καὶ $-\alpha$, τὸν δὲ ἄξονα ΟΨ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β′ ἔχοντα τεταγμένας $+6$ καὶ -6. (Συνήθως ὑποτίθεται $\alpha>6$).

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα (ΟΑ) $=\alpha$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι (366) $\psi'=\pm\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$, προκύπτει ὅτι $\psi:\psi'=6:\alpha$. Ἐκ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης, δηλαδὴ τοῦ σταθεροῦ λόγου, ὃν ἔχουσιν αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην ἀντιστοιχοῦσαι τεταγμέναι τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, συνάγονται αἱ ἑξῆς δύο τῆς ἐλλείψεως κατασκευαί.

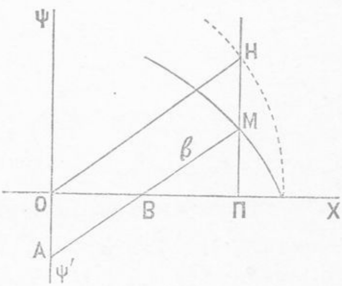


1η *Κατασκευή*. Ἂν ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ (ἅτινα καλοῦνται *μέγας ἄξων καὶ μικρὸς ἄξων* τῆς ἐλλείψεως), ὡς ἐπὶ διαμέτρων, γραφῶσι δύο κύκλοι, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Ο ἀχθῇ ἀκτίς τις, οἷον, ἡ ΟΘΗ, ἐκ δὲ τοῦ Η ἡ ΗΠ τῇ ΟΠ παράλληλος, ἐκ δὲ τοῦ Θ ἡ ΘΜ τῇ ΟΑ παράλληλος, τὸ Μ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως. Διότι

ΠΜ : ΠΗ = ΟΘ : ΟΗ, ἤτοι $\psi : \psi' = \beta : \alpha$.

Ἀλλάσσοντες ἄρα τὴν ἀκτῖνα ΟΘΗ εὑρίσκομεν ὅσα ἂν θέλωμεν σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, ἅτινα ἂν ἑνώσωμεν διὰ συνεχοῦς γραμμῆς θὰ ἔχωμεν τὴν ἔλλειψιν.

2α *Κατασκευή*. Ἂν κανόνα ΑΜ σταθεροῦ μήκους α, οὗ τὸ τμῆμα ΒΜ ἔχει μῆκος β, κινήσωμεν οὕτως, ὥστε τὰ δύο αὐτοῦ σημεῖα Α καὶ Β νὰ ἅπτωνται πάντοτε τῶν πλευρῶν ΟΧ, ΟΨ γωνίας ὀρθῆς, τὸ ἄκρον αὐτοῦ Μ θὰ διαγράφῃ ἔλλειψιν.



Διότι, ἂν ἄξονες συντεταγμένων ληφθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ, ἐκ δὲ τοῦ Ο ἀχθῇ ἡ ΟΗ τῇ ΑΜ παράλληλος μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς τεταγμένης ΠΜ, θὰ ἔχωμεν

$$(\text{ΟΗ})=(\text{ΑΜ})=\alpha,\quad (\text{ΒΜ})=\beta,\quad (\text{ΟΠ})=\chi,\quad (\text{ΠΜ})=\psi$$

ὅθεν
$$(\text{ΠΜ}) : (\text{ΠΗ}) = (\text{ΒΜ}) : (\text{ΟΗ}) = \beta : \alpha.$$

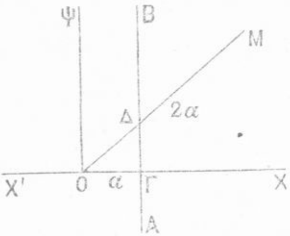
Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Η γράφει περιφέρειαν κύκλου, διότι ἡ ΟΗ εἶναι σταθερά, συνάγεται ὅτι, ἡ ὑπὸ τοῦ σημείου Μ γραφομένη γραμμὴ εἶναι ἔλλειψις.

Εὑρίσκεται δὲ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ταύτης, ἂν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀναλογίᾳ (ΠΜ) : (ΠΗ) = $\beta : \alpha$, ἀντικατασταθῶσιν ἀντὶ τῶν (ΠΗ) καὶ (ΠΜ) αἱ τούτων τιμαὶ $(\text{ΠΗ})=\sqrt{(\text{ΟΗ})^2-(\text{ΟΠ})^2}=\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$ καὶ (ΠΜ) = ψ, ὅτε θὰ προκύψῃ

$$\psi : \sqrt{\alpha^2-\chi^2} = \beta : \alpha \cdot \quad \text{ὅθεν} \quad \psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\chi^2}.$$

5) Εὑρεῖν τὰς ἰδιότητας τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$$

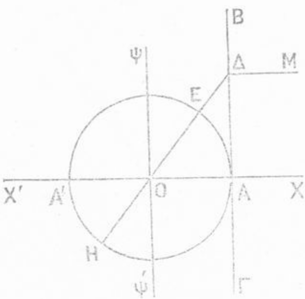


παριστωμένης καμπύλης (*ὑπερβολῆς*).

6) Ἐκ δεδομένου σημείου Ο, οὗ ἡ ἀπὸ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ ἀπόστασις εἶναι α, ἄγονται ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖαι, οἷα ἡ ΟΔ, καὶ λαμβάνεται (ΔΜ)$=2\alpha$.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς (*κογχοειδοῦς*), ἣν τὸ σημεῖον Μ γράφει.

$$\left(\text{'Απ.}\ \psi^2 = \left(\frac{2\alpha\chi}{\chi-\alpha}\right)^2 - \chi^2 .\right)$$



7) Δεδομένης τῆς εὐθείας ΑΒ, καθέτου εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς διαμέτρου Α'ΟΑ τοῦ δεδομένου κύκλου Ο, ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου Ο εὐθεῖαι μέχρι τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ, οἷα ἡ ΗΟΔ, καὶ εἶτα ἐκ τοῦ ἄκρου Δ ὑψοῦται ἡ ΔΜ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος καὶ ἴση τῇ ΔΕ.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς, ἣν τὸ σημεῖον Μ γράφει.
('Απ. $\psi^2=\chi^2-\alpha^2$, τεθέντος (ΟΑ)$=\alpha$.)

8) Νὰ διερευνηθῶσιν αἱ συναρτήσεις

$$\psi=\chi+\frac{4}{\chi} \text{ καὶ } \psi=\chi-\frac{5}{\chi},$$

ὅταν τὸ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$.

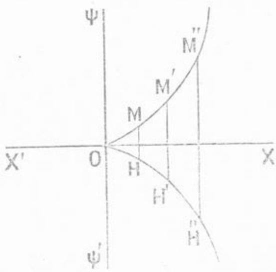
9) Νὰ διερευνηθῶσιν αἱ συναρτήσεις $\psi=\chi^2-8\chi-20$ καὶ $\psi=-\chi^2+2\chi-5$, ὅταν τὸ χ μεταβάλληται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$.

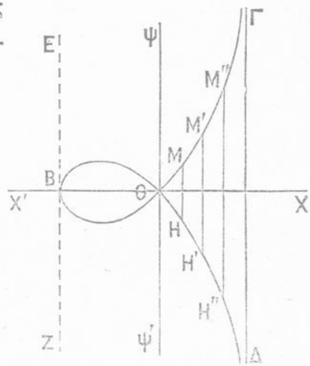
10) Εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, οὗ αἱ τῶν πλευρῶν ἐξισώσεις εἶναι, τῆς μὲν ΒΓ ἡ $\chi+\psi=2$,

τῆς δὲ ΓΑ ἡ $\chi-3\psi=4$, τῆς δὲ ΑΒ ἡ $3\chi+5\psi+7=0$.

, ('Απ. $A\left(-\frac{1}{14},-\frac{19}{14}\right)$, $B\left(\frac{17}{2},-\frac{13}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$.)

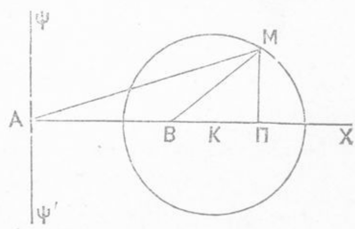
11) Εὑρεῖν τὰς ἰδιότητας τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi^2=\chi^3$ παριστωμένης γραμμῆς.





12) Νὰ διερευνηθῇ ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\pm\sqrt{\dfrac{1-\chi}{1+\chi}}$ παριστωμένη καμπύλη, ἥτις καλεῖται *στροφοειδής*.

13) Εὑρεῖν τὸν τόπον τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων Α,Β ἀποστάσεις ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ ὁ ἀριθμὸς 3 πρὸς τὸν 2 (Πρβ. ἐδ. 267).



Πρὸς τοῦτο ἂν ληφθῇ ἡ μὲν εὐθεῖα ΑΒ ἄξων τετμημένων, τὸ δὲ σημεῖον Α ἀρχὴ τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου Μ (χ,ψ) τοῦ τόπου θὰ ἀληθεύωσι τὴν σχέσιν

$$\frac{MA}{MB}=\frac{3}{2} \quad (1) \quad \text{εἴτε} \quad \frac{(MA)^2}{(MB)^2}=\frac{9}{4},$$

τὴν ἐκφράζουσαν τὴν κοινὴν ἰδιότητα τῶν σημείων.

'Αλλὰ (κατὰ ἐδ. 365) $(MA)^2=\chi^2+\psi^2$ καὶ $(MB)^2=(\chi-\alpha)^2+\psi$, τεθέντος $(AB)=\alpha$.

Ἂν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει (1) ἀντὶ τῶν $(MA)^2$,$(MB)^2$, ἀντικατασταθῶσιν αἱ τούτων τιμαί, θὰ προκύψῃ ἡ τοῦ ζητουμένου τόπου ἐξίσωσις

$$\frac{\chi^2+\psi^2}{(\chi-\alpha)^2+\psi^2}=\frac{9}{4}, \quad \text{ἤτοι } \chi^2+\psi^2-\frac{18}{5}\alpha\chi+\frac{9}{5}\alpha^2=0.$$

Παριστᾷ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιφέρειαν κύκλου (366). Ἂν δὲ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi^2+\left(\chi-\frac{9}{5}\alpha\right)^2=\frac{36}{25}\alpha^2$, εἶναι ἀμέσως πρόδηλον ὅτι τὸ μὲν κέντρον αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, ἔχον τετμημένην $\frac{9\alpha}{5}$, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτῆς ἔχει μῆκος $\frac{6\alpha}{5}$.

14). Εὑρεῖν τὰς συντεταγμένας τῶν τομῶν τῆς περιφερείας

$$\chi^2+\psi^2-5\chi+3\psi+6=0$$

ὑπὸ τῆς εὐθείας $\psi=2\chi-3$ καὶ ὑπὸ τῶν ἀξόνων.

15). Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-2\chi-5=0$.

Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων εἰς ὃ ἔχει κατασκευασθῇ ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2$ (Σχ. σελ. 264) κατασκευάζομεν μετ' ἀκριβοῦς κλίμακος τὸν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων διερχόμενον κύκλον, οὗ αἱ τοῦ κέντρου Κ συντεταγμέναι εἶναι $\alpha=\frac{5}{2}$, $6=\frac{3}{2}$.

Ἐπειδὴ ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὴν παραβολὴν εἰς ἓν μόνον, διάφορον τοῦ Ο, σημεῖον Μ, ἕπεται ὅτι ἡ δεδομένη ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ῥίζαν πραγματικήν, παριστωμένην ὑπὸ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τούτου. Μετροῦντες δὲ τὴν τεταγμένην ταύτην διὰ τῆς κλίμακος τοῦ σχεδίου εὑρίσκομεν $\chi=2{,}09$.

16). Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-5\chi+1=0$.

Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν τὸν διὰ τοῦ σημείου Ο διερχόμενον κύκλον οὗ τὸ κέντρον Κ ἔχει συντεταγμένας $\chi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\psi=3$.

Τέμνει δὲ ὁ κύκλος τὴν παραβολὴν εἰς τρία διάφορα τοῦ Ο σημεῖα· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις ἔχει τρεῖς ῥίζας πραγματικάς. Μετροῦντες δὲ τὰς τεταγμένας τῶν σημείων τομῆς, εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμὰς τῶν ῥιζῶν· $\chi'=0{,}20$, $\chi''=2{,}13$ καὶ $\chi'''=-2{,}33$.

17) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-3\chi^2+1=0$.

Ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ τεθῇ $\chi=\chi'+1$, θὰ ἀφανισθῇ ὁ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὅρος καὶ θὰ ἔχωμεν $\chi'^3-3\chi'-1=0$.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Κ εἶναι $\alpha=\frac{1}{2}$ καὶ $\beta=2$.

18) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+\pi\chi+\varkappa=0$, ἧς οἱ συντελεσταὶ εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί.

Ἐπειδὴ συμβαίνει πολλάκις, ἕνεκα τῶν μεγάλων σχετικῶς τιμῶν τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχεδίου, μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν θέτοντες $\chi=\lambda\chi'$, ὅτε θὰ προκύψῃ

$$\chi^3+\pi\chi+\varkappa=\lambda^3\chi'^3+\lambda\pi\chi'+\varkappa=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi'^3+\pi'\chi+\varkappa'=0,$$

ἔνθα ἐτέθη $\pi'=\frac{\pi}{\lambda^2},\ \varkappa'=\frac{\varkappa}{\lambda^3}$.

Οὕτω δέ, ἂν εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ λ, θὰ ἔχωμεν τὰς ῥίζας τῆς δεδομένης ἐξισώσεως.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+200\chi-4000=0$, ἂν τεθῇ $\chi=10\chi'$, γίνεται $\chi'^3+2\chi'-4=0$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ θετικὴ ῥίζα τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως εἶναι $\chi'=1{,}18$, ἕπεται ὅτι ἡ τῆς δεδομένης εἶναι $\chi=11{,}80$.

19) Δοθείσης τῆς ἐλλείψεως $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ (σελ. 268, 4ον), θεωροῦμεν τὰ ἐπὶ τοῦ μεγάλου αὐτῆς ἄξονος Α'Α σημεῖα $E(\gamma,0)$ καὶ $E'(-\gamma,0)$ (ὅπου $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$), ἅτινα καλοῦνται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως, καὶ τὰς ἐκ τῶν σημείων $\Delta\left(\frac{\alpha^2}{\gamma},0\right)$ καὶ $\Delta'\left(-\frac{\alpha^2}{\gamma},0\right)$ ἀγομένας παραλλήλως τῷ μικρῷ ἄξονι Β'Β εὐθείας, αἵτινες καλοῦνται *διευθετοῦσαι* αὐτῆς. Ἀποδεικτέον ὅτι αἱ ἀποστάσεις παντὸς σημείου τῆς ἐλλείψεως 1ον) ἀπό τινος τῶν ἑστιῶν καὶ ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου διευθετούσης ἔχουσι λόγον σταθερῶς ἴσον πρὸς $\frac{\gamma}{\alpha}$, 2ον) ἀπὸ τῶν δύο ἑστιῶν ἔχουσιν ἄθροισμα σταθερῶς ἴσον πρὸς 2α.

Περὶ τόξων περιφερείας.

Ὁρισμοί.

375. *Τόξον περιφερείας καλεῖται πᾶσα ὑπὸ σημείου κινηθέντος ἐπὶ δοθείσης περιφερείας διανυθεῖσα ὁδός.*

Ἐν παντὶ ἄρα τόξῳ διακρίνονται τέσσαρά τινα· *ἡ ἀρχή, τὸ τέλος, ἡ φορὰ καθ' ἣν* τὸ τόξον ἐγράφη καὶ *ὁ ἀριθμὸς* ὁ δεικνύων ποσάκις τὸ κινηθὲν σημεῖον διῆλθε διὰ τοῦ τέλους τοῦ τόξου.

1

Ἡ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας *φορὰ* κινητοῦ σημείου συνήθως λαμβάνεται *θετικὴ* μέν, ἂν τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς πρὸς τὸ τέλος τοῦ τόξου κινηθὲν σημεῖον ἐκινήθη ἀντιθέτως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου (ἐκ δεξιῶν δηλαδὴ πρὸς τὰ ἀριστερὰ *θεατοῦ* ἱσταμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου *κατὰ* τὸ κέντρον αὐτοῦ *καὶ* πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ *κύκλου*), *ἀρνητικὴ* δέ, ἂν τἀνάπαλιν.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τόξα *θετικὰ* ἢ *ἀρνητικά*, ἔχοντα δηλαδὴ φορὰν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, ὁσωνδήποτε μοιρῶν.

Πᾶν τόξον ἔχον ἀρχὴν μὲν τὸ σημεῖον Α πέρας δὲ τὸ Β παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου ΑΒ, ἔνθα γράφεται *καὶ* ἀπαγγέλλεται πρῶτον ἡ ἀρχὴ Α. Δύο δὲ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν τόξα, ἂν μὲν εἶναι ἰσομήκη *καὶ* τῆς αὐτῆς φορᾶς λέγονται *ἴσα*, ἂν δὲ εἶναι ἰσομήκη *καὶ* ἀντιθέτου φορᾶς λέγονται *ἀντίθετα*.

Περὶ γωνιῶν.

Ὁρισμός.

376. *Γωνία* δύο εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο ἀρχομένων *καὶ* ἐξ ὧν ἡ δευτέρα ΟΒ θεωρεῖται προκύψασα ἐκ τῆς πρώτης ΟΑ στραφείσης περὶ τὸ σημεῖον Ο καθ' ὡρισμένον τρόπον, *καλεῖται* τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους γωνιῶν ἃς *κατὰ* τὴν περὶ τὸ σημεῖον Ο στροφὴν αὐτῆς ἔγραψεν ἡ ΟΑ, ἕως οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΒ.

1

Ἐν πάσῃ ἄρα γωνίᾳ διακρίνονται τὰ ἑξῆς τέσσαρα· *ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ* ΟΑ τῆς γωνίας, *ἡ τελικὴ πλευρὰ* ΟΒ, *ἡ φορὰ καθ' ἣν ἡ*

(1) Ἀφορᾷ τὸ 146 ἐδάφ-
τόξα καὶ ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ἢ
ἴσων κύκλων εἶνε τὸ αὐτὸ καὶ [illegible] ἀνάπαλιν.

ἀρχικὴ πλευρὰ περιεστράφη καὶ ὁ *ἀριθμὸς* ὁ δεικνύων ποσάκις ἡ κινηθεῖσα πλευρὰ διῆλθε διὰ τῆς τελικῆς αὐτῆς θέσεως.

377. Ἐὰν δὲ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας καὶ τέμνουσα τὴν πλευρὰν τὴν διαγράφουσαν τὴν γωνίαν κατὰ τὸ κινητὸν σημεῖον Μ, εἰς πᾶσαν γωνίαν διαγραφομένην ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΟΜ ἀντιστοιχεῖ ἓν τόξον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας, διαγραφόμενον ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Μ.

Καὶ ἀντιστρόφως δὲ εἰς πᾶν τόξον τῆς περιφερείας ταύτης ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία τελείως ὡρισμένη.

Ἡ γωνία, ἡ οὕτως ἀντιστοιχοῦσα εἴς τι τόξον, παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ τόξον ἀριθμοῦ, ἂν ἡ πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν μονὰς εἶναι ἡ γωνία ἡ *ἀντιστοιχοῦσα* εἰς τὸ τόξον. ὅπερ λαμβάνομεν ὡς μονάδα πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων (309).

Γωνία τις θεωρεῖται ὡς *θετικὴ* ἢ *ἀρνητικὴ* ὅταν καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον θεωρῆται ὡς *θετικὸν* ἢ *ἀρνητικόν*, κατὰ τὰ ἀνωτέρω (375) ὁρισθέντα. (Οὕτως ἐν τῷ σχήματι τοῦ ἐδ. 380 ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ εἶναι θετική, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ′ ἀρνητική).

Περὶ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

378. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐδιδάχθημεν τὴν γραφικὴν λύσιν τῶν περὶ τὰ τρίγωνα προβλημάτων, τὴν κατασκευὴν δηλαδὴ παντὸς τριγώνου, οὗ ἐδόθησαν ἐπαρκῆ στοιχεῖα. Λοιπὸν ἂν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες στοιχεῖά τινα τριγώνου καὶ ζητοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες ἄλλα τινὰ αὐτοῦ στοιχεῖα, δυνάμεθα, κατασκευάζοντες, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δοθέντων στοιχείων, τρίγωνον ἴσον ἢ ὅμοιον, νὰ προσδιορίσωμεν κατόπιν ἐκ τοῦ κατασκευασθέντος τριγώνου διὰ μετρήσεως τὰ ζητούμενα στοιχεῖα.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ δὲν παρέχει τὰ ζητούμενα μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας, ὅταν μάλιστα, ἕνεκα τοῦ μεγέθους τοῦ σχήματος, ἀναγκαζώμεθα νὰ κατασκευάζωμεν ἄλλο τούτου ὅμοιον ὑπὸ μικροτέραν *κλίμακα* (327), ὅτε προδήλως καὶ τὰ λάθη πολλαπλασιαζόμενα ἀποβαίνουσι μᾶλλον σημαντικά, διὰ τοῦτο

λύουσιν εἰς ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα καὶ ἐντεῦθεν ἡ Τριγωνομετρία καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί ἐπενόησαν τὴν ἐπίλυσιν τῶν περὶ τὰ τρίγωνα προβλημάτων διὰ μεθόδων καθαρῶς λογιστικῶν.

Τὸ μέρος δὲ τῆς μαθηματικῆς τὸ διδάσκον τὸν διὰ λογισμοῦ προσδιορισμὸν τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου ἐξ ἐπαρκῶν δεδομένων καλεῖται τριγωνομετρία.

Πρὸς τοῦτο εἰσήχθησαν ἀριθμοί τινες ἀντιστοιχοῦντες εἰς δεδομένον τόξον ἢ γωνίαν καὶ καλούμενοι *τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας.

Οἱ ἀριθμοὶ δὲ οὗτοι εἶναι οἱ ἑξῆς ἕξ· τὸ *ἡμίτονον*, τὸ *συνημίτονον*, ἡ *ἐφαπτομένη*, ἡ *συνεφαπτομένη*, ἡ *τέμνουσα* καὶ ἡ *συντέμνουσα*. Παρίστανται δὲ συντόμως ὧδε: *ἡμ*, *συν*, *ἐφ*, *σφ*, *τέμ*, *συντ*.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκλήθησαν καὶ *κυκλικαὶ συναρτήσεις*, διότι, ὅταν μὲν ἡ ἀντίστοιχος γωνία εἶναι ὡρισμένη, καὶ οὗτοι εἶναι ὡρισμένοι, μεταβαλλομένης δὲ τῆς γωνίας, καὶ οὗτοι μεταβάλλονται.

Αἱ τῶν γωνιῶν κυκλικαὶ συναρτήσεις εἶναι πάντοτε αἱ αὐταὶ πρὸς τὰς τῶν ἀντιστοίχων τόξων (377), ἅτινα ἔχουσι τὰ αὐτὰ καὶ αἱ γωνίαι μέτρα.

379. Ἁπλούστατος εἶναι ὁ ὁρισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας τ, ὅταν ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀξεῖα. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ τυχὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ, ἐν ᾧ ἡ κατὰ σημεῖον Ο γωνία εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ τ, καὶ οὗτινος ὑποτείνουσα ἔστω ἡ ΟΜ. Καλοῦμεν δὲ ἡμ τ, συν τ, ἐφ τ, σφ τ, τέμ φ, συν τ τοὺς λόγους

$$\frac{\Pi M}{OM}, \quad \frac{O\Pi}{OM}, \quad \frac{\Pi M}{O\Pi}, \quad \frac{O\Pi}{\Pi M}, \quad \frac{OM}{O\Pi}, \quad \frac{OM}{\Pi M},$$

(1)

οἵτινες μένουσιν ἀμετάβλητοι ἂν τὸ τρίγωνον ΟΠΜ ἀντικατασταθῇ ὑφ' οἱουδήποτε ἄλλου ὀρθογωνίου Ο′Π′Μ′ ἔχοντος τὴν γωνίαν Ο′ ἴσην τῇ τ (247).

Ἔχομεν δὲ κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην προφανῶς

$$\text{ἐφ}\,\tau = \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{συν}\,\tau}, \quad \text{σφ}\,\tau = \frac{\text{συν}\,\tau}{\text{ἡμ}\,\tau}, \quad \text{τέμ}\,\tau = \frac{1}{\text{συν}\,\tau}, \quad \text{συντ}\,\tau = \frac{1}{\text{ἡμ}\,\tau}.$$

Οὕτως οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 45^0 ἔχουσι τὰς

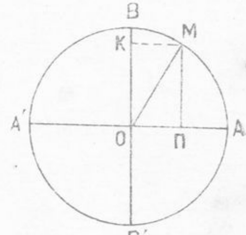
(1) ἕνωσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων

ἑξῆς τιμάς : $ἡμ\,45^0 = συν\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$ἐφ\,45^0 = σφ\,45^0 = 1 \quad καὶ \quad τέμ\,45^0 = συντ\,45^0 = \sqrt{2},$$

μὴ ἐξαρτώμενοι ποσῶς ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ θεωρουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ἔχοντος μίαν γωνίαν 45^0.

380. Ἐὰν δὲ οἱασδήποτε δεδομένης γωνίας, οἷον τῆς ΑΟΜ, λάβωμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον μὲν τὴν κορυφὴν Ο, ἀκτῖνα δὲ ἥντιναδήποτε, ἀγάγωμεν δὲ τὰς καθέτους διαμέτρους ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ (τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΒ οὔσης θετικῆς, προκυπτούσης δηλ. ἐκ στροφῆς τῆς ΟΑ πρὸς τὰ ἀριστερά), θὰ ὁρίσωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου ἢ τῆς ἀντιστοίχου γωνίας ὡς ἑξῆς : (1)



Ἡμίτονον τόξου καλεῖται ὁ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου λόγος τῆς καθέτου τῆς ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἀγομένης ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου τούτου διερχομένην διάμετρον. Οὕτως

$$ἡμ\,τ = ἡμ\,ΑΟΜ = \frac{ΠΜ}{ΟΜ}.$$

Συνημίτονον τόξου καλεῖται ὁ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν μὲν τὸ κέντρον τοῦ τόξου τέλος δὲ τὸν πόδα τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ τέλους τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ τόξου διερχομένην διάμετρον. Οὕτω $συν\,τ = συν\,ΑΟΜ = \frac{ΟΠ}{ΟΜ}$.

Θεωρεῖται δὲ τὸ μὲν ἡμ τ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν καθόσον τὸ τμῆμα ΠΜ εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ ΟΒ (τὴν τελικὴν δηλ. πλευρὰν τῆς θετικῆς ὀρθῆς ΑΟΒ), τὸ δὲ συντ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν καθόσον τὸ τμῆμα ΟΠ εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ ΟΑ (Βλ. καὶ ἐδ. 387).

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων συνάγομεν ὅτι πάντα τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος ἔχουσι καὶ τὰ ἡμίτονα ἴσα καὶ τὰ συνημίτονα ἴσα.

(1) ἡ νέα ἔκδοσις ἔχει τὸν περιορισμὸν ἂν τὴν ἀκτῖνα λάβωμεν ὡς μονάδα καὶ ἐπειδὴ [illegible]

381. *Ἐφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου διὰ τοῦ συνημιτόνου· ἤτοι ἐφ τ=ἐφ ΑΟΜ=* $\frac{\text{ἡμ } \tau}{\text{συν } \tau}$.

Συνεφαπτομένη τόξου καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου διὰ τοῦ ἡμιτόνου· ἤτοι σφ τ=σφΑΟΜ= $\frac{\text{συν } \tau}{\text{ἡμ } \tau}$.

382. *Τέμνουσα τόξου καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου· ἤτοι τέμ τ=τέμ ΑΟΜ=* $\frac{1}{\text{συν } \tau}$.

Συντέμνουσα τόξου καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου· ἤτοι συντ τ=συντ ΑΟΜ= $\frac{1}{\text{ἡμ } \tau}$.

Σημείωσις. Ἀντὶ τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συντεμνούσης τόξου τινός, συνήθως θεωροῦμεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{1}{\text{συν } \tau}$ καὶ $\frac{1}{\text{ἡμ } \tau}$.

383. Πρόδηλον εἶναι ὅτι οἱ γενικοὶ οὗτοι ὁρισμοὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς τυχούσης γωνίας συμπίπτουσι, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ γωνία εἶναι ὀξεῖα, πρὸς τοὺς ἐν ἐδ. 379.

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ γενικεύσωμεν *ἀμεσώτερον* τοὺς ἐν ἐδ. 379 ὁρισμούς, δυνάμεθα νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῆς ἑξῆς παρατηρήσεως:

Ἂν ἐν ἐπιπέδῳ λάβωμεν δύο ἄξονας ΟΧ, ΟΨ ὀρθογωνίους καὶ θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα μήκους ρ, τέμνουσαν δὲ τοὺς ἄξονας κατὰ τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β, Β′, καλέσωμεν δὲ χ, ψ τὰς *συντεταγμένας* (ΟΠ) καὶ (ΠΜ) τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ καὶ ΟΨ (352), οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας (ΑΟΜ)=τ θὰ ἔχωσι, συμφώνως πρὸς τοὺς ἄνω ὁρισμούς, τὰς ἑξῆς τιμάς:

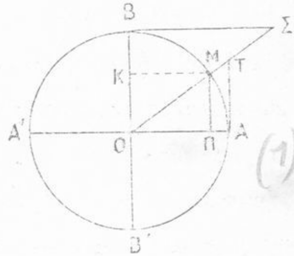
$$\text{ἡμ } \tau = \frac{\psi}{\rho},\ \text{συν } \tau = \frac{\chi}{\rho},\ \text{ἐφ } \tau = \frac{\psi}{\chi},\ \text{σφ } \tau = \frac{\chi}{\psi},\ \text{τέμ } \tau = \frac{\rho}{\chi},\ \text{συντ } \tau = \frac{\rho}{\psi}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητοι τοῦ μεγέθους τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ θεωρηθέντος κύκλου, ὡς καὶ τῆς μονάδος μήκους.

Ἔχουσι δὲ προφανῶς *πάντα τὰ τόξα* ΑΜ, *τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος, πάντας τοὺς τριγωνομετρικοὺς αὐτῶν ἀριθμοὺς ἴσους, ἕκαστον ἑκάστῳ.*

Γραμμαὶ τριγωνομετρικαί.

384. Ἐκ τῶν ἄνω (380) γίνεται δῆλον ὅτι τὰ ἡμ τ καὶ συν τ *συμπίπτουσι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὰ μήκη τῶν τμημάτων* ΠΜ *καὶ* ΟΠ, *ὅταν μονὰς ληφθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.*



Ἐὰν τώρα κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀγάγωμεν τὰς εἰς τὴν θεωρουμένην περιφέρειαν ἐφαπτομένας καὶ προεκβάλωμεν αὐτὰς μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν εὐθεῖαν ΟΜ κατὰ τὰ σημεῖα Τ καὶ Σ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἕνεκα τῶν σχηματιζομένων ὁμοίων τριγώνων ΟΠΜ, ΟΑΤ, ΣΒΟ, ἔχομεν (1)

$$\text{ἐφ}\,\tau = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OB}},\quad \text{σφ}\,\tau = \frac{\mathrm{B\Sigma}}{\mathrm{OA}},\quad \text{τέμ}\,\tau = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OM}},\quad \text{συντ}\,\tau = \frac{\mathrm{O\Sigma}}{\mathrm{OM}}.$$

Οὕτως *οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* ἐφ τ, σφ τ, τέμ τ, συντ τ *τῆς γωνίας* τ ***συμπίπτουσι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς παριστῶντας τὰ τμήματα*** ΑΤ, ΒΣ, ΟΤ, ΟΣ *μετρηθέντα διὰ τῆς ἀκτῖνος.*

Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τὰ ἓξ τμήματα ΠΜ, ΟΠ, ΑΤ, ΒΣ, ΟΤ, ΟΣ ἐκλήθησαν *τριγωνομετρικαὶ γραμμαί.*

Ἰδιαιτέρως δὲ διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην ἔχομεν τοὺς ἑξῆς, ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἐν ἐδ. 381 δεδομένους διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον, ὁρισμούς.

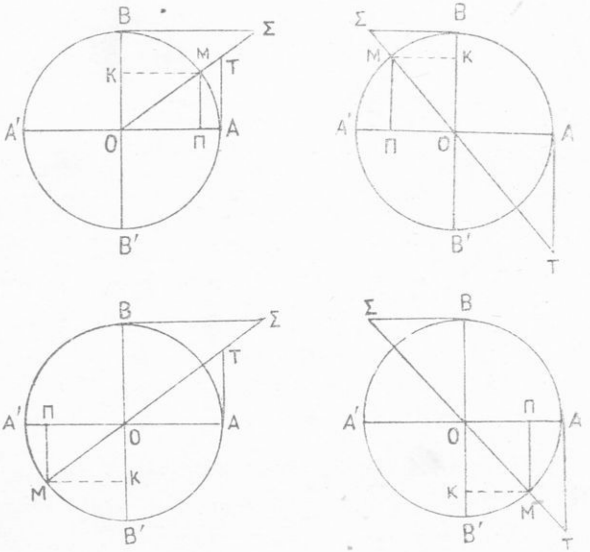
385. *Ἐφαπτομένη τόξου εἶναι ὁ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου λόγος τοῦ τμήματος τῆς ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ τόξου ἐφαπτομένης τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν μὲν τὴν τοῦ τόξου, πέρας δὲ τὸ σημεῖον ἔνθα ἡ ἐφαπτομένη αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου διερχομένης διαμέτρου.*

Συνεφαπτομένη τόξου εἶναι ὁ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου λόγος τοῦ τμήματος τῆς ἐν τῷ πέρατι τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ἐφαπτομένης, τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν μὲν τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον, πέρας

(1) Ἐκ τοῦ σχήματος ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων καταφαίνεται ἡ σύμπτωσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν πρὸς ὡρισμένα τμήματα μετρούμενα διὰ τῆς ἀκτῖνος.

δὲ τὸ σημεῖον ἔνθα ἡ ἐφαπτομένη αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου διερχομένης διαμέτρου.

386. Τὰ ἑπόμενα σχήματα δεικνύουσι τὰς ἓξ τριγωνομετρικὰς γραμμὰς τόξων περατουμένων ἑκάστου εἰς ἓν τῶν τεσσάρων τῆς περιφερείας τεταρτημορίων.



Σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

387. Αἱ τέσσαρες *τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ* ΠΜ, ΟΠ, ΑΤ καὶ ΒΣ, παράλληλοι οὖσαι αἱ μὲν δύο πρῶται πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ, αἱ δὲ δύο δεύτεραι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ, ἔχουσι μήκη θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ κατὰ τὰ ἐν ἐδ. 352 ὁρισθέντα.

Οὕτω 1) τὰ μὲν τμήματα ΠΜ καὶ ΑΤ ἔχουσι μήκη θετικὰ ἢ ἀρνητικά, καθ' ὅσον εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΒ (ἥτις εἶναι τελικὴ πλευρὰ τῆς θετικῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΒ).

2) Τὰ τμήματα ΟΠ καὶ ΒΣ ἔχουσι μήκη θετικὰ ἢ ἀρνητικά, καθ' ὅσον εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΑ.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ὅπως τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΟΠ καὶ ΠΜ, τῶν παριστώντων τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον, ὅταν ὡς μονὰς ληφθῇ ἡ ἀκτὶς (380), οὕτω καὶ τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΑΤ καὶ ΒΣ, τῶν παριστώντων τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην, ἔχουσιν εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις οὐ μόνον τὴν ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλὰ καὶ τὸ σημεῖον τῶν ἀντιστοίχων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο δὲ ἀμέσως φαίνεται, ἂν παραβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἀριθμῶν $\text{ἐφ}\,\varphi = \frac{\text{ἡμ}\,\tau}{\text{συν}\,\tau}$ καὶ $\text{σφ}\,\tau = \frac{\text{συν}\,\tau}{\text{ἡμ}\,\tau}$ πρὸς τὰ τῶν μηκῶν $(\text{ΑΤ}) = \frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΟΒ}}$ καὶ $(\text{ΒΣ}) = \frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΟΠ}}$, χωριστὰ εἰς ἑκάστην τῶν τεσσάρων περιπτώσεων τοῦ ἐδ. 386.

Συμφώνως πρὸς τοὺς τεθέντας κανόνας τὸ μὲν ἡμίτονον τόξου τινὸς εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 1ῳ ἢ ἐν τῷ 2ῳ τεταρτημορίῳ, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ τόξα τὰ ἀπὸ 0^0 μέχρι 180^0, ἀρνητικὸν δέ, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 3ῳ ἢ ἐν τῷ 4ῳ τεταρτημορίῳ, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ τόξα τὰ ἀπὸ 180^0 μέχρι 360^0.

Τὸ δὲ συνημίτονον τόξου τινὸς εἶναι θετικὸν μὲν, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 1ῳ ἢ ἐν τῷ 4ῳ τεταρτημορίῳ, ἀρνητικὸν δέ, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 2ῳ ἢ ἐν τῷ 3ῳ τεταρτημορίῳ.

Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τόξου τινὸς εἶναι θετικαὶ μέν, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 1ῳ ἢ ἐν τῷ 3ῳ τεταρτημορίῳ, ἀρνητικαὶ δέ, ἂν τὸ τέλος τοῦ τόξου κεῖται ἢ ἐν τῷ 2ῳ ἢ ἐν τῷ 4ῳ τεταρτημορίῳ.

388. ***Σημείωσις.*** Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὅτι, τῶν τόξων $0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0$ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἑξῆς:

$\text{ἡμ}\;0^0 = 0$, $\text{συν}\;0^0 = 1$, $\text{ἐφ}\;0^0 = 0$, $\text{σφ}\;0^0 = \pm\infty$,
$\text{ἡμ}\;90^0 = 1$, $\text{συν}\;90^0 = 0$, $\text{ἐφ}\;90^0 = \pm\infty$, $\text{σφ}\;90^0 = 0$,
$\text{ἡμ}\,180^0 = 0$, $\text{συν}\,180^0 = -1$, $\text{ἐφ}\,180^0 = 0$, $\text{σφ}\,180^0 = \pm\infty$,
$\text{ἡμ}\,270^0 = -1$, $\text{συν}\,270^0 = 0$, $\text{ἐφ}\,270^0 = \pm\infty$, $\text{σφ}\,270^0 = 0$,
$\text{ἡμ}\,360^0 = 0$, $\text{συν}\,360^0 = 1$, $\text{ἐφ}\,360^0 = 0$, $\text{σφ}\,360^0 = \pm\infty$.

Παρατήρησις. Ἐν σχέσει πρὸς τὸν τύπον ἐφ $90^0 = \pm\infty$, παρατηρητέον ὅτι, ὅταν γωνία τείνῃ πρὸς τὴν ὀρθὴν ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων (οὖσα δηλ. ὀξεῖα) ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ὅταν δὲ τείνῃ εἰς τὴν ὀρθὴν ἐκ τιμῶν μειζόνων (οὖσα δηλ. ἀμβλεῖα) ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς τείνει εἰς τὸ $-\infty$. Ὁμοία παρατήρησις δύναται νὰ γίνῃ περὶ τῶν ἐφ 270^0, σφ 0^0, σφ 180^0 καὶ σφ 360^0.

Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς γωνίας.

Θεώρημα.

389. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου γωνίας τινὸς ἰσοῦται τῇ μονάδι.*

Ἔστω ἡ γωνία (ΑΟΜ) $=\tau$ καὶ ΑΜ τὸ ἀντίστοιχον τόξον (377) ἐν κύκλῳ ἔχοντι κέντρον τὸ σημεῖον Ο.

Ἐπειδὴ (380, 384),

$$\text{ἡμ}\ \tau = \frac{(\Pi M)}{(OM)} \quad \text{καὶ συν}\ \tau = \frac{(O\Pi)}{(OM)},$$

ἕπεται ὅτι, ἂν τοῦ ἡμ τ καὶ τοῦ συν τ τὰ τετράγωνα, τὰ διὰ τῶν συμβόλων ἡμ^{2}τ καὶ συν^{2}τ παριστάμενα, προσθέσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = \frac{(O\Pi)^2 + (\Pi M)^2}{(OM)^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(O\Pi)^2 + (\Pi M)^2 = (OM)^2$, ἕπεται ὁ τύπος

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1. \tag{1}$$

Ἐπὶ πλέον πάσης γωνίας τ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συνδέονται (384) διὰ τῶν σχέσεων

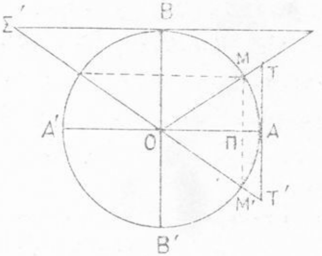
$$\text{ἐφ}\ \tau = \frac{\text{ἡμ}\ \tau}{\text{συν}\ \tau} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \quad \text{σφ}\ \tau = \frac{\text{συν}\ \tau}{\text{ἡμ}\ \tau}. \quad (3)$$

(1) Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων ἐχόντων ἁπλῆν πρὸς ἄλληλα σχέσιν.

390. ***Τόξα ἀντίθετα.*** Ἐπειδὴ δύο τόξα ἀντίθετα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α ἔχοντα, οἷον τὰ (ΑΜ) $=\tau$ καὶ (ΑΜ′) $=-\tau$, ἔχουσι τὰ αὐ-

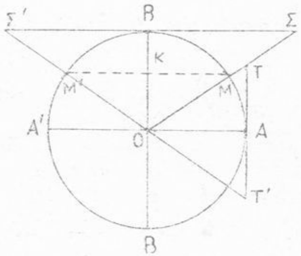
(1) διὰ τὰς σχέσεις ταύτας παρατηρῶ τὴν συμμετρικὴν [illegible]

τῶν πέρατα Μ καὶ Μ' συμμετρικὰ πρὸς τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς διάμετρον ΑΑ', ἕπεται ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ αὐτῶν ἀριθμοὶ εἶναι κατ' ἀπόλυτον μὲν τιμὴν ἴσοι, κατὰ δὲ τὸ σημεῖον ἀντίθετοι, πλὴν τῶν συνημιτόνων (καὶ τεμνουσῶν) ὄντων ἴσων καὶ ὁμοσήμων.

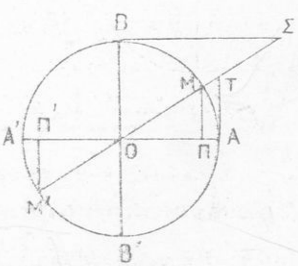


Θὰ ἔχωμεν ἄρα ἡμ(—τ)=—ἡμ τ, συν(—τ)=συν τ,
ἐφ(—τ)=—ἐφ τ, σφ(—τ)=—σφ τ.

391. ***Τόξα παραπληρωματικά.*** *Παραπληρωματικὰ τόξα καλοῦνται τὰ τόξα, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῇ ἡμιπεριφερείᾳ.* Ἤτοι, ἂν τὸ ἕτερον εἶναι (ΑΜ)=τ, τὸ τούτου παραπληρωματικὸν θὰ εἶναι (ΑΜ')=180^0—τ, κατ' ἀκολουθίαν τὰ τόξα ταῦτα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α, θὰ ἔχωσι πέρατα Μ καὶ Μ' πρὸς τὴν διάμετρον ΒΒ' συμμετρικά· εἶναι ἄρα προφανὲς ὅτι θὰ ἔχωμεν: ἡμ(180^0—τ)= ἡμ τ, συν(180^0—τ)=—συν τ,
ἐφ(180^0—τ)=—ἐφ τ, σφ(180^0—τ)=—σφ τ.



392. ***Τόξα διαφέροντα κατὰ 180°.*** Ἂν τὸ ἕτερον τούτων, οἷον τὸ (ΑΜ), παρασταθῇ διὰ τοῦ τ, τὸ ἕτερον (ΑΜ') θὰ εἶναι 180^0+τ, κατ' ἀκολουθίαν τὰ τόξα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὰ πέρατα πρὸς τὸ κέντρον συμμετρικά· προφανὲς ἄρα ὅτι θὰ ἔχωμεν:



ἡμ(180^0+τ)=— ἡμ τ,
συν(180^0+τ)=—συν τ,
ἐφ(180^0+τ)=ἐφ τ,
σφ(180^0+τ)=σφ τ.

ήτοι έχουσι τα αυτά ημίτονα και συνημίτονα αλλ' αντιστρόφως.

393. ***Τόξα συμπληρωματικά.*** *Συμπληρωματικὰ καλοῦνται δύο τόξα, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ.* Ἤτοι, ἂν τὸ ἕτερον εἶναι $(AM)=\tau$, τὸ ἕτερον εἶναι $(AM')=90^\circ-\tau$. Ἂν δὲ ἀχθῶσιν αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν ἀκτῖνες καὶ αἱ τριγωνομετρικαὶ αὐτῶν γραμμαί, ἐκ τῶν σχηματισθησομένων ἴσων τριγώνων θὰ ἔχωμεν

(1) $\eta\mu\,(90^\circ-\tau)=\sigma\upsilon\nu\ \tau.\qquad \sigma\upsilon\nu\,(90^\circ-\tau)=\eta\mu\ \tau,$

$\varepsilon\varphi\,(90^\circ-\tau)=\sigma\varphi\ \tau,\qquad \sigma\varphi\,(90^\circ-\tau)=\varepsilon\varphi\ \tau.$

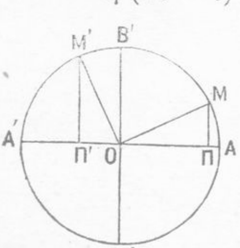
Παρατήρησις. Αἱ ὀνομασίαι *«συνημίτονον, συνεφαπτομένη, συντέμνουσα γωνίας τ»* ἔχουσι καθιερωθῆ χάριν συντομίας ἀντὶ *«ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, τέμνουσα τοῦ συμπληρώματος τῆς τ»*.

Σημείωσις. Χάριν ἁπλότητος ἐσημειώθησαν ἐν τῷ ἄνω σχήματι μόνον αἱ παριστῶσαι τὸ ἡμ τ καὶ συν τ τριγωνομετρικαὶ γραμμαί.

Ὅτι δ' ἔχομεν $\varepsilon\varphi\,(90^\circ-\tau)=\sigma\varphi\ \tau$, ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\,(90^\circ-\tau)=\frac{\eta\mu\,(90^\circ-\tau)}{\sigma\upsilon\nu\,(90^\circ-\tau)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\ \tau}{\eta\mu\ \tau}=\sigma\varphi\ \tau.$$

394. ***Τόξα διαφέροντα κατὰ 90°.*** Ἵνα εὕρωμεν τὰς σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων $90^\circ+\tau$ καὶ τ, ἅτινα διαφέρουσι κατὰ 90°, εὑρίσκομεν πρῶτον μὲν τὰς σχέσεις τῶν συμπληρωματικῶν τόξων $90^\circ+\tau$ καὶ $-\tau$, εἶτα δὲ τὰς σχέσεις τῶν ἀντιθέτων τόξων $-\tau$ καὶ τ· ἔχομεν οὕτως



$\eta\mu(90^\circ+\tau)=\sigma\upsilon\nu(-\tau)=\sigma\upsilon\nu\ \tau,\quad \sigma\upsilon\nu(90^\circ+\tau)=\eta\mu(-\tau)=-\eta\mu\ \tau.$

$\varepsilon\varphi(90^\circ+\tau)=\sigma\varphi(-\tau)=-\sigma\varphi\tau,\quad \sigma\varphi(90^\circ+\tau)=\varepsilon\varphi(-\tau)=-\varepsilon\varphi\ \tau.$

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 30°, 60°, 36°.

395. Ἵνα τῶν τόξων τούτων τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ὑπολογίσωμεν, παρατηροῦμεν ὅτι τόξου τινὸς τὸ ἡμίτονον ἰσοῦται

πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου, ὅπερ εἶναι τούτου διπλάσιον, μετρηθείσης διὰ τῆς ἀκτῖνος· κατ' ἀκολουθίαν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου τὸ μὲν μῆκος τῆς πλευρᾶς μετρηθείσης διὰ τῆς ἀκτῖνος εἶναι τὸ διπλάσιον ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἐπικέντρου γωνίας, τὸ δὲ μῆκος τοῦ ἀποστήματος εἶναι τὸ συνημίτονον τῆς αὐτῆς γωνίας. Οὕτω

1ον) $\text{ἡμ}\,30^0 = \frac{1}{2}$ μήκ. χορδῆς 60^0, ἤτοι $\text{ἡμ}\,30^0 = \frac{1}{2}$. (165)

Ἐπειδὴ δὲ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \text{συν}^2 30^0 = 1$ (389), ἕπεται ὅτι

$$\text{συν}^2 30^0 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\cdot \text{ ὅθεν } \text{συν}\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἐκ δὲ τῶν τύπων (2), (3) τοῦ ἐδ. 389, ἂν ἀντὶ τοῦ ἡμ 30^0 καὶ συν 30^0 ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐφ}\,30^0 = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ καὶ } \text{σφ}\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

2ον) $\text{ἡμ}\,60^0 = \text{συν}\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{συν}\,60^0 = \text{ἡμ}\,30^0 = \frac{1}{2}$,

$$\text{ἐφ}\,60^0 = \text{σφ}\,30^0 = \sqrt{3}, \quad \text{σφ}\,60^0 = \text{ἐφ}\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (393)$$

3ον) $\text{ἡμ}\,36^0 = \frac{1}{2}$ μήκ. χορδῆς $72^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, (276)

$$\text{συν}^2 36^0 = 1 - \text{ἡμ}^2 36^0 = 1 - \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16},$$

ἤτοι $\text{συν}\,36^0 = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{1+5+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

καὶ ἄρα $\text{ἐφ}\,36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$ καὶ $\text{σφ}\,36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

Ἐν ἐδ. 379 εἴδομεν ἤδη ὅτι

$$\text{ἡμ}\,45^0 = \text{συν}\,45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ } \text{ἐφ}\,45^0 = \text{σφ}\,45^0 = 1.$$

Τόξα ὧν δίδεται τριγωνομετρικός τις ἀριθμός.

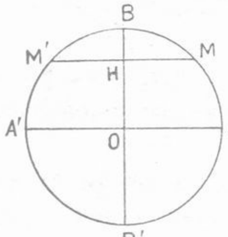
396. Ὡς γινώσκομεν πᾶν τόξον ἕνα μόνον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἑκάστου εἴδους ἔχει· τἀνάπαλιν δέ, εἰς δεδομένον τριγω-

νομετρικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχοῦσιν ἄπειρα τόξα, ὡς θὰ εἴδωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Πρόβλημα

397. *Εὑρεῖν τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν δεδομένον.*

1ον. Τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἡμίτονον δεδομένον εὑρίσκονται ἂν ἐπὶ τῆς διαμέτρου Β΄Β ληφθῇ τμῆμα ΟΗ ἔχον μῆκος $\frac{ΟΗ}{ΟΒ}$ ἴσον (τ. ἔ. ἴσον ἀπολύτως καὶ ὁμόσημον) πρὸς τὸ δεδομένον ἡμίτονον, ἐκ δὲ τοῦ ἄκρου τούτου Η ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΜΜ΄ τῇ διαμέτρῳ ΑΑ΄ παράλληλος.



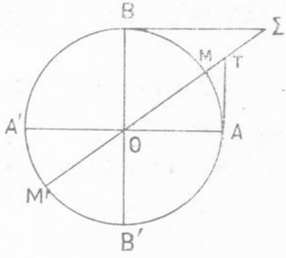
Διότι εἶναι πρόδηλον ὅτι τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα καὶ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄περατούμενα (ἄπειρα τὸ πλῆθος) τόξα εἶναι τὰ ἔχοντα ἡμίτονον τὸ μῆκος τοῦ ΟΗ.

2ον. Τὰ τόξα τὰ ἔχοντα συνημίτονον δεδομένον εὑρίσκονται ἂν ἐπὶ τῆς διαμέτρου Α΄Α ληφθῇ τμῆμά τι ΟΠ ἔχον μῆκος $\frac{ΟΠ}{ΟΑ}$ ἴσον (τ. ἔ. ἴσον ἀπολύτως καὶ ὁμόσημον) πρὸς τὸ δεδομένον συνημίτονον, ἐκ δὲ τοῦ ἄκρου τούτου Π ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΜΜ΄ τῇ διαμέτρῳ ΒΒ΄ παράλληλος.

Διότι εἶναι πρόδηλον ὅτι τὰ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ περατούμενα ἄπειρα τόξα εἶναι τὰ ἔχοντα συνημίτονον τὸ μῆκος τοῦ ΟΠ.

3ον. Τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένην δεδομένην, εὑρίσκονται ἂν ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α ἐφαπτομένης ληφθῇ τμῆμά τι ΑΤ ἔχον μῆκος ἴσον (τ.ἔ. ἴσον ἀπολύτως καὶ ὁμόσημον) πρὸς τὴν δεδομένην ἐφαπτομένην, ἐκ δὲ τοῦ ἄκρου τούτου Τ ἀχθῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εὐθεῖα ΤΟ, ἥτις θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄.

Διότι εἶναι πρόδηλον ὅτι τὰ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' περατούμενα ἄπειρα τόξα εἶναι τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένην τὸ μῆκος τοῦ ΑΤ.



4ον. Τὰ τόξα τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένην δεδομένην εὑρίσκονται ἂν ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β ἐφαπτομένης ληφθῇ τμῆμά τι ΒΣ ἔχον μῆκος ἴσον (τ. ἔ. ἴσον ἀπολύτως καὶ ὁμόσημον) πρὸς τὴν δεδομένην συνεφαπτομένην, ἐκ δὲ τοῦ ἄκρου τούτου Σ ἀχθῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εὐθεῖα ΣΟ, ἥτις θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ'.

Διότι εἶναι πρόδηλον ὅτι τὰ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' περατούμενα ἄπειρα τόξα εἶναι τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένην τὸ μῆκος τοῦ ΒΣ.

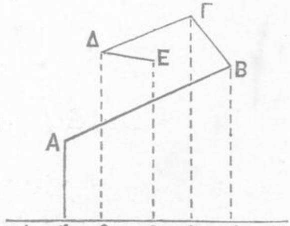
Περὶ ὀρθῶν προβολῶν.

Ὁρισμοί.

398. *Πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓΔΕ συνισταμένη (ἢ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ τῶν ἀποτελούντων τὰς πλευρὰς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓΔΕ) καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ, ὅπερ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν τῆς τεθλασμένης ταύτης γραμμῆς ἀρχήν, πέρας δὲ τὸ τῆς γραμμῆς ταύτης πέρας.*

Πολυγωνικῆς γραμμῆς προβολὴ ἐπὶ ἄξονα καλεῖται τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα (345) *τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον προβολῶν τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.*

Θεώρημα.



399. *Πολυγωνικῆς γραμμῆς ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ ἰσοῦται τῇ προβολῇ τῆς ταύτης συνισταμένης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.*

Ἡ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀλήθεια εἶναι πρόδηλος ἐξ αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν (398)· διότι

αε=αβ+βγ+γδ+δε, ἤτοι πρΑΕ=πρΑΒ+πρΒΓ+πρΓΕ+πρΔΕ.

Πόρισμα 1ον.

400. *Δύο πολυγωνικῶν γραμμῶν ἐχουσῶν τὰ αὐτὰ πέρατα αἱ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα προβολαὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διότι ἑκάστη τῶν προβολῶν τούτων ἰσοῦται τῇ προβολῇ τῆς κοινῆς αὐτῶν συνισταμένης.

Πόρισμα 2ον.

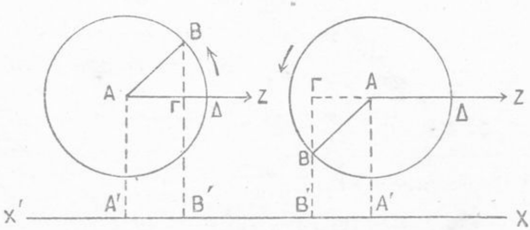
401. *Κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἡ ἐπὶ ἄξονα προβολὴ ἰσοῦται τῷ μηδενί.*

Θεώρημα.

402. *Εὐθυγράμμου τμήματος ἡ ἐπὶ ὡρισμένης φορᾶς ἄξονος προβολὴ ἔχει μῆκος ὅπερ εἶναι ἴσον κατά τε τὸ μέγεθος καὶ τὸ σημεῖον τῷ γινομένῳ τοῦ ἀπολύτου μήκους τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ θετικὴ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος μετὰ τῆς διευθύνσεως τοῦ τμήματος.*

Ἔστω Α′Β′ ἡ τοῦ δεδομένου τμήματος ΑΒ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ′Χ. Ἐκ δὲ τῆς τοῦ τμήματος ἀρχῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΑΖ τῷ ἄξονι Χ′Χ παράλληλος. Οὕτως, ἂν τομὴ τῆς ΑΖ μετὰ τῆς προβαλλούσης ΒΒ′ εἶναι τὸ Γ, θὰ δειχθῇ ὅτι

$$(Α'Β')=(ΑΓ)=(ΑΒ)\,συν\,ΖΑΒ.$$



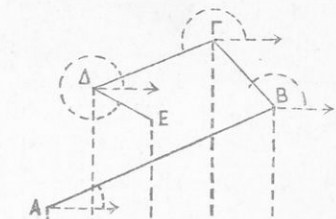
Πρὸς τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον μὲν τὴν ἀρχὴν Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΒ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΖ εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τῶν τόξων· ἐκ δὲ τῆς θέσεως τοῦ Β, ὅπερ δύναται νὰ κεῖται ἢ ἐν τῷ 1ῳ ἢ ἐν τῷ 2ῳ ἢ ἐν τῷ 3ῳ ἢ ἐν τῷ 4ῳ τεταρτημορίῳ προκύπτουσι τέσσαρες περιπτώσεις. Ἐν πάσαις δὲ ταῖς περιπτώσεσι ταύταις ἡ γωνία ΖΑΒ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, ὅπερ καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΔΒ (377)· κατὰ δὲ τὸν τοῦ συνημιτόνου ὁρισμὸν (380) ἀληθεύει ἀεί, κατά τε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ σημεῖον, ἡ σχέσις

$$\text{συν}\,ZAB=\frac{(A\Gamma)}{(AB)},\quad \text{ἐξ ἧς}\quad (A\Gamma)=(AB)\,\text{συν}\,ZAB,$$

εἴτε (πρ ΑΒ)=(ΑΒ) συν (Χ'Χ, ΑΒ), ἔνθα διὰ τοῦ συμβόλου (Χ'Χ, ΑΒ) παρεστήσαμεν τὴν ἴσην τῇ ΖΑΒ γωνίαν τῆς διευθύνσεως τῆς ΑΒ πρὸς τὴν θετικὴν διεύθυνσιν τῆς Χ'Χ.

Πόρισμα.

403. *Ἡ τῆς συνισταμένης πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐπὶ ἄξονα προβολὴ ἔχει μῆκος ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τῶν προκυπτόντων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μήκους ἑκάστης πλευρᾶς ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς πλευρᾶς ταύτης μετὰ τῆς θετικῆς διευθύνσεως τοῦ ἄξονος.*



Διότι, ἐπειδὴ (399)

$$\text{πρ}\,AE=\text{πρ}AB+\text{πρ}B\Gamma+\text{πρ}\Gamma\Delta+\text{πρ}\Delta E,$$

ἔπεται (κατὰ 348) ὅτι

$$(\text{πρ}\,AE)=(\text{πρ}\,AB)+(\text{πρ}\,B\Gamma)+(\text{πρ}\,\Gamma\Delta)+(\text{πρ}\,\Delta E),\ \text{ὅθεν}$$

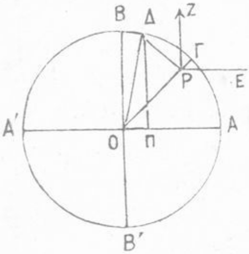
$$(AE)\text{συν}(X'X,AE)=(AB)\text{συν}(X'X,AB)+(B\Gamma)\text{συν}(X'X,B\Gamma)+\ldots$$

Τύποι δίδοντες τὸ ἡμ(α±β), συν(α±β), ἐφ(α±β).

Πρόβλημα.

404. *Δεδομένων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύο τόξων α καὶ β εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων ἂς ληφθῶσι κατὰ σειρὰν καὶ κατὰ τὴν προσήκουσαν φορὰν τὰ ὑπὸ τῶν α καὶ β παριστώμενα τόξα ΑΓ καὶ ΓΔ. Ἂς ἀχθῶσι δὲ αἱ ἀκτῖνες ΟΓ καὶ ΟΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ κάθετοι ἡ μὲν ΔΡ ἐπὶ τὴν ΟΓ, ἡ δὲ ΔΠ ἐπὶ τὴν ΟΑ. Ἔτι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΡΕ καὶ ΡΖ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέτρους Α΄Α, Β΄Β. Οὕτως, ἐπειδὴ τῶν τεθλασμένων γραμμῶν ΟΠΔ, ΟΡΔ, αἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνισταμένην, αἱ ἐπί τινα ἄξονα προβολαὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι (400), θὰ ἔχωμεν



$$(\pi\rho\ \text{ΟΠ})+(\pi\rho\ \text{ΠΔ})=(\pi\rho\ \text{ΟΡ})+(\pi\rho\ \text{ΡΔ}). \qquad (\alpha)$$

1) Ἂν μὲν προβολικὸς ἄξων ληφθῇ ἡ διάμετρος Β΄Β, θὰ ἔχωμεν, λαμβανομένης ὡς μονάδος μήκους τῆς ἀκτῖνος,

$$(\pi\rho\ \text{ΟΠ})=0, \qquad (\pi\rho\ \text{ΠΔ})=(\text{ΠΔ})=\text{ἡμ}(\alpha+\beta),$$
$$(\pi\rho\ \text{ΟΡ})=(\text{ΟΡ})\text{συν}\text{ΒΟΡ}=(\text{ΟΡ})\text{συν}(90^0-\alpha)=\text{συν}\,\beta\ \text{ἡμ}\,\alpha,$$
$$(\pi\rho\ \text{ΡΔ})=(\text{ΡΔ})\text{συν}\,\text{ΖΡΔ}=(\text{ΡΔ})\text{συν}\,\alpha=\text{ἡμ}\,\beta\ \text{συν}\,\alpha.$$

Ἕνεκα τῶν τιμῶν τούτων ἡ σχέσις (α) δίδει

Γ

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)=\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{συν}\,\beta+\text{συν}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta. \qquad (1)$$

2) Ἂν δὲ προβολικὸς ἄξων ληφθῇ ἡ διάμετρος Α΄Α, θὰ ἔχωμεν

$$(\pi\rho\ \text{ΟΠ})=\text{συν}(\alpha+\beta), \qquad (\pi\rho\ \text{ΠΔ})=0,$$
$$(\pi\rho\ \text{ΟΡ})=(\text{ΟΡ})\text{συν}\text{ΑΟΡ}=(\text{ΟΡ})\text{συν}\,\alpha=\text{συν}\,\beta\ \text{συν}\,\alpha,$$
$$(\pi\rho\ \text{ΡΔ})=(\text{ΡΔ})\,\text{συν}\text{ΕΡΔ}=(\text{ΡΔ})\text{συν}(90^0+\alpha)=-\text{ἡμ}\,\beta\ \text{ἡμ}\,\alpha.$$

Ἕνεκα δὲ τῶν τιμῶν τούτων ἡ σχέσις (α) γίνεται

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\,\beta-\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta. \qquad (2)$$

405. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη, γενομένη κατὰ θεωρήματα ἀληθεύοντα ἐν πάσαις ταῖς περιπτώσεσιν, ἔχει ἀναγκαίως κῦρος καθολικόν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ τόξα α καὶ β· κατ᾽ ἀκολουθίαν οἱ τύποι (1) καὶ (2) ἰσχύουσι περὶ τόξων πάσης τιμῆς.

Ἂν δὲ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ τόξα α καὶ —β, θέσωμεν δηλ. ἐν αὐτοῖς —β ὅπου β, παρατηρήσωμεν δ' ὅτι (390) $\text{συν}(-\beta)=\text{συν}\,\beta$ καὶ $\text{ἡμ}(-\beta)=-\text{ἡμ}\,\beta$,

θὰ ἔχωμεν $$\text{ἡμ}\,(\alpha-\beta)=\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta-\text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta, \tag{3}$$

καὶ $$\text{συν}\,(\alpha-\beta)=\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta+\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta. \tag{4}$$

Πρόβλημα

406. *Εὑρεῖν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τε ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων, ὧν ἑκατέρων ἡ ἐφαπτομένη εἶναι γνωστή.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν τὸν τύπον (2) τοῦ ἐδ. 289 ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ τόξον $(\alpha+\beta)$, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐφ}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{ἡμ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta+\text{ἡμ}\,\beta\,\text{συν}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta-\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}$$

καὶ ἄρα $$\text{ἐφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ἐφ}\,\alpha+\text{ἐφ}\,\beta}{1-\text{ἐφ}\,\alpha\,\text{ἐφ}\,\beta}. \tag{5}$$

Ἂν δὲ τὸν τύπον τοῦτον ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ τόξα α καὶ $-\beta$,

θὰ ἔχωμεν $$\text{ἐφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{ἐφ}\,\alpha-\text{ἐφ}\,\beta}{1+\text{ἐφ}\,\alpha\,\text{ἐφ}\,\beta}.$$

Πρόβλημα.

407. *Εὑρεῖν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου 2α δοθέντων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου α.*

Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν ἐν τοῖς ἄνω τύποις (1), (2) καὶ (5) ἀντὶ τοῦ β τὸ α. Οὕτω δὲ ἔχομεν

$$\text{ἡμ}2\alpha=2\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{συν}\,\alpha \quad (6), \qquad \text{συν}2\alpha=\text{συν}^2\alpha-\text{ἡμ}^2\alpha, \tag{7}$$

καὶ $$\text{ἐφ}2\alpha=\frac{2\text{ἐφ}\,\alpha}{1-\text{ἐφ}^2\alpha}. \tag{8}$$

Πρόβλημα.

408. *Εὑρεῖν $\text{ἡμ}\frac{\alpha}{2}$, $\text{συν}\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\text{ἐφ}\frac{\alpha}{2}$ δοθέντος τοῦ $\text{συν}\,\alpha$.*

Ἐπειδὴ $\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}+\text{ἡμ}^2\frac{\alpha}{2}=1$ καὶ $\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}-\text{ἡμ}^2\frac{\alpha}{2}=\text{συν}\,\alpha$ (407),

ἕπεται ὅτι $$2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}=1+\text{συν}\,\alpha \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,\alpha}{2}}, \tag{9}$$

καὶ $$2\,\text{ἡμ}^2\frac{\alpha}{2}=1-\text{συν}\,\alpha \quad \text{ἢ} \quad \text{ἡμ}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,\alpha}{2}}, \tag{10}$$

ὅθεν καὶ $$\text{ἐφ}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,\alpha}{1+\text{συν}\,\alpha}}. \tag{11}$$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου ὀρθογωνίου.

Θεώρημα.

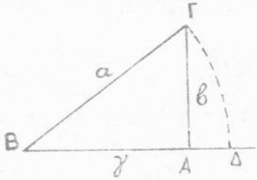
409. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης, ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς προσκειμένης τῇ πλευρᾷ ταύτῃ.*

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

Ἂν γραφῇ κύκλου τόξον, ἔχον κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Β ἀκτῖνα δὲ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν (380),

$$\text{ἡμ}\,B=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}B=\frac{BA}{B\Gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad (12)$$

ὅθεν $\beta=\alpha\ \text{ἡμ}\,B$ καὶ $\gamma=\alpha\ \text{συν}B.$



Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, θὰ ἔχωμεν (393)

$$\text{ἡμ}\,B=\text{συν}\,\Gamma,\quad \text{συν}B=\text{ἡμ}\Gamma,$$

καὶ ἄρα

$$\beta=\alpha\ \text{συν}\,\Gamma,\quad \gamma=\alpha\text{ἡμ}\,\Gamma.$$

Θεώρημα.

410. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς πρώτης ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς γωνίας τῆς προσκειμένης τῇ αὐτῇ πλευρᾷ.*

Διαιροῦντες κατὰ μέρη τὰς σχέσεις (409) $\beta=\alpha\,\text{ἡμ}\,B$, $\gamma=\alpha\,\text{συν}B$ καὶ παρατηροῦντες ὅτι (381) $\frac{\text{ἡμ}\,B}{\text{συν}B}=\text{ἐφ}\,B$,

λαμβάνομεν $\frac{\beta}{\gamma}=\text{ἐφ}\,B\cdot$ ὅθεν $\beta=\gamma\ \text{ἐφ}\,B.$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, θὰ ἔχωμεν (393) $\text{ἐφ}\,B=\text{σφ}\,\Gamma$ καὶ ἄρα $\beta=\gamma\ \text{σφ}\,\Gamma.$

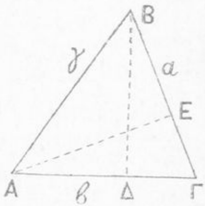
Ὁμοίως ἔχομεν $\gamma=\beta\ \text{ἐφ}\,\Gamma$ καὶ $\gamma=\beta\ \text{σφ}\,B.$

Σημείωσις. Αἱ ἄνω δύο προτάσεις (409, 410) εἶναι τελείως πρόδηλοι ἂν στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν ἐν ἐδ. 379 δοθέντων ὁρισμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὀξείας γωνίας.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου οὑτινοσδήποτε.

Θεώρημα.

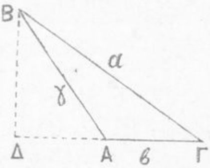
411. *Παντὸς τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.*



Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΓ κάθετος, ὑποτεθῇ δ' ὅτι οὐδετέρα τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ ἔχωμεν (409) ἐκ μὲν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, $(\Delta B)=\gamma$ ἡμ A,
ἐκ δὲ τοῦ ΒΔΓ, $(\Delta B)=\alpha$ ἡμ Γ.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι

$$\gamma \text{ ἡμ } A=\alpha \text{ ἡμ } \Gamma \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\alpha}{\text{ἡμ } A}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ } \Gamma}.$$



Ἂν ἡ ἑτέρα τῶν γωνιῶν Α, Γ εἶναι ἀμβλεῖα, π. χ. ἡ Α, θὰ εἶναι

$(\Delta B)=\gamma$ ἡμ $BA\Delta$ καὶ $(\Delta B)=\alpha$ ἡμ Γ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΒ εἶναι παραπληρωματικαί (391), ἡ ἰσότης

$(\Delta B)=\gamma$ ἡμ $BA\Delta$ γράφεται $(\Delta B)=\gamma$ ἡμ ΓAB.

Πάλιν ἄρα εἶναι α ἡμ $\Gamma=\gamma$ ἡμ A ἢ $\dfrac{\alpha}{\text{ἡμ } A}=\dfrac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$.

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης $(AE)=\gamma$ ἡμ $B=\beta$ ἡμ Γ, ὅθεν $\dfrac{\beta}{\text{ἡμ } B}=\dfrac{\gamma}{\text{ἡμ } \Gamma}$.

Λοιπὸν ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ } A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ } B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ } \Gamma}. \qquad (14)$$

Θεώρημα.

412. ***Ἐν παντὶ τριγώνῳ πάσης πλευρᾶς τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἠλατ-***

τωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο τούτων πλευρῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (βλ. προηγ. σχ.). Ἂν ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος, ἂν μὲν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, θὰ ἔχωμεν (221) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta.(\mathrm{A\Delta})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{A\Delta})=\gamma$ συν Α, συνάγομεν

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\,\beta\gamma \text{ συν A}.$$

Ἂν δὲ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta.(\Delta\mathrm{A}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta\mathrm{A})=\gamma$ συν ΒΑΔ καὶ συν ΒΑΔ$=-$συν Α (391), θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\,\beta\gamma$ συν Α.

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\,\gamma\alpha$ συν Β

καὶ $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\beta$ συν Γ.

Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

413. Ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, γινομένῃ διὰ τύπων ὑπολογιζομένων διὰ τῶν λογαρίθμων, διακρίνονται αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες περιπτώσεις :

1η) *Δεδομένων τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς ὀξείας γωνίας Β, εὑρεῖν τὰ στοιχεῖα Γ, β, γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε.*

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους

$$\Gamma=90^0-\mathrm{B},\quad \beta=\alpha \text{ ἡμ B},\quad \gamma=\alpha \text{ συν B},$$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma=\frac{1}{2}\alpha^2 \text{ ἡμ B συν B}\cdot\quad \text{ὅθεν}\quad \mathrm{E}=\frac{1}{4}\alpha^2 \text{ ἡμ 2B}.$$

2α) *Δεδομένων τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς β τῆς ὀρθῆς γωνίας, εὑρεῖν τὰ στοιχεῖα γ, Β, Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε.*

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta),\quad \text{συν }\Gamma=\frac{\beta}{\alpha},\quad \mathrm{B}=90^0-\Gamma$$

καὶ

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma=\frac{1}{2}\beta\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}.$$

3η). *Δεδομένων τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, οἷον* *τῆς β, καὶ τῆς ἑτέρας ὀξείας γωνίας, οἷον τῆς Β, εὑρεῖν τὰ στοιχεῖα Γ, α, γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε.*

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους

$$\Gamma=90^0-\mathrm{B},\quad \alpha=\frac{\beta}{\eta\mu\,\mathrm{B}},\quad \gamma=\beta\,\sigma\varphi\,\mathrm{B}\quad \kappa\alpha\grave{\iota}\quad \mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma=\frac{1}{2}\beta^2\sigma\varphi\,\mathrm{B}.$$

4η. *Δεδομένων τῶν πλευρῶν β καὶ γ τῆς ὀρθῆς γωνίας, εὑρεῖν τὰ στοιχεῖα Β, Γ, α καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε.*

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους

$$\grave{\epsilon}\varphi\,\mathrm{B}=\sigma\varphi\,\Gamma=\frac{\beta}{\gamma},\quad \alpha=\frac{\beta}{\eta\mu\,\mathrm{B}}\quad \kappa\alpha\grave{\iota}\quad \mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma.$$

Περὶ τῆς διατάξεως καὶ τῆς χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων

414. Οἱ τριγωνομετρικοὶ πίνακες, ὧν συνήθως χρῆσιν ποιούμεθα, εἶναι οἱ τοῦ *Λαλάνδου*, ὡς διεσκεύασεν αὐτοὺς ὁ Dupuis. Ἐν τοῖς πίναξι δὲ τούτοις, μετὰ τοὺς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λογαρίθμους, ἀναγράφονται μέχρι τοῦ πέμπτου δεκαδικοῦ ψηφίου καὶ οἱ λογάριθμοι τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καὶ τοῦ συνημιτόνου τῶν τόξων, ἅτινα χωροῦσιν αὐξανόμενα κατὰ 1 λεπτὸν τῆς μοίρας ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0. Εἶναι δὲ οἱ λογάριθμοι οὗτοι ἀναγεγραμμένοι ἐν στήλαις ἐχούσαις ἄνωθεν καὶ κάτωθεν τὰς συντετμημένας λέξεις sin (sinus=ἡμίτονον), tang (tangente=ἐφαπτομένη), cot (cotangente=συνεφαπτομένη) καὶ cos (cosinus=συνημίτονον). Καὶ ἂν μὲν τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τῶν 45^0, ὁ μὲν ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὰς τούτου μοίρας εἶναι σεσημειωμένος ἐν τῷ ἄνω μέρει τῆς σελίδος, ὁ δὲ τὰ πρῶτα λεπτὰ παριστῶν ἀριθμὸς ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ, οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν διαφόρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἐν ταῖς στήλαις ταῖς δηλουμέναις ὑπὸ τῶν ἄνω ὀνομάτων. Ἂν δὲ τὸ τόξον εἶναι μεῖζον τῶν 45^0, ὁ μὲν ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὰς τούτου μοίρας εἶναι σεσημειωμένος κάτωθεν τῆς σελίδος, ὁ δὲ τὰ πρῶτα λεπτὰ παριστῶν ἀριθμὸς ἐν τῇ τελευταίᾳ στήλῃ, ἐν ᾗ τὰ τόξα βαίνουσιν αὐξανόμενα ἐκ τῶν κάτω

πρὸς τὰ ἄνω, οἱ δὲ λογάριθμοι τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἐν ταῖς στήλαις τῆς δηλουμένης ὑπὸ τῶν κάτω ὀνομάτων.

Ἂν διαδοχικοὶ λογάριθμοι, ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ γεγραμμένοι, ἔχωσι τὰ δύο πρῶτα αὐτῶν ψηφία κοινά, ταῦτα γράφονται μόνον ἐν τῷ πρώτῳ καὶ ἐν τῷ τελευταίῳ ἑκάστης στήλης ἀριθμῷ, ἐκτὸς ἂν μεταβληθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν ψηφίον ἢ τὸ πρῶτον δεκαδικόν, ὅτε γράφονται πλήρεις ἀμφότεροι οἱ διαδοχικοὶ λογάριθμοι.

Αἱ διαδοχικαὶ διαφοραὶ αἱ ὑπάρχουσαι μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶναι ἀναγεγραμμέναι πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἐν τῇ στήλῃ τῇ ἐχούσῃ ἐπικεφαλίδα τὸ στοιχεῖον D (différences = διαφοραί).

Ὁμοία στήλη ὑπάρχει μεταξὺ τῶν στηλῶν τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων, περιέχουσα *κοινὰς* διαφορὰς δι᾿ἀμφοτέρας τὰς στήλας ταύτας· τοῦτο δὲ συμβαίνει διότι ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τῆς αὐτῆς γωνίας, ἐπειδὴ εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι, ἔχουσιν ἀντιθέτους λογαρίθμους.

Χρῆσιν δὲ τῶν πινάκων τούτων ποιούμεθα πρὸς λύσιν τῶν ἑξῆς προβλημάτων· 1ον) *εὑρεῖν τὸν λογάριθμον τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου* καὶ 2ον) *εὑρεῖν τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς δεδομένον λογάριθμον τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ.*

Παραδείγματα τῆς χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

415. Πρὸς ἐξήγησιν τῆς χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων θὰ ἐπιλύσωμεν τὰ κατωτέρω δύο προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον

Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ δεδομένου τόξου.

Ἂν μὲν τὸ δεδομένον τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα λεπτά, ὁ λογάριθμος τούτου εὑρίσκεται ἀμέσως ἐν τῷ πίνακι. Οὕτω

$$\text{λογ ἡμ } 25^\circ 42' = \overline{1},63715, \quad \text{λογ σφ } 56^\circ 24' = \overline{1},82243, \quad \text{κλπ.}$$

Ἂν δὲ τὸ δεδομένον τόξον περιέχῃ δεύτερα λεπτά, ἢ δεύτερα λεπτὰ καὶ κλάσμα δεκαδικὸν τοῦ δευτέρου λεπτοῦ, ποιούμενοι χρῆσιν τῆς ἀρχῆς ὅτι, *ὅταν αἱ αὐξήσεις τόξου τινὸς εἶναι πολὺ μικραί, ἔχουσιν αὗται πρὸς ἀλλήλας ὡς ἔγγιστα ὃν λόγον καὶ αἱ εἰς τὰς αὐξήσεις ταύτας ἀντιστοιχοῦσαι διαφοραὶ τῶν αὐτῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου τούτου*, εὑρίσκομεν μετὰ προσεγγίσεως τοὺς λογαρίθμους τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ τοῦ τόξου διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος :

Ἵνα εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ τόξου (θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῶν 90^0) *περιέχοντος μοίρας, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα, θὰ ἀνεύρωμεν ἐν τῷ πίνακι τὸν λογάριθμον τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τόξου τοῦ ἔχοντος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων, ὃν καὶ τὸ δεδομένον τόξον περιέχει, εἶτα θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν πινάκων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δευτέρων λεπτῶν τοῦ τόξου, καὶ τὸ γινόμενον θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 60. Τὸ ἀκέραιον δὲ μέρος τοῦ πηλίκου (ὅπερ παριστᾷ ἑκατοντάκις χιλιοστὰ) πρέπει νὰ προστεθῇ μὲν εἰς τὸν εὑρεθέντα λογάριθμον, ἐὰν πρόκειται περὶ ἡμιτόνου ἢ ἐφαπτομένης, νὰ ἀφαιρεθῇ δέ, ἂν πρόκειται περὶ συνημιτόνου ἢ συνεφαπτομένης.* (Διότι, αὐξανομένων τῶν τόξων ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0, οἱ μὲν δύο πρῶτοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐξάνουσιν, οἱ δὲ δύο ἄλλοι ἐλαττοῦνται).

Παράδειγμα 1ον. Εὑρεῖν τὸν λογ ἡμ $23^0\ 36'\ 40''$.

Θὰ εὕρωμεν ἐν τῷ πίνακι τὸν λογ ἡμ $23^0\ 36' = \overline{1},60244$.

Θὰ εἴπωμεν δὲ ὅτι, ὅταν τὰ τόξα διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ $60''$, οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων διαφέρουσι κατὰ 29,

» $1''$ » » » θὰ διαφέρωσι κατὰ $\frac{29}{60}$,

» $40''$ » » » » » » $\frac{29 \times 40}{60}$.

Λοιπὸν λογ ἡμ $23^0\ 36'\ 40'' = \overline{1},60244 + 0,00019 = \overline{1},60263$.

Διάταξις τοῦ ὑπολογισμοῦ.

$$\begin{array}{lll} \text{λογ ἡμ } 36^0\,60' & = 1{,}60244 & (\text{διαφ. } 29). \\ \text{διὰ} \quad 40'' & = \quad 19 & \left(\frac{29\times40}{60}=19\right). \\ \hline \text{λογ ἡμ } 23^0\,60'40'' & = \overline{1}{,}60263. & \end{array}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{λογ ἐφ } 57^0\,56'\,20''=0{,}20318.$$

Παράδειγμα 2ον. Εὑρεῖν τὸν λογ συν $57^0\,53'\,40'',6$.

Ὅταν τὸ τόξον αὐξάνηται τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται, ἐπειδὴ δὲ λογ συν $57^0\,53'=\overline{1},72562$ καὶ λογ συν $57^0\,54'=\overline{1},72562$, ἡ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τούτων διαφορὰ εἶναι 20 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Σκεπτόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω θὰ εὕρωμεν, διὰ τὴν διαφορὰν $40'',6$ τοῦ τόξου $57^0\,53'$ ἀπὸ τοῦ δεδομένου, τὸν ἀριθμὸν $\frac{20\times40{,}6}{60}=14$ δεκ. χιλιοστά. Λοιπὸν

$$\text{λογ συν } 57^0\,53'40'',6=\overline{1},72562-0{,}00014=\overline{1},72548.$$

Διάταξις τοῦ ὑπολογισμοῦ.

$$\begin{array}{lll} \text{λογ συν } 57^0\,53' & = \overline{1}{,}72562 & (\text{διαφ. } 20) \\ \text{διὰ} \quad 40'',6 & = \quad -14 & \left(\frac{20\times40{,}6}{60}=14.\right) \\ \hline \text{λογ συν } 57^0\,53'40'',6 & = \overline{1}{,}72548 & \end{array}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{λογ σφ } 75^0\,21'\,17''=\overline{1},41733-0{,}00015=\overline{1},14718.$$

Πρόβλημα 2ον

Εὑρεῖν τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς δεδομένον λογάριθμον τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ.

1η ***Περίπτωσις.*** *Ἂν ὁ δεδομένος λογάριθμος εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι.*

Πρὸς εὐκολίαν τῶν ἀναζητήσεων παρατηροῦμεν ὅτι

$$\text{λογ ἡμ } 45^0=\text{λογ συν } 45^0=\text{λογ}\frac{1}{\sqrt{2}}=\overline{1},84949,$$

$$\text{λογ ἐφ } 45^0=\text{λογ σφ } 45^0=\text{λογ}1=0.$$

Παράδειγμα 1ον. Εὑρεῖν τὸ τόξον, οὗ τὸ ἡμίτονον ἔχει λογάριθμον δεδομένον.

Ἔστω $\quad$ λογ ἡμ $\chi = \bar{1},79383$.

Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ $\bar{1},84949$ τὸ ἀντίστοιχον τόξον χ εἶναι μικρότερον τῶν 45^0· κατ' ἀκολουθίαν ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου τούτου θὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, ἐκτὸς τοῦ πλαισίου, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλῃ.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 38^0 28'$.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον, οὗ τὸ συνημίτονον ἔχει δεδομένον λογάριθμον.*

Ἔστω $\quad$ λογ συν $\chi = \bar{1},76974$.

Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ $\bar{1},84949$, τὸ ἀντίστοιχον τόξον χ εἶναι μεῖζον τῶν 45^0. Οὕτως ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου τούτου θὰ εὑρεθῇ ἐν τῷ κάτω μέρει τῆς σελίδος, ἐκτὸς τοῦ πλαισίου, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τὰ δεξιὰ στήλῃ.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $\quad \chi = 53^0\,57'$.

2α. ***Περίπτωσις.*** *Ἂν ὁ δεδομένος λογάριθμος δὲν εὑρίσκηται ἐν τῷ πίνακι.*

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω λογ ἐφ $\chi = \bar{1},97895$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{l} \text{λογ ἐφ } 43^0\,36' = \bar{1},97877 \\ \text{λογ ἐφ } 43^0\,37' = \underline{\bar{1},97902} \\ \hfill 25. \end{array}$$

Λοιπὸν ὅταν οἱ λογάριθμοι διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 25 ἑκ. χιλ. τὰ τόξα διαφέρουσι κατὰ $60''$,

» 1 » » » » » » $\frac{60}{25}$,

» 18 » » » » » » $\frac{60 \times 18}{25} = 43'',2$.

Διάταξις τοῦ ὑπολογισμοῦ.

$$\begin{array}{llll} \text{λογ ἐφ } \chi = & \bar{1},97895 & & (\text{διαφ. } 25) \\ \hline \text{διὰ} & \bar{1},97877 & 43^0\,36' & \left(\frac{60 \times 18}{25} = 43'',2.\right) \\ \text{διὰ} & 18 & 43'',2 & \\ \hline & \chi = & 43^0\,36'\,43'',2. & \end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω λογ συν $\chi = \bar{1},78854$.

λογ συν $\chi = \bar{1},78854$			(διαφ. 16)
διὰ	$\bar{1},78869$	$52^0\,4'$	$\left(\frac{60\times 15}{16}=56'',25.\right)$
διὰ	15		$56'',25$
			$\chi = 52^0\,4'56'',25$.

Παραδείγματα ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν ἐπὶ ὀρθογωνίων τριγώνων.

416. Πρὸς ἐφαρμογὴν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν ἐπὶ ὀρθογωνίων τριγώνων θὰ ἐπιλύσωμεν τὰ κατωτέρω τέσσαρα προβλήματα.

1ον. *Δεδομένων* $\alpha = 1864^{\pi\chi.},5$, $B = 30^0 20'\,18''$, $A = 90^0$, *ὑπολογίσαι τὰς πλευρὰς* 6, γ *καὶ τὴν γωνίαν* Γ.

$$\Gamma = 90^0 - 30^0\,20'\,18'' = 59^0\,39'\,42''.$$

$$\begin{cases} 6 = \alpha \text{ ἡμ } B, & \text{λογ } 6 = \text{λογ } \alpha + \text{λογ ἡμ } B, \\ \gamma = \alpha \text{ συν } B, & \text{λογ } \gamma = \text{λογ } \alpha + \text{λογ συν } B. \end{cases}$$

λογ $\alpha = 3,27056$	λογ $\alpha = 3,27056$
λογ ἡμ $B = \bar{1},70338$	λογ συν $B = \bar{1},93604$
λογ $6 = 2,97394$	λογ $\gamma = 3,20660$
$6 = 941^{\pi\chi.},76$	$\gamma = 1609^{\pi\chi.},15$.

2ον. Δεδομένων $\alpha = 428^{\pi\chi.},5$, $6 = 311^{\pi\chi.},61$, $A = 90^0$, *εὑρεῖν τὴν γωνίαν* B *καὶ τὴν πλευρὰν* γ.

$$\begin{cases} \text{ἡμ } B = \frac{6}{\alpha}, & \text{λογ ἡμ } B = \text{λογ } 6 - \text{λογ } \alpha, \\ \gamma^2 = \alpha^2 - 6^2 = (\alpha+6)(\alpha-6), & \text{λογ } \gamma = \frac{1}{2}\left[\text{λογ}(\alpha+6) + \text{λογ}(\alpha-6)\right]. \end{cases}$$

λογ $6 = 2,49361$	λογ $(\alpha+6) = 2,86930$
λογ $\alpha = 2,63195$	λογ $(\alpha-6) = 2,06777$
λογ ἡμ $B = \bar{1},86166$	2 λογ $\gamma = 4,93707$
$B = 46^0 39' 10''$	λογ $\gamma = 2,46853$
	$\gamma = 294^{\pi\chi.},12$.

Παρατήρησις. Ἂν ἡ τῶν πλευρῶν α καὶ 6 διαφορὰ εἶναι πολὺ μικρά, τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{6}$ ἐλάχιστον τῆς μονάδος διαφέροντος, ἡ γωνία Γ θὰ εἶναι ἐλαχίστη. Οὕτως, ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι τῶν συνημιτόνων τῶν ἐλαχίστων γωνιῶν ἐλάχιστον ἀπ' ἀλλήλων διαφέρουσιν, εἶναι ἀδύνατον τὴν γωνίαν Γ μετ' ἐπαρκοῦς προσεγγίσεως νὰ ὑπολογίσωμεν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ προτιμότερον εἶναι νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (408) $\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,\Gamma}{1+\text{συν}\,\Gamma}}$, ἐξ οὗ, ἐπειδὴ $\text{συν}\,\Gamma=\frac{6}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\alpha-6}{\alpha+6}}.$$

3ον). *Δεδομένων* $6=632^{\pi\chi.},23$, $B=37^0 13' 49''$, $A=90^0$, *εὑρεῖν τὰς πλευρὰς α, γ καὶ τὴν γωνίαν Γ.*

$$\Gamma=90^0-37^0 13' 49''=52^0\,46'\,11''.$$

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{6}{\text{ἡμ}\,B}, & \text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,6-\text{λογ ἡμ}\,B, \\ \gamma=\dfrac{6}{\text{ἐφ}\,B}, & \text{λογ}\,\gamma=\text{λογ}\,6-\text{λογ ἐφ}\,B. \end{cases}$$

$\text{λογ}\,6=2,80087$	$\text{λογ}\,6=2,80087$
$\text{λογ ἡμ}\,B=\overline{1},78177$	$\text{λογ ἐφ}\,B=\overline{1},88074$
$\text{λογ}\,\alpha=3,01910$	$\text{λογ}\,\gamma=2,92013$
$\alpha=1044^{\pi\chi.},095$	$\gamma=832^{\pi\chi.},017.$

4ον). Δεδομένων $6=628^{\pi\chi.},5$, $\gamma=494^{\pi\chi.},31$, $A=90^0$, *εὑρεῖν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν πλευρὰν α.*

$$\begin{cases} \text{ἐφ}\,B=\dfrac{6}{\gamma}, & \text{λογ ἐφ}\,B=\text{λογ}\,6-\text{λογ}\,\gamma, \\ \alpha=\dfrac{6}{\text{ἡμ}B}, & \text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,6-\text{λογ ἡμ}\,B. \end{cases}$$

$\text{λογ}\,6=2,79831$	$\text{λογ}\,6=2,79831$
$\text{λογ}\,\gamma=2,69400$	$\text{λογ ἡμ}\,B=\overline{1},89543$
$\text{λογ ἐφ}\,B=0,10431$	$\text{λογ}\,\alpha=2,90288$
$B=51^0\ 48' 55'',38$	$\alpha=799^{\pi\chi.},617.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1). Εὑρεῖν τὰς μεταβολὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλληται α^{ον}) ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0, β^{ον}) ἀπὸ 90^0 μέχρις 180^0. γ^{ον}) ἀπὸ 180^0 μέχρις 270^0 καὶ δ^{ον}) ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0.

2). Εὑρεῖν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων 135^0, 225^0, 315^0, ἔτι δὲ τῶν τόξων 120^0 καὶ 240^0.

3) Ἀποδεῖξαι ὅτι τοῦ τόξου ΑΜ ἡ τέμνουσα (ἢ ἡ συντέμνουσα) (382) εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον τὸ τμῆμα ΟΣ (ἢ ΟΤ) (βλ. ἐδ. 384 καὶ 385) εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΜ.

4) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου$(AM)_0$ τὸ μῆκος τοῦ πρώτου θετικοῦ τόξου ΑΜ καὶ διὰ Π τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τὸ δεύτερον, τρίτον κλπ. θετικὸν τόξον ΑΜ ἔχει μῆκος $(AM)_0+\Pi$, $(AM)_0+2\Pi$,..., τὸ δὲ πρῶτον, δεύτερον κλπ. ἀρνητικὸν τόξον ΑΜ ἔχει μῆκος $(AM)_0-\Pi$, $(AM)_0-2\Pi$,...

Ὥστε πάντα τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος περιλαμβάνονται ἐν τῷ τύπῳ $(AM)_\lambda=(AM)_0+\lambda\Pi$, ἐν ᾧ λ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος (θετικός, ἀρνητικὸς ἢ ἴσος τῷ μηδενί).

Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον ὅτι δύο τόξα ἔχοντα τὰ αὐτὰ πέρατα διαφέρουσιν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας.

5). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων

$$\begin{aligned} &\text{ἡμ}\,(270^0+\tau)=-\text{συν}\,\tau, && \text{συν}\,(270^0+\tau)=\ \ \text{ἡμ}\,\tau,\\ &\text{ἡμ}\,(270^0-\tau)=-\text{συν}\,\tau, && \text{συν}\,(270^0-\tau)=-\text{ἡμ}\,\tau,\\ &\text{ἡμ}\,(360^0-\tau)=-\ \text{ἡμ}\,\tau, && \text{συν}\,(360^0-\tau)=\ \ \text{συν}\,\tau. \end{aligned}$$

6). Ἀποδεῖξαι τοὺς τύπους

$$\text{συν}\,\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \text{ἡμ}\,\alpha=\pm\frac{\text{ἐφ}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\alpha}}.$$

(Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι ἀκολουθίαι τῶν ἐξισώσεων $\text{ἡμ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha=1$ καὶ $\text{ἐφ}\,\alpha=\frac{\text{ἡμ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha}$.)

7). Δεδομένου τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου α εὑρεῖν τοὺς λοιποὺς τούτου τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

$$\left(\text{'Απ. } \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \pm\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\alpha},\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha = \pm\frac{\dot{\eta}\mu\,\alpha}{\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\alpha}},\ \sigma\varphi\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\alpha}}{\dot{\eta}\mu\,\alpha}\right)$$

8). Δεδομένου ὅτι $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \frac{2}{3}$, εὑρεῖν μετὰ προσεγγίσεως 0,1 τοὺς λοιποὺς τοῦ τόξου α τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

9). Δεδομένου ὅτι $\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha = \frac{5}{2}$, εὑρεῖν τοὺς λοιποὺς τοῦ τόξου α τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

$$\left(\text{'Απ. } \dot{\eta}\mu\,\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29},\quad \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29},\quad \sigma\varphi\,\alpha = \frac{2}{5}.\right)$$

10). Οἱ (ἐν ἐδ. 360) τύποι τῆς ἀλλαγῆς ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ἂν καλέσωμεν α τὴν γωνίαν $XOX' = \Psi O\Psi'$, γίνονται :

$$\chi = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\chi' - \dot{\eta}\mu\alpha\,\psi',\quad \psi = \dot{\eta}\mu\alpha\,\chi' + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\psi'.$$

Ἂν δὲ θέσωμεν $\beta = (OX', OM)$ καὶ $\rho = (OM)$, (βλ. σχ. ἐδ. 360), ἔχομεν :

$$(\chi = \rho\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta),\ \psi = \rho\dot{\eta}\mu(\alpha+\beta),\ \chi' = \rho\ \sigma\upsilon\nu\,\beta,\ \text{καὶ}\ \psi' = \rho\dot{\eta}\mu\beta.$$

Οὕτως ἐκ τῶν τύπων τοῦ ἐδ. 360 ἀγόμεθα εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) τοῦ ἐδ. 404.

11). Εὑρεῖν τοὺς ἑξῆς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς

$$\dot{\eta}\mu\,(\alpha+\beta+\gamma),\quad \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)\quad \text{καὶ}\quad \dot{\varepsilon}\varphi(\alpha+\beta+\gamma).$$

Πρὸς τοῦτο, ἂν τὸ τῶν τριῶν τόξων α, β, γ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ θεωρήσωμεν ὡς ἄθροισμα τῶν τόξων $(\alpha+\beta)$ καὶ γ, θὰ ἔχωμεν

$$\dot{\eta}\mu\,(\alpha+\beta+\gamma) = \dot{\eta}\mu(\alpha+\beta)\ \sigma\upsilon\nu\,\gamma + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\dot{\eta}\mu\,\gamma =$$

$$\dot{\eta}\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta\ \sigma\upsilon\nu\gamma + \dot{\eta}\mu\,\beta\ \sigma\upsilon\nu\,\gamma\ \sigma\upsilon\nu\alpha + \dot{\eta}\mu\,\gamma\ \sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta - \dot{\eta}\mu\alpha\ \dot{\eta}\mu\beta\ \dot{\eta}\mu\gamma.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) = \sigma\upsilon\nu\,\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,\beta\ \sigma\upsilon\nu\,\gamma - \sigma\upsilon\nu\,\alpha\ \dot{\eta}\mu\,\beta\ \dot{\eta}\mu\,\gamma - \sigma\upsilon\nu\,\beta\ \dot{\eta}\mu\,\gamma\ \dot{\eta}\mu\,\alpha - \sigma\upsilon\nu\,\gamma\ \dot{\eta}\mu\,\alpha\ \dot{\eta}\mu\,\beta$$

$$\text{καὶ}\quad \dot{\varepsilon}\varphi(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha + \dot{\varepsilon}\varphi\,\beta + \dot{\varepsilon}\varphi\,\gamma - \dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\beta\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\gamma}{1 - \dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\beta - \dot{\varepsilon}\varphi\,\beta\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\gamma - \dot{\varepsilon}\varphi\,\gamma\ \dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha}.$$

12). Μετασχηματίσαι εἰς μονώνυμα τὰς παραστάσεις

$$\dot{\eta}\mu\,\omega \pm \dot{\eta}\mu\,\omega'\qquad \text{καὶ}\qquad \sigma\upsilon\nu\,\omega \pm \sigma\upsilon\nu\,\omega'.$$

Πρὸς τοῦτο, ἂν τοὺς τύπους 1, 2, 3, 4 τοῦ ἐδ. 405 κατὰ μέλη διαδοχικῶς προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)+\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\,\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta, \qquad (1')$$

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta)-\text{ἡμ}(\alpha-\beta)=2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta, \qquad (2')$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)=2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta, \qquad (3')$$

$$\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta)=2\,\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta. \qquad (4')$$

Ἂν δὲ τεθῇ ἐν τοῖς τύποις τούτοις $\alpha+\beta=\omega$ καὶ $\alpha-\beta=\omega'$,

ὅθεν $\alpha=\dfrac{\omega+\omega'}{2}$ καὶ $\beta=\dfrac{\omega-\omega'}{2}$,

θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἡμ}\,\omega+\text{ἡμ}\,\omega'=2\,\text{ἡμ}\frac{\omega+\omega'}{2}\,\text{συν}\frac{\omega-\omega'}{2}, \qquad (5')$$

$$\text{ἡμ}\,\omega-\text{ἡμ}\,\omega'=2\,\text{συν}\frac{\omega+\omega'}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\omega-\omega'}{2}, \qquad (6')$$

$$\text{συν}\,\omega+\text{συν}\,\omega'=2\,\text{συν}\frac{\omega+\omega'}{2}\,\text{συν}\frac{\omega-\omega'}{2}, \qquad (7')$$

$$\text{συν}\,\omega'-\text{συν}\,\omega=2\,\text{ἡμ}\frac{\omega+\omega'}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\omega-\omega'}{2}. \qquad (8')$$

Ἂν δὲ τὰς ἰσότητας (5′) καὶ (6′) κατὰ μέλη διαιρέσωμεν, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{\text{ἡμ}\,\omega+\text{ἡμ}\,\omega'}{\text{ἡμ}\,\omega-\text{ἡμ}\,\omega'}=\frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(\omega-\omega')}. \qquad (9')$$

13). Μετασχηματίσαι εἰς μονώνυμα τὰς παραστάσεις $\text{ἡμ}\,A+\text{ἡμ}\,B+\text{ἡμ}\,\Gamma$, $\text{συν}\,A+\text{συν}\,B+\text{συν}\,\Gamma$ καὶ $\text{ἐφ}A+\text{ἐφ}B+\text{ἐφ}\Gamma$, δεδομένου ὅτι $A+B+\Gamma=180^0$.

14). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν τύπων

$$\text{ἐφ}\,\alpha+\text{ἐφ}\,\beta=\frac{\text{ἡμ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta}, \quad \text{ἐφ}(\alpha-45^0)=\frac{1-\text{ἐφ}\,\alpha}{1+\text{ἐφ}\,\alpha},$$

$$\frac{\text{ἡμ}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)}{\text{ἡμ}(\alpha-\beta)+\text{συν}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{ἡμ}\,\beta+\text{συν}\,\beta}{\text{συν}\,\beta-\text{ἡμ}\,\beta}.$$

15). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἡμ}\,75^0=\text{συν}\,15^0=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{συν}\,75^0=\text{ἡμ}\,15^0=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{ἐφ}\,75^0=\text{σφ}\,15^0=2+\sqrt{3}.$$

16). Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἐφ}\, 15^0 + \text{ἐφ}\, 60^0 = 2, \quad \text{ἐφ}\, 75^0 - \text{ἐφ}\, 60^0 = 2.$$

17). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἐφ}\,(45^0 + \alpha) - \text{ἐφ}\,(45^0 - \alpha) = 2\, \text{ἐφ}\, 2\alpha,$$

$$\text{ἐφ}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \text{ἡμ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha} = \frac{\text{συν}\,\alpha}{1 + \text{ἡμ}\alpha},$$

$$\text{συν}\,\alpha + \text{συν}\,(120^0 - \alpha) + \text{συν}\,(120^0 + \alpha) = 0.$$

18). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων

$$1 + \text{ἐφ}^2\,\alpha = \frac{1}{\text{συν}^2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad 1 - \text{ἐφ}^2\alpha = \frac{\text{συν}\,2\,\alpha}{\text{συν}^2\,\alpha}.$$

19) Ἀποδεῖξαι ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\frac{\text{ἐφ}\,\dfrac{\text{Β}-\Gamma}{2}}{\text{ἐφ}\,\dfrac{\text{Β}+\Gamma}{2}} = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}.$$

Διότι, ἐπειδὴ $\frac{\beta}{\text{ἡμ}\text{Β}} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\,\Gamma}$ (411), ἕπεται (κατὰ ἄσκησιν 12, σελ. 304) ὅτι

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\text{ἡμ}\,\text{Β} - \text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,\text{Β} + \text{ἡμ}\,\Gamma} = \frac{\text{ἐφ}\dfrac{\text{Β}-\Gamma}{2}}{\text{ἐφ}\dfrac{\text{Β}+\Gamma}{2}}.$$

20). Ἀποδεῖξαι ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἡμ}\,(\text{Α}-\text{Β})}{\text{ἡμ}\,(\text{Α}+\text{Β})} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2},$$

$$\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\text{Β} - \Gamma) = \frac{\beta - \gamma}{\alpha}\,\text{συν}\,\frac{\text{Α}}{2},$$

$$\text{συν}\,\frac{1}{2}(\text{Β} - \Gamma) = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}\,\text{ἡμ}\,\frac{\text{Α}}{2}.$$

21). Ἀποδεῖξαι ὅτι ἐν δεδομένῳ τριγώνῳ θὰ ἀληθεύσῃ ἡ μὲν ἰσότης $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$, ἂν ἡ γωνία $\text{Α} = 120^0$,
ἡ δὲ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$, ἂν ἡ γωνία $\text{Α} = 60^0$.

22). Εὑρεῖν, ἄνευ χρήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων, τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἔχοντος $\beta = 4$ καὶ $\gamma = \sqrt{2}$.

23). Εὑρεῖν ὁμοίως τὰς γωνίας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\gamma=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

24). Ἀποδεῖξαι ὅτι, ἂν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες

$$\text{ἡμ}\,\alpha+\text{ἡμ}\,\beta+\text{ἡμ}\,\gamma+\text{ἡμ}\,\delta=4\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$\text{συν}\,\alpha-\text{συν}\,\beta+\text{συν}\,\gamma-\text{συν}\,\delta=4\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma}{2}\,\text{συν}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

25). Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἡμ}\,3A=3\,\text{ἡμ}\,A-4\,\text{ἡμ}^3A,$$

$$\text{συν}\,3A=4\,\text{συν}^3A-3\,\text{συν}\,A,$$

$$\text{ἐφ}\,3A=\frac{3\,\text{ἐφ}\,A-\text{ἐφ}^3A}{1-3\,\text{ἐφ}^2A}.$$

26). Δοθέντος τοῦ ἡμ α εὑρεῖν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου $\frac{\alpha}{2}$.

Πρὸς τοῦτο, ἐκ τῶν τύπων

$$\text{ἡμ}^2\frac{\alpha}{2}+\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}=1 \quad \text{καὶ} \quad 2\,\text{ἡμ}\frac{\alpha}{2}\text{συν}\frac{\alpha}{2}=\text{ἡμ}\alpha,$$

εὑρίσκομεν $$\text{ἡμ}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\pm\sqrt{1+\text{ἡμ}\,\alpha}\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}\,\alpha}\right)$$

καὶ $$\text{συν}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\pm\sqrt{1+\text{ἡμ}\,\alpha}\mp\sqrt{1-\text{ἡμ}\,\alpha}\right).$$

27). Ἀπόδειξον ὅτι διὰ πᾶν τόξον α μικρότερον τεταρτημορίου ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες ἡμ $\alpha<\alpha<$ ἐφ α.

28). Ἀποδεῖξαι ὅτι $\text{ὅρ}\frac{\alpha}{\text{ἡμ}\,\alpha}=1$, ὅταν ὅρ τόξ $\alpha=0$.

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων ἡμ $\alpha<\alpha<$ ἐφ α προκύπτουσιν αἱ ἀνισότητες $1<\frac{\alpha}{\text{ἡμ}\,\alpha}<\frac{1}{\text{συν}\,\alpha}$, ἐξ ὧν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως.

29). Εὑρεῖν ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ γωνίαι συνδέονται πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ διὰ τῶν χρησίμων εἰς τὸν διὰ λογαρίθμων ὑπολογισμὸν τύπων :

$$\text{ἡμ}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\ \text{συν}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}},\ \text{ἐφ}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}},$$

$$\text{ἡμ}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}},\ \text{συν}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}},\ \text{ἐφ}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}},$$

$$\text{ἡμ}\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}},\ \text{συν}\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}},\ \text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}},$$

ἔνθα τὸ 2τ παριστᾷ (ὡς ἐν ἐδ. 280) τὴν τοῦ τριγώνου περίμετρον.

Οἱ τύποι οὗτοι προκύπτουσιν ἐκ τῶν τύπων (9) καὶ (10) τοῦ ἐδ. 408, ἂν ἀντικατασταθῶσιν, ἀντὶ τῶν συνημιτόνων τῶν γωνιῶν, αἱ ἐκ τῶν τύπων (15) τοῦ ἐδ. 412 λαμβανόμεναι τούτων τιμαὶ καὶ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἀναγκαῖοι μετασχηματισμοί.

Σημειωτέον ὅτι τὸ ῥιζικὸν πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικόν, διότι τὸ ἥμισυ ἑκάστης τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ὀρθῆς γωνίας μικρότερον.

30) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος

$$\text{ἡμ}\,A=\frac{2}{\beta\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

31). Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ἑξῆς περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τύπων :

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}\,A=\frac{\alpha^2\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\,\Gamma}{2\,\text{ἡμ}\,A}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

32) Εὑρεῖν τὰς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν διπλασίαν τῆς ἑτέρας τῶν καθέτων πλευρῶν.

33) Εὑρεῖν τὰς γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχοντος τὴν βάσιν ἴσην τῷ ἡμίσει ἑκατέρας τῶν ἄλλων αὐτοῦ πλευρῶν.

34) Εὑρεῖν τὸ ὕψος πύργου ῥίπτοντος σκιὰν 96 μέτρων, ὅταν ὁ ἥλιος κεῖται ἄνωθεν τοῦ ὁρίζοντος εἰς ὕψος $25^\circ\ 30''$.

Ἀσκήσεις ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν ἐπὶ τριγώνων οἱωνδήποτε.

417. 1) *Ἐπιλῦσαι τὸ τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ πλευρὰ* $\alpha=105^{\pi\chi}$. *καὶ αἱ γωνίαι* $B=59^0\,29'\,23'',1$ *καὶ* $\Gamma=53^0\,7'\,48'',4$.

$$\beta=\frac{\alpha\ \eta\mu\ B}{\eta\mu\ A},\quad \lambda o\gamma\,\beta=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\ \eta\mu\ B-\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A,$$

$$\gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A},\quad \lambda o\gamma\,\gamma=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma-\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A.$$

$\lambda o\gamma\,\alpha=2,02119$
$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ B=\bar{1},93528$
$\bar{1},95647$
$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A=\bar{1},96524$
$\lambda o\gamma\,\beta=\bar{1},99123$
$\beta=98^{\pi\chi}$.

$\lambda o\gamma\,\alpha=2,02119$
$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma=\bar{1},90309$
$\bar{1},92428$
$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A=\bar{1},96524$
$\lambda o\gamma\,\gamma=\bar{1},95904$
$\gamma=91^{\pi\chi}$.

$B = 59^0\ 29'\ 23'',1$
$\Gamma = 53^0\ 7'\ 48'',4$
$B+\Gamma = 112^0\ 37'\ 11'',5.$

$180^0 = 179^0\ 59'\ 60''$
$B+\Gamma = 112^0\ 37'\ 11'',5$
$A = 67^0\ 22'\ 48'',5.$

2ον) *Εὑρεῖν τὰς γωνίας A καὶ B τοῦ τριγώνου οὗ δίδονται* $\alpha=45325^{\pi\chi}.,46$, $\beta=26732^{\pi\chi}.,14$ *καὶ* $\Gamma=76^0 43' 53'',6$.

$$\dot\epsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\dot\epsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\lambda o\gamma\ \dot\epsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)=\lambda o\gamma(\alpha-\beta)+\lambda o\gamma\ \dot\epsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B)-\lambda o\gamma(\alpha+\beta).$$

$\alpha = 45325,46$
$\beta = 26732,14$
$\alpha+\beta= 72057,60$
$\alpha-\beta= 18593,32$
$90^0 = 89^0 59^0 60''$
$\frac{\Gamma}{2} = 38^0 21' 56'',8$
$\frac{A+B}{2} = 51^0 38'\ 3'',2.$

$\lambda o\gamma(\alpha-\beta)=4,26936$
$\lambda o\gamma\ \dot\epsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)=0,10148$
$4,37084$
$\lambda o\gamma(\alpha+\beta)=4,85768$
$\lambda o\gamma\ \dot\epsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=\bar{1},51316$
$\frac{1}{2}(A-B)=18^0\,3'13'',95$
$\frac{1}{2}(A+B)=51^0 38'\ 3'',2$
$A=69^0 41' 17'',15$
$B=33^0 34' 49'',25.$

3ον.) *Ἐπιλῦσαι τὸ τρίγωνον, οὗ δίδονται αἱ πλευραὶ*

$\alpha = 33^{\pi\chi.},45, \quad \beta = 42^{\pi\chi.},89, \quad \gamma = 43^{\pi\chi.},17.$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{ἐφ}\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}},\ \text{ἐφ}\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}},\ \text{ἐφ}\,\dfrac{\Gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}. \\
\text{λογ ἐφ}\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(\text{λογ}(\tau-\beta) + \text{λογ}(\tau-\gamma) - \text{λογ}\,\tau - \text{λογ}(\tau-\alpha)\Big), \\
\text{λογ ἐφ}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(\text{λογ}(\tau-\gamma) + \text{λογ}(\tau-\alpha) - \text{λογ}\,\tau - \text{λογ}(\tau-\beta)\Big), \\
\text{λογ ἐφ}\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(\text{λογ}(\tau-\alpha) + \text{λογ}(\tau-\beta) - \text{λογ}\,\tau - \text{λογ}(\tau-\gamma)\Big).
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl}
\alpha = & 33,45 \\
\beta = & 42,89 \\
\gamma = & \underline{43,17} \\
2\tau = & 119,51 \\
\tau = & 59,755 \\
\tau-\alpha = & 26,305 \\
\tau-\beta = & 16,865 \\
\tau-\gamma = & 16,585 \\
\text{λογ}\,\tau = & 1,77638 \\
\text{λογ}(\tau-\alpha) = & 1,42004 \\
\text{λογ}(\tau-\beta) = & 1,22699 \\
\text{λογ}(\tau-\gamma) = & 1,21972
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{λογ}(\tau-\beta) = & 1,22699 \\
\text{λογ}(\tau-\gamma) = & \underline{1,21972} \\
 & 2,44671 \\
\text{λογ}\,\tau = & 1,77638 \\
\text{λογ}(\tau-\alpha) = & \underline{1,42004} \\
 & 3,19642 \\
2\ \text{λογ ἐφ}\dfrac{A}{2} = & \bar{1},25029 \\
\text{λογ ἐφ}\dfrac{A}{2} = & \bar{1},62514 \\
\dfrac{A}{2} = & 22^0 52' 17'',14 \\
A = & 45^0 44' 34'',28.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{λογ}(\tau-\alpha) = & 1,42004 \\
\text{λογ}(\tau-\gamma) = & \underline{1,21972} \\
 & 2,63976 \\
\text{λογ}\,\tau = & 1,77638 \\
\text{λογ}(\tau-\beta) = & \underline{1,22699} \\
 & 3,00337 \\
\text{λογ ἐφ}\,\dfrac{B}{2} = & \bar{1},81820 \\
\dfrac{B}{2} = & 33^0\, 20' 36'',43 \\
B = & 66^0\, 41' 12'',86.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{λογ}(\tau-\alpha) = & 1,42004 \\
\text{λογ}(\tau-\beta) = & \underline{1,22699} \\
 & 2,64703 \\
\text{λογ}\,\tau = & 1,77638 \\
\text{λογ}(\tau-\gamma) = & \underline{1,21972} \\
 & 2,99610 \\
\text{λογ ἐφ}\,\dfrac{\Gamma}{2} = & \bar{1},82547 \\
\dfrac{\Gamma}{2} = & 33^0 47'\ 6'',66 \\
\Gamma = & 67^0 34' 13'',32.
\end{array}$$

4ον) *Ἐπιλῦσαι τὸ τρίγωνον, οὗ εἶναι δεδομένα*

$\alpha=51597^{\pi\chi\cdot}$, $\beta=53664^{\pi\chi\cdot}$ καὶ $A=72^\circ\ 31'\ 32''$.

$$\text{ἡμ}\, B=\frac{\beta\ \text{ἡμ}\, A}{\alpha},\quad \Gamma=180^0-(A+B),\quad \gamma=\frac{\alpha\text{ἡμ}\, \Gamma}{\text{ἡμ}\, A},$$
$$\text{λογ ἡμ}\, B = \text{λογ}\, \beta + \text{λογ ἡμ}\, A - \text{λογ}\, \alpha,$$
$$\text{λογ}\, \gamma = \text{λογ}\, \alpha + \text{λογ ἡμ}\, \Gamma - \text{λογ ἡμ}\, A.$$

Παρατήρησις. Πρὶν προβῶμεν εἰς τὸν λογισμὸν παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἴσα ἡμίτονα, ἂν ἡ ἐκ τῶν πινάκων εὑρισκομένη τιμὴ τῆς γωνίας εἶναι $B=\omega$, δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $B=180^0-\omega$.

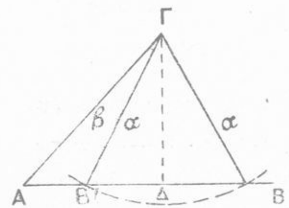
Ἐξετάσωμεν νῦν ἐν τίνι περιπτώσει τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

1ον) *Ἂν μὲν $A>90^0$ ἢ $A=90^0$*, ἡ γωνία B θὰ εἶναι ὀξεῖα, ἤτοι $B=\omega$. Ἵνα δὲ ἡ τοῦ τριγώνου κατασκευὴ εἶναι δυνατὴ πρέπει νὰ εἶναι $\alpha>\beta$· διότι ἡ μείζων πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μείζονος γωνίας.

2ον) *Ἂν δὲ $A<90^0$ καὶ $\alpha\geqslant\beta$*, πρέπει νὰ εἶναι ἀντιστοίχως $A\geqslant B$, ἄρα καὶ $B=\omega$.

3ον) *Ἂν δὲ $A<90^0$ καὶ $\alpha<\beta$*, δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ $B=\omega$ ἢ $B=180^0-\omega$.

Οὕτως, ἂν σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΑΓ ἴση τῇ Α, ληφθῇ δὲ (ΑΓ)=β καὶ γραφῇ ὁ κύκλος ὁ ἔχων κέντρον μὲν τὸ σημεῖον Γ, ἀκτῖνα δὲ (ΓΒ)=α, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἂν μὲν ἡ πλευρὰ α εἶναι μείζων τῆς ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένης καθέτου ΓΔ, ὁ κύκλος θὰ τέμῃ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα, οἷον τὰ Β καὶ Β′ (136), καὶ τὰ σχηματιζόμενα δύο διάφορα τρίγωνα ΓΑΒ, ΓΑΒ′, ὧν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ λύωσι τὸ πρόβλημα· ἂν δὲ α=(ΓΔ), ὁ κύκλος θὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ (135), καὶ θὰ ἔχωμεν μίαν



λύσιν, τὸ τρίγωνον ΑΓΔ· τέλος δέ, ἂν $\alpha < (\Gamma\Delta)$, δὲν θὰ ὑπάρχῃ οὐδεμία λύσις· διότι ἡ γραφησομένη περιφέρεια δὲν θὰ τέμῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ (134). Τοῦτο προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu B = \frac{6\,\eta\mu A}{\alpha}$,

ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{6\eta\mu A}{\alpha} \leqslant 1$ ἢ $6\eta\mu A \leqslant \alpha$· καὶ

ἐπειδὴ $(\Gamma\Delta) = 6\ \eta\mu A$, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $(\Gamma\Delta) \leqslant \alpha$.

Θὰ ἔχωμεν ἄρα ἐν τῷ δοθέντι προβλήματι

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 6 &= 4,72968 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \underline{\bar{1},97948} \\ & 4,70916 \\ \lambda o\gamma\, \alpha &= \underline{4,71263} \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B &= \bar{1},99653. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ $6 > \alpha$, θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις

$B = 82^0\, 46'$ ὅθεν $\Gamma = 24^0\, 42'\, 28''$

καὶ $B' = 97^0\, 14'$ ὅθεν $\Gamma' = 10^0\, 14'\, 28''$.

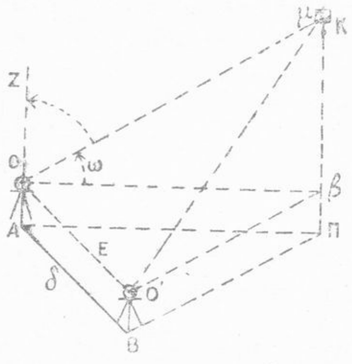
$\lambda o\gamma\, \alpha = 4,71263$	$\lambda o\gamma\, \alpha = 4,71263$
$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma = \underline{\bar{1},62117}$	$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma' = \underline{\bar{1},24991}$
$4,33380$	$3,96254$
$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, A = \underline{\bar{1},97948}$	$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, A = \underline{\bar{1},97948}$
$\lambda o\gamma\, \gamma = 4,35432$	$\lambda o\gamma\, \gamma' = 3,98306$
$\gamma = 22611^{\pi\chi.},05$	$\gamma' = 9617^{\pi\chi.},5.$

Σημείωσις. Ἐν ταῖς διὰ τῶν λογαρίθμων ἐργασίαις δυνάμεθα προφανῶς νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἀφαιρέσεις, ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς διὰ προσθέσεων, προσθέτοντες δηλαδὴ τοὺς ἀντιθέτους τῶν ἀφαιρετέων λογαρίθμων ἀριθμούς. Οὕτω π.χ. ἡ ἀφαίρεσις τοῦ λογαρίθμου $\bar{1},97948$ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου $0,02052$.

Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν χωρομετρίαν.

418. 1) *Προσδιορίσαι τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους προσιτοῦ σημείου Α ἀπὸ ἑτέρου ὁρατοῦ σημείου Κ.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου προσδιορίζομεν τὴν ὁριζοντίαν τοῦ σημείου Α ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς τοῦ σημείου Κ προβολῆς ἐπὶ τοῦ διὰ τοῦ Α διερχομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, καὶ περίπου εἰς τὸ διὰ τοῦ Α διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τρίτον σημεῖον Β, ἐξ οὗ νὰ εἶναι ὁρατὸς ὁ εἰς τὸ σημεῖον Κ κατακορύφως τεθειμένος στόχος, καὶ διὰ τῆς μετροταινίας μετροῦμεν τὴν τῶν σημείων Α καὶ Β *ὁριζοντίαν*



ἀπόστασιν δ. Εἶτα, στήσαντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὸν *ὁριζόντιον* καλούμενον αὐτοῦ κύκλον ποιήσαντες διὰ τῆς ἀεροστάθμης ὁριζόντιον, σκοπεύομεν εἴς τινα διαίρεσιν μ τοῦ εἰς τὸ σημεῖον Κ κειμένου στόχου καὶ ἀναγινώσκομεν ἐπί τε τοῦ ὁριζοντίου καὶ τοῦ κατακορύφου κύκλου τοὺς ὑπὸ τῶν περιστρεφομένων ἐπ' αὐτῶν δεικτῶν δεικνυομένους ἀριθμούς· μετὰ δὲ τοῦτο σκοπεύομεν πάλιν πρὸς τὸ εἰς τὸ σημεῖον Β τεθειμένον κατακόρυφον ἀκόντιον καὶ ἀναγινώσκομεν μόνον τὸν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου κύκλου ἀριθμόν. Οὕτως, ὁ μὲν ἐπὶ τοῦ κατακορύφου κύκλου ἀναγνωσθεὶς ἀριθμὸς δηλοῖ τὸ μέτρον τῆς γωνίας βΟμ=ω, ἣν σχηματίζει ὁ σκοπευτικὸς ἄξων μετὰ τοῦ ὁρίζοντος, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου κύκλου ἀναγνωσθέντων δύο ἀριθμῶν δηλοῖ προφανῶς τὸ μέτρον τῆς βΟΕ γωνίας ἢ τῆς πρὸς ταύτην ἴσης ΠΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τῆς ἐν τῷ χώρῳ γωνίας μΟΕ.

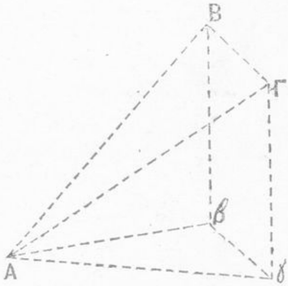
Ἂν δὲ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β μετρήσωμεν ὡσαύτως τὴν ὁριζοντίαν προβολὴν ΠΒΑ τῆς ἐν τῷ χώρῳ γωνίας μΟ'Ε, ἐκ μὲν τοῦ τριγώνου ΠΑΒ, οὗ θὰ εἶναι ἤδη γνωσταὶ ἡ πλευρὰ (ΑΒ)=δ καὶ αἱ ταύτῃ προσκείμεναι γωνίαι, θὰ ἔχωμεν $(\text{ΑΠ})=\delta\frac{\text{ἡμ ΑΒΠ}}{\text{ἡμ ΑΠΒ}}$, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μΟϐ θὰ ἔχωμεν (ϐμ)=(Οϐ)ἐφω=(ΑΠ)ἐφω.

Λοιπὸν, ἂν εἰς τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ (ϐμ) προσθέσωμεν μὲν τὸ ἐν τῷ σταθμῷ Α ὕψος τοῦ ὀργάνου, ἀφαιρέσωμεν δὲ τὸ τοῦ στόχου ὕψος Κμ, θὰ ἔχωμεν τὴν τῶν σημείων Α καὶ Κ ζητουμένην διαφορὰν ὕψους.

Σημείωσις. Διὰ τῶν αὐτῶν μετρήσεων εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ὄρους, δηλαδὴ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα, ἀπόστασιν ΠΚ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ.

2) *Προσδιορίσαι τὴν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολὴν τῆς ἀποστάσεως δύο ὁρατῶν σημείων Β καὶ Γ.*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σημεῖόν τι Α, ἐξ οὗ νὰ εἶναι ὁρατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον πρόβλημα προσδιορίζομεν τὰς τῶν ὀπτικῶν ἀκτίνων ΑΒ καὶ ΑΓ ὁριζοντίας προβολὰς Αϐ καὶ Αγ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένην γωνίαν ϐΑγ.



Οὕτως ἐκ τοῦ τριγώνου ϐΑγ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἤδη τὴν ζητουμένην *ὁριζοντίαν ἀπόστασιν* ϐγ τῶν ὁρατῶν σημείων Β καὶ Γ.

3) *Εὑρεῖν τὸ ὕψος κατακορύφου στήλης ΠΚ, ἧς ὁ πους Π εἶναι προσιτός.*

Πρὸς τοῦτο μετρεῖται ὁριζοντία τις βάσις ΑΠ, οὐχὶ πολὺ τοῦ ζητουμένου ὕψους διαφέρουσα, ἔτι δὲ καὶ ἡ γωνία ΓΒΚ, ἡ ὑπὸ τῆς σκοπευτικῆς ἀκτῖνος ΒΚ καὶ τοῦ ὁρίζοντος σχηματιζομένη. Οὕτω δὲ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΓ ἔχομεν

$$(\text{ΓΚ})=(\text{ΓΒ})\ \text{ἐφ ΓΒΚ}.$$

Ἂν δὲ προστεθῇ καὶ τὸ τοῦ ὀργάνου ὕψος (ΑΒ)=(ΠΓ), θὰ εὑρεθῇ ὅτι τὸ ὅλον ὕψος (ΠΚ) τῆς κατακορύφου στήλης εἶναι

$$(\text{ΠΚ})=(\text{ΠΓ})+(\text{ΓΒ})\ \text{ἐφΓΒΚ}.$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

Θέσεις εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.

Ὁρισμοί.

419. Εὐθεῖά τις συναντῶσα δοθὲν ἐπίπεδον λέγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο *κάθετος*, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένας καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένας· ἀντιστρόφως δέ, τὸ ἐπίπεδον τότε λέγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν *κάθετον*.

420. *Ποὺς* δὲ εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται τὸ σημεῖον ἐν ᾧ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

421. *Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον* λέγονται πρὸς ἄλληλα *παράλληλα*, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

422. *Δύο ἐπίπεδα* λέγονται *πρὸς ἄλληλα παράλληλα*, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

Ἀξίωμα.

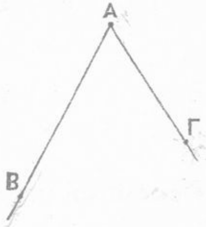
423. *Πᾶν ἐπίπεδον στρεφόμενον περὶ εὐθεῖαν ἐν αὐτῷ κειμένην δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ τυχόντος τοῦ χώρου σημείου.*

Θεώρημα.

424. *Διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.*

Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἅτινα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι δι' αὐτῶν διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ μόνον ἕν.

Πρὸς τοῦτο ἐπί τινος ἐπιπέδου γράφομεν εὐθεῖάν τινα, ἣν ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, μεταφέροντες τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ τότε θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· εἶτα δὲ στρέφομεν περὶ τὴν ΑΒ τὸ ἐπίπεδον, ἕως οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ τρίτου σημείου Γ· οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν δεδομένων σημείων Α, Β καὶ Γ.



Λέγω δὲ ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν διὰ τῶν σημείων τούτων νὰ διέρχηται ἄλλο ἐπίπεδον.

Διότι δύο ἐπίπεδα, ἔχοντα τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσι (40).

Πόρισμα 1ον.

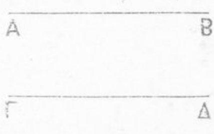
425. *Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὡς αἱ ΑΒ, ΑΓ, κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ὁρίζουσι τὴν θέσιν αὐτοῦ.*

Εἶναι δὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τὸ διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς Α τῶν εὐθειῶν καὶ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων Β καὶ Γ, κειμένων τοῦ μὲν ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἑτέρας εὐθείας, τοῦ δὲ ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἑτέρας.

Πόρισμα 2ον.

426. *Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων, αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου· δὲν δύναται δὲ νὰ ὑποτεθῇ ὅτι δύο διάφορα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῶν αὐτῶν δύο παραλλήλων, διότι θὰ εἶχον κοινὰ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας· ἤτοι δύο οἱαδήποτε σημεῖα τῆς ΑΒ καὶ ἓν σημεῖον τῆς ΓΔ.



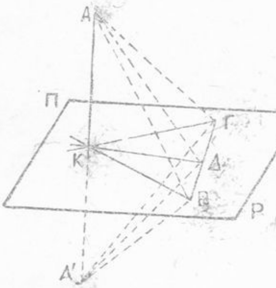
Θεώρημα.

427. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.*

Διότι, ἂν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο ἐπιπέδων ὑπῆρχον τρία σημεῖα οὐχὶ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ἐπειδὴ θὰ διήρχοντο διὰ τῶν σημείων τούτων, θὰ ἐφήρμοζον καὶ θὰ ἀπετέλουν ἓν μόνον ἐπίπεδον, ὅπερ εἶναι τῇ ὑποθέσει ἐναντίον.

Θεώρημα.

428. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.*



Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΚ, κάθετος ἐπὶ τὰς ΚΒ, ΚΓ κατὰ τὸ σημεῖον Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ δι' αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον ΠΡ.

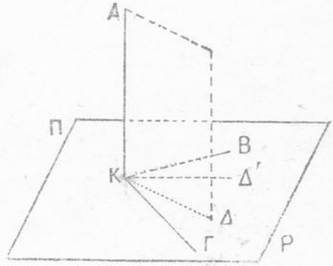
Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΚΔ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.

Διότι, ἂν ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΒΔΓ, τέμνουσα εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ κειμένας καὶ διὰ τοῦ Κ διερχομένας τρεῖς εὐθείας, προεκταθῇ δὲ ἡ ΑΚ καὶ ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Κ ἴσα τμήματα, τὰ ΚΑ καὶ ΚΑ', ἀχθῶσι δὲ τέλος ἐκ τῶν Α καὶ Α' εὐθεῖαι εἰς τὰ Β, Γ, Δ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΓ κοινήν, τὴν ΒΑ=ΒΑ', διότι ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Α'Α, καὶ τὴν ΓΑ=ΓΑ', διότι ἡ ΓΚ εἶναι ἐπίσης κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Α'Α. Ὅταν δὲ ἐφαρμόσωσι, θὰ πέσῃ τὸ Α' ἐπὶ τοῦ Α, τὸ δὲ Δ θὰ μείνῃ ἐν τῇ θέσει του, κατ' ἀκολουθίαν ἡ Α'Δ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΔ· ὥστε θὰ εἶναι ΔΑ=ΔΑ'· ἡ ΔΚ ἄρα θὰ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς Α'Α κάθετος· ἤτοι ἡ ΑΚ θὰ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΔΚ κάθετος· ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δειχθῇ.

Θεώρημα.

429. *Πᾶσαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὴν κάθετοι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.*

Ἔστωσαν αἱ ἐκ τοῦ σημείου Κ τῆς εὐθείας ΚΑ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ· λέγω ὅτι αἱ κάθετοι αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.



Διότι, ἂν ἡ ΚΔ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, ὅπερ ὁρίζουσιν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ἤγετο δὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΚΔ, θὰ ἔτεμνε τὸ ΠΡ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΔ', ἐπὶ τὴν ὁποίαν θὰ ἦτο κάθετος ἡ ΑΚ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ· κατ' ἀκολουθίαν θὰ ὑπῆρχον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΚΔ, ΚΔ', κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΑ, ὅπερ ἄτοπον (56).

Πόρισμα 1ον

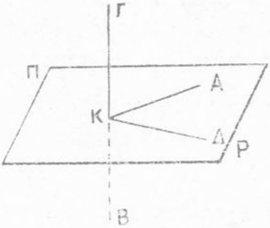
430. *Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων εἶναι ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.*

Διότι πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον τῶν σημείων Β καὶ Γ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ (75)· πᾶσαι δὲ αἱ κάθετοι αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ κάθετον.

Πόρισμα 2ον

431. *Διὰ δεδομένου σημείου ἄγεται ἓν μόνον ἐπίπεδον ἐπὶ δεδομένην εὐθεῖαν κάθετον.*

αον) Ἔστω ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ὁρίζεται ὑπὸ δύο ἐκ τοῦ σημείου τούτου κατὰ διαφόρους φορὰς ἀγομένων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καθέτων.



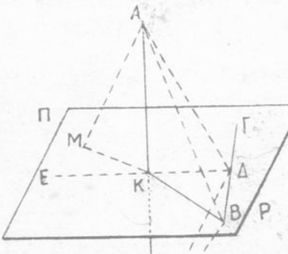
6ον) Ἔστω ὅτι τὸ δεδομένον σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τῆς δεδομένης εὐθείας ΒΓ. Οὕτως, ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖα κάθετος, ἡ ΑΚ, καὶ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἄλλη κάθετος, ἡ ΚΔ, τὸ ἐπίπεδον ΠΡ τῶν δύο τούτων καθέτων εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον (428).

Ἐν ἀμφοτέραις δὲ ταῖς περιπτώσεσι ταύταις ἓν μόνον εἶναι τὸ κάθετον ἐπίπεδον. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχει καὶ δεύτερον ἐπίπεδον, ἂν ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου ἐπίπεδον, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο ἐπ' αὐτὴν καθέτους εὐθείας, κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ μετ' ἐκείνης ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἄτοπον.

Θεώρημα.

432. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἄγεται κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ μία μόνη.*

αον) Ἔστω ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΠΡ.



Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ γράφομεν εὐθεῖάν τινα, τὴν ΒΓ, καὶ ἄγομεν τὴν ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετον, ἐκ δὲ τοῦ Δ ἄγομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ τὴν ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετον. Οὕτως, ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΚ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος, λέγω ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΚ, ἥτις ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπί τινα ἄλλην εὐθεῖαν ΚΒ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Κ.

Διότι, ἂν προεκταθῇ ἡ ΑΚ καὶ ληφθῇ ἡ ΚΑ' ἴση τῇ ΚΑ, ἀχθῶσι δὲ αἱ ΑΒ, Α'Β καὶ ἡ Α'Δ, θὰ εἶναι ΔΑ=ΔΑ' (75)· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ, θὰ εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΔΑ', κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΔΑ'.

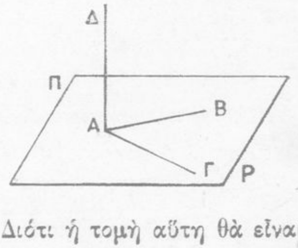
Λοιπὸν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ, Α'ΔΒ, ἔχοντα τὰς δύο καθέτους πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἴσα· ἔχουσιν ἄρα ΑΒ=Α'Β· κατ' ἀκολουθίαν, τοῦ τριγώνου ΑΒΑ' ὄντος ἰσοσκελοῦς, ἡ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ μετὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ἑνοῦσα εὐθεῖα ΚΒ εἶναι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΑ' κάθετος.

Οὕτως ἡ ΑΚ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΚΔ καὶ ἐπὶ τὴν ΚΒ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΠΡ.

Εἶναι δὲ ἀδύνατον νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἄλλη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος.

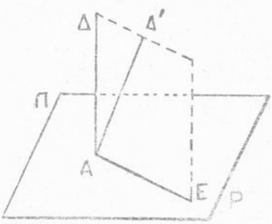
Διότι, ἂν ἀπὸ τοῦ Α ἤγοντο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ δύο κάθετοι, αἱ ΑΚ καὶ ΑΜ, τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΜ, ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ ΑΚ καὶ ΑΜ θὰ ἦσαν κάθετοι, ἠγμέναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, ὅπερ ἄτοπον (56).

6ον) Ἔστω ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΠΡ.



Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ δύο εὐθεῖαι, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ, ἐκ δὲ τοῦ Α τὰ δύο ἐπίπεδα, ὧν τὸ μὲν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ δὲ ἐπὶ τὴν ΑΓ, λέγω ὅτι ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΔ θὰ εἶναι ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ζητουμένη κάθετος. Διότι ἡ τομὴ αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ (419)· ἄρα καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΠΡ.

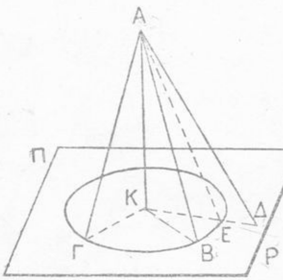
Εἶναι δὲ ἀδύνατον νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἄλλη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος.



Διότι, ἂν ἤγοντο δύο κάθετοι, ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΑΔ′, τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατά τινα εὐθεῖαν ΑΕ ἐπὶ τὴν ὁποίαν θὰ ἦσαν ἀμφότεραι αἱ ΑΔ, ΑΔ′, κάθετοι· θὰ ἤγοντο ἄρα **ἐκ** τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν ΑΕ δύο κάθετοι, ἐν τῷ αὐτῷ καὶ ἡ ΑΒ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ὅπερ ἄτοπον (56).

Θεώρημα.

433. *Ἂν ἐκ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου, οἷον τοῦ ΠΡ, ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὸ ἡ κάθετος ΑΚ καὶ αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· λέγω*



1ον) *ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας·*

2ον) *ὅτι δύο πλάγιαι, ὧν οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι·*

3ον) *ἐκ δύο πλαγίων μείζων εἶναι ἐκείνη, ἧς ὁ ποὺς ἀπέχει μᾶλλον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.*

1ον) Ἔστωσαν ΑΚ ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος καὶ ΑΒ ἡ πλαγία. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΒ θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΒ· ἡ πλευρὰ ἄρα ΑΚ τῆς ὀρθῆς γωνίας θὰ εἶναι τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ μικροτέρα (93).

2ον) Ἔστω ΚΒ=ΚΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶναι τῇ ΑΓ ἴση. Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ, ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας, ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα (80).

3ον) Ἔστω ΚΔ>ΚΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΔ θὰ εἶναι τῆς ΑΒ μείζων.

Διότι, ἂν ληφθῇ ἡ ΚΕ ἴση τῇ ΚΒ καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΕ, θὰ εἶναι ΑΕ=ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ ΑΔ>ΑΕ (67), θὰ εἶναι καὶ ΑΔ>ΑΒ.

Τὰ τούτων ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

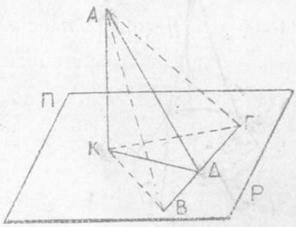
Ὁ ρ ι σ μ ό ς.

434. *Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου* καλεῖται ἡ ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθοδος.

Θ ε ώ ρ η μ α. (*)

435. ***Ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς ἐπὶ ἐπίπεδον καθέτου ἀχθῇ ἐπί τινα τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαν κάθετος, ἡ τὸν πόδα τῆς καθέτου ταύτης μετά τινος σημείου τῆς πρώτης καθέτου ἑνοῦσα εὐθεῖα θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου κάθετος.***

Ἔστω ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος ΑΚ καὶ ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένη εὐθεῖα ΒΓ. Ἂν ἐκ τοῦ ποδὸς Κ ἀχθῇ ἡ ΚΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος, ἑνωθῇ δὲ τὸ Δ μετά τινος σημείου τῆς ΑΚ, οἷον τοῦ Α, λέγω ὅτι ἡ ΑΔ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος. Πρὸς τοῦτο ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἑκατέρωθεν τοῦ Δ δύο ἴσα τμήματα, τὰ ΔΒ καὶ ΔΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΒ, ΚΓ, ΑΒ, ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ πλάγιαι ΚΒ, ΚΓ, ὡς ἴσον τοῦ ποδὸς Κ τῆς καθέτου ΑΚ ἀπέχουσαι, εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι αἱ ἐν τῷ χώρῳ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ὡς ἴσον τοῦ ποδὸς Κ τῆς καθέτου ΑΚ ἀπέχουσαι, εἶναι ὡσαύτως ἴσαι (433).



Λοιπόν, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ ἀχθεῖσα, εἶναι ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος.

(*) Τὸ θεώρημα τοῦτο καλεῖται ἐνίοτε «θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων».

436. *Ἀντιστρόφως : Δύο εὐθειῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχομένων, ἂν ἡ μὲν εἶναι ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετος, ἡ δὲ ἐπὶ εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου, ἡ τοὺς πόδας τῶν καθέτων τούτων ἑνοῦσα εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου κάθετος.*

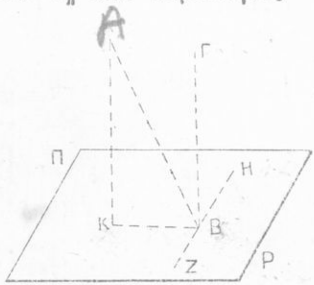
Καὶ τῆς προτάσεως ταύτης ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως βοηθείᾳ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἀποδεικνύεται ὡσαύτως ὅτι, *ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἐπὶ εὐθεῖαν κάθετοι, καὶ ἡ ἑτέρα κάθετος τοῦ τριγώνου πλευρὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας καθέτου καὶ τῆς εὐθείας ὁριζόμενον.*

Θεώρημα.

437. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐπί τι ἐπίπεδον κάθετος, πᾶσα τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ παράλληλος εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κάθετος.*

Ἔστωσαν ἡ μὲν εὐθεῖα ΑΚ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΑΚ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἐπὶ τὸ ΠΡ κάθετος. Πρὸς τοῦτο ἂς ἑνωθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Κ, εἰς ἃ αἱ δύο παράλληλοι τέμνουσι τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, διὰ τῆς εὐθείας ΚΒ, διὰ δὲ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἡ ΖΗ ἐπὶ τὴν ΚΒ κάθετος, καὶ ἂς ἑνωθῇ τὸ Β μετά τινος σημείου τῆς ΑΚ, οἷον τοῦ Α.



Οὕτως ἡ μὲν ΚΒ, οὖσα ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἥτις εἶναι τῇ ΑΚ παράλληλος (110)· ἡ δὲ ΖΗ, οὖσα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΚ, ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΑ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (435), εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΚ· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ (419).

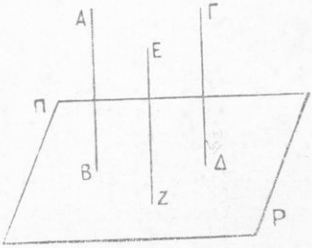
Λοιπὸν ἡ ΓΒ, οὖσα κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΒΚ καὶ ΒΖ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΠΡ.

438. ***Ἀντιστρόφως.*** *Δύο εὐθεῖαι, οἷον αἱ ΑΚ καὶ ΒΓ, ἂν εἶναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετοι εἶναι παράλληλοι.*

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΚ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος, ἡ ἐκ τοῦ Β ἀγομένη τῇ ΚΑ παράλληλος εἶναι ὡσαύτως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κάθετος· κατ' ἀκολουθίαν μετὰ τῆς καθέτου ΒΓ θὰ ταυτίζηται· διότι ἐκ τοῦ Β ἄγεται μία μόνη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος (432).

Πόρισμα.

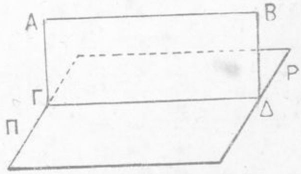
439. *Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ πρὸς τρίτην εὐθεῖαν ΕΖ παράλληλοι εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.*



Διότι, ἂν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον, οἷον τὸ ΠΡ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κάθετοι (437), κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι (438).

Θεώρημα.

440. *Ἂν εὐθεῖα, ἐκτὸς ἐπιπέδου κειμένη, εἶναι παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ.*



Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ, κειμένῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ.

Διότι, ἂν ἀχθῇ τὸ ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ ὁριζόμενον ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, πρόδηλον εἶναι ὅτι πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τούτου συναντῶσα τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἀναγκαίως συναντᾷ αὐτὸ εἰς σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ, ὁσονδήποτε καὶ ἂν προεκταθῇ, δὲν συναντᾷ τὴν ΓΔ, ἕπεται ὅτι δὲν συναντᾷ καὶ τὸ ἐπίπεδον· εἶναι ἄρα πρὸς τοῦτο παράλληλος.

Πόρισμα 1ον.

441. *Ἐὰν εὐθεῖά τις, οἷον ἡ ΑΒ, εἶναι ἐπιπέδῳ τινί, οἷον τῷ ΠΡ, παράλληλος, πᾶν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον καὶ τὸ ΠΡ τέμνον, τέμνει αὐτὸ κατ' εὐθεῖαν τῇ ΑΒ παράλληλον.*

Διότι, ἂν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὴν εὐθεῖαν ταύτην, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ ἐπίπεδον.

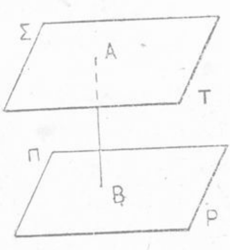
Πόρισμα 2ον.

442. *Ἐὰν εὐθεῖά τις, οἷον ἡ ΑΒ, εἶναι ἐπιπέδῳ τινί, οἷον τῷ ΠΡ, παράλληλος, πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι τῇ ΑΒ παράλληλοι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.*

Διότι ἂν ἡ ἐκ σημείου τινός, οἷον τοῦ Γ, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, ἀγομένη τῇ ΑΒ παράλληλος δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ Γ διερχόμενον ἐπίπεδον θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον κατ' εὐθεῖαν τῇ ΑΒ παράλληλον, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐκ τοῦ Γ θὰ ἤγοντο δύο εὐθεῖαι τῇ ΑΒ παράλληλοι.

Θεώρημα.

443. *Δύο ἐπίπεδα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετα εἶναι παράλληλα.*

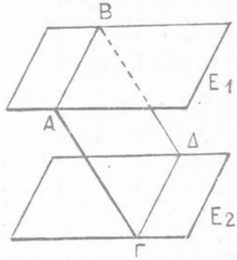


Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΣΤ κάθετα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα.

Διότι ἂν ἐτέμνοντο θὰ ἠδυνάμεθα ἔκ τινος σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν νὰ ἀγάγωμεν δύο ἐπίπεδα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετα, ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον (431).

Θεώρημα.

444. *Αἱ ὑπὸ ἐπιπέδου τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.*



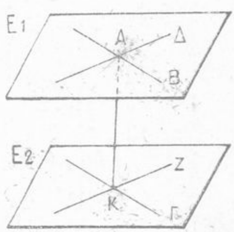
Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2 καὶ τὸ τέμνον αὐτὰ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Διότι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαι οὖσαι καὶ ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων κείμεναι δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν.

K. *Θεώρημα.*

445. *Πᾶσαι αἱ διὰ δεδομένου σημείου διερχόμεναι καὶ παράλληλοι δεδομένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ δεδομένῳ.*

Ἔστω τὸ μὲν δεδομένον ἐπίπεδον τὸ E_2, τὸ δὲ δεδομένον σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δεδομένη τῷ ἐπιπέδῳ E_2 παράλληλος καὶ διὰ τοῦ Α διερχομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι οἷαι ἡ ΑΒ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ E_2.



Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ Α ἂς ἀχθῶσιν ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον E_2, ἔτι δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΚ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ τέμῃ τὸ ἐπίπεδον E_2 κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΓ, οὖσαν τῇ ΑΒ παράλληλον (441). Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΚ εἶναι ἐπὶ τὴν ΚΓ κάθετος, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΑΒ (110)· τούτου ἕνεκα ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ὡς καὶ πᾶσα ἄλλη ἐκ τοῦ Α ἀγομένη τῷ ἐπιπέδῳ E_2 παράλληλος, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΚ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου E_1, ὅπερ εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον (419)· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο E_2 εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ E_1 παράλληλον (443).

Πόρισμα.

446. ***Διὰ δεδομένου σημείου ἓν μόνον παράλληλον ἐπίπεδον δεδομένῳ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ἀχθῇ.***

Ἔστωσαν τὸ μὲν σημεῖον τὸ Α, τὸ δὲ ἐπίπεδον τὸ E_2.

Ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΚ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον E_2 κάθετος, ἔτι δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἀχθῇ ἐπίπεδον E_1 τῇ ΑΚ κάθετον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ E_2 παράλληλον (443).

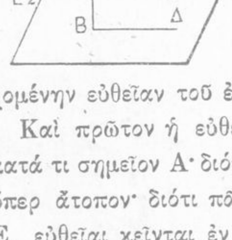
Νῦν δὲ λέγω ὅτι διὰ τοῦ σημείου Α δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ ἕτερον ἐπίπεδον τῷ ἐπιπέδῳ E_2 παράλληλον.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι διὰ τοῦ Α ἄγεται καὶ δεύτερον ἐπίπεδον τῷ E_2 παράλληλον, ἔστω τὸ E_3, τότε, ἐπειδὴ πᾶν διὰ τῆς ΑΚ διερχόμενον ἐπίπεδον θὰ τέμῃ τὰ ἐπίπεδα E_2 καὶ E_3 κατ' εὐθείας παραλλήλους (444), ἕπεται ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ E_3 γενομένη τομή, ὡς παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ E_2, θὰ ἔκειτο (445) καὶ ἐπὶ τοῦ E_1, κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπίπεδον E_3 θὰ ἐταυτίζετο μετὰ τοῦ E_1.

Θεώρημα.

447. *Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕτερον δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἕτερον.*

Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2, καὶ ἡ ἐπὶ τὸ ἕτερον τούτων, τὸ E_2, κάθετος κατὰ τὸ σημεῖον Β εὐθεῖα ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ E_1 κάθετος.



Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΒ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον E_1 κατά τι σημεῖον Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α διερχομένην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου E_1, οἷον τὴν ΑΓ.

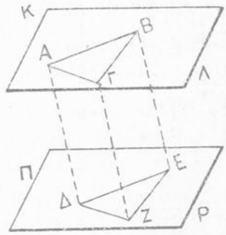
Καὶ πρῶτον ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὀφείλει νὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον E_1 κατά τι σημεῖον Α· διότι ἄλλως θὰ ἦτο παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ E_1, ὅπερ ἄτοπον· διότι πᾶσαι αἱ ἐκ τοῦ Β ἀγόμεναι παράλληλοι τῷ E_1 εὐθεῖαι κεῖνται ἐν τῷ παραλλήλῳ τῷ E_1 ἐπιπέδῳ E_2.

Ἂν δὲ ἀχθῇ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὁριζόμενον ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμῃ τὸ E_2 κατὰ τὴν ΒΔ, οὖσαν τῇ ΑΓ παράλληλον (444)· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὸ E_2, εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ κάθετος, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῇ ΒΔ εὐθεῖαν ΑΓ (110).

Θεώρημα. +X

448. *Δύο γωνίαι οὐχὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ἂν ἔχωσι τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.



Πρὸς τοῦτο ἂς ληφθῶσι τὰ ἴσα καὶ ὁμόρροπα ἀλλήλοις τμήματα ΑΒ, ΔΕ καὶ ΑΓ, ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ,ΕΖ,ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι τῇ ΔΕ ἴση καὶ ὁμόρροπος, τὸ σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ δύο ἄρα ἀπέναντι πλευραὶ ΒΕ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι καὶ ὁμόρροποι.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τῇ ΑΔ ἴση καὶ ὁμόρροπος. Κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ ὁμόρροποι, διότι ἀμφότεραι εἶναι ἴσαι καὶ ὁμόρροποι τῇ ΑΔ· τὸ σχῆμα ἄρα ΒΓΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι τῇ ΕΖ ἴση καὶ ὁμόρροπος. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα· κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι τῇ ΕΔΖ ἴση.

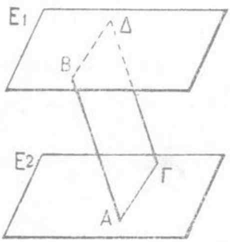
Ὅτι δὲ τῶν γωνιῶν τούτων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ἕπεται ἐκ προηγουμένου θεωρήματος (445), ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως ταῖς εὐθείαις ΔΕ καὶ ΔΖ, εἶναι παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ (440).

Σημείωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἑξῆς πρότασις : "*Ἂν ἐκ τῶν σημείων ἐπιπέδου ἀχθῶσι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαι ἴσαι, παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, τὰ ἄκρα* *αὐτῶν θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ δοθέντι.*

Θεώρημα.

449. *Τὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τμήματα τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμενα εἶναι ἴσα καὶ ὁμόρροπα.*

Ἔστωσαν τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων E_1 καὶ E_2 περιεχόμενα παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ· λέγω



ὅτι τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ὁμόρροπα.

Διότι ἂν ἀχθῇ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, τοῦτο θὰ τέμῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2 κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ (444). Τὰ τμήματα ἄρα ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ σχηματισθησομένου παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ, εἶναι ἴσα καὶ ὁμόρροπα.

Πόρισμα.

450. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διότι αἱ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κάθετοι εἶναι παράλληλοι (438)· καὶ ἄρα ἴσαι.

Ὁρισμός.

451. Δύο παραλλήλων ἐπιπέδων *ἀπόστασις* λέγεται ἡ τυχοῦσα ἐκ τῶν μεταξὺ αὐτῶν ἴσων κοινῶν καθέτων.

Περὶ τῆς πρὸς ἄλληλα διαφόρου θέσεως δύο ἐπιπέδων, ἢ εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, ἢ δύο εὐθειῶν.

452. *Δύο διακεκριμένων ἐπιπέδων αἱ πρὸς ἄλληλα διάφοροι θέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς δύο :*

(1ον) *ἢ τέμνουσιν ἄλληλα κατά τινα εὐθεῖαν,*

(2ον) *ἢ εἶναι παράλληλα.*

Αἱ δὲ πρὸς ἀλλήλας διάφοροι δύο διακεκριμένων εὐθειῶν θέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς:

(1ον) ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας }
(2ον) ἢ εἶναι παράλληλοι, } *ὅτε κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ,*

(3ον) ἢ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅτε οὔτε τέμνουσιν ἀλλήλας, οὔτε παράλληλοι εἶναι.

Αἱ δὲ πρὸς ἄλληλα διάφοροι θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς:

(1ον) ἢ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ὅτε εἶναι παράλληλα,

(2ον) ἢ ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅτε ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον καὶ διαπερᾷ αὐτό,

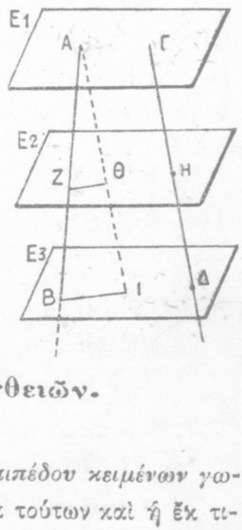
(3ον) ἢ κεῖται ἡ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Θεώρημα.

453. *Δύο εὐθεῖαι, ἐὰν τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, διαιροῦνται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων E_1, E_2, E_3 εἰς τὰ σημεῖα Α, Ζ, Β, καὶ Γ, Η, Δ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ· λέγω ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$AZ : ZB = \Gamma H : H\Delta.$$



Τῷ ὄντι, ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΙ τῇ ΓΔ παράλληλος, τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ καὶ ΑΙ θὰ τέμῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατ' εὐθείας παραλλήλους (444), τὰς ΖΘ καὶ ΒΙ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν (238) $AZ : ZB = A\Theta : \Theta I$.

Ἐπειδὴ δὲ $A\Theta = \Gamma H$ καὶ $\Theta I = H\Delta$ (449), ἕπεται ὅτι $AZ : ZB = \Gamma H : H\Delta$.

Περὶ τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν.

Ὁρισμοί.

454. *Δύο εὐθειῶν οὐχὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων γωνία καλεῖται* ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ ἑτέρα τούτων καὶ ἡ ἔκ τινος σημείου αὐτῆς ἀγομένη τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, αἱ ἐν τῷ θεωρήματι 437 εὐθεῖαι ΚΑ καὶ ΖΗ καλοῦνται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, διότι ἡ ΖΗ σχηματίζει μετὰ τῆς εὐθείας ΒΓ τῆς ἐκ τοῦ Β ἀγομένης, οὔσης δὲ τῇ ΚΑ παραλλήλου, γωνίαν ὀρθήν.

455. Οὕτω τὸ θεώρημα (428) δύναται νὰ διατυπωθῇ γενικώτερον ὧδε :

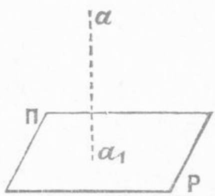
Εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετος ἂν εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλους ἀλλήλαις.

Περὶ ὀρθῶν προβολῶν.

Ὁρισμοί.

456. *Δεδομένου σημείου ὀρθὴ ἐπὶ ἐπίπεδον προβολὴ* λέγεται ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης καθέτου.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, τοῦ σημείου α ὀρθὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ προβολὴ εἶναι τὸ σημεῖον α_1, ὅπερ εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἀγομένης καθέτου $\alpha\alpha_1$.



Λέγεται δὲ ἡ μὲν κάθετος $\alpha\alpha_1$ *προβάλλουσα*, τὸ δὲ ἐπίπεδον ΠΡ *προβολικὸν ἐπίπεδον*.

Εἶναι δὲ δῆλον ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς προβαλλούσης κείμενα ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολήν.

Σημείωσις. Ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ εἶναι ἡτισδήποτε· ἔν τισιν ὅμως ἐφαρμογαῖς τῆς Γεωμετρίας ὑποθέτομεν αὐτὸ ἢ ὁριζόντιον ἢ κατακόρυφον.

Ἐκ τῆς προβολῆς σημείου τινὸς ὁρίζεται ἀντιστρόφως τὸ σημεῖον, ἂν εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου ἀπόστασις, γινώσκομεν δὲ προσέτι καὶ πρὸς ποῖον μέρος τοῦ ἐπιπέδου κεῖται τὸ σημεῖον τοῦτο.

457. *Γραμμῆς ὀρθὴ ἐπὶ ἐπίπεδον προβολὴ* λέγεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς.

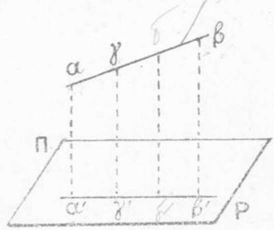
458. Ἡ δὲ ὑπὸ τῶν προβαλλουσῶν εὐθειῶν τὰ σημεῖα γραμμῆς σχηματιζομένη ἐπιφάνεια, καλεῖται *προβάλλουσα τὴν γραμμὴν ἐπιφάνεια.*

Θεώρημα.

459. *Εὐθείας τινὸς ἡ ἐπί τι ἐπίπεδον ὀρθὴ προβολὴ εἶναι εὐθεῖα.*

Ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα αβ καὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ΠΡ· λέγω ὅτι ἡ τῆς αβ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προβολὴ α'β' εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Διότι πᾶσαι αἱ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αβ προβάλλουσαι, αἱ αα', ββ', γγ', . . .,ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον οὖσαι κάθετοι, εἶναι παράλληλοι (438)· κατ' ἀκολουθίαν ἡ τὴν εὐθεῖαν προβάλλουσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος (426), συμπίπτουσα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς αβ καὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν αα', ββ'... Τούτου ἕνεκα, τῆς προβαλλούσης ἐπιφανείας καὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΠΡ ἡ κοινὴ τομὴ α'β', ἥτις εἶναι εὐθεῖα (427), εἶναι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς εὐθείας.



Σημείωσις α'. Ἂν ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον κάθετος ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶναι προφανῶς σημεῖον.

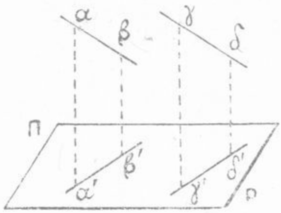
Σημείωσις β'. Πᾶσα τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ παράλληλος εὐθεῖα εἶναι καὶ τῇ προβολῇ αὐτῆς παράλληλος (440)· ἡ δὲ προβάλλουσα τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ὁρίζει τὴν ἀπόστασιν τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Θεώρημα.

460. *Δύο παραλλήλων εὐθειῶν αἱ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθαὶ προβολαὶ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι αβ καὶ γδ καὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ΠΡ· λέγω ὅτι αἱ τῶν εὐθειῶν τούτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ προβολαὶ α'β' καὶ γ'δ' εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ τὸ σημεῖον α τῆς αδ προβάλλουσα αα′ καὶ ἡ



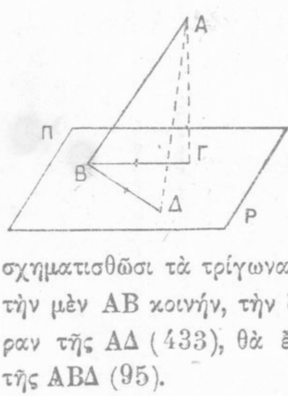
τὸ σημεῖον γ τῆς γδ προβάλλουσα γγ′ εἶναι παράλληλοι, τὰ ἐπίπεδα βαα′ καὶ δγγ′ εἶναι παράλληλα (448)· κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι α′β′ καὶ γ′δ′, καθ' ἃς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ τέμνει τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, εἶναι παράλληλοι.

Παρατήρησις. Τῶν ὀρθῶν προβολῶν γίνεται συστηματικὴ χρῆσις ἐν τῇ *Παραστατικῇ Γεωμετρίᾳ*, ἧς σκοπὸς εἶναι ἡ δι' ὀρθῶν προβολῶν ἐπὶ δύο ἐπιπέδων, ἑνὸς ὁριζοντίου καὶ ἑνὸς κατακορύφου, παράστασις τῶν ἐν τῷ χώρῳ σχημάτων. Καλεῖται δὲ συνήθως (ὡς ἐν τῇ ἀρχιτεκτονικῇ κλπ.), ἡ μὲν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὀρθὴ προβολὴ σχήματός τινος *κάτοψις* αὐτοῦ, ἡ δὲ ἐπὶ κατακορύφου *πρόσοψις* ἢ *πλαγία ὄψις*, κατὰ τὴν διάφορον θέσιν τοῦ κατακορύφου προβολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ ἀπεικονιστέον σχῆμα.

Θεώρημα.

461. *Ἡ γωνία ἣν εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον σχηματίζει μετὰ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αὐτῆς εἶναι ἐλάσσων πασῶν τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν ἄλλων τοῦ ἐπιπέδου εὐθειῶν.*

Ἔστω ἡ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ τέμνουσα εὐθεῖα ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ



γωνία ΑΒΓ ἣν αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς ἑαυτῆς προβολῆς ΒΓ εἶναι ἐλάσσων πασῶν τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει μετὰ πάσης ἄλλης τοῦ ἐπιπέδου εὐθείας, ὡς τῆς ΒΔ. Διότι ἂν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος, ληφθῇ δὲ ΒΔ=ΒΓ, καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΔ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, ἅτινα, ἐπειδὴ θὰ ἔχωσι τὴν μὲν ΑΒ κοινήν, τὴν δὲ ΒΔ ἴσην τῇ ΒΓ, τὴν δὲ ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ (433), θὰ ἔχωσι καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΓ μικροτέραν τῆς ΑΒΔ (95).

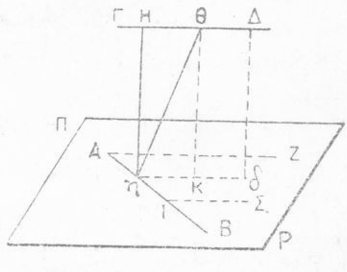
462. *Σημείωσις. Γωνία ἐπιπέδου καὶ εὐθείας πλαγίας πρὸς τὸ ἐπίπεδον* καλεῖται ἡ ὀξεῖα γωνία ἣν ἡ εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῆς ἑαυτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς. Καλεῖται δὲ ἡ γωνία αὕτη καὶ *κλίσις* τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα καταστῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἡ τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον γωνία ἀποβαίνει ὀρθή, ἂν δὲ παράλληλος ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἴση τῷ μηδενί.

Θεώρημα.

463. *Δύο εὐθειῶν μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων ὑπάρχει κοινὴ κάθετος καὶ μία μόνη· εἶναι δὲ ἡ κάθετος οὕτη ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις.*

Ἔστωσαν αἱ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ· λέγω ὅτι ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνη.



Πρὸς τοῦτο ἂς ἀχθῇ ἔκ τινος τῆς ΑΒ σημείου, οἷον τοῦ Α, ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ παράλληλος. Οὕτω τὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΖ ἐπίπεδον ΠΡ θὰ εἶναι τῇ ΓΔ παράλληλον (440)· τῆς ΓΔ ἄρα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ προβολὴ θὰ εἶναι ἡ δη, ἥτις ἐκ τοῦ δ, ὅπερ εἶναι προβολὴ σημείου τινὸς Δ τῆς ΔΓ, ἤχθη τῇ ΔΓ παράλληλος. Οὕτως, ἵνα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΓΔ καθέτως, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος, εἴς τι σημεῖον τῆς ΑΒ, νὰ ἔχῃ δὲ τὸν πόδα ἐπὶ τῆς δη, ἥτις εἶναι ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ΓΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ.

Λοιπὸν ἡ ἐκ τοῦ σημείου η, ὅπερ εἶναι κοινὸν τῆς ΑΒ καὶ τῆς δη, ὑψουμένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος εἶναι ἡ μόνη τὰς συνθήκας ταύτας πληροῦσα. Ὑπάρχει ἄρα μία εὐθεῖα, καὶ μία μόνη, ἡ ηΗ, ἥτις εἶναι κοινὴ κάθετος τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΓΔ.

Λέγω δὲ προσέτι ὅτι ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος ηΗ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἑνούσης δύο σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, οἷον τῆς ΘΙ.

Διότι τῆς ΘΚ οὔσης τῆς προβαλλούσης τὸ σημεῖον Θ ἔχομεν (433) ΘΚ $<$ ΘΙ· ἐπειδὴ δὲ ΘΚ $=$ Ηη, ἕπεται ὅτι Ηη $<$ ΘΙ.

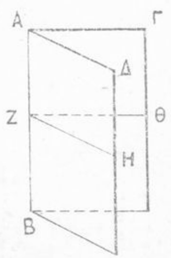
Περὶ γωνιῶν διέδρων.

Ὁρισμοί.

464. *Δίεδρος γωνία καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦντα καὶ εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν περατούμενα.*

Καλοῦνται δὲ τὰ μὲν ἐπίπεδα ταῦτα *ἕδραι* τῆς διέδρου, ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν τομὴ *ἀκμὴ* τῆς διέδρου.

Ἡ δίεδρος γωνία σημειοῦται ἢ διὰ δύο γραμμάτων, γραφομένων ἐπὶ τῆς ἀκμῆς αὐτῆς, ἢ διὰ τεσσάρων, ὧν τὰ μὲν δύο γράμματα ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, τὰ δ' ἕτερα δύο ἐπὶ τῶν ἑδρῶν, ἓν ἐπὶ ἑκατέρας αὐτῶν. Ἐν δὲ τῇ ὀνομασίᾳ τῆς γωνίας τὰ τῆς ἀκμῆς γράμματα τίθενται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.



Οὕτω θὰ εἴπωμεν ἢ ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ ἢ ἡ δίεδρος ΓΑΒΔ.

Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *ἴσαι* ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ ἐξ αὐτῶν μία μόνη δίεδρος γωνία.

Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*, ἐὰν ἔχωσι κοινὴν καὶ τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἐκ τῶν ἑδρῶν, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι λέγονται αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων καὶ ἔχουσαι τὴν μὲν ἀκμὴν κοινήν, τὰς δὲ ἕδρας διαφόρους.

Ἐπίπεδος γωνία καλεῖται διέδρου γωνίας *ἀντίστοιχος*, ἂν σχηματίζηται ὑπὸ δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ κειμένων τῆς μὲν ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν ἑδρῶν, τῆς δὲ ἐπὶ τῆς ἑτέρας.

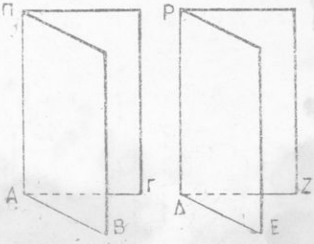
Οὕτως, ἂν ἐκ σημείου τινός, οἷον τοῦ Ζ, τῆς ἀκμῆς ΑΒ, ἀχθῇ ἐπὶ μὲν τῆς ἕδρας ΓΑΒ ἡ ΖΘ τῇ ΑΒ κάθετος, ἐπὶ δὲ τῆς ἕδρας ΔΑΒ ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ κάθετος, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΘΖΗ, ἥτις θὰ προκύψῃ, εἶναι ἡ τῆς διέδρου ΑΒ ἀντίστοιχος.

Ἐξ οὑτινοσδήποτε δὲ σημείου τῆς ἀκμῆς καὶ ἂν ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι, αἱ σχηματισθησόμεναι ἐπίπεδοι γωνίαι, ἐπειδὴ θὰ ἔχωσι τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ ὁμορρόπους, θὰ εἶναι ἴσαι (448).

Θεώρημα.

465. *Δύο δίεδροι γωνίαι, ἂν ἔχωσι τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν αἱ δίεδροι γωνίαι ΠΑ καὶ ΡΔ, ἔχουσαι τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ ἴσας· λέγω ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.



Διότι ἂν ἡ δίεδρος γωνία ΔΡ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΠ οὕτως, ὥστε ἡ ἐπίπεδος γωνία ΕΔΖ νὰ ταυτισθῇ πρὸς τὴν ἴσην αὐτῇ ΒΑΓ, αἱ ἀκμαὶ ΔΡ καὶ ΑΠ θὰ ταυτισθῶσι, διότι ἀμφότεραι θὰ εἶναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α κάθετοι (432). Τούτου ἕνεκα καὶ αἱ ἕδραι τῶν γωνιῶν τούτων θὰ ταυτισθῶσιν, ἡ μὲν ΕΔΡ πρὸς τὴν ΒΑΠ, ἡ δὲ ΖΔΡ πρὸς τὴν ΓΑΠ. Αἱ δίεδροι ἄρα γωνίαι ΑΠ καὶ ΔΡ εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα.

466. *Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Διότι αἱ τούτων ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι, κατὰ κορυφὴν οὖσαι, εἶναι ἴσαι.

Σημείωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ὅτι δηλαδή, ***ὅταν δύο***

δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, εἶναι πρόδηλος.

Ὁρισμοί.

467. Δίεδρος γωνία καλεῖται ὀρθή, ἂν ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ ἐπίπεδος εἶναι ὀρθή.

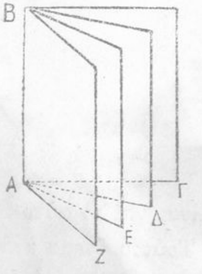
Δύο δ' ἐπίπεδα λέγονται ἐπ' ἄλληλα *κάθετα*, ἂν ἀλληλοτομοῦντα σχηματίζωσι πάσας τὰς διέδρους γωνίας ἴσας καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὀρθάς.

Θεώρημα.

468. *Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ (237) ὅτι εἰς διπλασίαν δίεδρον ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἐπίπεδος, εἰς τριπλασίαν τριπλασία καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἔστω δὲ πρὸς τοῦτο ἡ δίεδρος γωνία ΓΑΒΔ καὶ ἡ εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχος ἐπίπεδος ΓΑΔ.



Ἐὰν ἡ ἐπίπεδος ΓΑΔ ληφθῇ τρὶς ἐν τῷ ἑαυτῆς ἐπιπέδῳ οὕτως ὥστε ΓΑΔ=ΔΑΕ=ΕΑΖ, ἀχθῶσι δὲ τὰ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ ἑκάστης τῶν ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ ὁριζόμενα ἐπίπεδα, θὰ σχηματισθῶσιν αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑΒΕ καὶ ΕΑΒΖ, αἵτινες θὰ εἶναι τῇ ΓΑΒΔ ἴσαι· διότι θὰ ἔχωσι τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τῇ ΓΑΔ.

Οὕτως ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΓΑΒΕ εἶναι τῆς ΓΑΒΔ διπλασία, ἡ δὲ ΓΑΒΖ τῆς ΓΑΒΔ τριπλασία.

Παρατηρήσεις.

1η Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι *πᾶσα δίεδρος ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὀρθὴν δίεδρον, ὃν λόγον ἔχει ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν.*

Οὕτως, ἂν τῶν διέδρων γωνιῶν μονὰς ληφθῇ ἡ ὀρθὴ δίεδρος, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ τῆς ἐπιπέδου γωνίας μονάς, ἕπεται ὅτι τὸ τῆς διέδρου γωνίας μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου αὐτῇ ἐπιπέδου, ἢ ἁπλούστερον *ἡ δίεδρος γωνία μετρεῖται ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῇ ἐπιπέδου γωνίας.*

2ον Ἐκ τῆς τῶν διέδρων γωνιῶν ἀναλογίας πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους ἀποδεικνύονται θεωρήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν θεωρήματα. Ἐπὶ παραδείγματος·

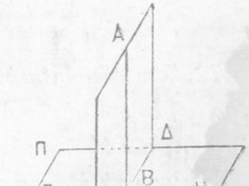
α') *Δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, σχηματιζομένων ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ἀλληλοτομούντων, τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς δύο διέδρους γωνίας ὀρθάς.*

β') *Δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν παραλλήλους ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.*

Θεώρημα.

469. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετος, πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς εὐθείας ταύτης διερχόμενον εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκεῖνο κάθετον.*

Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΠΡ καὶ ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος εὐθεῖα ΑΒ· λέγω ὅτι πᾶν δι' αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον, οἷον τὸ ΑΓΔ, εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετον.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Β ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἡ ΖΗ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος, ἡ γωνία ΑΒΗ θὰ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΑΓΔΗ· διότι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ δὲ τὴν ΒΗ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ δίεδρος ΑΓΔΗ εἶναι ὀρθή.

Τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΠΡ καὶ ΑΔ εἶναι ἐπ' ἄλληλα κάθετα.

Θεώρημα.

470. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι ἐπ' ἄλληλα κάθετα, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων τούτων ἄγεται ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν κάθετος, εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος.*

Ἔστωσαν τὰ ἐπ' ἄλληλα κάθετα ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΑΔ (Σχ. προηγούμενον) καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ εἶναι ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ κάθετος· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ.

Διότι, ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ ἀχθῇ ἡ ΒΗ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος, ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΗ, τῶν ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΓΔ καθέτων, θὰ σχηματισθῇ ἡ γωνία ΑΒΗ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ τῆς διέδρου ἀντίστοιχος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δίεδρος εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ὀρθή· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι ἐπὶ τὴν ΒΗ κάθετος, ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος.

Πόρισμα.

471. *Δι' ἑκάστης εὐθείας ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου κειμένης ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ δεδομένον ἐπίπεδον ἄγεται.*

Θεώρημα.

472. *Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι ἐπ' ἄλληλα κάθετα, ἡ ἔκ τινος σημείου τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου.*

Ἔστωσαν τὰ ἐπ' ἄλληλα κάθετα ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΑΔ καὶ ἡ ἐκ τοῦ σημείου Α τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος ΑΒ'· λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ.

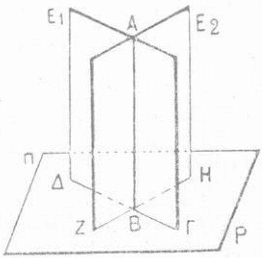
Διότι, ἂν αὕτη δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ, ἤγετο δὲ ἐκ τοῦ Α ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔ κειμένη ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ κάθετος ΑΒ, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἦτο καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος (470).

Οὕτως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α θὰ ἤγοντο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ δύο κάθετοι, ὅπερ ἀδύνατον (432).

Θεώρημα.

473. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦντα εἶναι ἐπ' ἄλλο ἐπίπεδον κάθετα, καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κάθετος.*

Ἔστω ὅτι τὰ ἀλληλοτομοῦντα ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2 εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετα· λέγω ὅτι καὶ ἡ τούτων τομὴ ΑΒ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος.

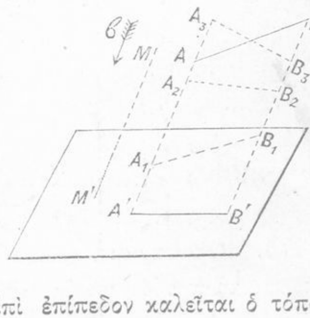


Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς τούτων τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετος, αὕτη θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων E_1 καὶ E_2, θὰ εἶναι ἄρα ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων τομὴ ΑΒ.

Περὶ πλαγίας προβολῆς σημείου καὶ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον.

Ὁρισμοί.

474. *Πλαγία προβολὴ* σημείου τινὸς Μ ἐπὶ ἐπίπεδον Ε καλεῖται τὸ σημεῖον Μ', καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ Μ ἀγομένη παράλληλος δεδομένῃ εὐθείᾳ δ, τέμνούσῃ τὸ ἐπίπεδον Ε καὶ μὴ καθέτῳ ἐπ' αὐτοῦ, εὐθεῖα ΜΜ' συναντᾷ τὸ *προβολικὸν ἐπίπεδον* Ε.



Ἡ διὰ τοῦ σημείου Μ διερχομένη παράλληλος τῇ δ εὐθεῖα ΜΜ' καλεῖται *προβάλλουσα* τοῦ σημείου Μ.

Πλαγία δὲ προβολὴ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται ὁ τόπος τῶν πλαγίων προβολῶν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ εὐθεῖα β καταστῇ κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ἡ πλαγία προβολὴ καταντᾷ ὀρθή, οἵα εἶναι ἡ προηγουμένως (456—460) ἐξετασθεῖσα.

Θεώρημα.

475. *Ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε πλαγία προβολὴ εὐθείας ΑΒ, μὴ παραλλήλου πρὸς τὰς προβαλλούσας, εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.*

Διότι αἱ τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ προβάλλουσαι, συναντῶσαι τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Ε εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′, ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν Α′Β′, ἥτις, ὡς ἀποτελοῦσα τὴν τομὴν τοῦ προβολικοῦ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν προβαλλουσῶν ὁριζομένου ἐπιπέδου, περιλαμβάνει τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν β προβολὰς πάντων τῶν σημείων τῆς ΑΒ.

Σημείωσις. Τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὰς προβαλλούσας εὐθείας πάντων τῶν σημείων τῆς ΑΒ καλεῖται *προβάλλον ἐπίπεδον* τῆς εὐθείας ταύτης.

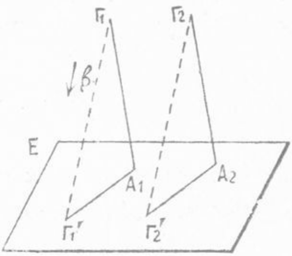
Παρατήρησις. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε *προβολὴ* τοῦ τμήματος ΑΒ εἶναι τὸ τμῆμα Α′Β′, ὅπερ εἶναι προδήλως ἡ παρὰ τὴν διεύθυνσιν β πλαγία προβολὴ παντὸς εὐθυγράμμου τμήματος συνδέοντος σημεῖόν τι A_1, A_2, A_3... τῆς ἑτέρας τῶν προβαλλουσῶν ΑΑ′ πρὸς ἄλλο τι σημεῖον B_1,B_2,B_3...τῆς ἑτέρας τῶν προβαλλουσῶν ΒΒ′.

Καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ Ε παράλληλον, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΒ′Α′ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΒ θὰ εἶναι τῇ Α′Β′ ἴση καὶ παράλληλος.

Εὐθειῶν παραλλήλων πλάγιαι προβολαί.

476. Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $A_1\Gamma_1$ καὶ $A_2\Gamma_2$, αἱ συναντῶσαι τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Ε εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2.

Ἂν προβάλωμεν ταύτας παρὰ τὴν εὐθεῖαν β, τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ προβάλλοντα τὰς εὐθείας ταύτας, παράλληλα ὄντα (448), θὰ τέμνωσι τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Ε κατ' εὐθείας παραλλήλους.



Παράλληλοι ἄρα εὐθεῖαι ἔχουσι προβολὰς παραλλήλους.

Οὕτως, ἂν $Γ_1$ εἶναι σημεῖόν τι τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν παραλλήλων καὶ $Γ_2$ σημεῖόν τι τῆς ἑτέρας, καὶ $Γ_1'$, $Γ_2'$ αἱ προβολαὶ αὐτῶν, ἐκ τῆς τῶν τριγώνων $Γ_1 Α_1 Γ_1'$ καὶ $Γ_2 Α_2 Γ_2'$ ὁμοιότητος, συνάγεται ὅτι

$$\frac{Α_1 Γ_1'}{Α_1 Γ_1} = \frac{Α_2 Γ_2'}{Α_2 Γ_2}.$$

Ἔτι γενικώτερον, ἂν θεωρήσωμεν δύο τμημάτων παραλλήλων οἱωνδήποτε $Γ_1Δ_1$ καὶ $Γ_2Δ_2$ τὰς προβολὰς $Γ'_1Δ'_1$ καὶ $Γ'_2Δ'_2$, ἔχομεν

$$\frac{Γ'_1Δ'_1}{Γ_1Δ_1} = \frac{Γ'_2Δ'_2}{Γ_2Δ_2}.$$

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα συνάγονται τάδε:

Ἴσα παράλληλα τμήματα προβάλλονται κατὰ τμήματα παράλληλα καὶ ἴσα· ἐν γένει δὲ τμήματα παράλληλα προβάλλονται κατὰ τμήματα παράλληλα ἀνάλογα πρὸς τὰ προβαλλόμενα.

Ὅμοια δὲ πολύγωνα καὶ ὁμοίως ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις κείμενα, ἤτοι ἔχοντα τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους, ἔχουσι προβολὰς ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας. Παντὸς δὲ ἐπιπέδου σχήματος παραλλήλου τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ ἡ προβολὴ εἶναι ἴση τῷ σχήματι τούτῳ.

Χρῆσις τῶν πλαγίων προβολῶν ἐν τῇ ἀπεικονίσει στερεῶν σχημάτων.

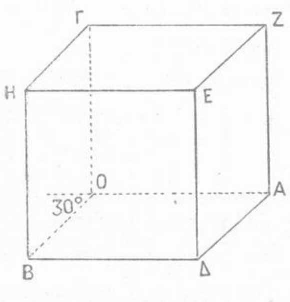
477. Τῆς πλαγίας προβολῆς γίνεται χρῆσις συνήθως ἐν τῇ οἰκοδομικῇ πρὸς παράστασιν τεμαχίων λίθων καὶ ξύλων, διότι διὰ

τῆς παραστάσεως ταύτης παρουσιάζονται εἰς τὸν θεατὴν περισσότεραι ἕδραι τοῦ στερεοῦ, ὅστις οὕτω ἀντιλαμβάνεται σαφέστερον τὸ στερεόν.

Τῆς πλαγίας προβολῆς γίνεται προσέτι χρῆσις ἐν τῇ συνήθει τῶν ἐν τῷ χώρῳ σχημάτων παραστάσει καὶ δὴ ἐν τῇ διδασκαλίᾳ τῆς στερεᾶς γεωμετρίας, ἔνθα διὰ πλαγίας προβολῆς παρίστανται ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ πάντα τὰ στερεά.

478. Ἐξετάσωμεν χάριν παραδείγματος τὴν πλαγίαν προβολὴν δοκοῦ ἐχούσης ἐπιφάνειαν περατουμένην εἰς ἓξ ὀρθογώνια τετράπλευρα, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τούτων συμπίπτει τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ ἢ εἶναι παράλληλον αὐτῷ.

Οὕτω τὰ μὲν πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον παράλληλα ὀρθογώνια, παρίστανται δι' ὀρθογωνίων ἴσων πρὸς ταῦτα, τὰ δὲ λοιπὰ ὀρθογώνια διὰ παραλληλογράμμων. Καὶ αἱ μὲν παράλληλοι τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ πλευραὶ τῶν ὀρθογωνίων προβάλλονται κατὰ τμήματα ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς ταύτας, αἱ δὲ λοιπαὶ αἱ ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον κάθετοι πλευραὶ τῶν ὀρθογωνίων παρίστανται διὰ τμημάτων ὁμορρόπων καὶ ἴσων, καὶ συνήθως ὑπὸ σμίκρυνσιν (476)· (ἐν τῇ λιθοτομίᾳ δὲ καὶ τῇ ξυλοτομίᾳ λαμβάνεται τὸ πλεῖστον ὁ λόγος οὗτος ἴσος πρὸς $\frac{1}{2}$).



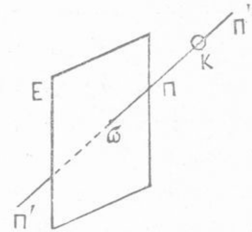
Κατὰ ταῦτα ἡ τοῦ κύβου, περατουμένου εἰς ἓξ τετράγωνα, προβολὴ παρίσταται ὑπὸ τοῦ παρακειμένου σχήματος, ἔνθα ἡ ΟΒ καὶ αἱ πρὸς αὐτὴν παράλληλοι ἀκμαὶ πᾶσαι ἐλήφθησαν ἴσαι πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ΟΑ, ἥτις ἰσοῦται τῇ ἀκμῇ τοῦ δεδομένου κύβου.

Κεντρικὴ ἢ προοπτικὴ προβολὴ σημείου καὶ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον.

479. Δεδομένου ἐπιπέδου Ε καὶ σταθεροῦ σημείου Κ, ἐκτὸς

αὐτοῦ κειμένου, καλουμένου δὲ *κέντρου*, καλοῦμεν *κεντρικὴν προβολὴν* σημείου τινὸς τοῦ διαστήματος ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε τὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, ὅπερ καλεῖται *προβολικόν*, ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ σημείου ἠγμένης.

Κατὰ ταῦτα κεντρικὴ προβολὴ τοῦ σημείου Π εἶναι τὸ σημεῖον π. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΚΠπ καλεῖται *προβάλλουσα* τοῦ Π.



Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον ἑκατέρωθεν προεκτεινομένης προβαλλούσης σημεῖα πάντα ἔχουσι τὴν αὐτὴν κεντρικὴν προβολήν.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένου καὶ παραλλήλου τῷ προβολικῷ τὰ σημεῖα, ἐπειδὴ ἔχουσι προβαλλούσας παραλλήλους πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ἔχουσι κεντρικὰς προβολὰς ἀφανισθείσας εἰς τὸ ἄπειρον.

Πᾶν ἄρα τοῦ διαστήματος σημεῖον ἔχει κεντρικὴν προβολὴν ἢ ἐν πεπερασμένῃ ἀποστάσει ἢ ἐπ' ἄπειρον ἀπομεμακρυσμένην.

Ὅταν δὲ τὸ προβαλλόμενον σημεῖον συμπέσῃ πρὸς τὸ κέντρον Κ, ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶναι ἀπροσδιόριστος, διότι καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΠ εἶναι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀπροσδιόριστος.

Ἡ γραμμὴ ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν κεντρικῶν προβολῶν τῶν σημείων γραμμῆς καλεῖται *κεντρικὴ προβολὴ* τῆς γραμμῆς ταύτης.

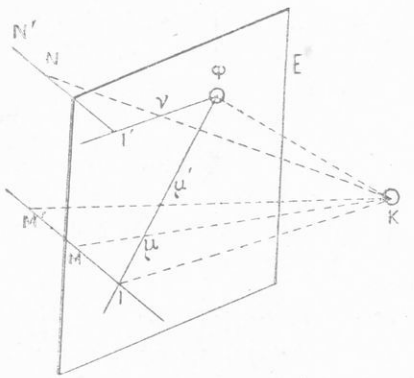
Θεώρημα.

480. *Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.*

Διότι ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας, ἐπειδὴ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν σημείων εἰς ἃ αἱ προβάλλουσαι τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας τέμνουσι τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, συμπίπτει πρὸς τὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν προβαλλουσῶν τούτων εὐθειῶν, καὶ ὅπερ καλεῖται *προβάλλον* τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδον.

481. Πρόδηλον εἶναι ὅτι, αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ προβάλλοντος ἐπιπέδου κείμεναι εὐθεῖαι πᾶσαι ἔχουσι τὴν αὐτὴν κεντρικὴν προβολήν. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου καὶ παράλληλον τῷ προβολικῷ, πᾶσαι αἱ ἐπὶ τούτου εὐθεῖαι δὲν ἔχουσι κεντρικὴν προβολήν, ἅτε ἀφανιζομένην εἰς τὸ ἄπειρον.

482. Ὑποτεθείσθω νῦν ὅτι, ὡς πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Ε καὶ τὸ κέντρον Κ, ζητεῖται ἡ κεντρικὴ προβολὴ τῆς εὐθείας ΜΜ'.



Τὸ σημεῖον Ι, ὅπερ εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τοῦ προβολικοῦ, θὰ εἶναι σημεῖον τῆς κεντρικῆς προβολῆς τῆς εὐθείας· εἶναι δὲ τοῦτο τὸ μόνον τῆς εὐθείας σημεῖον, τὸ πρὸς τὴν ἑαυτοῦ προβολὴν συμπῖπτον, πλὴν ἂν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου. Καλεῖται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο *ἴχνος* τῆς εὐθείας.

Τὰ σημεῖα Μ,Μ', . . . τὰ κείμενα πέραν τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου (δηλαδὴ πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ ἐν ᾧ δὲν κεῖται τὸ κέντρον προβολῆς) ἔχουσι κεντρικὰς προβολὰς τὰ σημεῖα μ,μ'. . .

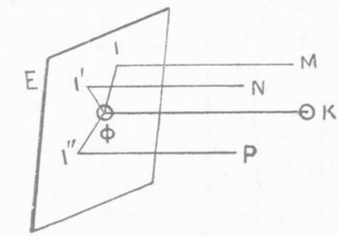
Ὅταν δὲ τὸ σημεῖον Μ ἀπομακρύνηται ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τῆς προβαλλομένης εὐθείας, ἡ προβολὴ αὐτοῦ μ τείνει νὰ συμπέσῃ πρὸς τὸ σημεῖον φ, καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἀγομένη παράλληλος τῇ προβαλλομένῃ εὐθείᾳ συναντᾷ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον (ὅπερ συντόμως ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι τὸ ἐν τῷ ἀπείρῳ κείμενον σημεῖον τῆς εὐθείας ΜΜ' προβάλλεται κατὰ τὸ ῥηθὲν σημεῖον φ.

Ἅπαν ἄρα τὸ πέραν τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου ἀπέραντον μέρος τῆς εὐθείας ταύτης ἔχει κεντρικὴν προβολὴν τὸ τμῆμα Ιφ.

Κεντρικαὶ προβολαὶ εὐθειῶν παραλλήλων.

483. Θεωρήσωμεν νῦν ἑτέραν εὐθεῖαν, τὴν ΝΝ', παράλληλον τῇ ΜΜ' καὶ ἔχουσαν ἴχνος ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου τὸ σημεῖον Ι'. Τούτου οὕτως ἔχοντος τὸ ἐν τῷ ἀπείρῳ κείμενον τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον θὰ ἔχῃ κεντρικὴν προβολὴν τὸ αὐτὸ σημεῖον φ.

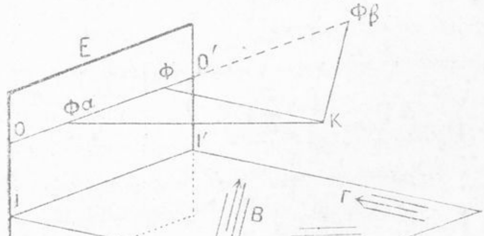
Πάσης ἄρα δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν αἱ κεντρικαὶ προβολαὶ συγκλίνουσιν εἴς τι σημεῖον φ, ὅπερ εἶναι τὸ ἴχνος τῆς διὰ τοῦ σημείου Κ διερχομένης καὶ παραλλήλου τῇ δέσμῃ ταύτῃ ἀκτῖνος.



Τὸ σημεῖον τοῦτο φ διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην καλεῖται *σημεῖον συγκλίσεως* ἢ *φυγῆς τῶν τῇ ἀκτῖνι* ΚΦ παραλλήλων εὐθειῶν.

* 484. Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον ὅτι αἱ τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ κάθετοι εὐθεῖαι ΙΜ, Ι'Ν, Ι''Ρ... ἔχουσι τὰς κεντρικὰς αὐτῶν προβολὰς ΙΦ, Ι'Φ, Ι'' Φ,...συγκλινούσας πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου ὀρθὴν τοῦ κέντρου Κ προβολὴν Φ, ἥτις λέγεται *κύριον σημεῖον*.

Αἱ ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Ε' παραλλήλων εὐθειῶν Α, Β, Γ δέσμαι ἔχουσι πᾶσαι τὰ μὲν ἴχνη ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας Ι Ι', ἥτις εἶναι τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Ε' μετὰ τοῦ προβολικοῦ, τὰ δὲ σημεῖα Φ_α, Φ_β, Φ_γ, ὧν



ἕκαστον εἶναι σημεῖον φυγῆς μιᾶς δέσμης, κεῖνται πάντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΟΟ', ἥτις εἶναι τομὴ τοῦ προβολικοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἠγμένου ἀπὸ τοῦ Κ παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ Ε'. Ἡ οὕτω δὲ ὁριζομένη εὐθεῖα γραμμὴ ΟΟ΄ καλεῖται *εὐθεῖα φυγῆς* τῶν ἐπιπέδων τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ Ε΄.

Πᾶσαι αἱ ὁριζόντιαι εὐθεῖαι, αἱ κείμεναι δηλαδὴ ἐπὶ ἐπιπέδων ὁριζοντίων, ἔχουσι τὰ σημεῖα φυγῆς αὐτῶν ἐπὶ τῆς κοινῆς εὐθείας φυγῆς τῶν ὁριζοντίων ἐπιπέδων. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ τομὴ τοῦ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ προβολικοῦ. Καλεῖται δ' αὕτη *γραμμὴ τοῦ ὁρίζοντος*· διέρχεται ἄρα καὶ αὕτη διὰ τοῦ κυρίου σημείου.

485. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀλλήλαις καὶ τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ παράλληλοι ἔχουσι κεντρικὰς προβολὰς παραλλήλους, ἤτοι δὲν ἔχουσι σημεῖον φυγῆς. Οὕτω π. χ. ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ, ὑποτιθεμένου κατακορύφου, πᾶσαι αἱ κατακόρυφοι εὐθεῖαι ἔχουσι κεντρικὰς προβολὰς παραλλήλους.

Σημείωσις. Παρατηρητέον ὅτι ἡ *κεντρικὴ προβολὴ* ἀποβαίνει *παράλληλος προβολή*, ὅταν τὸ κέντρον Κ ἀπομακρυνθῇ ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ δοθείσης εὐθείας· διότι τότε αἱ προβάλλουσαι ἀκτῖνες γίνονται παράλληλοι πρὸς τὴν ἐν λόγῳ εὐθεῖαν.

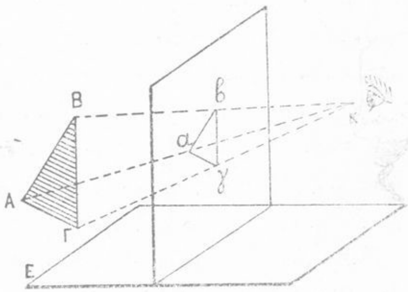
Παράλληλος προβολὴ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι ἡ σκιὰ αὐτοῦ, ὅταν αἱ τοῦ φωτὸς ἀκτῖνες εἶναι παράλληλοι· ὅταν δὲ τὸ φῶς ἔρχηται ἔκ τινος κέντρου Κ ἡ σκιὰ τοῦ ἀντικειμένου ἀποτελεῖ κεντρικὴν αὐτοῦ προβολήν.

Χρῆσις τῶν κεντρικῶν προβολῶν.

486. Τῶν κεντρικῶν προβολῶν, αἵτινες καὶ *προοπτικαὶ προβολαὶ* καλοῦνται, χρῆσις γίνεται ἐν τῇ ζωγραφικῇ, πρὸς παράστασιν τῶν στερεῶν ἀντικειμένων.

Πρὸς τοῦτο ἔστω κατακόρυφός τις ἐπίπεδος πίναξ, ὃν ὑποθέτομεν διαφανῆ καὶ ἔστω εἰς τὸ κέντρον Κ προβολῆς ὁ ὀφθαλμὸς παρατηρητοῦ, ὁρῶντος ἀντικείμενόν τι, οἷον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, πέραν τοῦ πίνακος εὑρισκόμενον.

Οὕτως ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος κεντρικὴ τοῦ τριγώνου προβολὴ αβγ καλύπτει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὥστε ὁ ὁρῶν αὐτὴν νομίζει ὅτι βλέπει ἐκεῖνο. Εἶναι δὲ τὸ αβγ ἡ προοπτικὴ τοῦ ΑΒΓ εἰκών.



Τῶν κεντρικῶν προβολῶν χρῆσις ἔτι γίνεται καὶ ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν διὰ τὰ θέατρα *σκηνογραφιῶν*.

Παρατήρησις. Ἀκριβῆ προοπτικὴν τοῦ ἀντικειμένου εἰκόνα παρέχουσιν αἱ φωτογραφικαὶ συσκευαί, ἐν αἷς προοπτικὸς μὲν πίναξ ἢ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι ἡ φωτογραφικὴ πλάξ, προοπτικὸν δὲ κέντρον τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φωτογραφικοῦ φακοῦ.

Περὶ συμμετρίας.

487. Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται *συμμετρικὰ πρός τι σημεῖον* Κ, καλούμενον *κέντρον*, ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦτο Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἑνούσης εὐθείας ΑΑ'.

Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται *συμμετρικὰ πρός τινα εὐθεῖαν* καλουμένην *ἄξονα συμμετρίας*, ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἑνούσης εὐθείας ΑΑ'.

Δύο σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται *συμμετρικὰ πρός τι ἐπίπεδον*, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἑνούσης εὐθείας ΑΑ'.

Δύο δὲ σχήματα λέγονται *συμμετρικὰ πρός τι κέντρον*, ἢ *πρός τινα ἄξονα*, ἢ *πρός τι ἐπίπεδον*, ἐὰν τὰ σημεῖα αὐτῶν εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον, ἢ πρὸς τὸν ἄξονα, ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Τὰ ἀντίστοιχα δύο συμμετρικῶν σχημάτων σημεῖα λέγονται *ὁμόλογα*.

Θεώρημα.

488. *Ἐν τῷ χώρῳ, ὡς καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, δύο σχήματα συμμετρικὰ πρός τινα εὐθεῖαν εἶναι ἴσα.*

Διότι ἂν τὸ ἕτερον τῶν σχημάτων περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας κατὰ γωνίαν 180^0 θὰ ἐφαρμόσῃ προφανῶς πρὸς τὸ ἕτερον.

Σημείωσις. Ὡς θὰ ἀποδείξωμεν, δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς σημεῖον ἢ πρὸς ἐπίπεδον, εἰ καὶ ἔχουσι πάντα τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, δὲν εἶναι δυνατὸν ἐν γένει νὰ ἐφαρμόζωσιν. Δύο δὲ σχήματα συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος, εἴτε πρὸς δύο κέντρα, εἴτε πρὸς κέντρον καὶ ἐπίπεδον, εἴτε πρὸς δύο ἐπίπεδα εἶναι σχήματα ἴσα (22).

Θεώρημα.

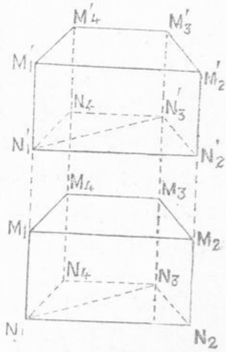
489. *Ἂν ἕκαστον σημεῖον σχήματός τινος οὑτινοσδήποτε μεταθέσωμεν κατ' εὐθύγραμμον τμῆμα ὁμόρροπον καὶ ἴσον δεδομένῳ τμήματι, τὰ σημεῖα ταῦτα πάντα ἐν τῇ νέᾳ ταύτῃ θέσει θὰ συναποτελέσωσι σχῆμα ἴσον τῷ δεδομένῳ.*

Ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ δεδομένον σχῆμα εἶναι τὸ εὐθύγραμμον

τμῆμα AB. Ἂν ἕκαστον αὐτοῦ σημεῖον, ὡς τὸ M, μετακινηθῇ κατ' εὐθύγραμμον τμῆμα, ὡς τὸ MM', ὁμόρροπον καὶ ἴσον τῷ δεδομένῳ τμήματι NN', εἶναι φανερὸν ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτοῦ ἐν τῇ νέᾳ αὐτῶν θέσει θὰ συναποτελέσωσιν εὐθύγραμμον τμῆμα A'B' ὁμόρροπον καὶ ἴσον τῷ AB, ὅπερ ἔσται μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, AA' κατασκευαζομένου παραλληλογράμμου.

Ἔστω δεύτερον ὅτι τὸ δεδομένον σχῆμα εἶναι ἐπίπεδόν τι E· λέγω ὅτι, ἂν πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετατεθῶσι κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, αἱ νέαι αὐτῶν θέσεις θὰ συναποτελέσωσιν ἐπιφάνειαν Ε΄, ἥτις ἔσται ἐπίπεδος. Διότι, ἂν τῆς ἐπιφανείας Ε΄ λάβωμεν δύο τινὰ σημεῖα, οἷον τὸ Α΄ καὶ τὸ Β΄, καὶ τὰ τούτων ἀντίστοιχα Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου Ε, θὰ ἴδωμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀνήκει ὅλη εἰς τὸ ἐπίπεδον Ε, καὶ ἡ ταύτῃ ἀντίστοιχος εὐθεῖα Α΄Β΄ θὰ ἀνήκῃ ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν Ε΄. Ἡ ἐπιφάνεια ἄρα Ε, ἐπειδὴ περιέχει πᾶσαν εὐθεῖαν ἑνοῦσαν δύο οἱαδήποτε αὐτῆς σημεῖα, θὰ εἶναι ἐπίπεδος (36). Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶν τμῆμα εὐθύγραμμον τοῦ ἐπιπέδου Γ ἀντιστοιχεῖ ἐν τῷ Ε΄, τμῆμα εὐθύγραμμον ὁμορρόπως ἴσον, καὶ εἰς πᾶσαν γωνίαν, ὡς τὴν ΑΒΓ, τοῦ ἐπιπέδου Ε ἀντιστοιχεῖ ἴση γωνία, ὡς ἡ Α΄Β΄Γ΄, τοῦ ἐπιπέδου Ε΄ (448), ἕπεται ὅτι εἰς πᾶν ἐπίπεδον σχῆμα ἀντιστοιχεῖ ἐπίπεδον σχῆμα ἴσον.

Ἔστω τέλος ὅτι τὸ δεδομένον σχῆμα Σ εἶναι οἱονδήποτε.



Ἵνα ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ σχῆμα τοῦτο Σ καὶ τὸ ἐξ αὐτοῦ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα προκύπτον Σ΄ εἶναι ἀλλήλοις ἴσα, ἂς λάβωμεν τρία τινὰ αὐτοῦ σημεῖα μὴ ἐπ᾿ εὐθείας κείμενα, οἷον τὰ M_1, M_2, M_3, ἔτι δὲ καὶ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα, οἷον τὸ M_4 καὶ τὸ M'_4, τῶν σχημάτων Σ καὶ Σ΄. Ἔστωσαν δὲ N_1, N_2, N_3, N_4 καὶ N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 τὰ σημεῖα καθ᾿ ἃ αἱ εὐθεῖαι $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$, $M_4M'_4$ τέμνουσι τὰ δύο ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄ τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν σημείων Ν καὶ Ν΄ καθέτως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΝΝ΄. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα $N_1N'_1$, $N_2N'_2$, $N_3N'_3$, $N_4N'_4$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἴσα, ἕπεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα σχήματα $N_1N_2N_3N_4$ καὶ $N'_1N'_2N'_3N'_4$ εἶναι ἐφαρμόσιμα.

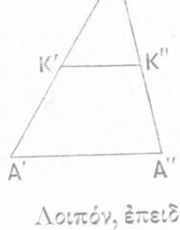
Λοιπὸν ἂν ὑποθέσωμεν τὸ σχῆμα Σ ἀδιασπάστως συνδεδεμένον μετὰ τοῦ $N_1N_2N_3$ καὶ συμμετατιθέμενον μετ᾿ αὐτοῦ μέχρις οὗ τὸ τρίγωνον $N_1N_2N_3$ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου $N_1'N_2'N_3'$, τὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε κάθετα τμήματα N_1M_1, N_2M_2, N_3M_3 θὰ λάβωσι τὴν θέσιν τῶν $N'_1M'_1$, $N'_2M'_2$, $N'_3M'_3$, τὸ δὲ σημεῖον N_4 θὰ λάβῃ τὴν θέσιν N'_4 (διότι τὰ σχήματα $N_1 N_2 N_3 N_4$ καὶ $N'_1 N'_2 N'_3 N'_4$ εἶναι ἐφαρμόσιμα), τὸ δὲ τμῆμα $N_4 M_4$ τὴν θέσιν τοῦ $N'_4 M'_4$ καὶ τὸ σημεῖον M_4 τὴν θέσιν τοῦ M_4'. Οὕτω γίνεται δῆλον ὅτι ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἀλλήλων τῶν τριγώνων $N_1 N_2 N_3$ καὶ $N'_1 N'_2 N'_3$, ὑποτιθεμένων ὡς ἀδιασπάστως συνδεδεμένων πρὸς τὰ σχήματα Σ καὶ Σ′, πᾶν σημεῖον Μ τοῦ Σ πίπτει ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Μ′ τοῦ Σ′.

Παρατήρησις. Ὅταν δύο σχήματα Σ καὶ Σ′, ὧν τὰ σημεῖα εἶναι ἀντίστοιχα ἀνὰ δύο, εἶναι τοιαῦτα, ὥστε τὰ τμήματα τὰ συνδέοντα τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν σημεῖα νὰ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἴσα, δυνάμεθα νὰ *κινήσωμεν τὸ σχῆμα Σ παραλλήλως ἑαυτῷ ἄνευ μεταβολῆς τῶν διαστάσεων αὐτοῦ* μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ Σ′. Ἡ κίνησις αὕτη δύναται νὰ γίνῃ καὶ οὕτως, ὥστε τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ σχήματος Σ νὰ διαγράφωσιν εὐθύγραμμα τμήματα ὁμόρροπα καὶ ἴσα.

Θεώρημα.

490. *Δύο σχήματα Σ′ καὶ Σ″ συμμετρικὰ ἄλλου τινὸς σχήματος Σ πρὸς δύο διάφορα κέντρα Κ′ καὶ Κ″ εἶναι ἴσα.*

Ἔστω σημεῖόν τι Α τοῦ σχήματος Σ καὶ Α′, Α″ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α πρὸς κέντρα τὸ Κ′ καὶ τὸ Κ″.



Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΑ′Α″ ἡ εὐθεία Α′Α″ εἶναι τῇ Κ′Κ″ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος, καὶ διπλασία αὐτῆς· κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον Α′ καὶ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος Σ′ μεταφέρονται ἐπὶ τῶν ὁμολόγων αὐτοῖς σημείων τοῦ Σ″, μετατιθεμένου ἑκάστου ἐπ' εὐθείας Α′Α″ ὁμορρόπου τῇ Κ′Κ″ καὶ ἴσης τῇ 2Κ′Κ″.

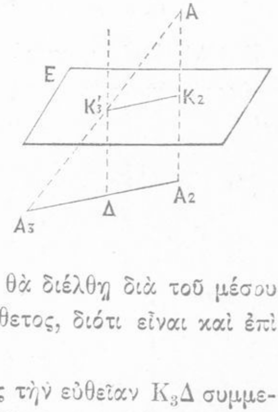
Λοιπόν, ἐπειδὴ τὰ τμήματα Α′Α″ τὰ συνδέοντα δύο οἱαδήποτε ἀντίστοιχα σημεῖα, Α′ καὶ Α″, τῶν δύο σχημάτων Σ′ καὶ Σ″ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἴσα, συνάγομεν ὅτι τὰ σχήματα Σ′ καὶ Σ″ ἐφαρμόζουσιν (489).

Θεώρημα.

491. *Ἐὰν τὸ Σ_1 καὶ τὸ Σ_2 εἶναι τὰ συμμετρικὰ σχήματα τοῦ Σ, τὸ μὲν πρὸς κέντρον K_1 τὸ δὲ πρὸς ἐπίπεδον E, τὰ δύο ταῦτα σχήματα θὰ εἶναι ἴσα.*

Διότι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὸ πρός τι σημεῖον K_3 τοῦ ἐπιπέδου Ε συμμετρικὸν Σ_3 τοῦ δοθέντος σχήματος Σ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πρὸς κέντρα K_1 καὶ K_3 συμμετρικὰ τοῦ δοθέντος σχήματα Σ_1 καὶ Σ_3 εἶναι ἴσα (490), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσότητα τῶν σχημάτων Σ_3 καὶ Σ_2, ἅτινα εἶναι συμμετρικὰ τοῦ δοθέντος Σ, τὸ μὲν πρὸς τὸ κέντρον K_3, τὸ δὲ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε.

Πρὸς τοῦτο ἔστω σημεῖόν τι Α τοῦ σχήματος Σ καὶ A_3 τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ σημεῖον πρὸς τὸ K_3 καὶ A_2 τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε.



Τὸ ἐπίπεδον AA_2A_3 διερχόμενον διὰ τῆς AA_2 θὰ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε κάθετον· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ K_3 ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε ἡ $K_3\Delta$ κάθετος, αὕτη θὰ εἶναι τῇ AA_2 παράλληλος καὶ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AA_2A_3. Ἔτι δὲ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου τῆς A_2A_3 καὶ θὰ εἶναι ἐπὶ τὴν A_2A_3 κάθετος, διότι εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν K_2K_3 κάθετος

Οὕτω τὰ δύο σημεῖα A_2, A_3 εἶναι πρὸς τὴν εὐθεῖαν $K_3\Delta$ συμμετρικά. Καὶ τὰ δύο ἄρα σχήματα Σ_3 καὶ Σ_2 εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἴσα πρὸς ἄλληλα (488).

Λοιπὸν τὰ δύο σχήματα Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.

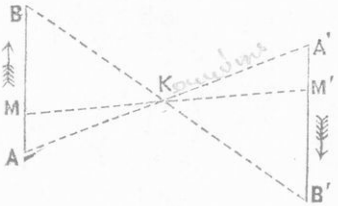
Θεώρημα.

492. *Ἐπιπέδου σχήματος τὸ ὡς πρὸς σημεῖον συμμετρικὸν εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα ἴσον.*

Ἔστω ἐπίπεδόν τι σχῆμα Σ κείμενον ἐν ἐπιπέδῳ Ε καὶ Σ' τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς κέντρον Κ· λέγω ὅτι τὰ σχήματα Σ καὶ Σ′ εἶναι ἐφαρμόσιμα.

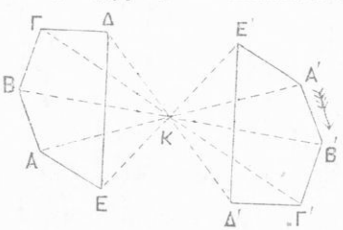
Διότι τὸ σχῆμα Σ′ εἶναι ὡς εἴδομεν (491) ἐφαρμόσιμον πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ ὡς πρὸς οἱονδήποτε ἐπίπεδον, καὶ ἄρα πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε, ὅπερ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σχῆμα Σ.

Παρατήρησις I. Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ τὸ ὡς πρὸς κέντρον Κ συμμετρικὸν εἶναι τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ ἀλλ᾽ ἀντίρροπον αὐτῷ.



Διότι, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΚ, Α′Β′Κ, τὸ σχῆμα ΑΒ Α′Β′ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Παρατήρησις II. Ἐπιπέδου σχήματος Σ′, κειμένου ἐν ἐπιπέδῳ Ε, τὸ ὡς πρὸς σημεῖόν τι Κ, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ε, συμμετρικὸν Σ′ δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πρὸς τὸ Σ, ἂν στραφῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ε περὶ τὸ σημεῖον Κ κατὰ γωνίαν 180°.



Θεώρημα.

493. *Δύο σχήματα Σ′ καὶ Σ′′ συμμετρικὰ τοῦ Σ πρὸς δύο ἐπίπεδα εἶναι ἴσα.*

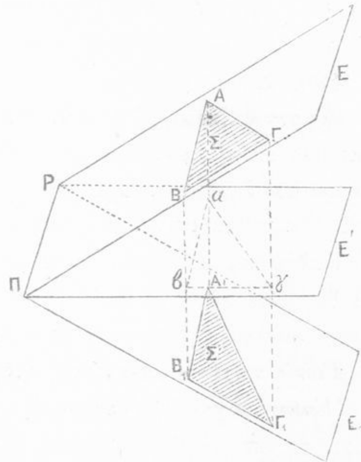
Διότι τὰ δύο ταῦτα σχήματα Σ′ καὶ Σ′′ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ Σ πρός τι κέντρον (491)· εἶναι ἄρα πρὸς ἄλληλα ἴσα (25).

Θεώρημα.

494. *Ἐπιπέδου σχήματος τὸ ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρικὸν εἶναι σχῆμα ἴσον.*

Ἔστω ἐπίπεδόν τι σχῆμα Σ, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ε, καὶ Σ' τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς ἄλλο τι ἐπίπεδον Ε'· λέγω ὅτι τὰ σχήματα Σ καὶ Σ' εἶναι ἴσα.

Διότι τὸ σχῆμα Σ' εἶναι, ὡς γινώσκομεν (493), ἐφαρμόσιμον πρὸς πᾶν σχῆμα συμμετρικὸν τοῦ Σ ὡς πρὸς οἱονδήποτε ἐπίπεδον, καὶ ἄρα πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε, ὅπερ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σχῆμα Σ.



Παρατήρησις I. Ἂν τὸ ἐπίπεδον Ε συναντᾷ τὸ Ε' κατά τινα εὐθεῖαν, δυνάμεθα, στρέφοντες τὸ σχῆμα Σ περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, νὰ ἐπιθέσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἴσου σχήματος Σ'. Ἂν δὲ τὸ ἐπίπεδον Ε εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ε', αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν σχημάτων Σ καὶ Σ' εἶναι ὁμόρροποι καὶ ἴσαι (ὡς ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐδ. 489).

Παρατήρησις II. Καὶ ἀπ' εὐθείας δύναται ν' ἀποδειχθῇ εὐκόλως ὅτι εὐθυγράμμου τμήματος τὸ ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρικὸν εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον.

Θ ε ώ ρ η μ α.

495. *Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση.*

Διότι, ἂν ληφθῇ κέντρον τῆς συμμετρίας σημεῖόν τι τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου, τὰ συμμετρικὰ τῶν δύο ἑδρῶν θὰ εἶναι αἱ προεκτάσεις τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων πέραν τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου· ἡ γωνία ἄρα ἣν θὰ σχηματίσωσι θὰ εἶναι τῇ δοθείσῃ ἴση· διότι θὰ εἶναι κατὰ κορυφὴν ἐκείνης (466).

Ἐπίσης συνάγεται ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος, ἂν λάβῃ τις ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας τὸ διχοτομοῦν τὴν δοθεῖσαν δίεδρον γωνίαν.

Στερεαὶ γωνίαι.

Ὁρισμοί.

496. *Στερεὰ γωνία* καλεῖται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ πλείονα ἐπίπεδα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἑνούμενα καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας καθ᾽ ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων. Ἵνα δὲ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία ἀπαιτοῦνται τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα.

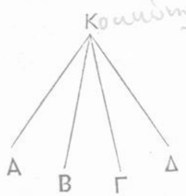
Καλοῦνται δὲ τὰ μὲν ἐπίπεδα ταῦτα *ἕδραι* τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Γωνία τρίεδρος καλεῖται ἡ στερεὰ γωνία ἡ τρεῖς ἕδρας ἔχουσα.

Ἐπίπεδοι γωνίαι ἢ *ἕδραι* τῆς στερεᾶς γωνίας λέγονται αἱ γωνίαι, ἃς ἀποτελοῦσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης ἕδρας.

Δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας λέγονται αἱ δίεδροι γωνίαι, ἃς ἀποτελοῦσιν αἱ δι᾽ ἑκάστης ἀκμῆς διερχόμεναι ἕδραι.

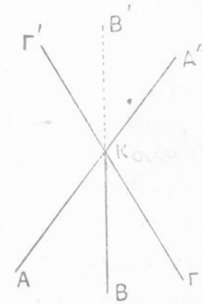
Οὕτω τὸ σχῆμα ΚΑΒΓΔ παριστᾷ στερεὰν γωνίαν, ἧς ἕδραι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, ἀκμαὶ αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, καὶ κορυφὴ αὐτῆς τὸ σημεῖον Κ.



Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἧς ἑκάστη ἕδρα προεκβαλλομένη ἀφίνει τὴν στερεὰν γωνίαν ὅλην πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

497. Ἂν στερεᾶς γωνίας αἱ ἀκμαὶ πᾶσαι προεκβληθῶσι πέραν τῆς κορυφῆς, θὰ σχηματισθῇ νέα στερεὰ γωνία, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν συμμετρικὴ τῆς πρώτης καὶ θὰ καλεῖται *κατὰ κορυφὴν* ἢ *συμμετρικὴ τῆς πρώτης*. Τοιαῦται δὲ εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι ΚΑΒΓ καὶ ΚΑ′Β′Γ′.

Αἱ κατὰ κορυφὴν ἄρα στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι καὶ τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ (63) καὶ τὰς διέδρους ἴσας (466), δὲν δύνανται ὅμως ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσι. Διότι, ἂν ἐφαρμόσῃ ἡ ἕδρα Γ'ΚΑ' ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΚΓ οὕτως, ὥστε αἱ ἄλλαι ἀκμαὶ τῶν δύο τούτων στερεῶν γωνιῶν νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἕδρας, θὰ ἔλθωσιν, ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΚΓ' εἰς τὴν θέσιν τῆς ΚΑ, ἡ δὲ δίεδρος ΚΑ' εἰς τὴν θέσιν τῆς διέδρου ΚΓ, κατ' ἀκολουθίαν αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἐκτὸς ἂν αἱ δίεδροι γωνίαι ΚΑ καὶ ΚΓ εἶναι ἴσαι (ὅτε αἱ στερεαὶ γωνίαι καλοῦνται ἰσοσκελεῖς).

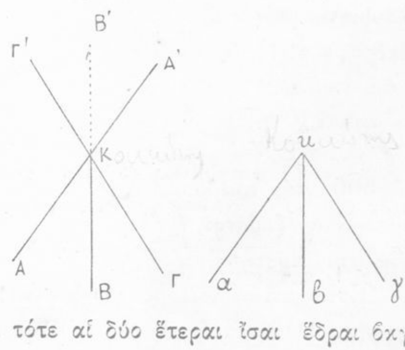


Θεώρημα.

498. *Δύο ~~δί~~*τρι-*εδροι στερεαὶ γωνίαι, ἂν ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, καὶ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἡ ἑτέρα ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας.*

Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι γωνίαι ΚΑΒΓ καὶ καβγ, αἵτινες ἔχουσι τὴν μὲν δίεδρον γωνίαν ΚΒ ἴσην τῇ διέδρῳ κβ, τὴν δὲ ἐπίπεδον γωνίαν ΑΚΒ ἴσην τῇ ακβ, τὴν δὲ ΒΚΓ ἴσην τῇ ἐπιπέδῳ βκγ.

Ἂν ἐπιτεθῇ ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία καβγ ἐπὶ τῆς ΚΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ κ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Κ, ἡ δὲ ἀκμὴ κβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΚΒ, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ακβ, βκγ, ἔστω ἡ ακβ, νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου ἴσης



αὐτῇ ἐπιπέδου γωνίας ΑΚΒ, τότε αἱ δύο ἕτεραι ἴσαι ἕδραι βκγ καὶ ΒΚΓ ἢ θὰ πέσωσι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῶν ἐφαρμοσασῶν ἐπιπέδων, ὅτε αἱ τρίεδροι θὰ εἶναι ἴσαι, διότι θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἢ θὰ πέσωσιν ἑκατέρωθεν τῶν ἐφαρμοσασῶν, ὅτε αἱ δύο τρίεδροι θὰ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον, καὶ ἄρα ἡ ἑτέρα τούτων ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας (491).

Θεώρημα.

499. *Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ἂν ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας διέδρους ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα, καὶ θὰ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἡ ἑτέρα ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας.*

Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι γωνίαι ΚΑΒΓ καὶ καβγ (σχ. προηγούμ.), αἵτινες ἔχουσι τὴν μὲν ἕδραν ΑΚΓ ἴσην τῇ ακγ, τὴν δὲ δίεδρον γωνίαν ΚΑ ἴσην τῇ κα, τὴν δὲ δίεδρον γωνίαν ΚΓ ἴσην τῇ κγ.

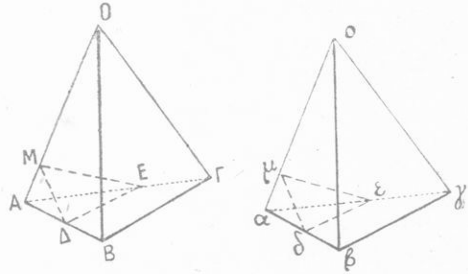
Ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ ἕδρα ακγ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΚΓ, οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ ἀκμαὶ τῶν ἀντιστοίχων ἴσων διέδρων γωνιῶν, ἡ κα ἐπὶ τῆς ΚΑ καὶ ἡ κγ ἐπὶ τῆς ΚΓ, τότε αἱ ἴσαι δίεδροι κα, ΚΑ καὶ κγ, ΚΓ, ἢ θὰ πέσωσι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῶν ἐφαρμοσασῶν ἑδρῶν, ὅτε αἱ τρίεδροι θὰ εἶναι ἴσαι, διότι θὰ ἐφαρμόσωσιν, ἢ θὰ πέσωσιν ἑκατέρωθεν τῶν ἐφαρμοσασῶν ἑδρῶν, ὅτε αἱ δύο τρίεδροι θὰ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἑτέρα τούτων θὰ εἶναι ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας (491).

Θεώρημα.

500. *Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς διέδρους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· εἶναι δὲ ἴσαι αἱ ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων περιεχόμεναι.*

Ἔστω ὅτι αἱ τρίεδροι γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ οαβγ ἔχουσι τὴν μὲν γωνίαν ΑΟΒ=αοβ, τὴν δὲ ΒΟΓ=βογ, τὴν δὲ ΓΟΑ=γοα· λέγω ὅτι θὰ ἔχωσι τὴν δίεδρον ΟΑ=οα, τὴν ΟΒ=οϐ καὶ τὴν ΟΓ=ογ.

Πρὸς τοῦτο ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ἓξ ἀκμῶν ἓξ ἴσα τμήματα, τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ τὰ οα, οϐ, ογ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ αἱ αϐ,ϐγ,γα. Οὕτω τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ, οαϐ, εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων· ὡσαύτως εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, οϐγ, ἔτι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΟΓΑ, ογα. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αϐγ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστη.



Νῦν δὲ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ σημεῖόν τι, οἷον τὸ Μ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΑ, κείμεναι ἡ μὲν ΜΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, ἡ δὲ ΜΕ ἐν τῷ ΟΑΓ. Αἱ κάθετοι δὲ αὗται θὰ συναντήσωσι τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, διότι αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΑΓ εἶναι ὀξεῖαι, ὡς γωνίαι παρὰ τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΑΓ. Τέλος δὲ ἂς ἀχθῇ καὶ ἡ ΔΕ.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς οα ἡ ομ=ΟΜ καὶ ἂς ἐπαναληφθῇ ἡ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τριέδρῳ γωνίᾳ γενομένη κατασκευή. Οὕτω τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ, αμδ, ἔχοντα τὴν μὲν πλευρὰν ΑΜ=αμ ἐκ κατασκευῆς, τὴν δὲ ὀξεῖαν γωνίαν ΜΑΔ=μαδ, ὡς ἀπεδείχθη, εἶνε ἴσα· κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ΜΔ=μδ καὶ ΑΔ=αδ. Ὡσαύτως δέ, ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΜΑΕ καὶ μαε εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι ΜΕ=με καὶ ΑΕ=αε.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΑΕ καὶ δαε, ἔχοντα τὴν μὲν πλευρὰν ΑΔ=αδ, τὴν δὲ ΑΕ=αε, τὴν δὲ γωνίαν ΔΑΕ=δαε, εἶναι ἴσα· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι καὶ ΔΕ=δε.

Τέλος τὰ τρίγωνα ΔΜΕ καὶ δμε, ἔχοντα τὰς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστη, εἶναι ἴσα· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΜΕ=δμε.

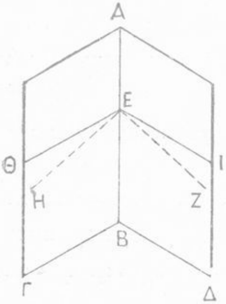
Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΔΜΕ καὶ δμε εἶναι αἱ πρὸς τὰς διέδρους ΟΑ καὶ οα ἀντίστοιχοι, ἕπεται ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Σημείωσις. Δύο στερεαὶ γωνίαι, ἔχουσαι τὰς αὐτῶν ἐπιπέδους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ ἢ εἶναι ἴσαι, ἢ ἡ ἑτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἑτέρας.

Θεώρημα.

501. *Ἂν ἔκ τινος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς κάθετοι καὶ ἑκατέρα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ἑτέρα ἕδρα, θὰ σχηματισθῇ ἐπίπεδος γωνία, ἥτις θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν δίεδρον.*

Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ καὶ αἱ ἐκ τοῦ τυχόντος τῆς ἀκμῆς σημείου Ε ἠγμέναι εὐθεῖαι ΕΖ, ΕΗ, ὧν ἡ μὲν ΕΖ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ κάθετος καὶ κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ κεῖται ἡ ἕδρα ΑΒΔ, ἡ δὲ ΕΗ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΔ κάθετος καὶ κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ.



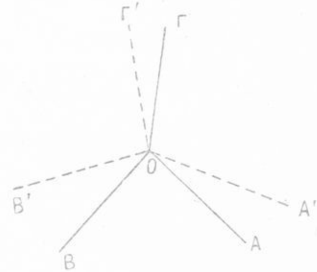
Οὕτως, ἂν ἀχθῇ τῶν δύο τούτων καθέτων τὸ ἐπίπεδον, θὰ τέμῃ τὴν δίεδρον κατὰ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῇ ἐπίπεδον γωνίαν ΘΕΙ (428), θὰ εἶναι δὲ ΘΕΖ + ΗΕΙ = 2 ὀρθ., διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΘΕΖ καὶ ΗΕΙ εἶναι ὀρθή· ἐπειδὴ δὲ ΘΕΖ = ΘΕΙ − ΖΕΙ καὶ ΗΕΙ = ΗΕΖ + ΖΕΙ, ἕπεται ὅτι ΗΕΖ + ΘΕΙ = 2^{ὀρθ}.

Θεώρημα.

502. *Ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς κάθετοι, ἑκάστη δὲ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ τρίτη ἀκμή, ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ἔχουσα ἀκμὰς τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους καὶ ἡ δεδομένη εἶναι παρα-*

πληρωματικαί· ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἑκατέρας εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ἑτέρας.

Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ, καὶ αἱ ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας κάθετοι, ἡ μὲν ΟΑ′ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΟΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΑ (τοιαύτη δηλ. ὥστε ἡ γωνία ΑΟΑ′ νὰ εἶναι ὀξεῖα), ἡ δὲ ΟΒ′ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΓΟΑ κάθετος καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΒ, ἡ δὲ ΟΓ′ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΒ κάθετος καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΓ.



Οὕτω, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶναι παραπληρωματικαὶ γωνίαι, ἡ μὲν Α′ΟΒ′ τῆς πρὸς τὴν δίεδρον ΟΓ ἀντιστοιχούσης ἐπιπέδου γωνίας, ἡ δὲ Β′ΟΓ′ τῆς πρὸς τὴν δίεδρον ΟΑ ἀντιστοιχούσης ἐπιπέδου γωνίας, ἡ δὲ Γ′ΟΑ′ τῆς πρὸς τὴν δίεδρον ΟΒ ἀντιστοιχούσης ἐπιπέδου γωνίας.

Λοιπὸν αἱ τῆς ΟΑ′Β′Γ′ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑΒΓ.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον δὲ ἀληθεύει· ὅτι αἱ ἐπίπεδοι δηλαδὴ γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑ′Β′Γ′.

Διότι, ἡ μὲν εὐθεῖα ΟΑ′, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ἕδραν ΓΟΒ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΟΓ κάθετος, ἡ δὲ ΟΒ′, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ἕδραν ΓΟΑ, εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΟΓ κάθετος· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΟΓ εἶναι ἐπὶ τὴν ἕδραν Α′ΟΒ′ κάθετος (428), κεῖται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Α′ΟΒ′ πρὸς ὃ καὶ ἡ ΟΓ′, διότι ἡ γωνία ΓΟΓ′ εἶναι ὀξεῖα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μὲν ΟΒ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Γ′ΟΑ′ κάθετος, κειμένη πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ′, ἡ δὲ ΟΑ ἐπὶ τὸ Β′ΟΓ′ κάθετος πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ′. Ἡ στερεὰ ἄρα γωνία ΟΑΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς ΟΑ′Β′Γ′, καθ' ὃν τρόπον προέκυψεν ἡ ΟΑ′Β′Γ′ ἐκ τῆς ΟΑΒΓ.

Λοιπὸν καὶ αἱ τῆς ΟΑΒΓ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄ παραπληρωματικαί.

Σημείωσις. *Ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία*, τ. ἔ. ἡ τρίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ὀρθὰς τὰς ἐπιπέδους γωνίας, ἔχει καὶ τὰς διέδρους γωνίας ὀρθάς, συμπίπτει δὲ πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν αὐτῆς.

Θεώρημα.

503. *Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὰς διέδρους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, ἔχουσι καὶ τὰς ἐπιπέδους ἴσας.*

Διότι, ἂν αἱ τρίεδροι γωνίαι Κ καὶ Κ΄ ἔχωσι τὰς διέδρους γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, αἱ τούτων παραπληρωματικαί, ἃς παριστῶμεν διὰ τῶν Π καὶ Π΄, θὰ ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας, ὡς παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῶν στερεῶν Κ καὶ Κ΄· θὰ ἔχωσιν ἄρα αἱ Π καὶ Π΄ καὶ τὰς διέδρους γωνίας ἴσας (500)· αἱ τούτων ἄρα παραπληρωματικαὶ Κ καὶ Κ΄ θὰ ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους ἴσας, ὡς παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῶν Π καὶ Π΄.

Θεώρημα.

504. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν μικροτέρα.*

Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία Κ, ἧς ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΚΒ λαμβάνεται μείζων ἑκατέρας τῶν δύο ἄλλων ἐπιπέδων· λέγω ὅτι θὰ εἶναι ΑΚΒ < ΑΚΓ + ΒΚΓ.

Πρὸς τοῦτο, ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις, ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΚΒ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΒ ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΚΔ ἴση τῇ ΒΚΓ. Ἔστω δὲ Δ τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ πλευρὰ ΚΔ θὰ τέμῃ τὴν ΑΒ· ἂς ληφθῇ δὲ ἡ ΚΓ ἴση τῇ ΚΔ καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΑΓ.

Οὕτω τὰ τρίγωνα ΒΚΓ καὶ ΒΚΔ, ὡς ἔχοντα τὴν μὲν γωνίαν ΒΚΓ ἴσην τῇ ΒΚΔ, τὰς δὲ ταύτας περιεχούσας πλευρὰς ἴσας, ἤτοι τὴν μὲν $ΚΓ=ΚΔ$, τὴν δὲ ΚΒ κοινήν, εἶναι ἴσα· κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $ΒΓ=ΒΔ$· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $ΑΒ<ΑΓ+ΓΒ$· ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος τὰς ἴσας εὐθείας ΒΔ καὶ ΒΓ ἔχομεν $ΑΔ<ΑΓ$.

Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΚΔ καὶ ΑΚΓ, ἐν οἷς ἡ μὲν ΚΑ εἶναι κοινή, ἡ δὲ $ΚΔ=ΚΓ$, ἡ δὲ $ΑΔ<ΑΓ$, ἔχομεν (95) $ΑΚΔ<ΑΚΓ$.

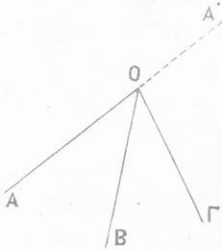
Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰς ἴσας γωνίας ΔΚΒ καὶ ΒΚΓ ἔχομεν

$$ΑΚΒ<ΑΚΓ+ΒΚΓ.$$

Θεώρημα. +

505. *Τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν σχηματιζουσῶν κυρτὴν στερεὰν γωνίαν τὸ ἄθροισμα εἶναι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν μικρότερον.*

1ον). Ἔστω τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἡ ΟΑΒΓ. Ἂν προεκταθῇ ἡ ἀκμὴ ΟΑ, θὰ σχηματισθῇ νέα τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἡ ΟΑ'ΒΓ, ἐν τῇ ὁποίᾳ θὰ ἔχωμεν



$$ΒΟΓ<ΒΟΑ'+Α'ΟΓ$$

ἢ $ΒΟΓ<2^{ὀρθ.}-ΑΟΒ+2^{ὀρθ.}-ΑΟΓ$, τουτέστιν $ΑΟΒ+ΒΟΓ+ΓΟΑ<4$ ὀρθ..

2ον). Ἔστω νῦν κυρτὴ στερεὰ γωνία ἔχουσα τέσσαρας ἕδρας, ἡ ΟΑΒΓΔ. Ἂν προεκταθῶσιν αἱ δύο ἕδραι ΑΟΒ, ΓΟΔ μέχρις οὗ τμηθῶσι κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΕ, κειμένην ἐκτὸς τῆς στερεᾶς γωνίας (διότι ἡ δεδομένη στερεὰ γωνία εἶναι *κυρτή*), τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓΔ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου ΟΑΔΕ, διότι θὰ ἔχωσι κοινὸν μέρος, τὸ

ΒΟΑ $+$ ΑΟΔ $+$ ΔΟΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΟΓ $<$ ΒΟΕ $+$ ΕΟΓ· κατ' ἀκολουθίαν τὸ πρῶτον ἄθροισμα εἶναι δι' ἰσχυρότερον λόγον μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν. Ὡσαύτως θὰ ἀναγάγωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς στερεᾶς γωνίας τῆς ἐχούσης πέντε ἕδρας εἰς τὴν τῆς στερεᾶς γωνίας τῆς ἐχούσης τέσσαρας ἕδρας, προεκτείνοντες μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν δύο ἕδρας, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Θεώρημα.

506. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι μεῖζον μὲν δύο, μικρότερον δὲ ἓξ ὀρθῶν· ἑκάστη δὲ τούτων αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς γίνεται τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων μείζων.*

Ἔστωσαν αἱ τριέδρου τινὸς γωνίας δίεδροι γωνίαι α,β,γ καὶ αἱ τῆς παραπληρωματικῆς ἐπίπεδοι Α,Β,Γ. Ἐπειδὴ $\alpha+A=2$ ὀρθ., $\beta+B=2$ ὀρθ., $\gamma+\Gamma=2$ ὀρθ., ἕπεται $\alpha+\beta+\gamma+A+B+\Gamma=6$ ὀρθ..

Ἐπειδὴ δὲ (505) $A+B+\Gamma<4$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι $\alpha+\beta+\gamma>2$ ὀρθ., καὶ ἐπειδὴ $A+B+\Gamma>0$, συνάγεται ὅτι $\alpha+\beta+\gamma<6$ ὀρθ..

Ἵνα δὲ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἀποδείξωμεν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἐν τῇ ἀνισότητι $A<B+\Gamma$ (504) ἀντικαταστήσωμεν, ἀντὶ μὲν τοῦ Α τὸ 2 ὀρθ.$-\alpha$, ἀντὶ δὲ τοῦ Β τὸ 2 ὀρθ.$-\beta$, ἀντὶ δὲ τοῦ Γ τὸ 2 ὀρθ.$-\gamma$, θὰ προκύψῃ

$$2 \text{ ὀρθ.}-\alpha<2 \text{ ὀρθ.}-\beta+2 \text{ ὀρθ.}-\gamma.$$

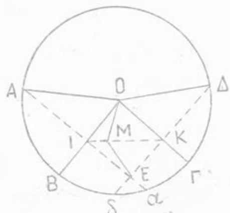
Ἂν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης προσθέσωμεν μὲν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$, ἀφαιρέσωμεν δὲ 2 ὀρθάς, θὰ ἔχωμεν $$\beta+\gamma<\alpha+2 \text{ ὀρθ.}.$$

Θεώρημα.

507. *Ἵνα ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δύναται νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν, ἡ δὲ μείζων μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

Ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι ἔχει ἤδη εὑρεθῇ (505), μένει ἄρα νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἀρκεταί.

Πρὸς τοῦτο, ἂς τεθῶσιν αἱ τρεῖς δεδομέναι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ἐφεξῆς ἀλλήλαις καὶ οὕτως, ὥστε νὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον ἡ μείζων (ἢ ἡ μηδεμιᾶς ἄλλης μικροτέρα) ΒΟΓ. Εἶτα δέ, ἂς γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα κέντρον μὲν τὴν κοινὴν κορυφὴν Ο, ἀκτῖνα δὲ ἡντιναδήποτε, ἔστω τὴν ΟΑ, τέμνουσα δὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἡ μὲν εὐθεῖα Αα ἐπὶ τὴν ΟΒ κάθετος, ἡ δὲ εὐθεῖα Δδ ἐπὶ τὴν ΟΓ κάθετος, ὅτε θὰ εἶναι τὸ τόξον Βα=ΒΑ καὶ τὸ τόξον Γδ=ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΟΓ<ΑΟΒ+ΓΟΔ, ἔπεται ὅτι καὶ διὰ τὰ εἰς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦντα τόξα θὰ εἶναι ΒΓ<ΑΒ+ΓΔ· τὸ σημεῖον ἄρα δ θὰ κεῖται μεταξὺ τοῦ α καὶ τοῦ Β, κατ' ἀκολουθίαν αἱ χορδαὶ Αα, Δδ θὰ τέμνωσιν ἀλλήλας ἐντὸς τῆς περιφερείας εἰς σημεῖόν τι, τὸ Ε.



Οὕτω δέ, ἂν ἐκ τοῦ Ε ὑψωθῇ ἡ ΕΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ κάθετος, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΚΕΜ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ, ἥτις θὰ τέμῃ τὴν κάθετον ΕΜ εἴς τι σημεῖον, τὸ Μ, (διότι ΚΕ < ΚΔ), ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΟΜ, ἡ σχηματισθησομένη τρίεδρος στερεὰ γωνία ΟΒΓΜ θὰ ἔχῃ ἐπιπέδους γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δεδομένας. Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΜΚ, ΜΙ, θὰ σχηματισθῶσι τὰ τρίγωνα ΟΚΔ, ΟΚΜ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια εἰς τὸ Κ (434) καὶ ἔχοντα τὴν ΟΚ κοινὴν καὶ τὴν ΚΔ=ΚΜ· κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΚΟΜ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΚΟΔ. Ὡσαύτως καὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΙ, ΟΜΙ, ὡς ὀρθογώνια εἰς τὸ Ι καὶ ἔχοντα τὴν ΟΙ κοινὴν καὶ ΟΑ=ΟΜ (διότι ΟΑ=ΟΔ=ΟΜ), θὰ εἶναι ἴσα (97)· καὶ ἄρα ἡ γωνία ΙΟΜ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΙΟΑ.

Σημείωσις. *Ἵνα ἐκ τριῶν δεδομένων διέδρων γωνιῶν, α, β, γ, δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τούτων νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν δύο καὶ τῶν* *ἐξ ὀρθῶν, ἡ δὲ μικροτέρα ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς νὰ γίνηται μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

Ὅτι αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι ἀναγκαῖαι ἔχει ἤδη ἀποδειχθῆ (506), μένει ἄρα νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἀρκεταί.

Διότι εὐκόλως δεικνύεται ὅτι δύναται νὰ σχηματισθῇ ἡ παραπληρωματικὴ τρίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ἐπιπέδους τὰς γωνίας: 2 ὀρθ — α, 2 ὀρθ — β, 2 ὀρθ—γ.

Λοιπὸν ἡ πρὸς ταύτην σχηματιζομένη παραπληρωματικὴ τρίεδρος (502), θὰ ἔχῃ διέδρους τὰς δεδομένας γωνίας α,β,γ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου καὶ τέμνουσα δύο δεδομένας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

2). Ἂν ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τριγώνου ἀχθῶσιν ἐπίπεδα ἐπὶ τὰς πλευρὰς κάθετα, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3). Ἂν εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον σχηματίζῃ μετὰ τριῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου γωνίας ἴσας, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος.

4). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου.

5). Ἂν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα εἶναι παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι παράλληλος τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ.

6). Ἂν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἡ ἐπὶ ἐπίπεδον προβολὴ τῆς εὐθείας, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

7). Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον εἶναι καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.

8). Διὰ δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου νὰ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα.

9). Ἂν διὰ τοῦ μέσου τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως δύο εὐθειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ διαιρέσῃ εἰς δύο μέρη ἴσα πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐχούσας τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

10). Ἂν διὰ τῆς διχοτομούσης γωνίαν εὐθείας ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου θὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας καὶ ἀντιστρόφως.

11). Τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος δίεδρον γωνίαν πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας καὶ ἀντιστρόφως.

12). Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας τριέδρου στερεᾶς γωνίας διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

13). Τὰ δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ διὰ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἕδραν διερχόμενα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

14). Τὰ ἐκ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας κάθετα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

15). Τὰ διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπὶ τὰς ἕδρας κάθετα ἐπίπεδα, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

16). Ἂν τριέδρου στερεᾶς γωνίας δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

17). Ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ ἀπέναντι τῆς μείζονος διέδρου γωνίας κεῖται μείζων ἐπίπεδος γωνία.

18). Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπί τινος ἐπιπέδου εἶνε γωνία ὀρθή, ἂν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ, καὶ τότε μόνον.

19). Ἂν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κάθετα, εἶναι πρὸς ἄλληλα παράλληλα.

20). Αἱ ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τετραέδρου ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται αἱ διάμεσοι τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

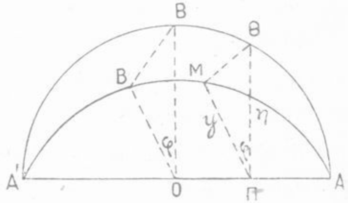
21). Δεδομένη τετράεδρος στερεὰ γωνία νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

22). Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἐκ πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων ἐν τῷ ἑτέρῳ ἐξ αὐτῶν καὶ διερχομένων διά τινὸς σημείου τῆς τομῆς, ἡ σχηματίζουσα τὴν μεγίστην γωνίαν πρὸς τὸ ἕτερον ἐπίπεδον εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

23). Ἡ ὀρθὴ προβολὴ κύκλου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ἔλλειψις, ἔχουσα μείζονα μὲν ἄξονα τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἐλάσσονα δὲ τὸ γινόμενον τῆς αὐτῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων.

Πρὸς τοῦτο, ἐπειδὴ παντὸς ἐπιπέδου σχήματος, αἱ ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα προβολαὶ εἶναι ἴσαι (487), δύναται νὰ ληφθῇ ὡς προβολικὸν ἐπίπεδον τὸ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου διερχόμενον παραλλήλως τῷ δεδομένῳ ἐπιπέδῳ.

Οὕτως, ἂν ἡ μὲν ΑΑ′ εἶναι διάμετρος, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς τέμνει τὸν δεδομένον κύκλον, ἡ δὲ ΟΒ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἀκτὶς τοῦ κύκλου, Μ δὲ ἡ προβολὴ τοῦ τυχόντος τῆς περιφερείας σημείου Θ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΠΜΘ, θὰ ἔχωμεν (ΠΜ)=(ΠΘ) συνφ.



Ἂν δὲ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων λάβωμεν δύο συστήματα ὀρθογωνίων ἀξόνων, ἔχοντα ἀρχὴν μὲν τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ἄξονα δὲ τῶν τετμημένων τὴν τομὴν Α′Α τῶν δύο ἐπιπέδων, παραστήσωμεν δὲ τὰς συντεταγμένας τοῦ μὲν Θ διὰ ξ, η, τοῦ δὲ Μ διὰ χ, ψ, θὰ ἔχωμεν χ = ξ καὶ ψ = η συνφ· ἐπειδὴ δὲ $\xi^2+\eta^2=\alpha^2$, αἱ τῆς προβολῆς Θ συντεταγμέναι θὰ ἀληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \frac{\psi^2}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = 1.$$

Ἡ ὀρθὴ ἄρα προβολὴ κύκλου εἶναι ἔλλειψις (σελ. 268, $4_{\text{ον}}$), ἧς οἱ ἄξονες εἶναι 2α καὶ 2α συν φ.

Περὶ Σφαίρας.

Ὁρισμοί.

508. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεὸν τὸ περατούμενον ὑπὸ ἐπιφανείας, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ σημείου τινὸς ἐντὸς αὐτῆς κειμένου, καλουμένου δὲ *κέντρου*.

Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινομένη ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν ἑαυτοῦ διάμετρον.

Διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραφομένης ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ἐπιφανείας ἀπέχουσι τοῦ κέντρου αὐτῆς ἴσον.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εὐθεῖα, ἥτις περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸν τῆς σφαίρας ὁρισμόν, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἀλλήλαις ἴσαι, ὡς τῆς ἀκτῖνος διπλάσιαι.

Ἐπίπεδόν τι λέγεται ὅτι *ἐφάπτεται* σφαίρας, ἂν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἔχῃ.

Δύο σφαῖραι λέγεται ὅτι *ἐφάπτονται* ἀλλήλων, ἂν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν.

Διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν.

509. Αἱ δυναταὶ θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν εἶναι αἱ ἑξῆς τρεῖς·

1ον Ἂν τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα μηδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν.

2ον Ἂν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν.

3ον Ἂν πλείονα τοῦ ἑνὸς κοινὰ σημεῖα ἔχωσιν.

Περὶ τῶν διαφόρων πρὸς ἄλληλα θέσεων ἐπιπέδου καὶ σφαίρας ἰσχύουσι θεωρήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ περὶ τῶν θέσεων εὐθείας καὶ κύκλου.

Θεώρημα.

510. *Ἂν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα μηδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσι, τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κέντρου ἀπόστημα εἶναι τῆς ἀκτῖνος μεῖζον.*

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀναλόγου περὶ εὐθείας καὶ κύκλου προτάσεως (134).

Εὐκόλως δ' ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἀπὸ ἐπιπέδου τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπόστημα εἶναι μεῖζον τῆς ἀκτῖνος, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

Θεώρημα.

511. *Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι, τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κέντρου ἀπόστημα εἶναι τῇ ἀκτῖνι ἴσον.*

Καὶ τῆς προτάσεως ταύτης ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τῆς προτάσεως 135.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἀπὸ ἐπιπέδου τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπόστημα εἶναι τῇ ἀκτῖνι ἴσον, ἥ τε σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

Πόρισμα.

512. *Ἐν ἑκάστῳ σημείῳ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ὑπάρχει ἓν μόνον ἐφαπτόμενον ταύτης ἐπίπεδον.*

Διότι τὸ εἴς τι σημεῖον σφαίρας ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι ἐπὶ τὴν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπολήγουσαν ἀκτῖνα κάθετον· ἓν δὲ μόνον ἐπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος κάθετον.

Θεώρημα.

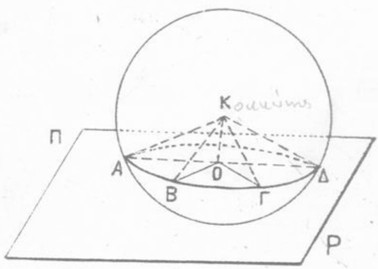
513. *Ἂν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχωσι πλείονα τοῦ ἑνὸς κοινὰ σημεῖα τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κέντρου ἀπόστημα εἶναι τῆς ἀκτῖνος μικρότερον· τὸ δὲ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον*

Διότι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἀπόστημα τοῦ κέντρου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μήτε μεῖζον τῆς ἀκτῖνος, διότι ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον, μήτε αὐτῇ ἴσον, διότι θὰ εἶχον ἓν κοινὸν σημεῖον· τὸ ἀπόστημα ἄρα θὰ εἶναι τῆς ἀκτῖνος μικρότερον.

Οὕτως ὁ τοῦ ἀποστήματος τούτου ποὺς θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας· καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν.

Νῦν δὲ λέγω ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης εἰς ἣν ἡ τομὴ περατοῦται ἀγόμεναι ἀκτῖνες τῆς σφαίρας, οἷον αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, . . . εἶναι ἴσαι, ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ποδὸς Ο τῆς καθέτου ἴσον (433)· κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι πᾶσαι ἴσαι καὶ ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ. . . εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἧς κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Ο.



Δύο σφαιρῶν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας θέσεις.

514. Ἐὰν νοήσωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν κέντρων δύο σφαιρῶν θὰ τέμῃ αὐτὰς κατὰ δύο κύκλους.

Ἐὰν δὲ οἱ κύκλοι οὗτοι στραφῶσι περὶ τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν, θὰ προκύψωσιν αἱ δύο σφαῖραι.

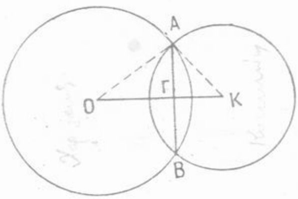
Λοιπόν, ἂν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται εἴτε ἐκτὸς εἴτε ἐντός, καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, προκύπτουσαι σφαῖραι θὰ ἐφάπτωνται εἴτε ἐκτὸς εἴτε ἐντός· ἂν δὲ οἱ κύκλοι τέμνωνται καὶ αἱ σφαῖραι θὰ τέμνωνται· τὸ αὐτὸ δὲ θὰ συμβαίνῃ καὶ περὶ τῶν ἄλλων θέσεων.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι αἱ διάφοροι δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας θέσεις εἶναι πέντε, ὅσαι δηλαδὴ καὶ αἱ διάφοροι δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους θέσεις. Ἐν ἑκάστῃ δὲ θέσει αἱ τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνες καὶ ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις ἔχουσι τὰς αὐτὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις, ἅς καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων καὶ ἡ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀπόστασις.

Θεώρημα. +

515. *Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τομὴ εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἧς τὸ μὲν κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς τῶν κέντρων εὐθείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον εἶναι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετον.*

Ἔστωσαν Ο καὶ Κ τὰ κέντρα δύο τεμνομένων σφαιρῶν, ἂς ἀχθῇ δὲ διὰ τῆς τῶν κέντρων εὐθείας ἐπίπεδον, ὅπερ θὰ τέμῃ τὰς σφαίρας κατὰ δύο κύκλους, ὧν αἱ περιφέρειαι θὰ τέμνωσιν ἀλλήλας εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΟΚ (139). Οὕτως αἱ δύο σφαῖραι δύνανται νὰ θεωρῶνται γινόμεναι διὰ τῆς περιστροφῆς τῶν δύο τούτων κύκλων περὶ τὴν ΟΚ. Ἐνῷ δὲ αἱ περιφέρειαι



παράγουσι τὰς τῶν δύο σφαιρῶν ἐπιφανείας, τὸ σημεῖον Α παράγει τὴν τομὴν αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ἡ ΓΑ, ἥτις εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΚ κάθετος, δὲν ἀλλάσσει μέγεθος, εἶναι δὲ πάντοτε ἐπὶ τὴν ΟΚ κάθετος, ἕπεται ὅτι ἡ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ εἶναι περιφέρεια, ἧς τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπὶ τὴν ΟΚ κάθετον.

Πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἔχουσιν ἄλλο κοινὸν σημεῖον. Διότι πᾶν τοιοῦτον σημεῖον, ἑνούμενον μετὰ τοῦ Ο καὶ τοῦ Κ δι' εὐθειῶν, δίδει τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΟΚ· ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιστραφὲν περὶ τὴν ΟΚ ἔλαβε πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις, ἔλαβεν ἄρα καὶ τὴν θέσιν ταύτην.

Περὶ τῶν ἐπὶ δοθείσης σφαίρας κύκλων.

Ὁρισμοί.

516. *Μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας* καλεῖται πᾶς κύκλος, οὗ τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Μικρὸς τῆς σφαίρας κύκλος λέγεται πᾶς κύκλος, οὗ τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Παράλληλοι τῆς σφαίρας κύκλοι λέγονται οἱ κύκλοι, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Πόλοι κύκλου τινὸς τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καθέτου.

Παρατηρήσεις.

517. Περὶ τῶν μεγίστων καὶ μικρῶν κύκλων τῆς σφαίρας παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

1ον *Ὅτι πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχει μετὰ τῆς σφαίρας κέντρον μὲν τὸ αὐτὸ ἀκτῖνα δὲ ἴσην.*

2ον *Ὅτι δύο μέγιστοι τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομή, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εἶναι κοινὴ αὐτῶν διάμετρος.

3ον *Ὅτι πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο μέρη ἴσα, ἅτινα λέγονται ἡμισφαίρια.*

Διότι, ἂν στρέψωμεν τὴν σφαῖραν κατὰ 180° περί τινα τῶν διαμέτρων ΗΗ' τοῦ μεγίστου κύκλου, ἑκάτερον τῶν δύο μερῶν τῆς σφαίρας θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους· διότι διὰ τῆς στροφῆς ταύτης αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς δὲν μεταβάλλονται.

4ον *Ὅτι διὰ δύο δεδομένων σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ τόξον μεγίστου κύκλου.*

Διότι, ἂν ἀχθῇ τὸ ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων σημείων καὶ ὑπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁριζόμενον ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, οὗ ἡ περιφέρεια θὰ διέρχηται προφανῶς διὰ τῶν δύο δεδομένων σημείων.

Ἐὰν δὲ τὰ δύο δεδομένα σημεῖα κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, τότε δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου, ἐπ' εὐθείας κειμένων, θὰ διέρχωνται ἄπειρα ἐπίπεδα καὶ ἄρα ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι.

5ον Ὅτι *ἡ τὸ κέντρον μικροῦ κύκλου σφαίρας μετὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἑνοῦσα εὐθεῖα, εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου κάθετος.*

6ον Ὅτι, ὡς ἐν κύκλῳ δύο χορδαί, ἂν μὲν ἀπέχωσιν ἴσον τοῦ κέντρου εἶναι ἴσαι, ἂν δὲ ἄνισον εἶναι ἄνισοι, οὕτω καὶ *ἐν σφαίρᾳ δύο μικροὶ κύκλοι, ἂν μὲν ἴσον τοῦ κέντρου ἀπέχωσι θὰ εἶναι ἴσοι, ἂν δὲ ἄνισον θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μείζων θὰ εἶναι ὁ πρὸς τὸ κέντρον πλησιέστερος.*

Παρατήρησις. Ἂν τὸ κέντρον σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα α ἀπέχῃ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μικροῦ κύκλου ἀπόστασιν δ, ἡ τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου ἀκτὶς α παρίσταται διὰ τοῦ τύπου $\rho=\sqrt{\alpha^2-\delta^2}$.

Θεώρημα. +

518. *Ἑκάτερος τῶν πόλων κύκλου σφαίρας ἀπέχει πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τούτου ἴσον.*

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ οἱ τούτου πόλοι Π καὶ Π'.

Ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ΠΠ' θὰ εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου

ΑΒΓ κάθετος, θὰ διέρχηται δὲ καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι αἱ ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν πόλων, οἷον τοῦ Π, ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ,... εἰς τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ,... τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ὡς πλάγιαι καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ποδὸς Ο τῆς καθέτου ΟΠ, θὰ εἶναι ἴσαι· κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων τὰ ἐκ τοῦ πόλου Π εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας ἀγόμενα, οἷον τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ,..., ὡς ἔχοντα ἴσας χορδάς, θὰ εἶναι ἴσα.

Τὰ δὲ διὰ τῶν πόλων κύκλου διερχόμενα μεγίστων κύκλων ἐπίπεδα εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου κάθετα· διότι διέρχονται διὰ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καθέτου ΠΠ΄.

Ἂν δὲ ὁ κύκλος εἶναι μέγιστος, ὡς ὁ ΔΕΖ, αἱ ὀρθαὶ ἐπίκεντροι γωνίαι ΠΚΔ, ΠΚΕ, ΠΚΖ, θὰ μετρῶνται ὑπὸ τῶν τόξων ΠΔ, ΠΕ, ΠΖ, ἅτινα τούτου ἕνεκα θὰ εἶναι περιφερείας τεταρτημόρια.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πόλων συνάγεται ὅτι δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων τόσον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην, ἔχοντα τὰ σκέλη καμπύλα καὶ καλούμενον *σφαιρικὸν διαβήτην*.

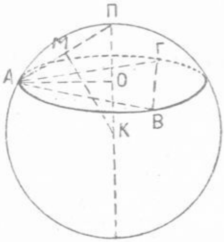
Ἂν δὲ τοῦ ἑτέρου σκέλους τοῦ διαβήτου τούτου τὸ ἄκρον στηριχθῇ εἴς τι σημεῖον τῆς σφαίρας, περιστραφῇ δὲ ὁ διαβήτης οὕτως, ὥστε τοῦ ἑτέρου σκέλους τὸ ἄκρον νὰ ἅπτηται ἀεὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, προφανὲς εἶναι ὅτι θὰ γραφῇ ὑπὸ τοῦ περιστρεφομένου ἄκρου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιφέρεια κύκλου ἔχουσα πόλον τὸ σημεῖον, εἰς ὃ τὸ ἀκίνητον ἄκρον στηρίζεται· διότι ἡ τοῦ ἀκινήτου ἄκρου ἀπὸ τοῦ κινητοῦ ἀπόστασις μένει ἀεὶ ἡ αὐτή.

Ἵνα δὲ γραφῇ τόξον μεγίστου κύκλου πρέπει ἡ τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου ἀπόστασις νὰ εἶναι ἴση τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας. Τούτου ἄρα ἕνεκα πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ τῆς σφαίρας ἀκτίς.

Πρόβλημα.

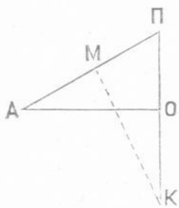
519. *Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δεδομένης σφαίρας.*

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖόν τι Π, ὡς πόλον, καὶ μεθ' οἱουδήποτε τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἀνοίγματος γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Εἶτα δὲ ὁρίζομεν διὰ



τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου τὰς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις τριῶν τῆς περιφερείας ταύτης σημείων, τῶν Α, Β, Γ, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ ἐπιπέδου τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς ἀποστάσεις ταύτας· κατ' ἀκολουθίαν ὁ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγραφόμενος κύκλος θὰ εἶναι ἴσος τῷ κύκλῳ τῷ γεγραμμένῳ ἐπὶ τῆς σφαίρας, θὰ ἔχῃ ἄρα ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΟΑ.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὸ

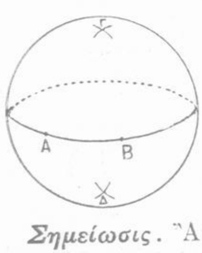


ἐν τῇ σφαίρᾳ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΠ· διότι εἶναι γνωσταὶ καὶ ἡ τούτου ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας. Μεθ' ὃ ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ὑποτεινούσης ἄγομεν τὴν ἐπ' αὐτὴν κάθετον ΜΚ, μέχρις οὗ αὕτη συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΠΟ· διότι οὕτω θὰ ὁρισθῇ ἡ ΠΚ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀκτίς.

Πρόβλημα.

520. ***Ἐπὶ σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.***

Ἂν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γράψωμεν δύο μεγίστους



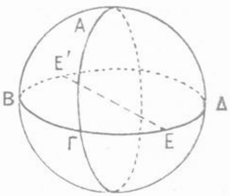
κύκλους, λαμβάνοντες πόλους ἑκάτερον τῶν σημείων Α καὶ Β, αἱ τομαὶ Γ, Δ τῶν περιφερειῶν τούτων θὰ εἶναι πόλοι τοῦ διὰ τῶν σημείων Α, Β διερχομένου μεγίστου κύκλου.

Διότι ἑκατέρα τούτων θὰ ἀπέχῃ τῶν Α, Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς χορδὴν τεταρτημορίου.

Σημείωσις. Ἂν τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι τὰ ἄκρα διαμέτρου, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις· διότι οἱ μέγιστοι κύκλοι, οἱ ἔχοντες πόλους τὰ σημεῖα ταῦτα, συμπίπτουσι.

Πρόβλημα.

521. *Ἐκ δεδομένου σημείου **A** τῆς ἐπιφανείας σφαίρας νὰ ἀχθῇ μέγιστος κύκλος κάθετος ἐπὶ τὸν δεδομένον μέγιστον κύκλον ΒΓΔ.*



Πρὸς τοῦτο ἂν γραφῇ περιφέρεια μεγίστου κύκλου ἔχουσα πόλον τὸ σημεῖον Α, θὰ τέμῃ τὴν δεδομένην εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ε'.

Οὕτω δὲ, ἂν γραφῇ μέγιστος κύκλος ἔχων πόλον τὸ ἕτερον τῶν σημείων Ε, Ε', οἷον τὸ Ε, θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α, διότι ἡ ΑΕ ἰσοῦται τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου, καὶ θὰ εἶναι ἐπὶ τὸν ΒΓΔ κάθετος, τουτέστι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπ' ἄλληλα κάθετα (469).

Σημείωσις. Ἂν τὸ σημεῖον Α εἶναι πόλος τοῦ δεδομένου κύκλου ΒΓΔ, ὁ γραφόμενος κύκλος θὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τὸν δεδομένον· κατ' ἀκολουθίαν πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχων πόλον σημεῖόν τι τοῦ δεδομένου θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι ἐπὶ τὸν ΒΓΔ κάθετος.

Περὶ σφαιρικῶν πολυγώνων.

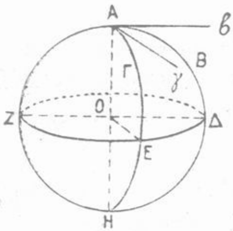
Ὁρισμοί.

522. Ἐν σφαίρᾳ ἐὰν δύο τόξα τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Α, λέγεται ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν*, ἧς τὸ μὲν σημεῖον Α καλεῖται *κορυφή*, τὰ δὲ τόξα ΑΒ, ΑΓ *πλευραί*.

Μέτρον τῆς γωνίας δύο τόξων καλεῖται ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὴν κορυφὴν τῶν τόξων ἐφαπτόμεναι, λαμβανόμεναι κατὰ τὴν φορὰν τῶν τόξων.

Ἐὰν τὰ τόξα εἶναι μεγίστων κύκλων, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ δίεδρος γωνία τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον.

Διότι αἱ εἰς τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας ἐφαπτόμεναι Αϐ, Αγ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων καὶ εἶναι ἐπὶ τὴν τῶν κύκλων τούτων κοινὴν διάμετρον ΑΗ ἀμφότεραι κάθετοι.



Ἡ ὑπὸ δύο τόξων ΑΒ, ΑΓ μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ ἔχει μέτρον καὶ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον ΔΕ μεγίστου κύκλου, τὸ μετὰ πόλου τὴν κορυφὴν αὐτῆς Α γραφόμενον.

Διότι τὸ τόξον τοῦτο ΔΕ μετρεῖ τὴν γωνίαν ΔΟΕ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ϐΑγ, διότι τὰ τόξα ΑΔ, ΑΕ ἰσοῦνται ἕκαστον πρὸς τεταρτημόριον καὶ ἄρα αἱ γωνίαι ΑΟΔ, ΑΟΕ εἶναι ὀρθαί· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΟΔ εἶναι παράλληλος τῇ Αϐ καὶ ἡ ΟΕ τῇ Αγ.

523. ***Σφαιρικὸν πολύγωνον*** λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περατούμενον εἰς τόξα μεγίστων κύκλων.

Πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου λέγονται τὰ τόξα, εἰς ἃ τοῦτο περατοῦται, καὶ ὧν ἕκαστον λαμβάνεται πάντοτε ἡμιπεριφερείας μικρότερον· *γωνίαι* δὲ αὐτοῦ, εἶναι αἱ γωνίαι τῶν αὐτῶν τόξων, *κορυφαὶ* δὲ αὐτοῦ αἱ τῶν γωνιῶν κορυφαί.

Σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι τὸ τρεῖς πλευρὰς ἔχον σφαιρικὸν πολύγωνον. Λέγεται δὲ τοῦτο ἢ ὀρθογώνιον, ἢ ἰσοσκελές, ἢ ἰσόπλευρον, ἐν αἷς καὶ τὸ εὐθύγραμμον περιπτώσεσιν (77).

Κυρτὸν λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προεκϐαλλομένη ἀφίνῃ τὸ σχῆμα ὅλον πρὸς τὸ ἕτερον μέρος αὐτῆς.

Σφαιρικοῦ πολυγώνου *ἀντίστοιχος στερεὰ γωνία* λέγεται ἡ στερεὰ γωνία ἡ ἔχουσα κορυφὴν μὲν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἀκμὰς δὲ τὰς εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ἠγμένας ἀκτῖνας.

Καὶ ἀντιστρόφως· δεδομένης στερεᾶς γωνίας *ἀντίστοιχον* ***σφαιρικὸν*** πολύγωνων καλεῖται τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων καθ' ἃ τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας, ἧς ἡ κορυφὴ ἔχει τεθῇ ἐν τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας.

Οὕτω τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ γωνίαι ἔχουσι τὰ αὐτὰ μέτρα, τὰ ὁποῖα καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας.

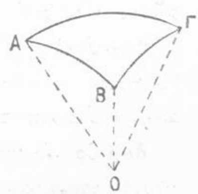
Συμμετρικὰ λέγονται δύο σφαιρικὰ πολύγωνα, ἂν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἐπειδὴ δὲ δύο **κατὰ κορυφὴν** στερεαὶ γωνίαι ἐν γένει δὲν ἐφαρμόζουσι (497), ἕπεται ὅτι καὶ τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐν γένει δὲν ἐφαρμόζουσιν.

Θεώρημα.

524. *Παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι τοῦ μὲν ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν μικροτέρα, τῆς δὲ διαφορᾶς αὐτῶν μείζων.*

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἐὰν νοήσωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ, θὰ σχηματισθῇ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ, ἡ ἀντίστοιχος στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ, ἧς ἑκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (504)· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

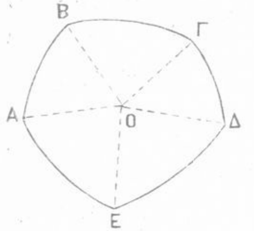


Τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως ἀποδεικνύεται ὡς καὶ τὸ ὅμοιον περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων (78).

Θεώρημα.

525. *Παντὸς κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν πλευρῶν εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.*

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ,... τῆς ἀντιστοίχου στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΓΔΕ εἶναι (505) μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν, ἔπεται ὅτι, ἂν αὗται τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μεγίστου κύκλου ἐφεξῆς ἀλλήλαις ακὶ οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὐτῶν νὰ πίπτωσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, θὰ ἀποτελεσθῇ γωνία μικροτέρα τεσσάρων ὀρθῶν· κατ' ἀκολουθίαν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ αὕτη θὰ βαίνῃ, τουτέστι τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΒΓ+ΒΔ+ΔΕ+ΕΑ, θὰ εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας.



Παρατηρήσεις.

526. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι πᾶσα μεταξὺ ἢ τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς γωνίας ὑπάρχουσα σχέσις ὑπάρχει καὶ μεταξὺ ἢ τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν τοῦ ἀντιστοίχου σφαιρικοῦ πολυγώνου. Κατὰ ταῦτα·

1ον. *Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μεῖζον μὲν τῶν* **δύο** *ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἓξ ὀρθῶν* (506).

2ον. *Ἑκάστη τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου αὐξανομένη κατὰ δύο ὀρθὰς γίνεται μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

3ον. *Ἐκ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι μικρότερον περιφερείας, ἕκαστον δὲ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία (507) ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν δεδομένων τόξων μετρουμένας· διότι τὸ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν σφαιρικὸν τρίγωνον θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

4ον. *Ἐκ τριῶν γωνιῶν, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι μεῖζον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον τῶν ἕξ, ἑκάστη δὲ προσλαβοῦσα δύο ὀρθὰς γίνεται μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἔχουσα διέδρους γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δεδομένας (Σημ. 507).

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἄνω ἰδιοτήτων ἕπεται ὅτι εἶναι δυνατὸν σφαιρικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ δύο ἢ καὶ τρεῖς ἀμβλείας γωνίας.

Θὰ καλῆται δέ, τὸ μὲν ἔχον δύο γωνίας ὀρθὰς *δισορθογώνιον*, καὶ ἡ μία τούτου κορυφὴ θὰ εἶναι πόλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, εἰς ἣν παράκεινται αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, αἱ δύο δὲ ἄλλαι πλευραὶ θὰ εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας μεγίστου κύκλου. Τὸ δὲ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ γωνίας ὀρθὰς θὰ καλῆται *τρισορθογώνιον*, αἱ δὲ πλευραὶ τούτου θὰ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου.

Λοιπόν, ἂν διὰ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀχθῶσι τρία ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' ἄλληλα ἀνὰ δύο, θὰ διαιρέσωσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς ὀκτὼ τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς σφαίρας.

527. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντίστοιχοι στερεαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως. Τούτου ἕνεκα, ἐν τῇ αὐτῇ ἢ ἐν ἴσαις σφαίραις, ἡ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἰσότης ἀνάγεται εἰς τὴν τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν ἰσότητα, καὶ πρὸς ἕκαστον θεώρημα ἰσότητος τριέδρων στερεῶν γωνιῶν θὰ ἀντιστοιχῇ ὅμοιον θεώρημα περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων· θὰ ἔχωμεν ἄρα:

1ον. *Ὅτι, ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχωσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα* (498).

2ον. Ὅτι, *ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ταύτῃ προσκειμένας γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα* (499).

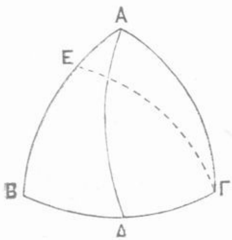
3ον. Ὅτι, *ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κειμένας* (500).

4ον. Ὅτι, *ἂν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κειμένας* (503).

Θεώρημα.

528. *Ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ σφαιρικῷ τριγώνῳ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.*

1ον Ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία Β=Γ.



Διότι, ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθῇ εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως ΒΓ τὸ μεγίστου κύκλου τόξον ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θὰ ἔχωσι τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ· θὰ ἔχωσιν ἄρα καὶ τὰς γωνίας ἴσας· ὅθεν ἕπεται Β=Γ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ περὶ τὸ Δ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τὸ μεγίστου κύκλου τόξον, τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, εἶναι ἐπὶ τὴν βάσιν ταύτην κάθετον, διαιρεῖ δὲ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς μέρη ἴσα.

2ον Ἔστω ὅτι ἡ γωνία Β=Γ· λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΑΒ.

Διότι, ἂν ἡ ΑΒ δὲν ἦτο ἴση τῇ ΑΓ, ἦτο π. χ. μείζων αὐτῆς, ἐλαμβάνετο δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ τόξον ΒΕ=ΑΓ καὶ ἤγετο τὸ τόξον

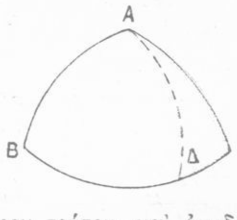
ΓΕ, θὰ ἐσχηματίζοντο τὰ τρίγωνα ΒΓΕ καὶ ΑΒΓ, ἅτινα θὰ εἶχον τὰς πλευρὰς ΒΕ=ΑΓ, τὴν ΒΓ κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΓ=ΑΓΒ.

Λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα θὰ εἶχον καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα (527, 1ον), καὶ ἄρα τὴν γωνίαν ΕΓΒ ἴσην τῇ ΑΒΓ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· θὰ ἦτο ἄρα καὶ ΕΓΒ=ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον· αἱ πλευραὶ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ, θὰ εἶναι ἴσαι.

Θεώρημα.

529. *Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου δύο γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μείζονος γωνίας θὰ κεῖται ἡ μείζων πλευρά.*

Ἔστω ὅτι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ γωνία Α>Β· λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ>ΑΓ.



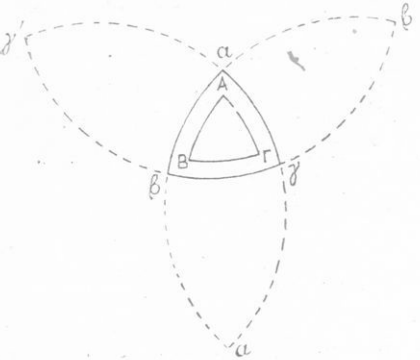
Πρὸς τοῦτο, ἂν σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΑΔ ἴση τῇ Β, θὰ εἶναι ΑΔ=ΒΔ (528). Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ θὰ εἶναι ΑΔ+ΔΓ>ΑΓ (524)· ἐὰν δὲ, ἀντὶ τῆς ΑΔ, ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἴσην αὐτῇ ΒΔ, θὰ ἔχωμεν ΒΔ+ΔΓ>ΑΓ, ἤτοι ΒΓ>ΑΓ. Ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου, καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Περὶ πολικῶν τριγώνων.

530. Ἐὰν ἐπὶ σφαίρας γραφῶσι τόξα μεγίστων κύκλων ἔχοντα πόλους τὰς κορυφὰς δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, θὰ σχηματισθῇ τρίγωνον, ὅπερ λέγεται *πολικὸν* τοῦ πρώτου.

Οὕτως, ἂν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πολικὸν εἶναι τὸ αβγ, ἡ κορυφὴ Α θὰ εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ, ἡ Β τοῦ αγ καὶ ἡ Γ τοῦ αβ.

Ἐν τῷ πολικῷ τριγώνῳ ἡ τῆς κορυφῆς Α ὁμόλογος κορυφὴ α



προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόξων, ἅτινα ἔχουσι πόλους τὰς δύο ἄλλας κορυφάς· ἐκ τῶν δύο δὲ σημείων α καὶ α′, εἰς ἃ τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται, λαμβάνομεν τὸ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ κείμενον, πρὸς ὃ κεῖται καὶ κορυφὴ Α. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τῶν ἄλλων κορυφῶν Β, Γ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς β, γ.

Θεώρημα.

531. *Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ πολικὸν τὸ αβγ, τἀνάπαλιν τὸ τρίγωνον αβγ θὰ ἔχῃ πολικὸν τὸ* **ΑΒΓ**.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ βγ, τὸ μεγίστου κύκλου τόξον Αβ εἶναι τεταρτημόριον· ὡσαύτως, ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου αβ, τὸ μεγίστου κύκλου τόξον Γβ εἶναι τεταρτημόριον.

Λοιπὸν τὰ ἐκ τοῦ β εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ ἀγόμενα μεγίστου κύκλου τόξα, τὰ βΑ, βΓ, εἶναι τεταρτημόρια· τὸ β ἄρα εἶναι τοῦ τόξου ΑΓ πόλος (518).

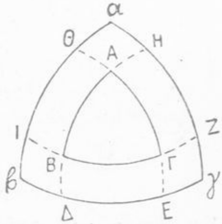
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται προσέτι, ὅτι εἶναι πόλος τὸ μὲν α τοῦ τόξου ΒΓ, τὸ δὲ γ τοῦ τόξου ΑΒ.

Τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ καλοῦνται *τρίγωνα πολικά*.

Θεώρημα.

532. *Ἑκάστη γωνία ἑκατέρου δύο πολικῶν τριγώνων εἶναι τῆς πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ ἑτέρου ἀντιστοιχούσης ἐπικέντρου γωνίας παραπληρωματική.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αϐγ πολικὰ ἀλλήλων· λέγω ὅτι ἡ γωνία Α καὶ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν ϐγ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία εἶναι παραπληρωματικαί.



Πρὸς τοῦτο, ἂν εἶναι ἀναγκαῖον, ἂς προεκϐληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν ϐγ, εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι τοῦ τόξου ϐγ πόλος, ἡ γωνία Α θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ τόξον ΔΕ (522).

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν τὸ τόξον ϐΕ εἶναι τεταρτημόριον, διότι τὸ ϐ εἶναι τοῦ ΑΓ πόλος, καὶ τὸ τόξον Δγ εἶναι ἐπίσης τεταρτημόριον, διότι τὸ γ εἶναι τοῦ ΑΒ πόλος, ἔπεται ὅτι

$$ϐΕ+Δγ=\text{ἡμιπεριφερείᾳ}.$$

Ἀλλὰ $$ϐΕ+Δγ=ϐΕ+Εγ+ΔΕ=ϐγ+ΔΕ,$$

τουτέστι $$ϐγ+ΔΕ=\text{ἡμιπεριφερείᾳ}.$$

Λοιπὸν αἱ ὑπὸ τῶν τόξων τούτων μετρούμεναι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί. Οὕτω καὶ περὶ τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦτο ἀποδεικνύεται.

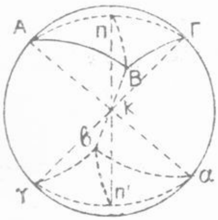
Παρατήρησις. Αἱ εἰς δύο πολικὰ τρίγωνα ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί (502).

Διότι, τοῦ α ὄντος πόλου τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ ἀκτὶς Οα εἶναι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓ κάθετος, καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΟΑ. Ὅμοια συμϐαίνουσι προφανῶς καὶ διὰ τὴν Οϐ καὶ τὴν Ογ. Λοιπὸν αἱ στερεαὶ γωνίαι Οαϐγ, ΟΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαί· κατ' ἀκολουθίαν τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα συνάγονται ἀμέσως ἐκ τοῦ θεωρήματος 502.

Θεώρημα.

533. *Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστωσαν ΑΒΓ, αϐγ δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἅτινα ἔχουσι μὲν τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωσι· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.



Πρὸς τοῦτο ἂς ληφθῶσιν οἱ πόλοι Π,Π' τοῦ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διερχομένου μικροῦ κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ μὲν τοῦ Π τὰ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μεγίστων κύκλων τόξα ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα (518), ἐκ δὲ τοῦ Π' τὰ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου αϐγ μεγίστων κύκλων τόξα Π'α,Π'ϐ, Π'γ, ἅτινα καὶ ταῦτα θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα· διότι ΠΑ=Π'α, ὡς μέτρα τῶν κατὰ κορυφὴν ἴσων γωνιῶν ΠΚΑ, Π'Κα· ὡσαύτως θὰ εἶναι ΠΒ=Π'ϐ καὶ ΠΓ=Π'γ· κατ' ἀκολουθίαν Π'α=Π'ϐ=Π'γ.

Οὕτω τὰ τρίγωνα ΠΑΒ, Π'αϐ ἐφαρμόζουσιν, ἐπειδὴ εἶναι ἰσοσκελῆ (528) καὶ συμμετρικὰ ἀλλήλων (497).

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Π'ϐγ, ὡσαύτως καὶ τὸ ΠΓΑ ἐπὶ τοῦ Π'γα.

Λοιπὸν τὰ συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αϐγ ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· εἶναι ἄρα ἰσοδύναμα.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ πόλος Π ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ἴσον τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀθροίσματος δύο τῶν τριγώνων ΠΑΒ, ΠΒΓ, ΠΓΑ, ἀπὸ τοῦ τρίτου τούτων.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ θὰ συνέϐαινε καὶ εἰς τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ αϐγ, τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἦσαν πάλιν ἰσοδύναμα.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, καθ' οὓς δεδομένη σφαῖρα τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων ἢ διὰ δεδομένης εὐθείας ἢ διὰ δεδομένου σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

2) Νὰ σχηματισθῇ σφαῖρα ἔχουσα δεδομένην ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη

αον) τριῶν δεδομένων ἐπιπέδων·

βον) δύο ἐπιπέδων καὶ μιᾶς δεδομένης σφαίρας·

γον) δύο δεδομένων σφαιρῶν καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου·

δον) τριῶν δεδομένων σφαιρῶν.

3) Παντὸς ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου σφαιρικοῦ τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἄλλων.

4) Ἐν παντὶ σφαιρικῷ τριγώνῳ τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν εἰς τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀγόμενα τόξα μεγίστων κύκλων τέμνουσιν ἄλληλα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

5) Ἐὰν σφαῖρα ἐφάπτηται δεδομένης σφαίρας καὶ δεδομένου ἐπιπέδου, ἡ τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἑνοῦσα εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου τῆς δεδομένης σφαίρας, τῆς ἀγομένης καθέτως ἐπὶ τὸ δεδομένον ἐπίπεδον.

6) Ἐπὶ τῆς δεδομένης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ.

7) Ἐὰν ἐν σφαιρικῷ τριγώνῳ δύο πλευραὶ εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τὴν γωνίαν αὐτῶν διχοτομοῦν μεγίστου κύκλου τόξον διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

8) Δεδομένων δύο σημείων, τοῦ Α καὶ τοῦ Β, ὧν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις εἶναι 8 πήχεων, εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ μὲν τοῦ Α 5 πήχεις, ἀπὸ δὲ τοῦ Β 7 πήχεις.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

Περὶ πολυέδρων

Ὁρισμοί.

534. *Πολύεδρον* καλεῖται στερεὸν περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχημάτων, καλουμένων *ἑδρῶν* τοῦ πολυέδρου.

Καλεῖται δὲ ἰδίᾳ *τετράεδρον* μὲν τὸ στερεὸν τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας, *πεντάεδρον* δὲ τὸ ἔχον *πέντε* ἕδρας, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τῶν πολυέδρων τὸ ἁπλούστατον· διότι, ἐπειδὴ ἀπαιτοῦνται τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα, ἵνα σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ καὶ τέταρτον ἐπίπεδον, ἵνα ληφθῇ κεκλεισμένον μέρος τοῦ χώρου.

Στερεαὶ γωνίαι πολυέδρου καλοῦνται αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας αἱ ἕδραι αὐτοῦ σχηματίζουσιν.

Κορυφαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἀκμὴ ἢ *πλευρὰ* πολυέδρου καλεῖται ἡ τομὴ δύο παρακειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου.

Διαγώνιος πολυέδρου καλεῖται ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα δύο κορυφὰς μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Κυρτὸν καλεῖται τὸ πολύεδρον, οὗ ἑκάστη ἕδρα ἐκβαλλομένη ἔχει ὅλον τὸ πολύεδρον πρὸς τὸ ἕτερον αὐτῆς μέρος.

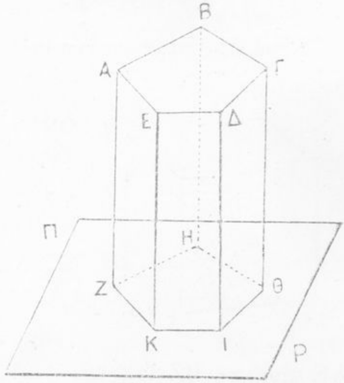
Ἐν τοῖς ἑξῆς θὰ ἐξετάσωμεν μόνον κυρτὰ πολύεδρα.

Περὶ πρισμάτων.

535. *Πρίσμα* εἶναι πολύεδρον, οὗ δύο μὲν ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Ἵνα κατασκευασθῇ πρίσμα, λαμβάνεται πολύγωνον, ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπίπεδόν τι ΠΡ παράλληλον τῷ ΑΒΓΔΕ.

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΖ, συναντῶσα τὸ ἐπίπεδον ΠΡ εἰς τὸ Ζ, εἶτα δὲ ἐκ τῶν σημείων Β,Γ,Δ,Ε ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΖ, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΠΡ, τέλος δὲ συνδεθῶσι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς διὰ τῶν εὐθειῶν ΖΚ,ΚΙ,ΙΘ..., τὸ μεταξὺ τῶν πολυγώνων ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ καὶ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, . . . περιλαμβανόμενον στερεὸν θὰ εἶναι πρίσμα.



Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΗ, τὸ σχῆμα ΑΒΗΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὁμοίως καὶ πάντα τὰ ἄλλα πέριξ τετράπλευρα ΒΓΘΗ, . . . εἶναι παραλληλόγραμμα.

Τὰ δὲ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ,ΖΗΘΙΚ,ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους ἑκάστην ἑκάστῃ, εἶναι ἴσα (Βλ. καὶ ἐδ.489).

Βάσεις τοῦ πρίσματος καλοῦνται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι αὐτοῦ ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ. Πάντα δὲ τὰ πέριξ παραλληλόγραμμα ἀποτελοῦσι τὴν *παράπλευρον* αὐτοῦ *ἐπιφάνειαν*.

Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ,... καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ πρίσματος. *Ὕψος* δὲ τοῦ πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπ᾽ ἀλλήλων τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀπόστασις.

Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ἂν αἱ πλευραὶ ΑΖ,ΒΗ,... εἶναι ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι, εἰ δὲ μὴ τὸ πρίσμα λέγεται *πλάγιον*.

Πρίσμα τι καλεῖται *τριγωνικόν*, ἢ *τετραγωνικόν*, ἢ *πενταγωνικὸν* καὶ ἐφεξῆς οὕτως, ἂν ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον, ἢ τετράπλευρον, ἢ πεντάγωνον καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

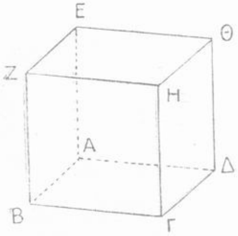
Τὸ πρίσμα οὗ καὶ αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα καλεῖται *παραλληλεπίπεδον*. Καλεῖται δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον *ὀρθογώνιον*, ἂν αἱ ἕδραι αὐτοῦ πᾶσαι εἶναι ὀρθογώνια.

Κύβος ἢ *κανονικὸν ἑξάεδρον* καλεῖται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, οὗ αἱ ἕδραι πᾶσαι εἶναι τετράγωνα.

Θεώρημα.

536. *Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.*

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Ἐκ τοῦ τῶν πρισμάτων ὁρισμοῦ ἐξάγεται ὅτι, αἱ βάσεις αὐτοῦ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Λέγω νῦν ὅτι δύο ἄλλαι ὁπωσδήποτε ληφθεῖσαι ἀπέναντι ἕδραι, οἷον αἱ ΑΔΘΕ, ΒΓΗΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· διότι, ἡ μὲν ΑΔ εἶναι τῇ ΒΓ ἴση καὶ παράλληλος, διότι τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ ἡ ΑΕ εἶναι τῇ ΒΖ ἴση καὶ παράλληλος.



Λοιπὸν καὶ ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι τῇ ΓΒΖ ἴση καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα (448). Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα ΑΔΘΕ, ΒΓΗΖ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.

Πόρισμα.

537. *Βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῶσι δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι αὐτοῦ ἕδραι.*

Σημείωσις. Ἂν δοθῶσι τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, εἶναι δυνατὸν ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον.

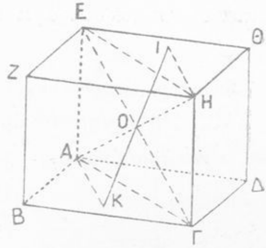
Πρὸς τοῦτο πρέπει ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων παράλληλον· ἤτοι ἐκ μὲν τοῦ σημείου Β ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΔΑΕ, ἐκ δὲ τοῦ Δ παράλληλον τῷ ΒΑΕ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῷ ΒΑΔ.

Θεώρημα.

538. *Παντὸς παραλληλεπέδου αἱ διαγώνιοι ἀλληλοτομοῦνται δίχα.*

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΗ, ΓΕ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι τῇ ΓΗ ἴση καὶ παράλληλος, τὸ σχῆμα ΑΓΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμον· κατ' ἀκολουθίαν αἱ διαγώνιοι τούτου ΑΗ, ΓΕ ἀλληλοτομοῦνται δίχα.



Λοιπὸν τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ αἱ τέσσαρες διαγώνιοι ΑΗ,ΓΕ,ΒΘ, ΔΖ ἀλληλοτομοῦνται δίχα.

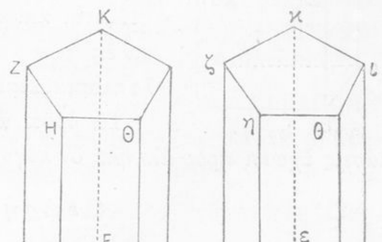
Τὸ σημεῖον συναντήσεως Ο τῶν τεσσάρων διαγωνίων καλεῖται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου· διότι πᾶσα εὐθεῖα διὰ τούτου ἠγμένη καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου τέμνεται εἰς τὸ σημεῖον Ο δίχα.

Τῷ ὄντι, ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΙΟΚ, τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Ι καὶ Κ, εἶτα δὲ αἱ εὐθεῖαι ΗΙ καὶ ΑΚ, τὰ σχηματισθησόμενα τρίγωνα ΙΟΗ καὶ ΚΟΑ θὰ εἶναι ἴσα· διότι θὰ ἔχωσι τὴν ΟΗ=ΟΑ, τὴν γωνίαν ΗΟΙ=ΑΟΚ, καὶ τὴν γωνίαν ΟΗΙ=ΟΑΚ, ἕνεκα τῶν εὐθειῶν ΙΗ καὶ ΑΚ, αἵτινες εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ἄρα τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται ΟΙ=ΟΚ.

Θεώρημα.

539. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἂν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ὕψη ἴσα.*



Ἔστωσαν ὀρθὰ πρίσματα τὰ ΑΘ καὶ αθ, ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ὕψη ἴσα. Ἐὰν ἡ βάσις αβγδε ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓΔΕ, ἡ αζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΖ, διότι ἀμφότεραι εἶναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α κάθετοι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, τὸ ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ· οὕτω καὶ τὸ η θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Η καὶ τὰ λοιπὰ οὕτω· τὰ δύο ἄρα πρίσματα θὰ ἐφαρμόσωσιν.

Πόρισμα.

540. *Δύο πρίσματα ὀρθά, ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Θεώρημα. +

541. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ (κατὰ ἐδ. 237) ὅτι διπλασιαζομένου τοῦ ὕψους διπλασιάζεται καὶ τὸ πρίσμα, τριπλασιαζομένου δὲ τοῦ ὕψους καὶ τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΗ· ἂν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ διπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν ΑΙ, ΒΚ, ΓΛ, ΔΜ, τὸ πρίσμα θὰ διπλασιασθῇ· διότι θὰ ἀποτελῆται ἐκ τῶν δύο ὀρθῶν πρισμάτων ΑΗ καὶ ΕΛ, ἅτινα θὰ εἶναι ἴσα, διότι θὰ ἔχωσι βάσεις καὶ ὕψη ἴσα (539).

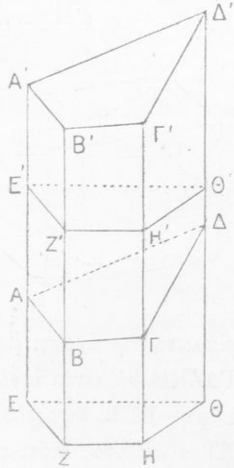
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν μὲν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τριπλασιασθῶσι τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται, ἂν δὲ τετραπλασιασθῶσι τετραπλασιάζεται καὶ ἐν γένει, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν τὸ πρίσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Τὰ ὀρθὰ ἄρα πρίσματα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν.

Θεώρημα. +

542. *Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθῷ πρίσματι, ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν τομὴν τοῦ πρίσματος τὴν γενομένην ὑπὸ ἐπιπέδου ἐπὶ τὰς πλευρὰς καθέτου (καλουμένην κάθετον τομήν), ὕψος δὲ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Ἔστω πλάγιον πρίσμα τὸ ΑΓ'. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΑ' ληφθῶσιν ἴσα μήκη ΑΕ, Α'Ε' καὶ ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΕΖΗΘ, Ε'Ζ'Η'Θ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς κάθετα, προκύπτει ὀρθὸν πρίσμα, οὗ τὸ ὕψος ΕΕ' εἶναι ἴσον τῇ ἀκμῇ ΑΑ' τοῦ δοθέντος πλαγίου πρίσματος· λέγω ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα.



Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μὴ κοινὰ αὐτῶν μέρη, τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ τὸ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'Η'Θ', εἶναι ἴσα.

Ἐπειδὴ αἱ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὰς τοῦ πλαγίου πρίσματος ἀκμάς, διότι ΕΕ' = ΑΑ', ἕπεται ὅτι καὶ ΖΖ' = ΒΒ'· ἂν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΒΖ', θὰ ἔχωμεν ΖΒ = Ζ'Β'.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν καὶ ΗΓ = Η'Γ' καὶ ΘΔ = Θ'Δ'.

Λοιπόν, ἂν τὸ πολύγωνον Ε'Ζ'Η'Θ' ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΕΖΗΘ, ἡ Ε'Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΕΑ, διότι θὰ εἶναι ἀμφότεραι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΕΖΗΘ κάθετοι· κατ' ἀκολουθίαν τὸ Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α· οὕτω καὶ τὸ Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἐφεξῆς οὕτως· ὥστε τὰ δύο στερεά, τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ τὸ Α'ΒΤ'Δ'Ε'Ζ'Η'Θ' θὰ ἐφαρμόσωσι. Τὸ ὀρθὸν ἄρα πρίσμα ΕΗ' καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ΑΓ' εἶναι ἰσοδύναμα· διότι ἐφαρμόζουσιν, ἂν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

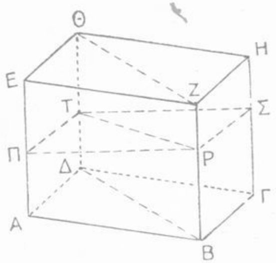
Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης τῶν δύο σχημάτων ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'Η'Θ' δύναται νὰ συναχθῇ ἀμέσως (κατὰ τὸ θεώρημα 489) καὶ ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τμήματα ΑΑ', ΒΒ'', ..., ΘΘ', τὰ ἑνοῦντα τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῶν δύο τούτων σχημάτων, εἶναι τμήματα ὁμόρροπα καὶ ἴσα.

Θεώρημα.

543. *Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου ἀγόμε-*

νον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

Ἔστω πλάγιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ ἐπίπεδον ἠγμένον διὰ τῶν ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν ΒΖ, ΔΘ τὸ ΒΖΘΔ· λέγω ὅτι τὰ δύο στερεὰ ΑΒΔΕΖΘ καὶ ΒΓΔΖΗΘ, ἅτινα εἶναι πρίσματα, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς πλευραὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι ἰσοδύναμα.



Διότι, ἂν ἀχθῇ τομὴ κάθετος, οἷον ἡ ΠΡΣΤ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΕΖΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, τῷ ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν ΠΡΤ, ὕψος δὲ τὴν ΑΕ, τὸ δὲ ΒΓΔΖΗΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι τῷ ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν ΡΣΤ, ὕψος δὲ τὴν ΒΖ (542)· ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΠΡΤ, ΡΣΤ εἶναι ἴσα, διότι τὸ σχῆμα ΠΡΣΤ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἕπεται ὅτι τὰ εἰρημένα ὀρθὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα· κατ' ἀκολουθίαν τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς πλάγια τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ἃ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον διῃρέθη, εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα.

544. *Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα, οἷον τὸ ΑΒΔΕΖΘ, εἶναι ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ κατασκευάζεται* (537 Σημ.) *ἐκ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν, τῆς Α.*

Μέτρησις τῶν πρισμάτων.

545. *Μονὰς* πρὸς μέτρησιν τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν τὴν λαμβανομένην ὡς μονάδα τοῦ μήκους καὶ καλεῖται *κυβικὴ μονάς.*

Κυβικὸς δὲ *πῆχυς* ἢ *κυβικὸν μέτρον* καλεῖται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕνα πῆχυν.

Κυβικὴ δὲ *παλάμη* καλεῖται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μιᾷ παλάμῃ· εἶναι δὲ αὕτη τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

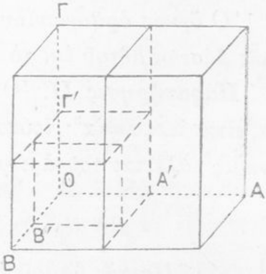
Κυβικὸς δάκτυλος καλεῖται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν ἕνα δάκτυλον· εἶναι δὲ οὗτος τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως στερεοῦ προκύπτων, ἤτοι ὁ πρὸς τὴν κυβικὴν μονάδα λόγος αὐτοῦ (197, 198), καλεῖται τοῦ στερεοῦ τούτου *ὄγκος*.

Θεώρημα.

546. *Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.*

Ἔστω ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΟΑΒΓ. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι τὰ μήκη τῶν τριῶν ἐκ τοῦ Ο ἀρχομένων ἀκμῶν αὐτοῦ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι α,β,γ.



Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς ΟΑ, ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, ἂς ληφθῇ ἡ ΟΑ' ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ ἂς κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἔχον ἀκμὰς τὰς τρεῖς εὐθείας ΟΑ', ΟΒ, ΟΓ.

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο καὶ τὸ δοθὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΟΓ, θὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα ὃν καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν λόγον (541), ἤτοι: $\frac{ΟΑΒΓ}{ΟΑ'ΒΓ} = \frac{ΟΑ}{ΟΑ'}$.

Ἂς ληφθῇ νῦν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΒ ἡ ΟΒ' ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΑ',ΟΒ',ΟΓ ἂς κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τὸ ΟΑ'Β'Γ. Τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο θὰ ἔχῃ πρὸς τὸ ΟΑ'ΒΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΓΟΑ'· ὅθεν $\frac{ΟΑ'ΒΓ}{ΟΑ'Β'Γ} = \frac{ΟΒ}{ΟΒ'}$.

Τέλος δὲ ἂς ληφθῇ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΓ ἡ ΟΓ' ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' παραλληλεπίπεδον, τὸ ΟΑ′Β′Γ′, ὅπερ θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν στερεῶν καὶ θὰ ἔχῃ μετὰ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΟΑ′Β′Γ τὴν αὐτὴν βάσιν Α′ΟΒ′· οὕτω θὰ ἔχωμεν $\frac{ΟΑ'Β'Γ}{ΟΑ'Β'Γ'}=\frac{ΟΓ}{ΟΓ'}$.

Ἐὰν δὲ τὰς τρεῖς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἐξαλείψωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΟΑΒΓ}{ΟΑ'Β'Γ'}=\frac{ΟΑ}{ΟΑ'}\cdot\frac{ΟΒ}{ΟΒ'}\cdot\frac{ΟΓ}{ΟΓ'},\quad \text{ἤτοι ὄγκ. } ΟΑΒΓ=α.β.γ.$$

Σημείωσις. Αἱ ἔκ τινος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου κορυφῆς ἀρχόμεναι τρεῖς αὐτοῦ ἀκμαί, ὡς καὶ οἱ παριστῶντες αὐτὰς ἀριθμοί, καλοῦνται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις I. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο διαστάσεων παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπ' αὐτῶν ὁριζομένης ἕδρας, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὡς βάσις, ἕπεται ὅτι:

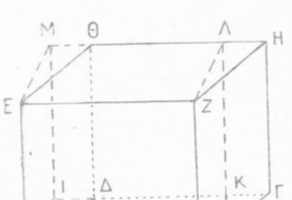
Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Παρατήρησις II. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, οὗ ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος α, εἶναι $α.α.α=α^3$· τούτου ἕνεκα καὶ ἡ τρίτη ἀριθμοῦ τινος δύναμις καλεῖται τοῦ ἀριθμοῦ τούτου *κύβος*.

Θεώρημα.

547. *Παντὸς ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἔστω τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΑΗ, ἔχον βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.



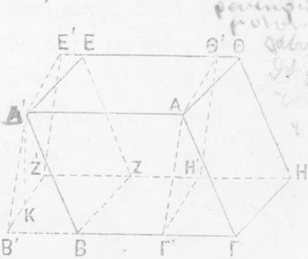
Ἂν ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΑΙΜΕ καὶ ΒΚΛΖ κάθετα ἐπὶ τὰς παραλλήλους ἕδρας ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΗΘ, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΙ καὶ ΒΓΚ θὰ εἶναι ἴσα, διότι θὰ ἔχωσιν εἰς τὸ Α καὶ Β μίαν γωνίαν ἴσην, περιλαμβανομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν, ἕπεται ὅτι τὰ ὀρθὰ πρίσματα ΑΔΙΕΘΜ καὶ ΒΓΚΖΗΛ θὰ εἶναι ἴσα (539). Ἐκ τούτου ἄρα ἕπεται ὅτι τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλεπιπέδῳ ΑΒΚΙΜ, ὅπερ ἔχει ὕψος μὲν τὸ αὐτό, βάσιν δὲ ἰσοδύναμον.

Λοιπὸν καὶ τοῦ δοθέντος ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Θεώρημα.

548. *Παντὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἔστω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Ἂν διὰ τῶν ἄκρων Α,Δ τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ ΑΔ ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ′Ζ′Ε′ καὶ ΔΓ′Η′Θ′ ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετα, θὰ προκύψῃ τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΑΗ′, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν ΑΒ′Ζ′Ε′, ὕψος δὲ τὴν ΑΔ· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΑΒ′Ζ′Ε′ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΔ (547), ἕπεται ὅτι καὶ τὸ δοθέν, ὡς ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἂν δέ, ἐν τῷ τῆς ὀρθῆς τομῆς παραλληλογράμμῳ ΑΒ′Ζ′Ε′, ὑψώσωμεν τὴν ΑΚ ἐπὶ τὴν Β′Ζ′ κάθετον, αὕτη θὰ εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β′Γ′Η′Ζ′ κάθετος (470)· κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τῆς ὀρθῆς τομῆς παραλληλογράμμου ΑΒ′Ζ′Ε′ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ (Β′Ζ′).(ΚΑ) ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ′, κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲ καὶ ὁ τοῦ δοθέντος ΑΗ, γράφεται ὡς ἑξῆς·



$$(\mathrm{B'Z'})\times(\mathrm{KA})\times(\mathrm{A\Delta}).$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τῆς ὀρθῆς τομῆς εὐθεῖα Β′Ζ′ εἶναι τῇ ΒΓ′ κάθετος (419), ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον (Β′Ζ′)×(ΑΔ), ἢ τὸ τούτῳ ἴσον (Β′Ζ′)×(ΒΓ), παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΒΓΗΖ τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος ἄρα πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Θεώρημα.

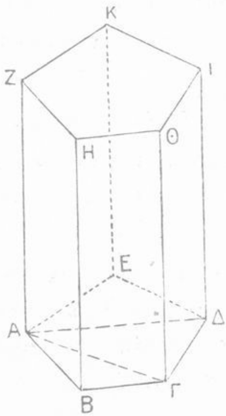
549. *Παντὸς πρίσματος ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

1ον. Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ἔχον βάσιν β καὶ ὕψος υ.

Τὸ τριγωνικὸν τοῦτο πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν (544), ἔχοντος ἄρα βάσιν μὲν 2β, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, υ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου εἶναι 2βυ (547,548), ἕπεται ὅτι ὁ τοῦ δοθέντος τριγωνικοῦ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ, ἤτοι βυ.

2ον. Ἔστω νῦν πολυγωνικὸν πρίσμα ΑΘ, ἔχον βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ὕψος δὲ υ.



Ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ διαγώνιοι τῆς βάσεως, ἀχθῶσι δὲ καὶ τὰ ὑφ' ἑκάστης τούτων καὶ τῆς ΑΖ ὁριζόμενα ἐπίπεδα, τὸ πρίσμα θὰ διαιρεθῇ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις μὲν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, εἰς ἃ ἡ τοῦ πρίσματος βάσις ΑΒΓΔΕ διῃρέθη, ὕψος δὲ τὸ τοῦ πρίσματος.

Ὁ ὄγκος ἄρα Ο τοῦ δοθέντος πρίσματος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$(ΑΒΓ)υ+(ΑΓΔ)υ+(ΑΔΕ)υ,$$

ἤτοι $$Ο=[(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)+(ΑΔΕ)]υ=(ΑΒΓΔΕ)υ.$$

Λοιπὸν ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Πόρισμα 1ον.

550. *Δύο πρίσματα ἔχοντα ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ τὰς δὲ βάσεις ἰσοδυνάμους εἶναι ἰσοδύναμα.*

$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B \times \upsilon}{B' \times \upsilon}$

Πόρισμα 2ον.

551. *Δύο πρίσματα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ γινόμενα τῶν βάσεων αὐτῶν ἐπὶ τὰ ὕψη* (199).

Πόρισμα 3ον.

552. *Δύο πρίσματα, ἂν μὲν ἔχωσι τὰς βάσεις ἰσοδυνάμους, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἂν δὲ ἔχωσι τὰ ὕψη ἴσα, ἔχουσιν ὃν λόγον καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν.* $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B \times \upsilon}{B' \times \upsilon'}$

Περὶ πυραμίδων.

553. *Πυραμὶς* εἶναι πολύεδρον ἔχον βάσιν μὲν πολύγωνον, παραπλεύρους δὲ ἕδρας τρίγωνα, ἔχοντα κορυφὴν μὲν κοινήν, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τῆς πολυγωνικῆς βάσεως.

Τὸ δὲ κοινὸν τοῦτο σημεῖον λέγεται *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος.

Ὕψος πυραμίδος λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη κάθετος. *Πλευραὶ* δὲ πυραμίδος λέγονται μάλιστα αἱ ἀκμαὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρέχουσαι.

Ἡ πυραμὶς ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς καλεῖται *τριγωνικὴ* μὲν ἂν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, ὅτε ὡς βάσις αὐτῆς δύναται νὰ ληφθῇ μία τῶν ἑδρῶν ἡτισδήποτε, *τετραγωνικὴ* δὲ ἂν ἔχῃ βάσιν τετράπλευρον, καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται καὶ *τετράεδρον*.

Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονική*, ἂν ἡ μὲν βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δὲ ὕψος πίπτει εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως. Τὸ ὕψος τότε καλεῖται *ἄξων* τῆς πυραμίδος.

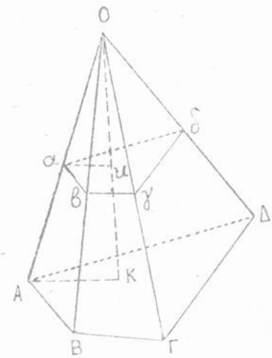
Θεώρημα.

554. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει*

1ον) αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα·

2ον) ἡ τομὴ εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει.

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΘΑΒΓΔ, καὶ ἡ τῇ βάσει αὐτῆς παράλληλος τομὴ αβγδ, καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς ΟΚ.



1ον. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αϐ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ αϐγδ, ἅτινα τέμνονται ὑπὸ τοῦ ΑΟΒ (444). Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ Οαϐ εἶναι ὅμοια· ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἀναλογία

$$ΟΑ : Οα = ΟΒ : Οϐ\cdot$$

ὡσαύτως $ΟΒ : Οϐ = ΟΓ : Ογ$, κ. ἑ. ο.

Πᾶσαι ἄρα αἱ πλευραὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἔχουσι τμηθῆ ἀναλόγως εἰς τὰ σημεῖα α, ϐ, γ, δ. Καὶ τὸ ὕψος ΟΚ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον κατὰ τὸ σημεῖον κ· διότι ἡ ΑΚ καὶ ἡ ακ εἶναι παράλληλοι (444)· εἶναι ἄρα $ΟΚ : Οκ = ΟΑ : Οα$.

2ον. Ἐπειδὴ ἡ μὲν αϐ εἶναι τῇ ΑΒ παράλληλος, ἡ δὲ ϐγ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ γδ τῇ ΓΔ καὶ ἡ δα τῇ ΔΑ, συνάγεται (448) ὅτι ἡ γωνία $αϐγ = ΑΒΓ$, ἡ $ϐγδ = ΒΓΔ$ καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τριγώνων ΟΑΒ, Οαϐ προκύπτει

$$ΑΒ : αϐ = ΟΒ : Οϐ.$$

Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΓ, Οϐγ προκύπτει

$$ΟΒ : Οϐ = ΒΓ : ϐγ.$$

Εἶναι ἄρα $ΑΒ : αϐ = ΒΓ : ϐγ$.

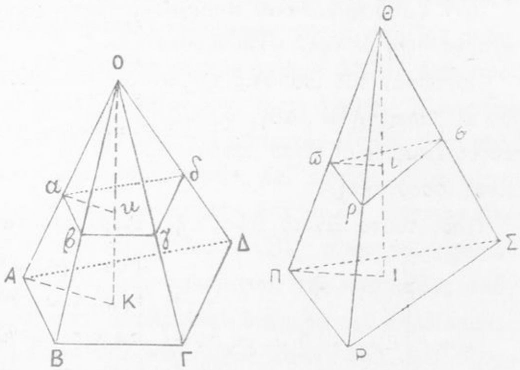
Ὡσαύτως εἶναι $ΑΒ : αϐ = ΓΔ : γδ$, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

Λοιπὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ αϐγδ ἔχουσι τὰς μὲν γωνίας ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ, τὰς δὲ ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι ἄρα ὅμοια.

Πόρισμα 1ον.

555. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων ταῖς βάσεσι παραλλήλων καὶ ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀπεχόντων αἱ τομαὶ θὰ εἶναι τῶν βάσεων ἀνάλογοι.*

Ἔστωσαν αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ΟΑΒΓΔ, ΘΠΡΣ, ἔχουσαι ὕψη μὲν ἴσα, τὰ ΟΚ καὶ ΘΙ, τομὰς δὲ πρὸς τὰς βάσεις παραλλήλους καὶ ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀπεχούσας, τὰς αϐγδ καὶ πρσ· λέγω ὅτι αἱ τομαὶ αὗται θὰ εἶναι τῶν βάσεων ἀνάλογοι.



Διότι, τῶν πολυγώνων ΑΒΓΔ, αϐγδ ὄντων ὁμοίων, αἱ τούτων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν ΑΒ, αϐ (260).

Ἐπειδὴ δὲ $\quad \mathrm{AB} : \alpha\beta = \mathrm{OA} : \mathrm{O}\alpha = \mathrm{OK} : \mathrm{O}\kappa,$

ἕπεται ὅτι $\quad \mathrm{AB\Gamma\Delta} : \alpha\beta\gamma\delta = (\mathrm{OK})^2 : (\mathrm{O}\kappa)^2.$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐν τῇ πυραμίδι ΘΠΡΣ εἶναι

$$\Pi\mathrm{P}\Sigma : \pi\rho\sigma = (\Theta\mathrm{I})^2 : (\Theta\iota)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ΟΚ=ΘΙ καὶ Οκ=Θι, ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\mathrm{AB\Gamma\Delta} : \alpha\beta\gamma\delta = \Pi\mathrm{P}\Sigma : \pi\rho\sigma.$$

Πόρισμα 2ον.

556. Ἐὰν αἱ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΠΡΣ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας θὰ συμπεράνωμεν ὅτι καὶ αἱ τομαὶ αϐγδ καὶ πρσ, αἱ πρὸς τὰς βάσεις παράλληλοι καὶ ἴσον τῶν κορυφῶν ἀπέχουσαι, θὰ εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμοι.

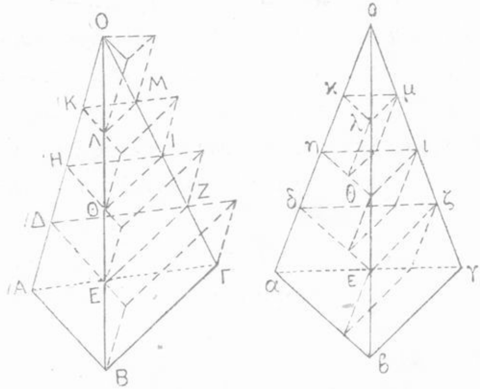
Λοιπόν, ἐὰν δύο πυραμίδες, ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων πρὸς τὰς βάσεις παραλλήλων καὶ ἴσον τῶν κορυφῶν ἀπεχόντων, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Θεώρημα.

557. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἐὰν ἔχωσι βάσεις μὲν ἰσοδυνάμους ὕψη δὲ ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ καὶ οαβγ, ὧν αἱ βάσεις ΑΒΓ, αβγ, ἃς ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουσι τεθῆ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ἰσοδύναμοι· λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πρὸς τοῦτο ἂν τὸ ὕψος τῆς ἑτέρας τούτων διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθῶσιν ἐπίπεδα τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων παράλληλα, αἱ ὑφ' ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τούτων γινόμεναι ἐπὶ τῶν δύο πυραμίδων τομαί, θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἰσοδύναμοι (556)· ἤτοι ἡ μὲν ΔΕΖ πρὸς τὴν δεζ, ἡ δὲ ΗΘΙ, πρὸς τὴν ηθι, ἡ δὲ ΚΛΜ πρὸς τὴν κλμ.



Οὕτως ἂς κατασκευασθῶσιν ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας πυραμίδος, λαμβανομένων τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ... ὡς βάσεων, ἐξωτερικὰ πρίσματα, ἔχοντα ἀκμὰς τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΗ, . . . τῆς πλευρᾶς ΟΑ, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας πυραμίδος, λαμβανομένων τῶν τριγώνων δεζ, ηθι, . . . ὡς βάσεων, ἐσωτερικὰ πρίσματα, ἔχοντα ἀκμὰς τὰ τμήματα αδ, δη . . . τῆς πλευρᾶς οα· θὰ ἔχωσι δὲ πάντα τὰ πρίσματα ταῦτα ἴσον ὕψος, τὸ φ. Οὕτω προφανὲς εἶναι ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ εἶναι μεῖζον τῆς πυραμίδος ταύτης, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος οαβγ εἶναι μικρότερον τῆς πυραμίδος ταύτης. Ἕνεκα δὲ ἀμφοτέρων τῶν λόγων τούτων ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰ τῶν ἀθροισμάτων τῶν πρισμάτων ἑκατέρας τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι τῆς ἀπ' ἀλλήλων τῶν δύο τούτων πυραμίδων διαφορᾶς μείζων, ὑποτεθέντος ὅτι ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ δὲν εἶναι ἐλάσσων τῆς πυραμίδος οαβγ.

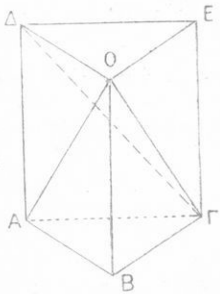
Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΖΗ εἶναι πρὸς τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεζη ἰσοδύναμον, διότι ἔχουσι βάσεις μὲν ἰσοδυνάμους ὕψη δὲ ἴσα, τὸ δὲ τρίτον ἐξωτερικὸν ΗΘΙΚ εἶναι πρὸς τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν ηθικ ἰσοδύναμον, καὶ ἐφεξῆς οὕτω μέχρι τῶν τελευταίων ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ἕπεται ὅτι ἕκαστον ἐξωτερικὸν πρίσμα τῆς αὐτῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ, πλὴν τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ, ἔχει ἓν ἐκ τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος οαβγ πρὸς ἑαυτὸ ἰσοδύναμον· κατ' ἀκολουθίαν διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος οαβγ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐξωτερικῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ εἶναι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τῶν πυραμίδων διαφορὰ εἶναι τῆς διαφορᾶς τῶν ἀθροισμάτων τῶν πρισμάτων τούτων μικροτέρα, θὰ εἶναι ἄρα μικροτέρα τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὸ φ. Ἐπειδὴ δέ, διαιροῦντες τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἰς πλείονα μέρη, δυνάμεθα ὅσον ἂν θέλωμεν τὸ ὕψος φ νὰ σμικρύνωμεν, ἕπεται ὅτι ἡ τῶν δύο πυραμίδων διαφορὰ εἶναι μικροτέρα ποσότητος, ἥτις δύναται νὰ γίνῃ ὅσον ἂν θέλωμεν μικρά· ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι καὶ σταθερὰ ποσότης, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴση τῷ μηδενί. Αἱ πυραμίδες ἄρα εἶναι ἰσοδύναμοι.

Θεώρημα.

558. *Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Ἔστωσαν ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ καὶ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΟ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ τῆς πυραμίδος· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι τὸ τρίτον τοῦ δοθέντος πρίσματος.

Διότι, ἂν ἀπὸ τοῦ πρίσματος ἀφαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ, θὰ ὑπολειφθῇ τὸ στερεὸν ΟΑΓΕΔ, ὅπερ εἶναι τετραγωνικὴ πυραμίς, ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΕΔ, κορυφὴν δὲ τὸ Ο. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων Δ,Ο,Γ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΔΟΓ, ἡ πυραμὶς ΟΑΓΕΔ θὰ διαιρεθῇ εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΟΑΓΔ καὶ ΟΓΕΔ, αἵτινες θὰ ἔχωσιν ὕψος μὲν κοινόν, ἤτοι τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΓΕΔ ἀγομένην κάθετον, βάσεις δ' ἰσοδυνάμους, ὡς ἡμίσεα μέρη τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΕΔ· τούτου ἕνεκα

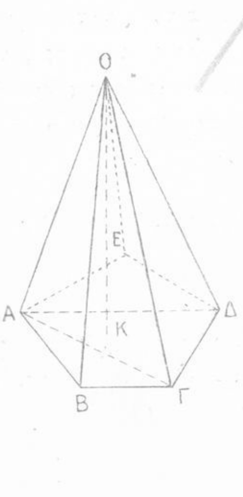


αἱ πυραμίδες ΟΑΓΔ, ΟΓΕΑ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ πυραμίδες ΟΓΔΕ, ΟΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουσιν ἴσας βάσεις, τὰς ΟΕΔ καὶ ΑΒΓ, καὶ ἴσα ὕψη, ἤτοι τὰς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΔΟΕ καθέτους, ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς πυραμίδες, ἐξ ὧν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΟ ἀποτελεῖται, εἶναι ἰσοδύναμοι· κατ' ἀκολουθίαν ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΟ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ὁ ὄγκος ἄρα πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος.

Θεώρημα.

559. *Πάσης πυραμίδος ὁ ὄγκος ἰσοῦται τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος.*



Ἔστω ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ· ἂν ἀχθῶσι τὰ διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ ἐπίπεδα ΟΑΓ, ΟΑΔ, ἡ πυραμὶς θὰ διαιρεθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ἐχούσας ὕψος μὲν κοινόν, τὴν ΟΚ, βάσεις δὲ τὰ τρίγωνα εἰς ἃ ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ θὰ διαιρεθῇ.

Ἡ πολυγωνικὴ ἄρα πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ θὰ ἔχῃ ὄγκον ἰσούμενον πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\times(\text{ΟΚ})+\frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})\times(\text{ΟΚ})+\frac{1}{3}(\text{ΑΔΕ})\times(\text{ΟΚ}).$$

$$\text{ἢ } \frac{1}{3}\Big[(\text{ΑΒΓ})+(\text{ΑΓΔ})+(\text{ΑΔΕ})\Big].(\text{ΟΚ}), \text{ ἤτοι } \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓΔΕ})\times(\text{ΟΚ}).$$

τουτέστι πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος.

Πόρισμα 1ον.

560. *Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Πόρισμα 2ον.

561. *Δύο πυραμίδες, ἂν μὲν ἔχωσιν ἴσα ὕψη ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ αὐτῶν βάσεις, ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσας βάσεις ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ αὐτῶν ὕψη.*

Σημείωσις. Παντὸς πολυέδρου ὁ ὄγκος ὑπολογίζεται, ἂν τοῦτο διαιρεθῇ εἰς πυραμίδας· ἡ δὲ διαίρεσις αὕτη γίνεται κατὰ πολλοὺς τρόπους, ὧν ἁπλούστατος, κατὰ τὴν περίπτωσιν κυρτοῦ πολυέδρου, εἶναι, ἂν ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ δι' αὐτῆς δυναταὶ διαγώνιοι, διότι οὕτω τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα ἐπίπεδα θὰ διαιρέσωσι τὸ πολύεδρον εἰς τόσας πυραμίδας ὅσαι εἶναι αἱ τοῦ πολυέδρου ἕδραι πλὴν ἐκείνων αἵτινες συνάπτονται εἰς τὴν κορυφὴν ἐξ ἧς αἱ διαγώνιοι ἄγονται.

Δαυίρος

Περὶ κολούρου πυραμίδος.

Ὁρισμός.

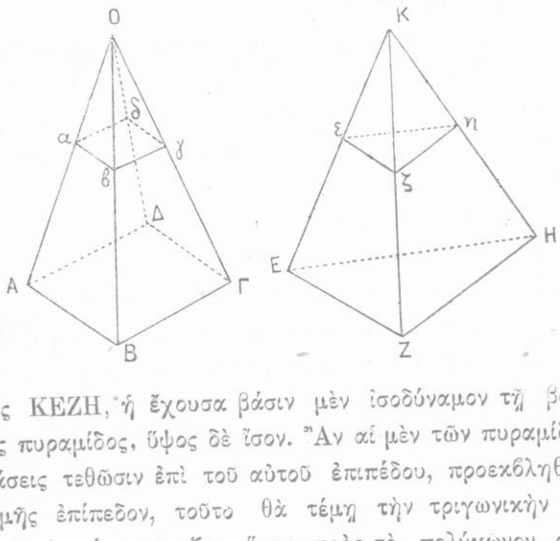
562. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τῇ βάσει αὐτῆς παραλλήλου, τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος περιεχόμενον στερεὸν καλεῖται *κόλουρος πυραμίς.*

Τῆς κολούρου πυραμίδος βάσεις μὲν εἶναι αἱ παράλληλοι αὐτῆς ἕδραι, ὕψος δὲ ἡ τῶν ἑδρῶν τούτων ἀπόστασις.

Θ ε ώ ρ η μ α.

563. *Πᾶσα κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ὕψος μὲν ἔχουσι κοινὸν τὸ τῆς κολούρου, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων τῆς κολούρου, ἡ δὲ τὴν ἑτέραν, ἡ δὲ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.*

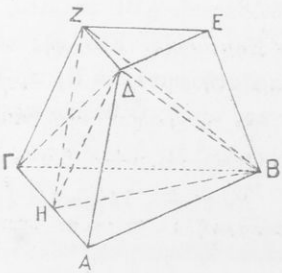
Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τοῦ τῇ βάσει παραλλήλου ἐπιπέδου αβγδ, καὶ ἡ ταύτῃ ἰσοδύναμος τριγωνικὴ



πυραμὶς ΚΕΖΗ, ἡ ἔχουσα βάσιν μὲν ἰσοδύναμον τῇ βάσει τῆς πρώτης πυραμίδος, ὕψος δὲ ἴσον. Ἂν αἱ μὲν τῶν πυραμίδων τούτων βάσεις τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, προεκβληθῇ δὲ τὸ τῆς τομῆς ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμῃ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον εζη, ὅπερ πρὸς τὸ πολύγωνον αβγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον (556)· τούτου ἕνεκα αἱ πυραμίδες Οαβγδ καὶ Κεζη θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Κατ' ἀκολουθίαν αἱ κόλουροι πυραμίδες ΑΒΓΔαβγδ, καὶ ΕΖΗεζη, αἵτινες θὰ ὑπολειφθῶσιν, ἂν ἀπὸ τῶν ἰσοδυνάμων πυραμίδων ΟΑΒΓΔ καὶ ΚΕΖΗ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἰσοδύναμοι πυραμίδες Οαβγδ καὶ Κεζη, θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Λοιπὸν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ τοῦτο κατὰ τὴν περίπτωσιν τῆς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος.

Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἔστω ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ. Ἂν ἀχθῇ τὸ διὰ τῶν σημείων Β,Γ,Δ ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ ἀποκόψῃ ἀπὸ τῆς κολούρου πυραμίδος τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ, τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὴν κάτω τῆς κολούρου βάσιν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὸ τῆς κολούρου, διότι ἡ ταύτης κορυφὴ Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἄνω βάσεως ΔΕΖ. Ἡ δὲ μετὰ τοῦτο ὑπολειφθησομένη τετραγωνικὴ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ, ἂν ἀχθῇ τὸ



ἐπίπεδον ΒΔΖ, θὰ διαιρεθῇ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας, τὴν ΔΒΓΖ καὶ τὴν ΔΒΕΖ· ἂν δὲ τῆς πυραμίδος ΔΒΕΖ ληφθῇ κορυφὴ τὸ Β καὶ βάσις ἡ ἄνω τῆς κολούρου βάσις ΔΕΖ, ὕψος αὐτῆς θὰ εἶναι τὸ τῆς κολούρου, διότι ἡ ταύτης κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν τρίτην πυραμίδα, τὴν ΔΒΓΖ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΗ τῇ ΖΓ παράλληλος, θὰ τέμῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον, τὸ Η· ἂν δὲ τὴν πυραμίδα ΗΒΓΖ, ἧς κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ Η, βάσις δὲ ἡ ΒΓΖ, παραβάλωμεν πρὸς τὴν ΔΒΓΖ, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουσι βάσιν μὲν τὴν αὐτήν, τὴν ΒΓΖ, ὕψη δὲ ἴσα, διότι αἱ τούτων κορυφαί, ἡ Α καὶ ἡ Η, κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΗ, οὔσης τῇ βάσει παραλλήλου. Ἐὰν δὲ τῆς πυραμίδος ΗΒΓΖ κορυφὴν λάβωμεν τὸ Ζ, τὸ ταύτης ὕψος θὰ εἶναι ἴσον τῷ τῆς κολούρου.

Νῦν ὑπολείπεται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τῆς πυραμίδος ταύτης βάσις ΒΓΗ εἶναι τῶν δύο βάσεων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ μέση ἀνάλογος.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΗΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσιν ἴσα ὕψη, διότι ἔχουσι τὴν μὲν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Ζ, τὴν δὲ πλευρὰν ΓΗ ἴσην τῇ ΖΔ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ αὐτῶν βάσεις (212)· ἤτοι ΗΒΓ : ΔΕΖ = ΓΒ : ΖΕ.

Ἔτι δὲ $ΑΒΓ : ΗΒΓ = ΓΑ : ΓΗ = ΓΑ : ΖΔ$.

Ἐπειδὴ δὲ $ΓΑ : ΖΔ = ΓΒ : ΖΕ$, διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, συνάγεται ὅτι $ΑΒΓ : ΗΒΓ = ΗΒΓ : ΔΕΖ$.

Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ἡ τῆς πυραμίδος ΔΒΓΗ βάσις ΗΒΓ εἶναι τῶν βάσεων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ μέση ἀνάλογος.

Σημείωσις. Ἐὰν τῆς κολούρου πυραμίδος τὴν μὲν κάτω βάσιν παραστήσωμεν διὰ Β, τὴν δὲ ἄνω διὰ β καὶ τὸ ὕψος διὰ τοῦ υ, ὁ ὄγκος αὐτῆς Ο θὰ παρέχηται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$O = \frac{1}{3}B.\upsilon + \frac{1}{3}\beta.\upsilon + \frac{1}{3}\sqrt{B\beta}.\upsilon \quad \text{ἢ} \quad O = \frac{1}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta}).\upsilon.$$

Ἂν δὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων β καὶ Β παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ, θὰ εἶναι $\beta = B\rho^2$ καὶ ἄρα $\sqrt{B\beta} = B\rho$.

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ τὸν ὄγκον Ο δίδων τύπος γίνεται·

$$O = \frac{1}{3}(B + B\rho + B\rho^2)\upsilon, \quad \text{ἢ} \quad O = \frac{1}{3}B(1+\rho+\rho^2)\upsilon.$$

Περὶ κολούρου πρίσματος.

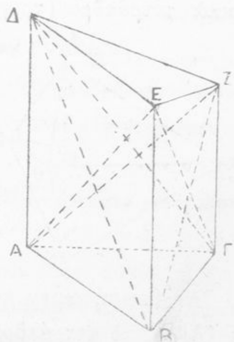
Θεώρημα.

564. *Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου περιεχόμενον στερεόν, ὅπερ καὶ κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα καλεῖται, εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσι βάσιν μὲν κοινήν, τὴν τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς τομῆς.*

Ἔστω τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΑΒΓ, τομὴν δὲ μὴ παράλληλον τῇ βάσει, τὴν ΔΕΖ.

Ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ θὰ ἀποκόψῃ ἀπὸ τοῦ στερεοῦ τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὴν ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Ε. Ἡ δὲ μετὰ τοῦτο ὑπολειφθησομένη τετραγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΓΖΔ, ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΓΕΔ, θὰ διαιρεθῇ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας, τὴν ΕΑΓΔ καὶ τὴν ΕΓΖΔ. Ἂν δὲ τῆς πυραμίδος

ΕΑΓΔ τὴν κορυφὴν Ε μεταφέρωμεν εἰς τὸ Β, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσοδύναμος πυραμὶς ΒΑΓΔ (557), ἧς βάσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Τέλος δέ, ἂν τῆς πυραμίδος ΕΓΔΖ τὴν κορυφὴν Ε μεταφέρωμεν εἰς τὸ Β, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῇ πυραμὶς ΒΓΔΖ, ἂν δὲ τὴν κορυφὴν Δ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Α, θὰ προκύψῃ ἡ πρὸς αὐτὴν ἰσοδύναμος πυραμὶς ΑΒΓΖ (557), ἧς δύναται νὰ ληφθῇ βάσις ἡ ΑΒΓ καὶ κορυφὴ τὸ Ζ.



Λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν βάσιν κοινήν, τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς Δ,Ε,Ζ τῆς τομῆς.

Πόρισμα 1ον.

565. *Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ κάθετοι, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον*

$$\text{O} = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}).\left[(\text{ΑΔ})+(\text{ΒΕ})+(\text{ΓΖ}).\right]$$

Πόρισμα 2ον.

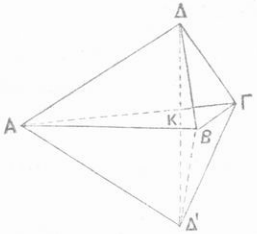
566. *Ἐὰν τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρίσμα ἔχῃ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ πλαγίας τῇ βάσει, ἀχθῇ δὲ κάθετος τομή, εὑρίσκεται ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι ἴσος τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν.*

Περὶ τῆς τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων ἰσοδυναμίας.

Θεώρημα.

567. *Δύο πολύεδρα συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖον, ἢ ὡς πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἰσοδύναμα.*

1ον) Ἔστωσαν τὰ πρὸς τὴν κοινὴν αὐτῶν βάσιν ΑΒΓ συμμετρικὰ τετράεδρα (τριγωνικαὶ δηλ. πυραμίδες) ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΓΔ′.



Τῶν τετραέδρων τούτων, ἅτινα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ, τὰ ὕψη ΚΔ καὶ ΚΔ′ εἶναι προφανῶς ἴσα. Τὰ δύο ἄρα ταῦτα τετράεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον) Ἔστωσαν δύο τετράεδρα Τ καὶ Τ′, συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρός τι σημεῖον Κ, ἢ ὡς πρός τι ἐπίπεδον Ε·

Ἂν θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν Τ″ τοῦ Τ ὡς πρός τινα τοῦ Τ ἕδραν, τὸ τετράεδρον Τ″ πρὸς μὲν τὸ τετράεδρον Τ′ θὰ εἶναι (κατὰ ἐδ. 491, 493) ἴσον, πρὸς δὲ τὸ Τ ἰσοδύναμον, κατὰ τὰ ἀνωτέρω· τὰ τετράεδρα ἄρα Τ καὶ Τ′ εἶναι ἰσοδύναμα.

3ον) Ἔστωσαν δύο οἱαδήποτε συμμετρικὰ κυρτὰ πολύεδρα.

Ἂν ἐντὸς μὲν τοῦ ἑτέρου τῶν πολυέδρων τούτων ληφθῇ σημεῖόν τι Ο, ἐντὸς δὲ τοῦ ἑτέρου τὸ τούτῳ συμμετρικὸν Ο′, ἑνωθῶσι δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα δι' εὐθειῶν μετὰ τῶν κορυφῶν τῶν πολυέδρων, τὰ δύο πολύεδρα θὰ διαιρεθῶσιν εἰς πυραμίδας συμμετρικάς, ἰσοδυνάμους ἄρα ἑκάστην ἑκάστῃ.

Ὅθεν τὰ δύο πολύεδρα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρατήρησις. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ διὰ μὴ κυρτὰ πολύεδρα.

Περὶ ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

Ὁρισμοί.

568. Δύο πολύεδρα λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχωσι τὰς μὲν ἕδρας ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας ἑκάστην ἑκάστῃ, τὰς δὲ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας.

Ὁμόλογοι ἕδραι λέγονται αἱ ὅμοιαι ἕδραι. Αἱ δὲ ὑπὸ ὁμολόγων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι λέγονται *ὁμόλογοι δίεδροι*.

Ὁμόλογοι κορυφαὶ λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν. Αἱ δὲ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς ἑνοῦσαι ἀκμαὶ λέγονται καὶ αὗται *ὁμόλογοι ἀκμαί*.

Ἐκ δὲ τοῦ τῶν ὁμοίων πολυέδρων ὁρισμοῦ συνάγεται :

1ον) *Ὅτι δύο ὁμοίων πολυέδρων αἱ ὁμόλογοι δίεδροι εἶναι ἴσαι.* Διότι αὗται εἶναι δίεδροι γωνίαι στερεῶν γωνιῶν δυναμένων νὰ ἐφαρμόσωσι.

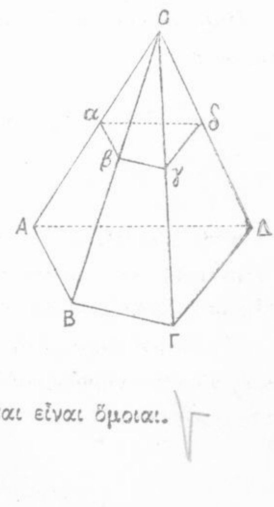
2ον) *Ὅτι δύο ὁμοίων πολυέδρων αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ εἶναι ἀνάλογοι.*

Διότι αὗται εἶναι ἀκμαὶ ὁμοίων πολυγώνων τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος ἐχόντων· διότι ἑκατέρου τῶν πολυέδρων ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι ἅμα πλευρὰ δύο προσκειμένων ἑδρῶν.

Θεώρημα.

569. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τῇ ταύτης βάσει παραλλήλου, θὰ σχηματισθῇ πυραμὶς τῇ πρώτῃ ὁμοία.*

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ καὶ ἡ πρὸς τὴν ταύτης βάσιν παράλληλος τομὴ αβγδ· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς Οαβγδ εἶναι τῇ ΟΑΒΓΔ ὁμοία.



1ον) Ἐπειδὴ ἡ τομὴ εἶναι τῇ βάσει παράλληλος, τὰ δύο πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια (554)· εἶναι δ' ἔτι καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑκάστη ἑκάστῃ ὅμοιαι, ὡς ἤδη παρετηρήσαμεν (ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς προτάσεως 489).

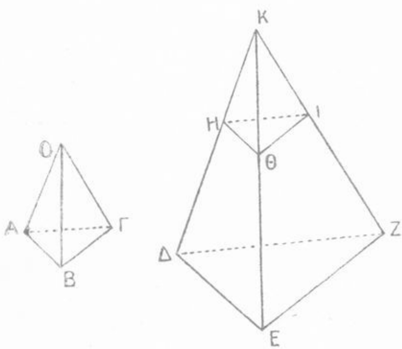
2ον) Ἡ στερεὰ γωνία Ο εἶναι τῶν δύο πυραμίδων κοινή, αἱ δὲ τρίεδροι Α καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ὡς γωνίας ὁμοίων τριγώνων, καὶ ὁμοίως κειμένας.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι.

Θεώρημα.

570. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν ἔχωσι μίαν δίεδρον ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ ἑδρῶν ὁμοίων ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ ὁμοίως διατεταγμένων.*

Ἔστω ὅτι αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ καὶ ΚΔΕΖ ἔχουσι τὴν μὲν δίεδρον ΟΑ ἴσην τῇ ΚΔ, τὰς δὲ ἕδρας ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ ὁμοίας ἀντιστοίχως ταῖς ΚΔΕ καὶ ΚΔΖ καὶ ὁμοίως κειμένας· λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.



Διότι ἂν ληφθῇ ἡ ΚΗ ἴση τῇ ΟΑ, ἐκ δὲ τοῦ Η ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΗΘΙ τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕΖ παράλληλον, θὰ σχηματισθῇ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΗΘΙ τῇ ΚΔΕΖ ὁμοία. Ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι τῷ ΚΗΘ ἴσον, διότι εἶναι ἡ μὲν ΟΑ ἴση τῇ ΚΗ, αἱ δὲ τούτων γωνίαι ἴσαι ἑκάστη ἑκάστῃ, ὡς γωνίαι τριγώνων τῷ ΚΔΕ ὁμοίων, τὸ δὲ τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι ὡσαύτως ἴσον τῷ ΚΗΙ, ἕπεται ὅτι αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ καὶ ΚΗΘΙ, ὡς ἔχουσαι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ ἑδρῶν ἴσων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων, εἶναι ἴσαι (499)· αἱ πυραμίδες ἄρα ΟΑΒΓ καὶ ΚΔΕΖ εἶναι ὅμοιαι.

571. ***Σημείωσις.*** Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις·

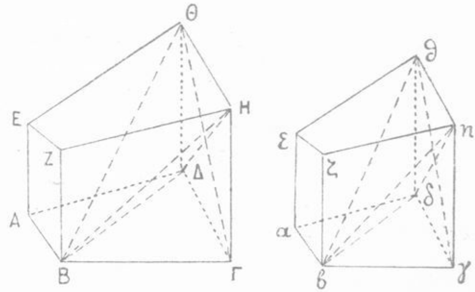
1ον) *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἂν ἔχωσι μίαν μὲν ἕδραν ὁμοίαν, τὰς δὲ ταύτῃ προσκειμένας διέδρους ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως διατεταγμένας.*

2ον) *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἂν ἔχωσι τρεῖς ἕδρας ὁμοίας ἑκάστην ἑκάστῃ καὶ ὁμοίως διατεταγμένας.*

Θεώρημα.

572. *Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας ἑκάστην ἑκάστῃ.*

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια πολύεδρα ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ, καὶ ΑΒΓΔ, ΓΔΘΗ δύο προσκείμεναι ἕδραι τοῦ πρώτου πολυέδρου, καὶ αβγδ, γδθη αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τοῦ δευτέρου. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΒ,ΔΗ,ΒΗ, καὶ δβ,δη,βη θὰ σχηματισθῶσι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἡ ΗΒΔΓ καὶ ἡ ηβδγ, αἵτινες θὰ εἶναι ὅμοιαι,



διότι θὰ ἔχωσι τὴν μὲν δίεδρον ΓΔ ἴσην τῇ γδ, τὰς δὲ περιεχούσας ταύτας ἕδρας ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, ὡς ὁμόλογα τρίγωνα ὁμοίων πολυγώνων· καὶ τὸ τρίγωνον ΒΔΗ εἶναι ἄρα ὅμοιον τῷ βδη.

Θὰ ἴδωμεν ὡσαύτως ὅτι ἡ πυραμὶς ΘΒΔΓ εἶναι ὁμοία τῇ θβδγ.

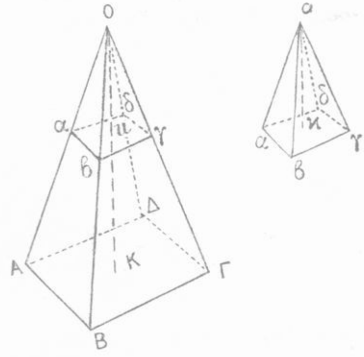
Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν πυραμίδων τούτων συνάγεται ὅτι αἱ ἕδραι ΗΒΔ καὶ ΘΒΔ σχηματίζουσι μετὰ τῆς ΒΔΓ διέδρους γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν ηβδ καὶ θβδ μετὰ τῆς βδγ· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΒΔΗ καὶ ΒΔΘ σχηματιζομένη δίεδρος γωνία ἰσοῦται τῇ ὑπὸ τῶν ἑδρῶν βδη καὶ βδθ σχηματιζομένῃ. Ἕνεκα δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν πυραμίδων τούτων, τὸ μὲν τρίγωνον ΒΔΗ εἶναι ὅμοιον τῷ βδη, τὸ δὲ ΒΔΘ εἶναι ὅμοιον τῷ βδθ. Αἱ δύο ἄρα τριγωνικαὶ πυραμίδες ΗΘΒΔ καὶ ηθβδ εἶναι ὅμοιαι (571).

Λοιπόν, οὕτω προχωροῦντες, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἵτινες δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἐν τῷ πρώτῳ πολυέδρῳ, εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς ὁμολόγους αὐτῶν ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ὁμόλογοι εὐθεῖαι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι.

Θεώρημα.

573. *Δύο ὅμοιαι πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.*

Ἔστωσαν αἱ ὅμοιαι πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ οαϐγδ.



Ἂν τεθῇ ἡ μικροτέρα ἐντὸς τῆς μείζονος οὕτως, ὥστε αἱ στερεαὶ γωνίαι Ο καὶ ο νὰ ἐφαρμόσωσιν, αἱ τούτων βάσεις ΑΒΓΔ καὶ αϐγδ θὰ εἶναι παράλληλοι, διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν προκύπτει ὅτι ἡ μὲν γωνία οαϐ ἰσοῦται τῇ ΟΑΒ, ἡ δὲ οϐγ τῇ ΟΒΓ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅτι ἡ μὲν αϐ εἶναι τῇ ΑΒ παράλληλος, ἡ δὲ ϐγ τῇ ΒΓ (109).

Μετὰ δὲ τοῦτο ἂν ἀχθῇ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ κάθετος ΟΚ, αὕτη θὰ τέμῃ τὸ ἐπίπεδον αϐγδ εἴς τι σημεῖον, τὸ κ, ὥστε θὰ εἶναι (554)·

$$\mathrm{OK}:\mathrm{O}\varkappa=\mathrm{OA}:\mathrm{O}\alpha=\mathrm{AB}:\alpha\beta \cdot \text{ ὅθεν } \frac{1}{3}(\mathrm{OK}):\frac{1}{3}(o\varkappa)=(\mathrm{AB}):(\alpha\beta).$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ βάσεις εἶναι ὅμοιαι θὰ εἶναι

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}):(\alpha\beta\gamma\delta)=(\mathrm{AB})^2:(\alpha\beta)^2.$$

Ἂν δὲ τὰς ἀναλογίας ταύτας πολλαπλασιάσωμεν ὅρον πρὸς ὅρον θὰ προκύψῃ ἡ ἀναλογία

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})\times\frac{1}{3}(\mathrm{OK}):(\alpha\beta\gamma\delta)\times\frac{1}{3}(o\varkappa)=(\mathrm{AB})^3:(\alpha\beta)^3.$$

Ὁ λόγος ἄρα δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν κύϐων τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.

Θεώρημα.

574. *Δύο ὅμοια πολύεδρα Σ καὶ Σ' ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.*

Διότι, ἂν τὰ ὅμοια ταῦτα πολύεδρα διαιρεθῶσιν εἰς ἴσας τὸ πλῆθος τριγωνικὰς πυραμίδας καὶ ὁμοίας ἑκάστην ἑκάστῃ (506), ἤτοι τὸ μὲν Σ εἰς τὰς $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$, τὸ δὲ Σ' εἰς τὰς $\Pi_1', \Pi_2' \Pi_3', \ldots$, ἐπειδὴ αἱ τῶν πυραμίδων τούτων ὁμόλογοι ἀκμαὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ αἱ ὁμόλογοι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἀκμαί, ἔστω δὲ οὗτος ὁ ρ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\Pi'_1 = \Pi_1 . \rho^3, \quad \Pi'_2 = \Pi_2 . \rho^3, \ldots \quad \text{καὶ ἄρα}$$

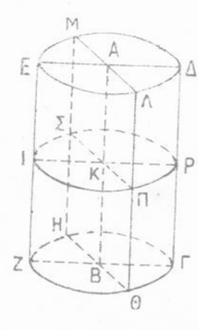
$$\Pi'_1 + \Pi'_2 + \ldots = (\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots) . \rho^3, \text{ ἤτοι } \Sigma' = \Sigma . \rho^3 \text{ ἢ } \frac{\Sigma'}{\Sigma} = \rho^3.$$

Περὶ κυλίνδρου.

Ὁρισμοί.

575. *Κύλινδρος* λέγεται τὸ στερεὸν ὅπερ γίνεται ὑπὸ ὀρθογωνίου στρεφομένου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μένουσαν ἀκίνητον κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.

Ἔστω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτοῦ θέσιν.



Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ αἱ μὲν πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ, ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀεὶ κάθετοι οὖσαι, διαγράφουσιν ἴσους κύκλους, οὓς καλοῦμεν τοῦ κυλίνδρου *βάσεις*, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ, ἥτις καλεῖται *γενέτειρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας*, διαγράφει ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται *κυρτὴ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια*.

Ἄξων τοῦ κυλίνδρου ἢ *ὕψος* λέγεται ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ μένουσα ἀκίνητος.

Πᾶσα τομή, οἷον ἡ ΠΡΣΙ, γινομένη ἐν τῷ κυλίνδρῳ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι, εἶναι κύκλος ἴσος ἑκατέρᾳ τῶν βάσεων.

Διότι ὁ κύκλος οὗτος γράφεται ὑπὸ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Κ.

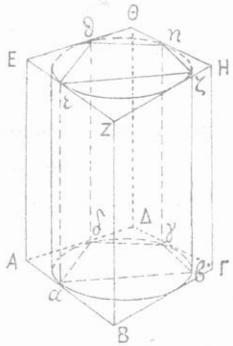
Πᾶσα δὲ τομὴ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΗΘΛΜ, εἶναι ὀρθογώνιον τοῦ ΑΒΓΔ διπλάσιον.

Διότι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ, θὰ διέλθῃ δὶς διὰ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ θὰ καταλάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΘΔ καὶ ΑΒΗΜ.

576. Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται ἐν *κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένον*, ἂν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἐν ταῖς βάσεσι τοῦ κυλίνδρου.

Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ πρίσμα.

Ἵνα σχηματίσωμεν τοιοῦτον πρίσμα, ἐγγράφομεν εἰς μίαν τῶν



βάσεων τοῦ κυλίνδρου πολύγωνον, οἷον τὸ αβγδ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κατασκευάζομεν ὀρθὸν πρίσμα τῷ κυλίνδρῳ ἰσοϋψές.

Οὕτω τὸ πρίσμα αβγδεζηθ εἶναι ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένον, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον, ἂν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι *περιγεγραμμέναι* περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Οὕτω δὲ ὁ κύλινδρος οὗτος λέγεται ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ πρίσματι.

Ἵνα δὲ τοιοῦτον πρίσμα κατασκευάσωμεν, περὶ μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου περιγράφομεν πολύγωνον, οἷον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κατασκευάζομεν ὀρθὸν πρίσμα, τῷ κυλίνδρῳ ἰσοϋψές.

Οὕτω τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΗΘ εἶναι περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον, ἕκαστον δὲ τῶν ὀρθογωνίων, ἐξ ὧν ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια σύγκειται, ἅπτεται τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι ἡ ἐξ ἑκάστου σημείου, καθ' ὃ ἡ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος βάσις ἅπτεται τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν ταύτην κάθετος κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς παραπλεύρου τοῦ πρίσματος ἐπιφανείας. Αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν, ὁ δὲ κύλινδρος κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ πρίσματος.

Σημείωσις. Τὴν κυρτὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν παραγομένην ὑπ' εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ διαρκῶς τὴν περιφέρειαν κύκλου, καὶ νὰ μένῃ ἀεὶ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ἤτοι παράλληλος τῷ ἄξονι τοῦ κύκλου (τ. ἔ. τῇ εὐθείᾳ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διερχομένῃ καὶ καθέτῳ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ).

Ἔτι γενικώτερον καλεῖται *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* πᾶσα ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπ' εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ δεδομένην καμπύλην, *ὁδηγὸν* καλουμένην, καὶ νὰ μένῃ ἀεὶ παράλληλος ἑαυτῇ.

Ὁ ρ ι σ μ ό ς.

577. *Τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐμβαδὸν* καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρίσματος, οὗ πᾶσαι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.

Θ ε ώ ρ η μ α.

578. *Τῆς κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγραφῇ πρίσμα, ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια, ἐπειδὴ θὰ ἀποτελῆται ἐξ ὀρθογωνίων, ἅτινα θὰ ἔχωσιν ὕψος μὲν τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου, θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἐπὶ τὸ ὕψος· ἐπειδὴ δέ, ὅταν ὁ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἀριθμὸς αὐξάνηται ἀπεριορίστως, ὥστε ἑκάστη τούτων νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν παράπλευρος τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν κυρτὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ἡ δὲ περίμετρος τῆς τοῦ πρίσματος βάσεως θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, συνάγεται ὅτι, ἂν ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως παρασταθῇ διὰ τοῦ Α, τὸ δὲ ὕψος τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ υ, ὁ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $Ε=2πΑ.υ$.

Παρατήρησις. Πρόδηλον εἶναι ὅτι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος περιγεγραμμένου περὶ κύλινδρον ἔχει ὅριον τὴν κυρτὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν.

Θεώρημα.

579. *Τοῦ κυλίνδρου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγραφῇ πρίσμα, ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου θὰ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος (594)· ἐπειδὴ δέ, ὅταν ἑκάστη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ὅριον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἕπεται ὅτι ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον τείνει προφανῶς ὁ ὄγκος πρίσματος περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύλινδρος εἶναι μείζων μὲν παντὸς πρίσματος ἐγγεγραμμένου, μικρότερος δὲ παντὸς πρίσματος περιγεγραμμένου, ἀναγκαίως ὁ κύλινδρος ἀποτελεῖ τὸ κοινὸν ὅριον τῶν τε ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων· ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα πρότασις.

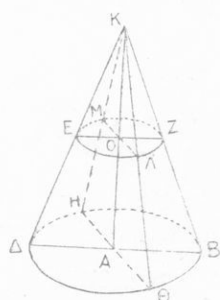
Λοιπόν, ἂν ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου παρασταθῇ διὰ τοῦ Α, τὸ δὲ ὕψος διὰ τοῦ υ, ὁ τὸν ὄγκον Ο τοῦ κυλίνδρου παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $Ο=πΑ^2.υ$.

Περὶ κώνου.

Ὁρισμοί.

580. *Κῶνος* λέγεται τὸ στερεὸν ὅπερ γίνεται ὑπὸ ὀρθογωνίου τριγώνου στρεφομένου περὶ τὴν ἑτέραν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.

Ἔστω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΑΒ στρέφεται περὶ τὴν ΚΑ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτοῦ θέσιν. Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ἡ μὲν κάθετος πλευρὰ ΑΒ γράφει τὸν κύκλον ΒΗΔΘ, οὗ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπὶ τὴν ΚΑ κάθετον, καλεῖται δὲ τοῦ κώνου *βάσις*, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΚΒ γράφει τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν. Τὸ σημεῖον δὲ Κ καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ *κώνου*, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μένουσα ἀκίνητος λέγεται *ἄξων* τοῦ κώνου. *Πλευρὰ* δὲ τοῦ κώνου λέγεται ἡ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσα.



Ἐν τῷ κώνῳ, πᾶσα μὲν τομὴ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, οἷον ἡ ΕΛΖΜ, εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, πᾶσα δὲ τομὴ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΚΗΘ, εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ τριγώνου ΚΑΒ διπλάσιον.

Πυραμὶς λέγεται ἐν κώνῳ *ἐγγεγραμμένη* ἂν ἔχῃ κορυφὴν μὲν τὴν τοῦ κώνου, βάσιν δὲ ἐγγεγραμμένην ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου.

Αἱ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ἡ δὲ πυραμὶς ἐντὸς τοῦ κώνου.

Πυραμὶς δὲ λέγεται περὶ κῶνον *περιγεγραμμένη* ἂν ἔχῃ κορυφὴν μὲν τὴν τοῦ κώνου, βάσιν δὲ περιγεγραμμένην περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Σημείωσις. Τὴν κυρτὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν παραγομένην ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ διαρκῶς τὴν περιφέρειαν κύκλου καὶ νὰ διέρχηται διὰ σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ *ἄξονος* τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς εὐθείας δηλαδὴ τῆς ἀγομένης καθέτως ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ.

Γενικῶς δὲ καλεῖται *κωνικὴ ἐπιφάνεια*, πᾶσα ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται ἀεὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ νὰ συναντᾷ δεδομένην καμπύλην, καλουμένην *ὁδηγόν*.

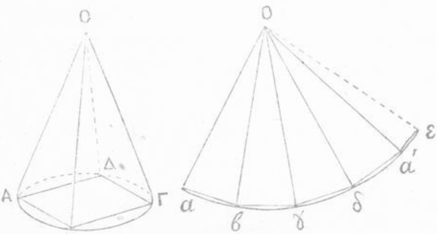
Ὁ ρ ι σ μ ό ς.

581. *Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας* καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης ἐν τῷ κώνῳ, ἧς πᾶσαι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν.

Θ ε ώ ρ η μ α.

582. *Τῆς κυρτῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐγγραφῇ ἐν τῷ κώνῳ κανονικὴ πυραμίς, οἷον ἡ ΟΑΒΓΔ, ἀναπτυχθῇ δὲ ἐπὶ ἐπιπέδου ἡ ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΑ συγκειμένη παράπλευρος αὐτῆς ἐπιφάνεια, τοῦ σχηματισθησομένου σχήματος ο α β γ δ α′ αἱ κορυφαὶ



α, β, γ, δ, α′ θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον μὲν τὸ ο, ἀκτῖνα δὲ ἴσην τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ ΟΑ· διότι αἱ εὐθεῖαι οα, οβ, ογ, οδ, οα′ εἶναι πρὸς τὴν τοῦ κώνου πλευρὰν ἴσαι. Ἐφ' ὅσον δὲ αἱ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ εἶναι βάσις τῆς πυραμίδος, πλευραὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν τούτου περίμετρος θὰ τείνῃ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ πρὸς ταύτην ἴση τεθλασμένη γραμμὴ $αϐ+ϐγ+γδ+\ldots$ θὰ τείνῃ πρός τι τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου κύκλου τόξον αε, οὗ τὸ ἀνάπτυγμα ἔσται ἴσον τῷ ἀναπτύγματι τῆς περιφερείας ΑΒΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο ἀπόστημα λ' τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης αϐγδ... θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν πλευρὰν λ τοῦ κώνου.

Λοιπὸν τὸ ἐμϐαδὸν $λ'.(αϐ+ϐγ+\ldots)$ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως Οαϐγδα' θὰ ἔχῃ ὅριον $λ.ὅρ(αϐ+ϐγ+\ldots)$, ἤτοι τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως οαε, ὅστις κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τομέως τούτου τὸ ἐμϐαδὸν εἶναι $\frac{1}{2}(οα).(τόξ.\,αε)$ ἢ $\frac{1}{2}(ΟΑ).$ (περιφ. βάσεως κώνου), ἕπεται (271) ὅτι, ἂν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α, ἡ δὲ τούτου πλευρὰ διὰ τοῦ λ, ὁ τὸ ἐμϐαδὸν Ε τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $Ε=\frac{λ}{2}\cdot 2πΑ$, ἢ $Ε=πΑ.λ.$

Παρατήρησις. Ἡ κυρτὴ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίσης τὸ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας Ε πυραμίδος ἡτινοσδήποτε ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης, ἧς αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τείνουν εἰς τὸ μηδέν.

Θεώρημα.

583. *Τοῦ κώνου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους.*

Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐν τῷ κώνῳ ἐγγραφῇ πυραμίς, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους (559). Ἐπειδὴ δέ, ὅταν ἑκάστη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ ἐμϐαδοῦ τοῦ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ὅριον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἕπεται ὅτι ὅριον τοῦ ὄγκου τῆς ῥηθείσης πυραμίδος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Πρὸς τὸ αὐτὸ δὲ ὅριον τείνει προφανῶς ὁ ὄγκος πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κῶνος εἶναι μείζων μὲν πάσης πυραμίδος ἐγγεγραμμένης, μικρότερος δὲ πάσης πυραμίδος περιγεγραμμένης, ἀναγκαίως ὁ κῶνος ἀποτελεῖ τὸ ὅριον τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πυραμίδων. Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα πρότασις.

Λοιπόν, ἂν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α, τὸ δὲ ὕψος τούτου διὰ τοῦ υ, ὁ τὸν ὄγκον Ο τοῦ κώνου παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $О = \frac{1}{3}\pi А^2 . υ$.

Περὶ κολούρου κώνου

Ὁρισμοί.

584. *Κόλουρος κῶνος* λέγεται τὸ μέρος τοῦ κώνου τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει τὸν κῶνον καὶ εἶναι τῇ βάσει παράλληλον.

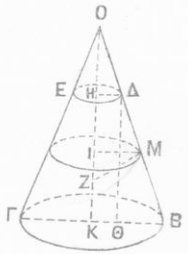
Τοῦ κολούρου κώνου *βάσεις* μὲν λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς οὓς περατοῦται, *ἄξων* δὲ ἢ *ὕψος* ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἑνοῦσα εὐθεῖα, *πλευρὰ* δὲ τὸ τμῆμα τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.

Θεώρημα.

585. *Τῆς τοῦ κολούρου κώνου κυρτῆς ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων.*

Διότι, ἐπειδὴ ἡ τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΓΔ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων ΟΒΓ καὶ ΟΔΕ, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν

ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. ΒΓΕΔ$=\pi$(ΚΒ).(ΟΒ) $-\pi$(ΗΔ).(ΟΔ).



Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΒ καὶ ΟΗΔ ἔχομεν ΟΒ : ΚΒ=ΟΔ : ΗΔ. (1)

Ἂν δὲ παρασταθῇ ἑκάτερος μὲν τῶν λόγων τούτων διὰ τοῦ ρ, αἱ δὲ τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ἀκτῖνες (ΚΒ) καὶ (ΗΔ) διὰ τῶν Α καὶ α καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ τοῦ λ, θὰ ἔχωμεν

(ΟΒ)$=\rho.$Α καὶ (ΟΔ)$=\rho.\alpha$ (2) καὶ ἄρα

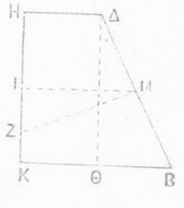
ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. ΒΓΕΔ$=\pi.A.\rho.A-\pi.\alpha.\rho.\alpha=\pi(A^2-\alpha^2)\rho$.

Ἀλλ' ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) ἔχομεν (ΟΒ)—(ΟΔ)$=\rho\,(A-\alpha)$, ἤτοι $\rho=\frac{\lambda}{A-\alpha}$ καὶ ἄρα

ἐμβ. κυρ. ἐπιφ. ΒΓΕΔ$=\pi(A^2-\alpha^2)\frac{\lambda}{A-\alpha}=\pi(A+\alpha).\lambda.$ (3)

Πόρισμα 1ον.

586. Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΙ τῇ ΒΚ παράλληλος, ἐκ τοῦ τραπεζίου ΒΚΗΔ θὰ ἔχωμεν 2(ΜΙ)$=A+\alpha$· ὁ τύπος ἄρα (3) γράφεται



2π (ΜΙ). λ. (4)

Λοιπὸν τῆς τοῦ κολούρου κώνου κυρτῆς ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τοῦ ἀπέχοντος τῶν δύο βάσεων ἴσον.

Πόρισμα 2ον.

587. Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ ἀχθῶσιν ἡ μὲν ΜΙ ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετος, ἡ δὲ ΜΖ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΔ, ἐκ δὲ τοῦ Δ ἡ ΔΘ τῷ ἄξονι τοῦ κώνου παράλληλος, τὰ σχηματισθησόμενα τρίγωνα ΔΘΒ καὶ ΜΙΖ θὰ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς καθέτους

ἑκάστην ἑκάστη, θὰ εἶναι ἄρα $(ΜΖ):(ΒΔ)=(ΜΙ):(ΔΘ)$,

ὅθεν $$(ΜΙ)\times(ΒΔ)=(ΜΖ)\times(ΔΘ).$$

Ὁ δὲ τύπος (4) γίνεται $2\pi(ΜΖ)\times(ΔΘ)$.

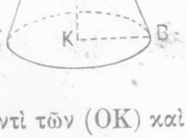
Λοιπὸν τῆς τοῦ κολούρου κώνου κυρτῆς ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ὑψουμένην ἐπ' αὐτὴν κάθετον μέχρι τοῦ ἄξονος.

Θεώρημα.

588. *Ὁ τοῦ κολούρου κώνου ὄγκος εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, οἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινὸν τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δὲ ὁ μὲν τὴν κάτω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν ἄνω, ὁ δὲ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.*

Διότι, ἐπειδὴ ὁ κόλουρος κῶνος ΒΓΕΔ εἶναι διαφορὰ τῶν κώνων ΟΒΓ καὶ ΟΔΕ, ἔπεται ὅτι

$$\text{ὄγκ. κολ. κών. } ΒΓΕΔ=\frac{1}{3}\pi(ΚΒ)^2.(ΟΚ)-\frac{1}{3}\pi(ΗΔ)^2.(ΟΗ) \quad (1).$$



Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΒ καὶ ΟΗΔ ἔχομεν $ΟΚ:ΚΒ=ΟΗ:ΗΔ$· (2)

παριστῶντες δὲ διὰ μὲν τοῦ ρ ἑκάτερον τῶν λόγων τούτων, διὰ δὲ τῶν Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἔχομεν

$$(ΟΚ)=\rho.Α \text{ καὶ } (ΟΗ)=\rho.\alpha. \quad (3)$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῶν (ΟΚ) καὶ (ΟΗ) τὰς τιμὰς αὐτῶν, εἰλημμένας ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3), θὰ ἔχωμεν

A^2 α^2

$$\text{ὄγκ. κολ. κών. } ΒΓΕΔ=\frac{1}{3}\pi(ΚΒ)^2.\rho.Α-\frac{1}{3}\pi(ΔΗ)^2.\rho.\alpha$$
$$=\frac{1}{3}\pi(Α^3-\alpha^3)\rho. \quad (4)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) προκύπτει

$$(\text{ΟΚ})-(\text{ΟΗ})=\rho\ (\text{Α}-\alpha)\ \text{ἤτοι}\ \rho=\frac{\upsilon}{\text{Α}-\alpha},\ \text{ἕπεται ὅτι}$$

$$\text{ὄγκ. κολ. κών. ΒΓΔΕ}=\frac{1}{3}\pi(\text{Α}^3-\alpha^3)\frac{\upsilon}{\text{Α}-\alpha}=\frac{1}{3}\pi(\text{Α}^2+\text{Α}\alpha+\alpha^2).\upsilon.$$

Λοιπὸν τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, διότι τὸ $\frac{1}{3}\pi\text{Α}^2.\upsilon$ παριστᾷ τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΒΓΒ, ὕψος δὲ τὸ υ· τὸ δὲ $\frac{1}{3}\pi\alpha^2.\upsilon$ παριστᾷ τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΔΕΔ, ὕψος δὲ τὸ υ· τὸ δὲ $\frac{1}{3}\pi\text{Α}\alpha.\upsilon$ παριστᾷ τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν μέσην ἀνάλογον πΑα τῶν βάσεων τοῦ κολούρου, ὕψος δὲ τὸ υ.

Σφαίρας μέτρησις.

Ὁρισμός.

589. *Σφαιρικὴ ζώνη* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Τῆς σφαιρικῆς ζώνης *βάσεις* μὲν λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς οὓς περατοῦται, *ὕψος* δὲ ἡ τῶν βάσεων ἀπόστασις.

Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

Σφαιρικὸν τμῆμα λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος *βάσεις* μὲν λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς οὓς περατοῦται, *ὕψος* δὲ ἡ τῶν βάσεων ἀπόστασις.

Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

Σφαιρικὸς τομεὺς λέγεται τὸ στερεόν, ὅπερ γίνεται ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως ἀνήκοντος εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον, ὅταν τοῦτο περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παράγῃ τὴν σφαῖραν.

Οὕτως, ἂν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΖΒ περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ἵνα γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ μὲν τόξον ΔΖ θὰ γράψῃ σφαιρικὴν ζώνην ἔχουσαν βάσεις μὲν τοὺς κύκλους τοὺς γραφομένους ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ζ καθέτων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΕΓ· τὸ δὲ μέρος ΔΓΔΖ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τμῆμα, ἔχον τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος· ὁ δὲ κυκλικὸς τομεὺς ΔΟΖ θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τομέα.

Θεώρημα.

590. *Τῆς ἐπιφανείας τῆς γινομένης ὑπὸ κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς περιστρεφομένης περὶ διάμετρον τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.*

Ἔστω κανονικὴ μὲν τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη ἐν τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἧς κέντρον εἶναι τὸ Κ ἡ ΑΒΓΔ, ἀκτὶς δὲ τοῦ ἐν τῇ τεθλασμένῃ γραμμῇ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ΚΙ, ἄξων δὲ τῆς περιστροφῆς ἡ ΖΗ.

Ἂν ἡ τεθλασμένη γραμμὴ περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς μὲν ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ ὀρθοῦ τραπεζίου ΑΡΣΒ γραφομένης κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου θὰ εἶναι (587) $2\pi(\mathrm{KI}).(\mathrm{P\Sigma})$, τῆς δὲ ὑπὸ τῆς ΒΓ θὰ εἶναι $2\pi(\mathrm{KI}).(\Sigma\mathrm{T})$, τῆς δὲ ὑπὸ τῆς ΓΔ θὰ εἶναι $2\pi(\mathrm{KI}).(\mathrm{TE})$.

Λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ γραφομένης ἐπιφανείας θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathrm{E}=2\pi(\mathrm{KI}).\Big((\mathrm{P\Sigma})+(\Sigma\mathrm{T})+(\mathrm{TE})\Big) \cdot \text{ἢ} \quad \mathrm{E}=2\pi(\mathrm{KI}).(\mathrm{PE}).$$

Πόρισμα.

591. Ἐὰν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀριθμὸν πλευρῶν ἄρτιον στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ, τὴν διὰ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν Ζ καὶ Η διερχομένην, τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς ἡμιπεριμέτρου ΖΑΓΗ γινομένης τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ἄξονος ΖΗ, ὅστις θὰ εἶναι ἅμα καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου διάμετρος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου,

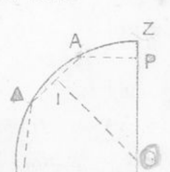
Ὁρισμός.

592. Τῆς σφαιρικῆς ζώνης *ἐμβαδὸν* καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ἣν παράγει περιστρεφομένη κανονικὴ τεθλασμένη γραμμή, ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τόξῳ τῷ γράφοντι τὴν ζώνην, καὶ ἧς πᾶσαι αἱ πλευραὶ τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν. Γ

Θεώρημα.

593. *Τῆς σφαιρικῆς ζώνης τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τῆς ζώνης ὕψος.*

Ἔστω ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γραφομένη ζώνη κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου ΖΑΒΗ περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ.



Ἂν ἐν τῷ τόξῳ ΑΒ ἐγγραφῇ κανονικὴ τεθλασμένη γραμμή, οἷον ἡ ΑΔΓΒ, ἀχθῶσι δὲ αἱ ἐκ τῶν ἄκρων Α, Β τοῦ τόξου ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΖΗ κάθετοι ΑΡ, ΒΠ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΔ κάθετος ΟΙ, παρασταθῇ δὲ διὰ τοῦ Ε ἡ ἐπιφάνεια ἡ γινομένη ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΔΓΒ, περιστρεφομένης περὶ τὴν ΖΗ, θὰ ἔχωμεν $E=2\pi(OI).(\Pi P)$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γινομένης ζώνης εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τῆς ἐν τῷ τόξῳ τούτῳ ἐγγεγραμμένης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ ταύτης τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἂν λάβωμεν τὸ ὅριον τοῦ ἄνω γινομένου, ἤτοι τὸ γινόμενον 2π. ὅρ(ΟΙ).(ΠΡ).

Λοιπόν, ἐπειδὴ ὅριον τοῦ ἀποστήματος εἶναι ἡ τοῦ κύκλου ἀκτίς, ἂν ἡ μὲν τῆς σφαίρας ἀκτὶς παρασταθῇ διὰ τοῦ Α, τὸ δὲ τῆς ζώνης ὕψος διὰ τοῦ υ, ὁ τὴν ἐπιφάνειαν Ε τῆς σφαιρικῆς ζώνης παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $E=2\pi A.\ \upsilon$.

Ἐὰν δὲ τὸ τὴν ζώνην γράφον τόξον ὑποτεθῇ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ, τὸ μὲν τῆς ζώνης ὕψος θὰ εἶναι 2Α, ὁ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντιστοίχου ζώνης, ἤτοι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, παριστῶν τύπος θὰ εἶναι $4\pi A^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πA^2 παριστᾷ τὸ μεγίστου κύκλου ἐμβαδόν, ἕπεται ὅτι *ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον τῷ τετραπλασίῳ ἐμβαδῷ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου.*

Πόρισμα 1ον.

594. *Τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο ζῶναι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ αὐτῶν ὕψη.*

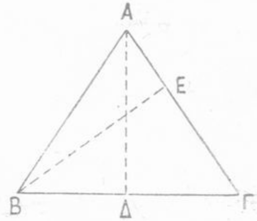
Πόρισμα 2ον.

595. *Δύο σφαιρῶν αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἑαυτῶν ἀκτίνων.*

Θεώρημα.

596. *Τρίγωνον ἐὰν περιστραφῇ περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἑαυτοῦ ἐπιπέδῳ διερχόμενον δὲ διά τινος τῶν τούτου κορυφῶν χωρὶς νὰ τέμνῃ αὐτό, θὰ σχηματισθῇ στερεόν, οὗ ὁ ὄγκος θὰ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας, ἣν σχηματίζει ἡ ἀπέναντι τῆς ληφθείσης κορυφῆς πλευρά, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην ἀντιστοιχοῦντος.*

1ον Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ἑαυτοῦ πλευρὰν ΒΓ. Ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐξ ὧν, περὶ τὴν ΒΓ περιστρεφομένων, θὰ σχηματισθῶσι δύο κῶνοι, οἵτινες θὰ ἔχωσι βάσιν μὲν κοινήν, ἤτοι τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα τὴν ΑΔ, ὕψη δὲ τὰ δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ τῆς βάσεως ΒΓ· θὰ ἔχωμεν ἄρα



$$\text{ὄγκ.}AB\Gamma=\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2.(B\Delta)+\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2.(\Delta\Gamma)=\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2.(B\Gamma).$$

Ἂν δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἀχθῇ ἡ ΒΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος, θὰ ἔχωμεν (186) $(B\Gamma).(A\Delta)=(A\Gamma).(BE)$.

Ἂν δὲ ἐν τῇ τοῦ ὄγκου τιμῇ ἀντὶ τοῦ γινομένου $(B\Gamma).(A\Delta)$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ γινόμενον $(A\Gamma).(BE)$, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ. }AB\Gamma=\frac{1}{3}\pi(A\Delta).(A\Gamma).(BE).$$

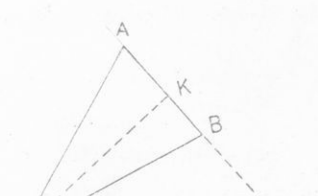
Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν γινόμενον $\pi(A\Delta).(A\Gamma)$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἣν γράφει ἡ ΑΓ (582), ἡ δὲ ΒΕ εἶναι τὸ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην ἀντιστοιχοῦν τοῦ τριγώνου ὕψος, ἕπεται ὅτι

$$\text{ὄγκ. }AB\Gamma=(\text{ἐπιφ. }A\Gamma)\times\frac{1}{3}(BE).$$

2ον Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα ΓΔ, τέμνοντα κατὰ τὸ σημεῖον Δ τὴν πλευρὰν ΑΒ προεκβληθεῖσαν.

Ἂν ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ. }AB\Gamma=\text{ὄγκ. }A\Gamma\Delta-\text{ὄγκ. }B\Gamma\Delta.$$

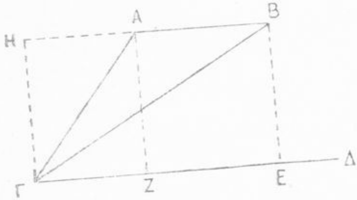


Ἀλλὰ $$\text{ὄγκ. }A\Gamma\Delta=(\text{ἐπιφ. }A\Delta).\frac{1}{3}(\Gamma K)$$

καὶ $$\text{ὄγκ. }B\Gamma\Delta=(\text{ἐπιφ. }B\Delta).\frac{1}{3}(\Gamma K).$$

Λοιπόν, ὄγκ. $ΑΒΓ=[(\text{ἐπιφ.}ΑΔ)-(\text{ἐπιφ. } ΒΔ)].\frac{1}{3}(ΓΚ)$

ἤτοι $$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ=(\text{ἐπιφ. } ΑΒ).\frac{1}{3}(ΓΚ).$$



3ον Ἔστω ὅτι ἡ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ πλευρὰ ΑΒ εἶναι τῷ ἄξονι ΓΔ παράλληλος.

Ἂν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα ΓΔ κάθετοι, αἱ ΑΖ, ΒΕ, προφανὲς εἶναι ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ=\text{ὄγκ. } ΑΖΕΒ+\text{ὄγκ. } ΑΓΖ-\text{ὄγκ.}ΒΓΕ.$$

Ἐπειδὴ δὲ $$\text{ὄγκ. } ΑΖΕΒ=\pi(ΑΖ)^2.(ΖΕ)$$

$$\text{ὄγκ. } ΑΓΖ=\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2.(ΓΖ),$$

καὶ $$\text{ὄγκ. } ΒΓΕ=\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2.(ΓΕ),$$

ἕπεται ὅτι $\text{ὄγκ. } ΑΒΓ=\pi(ΑΖ)^2.\left[(ΖΕ)+\frac{1}{3}(ΓΖ)-\frac{1}{3}(ΓΕ)\right].$

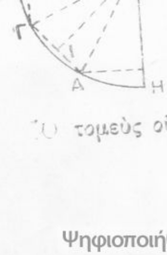
Ἐπειδὴ δὲ $(ΓΕ)-(ΓΖ)=(ΖΕ)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ=\pi(ΑΖ)^2.\frac{2}{3}(ΖΕ)=2\pi(ΑΖ)(ΖΕ).\frac{1}{3}(ΑΖ)$$

ἤτοι $$\text{ὄγκ. } ΑΒΓ=(\text{ἐπιφ. } ΑΒ)\times\frac{1}{3}(ΓΗ).$$

Θεώρημα.

597. *Ὁ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ὄγκος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι τούτου βάσις, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*



Ἔστω ὁ σφαιρικὸς τομεὺς ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ, περιστρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΖΗ.

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἀχθῶσι δὲ αἱ τούτων χορδαί, θὰ προκύψῃ πολυγωνικὸς τομεύς, οἷος ὁ ΟΑΓΔΒ.

Ὁ τομεὺς οὗτος ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ σχηματίσῃ στερεὸν οὗ ὁ ὄγκος θὰ εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν ἅτινα θὰ προκύψωσιν ἐκ τῶν ἴσων καὶ ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΒ, ἐξ ὧν ὁ τομεὺς ἀποτελεῖται· θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$\text{ὄγκ. ΟΑΓΔΒ}=(\text{ἐπιφ. ΑΓ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΙ})+(\text{ἐπιφ. ΓΔ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΙ})$$

$$+(\text{ἐπιφ. ΔΒ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΙ})$$

$$=[(\text{ἐπιφ. ΑΓ})+(\text{ἐπιφ. ΓΔ})+(\text{ἐπιφ. ΔΒ})].\frac{1}{3}(\text{ΟΙ}),$$

ἤτοι

$$\text{ὄγκ. ΟΑΓΔΒ}=(\text{ἐπιφ. ΑΓΔΒ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΙ}).$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν ἔχει ὅριον τὸ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως γραφόμενον, τουτέστι τὸν σφαιρικὸν τομέα· θὰ εἶναι ἄρα

$$\text{ὄγκ.σφαιρ.τομ. ΟΑΒ}=\text{ὅρ.}\left[(\text{ἐπιφ. ΑΓΔΒ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΙ})\right].$$

Ἀλλὰ τῆς μὲν ἐπιφ. ΑΓΔΒ ὅριον εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΒΑ γινομένη σφαιρικὴ ζώνη, τοῦ δὲ ἀποστήματος ΟΙ ὅριον εἶναι ἡ ἀκτὶς ΟΑ. Θὰ εἶναι ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφ. τομ. ΑΟΒ}=(\text{ζών. ΑΒ}).\frac{1}{3}(\text{ΟΑ}).$$

Πόρισμα.

598. *Ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἑαυτῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

Διότι, ἂν τὸ τόξον ΑΒ ὑποτεθῇ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΗΑΖ, ὁ μὲν τομεὺς ΑΟΒ θὰ εἶναι ἴσος τῷ ἡμικυκλίῳ, ὁ δὲ ὑπ' αὐτοῦ σχηματισθησόμενος σφαιρικὸς τομεὺς θὰ εἶναι ὅλη ἡ σφαῖρα.

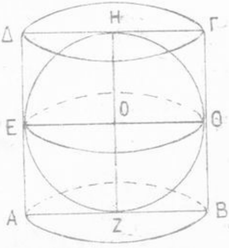
Λοιπόν, ἂν ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς παρασταθῇ διὰ τοῦ Α, ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶναι $4\pi A^2$ (593), *ὁ τὸν ὄγκον Ο τῆς σφαίρας παριστῶν τύπος θὰ εἶναι* $O=4\pi A^2.\frac{1}{3}A=\frac{4}{3}\pi A^3$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι δύο σφαιρῶν οἱ ὄγκοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον καὶ οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Θεώρημα.

599. *Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὃν λόγον καὶ ὁ ἀριθμὸς 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι καὶ οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τούτων.*

Ἔστω ΕΖΘΗ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος καὶ ΑΒΓΔ τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἂν περιστραφῶσι συγχρόνως περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ τό τε ἡμικύκλιον ΖΘΗ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΖΒΓΗ, ὑπὸ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γίνῃ ἡ σφαῖρα, ὑπὸ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου ὁ κύλινδρος, ὅστις θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν καὶ θὰ ἐγγίζῃ αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η, ὡς καὶ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΘΕ.



Τοῦ κυλίνδρου δὲ τούτου τὸ μὲν ὕψος ΑΔ εἶναι ἴσον τῇ διαμέτρῳ ΖΗ, ἡ δὲ βάσις εἶναι ἴση πρὸς μέγιστον κύκλον, διότι ἔχει τὴν διάμετρον ΑΒ ἴσην τῇ ΕΘ· κατ' ἀκολουθίαν, ἂν διὰ τοῦ Α παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τῆς μὲν κυρτῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $2\pi A . 2A$, ἤτοι $4\pi A^2$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων θὰ εἶναι $2\pi A^2$. Ἡ ὅλη ἄρα τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι $6\pi A^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια εἶναι $4\pi A^2$, ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐπιφ. σφ.} : \text{ἐπιφ. περιγ. κυλ.} = 4\pi A^2 : 6\pi A^2 = 2 : 3.$$

Ὡσαύτως δέ, ἐπειδὴ τῆς μὲν σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{4}{3} . \pi A^3$, τοῦ δὲ κυλίνδρου $\pi A^2 . \; 2A$, ἤτοι $2\pi A^3$, ἕπεται ὅτι

$$\text{ὄγκ. σφ.} : \text{ὄγκ. περιγ. κυλ.} = \frac{4}{3}\pi A^3 : 2\pi A^3 = \frac{4}{3} : 2 = 2 : 3.$$

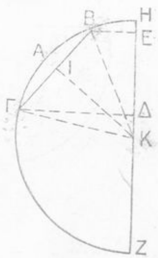
Σημείωσις. Ἂν πολυέδρου πᾶσαι αἱ ἕδραι ἐφάπτωνται σφαίρας, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς ὅλης αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ πολύεδρον τοῦτο δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πυραμίδας ἐχούσας βάσεις μὲν τὰς διαφόρους ἕδρας τοῦ πολυέδρου, κορυφὴν δὲ κοινὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὥστε ἑκάστης αὐτῶν ὕψος νὰ εἶναι ἡ τῆς σφαίρας ἀκτίς, ἕπεται ὅτι ἑκάστης πυραμίδος ὁ ὄγκος θὰ εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς ἕδρας, ἥτις εἶναι βάσις αὐτῆς, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος, συνάγεται ὅτι τῶν δύο τούτων στερεῶν οἱ ὄγκοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

Θεώρημα.

600. *Κυκλικὸν τμῆμα, ἂν στραφῇ περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτό, παράγει στερεόν, οὗ ὁ ὄγκος ἰσοῦται τῷ ἕκτῳ τοῦ γινομένου τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.*



Ἔστω τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΑΓ. Ἂν ἀχθῶσιν ἐκ μὲν τῶν τοῦ τμήματος ἄκρων Β, Γ αἱ ΒΕ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΖΗ κάθετοι, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἡ ΚΙ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ κάθετος, ἔτι δὲ αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΚΓ, τὸ ὑπὸ τοῦ τμήματος ΒΑΓ παραχθησόμενον στερεὸν θὰ εἶναι διαφορὰ τῶν στερεῶν ἅτινα θὰ παραχθῶσιν ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΚΒΑΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΚΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ

$$\text{ὄγκ. σφ. τομ.}ΚΒΓ=(\text{ζών.}ΒΓ).\frac{1}{3}(ΚΒ)=\frac{2}{3}\pi(ΚΒ)^2.(ΔΕ).$$

καὶ $$\text{ὄγκ. τριγ.}ΚΒΓ=(\text{ἐπιφ.}ΒΓ).\frac{1}{3}(ΚΙ)=\frac{2}{3}\pi(ΚΙ)^2.(ΔΕ).$$

ἕπεται ὅτι ὄγκ. τμήμ. $ΒΑΓ=\frac{2}{3}\pi\Big((ΚΒ)^2-(ΚΙ)^2\Big).(ΔΕ)$

$$=\frac{2}{3}\pi(ΒΙ)^2.(ΔΕ)=\frac{2}{3}\pi\frac{(ΒΓ)^2}{4}.(ΔΕ)=\frac{1}{6}\pi(ΒΓ)^2.(ΔΕ).$$

Σημείωσις. Ἂν τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΑΓ ὑποτεθῇ ἴσον τῷ ἡμικυκλίῳ ΗΓΖ, τὸ ὑπ᾿ αὐτοῦ γινόμενον στερεὸν θὰ εἶναι ἡ ὅλη σφαῖρα· ἐπειδὴ δὲ ἡ χορδὴ καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον εἶναι ἴσαι τῇ διαμέτρῳ ταύτῃ, ἕπεται ὅτι ὁ τῆς σφαίρας ὄγκος θὰ εἶναι $\frac{1}{6}\pi(ΖΗ)^2.(ΖΗ)$ ἢ $\frac{1}{6}\pi(ΖΗ)^3$. Ἂν δὲ ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τῆς (ΖΗ) ἡ ἴση αὐτῆς 2(ΚΒ), ὁ τὸν ὄγκον Ο δίδων τύπος γίνεται $Ο=\frac{4}{3}\pi(ΚΒ)^3$, ὡς καὶ προηγουμένως εὑρέθη.

Θεώρημα.

601. *Ὁ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ὄγκος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τοῦ γινομένου τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος σὺν τῷ ὄγκῳ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.*

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τμῆμα τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ μέρους ΒΑΓΔΕ τοῦ ἡμικυκλίου ΗΓΖ περιστρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ. Ἐπειδὴ τὸ σφαιρικὸν τοῦτο τμῆμα εἶναι ἄθροισμα τῶν στερεῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΑΓ καὶ τοῦ τραπεζίου ΕΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ὄγκ.ΒΑΓΔΕ=ὄγκ.ΒΑΓ+ὄγκ.ΒΓΔΕ.

Ἀλλὰ ὄγκ.$ΒΑΓ=\frac{1}{6}\pi(ΒΓ)^2.(ΔΕ)$

καὶ ὄγκ. $ΒΓΔΕ=\frac{1}{3}\pi\Big((ΒΕ)^2+(ΓΔ)^2+(ΒΕ).(ΓΔ)\Big).(ΔΕ)$. Ὅθεν

ὄγκ.$ΒΑΓΔΕ=\frac{1}{6}\pi\Big((ΒΓ)^2+2(ΒΕ)^2+2(ΓΔ)^2+2(ΒΕ).(ΓΔ)\Big)(ΔΕ)$.(1)

Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΠ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος, θὰ ἔχωμεν

$$(\mathrm{B\Gamma})^2=(\mathrm{B\Pi})^2+(\Gamma\Pi)^2=(\Delta\mathrm{E})^2+[(\Gamma\Delta)-(\mathrm{BE})]^2$$

ἤτοι $$(\mathrm{B\Gamma})^2=(\Delta\mathrm{E})^2+(\Gamma\Delta)^2+(\mathrm{BE})^2-2(\Gamma\Delta).(\mathrm{BE}). \qquad (2)$$

Ἂν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (1) ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ $(\mathrm{B\Gamma})^2$ τὴν τιμὴν αὐτοῦ (2), θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ. } \mathrm{BA\Gamma\Delta E}=\frac{1}{6}\pi\,[3(\mathrm{BE})^2+3(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{E})^2].(\Delta\mathrm{E})$$

ἢ $$\text{ὄγκ. } \mathrm{BA\Gamma\Delta E}=\frac{1}{2}\,[\pi(\mathrm{BE})^2+\pi(\Gamma\Delta)^2].(\Delta\mathrm{E})+\frac{1}{6}\pi(\Delta\mathrm{E})^3.$$

Περὶ τοῦ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων ἐμβαδοῦ.

Ὁρισμοί.

602. *Ἄτρακτος* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων.

Σφαιρικὸς ὄνυξ λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων.

Βάσις δὲ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος ὁ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων περιλαμβανόμενος.

Ὁ ἄτρακτος δὲ καὶ ὁ ὄνυξ λέγονται ἢ *ὀρθογώνιοι* ἢ *ὀξυγώνιοι* ἢ *ἀμβλυγώνιοι*, ἂν ἡ ὑπὸ τῶν ἡμικυκλίων σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἢ ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Σφαιρικὴ πυραμὶς λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ἑδρῶν στερεᾶς γωνίας, ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. *Βάσις* τῆς σφαιρικῆς πυραμίδος λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ὁριζόμενον.

Θεώρημα.

603. *Δύο ἄτρακτοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον καὶ αἱ ἑαυτῶν γωνίαι.*

Διότι εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν ἡ γωνία τῶν ἡμικυκλίων διπλασιασθῇ θὰ διπλασιασθῇ καὶ ὁ ἄτρακτος, ἂν δὲ τριπλασιασθῇ θὰ τριπλασιασθῇ καὶ ὁ ἄτρακτος, καὶ ἐφεξῆς οὕτω διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Πόρισμα.

604. *Ἂν τῶν ἀτράκτων μονὰς ληφθῇ ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος, παντὸς ἀτράκτου μέτρον θὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς τούτου γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν.*

Διότι, ἂν ὁ δεδομένος ἄτρακτος εἶναι ὁ Α, ἡ δὲ τούτου γωνία ἡ Γ, ὁ δὲ ὀρθογώνιος ἄτρακτος ὁ Α′, θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{A} : \mathrm{A}' = \Gamma : 1^{\text{ὀρθ.}}.$$

Ἂν δὲ τῶν ἀτράκτων μονὰς ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ἀτράκτου, ἤτοι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, παντὸς ἀτράκτου μέτρον θὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ λόγου τῆς τούτου γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν.

Σημείωσις. Ἐπειδή, ὅταν οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀντίστοιχοι σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὃν λόγον καὶ οἱ ἀντίστοιχοι ἄτρακτοι, τουτέστιν ὃν λόγον καὶ αἱ γωνίαι τῶν ἀντιστοίχων ἀτράκτων.

Ἂν δὲ τοῦ ὄγκου τῶν σφαιρικῶν ὀνύχων μονὰς ληφθῇ ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, θὰ εὕρωμεν ὅτι τοῦ ὄνυχος μέτρον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ λόγου τῆς τούτου γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν.

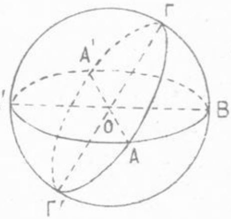
Θεώρημα.

605. *Ἂν τρεῖς μέγιστοι κύκλοι καθ' ὁντιναδήποτε τρόπον ἐν τῇ σφαίρᾳ τέμνωνται, δύο τῶν σχηματιζομένων κατὰ κορυφὴν τριγώνων (ἤτοι ἐχόντων μόνον μίαν κορυφὴν κοινὴν) τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ ἀτράκτῳ τῷ ἔχοντι τὴν τῆς κοινῆς κορυφῆς γωνίαν.*

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς μέγιστοι κύκλοι ΑΒΑ′Β′, ΑΓΑ′Γ′, ΒΓΒ′Γ′, οἵτινες τέμνουσι τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν εἰς ὀκτὼ τρίγωνα.

Λέγω ὅτι, ἂν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων λάβωμεν δύο κατὰ κορυφήν, οἷον τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΑΒ′Γ′, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον τῷ ἀτράκτῳ τῷ ἔχοντι τὴν γωνίαν ΒΑΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒ΄Γ΄ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι συμμετρικά, ἕπεται ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα (459).



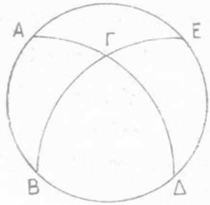
Λοιπόν, ἂν ἐν τῷ ἀθροίσματι ΑΒΓ+ΑΒ΄Γ΄ ἀντὶ τοῦ ΑΒ΄Γ΄ ἀντικαταστήσωμεν τὸ τούτῳ ἰσοδύναμον Α΄ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ΑΒΓ+ΑΒ΄Γ΄=ΑΒΓ+Α΄ΒΓ=ἄτρ.ΒΑΓ.

Θεώρημα.

606. *Ἂν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων μονὰς ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι ἴσον τῷ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν λόγῳ τῆς διαφορᾶς ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν.*

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δεδομένον σφαιρικὸν τρίγωνον.

Ἂν ἡ μὲν τῆς πλευρᾶς ΑΒ περιφέρεια συμπληρωθῇ, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΓ,ΒΓ προεκταθῶσι μέχρις οὗ συναντήσωσι τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒΔΕ, τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἔχον βάσιν τὸν μέγιστον τοῦτον κύκλον καὶ ἐν ᾧ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται, θὰ ἔχῃ ἐπιφάνειαν ἀποτελουμένην ἐκ τῶν τεσσάρων τριγώνων ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, ΕΓΑ· θὰ εἶναι δὲ



ΑΒΓ+ΒΓΔ=ἄτρ.Α, ΑΒΓ+ΑΓΕ=ἄτρ.Β, ΑΒΓ+ΓΔΕ=ἄτρ.Γ.

Ἂν δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη προσθέσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$2\text{ΑΒΓ}+\frac{1}{2}\ \text{ἐπιφ. σφαίρας}=\text{ἄτρ.Α}+\text{ἄτρ.Β}+\text{ἄτρ.Γ}.$$

Ἂν δὲ μετρήσωμεν αὐτὰ διὰ τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν (604)

$$2(\text{ΑΒΓ})+4=2\text{Α}+2\text{Β}+2\text{Γ},$$

ἔνθα τὰ γράμματα Α,Β,Γ παριστῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διὰ τῆς ὀρθῆς.

Λοιπὸν θὰ εἶναι $(\text{ΑΒΓ})=\text{Α}+\text{Β}+\text{Γ}-2.$

Σημείωσις 1η. Ἂν αἱ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίαι δοθῶσιν εἰς μοίρας, τὸ τούτου ἐμβαδὸν θὰ εὑρεθῇ ὅτι ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὃν ἔχει πρὸς τὰς 90^0 ἡ διαφορὰ ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως 180^0 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τούτου γωνιῶν.

Ἐπὶ δὲ παραδείγματος, ἂν τριγώνου τινὸς αἱ γωνίαι εἶναι $A=73^010'$, $B=40^0$, $\Gamma=97^020'$, ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτων διαφορὰ τῶν 180^0 εἶναι $30^0\,30'$, ὁ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου παριστῶν ἀριθμὸς θὰ εἶναι $\frac{30^030'}{90^0}=\frac{61}{180}$, ἤτοι τὸ δεδομένον τρίγωνον θὰ εἶναι τὰ $\frac{61}{180}$ τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου.

Σημείωσις 2α. Ἐπειδὴ τὰ διὰ τοὺς ἀτράκτους καὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἀποδειχθέντα θεωρήματα (603, 604, 605) ἀληθεύουσιν, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, καὶ διὰ τοὺς σφαιρικοὺς ὄνυχας καὶ τὰς σφαιρικὰς πυραμίδας, συνάγεται ὅτι, ἐὰν μονὰς τοῦ ὄγκου ληφθῇ ἡ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς, πᾶσα τριγωνικὴ σφαιρικὴ πυραμὶς ἔχει μέτρον τὸν πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν λόγον τῆς διαφορᾶς ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τῆς ἑαυτῆς βάσεως.

Πόρισμα.

607. *Παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τῷ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν λόγῳ τῆς διαφορᾶς ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοσάκις δύο ὀρθῶν γωνιῶν ὅσαι εἶναι αἱ τούτου πλευραὶ πλὴν δύο ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τούτου γωνιῶν.*

Ἡ ἀπόδειξις τούτου γίνεται ὡς καὶ ἡ ἐν τῷ θεωρήματι 191.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

1). Ὑπολογίσαι τὴν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗ αἱ διαστάσεις εἶναι 3 πήχεων, 2 πήχεων καὶ 5 πήχεων. ('Απ. $\sqrt{38}=6$ πχ., 164...)

2). Εὑρεῖν τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου, οὗ ἡ ὅλη ἐπιφάνεια εἶναι ἑνὸς τετραγωνικοῦ πήχεως. $\left(\text{'Απ. } \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3). Ὑπολογίσαι τὴν ἀκμὴν τοῦ κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, οὗ τὸ μὲν ὕψος εἶναι ἴσον τῇ πλευρᾷ τῆς βάσεως, ὁ δὲ ὄγκος ἑνὸς κυβικοῦ πήχεως. ('Απ. 1 πχ., 320...)

4). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, οὗ τὸ μὲν ὕψος εἶναι 5πχ., 80, ἡ δὲ βάσις κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν 2πχ., 30. ('Απ. 79 κ. πχ., 714...)

5). Ὑπολογίσαι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, οὗ ὁ μὲν ὄγκος εἶναι 1κ. πχ., ἡ δὲ βάσις κανονικὸν ὀκτάγωνον ἔχον πλευρὰν 1 πήχεως. $\left(\text{'Απ. } \frac{\sqrt{2}}{4}=0 \text{ πχ., } 353...\right)$

6). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, οὗ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εἶναι 24 τ. πχ., ἡ δὲ βάσις ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν 6 τ. πχ., ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως. ('Απ. $6\,(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=6$ κ.πχ.,087....)

7). Ὑπολογίσαι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, οὗ ἡ μὲν βάσις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, ὁ δὲ ὄγκος 3 κ. πχ., ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια 12 τ. πχ.. ('Απ. $2\sqrt{3}=3$πχ.,4641....)

8). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, οὗ ἡ μὲν βάσις εἶναι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα ἑνὸς πήχεως, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως. ('Απ. $2\sqrt{2}=2$κ. πχ.,828....)

9). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, οὗ ἡ μὲν βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τῷ ἔχοντι ἀκτῖνα ἑνὸς πήχεως, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου τούτου. $\left(\text{'Απ. } \frac{9}{4}=2^{\text{κ.π.}},250...\right)$

10). Διαιρέσαι παραλληλεπίπεδον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα, δι' ἐπιπέδων ἠγμένων διὰ μιᾶς αὐτοῦ ἀκμῆς.

11). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, ἧς ἡ βάσις ἔχει πλευρὰν 4 πήχεων, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι δεκαπενταπλασία τῆς βάσεως.

$(\text{'Απ. } 3.4^3\sqrt{14}=718^{\text{κ. πχ.}}, 272....)$

12). Ἐν πυραμίδι, ἧς ἡ τῆς κορυφῆς γωνία εἶναι τρισορθογώνιος, ἀποδεῖξαι ὅτι

1ον) προβολὴ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως,

2ον) ἑκάστη τῶν ἑδρῶν εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ

3ον) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς βάσεως.

13). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τῆς ἐν Αἰγύπτῳ μεγάλης πυραμίδος, ἧς ἡ μὲν βάσις εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 230 πήχεων, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι τρίγωνα ἰσόπλευρα.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{230^3\sqrt{2}}{6}=2867356^{\text{κ. πχ.}},...\right)$$

14). Ὑπολογίσαι τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἧς ἡ μὲν βάσις εἶναι τετράγωνον, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι τρίγωνα ἰσόπλευρα, ὁ δὲ ὄγκος ἑνὸς κυβ. πήχεως.

$$\left(\text{'Απ. } \sqrt[3]{3\sqrt{2}}=1^{\text{πχ.}},619...\right)$$

15). Ἐν δεδομένῃ πυραμίδι ἐχούσῃ ὕψος 142 πήχεων, εὑρεῖν εἰς τίνας ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀποστάσεις πρέπει νὰ ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα τῇ βάσει, ὥστε ὁ τῆς πυραμίδος ὄγκος νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα; $(\text{'Απ. } 98^{\text{πχ.}},45... \text{ καὶ } 124^{\text{πχ.}},04....)$

16). Ὑπολογίσαι τὴν ἀκμήν, τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος ἧς τὸ μὲν ὕψος εἶναι 10 πήχεων, ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως 2 πήχεων.

('Απ. 10πχ.,197..., 60τ.πχ.,888... καὶ 34κ.πχ.,641...)

17). Ὑπολογίσαι τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἧς ἡ μὲν πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 3πχ., ἡ δὲ ἀκμὴ 5 πχ. $\left(\text{'Απ. } 25^{\tau.\pi\chi.},3575\ldots \text{ καὶ } \frac{3.\sqrt{66}}{4}=6^{\kappa.\pi\chi.},093..\right)$

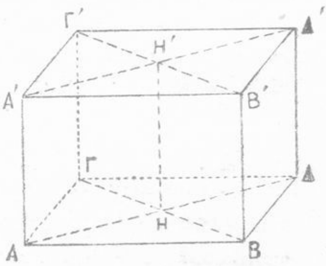
18). Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν τετραγωνικὴν βάσιν τῆς κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ἐχούσης ἀκμὴν μὲν ἴσην τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου, ὄγκον δὲ 3 κυβικῶν πήχεων. $\left(\text{'Απ. } \sqrt[3]{\frac{9}{2}}=1^{\pi\chi.}, 65\ldots\right)$

19). Ὑπολογίσαι τὴν ἀκμὴν τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου, οὗ ὁ ὄγκος εἶναι 10 κυβικῶν πήχεων. $\left(\text{'Απ. } \sqrt[3]{60\sqrt{2}}.\right)$

20). Ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ ὀρθογωνίου ΑΒΔΓ ὑψωθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου καὶ προεκταθῶσι μέχρις οὗ συναντήσωσιν ἕτερον ἐπίπεδον εἰς τὰ σημεῖα Α',Β',Γ',Δ',

1ον ἀποδεῖξαι ὅτι τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις(ΑΑ')+(ΔΔ')=(ΒΒ')+(ΓΓ'),

2ον ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ', δεδομένου μόνον ὅτι (ΑΒ)=α, (ΑΓ)=β,(ΑΑ')=γ καὶ (ΔΔ')=δ.



$\left(\text{'Απ. } \frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)}{2}.\right)$

21). Ἀποδεῖξαι ὅτι τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου καὶ ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀκταέδρου τούτου, ὅταν ἡ τοῦ κύβου ἀκμὴ εἶναι α.

$\left(\text{'Απ. } \frac{\alpha^3}{6} \text{ καὶ } \alpha^2\sqrt{3}.\right)$

22). Ὑπολογίσαι τὰς ἀκμὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος ὄγκον μὲν 1κ.πχ., ἀκμὰς δὲ ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 5. (Ἀπ. 0πχ., 76..., 1πχ., 02.., καὶ 1πχ., 27...)

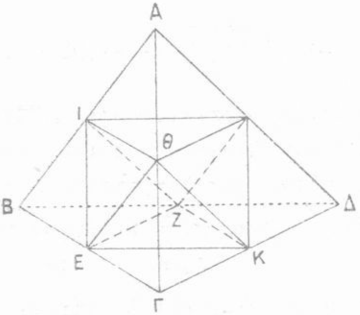
23). Ἀποδεῖξαι ὅτι αἱ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τομαὶ πρίσματος εἶναι πολύγωνα ἴσα.

24). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς στήλης τῆς ἐχούσης περίμετρον μὲν 1πχ.,56, ὕψος δὲ 8πχ.,40.
(Ἀπ. 1κ.πχ.,475...)

25) Ἀποδεῖξαι ὅτι ἐν παντὶ τετραέδρῳ αἱ τὰ μέσα τῶν ἀντικειμένων ἀκμῶν ἑνοῦσαι τρεῖς εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τούτων.

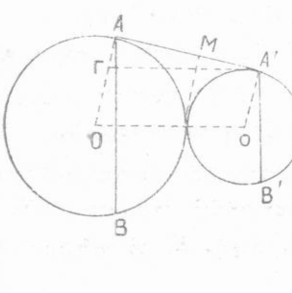
26) Εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων ἐχόντων ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας καὶ ὕψη υ καὶ υ'. (Ἀπ. $\frac{O}{O'}=\frac{υ'}{υ}$.)

27). Ἀποδεῖξαι ὅτι δύο ὁμοίων κυλίνδρων (ὧν δηλαδὴ τὰ ὕψη ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον καὶ αἱ τῶν βάσεων ἀκτῖνες) αἱ μὲν κυρταὶ ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, οἱ δὲ ὄγκοι ὃν λόγον οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων.



28). Ἀποδεῖξαι ὅτι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραέδρου.

29). Δεδομένων δύο σφαιρῶν Ο, Ο' ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐκτὸς καὶ τοῦ περὶ τὰς σφαίρας περιγεγραμμένου κώνου, εὑρεῖν



1ον) τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΒ'Α', τοῦ ἔχοντος βάσεις τοὺς κύκλους τῆς ἐπαφῆς (Ἀπ. 4παα'), καὶ

2ον) ἐν τίνι περιπτώσει ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι μεγίστη, ὅταν αἱ μὲν ἀκτῖνες μεταβάλλωνται, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν μένῃ σταθερόν.

30). Ἀποδεῖξαι ὅτι τοῦ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου (τοῦ ἔχοντος δηλαδὴ πλευρὰν ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ). Ἔτι δὲ ὅτι ἡ αὐτὴ σχέσις ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν ὄγκων τῶν τριῶν τούτων στερεῶν.

31). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον σφαίρας, δεδομένου ὅτι τοῦ ὄγκου ταύτης καὶ τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου κύβου ἡ διαφορὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα κυβικὸν πῆχυν. ('Απ. 3κ. πχ., 079...).

32). Ἐν κολούρῳ κώνῳ, ἔχοντι ἀκτῖνας μὲν τῶν βάσεων 5πχ καὶ 2πχ, ὕψος δὲ 4πχ, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς τομῆς ἥτις γίνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου ταῖς βάσεσι καὶ διαιροῦντος τὸ στερεὸν εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα. $\left(\text{'Απ.}\sqrt[3]{\frac{5^3+2^3}{2}}=4\text{πχ.},051\ldots\right)$

33). Ἐν κολούρῳ κώνῳ καὶ κυλίνδρῳ εἶναι κοινὰ καὶ τὸ ὕψος, ὅπερ εἶναι 3 πήχεων, καὶ ἡ ἑτέρα τῶν βάσεων, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι 2 πήχεων, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἑτέρας βάσεως τοῦ κολούρου κώνου, ὥστε ὁ ὄγκος τούτου νὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου. ('Απ. 0πχ., 341...)

34). Νὰ διαιρεθῇ ὁ κῶνος, οὗ τὸ μὲν ὕψος εἶναι 10 πήχεων, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως 5 πήχεων, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου νὰ εἶναι 20 κυβ. πήχεων.

('Απ. 10—9,738...=0,261... πήχεων.)

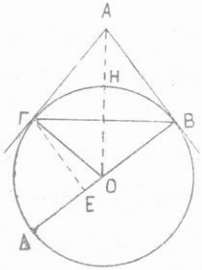
35). Εὑρεῖν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἧς ἡ ἐπιφάνεια διέρχεται διὰ 4 δεδομένων σημείων, μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

36). Ἐν σφαίρᾳ ἐχούσῃ ἀκτῖνα α, εὑρεῖν εἰς τίνα ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν πρέπει νὰ ἀχθῇ τέμνον αὐτὴν ἐπίπεδον, ὥστε ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὴν τομήν, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, νὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τοῦ κύκλου τῆς τομῆς. ('Απ. $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$.)

37). Δοθέντος τετραπλεύρου, οἷον τὸ ΑΒΓΔ, ἐν ᾧ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ=ΑΔ=1πχ., αἱ δὲ ΒΓ καὶ ΔΓ ἴσαι τῇ διαγωνίῳ ΒΔ, ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ τετραπλεύρου τούτου περὶ τὴν ΑΒ.

('Απ. $\frac{\pi}{6}(5+3\sqrt{3})$ ·)

38). Διὰ τῶν ἄκρων τῶν δύο ἀκτίνων ΟΒ, ΟΓ περιφερείας ἐχούσης ἀκτῖνα α ἄγονται ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας, αἱ ΒΑ,ΓΑ, τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῶσι, γνωστῆς οὔσης καὶ τῆς προβολῆς (ΒΕ)=β τοῦ τόξου ΓΗΒ ἐπὶ τῆς ΟΒ, οἱ ὄγκοι τῶν σχηματιζομένων στερεῶν 1ον) ὑπὸ τοῦ μέρους ΒΗΓΕ, 2ον) ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ καὶ 3ον) ὑπὸ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ΑΓΗΒ, ὅταν τὰ σχήματα ταῦτα περιστρέφωνται περὶ τὴν ΒΟ.



('Απ. $\frac{1}{3}\pi\alpha\beta^2$, $\frac{1}{3}\pi\alpha\beta(2\alpha-\beta)$ καὶ $\frac{\pi\alpha^2\beta^2}{3(2\alpha-\beta)}$.)

39). Ἂν ἐν τετραγώνῳ ΑΒΓΔ ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΓ, γραφῇ δὲ τὸ τόξον ΒΕΓ, τὸ ἔχον κέντρον μὲν τὴν κορυφὴν Δ, ἀκτῖνα δὲ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἀποδεῖξαι ὅτι τὰ στερεὰ τὰ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ, ΒΕΓΒ, ΓΑΒΕΓ διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν ΒΔ παραγόμενα εἶναι ἰσοδύναμα.

40). Ὑπολογίσαι τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος, ἧς τὸ μὲν ὕψος εἶναι 1πχ.,80, αἱ δὲ βάσεις κανονικὰ ἑξάγωνα, ὧν τὸ μὲν ἔχει πλευρὰν 3πχ., τὸ δὲ 1πχ., 80. ('Απ. 11κ.πχ.,457...).

41). Ὑπολογίσαι τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῶν στερεῶν, ἅτινα σχηματίζονται διὰ περιστροφῆς περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν τῶν ἑξῆς κανονικῶν πολυγώνων· 1ον) τριγώνου, 2ον) τετραγώνου καὶ 3ον) ἑξαγώνου.

('Απ. 1) $\pi\alpha^2\sqrt{3}$, $\frac{1}{4}\pi\alpha^3$, 2) $4\pi\alpha^2$, $\pi\alpha^3$ καὶ 3) $6\pi\alpha^2\sqrt{3}$, $\frac{9\pi\alpha^3}{2}$.)

42). Δεδομένης τῆς πλευρᾶς α τῶν ἑξῆς κανονικῶν πολυγώνων· 1) τριγώνου, 2) τετραγώνου καὶ 3) ἑξαγώνου, ὑπολογίσαι τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑφ' ἑκάστου τῶν πολυγώνων τούτων, διὰ τῆς περιστροφῆς αὐτῶν περὶ ἐφαπτομένην τοῦ περὶ ἕκαστον αὐτῶν περιγεγραμμένου κύκλου, ἠγμένην διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.

('Απ. 1) $2\pi\alpha^2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\pi\alpha^3$, 2) $4\pi\alpha^2\sqrt{3}$, $\pi\alpha^3\sqrt{2}$, 3) $12\pi\alpha^2$, $3\pi\alpha^3\sqrt{3}$.)

43). Ἐν σφαίρᾳ ἐχούσῃ ἐπιφάνειαν 9τ. πχ., εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀτράκτου, οὗ ἡ γωνία εἶναι $32^0\ 45'$.

('Απ. 0τ. πχ., 843750...).

44). Εὑρεῖν τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, οὗ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, αἱ δὲ γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 5.

('Απ. $61^0\ 52'\ 30''$, $82^0\ 30'$ καὶ $103^0\ 7'\ 30''$.)

45). Ὑπολογίσαι τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου, ὅπερ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, ὅταν ἡ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ γωνία εἶναι 50^0. ('Απ. 95^0.)

46). Ὑπολογίσαι εἰς τ. πχ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος γωνίας 75^0, 60^0 καὶ 68^0, καὶ κειμένου ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα 2 πήχεων. ('Απ. $2\pi.\ \frac{23}{90}=1$τ.πχ.,6057...)

47). Δεδομένης τῆς ἀκμῆς α τῶν ἑξῆς κανονικῶν πολυέδρων· 1) τετραέδρου, 2) κύβου καὶ 3) ὀκταέδρου, εὑρεῖν τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων περὶ αὐτὰ σφαιρῶν καὶ τοὺς ὄγκους τῶν στερεῶν τούτων.

('Απ. 1) $\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}$, $\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$ καὶ $\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$, 2) $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καὶ α^3

3) $\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}$, $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3}$.)

48). Ὑπολογίσαι τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ τὸ κανονικὸν τετράεδρον τὸ ἔχον πλευρὰν ἑνὸς πήχεως. ('Απ. $\frac{3\pi}{2}=4^{\tau.\pi\chi.},7124...$ καὶ $\frac{3\pi\cdot\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}=0^{\kappa.\pi\chi.},9619...$)

49). Ὑπολογίσαι τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κύβον τὸν ἔχοντα πλευρὰν ἑνὸς πήχεως. ('Απ. $3\pi=9^{\tau.\pi\chi.},4248...$ καὶ $\frac{\pi.\sqrt{3}}{2}=2^{\kappa.\pi\chi.},7207...$)

50). Ἐν κώνῳ ἔχοντι ὕψος $10^{\pi\chi.}$, εὑρεῖν εἰς τίνα ἀπὸ τῆς βάσεως ἀπόστασιν πρέπει νὰ ἀχθῇ τέμνον αὐτὸν παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον, ὥστε ὁ τοῦ κολούρου κώνου ὄγκος νὰ εἶναι μέσος ἀνάλογος τοῦ ὅλου κώνου καὶ τοῦ κώνου τοῦ κειμένου ἄνωθεν τοῦ κολούρου.

51). Δεδομένων τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος βάσεως κώνου, εὑρεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐν τῷ κώνῳ τούτῳ ἐγγεγραμμένου ἡμισφαιρίου.

52). Δεδομένων τῆς ἀκτῖνος α σφαίρας καὶ τοῦ ὕψους υ κώνου περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ ἐφαπτομένου τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ περιοριζομένου ὑπὸ τοῦ κύκλου τῆς ἐπαφῆς τῆς κυρτῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

53). Προσδιορίσαι τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς 3, 5 καὶ 7 πήχεων, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν πλευρὰν 7 πήχεων.

54). Προσδιορίσαι τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ κανονικοῦ ἡμιδεκαγώνου, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι δεδομένη, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρον (βάσιν) αὐτοῦ.

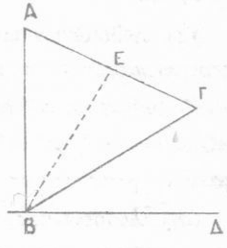
55). Εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν δύο μερῶν τριγώνου, εἰς ἃ τοῦτο διαιρεῖται ὑπ' εὐθείας ἑνούσης τὰ μέσα δύο πλευρῶν αὐτοῦ, ὅταν τὸ τρίγωνον περιστραφῇ περὶ τὴν τρίτην αὐτοῦ πλευράν.

56). Εὑρεῖν τὰς τρεῖς ἀκμὰς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος ὄγκον ἑνὸς κυβικοῦ πήχεως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἀκμαὶ αὗται εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 5.

57). Ἐν περιγεγραμμένῳ περὶ σφαῖραν κολούρῳ κώνῳ, ἂν Ε εἶναι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ὁ ἄξων τοῦ κώνου τέμνεται ὑπὸ τοῦ παραλλήλου ταῖς βάσεσι κύκλου ἐπαφῆς, ἀποδεῖξαι ὅτι τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ παραλλήλου τούτου κύκλου καὶ μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς σφαίρας κείμενα στερεὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τοὺς κώνους, ὧν κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Ε, βάσεις δὲ αἱ δύο τοῦ κολούρου κώνου βάσεις.

58). Ὑπολογίσαι τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὗ ἡ τῆς βάσεως ἀκτὶς εἶναι α πήχεων, ὥστε ὁ ὄγκος αὐτοῦ νὰ ἰσῶται πρὸς τὸν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ κώνου· ἔτι δὲ καὶ τὸν ὄγκον τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον κοινοῦ στερεοῦ.

59). Δεδομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, οἷον τοῦ ΑΒΓ, καὶ ἄξονος ΒΔ καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΑ καὶ κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου, ἄγεται ἡ διάμεσος ΒΕ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΕΒΓ στρεφομένων περὶ τὸν ἄξονα. (Ἀπ. 7 : 5).



60). Εὑρεῖν τὸν λόγον τῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τοῦ διαιροῦντος τὴν διάμετρον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{7\sqrt{5}+5}{10}.\right)$

61). Ἂν ἡ ἀκμὴ τριγωνικῆς πυραμίδος διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὃν λόγον οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν, ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει, τίς θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σχηματισθησομένης κολούρου πυραμίδος;

$$\left(\text{Ἀπ. } \frac{\nu B\upsilon}{3(\mu+\nu)^3}(\mu^2+3\mu\nu+3\nu^2).\right)$$

62). Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐκ χυτοῦ σιδήρου σφαίρας, ἧς τὸ βάρος εἶναι 150 χιλιογράμμων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τοῦ χυτοῦ σιδήρου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 7, 2.

63). Ἐγγράψαι ἐν σφαίρᾳ κῶνον ἔχοντα ὄγκον ἴσον πρὸς τὸν τοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν τοῦ κώνου βάσιν.

$$\left(\text{Ἀπ.}\quad \upsilon=\frac{\alpha}{4}(1+\sqrt{17}).\right)$$

64). Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ περιλαμβανομένου ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, κειμένων ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου καὶ εἰς ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτῖνος α τῆς σφαίρας. $\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{505\pi\alpha^3}{648}.\right)$

65). Ἐγγράψαι ἐν σφαίρᾳ κῶνον, οὗ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἴση ἢ τῷ ἡμίσει τῆς ἐπιφανείας τῆς ζώνης, ἥτις περικλείει αὐτόν, ἢ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ζώνης τῆς ἐχούσης τὴν αὐτὴν βάσιν.

66). Ὑπολογίσαι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ πενταγώνου, οὗ αἱ γωνίαι εἶναι 110, 115, 120, 125, 130 μοιρῶν καὶ κειμένου ἐπὶ σφαίρας ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 πήχεων. (Ἀπ. 3π=9τ.πχ.,4248...)

67). Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ ἑξαγώνου, οὗ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ $\frac{1}{40}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

68). Εὑρεῖν τὰς γωνίας σφαιρικοῦ ἑξαγώνου, οὗ αἱ μὲν γωνίαι σχηματίζουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἔχουσαν λόγον 10^0, ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

69). Ἀποδεῖξαι ὅτι ἐν σφαιρικῷ τετραπλεύρῳ, ἂν αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διαγώνιοι θὰ τέμνωσιν ἀλλήλας εἰς μέρη ἴσα.

70). Ἀποδεῖξαι ὅτι ἂν σφαιρικοῦ τετραπλεύρου αἱ γωνίαι πᾶσαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ διαγώνιοι θὰ εἶναι ἴσαι.

71). Ἀποδεῖξαι ὅτι ἂν ἐν σφαιρικῷ τετραπλεύρῳ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ θὰ ἀλληλοτομῶνται δίχα.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΤΕΑ

Σελ. 13, στ. 3, ἀντὶ «ΑΔΗΒ» γρ. «ΑΔΒΗ».
» 21, στ. 5, ἀντὶ «(41)» γρ. «(40)».
» 28. στ. 19, ἀντὶ «(75)» γρ. «(76)».
» 30, στ. 20, ἀντὶ «(79)» γρ. «(80)».
» 48, στ. 16, ἀντὶ «μείζων» γρ. «μεῖζον».
» 50, στ. τελευταῖος, ἀντὶ «$\frac{\nu(\nu-1)}{2}$» γρ. «$\frac{\nu(\nu-3)}{2}$».
» 51, στ. 4, ἀντὶ «ΑΕ=ΓΔ», γρ. «ΔΕ=ΓΔ».
» 51, στ. 17, μετὰ τὸ «Ἐν ἰσοσκελεῖ τραπεζίῳ,» προσθετέον «ἔχοντι δηλ. τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἴσας».
» 53, στ. 1—2, ἀντὶ «παράλληλος καὶ ἴση» γρ. «παράλληλος, ὁμόρροπος καὶ ἴση».
» 89, στ. 16, ἀντὶ «ΓΑ» γρ. «ΟΑ».
» 96, στ. 8, ἀντὶ «θὰ ἔχῃ ἄρα τόπον» γρ. «θὰ ἔχῃ τόπον».
» 104, στ. προτελευταῖος, ἀντὶ «αὐτοῦ» γρ. «αὐτῷ».
» 104, στ. 19, ἀντὶ «Λόγος μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς» γρ. «Λόγος μεγέθους Β πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς μέγεθος Α».
» 113, στ. 8, ἀντὶ «200» γρ. «199».
» 119, μετὰ τὸ ἐδ. 220 προσθετέα τὰ ἑξῆς: «*Σημείωσις.* Καλεῖται *προβολὴ* πλευρᾶς τινος ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ ἑτέραν αὐτοῦ πλευρὰν ΑΒ, ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀπόστασις ΑΔ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΓΔ τοῦ τριγώνου (βλ. σχῆμα ἐδαφ. 221 καὶ παράβ. τοὺς ἐν ἐδ. 353,354 ὁρισμούς)».

Σελ. 119, στ. 17 καὶ σελ. 120, στ. 9, ἀντὶ «(215)» γρ. «(216)».
» 122, στ. 15, ἀντὶ «(218)» γρ. «(128)».
» 130, στ. 5, κάτωθεν, ἀντὶ «Β′ : Γ» γρ. «Β′ : Β».
» 138, στ. 3, ἀντὶ «αὐτῆς παράλληλος» γρ. «παράλληλος ταύτη».
» 138, στ. 8 κάτωθεν, ἀντὶ «238» γρ. «240».
» 142, στ. 16, ἀντὶ «Β=Ε=2 ὀρθ.» γρ. Β+Ε=2 ὀρθ.»
» 142, στ. 17, ἀντὶ «112» γρ. «118».
» 144, στ. 21, ἀντὶ «(ΒΓ) : (ΔΓ)» γράφε «(ΒΔ) : (ΔΓ)».
» 150, στ. 22, ἀντὶ «(250)» γρ. «(260)».
» 152, στ. 2, ἀντὶ «$\frac{ΕΑ}{ΑΒ}$» γρ. «$\frac{ΕΑ}{ΕΒ}$».
» 153, στ. 6, ἀντὶ «μέλῳ» γρ. «μέλει».
» 155, ὑποσημειώσεως στ. 1, ἀντὶ «παρόντος» γρ. «παρελθόντος».
» 155, ὑποσημειώσεως στ. 7, ἀντὶ «7» γρ. «17».
» 157, στ. 6, ἀντὶ «ΟΑ» γρ. «ΟΓ».
» 158, στ. 4, ἀντὶ «(ΠΗ)» γρ. «(ΔΗ)».
» 160, στ. 3, ἀντὶ «β καὶ γ» γρ. «α καὶ β».
» 160, στ. 18, ἀντὶ «ἐκ τῆς ἐχούσης» γρ. «δοθείσης τῆς γραμμῆς τῆς ἐχούσης».
» 168, στ. 18, ἀντὶ «$\frac{1}{2}$» γρ. «$\frac{1}{4}$».
» 174, ἐδ. 288, στ. 3, ἀντὶ «μένῃ δὲ» γρ. «νὰ μένῃ δὲ».
» 190, στ. 22, ἀντὶ «ἂν ἦτο γνωστὴ» γρ. «ἧς ἂν ἦτο γνωστὸν τὸ ἀνάπτυγμα».
» 195, στ. 25, ἀντὶ «Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος» γρ. «Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἀνάπτυγμα.
» 214, στ. 2, ἀντὶ «(315)» γρ. «(314 καὶ 315)».
» 224. στ. 1-2, ἀντὶ «ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου» γρ. «οὗ τὸ ἕτερον μέρος 1 2 3 4 5 6 ἔχει ἐμβαδὸν διδόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου».

Σελ. 224, στ. 6 κάτωθεν, ἀντὶ «τετμημένας» γρ. «τεταγμένας».

» 227, στ. 9—11, ἀντὶ «μήκη ἴσα ἢ ἀνάλογα πρὸς τὰ μεγέθη τῶν πλευρῶν, (8)(1′)=(8)(7′)=15 ἢ 20 μέτρα περίπου», γρ. «μήκη (8)(1′) καὶ (8)(7′) ὡρισμένα, ἀπὸ 15 μέχρι 20 μέτρων περίπου ἕκαστον».

» 22 . στ. 9 κάτωθεν, ἀντὶ «ΑΒΓΔΖΕ» γρ. «ΑΒΓΔΕ».

» 2 , στ. 4—5, μετὰ τὸ «διαδοχικῶς τεθέντα» προσθετέον «τουτέστιν οὕτως ὥστε ἡ ἀρχὴ ἑκάστου νὰ συμπίπτῃ πρὸς τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου».

» 233 στ. 16, ἀντὶ «ἀρνητικὸν ἀριθμὸν» γρ. «ἀρνητικὸν ἀριθμὸν α».

» 234, στ. 19 καὶ 20, ἀντὶ «ΓΑ» γρ. «ΓΔ».

» 237, στ. 4 κάτωθεν, ἀντὶ «AM_1» γρ. «M_1M».

» » στ. 3 κάτωθεν, ἀντὶ «M_2B», γρ. «MM_2».

» 240, στ. 9 » ἀντὶ «334», γρ. «332».

» 240, στ. 11 κάτωθεν, ἀντὶ «μόνον» γρ. «κυρίως».

» 241, στ. 6 » μετὰ τὴν λέξιν «τμήματος» προσθετέον «ἃς εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἐκ τῶν συντεταγμένων τοῦ τέλους τὰς συντεταγμένας τῆς ἀρχῆς».

» 242, εἰς τὸ τέλος τοῦ ἐδ. 355 νὰ προστεθῶσι τάδε:

«***Σημείωσις.*** Τὰ ἐν τῷ παρόντι ἐδαφίῳ, ὡς καὶ τὰ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐδαφίοις 356—358, ἐκτιθέμενα, ἰσχύουσι καὶ ὅταν οἱ ἄξονες συντεταγμένων εἶναι πλάγιοι, ἂν καλέσωμεν *συντεταγμένας προβολὰς* τμήματος M_1M_2, ὡς πρὸς ἄξονας ΟΧ,ΟΨ οἱουσδήποτε, τὰ τμήματα $\Pi_1\Pi_2$ καὶ P_1P_2, τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν ἀξόνων ΟΧ καὶ ΟΨ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $M_1\Pi_1$, $M_2\Pi_2$ καὶ M_1P_1, M_2P_2 τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΨ, ΟΧ ἀντιστοίχως. Τούτου ἕνεκα καὶ τὰ ἐκτιθέμενα ἐν ἐδ. 363 ἰσχύουσιν οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀξόνων».

» 244, στ. 2, ἀντὶ «302» γρ. «356».

Σελ. 245, στ. 3 κάτωθεν, διαγραπτέον τὸ «(302)».
» 246, στ. 2 καὶ 5 κάτωθεν, αἱ παραπομπαὶ «(359, 360)» γραπτέαι μετὰ τὸ «θὰ ἔχωμεν».
» 248, σχῆμα β^{ον}, ἐναλλακτέον τὰ γράμματα Α καὶ Λ.
» 250, στ. 2, ἀντὶ «$-\frac{\Gamma}{A}$» γρ. «$-\frac{\Gamma}{B}$».
» 251, στ. τελευταῖος, καὶ σελ. 252, στ. 3, ἀντὶ «$-\frac{B}{A}$» γρ. «$-\frac{A}{B}$».
» 252, στ. 10, ἀντὶ «$\frac{3}{7}$» γρ. «$\frac{5}{7}$».
» 254, στ. 8 κάτωθεν, ἀντὶ «Β′Γ′» γρ. «ΓΒ′».
» 257, στ. 4, ἀντὶ «$\frac{A}{2}$» γρ. «$-\frac{A}{2}$».
» 261, στ. 4, ἀντὶ «312» γρ. «368».
» 262, στ. 5 κάτωθεν, μετὰ τὸ «$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$» προσθετέον τὸν δείκτην παραπομπῆς «(1)».
» 264, στ. 4, ἀντὶ «(311)» γρ. «(366)».
» 269, στ. 2, ἀντὶ «ΟΠ» γρ. «ΟΒ».
» 269, σχῆμα α^{ον}, ἀντὶ «Π» παρὰ τὴν ΟΒ γρ. «Γ».
» 271, στ. 6, ἀντὶ «$\pm\sqrt{\frac{1-\chi}{1+\chi}}$» γρ. «$\pm\chi\sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}}$».
» 271, στ. 3 κάτωθεν, ἀντὶ «$+\psi$» γρ. «$+\psi^2$».
» 272, στ. 2 κάτωθεν, ἀντὶ «τὰς ἑξῆς τιμὰς» γρ. «τὰς ἑξῆς κατὰ προσέγγισιν τιμάς».
» 276, στ. 8 κάτωθεν, ἀντὶ «τέμφ, συντ» γρ. «τέμτ, συντ τ».
» 285, στ. 3, μετὰ τὸ «κανονικοῦ πολυγώνου» πρόσθες «ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον».
» 286, στ. 11 κάτωθεν, παραλειπτέον τὸ «ὅλα».
» 290, στ. 6, μετὰ τὸ «παράλληλοι» πρόσθες «καὶ ὁμόρροποι».
» 290, στ. 9 κάτωθεν, ἀντὶ «ἡμβ ἡμα» γρ. «—ἡμβ ἡμα».
» 291, στ. 7, ἀντὶ «289» γρ. «389».
» 294, παρὰ τὰς τρεῖς τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ ἐδ. 412 πρόσθες τὸν δείκτην παραπομπῆς «(15)».

Σελ. 296, στ. 2, ἀντὶ «τῆς δηλουμένης» γρ. «ταῖς δηλουμέναις».

» 298, στ. 2, ἀντὶ «λογήμ $36^0 60' = 1{,}60244$» γρ. «λογήμ $23^0 36' = \overline{1}{,}60244$».

» 298, στ. 4, ἀντὶ «$23^0 60' 40''$» γρ. «$23^0 36' 40''$».

» 298, στ. 9, ἀντὶ «λογ συν $57^0 54' = \overline{1}{,}72562$» γρ. «λογ συν $57^0 54' = \overline{1}{,}72542$».

» 304, στ. 1, ἀντὶ «τοῦ ἐδ. 405» γρ. «τῶν ἐδ. 404 καὶ 405».

» 304, στ. 5 κάτωθεν, ἀντὶ «1—ἐφα» γρ. «ἐφα—1».

» 321, στ. 6, ἀντὶ «κάθοδος» γρ. «κάθετος».

» 327, στ. τελευταῖος, ἀντὶ «παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι» γρ. «καὶ παράλληλοι».

» 331, στ. 8, ἀντὶ «προβολὴ αб» γρ. «προβολὴ α'б'».

» 331, στ. 9 κάτωθεν, ἀντὶ «440» γρ. «441».

» 345, στ. 14, ἀντὶ «ΚΦ» γρ. «Κφ».

» 345, σχῆμα δεύτερον, ἀντὶ «Φ» γρ. «Φ_γ».

» 346, στ. 8, μετὰ τὸ «διὰ τοῦ κυρίου σημείου» πρόσθες «καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι, ὡς συνήθως λαμβάνεται, κατακόρυφον».

» 349, στ. 6, ἀντὶ «Ε» γρ. «Ε'».

» 349, στ. 8, ἀντὶ «Γ» γρ. «Ε».

» 352, στ. 15, ἀντὶ «Σ'» γρ. «Σ».

» 356, στ. 1—2, ἀντὶ «ἐπιπέδων» γρ. «ἑδρῶν».

» 358, στ. 3, ἀντὶ «δύο στερεαὶ» γρ. «δύο τρίεδροι στερεαί».

» 363, στ. 1, ἀντὶ «505» γρ. «504 καὶ 505».

» 363, στ. 8—9, ἀντὶ «τῆς γωνίας» γρ, «τῶν γωνιῶν»

» 363, στ. 25, ἀντὶ «434» γρ. «435».

» 365, τὸ 20ὸν πρόβλημα προϋποθέτει τοὺς ἐν ἐδ. 534 ὁρισμούς.

» 366, στ. 10, ἀντὶ «487» γρ. «489».

» 366, στ. 4 κάτωθεν, ἀντὶ «προβολῆς Θ» γρ. «προβολῆς Μ τοῦ Θ».

Σελ. 378, στ. 11, ἀντὶ «ΒΔ» γρ. «ΓΔ».
» 393, ἐν τῷ σχήματι, ἀντὶ «Β,Β′,Γ,Γ′» γρ. «Γ,Γ′,Β,Β′».
» 395, ἐν τῷ σχήματι, ἀντὶ «Α′, Α» γρ. «Α, Δ».
» 402, στ. 12, ἀντὶ «ΟΓΕΛ» γρ. «ΟΓΕΔ».
» 405, στ. 19, ἀντὶ «ΑΗ» γρ. «ΔΗ».
» 405, στ. 23, ἀντὶ «Α» γρ. «Δ».
» 406, στ. 4, ἀντὶ «ΔΒΓΗ» γρ. «ΗΒΓΖ».
» 406, στ. 14, ἀντὶ «κολουρου» γρ. «κολοβοῦ».
» 410, στ. 23, ἀντὶ «499» γρ. «498».
» 413, στ. 2, ἀντὶ «506» γρ. «572».
» 414, στ. 6, ἀντὶ «ΑΒΘΔ» γρ. «ΑΒΘΛ»
» 419, στ. 7, ἀντὶ «Ο» γρ. «ο».
» 419, στ. 10, ἀντὶ «Οαβγδα′» γρ. «οαβγδα′».
» 424, στ. 6, ἀντὶ «ΔΓΔΖ» γρ. «ΔΓΕΖ»
» 427, στ. 7 κάτωθεν, ἀντὶ «Α» γρ. «Δ».
» 428, στ. 1, ἀντὶ «ΓΚ» γρ. «(ΓΚ)».

» 193, στ. 17 (εἴς τινα ἀντίτυπα), ἀντὶ «$\frac{\text{τόξ.ΑΒ}}{\text{τόξ.ΑΓ}}$» γρ. «$\frac{\text{τόξ. ΑΓ}}{\text{τόξ. ΑΒ}}$».

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ