ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΛΑΚΩΝΟΣ

...ΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ

ΕΘΝΙΚΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ

331099

1930

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

Διεσκευασμένη

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΝΕΣΤΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΟΥ

1892

...παιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΛΑΚΩΝΟΣ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι

ΕΘΝΙΚΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩι

1930 99/134 331099

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

Διεσκευασμένη

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΝΕΣΤΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΟΥ

1892

αρ. 17284

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται προερχόμενον ἐκ τυποκλοπίας.

Ψηφιοποιήθηκε από το

Μαυρυδόπουλος
8/3/31

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

331099

ΤΗΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Καὶ ἐν τῇ παρούσῃ ἐκδόσει οὐκ ὀλίγαι ἐγένοντο μεταβολαί, μακρὸν θὰ ἦτο νὰ ἀπαριθμήσωμεν ἐνταῦθα· μιᾶς δὲ μόνης ς κυριωτέρας ποιούμεθα μνείαν, τῆς παραλείψεως δηλαδὴ : θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ὡς περιληφθείσης ἐν τῇ χρόνως τῇ παρούσῃ γενομένῃ πέμπτῃ ἐκδόσει τῆς ἡμετέρας ιέβρας.

Δὲν ἐθεωρήσαμεν καλὸν χάριν ἀναξίας λόγου συντομίας νὰ διατηρήσωμεν καὶ ἐν τῇ ἐκδόσει ταύτῃ προτάσεις τινάς, ἄλλοι ὅλως παραλείπουσιν, ἢ νὰ λάβωμεν ἄλλας ἄνευ ἀποδεί-ως, καίτοι δυναμένας νὰ δειχθῶσιν αὐστηρῶς. Διότι φρονοῦμεν ὡς ἀξιώματα μόναι αἱ μὴ δυνάμεναι νὰ δειχθῶσι προτάσεις έπει νὰ λαμβάνωνται, καὶ ὅτι τῶν φαινομένων προδήλων λιστα ἡ αὐστηρὰ δεῖξις ἐθίζει ἐνωρὶς τοὺς μέλλοντας να ιδοθῶσιν εἰς τὰς ἐπιστήμας μηδὲν ἀβασανίστως νὰ δέχων-ι· ὅπερ εἶναι τὸ κυρίως διακρῖνον τὸν πεπαιδευμένον τοῦ ἀ-δεύτου.

Ὡσαύτως τὰ περὶ ἰσοδυνάμων κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἐπιπέ- σχημάτων ἐπραγματεύθημεν ὡς καὶ ἐν ταῖς προτέραις ἐκ-εσι. Διότι κατὰ τὴν ἡμετέραν ἔκθεσιν δύνανται οἱ μαθηταὶ τροχωρήσωσιν ἱκανῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν χωρὶς νὰ λάβωσι ίαν τῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν θεωρίας, ἥτις ὀψὲ ἔρχε- ἀλγέβρᾳ, ἀπαιτεῖ δὲ ἱκανῶς ἀνεπτυγμένους καὶ πα-ένους τοὺς μέλλοντας νὰ διδαχθῶσιν αὐτήν.

θήναις τῇ 3ῃ Σεπτεμβρίου 1892.

Β. ΛΑΚΩΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί.

1. Τὰ πράγματα, ὧν γνῶσιν λαμβάνομεν διὰ τῶν αἰσθήσεων ἡμῶν, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ὑλικὰ σώματα, ἔχουσιν *ἔκτασιν* καὶ *σχῆμα*.

2. Ἐὰν σώματος θεωρήσωμεν μόνον τὴν ἔκτασιν καὶ τὸ σχῆμα, μὴ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ὕλην, ἐξ ἧς ἀποτελεῖται, λαμβάνομεν τὸ καλούμενον *γεωμετρικὸν σῶμα* ἢ *στερεόν*.

3. Τὰ *πέρατα* τοῦ στερεοῦ ἐν συνόλῳ ἀποτελοῦσι τὴν *ἐπιφάνειαν* αὐτοῦ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἐκτεταμένη, ἀλλ᾽ ἡ ἔκτασις αὐτῆς εἶναι διάφορος τῆς τοῦ στερεοῦ.

4. Τὰ στερεὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν διῃρημένα *εἰς μέρη*.

5. Τὰ πέρατα μέρους ἐπιφανείας ἀποτελοῦσι *γραμμήν*. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γραμμὴ ἐκτεταμένη, ἀλλ᾽ ἡ ἔκτασις αὐτῆς διαφέρει τῆς τοῦ στερεοῦ καὶ τῆς ἐπιφανείας.

6. Ἐὰν θεωρήσωμεν μέρος γραμμῆς, τὰ πέρατα τούτου καλοῦνται *σημεῖα*.

Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν.

7. Τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς καὶ τὰ σημεῖα κατ᾽ ἀφαίρεσιν νοερὰν θεωροῦμεν καὶ καθ᾽ ἑαυτά, ἀνεξαρτήτως τῶν στερεῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν γραμμῶν, ὧν εἶναι πέρατα.

8. Τὰ στερεά, αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ γραμμαί, τὰ σημεῖα, καὶ τὰ ἔκ τινων ἢ πάντων τούτων συστήματα καλοῦνται *σχήματα*.

Τὰ στερεά, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαὶ καλοῦνται καὶ *μεγέθη*, ἔτι δὲ καὶ *γεωμετρικὰ ποσά*.

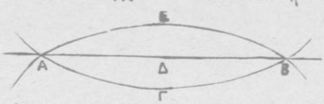
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

9. Ἡ ἐπιστήμη ἡ ἐξετάζουσα τὰ σχήματα καλεῖται *γεωμετρία*.

10. Τὰ σώματα, αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ γραμμαὶ καὶ τὰ σημεῖα παρίστανται δι' εἰκόνων, αἵτινες καὶ αὐταὶ καλοῦνται σχήματα. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν σημεῖόν τι, γράφομεν παρ' αὐτῷ γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου· οἷον λέγομεν τὸ *σημεῖον* Α, ἤτοι τὸ σημεῖον, παρ' ᾧ εἶναι γεγραμμένον τὸ γράμμα Α.

Ἡ γραμμὴ διακρίνεται συνήθως διὰ δύο γραμμάτων γραφομένων ἐπὶ δύο τῶν σημείων αὐτῆς· οἷον λέγομεν ἡ γραμμὴ ΑΒ.

Ὅταν ὅμως δύο ἢ περισσότεραι γραμμαὶ διέρχωνται διὰ δύο σημείων, εἶναι ἀνάγκη χρήσεως περισσοτέρων γραμμάτων· οἷον διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β τοῦ παρακειμένου σχήματος διέρχονται αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ.



11. *Ἀπόδειξις* καλεῖται συλλογισμός, ἢ σύστημα συλλογισμῶν, δι' οὗ πειθόμεθα ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

12. *Ἀξίωμα* εἶναι κρίσις γενικὴ ἀφ' ἑαυτῆς τὸ κῦρος ἔχουσα.

Αἴτημα δὲ εἶναι ἡ θέσις θεμελιωδῶν τινων ἐννοιῶν, ἄνευ ἀποδείξεως τῆς ἀληθείας αὐτῶν.

Θεώρημα δὲ καλεῖται πρότασις, ἧς ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ δι' ἀποδείξεως.

Πρόβλημα λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γείνῃ τι. *Λύσις* δὲ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ποίησις τοῦ ζητουμένου.

Πόρισμα καλεῖται πρότασις, ἧς τὸ κῦρος στηρίζεται ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

ΑΙΤΗΜΑ

13. *Πᾶν σχῆμα δύναται νὰ μεταβάλῃ θέσιν χωρὶς αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ, καὶ οὕτως, ὥστε δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπ' ἄλλο δοθὲν σημεῖον, ἤτοι νὰ λάβῃ τὴν αὐτὴν καὶ τοῦτο θέσιν.*

ΟΡΙΣΜΟΙ

14. Δύο σχήματα λέγονται *ἴσα* ἐὰν τὸ ἕτερον αὐτῶν μετατιθέμενον χωρὶς νὰ μεταβληθῇ δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ ἕτερον,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ λάβῃ δηλαδὴ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἀμφότερα νὰ κατέχωσι τὸν αὐτὸν τόπον, τουτέστι πᾶν σημεῖον ἑκατέρου αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ τοῦ ἑτέρου σημεῖον.

Ἐὰν τὸ σχῆμα Α εἶναι μέρος ἢ ἴσον μὲ μέρος τοῦ Β, τὸ Α λέγεται *μικρότερον* τοῦ Β, καὶ τὸ Β *μεγαλείτερον* τοῦ Α.

ΑΞΙΩΜΑ

15. *Δύο σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἐνταυτῷ καὶ ἴσα καὶ ἄνισα, δηλαδὴ κατά τινα μὲν τρόπον ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ᾽ ἄλληλα, κατ᾽ ἄλλον δὲ τρόπον νὰ εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ ἑτέρου.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

16. *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσα.*

Ἔστω τὸ σχῆμα Α ἴσον τῷ Γ, καὶ τὸ Β ὡσαύτως ἴσον τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ Α εἶναι ἴσον τῷ Β.

Διότι ἐὰν καὶ τὸ Α καὶ τὸ Β ἐφαρμοσθῶσιν ἐπὶ τὸ ἴσον αὐτοῖς Γ, θὰ κατέχωσιν ἀμφότερα τὸν αὐτὸν τόπον, ἐκεῖνον ὃν κατέχει τὸ Γ· ἄρα εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

17. *Δὲν εἶναι δυνατὸν ἐκ δύο σχημάτων τὸ πρῶτον νὰ εἶναι ἐνταυτῷ καὶ μικρότερον καὶ μεγαλείτερον τοῦ δευτέρου.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον ὅτι τὸ Α εἶναι μικρότερον τοῦ Β, καὶ τὸ Β μικρότερον τοῦ Α. Τότε τὸ Α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μέρος τοῦ Β, καὶ τοῦτο μέρος τοῦ Α· ὥστε τὸ Α θὰ εἶναι μέρος μέρους τοῦ Α, ἤτοι τὸ Α θὰ εἶναι ἴσον μὲ μέρος του· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἐν ἐδαφίῳ 15 ἀξίωμα.

18. Σημειωσις. Ἵνα δείξωμεν ὅτι τὰ σχήματα Α καὶ Β εἶναι ἴσα γράφομεν $A = B$· ἵνα δὲ δείξωμεν ὅτι τὸ Γ εἶναι μικρότερον τοῦ Δ γράφομεν $\Gamma < \Delta$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν καὶ ἀνισότης τῶν σχημάτων σημειοῦται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, δι᾽ ὧν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἡ ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν ἀριθμῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς.

19. Καλεῖται *εὐθεῖα γραμμὴ* ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας ὅταν δύο οἱαδήποτε σημεῖα διατηρῶσι τὴν αὐτὴν θέσιν, καὶ πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτῆς διατηροῦσι τὴν αὐτὴν θέσιν.

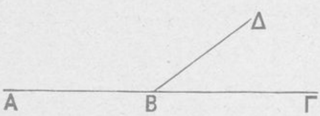
Περὶ τῆς εὐθείας δεχόμεθα τὰ ἑξῆς αἰτήματα.

α΄) *Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε σημείων ὑπάρχει πάντοτε εὐθεῖα καὶ μία μόνη.*

β΄) *Ὅταν δύο εὐθεῖαι ἔχωσι δύο σημεῖα κοινὰ ἀποτελοῦσι μίαν μόνην εὐθεῖαν.*

γ΄) *Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν δυνάμεθα ἀφοῦ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἄκρον τῆς μιᾶς ἐπὶ τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης νὰ κινήσωμεν τὴν μίαν οὕτως, ὥστε καὶ δεύτερον σημεῖον ταύτης νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν πρώτην.*

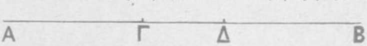
Πόρισμα Α΄. Δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι μέρος κοινὸν τὸ ΑΒ δὲν δύνανται νὰ ἀποχωρισθῶσι κατὰ τὸ Β ἀποτελοῦσαι δύο διαφόρους γραμμὰς ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.



Πόρισμα Β΄. Δύο διάφοροι εὐθεῖαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχωσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

20. *Πᾶν μέρος εὐθείας γραμμῆς εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.*



Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΓΔ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι τῶν σημείων Γ καὶ Δ μενόντων ἀκινήτων, ὡς καὶ δύο ἄλλων οἱωνδήποτε σημείων τῆς ΓΔ, ἡ ὅλη γραμμὴ ΑΒ ὡς εὐθεῖα μένει ἐν τῇ αὐτῇ θέσει. Ἀφοῦ δὲ ἡ ὅλη γραμμὴ ΑΒ μένει ἐν τῇ αὐτῇ θέσει θὰ μένῃ καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΓΔ. Ἄρα ἡ γραμμὴ ΓΔ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς διατηρούντων τὴν αὐτὴν θέσιν, μένει καὶ αὐτὴ ἐν τῇ αὐτῇ θέσει· ἄρα εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.

Σημειωσεις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ὅτι *γραμμή, ἧς τὰ μέρη εἶναι εὐθεῖαι, εἶναι καὶ αὐτὴ εὐθεῖα* δὲν εἶναι ἀληθὴς πάντοτε. Διότι ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒΓ (σχ. τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω). Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Β ταύτης ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΔ διάφορος τῆς ΒΓ, ἡ γραμμὴ

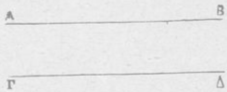
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΒΔ ἀποτελεῖται μὲν ἐξ εὐθειῶν, τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΒΔ, ἀλλ' ἡ ὅλη δὲν εἶναι εὐθεῖα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

21. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας, δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι καὶ ἄλλως, τῆς ἐπιθέσεως γινομένης ἀντιστρόφως.*

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦ ἄκρου Γ τῆς εὐθείας ΓΔ τεθέντος ἐπὶ τὸ ἄκρον Α τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ τῆς ΓΔ κινηθείσης οὕτως, ὥστε καὶ δεύτερον σημεῖον αὐτῆς νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅτε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ μίαν μόνην θὰ ἀποτελέσωσιν εὐθεῖαν (19), τὸ δεύτερον ἄκρον Δ τῆς ΓΔ πίπτει ἐπὶ τὸ δεύτερον ἄκρον Β τῆς ΑΒ. Τότε αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας, ἤτοι θὰ εἶναι ἴσαι.

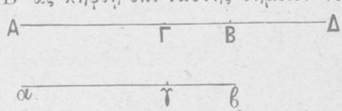


Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΓΔ εἰς τὴν προτέραν αὐτῆς θέσιν, ἐπιθέτομεν τὸ ἄκρου Δ ἐπὶ τὸ ἄκρον Α, καὶ κάμνομεν τὴν ἐφαρμογὴν τῶν εὐθειῶν ὡς ἀνωτέρω. Λέγω ὅτι τότε τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Β. Διότι ἐὰν μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν ἐπ' ἀλλήλας τῶν εὐθειῶν τὸ Δ κεῖται μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β, ἢ τὸ Β μεταξὺ Γ καὶ Δ, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι ἄνισοι· ὥστε τὰ αὐτὰ θὰ εἶναι καὶ ἴσα καὶ ἄνισα, ὅπερ ἀντιϐαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ ἐδαφίου 15.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

22. *Δοθείσης εὐθείας, εὑρεῖν ἄλλην μείζονα ταύτης.*

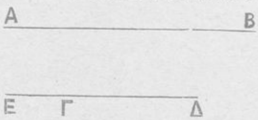
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ἂς ληφθῇ ἐπὶ ταύτης σημεῖον τὸ Γ, ἔπειτα ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ σχῆμα ΑΓΒ κατὰ τὸ αγϐ, καὶ ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ γϐ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΒΓ τεθέντος τοῦ γ ἐπὶ τὸ Β καὶ τοῦ ϐ ἐπὶ τὸ Γ. Τότε ἡ αγ, ἥτις ὑποτίθεται ὅτι μετηνέχθη μετὰ τοῦ μέρους αὐτῆς γϐ εἰς τὴν νέαν θέσιν, θὰ λάϐῃ τὴν θέσιν ΒΔ. Λέγω δὲ ὅτι ἡ οὕτως ἀποτελεσθεῖσα γραμμὴ ΑΓΒΔ εἶναι εὐθεῖα. Διότι κατὰ τὸ αἴτημα ϐ'. αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ὡς ἔχουσαι κοινὰ δύο σημεῖα τὸ Γ καὶ τὸ Β ἀποτελοῦσι μίαν μόνην εὐθεῖαν.



Εὑρέθη ἄρα εὐθεῖα μείζων τῆς δοθείσης ΑΒ ἡ ΑΒΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα Α'. *Δυνάμεθα νὰ προσεκβάλωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΔ.*



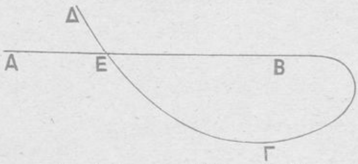
Πρὸς τοῦτο προσεκβάλλομεν ὡς ἀνωτέρω τὴν ΓΔ κατὰ μέρος τι αὐτῆς ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὴν ΓΕ ἐπὶ τὴν ΒΑ, ἐπιθέτοντες τὸ Γ ἐπὶ τὸ Β.

Πόρισμα Β'. *Δυνάμεθα νὰ προσεκβάλωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κατὰ πολλαπλάσιον οἱονδήποτε δευτέρας εὐθείας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

23. *Ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῇ εὐθεῖα δὲν εἶναι δυνατὸν σημεῖόν τι τῆς προσεκβολῆς νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν προσεκβληθεῖσαν εὐθεῖαν.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον ὅτι προσεκβληθείσης τῆς ΑΒ



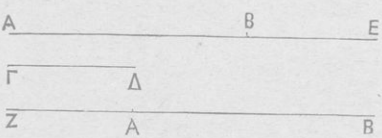
κατὰ τὴν ΒΓΔ, σημεῖόν τι τῆς ΒΓΔ ἔπεσεν ἐπὶ τὸ σημεῖον Ε τῆς προσεκβληθείσης ΑΒ. Τότε μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Ε θὰ ὑπάρχωσι δύο διάφοροι εὐθεῖαι ἡ ΕΒ καὶ ἡ ΕΓΒ· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ α' αἴτημα τοῦ ἐδαφίου 19.

ΟΡΙΣΜΟΙ

24. *Ἀπόστημα* δύο σημείων καλεῖται ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα.

Ἄθροισμα δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ λέγεται ἡ εὐθεῖα ΑΕ, ἣν λαμβάνοντες προσεκβάλλοντες τὴν ΑΒ κατὰ τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἡ προσεκβολὴ γείνῃ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος κατὰ τὸ Ζ, ἄθροι-

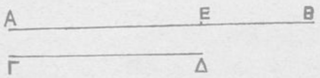


σμα θὰ εἶναι τὸ ΒΖ, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ ΑΕ· διότι ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ἡ ΖΒ ἐπὶ τὴν ΕΑ τιθεμένου τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Ε καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς ΖΑ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΕΒ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΖΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ἴσην ΒΑ τῆς ΑΒΕ, ἐπομένως ἡ ΖΒ θὰ ἐφαρμόσῃ εἰς τὴν ΕΑ.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι εἴτε ἡ ΑΒ προσβληθῇ κατὰ τὴν ΓΔ, εἴτε ἡ ΓΔ κατὰ τὴν ΑΒ, τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις προστιθεμένη εἰς τὴν μικροτέραν ΓΔ δίδει ἄθροισμα τὴν μεγαλειτέραν ΑΒ Εὑρίσκεται δὲ ἡ διαφορὰ διὰ τῆς ἐπιθέσεως τῆς μικροτέρας ἐπὶ τὴν μεγαλειτέραν, τεθέντος τοῦ ἄκρου Γ ἐπὶ τὸ ἄκρον Α, ὅτε τὸ Δ θὰ πέσῃ μεταξὺ Α καὶ Β κατὰ τὸ Ε Τότε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι ἡ ΕΒ.

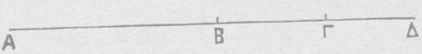


Ἄθροισμα δὲ *πολλῶν εὐθειῶν* εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῆς εὑρεθείσης καὶ τῆς τρίτης εὐθείας, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας.

25. Σημειωσεις. Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἀληθεύουσιν αἱ ἑξῆς προτάσεις, αἵτινες συνήθως λαμβάνονται ὡς φανεραί, ὡς ἀληθεύουσαι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Καλὸν ὅμως θεωροῦμεν νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ προτάσεις αὗται γεωμετρικῶς, διότι ἄλλο εἶναι ἀριθμοὶ καὶ ἄλλο γεωμετρικὰ μεγέθη.

α′) *Ἵνα προσθέσωμεν εἰς εὐθεῖαν δευτέραν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τρίτην, ἀρκεῖ εἰς τὴν πρώτην νὰ προσθέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο.*

Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ΑΒ τὴν ΒΓ καὶ ἔπειτα τὴν ΓΔ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ΑΒ τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῆς ΒΓ καὶ ΓΔ.



β′) *Τὸ ἄθροισμα πολλῶν εὐθειῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γείνῃ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν.*

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως δύο ἐφεξῆς εὐθειῶν δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα, ὅτι δηλαδὴ

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{B}.$$

Ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη εἶναι

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\Gamma)$$
$$\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{B}=\mathrm{A}+(\Gamma+\mathrm{B}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{B}+\Gamma=\Gamma+\mathrm{B}$ ὡς ἐδείξαμεν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθειῶν, ἕπεται καὶ ὅτι

$$\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\Gamma)=\mathrm{A}+(\Gamma+\mathrm{B})$$

ἤτοι $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{B}.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ΄) *Ἐὰν εἰς ἴσας εὐθείας προστεθῶσιν ἴσαι, τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα.*

Διότι δύο ἴσαι εὐθεῖαι κατ᾿ οὐδὲν διαφέρουσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀθροίσματα τῶν ἴσων εὐθειῶν δὲν δύνανται νὰ διαφέρωσι ἢ κατὰ τὴν τάξιν τῶν προσθετέων, ἥτις ὅμως δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα.

δ΄) *Ἐὰν εἰς ἀνίσους εὐθείας προστεθῶσιν ἄνισοι καὶ τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἄνισα.*

Ἐὰν δηλαδὴ

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}$$
$$\Gamma>\Delta$$

θὰ εἶναι $\mathrm{A}+\Gamma>\mathrm{B}+\Delta$.

Διότι ἐὰν ἐπιτεθῶσιν αἱ εὐθεῖαι $\mathrm{B}+\Delta$ καὶ $\mathrm{A}+\Gamma$ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόζωσιν αἱ ἴσαι Α καὶ Β, ἐπειδὴ ἡ Δ θὰ εἶναι μέρος τῆς Γ, καὶ ἡ $\mathrm{B}+\Delta$ θὰ εἶναι μέρος τῆς $\mathrm{A}+\Gamma$.

ε΄) *Ἐὰν εἰς μείζονα εὐθεῖαν προστεθῇ μείζων καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι μεῖζον.*

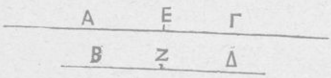
Ἐὰν δηλαδὴ

$$\mathrm{A}>\mathrm{B}$$
$$\Gamma>\Delta$$

θὰ εἶναι καί

$$\mathrm{A}+\Gamma>\mathrm{B}+\Delta.$$

Διότι ἐὰν ἐφαρμοσθῶσιν ἐπ᾿ ἄλληλα τὰ ἀθροίσματα οὕτως, ὥστε



τὸ σημεῖον Ε καθ᾿ ὃ ἑνοῦνται αἱ εὐθεῖαι Α καί Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἑνώσεως τῶν ιεὐθεῶν Β καὶ Δ, ἡ δὲ Β νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν Α, ἡ Β θὰ κατέχῃ μέρος τῆς Α, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ Δ τῆς Γ, ὥστε ἡ $\mathrm{B}+\Delta$ θὰ κατέχῃ μέρος τῆς $\mathrm{A}+\Gamma$· ἄρα θὰ εἶναι μικροτέρα αὐτῆς.

ϛ΄) *Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων εὐθειῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσαι, ἢ ἀπὸ ἴσων ἄνισοι, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἄνισα.*

Ἐὰν δηλαδὴ

$$\mathrm{A}>\mathrm{B}$$
$$\Gamma=\Delta$$

θὰ εἶναι $\mathrm{A}-\Gamma>\mathrm{B}-\Delta$ ἐὰν $\Delta<\mathrm{B}$

ἢ $\Gamma-\mathrm{A}<\Delta-\mathrm{B}$ ἐὰν $\mathrm{A}<\Gamma$

Διότι κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐὰν ὑποτεθῇ $\mathrm{A}-\Gamma=\mathrm{B}-\Delta$ ἢ $\mathrm{A}-\Gamma<\mathrm{B}-\Delta$, προσθέτοντες εἰς τὰς ἴσας ἢ τὰς ἀνίσους τὰς ἴσας Γ καὶ Δ λαμβάνομεν $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ ἢ $\mathrm{A}<\mathrm{B}$, ἅπερ ἀμφότερα εἶναι ἐναντία τῆς ὑποθέσεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐὰν ὑποτεθῇ Γ—Α=Δ—Β ἢ Γ—Α>Δ—Β, διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἀνίσων Α καὶ Β λαμβάνομεν Γ>Δ, ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως Γ=Δ.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ

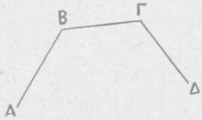
26. Πλὴν τῶν ἀνωτέρω αἰτημάτων ἐπὶ τῆς εὐθείας δεχόμεθα καὶ τὰ ἑξῆς δύο.

Α') *Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ἀνίσων δύναται νὰ εὑρεθῇ πολλαπλάσιον τῆς μικροτέρας ὑπερβαῖνον τὴν μεγαλειτέραν.*

Β') *Δὲν εἶναι δυνατὸν εὐθεῖα ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῇ νὰ περιέχηται πάντοτε ἐν δοθέντι σχήματι, δηλαδὴ τὰ σημεῖα τῆς ἐκβαλλομένης εὐθείας νὰ ἦναι πάντοτε καὶ σημεῖα τοῦ σχήματος.*

ΟΡΙΣΜΟΙ

27. Γραμμὴ συνισταμένη ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν, μὴ οὖσα δὲ ἡ ὅλη εὐθεῖα, καλεῖται *τεθλασμένη γραμμή*. Τοιαύτη εἶναι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ. *Καμπύλη* δὲ γραμμὴ καλεῖται ἡ μήτε εὐθεῖα μήτε τεθλασμένη οὖσα.



Ὅτι ὑπάρχει γραμμὴ καμπύλη θὰ δειχθῇ ἀλλαχοῦ.

ΑΙΤΗΜΑ

28. *Ὑπάρχει ἐπιφάνεια τοιαύτη, ὥστε ἡ διὰ δύο τυχόντων σημείων αὐτῆς διερχομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Ἡ τοιαύτη ἐπιφάνεια καλεῖται *ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* ἢ ἁπλῶς *ἐπίπεδον*.

Τὸ ἐπίπεδον θεωρεῖται ἐκτεινόμενον ἐπ' ἄπειρον, ὅπως καὶ ἡ εὐθεῖα.

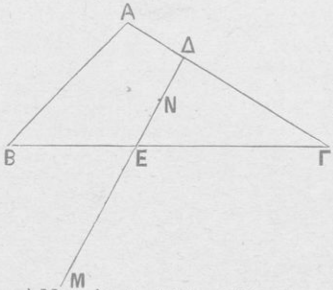
ΘΕΩΡΗΜΑ

29. *Δύο ἐπίπεδα ἔχοντα κοινὰ τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα καὶ ἓν μόνον ἐπίπεδον ἀποτελοῦσιν.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα, ἃ καλοῦμεν Π καὶ Ρ, ἔχοντα κοινὰ τὰ μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Λέγω ὅτι πᾶν σημεῖον ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων εἶναι καὶ τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὅτι κατ' ἀκολουθίαν τὰ δύο ἐπίπεδα ταὐτίζονται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἂς ἐπιζευχθῶσι σύνδυο τὰ σημεῖα Α, Β, Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα ἐφ' ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν σημεῖόν τι Μ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ δεύτερον σημεῖον Ν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐκ τῶν κειμένων ἐντὸς τοῦ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ περατουμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου τούτου, καὶ διὰ τῶν σημείων Μ



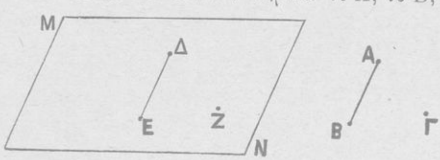
καὶ Ν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΝ, αὕτη ἐκβαλλομένη ἱκανῶς θὰ συναντήσῃ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ εἰς δύο τοὐλάχιστον σημεῖα Δ καὶ Ε. Διότι ἐὰν νοήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ἐκβαλλομένην ἑκατέρωθεν τοῦ Ν, αὕτη θὰ ἐξέλθῃ ποτὲ τῆς πεπερασμένης ἐπιφανείας ΑΒΓ πρὸς ἑκάτερα τὰ μέρη (26). Ἀλλὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ σημεῖα, διὰ τοῦτο δὲ καὶ ὅλη ἡ εὐθεῖα ΝΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ἄρα καὶ τὸ σημεῖον ταύτης Μ.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ σημεῖον. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται καὶ ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι καὶ τοῦ Π σημεῖον. Ἄρα τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα καὶ ἓν μόνον ἐπίπεδον ἀποτελοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΙΤΗΜΑ

30. *Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων διέρχεται πάντοτε ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν τὰ δοθέντα σημεῖα τὸ Α, τὸ Β, καὶ τὸ Γ. Ἔστω δὲ καὶ ἐπίπεδον τὸ ΜΝ. Λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο δύναται νὰ μετακινηθῇ οὕτως, ὥστε νὰ διέλθῃ διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ.



Ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ τῆς ΑΒ, καὶ ἐπὶ εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἂς ληφθῇ ἡ ΔΕ ἴση τῇ ΑΒ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔπειτα δὲ ἡ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου μεταφερομένη ἂς ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒ.

Ἐὰν τὸ τρίτον τῶν δοθέντων σημείων κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τῶν ἄλλων δύο, τὸ ἐπίπεδον θὰ διέλθῃ δι' αὐτοῦ, διότι ἡ διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε διερχομένη εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίτον σημεῖον εὑρίσκεται, κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ. Ἐὰν ὅμως τὸ τρίτον σημεῖον δὲν κεῖται ἀπ' εὐθείας, ὡς ἐν τῷ ἡμετέρῳ σχήματι τὸ Γ, *τότε τὸ ἐπίπεδον* ΜΝ *περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ θὰ διέλθῃ ποτὲ διὰ τοῦ Γ. Μία δὲ καὶ μόνη εἶναι ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἐν ᾗ τὸ Γ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τὸ* Ζ· *ὅσον δηλαδὴ ὀλίγον καὶ ἐὰν μετακινήσωμεν τὸ ἐπίπεδον στρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν ΑΒ, τὸ σημεῖον Γ θὰ παύσῃ νὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.* Τοῦτο ὅμως δεχόμεθα ἄνευ ἀποδείξεως, καὶ εἰς τοῦτο συνίσταται τὸ ἀνωτέρω αἴτημα.

31. **Πόρισμα Α'**. *Διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων διέρχεται ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον* (29).

32. **Πόρισμα Β'**. *Διὰ δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ διὰ δοθέντος σημείου Γ μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς διέρχεται ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον· ὡσαύτως δὲ καὶ διὰ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐχουσῶν κοινὸν τὸ σημεῖον Α καὶ μὴ ἀποτελουσῶν εὐθεῖαν.*

33. **Πόρισμα Γ'**. *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον.*

Ἀρκεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν νὰ διέλθῃ διὰ τριῶν σημείων τοῦ ἑτέρου μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

34. Ἡ γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Ἐν τῷ πρώτῳ μέρει θεωροῦνται σχήματα, ὧν πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ σχήματα μὴ ὑποκείμενα εἰς τὸν περιορισμὸν τοῦτον. Καλεῖται δὲ τὸ μὲν πρῶτον μέρος *ἐπίπεδος γεωμετρία* ἢ καὶ *γεωμετρία δύο διαστάσεων*, τὸ δὲ δεύτερον *στερεομετρία* ἢ καὶ *γεωμετρία τριῶν διαστάσεων*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΣ

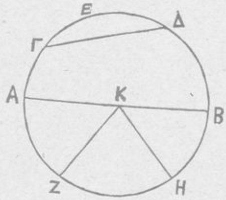
ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΟΡΙΣΜΟΙ

35. ***Κύκλος*** καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη ὑπὸ γραμμῆς, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἴσον ἀπόστημα ἔχουσιν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τοῦ σχήματος.

Καλεῖται δὲ ἡ μὲν γραμμὴ ***περιφέρεια***, τὸ δὲ σημεῖον ***κέντρον*** τοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος γεννᾶται ἐὰν εὐθεῖα πεπερασμένη οἷον ἡ ΚΑ περιστραφῇ περὶ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς Κ, μένουσα πάντοτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν. Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ἡ μὲν ΚΑ θέλει γράψει τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἄκρον αὐτῆς Α τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.



Ἀκτὶς τοῦ κύκλου καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένη, οἷα ἡ ΚΖ. Ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΑΒ.

Πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ἑκάστη αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα δύο ἀκτίνων.

Τόξον καλεῖται μέρος τῆς περιφερείας, οἷον τὸ ΓΕΔ· ἡ δὲ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ΓΔ καλεῖται ***χορδὴ*** τοῦ τόξου τούτου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τμῆμα κύκλου καλεῖται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, οἷον τὸ ΓΕΔ.

Τομεὺς δὲ καλεῖται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου ἠγμένων ἀκτίνων· οἷον τὸ σχῆμα ΚΖΗ.

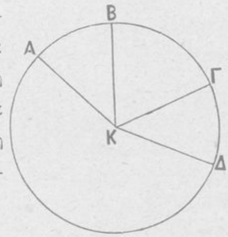
Εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς γενέσεως τοῦ κύκλου ὅτι παντὸς σημείου κειμένου *ἐντὸς* αὐτοῦ, ἤτοι μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστημα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος· παντὸς δὲ σημείου κειμένου *ἐκτὸς* τοῦ κύκλου τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστημα εἶναι μεῖζον τῆς ἀκτῖνος. Καὶ τἀνάπαλιν σημεῖόν τι εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καθ' ὅσον τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστημα αὐτοῦ εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον ἢ μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος.

Εἶναι προσέτι φανερὸν ὅτι δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι. Διότι ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐπιτεθῇ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ ἑτέρου, αἱ περιφέρειαι αὐτῶν θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπ' ἀλλήλας, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ αὐτοὶ οἱ κύκλοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

36. ***Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ τῆς περιφερείας, ἧς εἶναι μέρος.***

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ τόξον ΑΒ. Ἀχθεισῶν τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, σχηματίζεται ὁ τομεὺς ΑΚΒ. Τὸν τομέα τοῦτον δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν ἀλλαχοῦ τοῦ κύκλου, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ ἄλλην τινὰ ἀκτῖνα ΚΓ, ὅτε καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΒ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΚΔ, καὶ τὸ τόξον ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῳ ἐπὶ τὸ τόξον ΓΔ.



Σημειωσις. Ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὸν τομέα ΑΚΒ ἐπὶ τὸν ΔΚΓ ἄλλως, ἐφαρμόζοντες τὴν ΚΒ ἐπὶ τὴν ΚΓ, τότε καὶ ἡ ΚΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΚΔ, καὶ τὸ τόξον ΒΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ τόξον ΓΔ· ἄλλως τὰ αὐτὰ θὰ ἦσαν καὶ ἴσα καὶ ἄνισα· ὅπερ ἀδύνατον. Ὥστε δύο ἴσα τόξα δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα διττῶς, ὅπως καὶ δύο ἴσαι εὐθεῖαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΡΙΣΜΟΣ

37. Ἐὰν μᾶς δοθῶσι τόξα ἔχοντα ἴσας τὰς ἀκτῖνας, καὶ ἐπὶ περιφερείας ἐχούσας ἴσην καὶ ταῦτα ἀκτῖνα λάβωμεν τὸ τόξον ΑΒ ἴσον τῷ πρώτῳ τῶν δοθέντων (σχ. τὸ ἀνωτέρω), καὶ ἐφεξῆς τὸ ΒΓ ἴσον τῷ δευτέρῳ, τὸ ΓΔ ἴσον τῷ τρίτῳ, καὶ οὕτω καθεξῆς, τὸ τὰ τόξα ταῦτα μέρη ἔχον τόξον ΑΒΓΔ καλεῖται ἄθροισμα τῶν δεδομένων τόξων.

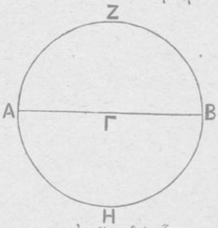
Διαφορὰ δὲ δύο τόξων εἶναι τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται, ἐὰν ἐπὶ τοῦ μεγαλειτέρου ληφθῇ μέρος ἴσον τῷ μικροτέρῳ, ὡς ἀρχῆς τοῦ μέρους ληφθέντος τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων τοῦ μεγαλειτέρου τόξου. Οἷον τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν τόξων ΑΒΓ καὶ ΒΓ.

Ἐπὶ τῶν τόξων δὲ ἀληθεύουσι πᾶσαι αἱ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 25 περὶ τῶν εὐθειῶν προτάσεις, καὶ ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν ἀπαραλλάκτως τρόπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

38. *Πᾶσα διάμετρος τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τήν τε περιφέρειαν καὶ τὸν κύκλον.*

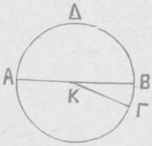
Διότι ἐὰν τὸ τμῆμα ΑΖΒ περιστραφῇ περὶ τὴν ΑΒ διάμετρον



μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ τμῆμα ΑΗΒ, τὸ τόξον ΑΖΒ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ τόξον ΑΗΒ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ τμῆμα ΑΖΒ ἐπὶ τὸ ΑΗΒ. Διότι ἐὰν σημεῖά τινὰ τοῦ τόξου ΑΖΒ ἔπιπτον ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΗΒ, τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἀπόστημα αὐτῶν θὰ ἦτο μικρότερον ἢ μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος· ὅπερ ἄτοπον. Διότι καὶ μετὰ τὴν γενομένην μετάθεσιν πάντων τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΖΒ τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστημα θὰ εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

39. *Αἱ εἰς τὰ ἄκρα ἡμιπεριφερείας ΑΔΒ ἠγμέναι ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἀποτελοῦσαι διάμετρον.*



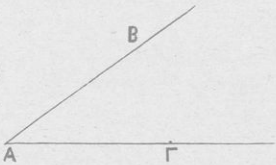
Διότι ἐὰν ἡ ΚΒ καὶ ἡ ΚΑ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἔστω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΚ ἡ ΚΓ. Τῆς ΑΚΓ οὔσης διαμέτρου, θὰ εἶναι τόξον ΑΔΓ = τόξῳ ΑΕΓ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΔΒ εἶναι μικρότερον τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΔΓ, ἄρα καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΑΕΓ, καὶ πολλῷ μᾶλλον τοῦ ΑΕΒ· ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως ὅτι ΑΔΒ=ΑΕΒ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

40. Δύο εὐθεῖαι, αἵτινες ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δὲν ἀποτελοῦσι μίαν μόνην εὐθεῖαν, λέγονται ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν*. Οἷον αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τοῦ σημείου Α, μὴ οὖσαι ἡ ἑτέρα προσεκβολὴ τῆς ἑτέρας, σχηματίζουσι γωνίαν.



Τὸ σημεῖον Α τὸ κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν καλεῖται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀπεριόριστοι τὸ μῆκος, λέγονται *πλευραὶ* τῆς γωνίας.

Ἡ γωνία σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς, ἢ καὶ διὰ τριῶν γραμμάτων, τιθεμένων τοῦ μὲν ἐπὶ της ἑτέρας τῶν πλευρῶν τοῦ δὲ ἐπὶ τῆς ἑτέρας. Γράφεται δὲ ἢ ἀναγινώσκεται τὸ τῆς κορυφῆς γράμμα μεταξὺ τῶν ἄλλων δύο. Οἷον λέγομεν ἡ γωνία Α, ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ.

Δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ λέγονται *ἴσαι*, ἐὰν τεθείσης τῆς κορυφῆς Ε τῆς ἑτέρας αὐτῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν Β τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς ΕΔ πλευρᾶς ἐφαρμοσθείσης ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΑ, καὶ στραφέντος τοῦ σχήματος ΔΕΖ περὶ τὴν ΒΑ μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἀφ᾽ οὗ κεῖται ἡ ΑΒΓ, καὶ ἡ δευτέρα πλευρὰ ΕΖ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ἑτέραν ΒΓ.

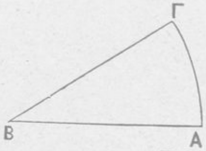
Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

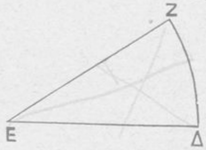
ΘΕΩΡΗΜΑ

41. *Ἐὰν δύο γωνίαι ἐφαρμόζωσιν ἐπιτιθεμένης πλευρᾶς τινος τῆς δευτέρας ἐπὶ πλευράν τινα τῆς πρώτης, δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι καὶ ἐὰν ἡ αὐτὴ πλευρὰ τῆς δευτέρας ἐπιτεθῇ ἐπὶ τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς πρώτης.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλαις ἐπιτιθεμένης τῆς ΕΔ ἐπὶ τὴν ΒΑ· λέγω ὅτι δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι, καὶ ἐπιτιθεμένης τῆς ΕΖ ἐπὶ τὴν ΒΑ.





Διότι μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν Ε καὶ Β, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας ἃς γραφῶσι περιφέρειαι, ὧν τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν περιλαμβανόμενα μέρη εἶναι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΔΖ. Ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ἡ ΕΔ ἐπὶ τὴν ΒΑ, ἡ ΕΖ ἐξ ὑποθέσεως θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ τὸ τόξον ΔΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ ΑΓ. Ἐὰν ἔπειτα ἐφαρμόσωμεν τὴν ΕΖ ἐπὶ τὴν ΒΑ, καὶ περιστρέψωμεν τὸ σχῆμα ΖΕΔ περὶ τὴν ΒΑ μέχρις οὗ τὸ ἐπίπεδον ΖΕΔ πέσῃ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ἡ ΕΔ λέγω ὅτι θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τὸ Γ. Διότι ἐὰν τὸ Δ πέσῃ μεταξὺ τοῦ Α καὶ Γ, ἢ πέραν τοῦ Γ, τὸ τόξον ΔΖ θὰ εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ΑΓ· ἐδείχθη δὲ προηγουμένως καὶ ἴσον· ὥστε τὰ αὐτὰ θὰ εἶναι καὶ ἴσα καὶ ἄνισα· ἅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

42. *Ἐν ἴσοις κύκλοις ἢ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἴσαι γωνίαι ἔχουσαι τὰς κορυφὰς αὐτῶν πρὸς τῷ κέντρῳ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων.*

Καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἐπι ἴσων τόξων βαίνουσαι πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

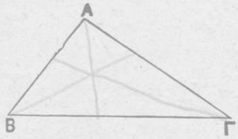
43. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμὰς καλεῖται *σχῆμα εὐθύγραμμον*. Αἱ περιέχουσαι δὲ τὸ σχῆμα εὐθεῖαι καλοῦνται πλευραὶ αὐτοῦ.

Καὶ *τρίπλευρον* μὲν ἢ *τρίγωνον* καλεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν σχῆμα, *τετράπλευρον* δὲ τὸ ὑπὸ τεσσάρων, *πολύπλευρον* δὲ ἢ *πολύγωνον* τὸ ὑπὸ περισσοτέρων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενον.

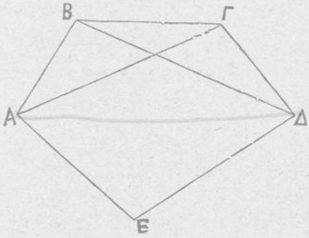
Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν πλευρῶν εὐθυγράμμου σχήματος καλεῖται ***περίμετρος*** αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσιν αἱ πλευραί, καλοῦνται *κορυφαὶ* τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος, αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι δύο κορυφὰς μὴ προσεχεῖς καλοῦνται *διαγώνιοι*.



Οἷον τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον, οὗ πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ, καὶ κορυφαὶ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.



Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι πολύγωνον· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, γωνίαι δὲ αἱ ΑΒΓ, ΒΓΔ, κτλ. κορυφαὶ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, διαγώνιοι αἱ ΑΓ, ΒΔ κτλ, καὶ περίμετρος ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕ.

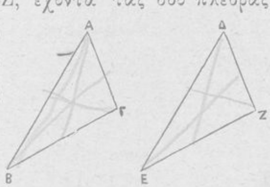
Ἵνα σχηματίσωμεν τρίγωνον ἀρκεῖ νὰ ἐπιζεύξωμεν σύνδυο τρία σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα.

Ἵνα σχηματίσωμεν πολύγωνον ἐπιζευγνύομεν σημεῖόν τι Α τοῦ ἐπιπέδου μετὰ δευτέρου σημείου Β· ἔπειτα τὸ Β μετά τινος σημείου Γ μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ, ἔπειτα τὸ Γ μετά τινος σημείου Δ μὴ κειμένου ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΑ, ΒΓ, ἔπειτα τὸ Δ μετά τινος σημείου μὴ κειμένου ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· τέλος δὲ τὸ Ε μετὰ τοῦ σημείου Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

44. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς δύο πλευράς, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, ἤτοι τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ, καὶ τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην τῇ ΕΔΖ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



Διότι ἐφαρμοζομένου τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Δ σημείου ἐπὶ τὸ Α, τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲ ΔΕ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΑΒ, θέλει ἐφαρμόσει καὶ το Ε σημεῖον ἐπὶ τὸ Β, διότι εἶναι ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ. Ἀφου δὲ ἐφαρμόσῃ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ θέλει ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΔΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ, καὶ τὸ σημεῖον Ζ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ Γ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΔΖ. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ Ε ἐφήρμοσεν ἐπὶ τὸ Β καὶ τὸ Ζ ἐπί τὸ Γ, θέλει ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΕΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ, διότι μεταξὺ δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα ὑπάρχει. Ὥστε τὰ δύο τρίγωνα θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπ' ἄλληλα· ἄρα εἶναι ἴσα. Θέλουσι δὲ ἔχει τὴν γωνίαν ΑΓΒ ἴσην τῇ ΔΖΕ καὶ τὴν ΑΒΓ ἴσην τῇ ΔΕΖ, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην τῇ πλευρᾷ ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς δύο πλευράς, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι (1).

ΘΕΩΡΗΜΑ

45. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ μίαν πλευράν, καὶ δύο γωνίας ἴσας μὲ τὰς δύο γωνίας, τὰς εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς προσκειμένας, ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ. τὸ ἀπέναντι), ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην τῇ ΕΖ, τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην τῇ ΔΕΖ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ ἴσην τῇ ΔΖΕ· λέγω ὅτι τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Διότι ἐφαρμοζομένου τοῦ ΔΕΖ τριγώνου ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν σημείου Ε ἐπὶ τὸ Β, τῆς δὲ εὐθείας ΕΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ, θέλει ἐφαρμόσει καὶ τὸ σημεῖον Ζ ἐπὶ τὸ Γ, διότι εἶναι ἴσαι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΔ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΒΑ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει τότε εὑρίσκεσθαι ἐπὶ τῆς ΒΑ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΖΔ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ΒΓΑ καὶ ΕΖΔ, καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρίσκεσθαι ἐπὶ τῆς ΓΑ ἢ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ θὰ εἶναι κοινὸν τῶν εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΓΑ, αὐ-

(1) Τὴν μετὰ τὴν ἀπόδειξιν ἐπανάληψιν τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως θέλομεν παραλείπει ἐν τοῖς ἑξῆς διὰ συντομίαν. Ἐν τῇ διδασκαλίᾳ ὅμως εἶναι καλὸν νὰ γίγνηται πάντοτε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται δὲ πλὴν τοῦ Α οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχωσι, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον Δ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ Α, ἐπομένως καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ ἐπὶ τὴν ΒΑ, καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τὴν ΓΑ, καὶ ἡ γωνία ΕΔΖ ἐπὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

46. Καλεῖται τρίγωνον *ἰσόπλευρον* μὲν τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας, *ἰσοσκελὲς* δὲ τὸ δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, *σκαληνὸν* δὲ τὸ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους ἔχον.

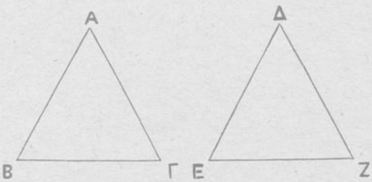
Ἰσογώνιον δὲ τρίγωνον καλεῖται τὸ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας ἔχον.

Βάσις τριγώνου καλεῖται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐν δὲ τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ βάσις λαμβάνεται συνήθως ἡ ἄνισος ταῖς λοιπαῖς πλευρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

47. *Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἀντικείμεναι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἔχον ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· λέγω ὅτι αἱ εἰς τὰς πλευρὰς ταύτας ἀντικείμεναι γωνίαι ΑΓΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι.



Διότι ἂς θεωρήσωμεν τρίγωνον ἐφαρμόζον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ καὶ ἔπειτα ἀποχωρισθὲν ἀπ' αὐτοῦ τὸ ΔΕΖ. Ὑποθέτομεν δὲ ὅτι πρὸ τοῦ ἀποχωρισμοῦ ἐφήρμοζεν ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Τώρα ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ κατ' ἄλλον τρόπον, ἐφαρμόζοντες δηλαδὴ τὴν ΔΖ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒ. Τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ἐχουσῶν τὰς κορυφὰς Α καὶ Δ γωνιῶν, καὶ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτῆς, διότι ΔΕ=ΑΒ=ΑΓ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι, καὶ ἡ γωνία ΔΖΕ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒΓ. Εἶναι λοιπὸν ΔΖΕ=ΑΒΓ, Ἀλλὰ ΔΖΕ=ΑΓΒ. Αἱ δύο ἄρα γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ὡς ἴσαι τῇ αὐτῇ γωνίᾳ ΔΖΕ εἶναι καὶ ἀλλήλαις ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ

48. *Πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

49. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ εἰς τὰς γωνίας ταύτας ἀντικείμεναι πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἔστω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. τὸ ἀνωτέρω) ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΓΒ· λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ.

Διότι ἔστω ὡς ἀνωτέρω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἐπιθέσωμεν τὸ ΔΕΖ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ, ἐπιθέτοντες τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Β καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ΖΕ ἐπὶ τὴν ἴσην ΒΓ. Τότε τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι κατὰ τὸ θεώρημα 45 καὶ ἡ ΖΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Εἶναι λοιπὸν ΔΖ=ΑΒ· ἀλλὰ ΔΖ=ΑΓ. Αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ ὡς ἴσαι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΔΖ εἶναι καὶ ἀλλήλαις ἴσαι· ὅ. ἔ. δ.

Σημειωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου. Λέγεται δὲ θεώρημά τι ἀντίστροφον ἑτέρου, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶναι τὸ ἀποδεικτέον ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ τἀνάπαλιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

50. *Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.*

ΑΞΙΩΜΑ

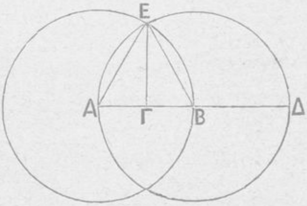
51. *Γραμμὴ κειμένη ὅλη ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ συνάπτουσα σημεῖον τῶν ἐντὸς ἐπιπέδου σχήματος κειμένων μετὰ σημείου τοῦ ἐπιπέδου κειμένου ἐκτὸς τοῦ σχήματος συναντᾷ ἀναγκαίως τὴν γραμμήν, εἰς ἣν περατοῦται τὸ σχῆμα.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

52. *Ἐκ σημείου δοθέντος δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἑτέρα εὐθεῖα οὕτως, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι δύο ἐφεξῆς γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τὸ ἐπὶ ταύτης δοθὲν ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



μεῖον τὸ Γ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖά τις ΓΕ οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι ΑΓΕ καὶ ΒΓΕ νὰ εἶναι ἴσαι.

Λύσις. Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας τὸ Α, καὶ ἔπειτα ἂς ληφθῇ ἡ ΓΒ ἴση τῇ ΓΑ· ἔπειτα δὲ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΑ ἕτερος κύκλος. Ἡ περιφέρεια τοῦ δευτέρου κύκλου ὡς συνάπτουσα τὸ ἐντὸς τοῦ πρώτου σημεῖον Α μὲ τὸ ἐκτὸς αὐτοῦ Δ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν τοῦ πρώτου εἰς σημεῖόν τι Ε. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΕΑ καὶ ΕΒ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον· διότι αἱ πλευραὶ ΕΑ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσαι τῇ ΑΒ ὡς ἀκτῖνες κύκλων γραφέντων μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ. Ἄρα (47) αἱ γωνίαι ΕΑΒ καὶ ΕΒΑ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΕΑΓ καὶ ΕΒΓ ἔχουσι τὴν ΕΑ πλευρὰν ἴσην τῇ ΕΒ, τὴν ΑΓ ἴσην τῇ ΒΓ ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὴν γωνίαν ΕΑΓ ἴσην τῇ ΕΒΓ, ὡς ἐδείχθη. Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (44), καὶ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν ΕΓΑ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΕΓΒ. Ἄρα ἐκ τοῦ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ δοθέντος σημείου Γ ἤχθη εὐθεῖα ἡ ΓΕ ἀποτελοῦσα ἴσας τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΕΓΑ καὶ ΕΓΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Σημειωσις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κατασκευάζεται τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

53. Ὅταν εὐθεῖα ἀρχομένη ἀπό τινος σημείου δευτέρας εὐθείας σχηματίζῃ μετὰ ταύτης τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν καλεῖται *ὀρθὴ γωνία*, καὶ ἡ πρώτη εὐθεῖα λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τῆς δευτέρας.

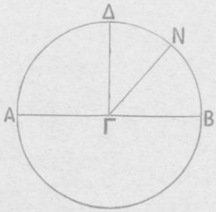
Οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρω σχήματι αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΓΕ καὶ ΒΓΕ εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ ΕΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.

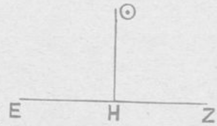
ΘΕΩΡΗΜΑ

54. *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Ἔστω ἡ ΔΓ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΘΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΖ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής





λέγω ὅτι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι ταῖς ὀρθαῖς ΕΗΘ, ΖΗΘ. Διότι μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ἂς γραφῇ κύκλος. Ἐπιτιθεμένου τοῦ σημείου Η ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς ΕΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΗΘ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΗΘ δὲν ἐφαρμόζει ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀλλὰ λαμβάνει τὴν θέσιν ΓΝ. Τῶν γωνιῶν ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ οὐσῶν ἴσων, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΒΔ. Καὶ πάλιν τῶν γωνιῶν ΑΓΝ καὶ ΒΓΝ οὐσῶν ἴσων, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα ΑΔΝ καὶ ΒΝ. Ἀλλ' εἶναι ΑΔ$<$ΑΔΝ, ἢ τῇ ἀντικαταστάσει τοῦ ΑΔ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΒΔ καὶ τοῦ ΑΔΝ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΒΝ,

$$\text{ΒΔ} < \text{ΒΝ}.$$

Ἀλλὰ τὸ ΒΝ εἶναι μέρος τοῦ ΒΔ· ἤτοι ΒΝ$<$ΒΔ. Ὥστε τὸ ΒΝ θὰ εἶναι καὶ μεγαλείτερον τοῦ ΒΔ καὶ μικρότερον αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΗΘ δὲν δύναται νὰ λάβῃ ἄλλην θέσιν ἢ νὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τότε δὲ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΕΗΘ καὶ ΖΗΘ ἐφαρμόζουσιν ἐπὶ τὰς ὀρθὰς ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ. Ἄρα πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἀλλήλαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

55. *Ἐκ δοθέντος σημείου Γ εὐθείας μία μόνη κάθετος ἐπὶ ταύτην ὑπάρχει.*

ΟΡΙΣΜΟΙ

56. Ἂς θεωρήσωμεν εὐθεῖαν, ἥτις ἐφαρμόζουσα κατὰ πρῶτον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΓΒ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον ταύτης Γ

πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, λαμβάνουσα θέσεις, ὧν τινας σημειοῦμεν, τὴν ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΑ, ΓΗ, ΓΘ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν ΓΒ. Τότε πᾶν σημεῖον τῆς στρεφομένης εὐθείας θὰ γράψῃ περιφέρειαν· οἷον τὸ Β θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν ΒΔΕΖΑΗΘΒ. Αὐτὴ δὲ ἡ στρεφομένη εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῆς μενούσης ΓΒ διαφόρους γωνίας ΒΓΔ, ΒΓΕ, ΒΓΖ, ΒΓΗ, ΒΓΘ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καθὼς δὲ τὸ τόξον ΒΔΕ τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΓΕ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ τόξου ΒΔ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΓΔ, οὕτω καὶ ἡ γωνία ΒΓΕ λέγεται μεγαλειτέρα τῆς ΒΓΔ, δηλαδὴ θεωρεῖται ἡ γωνία ΒΓΔ μέρος τῆς γωνίας ΒΓΕ, ἂν καὶ διὰ νὰ λεχθῇ τι μέρος ἄλλου, πρέπει ἀμφότερα τὰ σχήματα νὰ εἶναι πανταχόθεν πεπερασμένα, ὅπερ δὲν συμβαίνει ἐπὶ τῶν γωνιῶν.

Καθὼς δὲ τὸ τόξον ΒΔΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΒΔ καὶ ΔΕ, οὕτω καὶ ἡ γωνία ΒΓΕ θεωρεῖται ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΔ καὶ ΔΓΕ. Ὁμοίως αἱ γωνίαι ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν γωνίαν ΒΓΖ, τὴν περιλαμβάνουσαν μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ τόξον ΒΔΕΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΒΔ, ΔΕ, ΕΖ τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν ἐκείνων.

Εἶναι δὲ φανερὸν ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν ὅτι τὸ ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μία ἢ ὁσαιδήποτε τῶν προστιθεμένων γωνιῶν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη δι' εὐθειῶν· οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΕ καὶ ΕΓΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, καὶ ΕΓΖ. Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΕ καὶ ΕΓΑ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ.

Ἀφοῦ δὲ ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΔ καὶ ΔΓΕ, ἑκατέρα τούτων εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ΒΓΕ καὶ τῆς ἑτέρας, δηλονότι, ΒΓΔ=ΒΓΕ—ΔΓΕ, καὶ ΔΓΕ=ΒΓΕ—ΒΓΔ.

Ὅταν ὁσωνδήποτε ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, αἱ ἔσχαται πλευραὶ ΓΒ καὶ ΓΑ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὅτε καὶ τὸ τόξον ΒΔΕΖΑ εἶναι ἥμισυ περιφερείας, τότε λέγεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι δύο ὀρθαί. Διότι γνωρίζομεν (54) ὅτι εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ τέταρτον περιφερείας, καὶ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡμιπεριφέρεια. Ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί, ἤτοι ἐὰν τὸ τόξον ΒΔΕΖΑ εἶναι ἡμιπεριφέρεια, τότε αἱ ἔσχαται πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (39).

Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνονται φανεραὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις.

Ὅταν εὐθεῖά τις ΓΕ ἄρχηται ἔκ τινος σημείου Γ ἄλλης εὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θείας ΑΒ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΕΓΒ καὶ ΕΓΑ εἶναι δύο ὀρθαί.

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ΕΓΒ, ΕΓΑ εἶναι δύο ὀρθαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΓΒ καὶ ΓΑ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐφεξῆς περί τι σημεῖον Γ γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, ΑΓΗ, ΗΓΘ, ΘΓΒ, αἵτινες περιλαμβάνουσι μεταξὺ τῶν πλευρῶν των ὁλόκληρον περιφέρειαν, εἶναι τέσσαρες ὀρθαί.

Ὅταν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, ΑΓΗ ὑπερβαίνῃ τὰς δύο ὀρθὰς, ὅταν δηλαδὴ τὸ τόξον ΒΔΕΖΑΗ εἶναι μεγαλείτερον ἡμιπεριφερείας, αἱ ἔσχαται πλευραὶ ΓΒ καὶ ΓΗ λέγεται ὅτι σχηματίζουσι γωνίαν ΒΓΗ μεγαλειτέραν δύο ὀρθῶν. Ἵνα δὲ διακρίνηται αὕτη ἀπὸ τῆς γωνίας ΒΓΗ, ἥτις περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας τόξον ΒΘΗ, λέγεται ἡ μὲν πρώτη *κυρτὴ* γωνία, ἡ δὲ δευτέρα *κοίλη*. Συνήθως ὅμως λέγοντες γωνίαν δύο εὐθειῶν ἐννοοῦμεν τὴν κοίλην.

Πᾶσα γωνία μικροτέρα ὀρθῆς καλεῖται *ὀξεῖα γωνία*, πᾶσα δὲ γωνία μεγαλειτέρα μὲν ὀρθῆς μικροτέρα δὲ δύο ὀρθῶν καλεῖται *ἀμβλεῖα γωνία*.

Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν εἶναι 1 ὀρθὴ, ἑκατέρα τῶν γωνιῶν λέγεται **συμπλήρωμα** τῆς ἑτέρας· ὅταν δὲ τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ, ἑκατέρα αὐτῶν λέγεται **παραπλήρωμα** τῆς ἑτέρας.

Σημειωσις. Ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τόξων ἀνηκόντων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἀληθεύουσιν ὅσα καὶ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς εὐθειῶν. Ὅσα δὲ ἀληθεύουσιν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τόξων ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς γωνιῶν.

Παραδείγματος χάριν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε τόξων μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε καὶ ἂν προστεθῶσι τάξιν. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ἀμέσως ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε γωνιῶν μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσιν.

Ὁμοίως ἐὰν ἀπὸ ἴσων τόξων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα καὶ τὰ ὑπόλοιπα

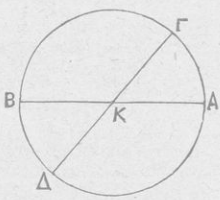
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ εἶναι ἴσα. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι ἐὰν ἀπὸ ἴσων γωνιῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσαι γωνίαι, αἱ ὑπολειπόμεναι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

57. *Εὐθεῖαι ἓν μόνον κοινὸν ἔχουσαι σημεῖον διασταυροῦνται, δηλονότι τὸ κοινὸν σημεῖον διαιρεῖ ἑκατέραν εἰς μέρη κείμενα πρὸς διάφορα μέρη τῆς ἑτέρας.*

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον Κ· λέγω ὅτι τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ κοινοῦ σημείου μέρη τῆς ἑτέρας, τὸ ΚΓ καὶ τὸ ΚΔ, κεῖνται πρὸς διάφορα μέρη τῆς ἑτέρας εὐθείας ΑΒ.



Διότι μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γράψωμεν περιφέρειαν. Τὸ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ Κ μέρος τῆς εὐθείας ΓΔ τὸ ΚΓ θὰ διαιρῇ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ εἰς δύο τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἡμιπεριφερείας ληφθῇ τὸ τόξον ΒΔ ἴσον τῷ ΑΓ, τὸ τόξον ΓΒΔ θὰ εἶναι ἡμιπεριφέρεια· διότι ΓΒ + ΒΔ = ΓΒ + ΓΑ = ἡμιπεριφερείᾳ· κατ' ἀκολουθίαν (39) ἡ ἀκτὶς ΚΔ θὰ κεῖται ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΚ, δηλονότι ἡ προσεκβολὴ τῆς ΓΚ εἶναι ἡ ΚΔ. Ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι τῆς εὐθείας ΓΔ τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ Κ σημεῖα κεῖνται πρὸς διάφορα τῆς ἑτέρας εὐθείας ΒΑ μέρη.

ΟΡΙΣΜΟΣ

58. Ἐὰν αἱ πλευραὶ γωνίας τινὸς εἶναι αἱ προσεκβολαὶ τῶν πλευρῶν ἑτέρας γωνίας, αἱ δύο αὗται γωνίαι καλοῦνται *κατὰ κορυφὴν γωνίαι.*

Τοιαῦται εἶναι αἱ γωνίαι ΑΚΓ καὶ ΒΚΔ τοῦ προηγουμένου σχήματος· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΓ καὶ ΑΚΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

59. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Διότι ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Κ τῶν γωνιῶν καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γραφῇ περιφέρεια, τὰ τόξα ΑΓΒ καὶ ΓΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἑκάτερον εἶναι ἥμισυ περιφερείας. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν ἴσων

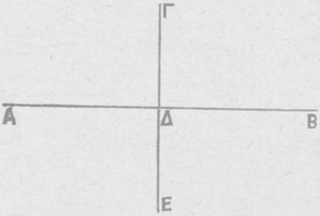
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τούτων τόξων ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ τόξον ΒΓ, τὰ ὑπόλοιπα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα· ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΓ καὶ ΒΚΔ εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἐὰν ἀπὸ τὰς ἡμιπεριφερείας ΑΓΒ καὶ ΓΑΔ ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ τόξον ΑΓ, τὰ ὑπολειπόμενα τόξα ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσα, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΓ καὶ ΑΚΔ εἶναι ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

60. *Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἡ προσεκβολὴ τῆς ΓΔ ἡ ΔΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΕ.*



Διότι αἱ γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΒΔΕ ὡς κατὰ κορυφὴν τῶν ὀρθῶν ΓΔΒ καὶ ΓΔΑ εἶναι καὶ αὐταὶ ὀρθαί.

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

61. *Παράλληλοι* καλοῦνται δύο εὐθεῖαι, αἵτινες κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσι πρὸς ἑκάτερα τὰ μέρη.

Ὅτι ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι παράλληλοι θὰ δειχθῇ ἐν τῷ ἀμέσως ἑπομένῳ θεωρήματι.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης ΕΖ σχηματίζουσι κατὰ τὰ σημεῖα τῶν τομῶν Η καὶ Θ ὀκτὼ γωνίας.

Ἐκ τούτων αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΔΘΗ καλοῦνται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι*· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΓΘΗ.

Αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΖΘΔ, καλοῦνται *ἐκτὸς καὶ τὰ αὐτὰ μέρη*, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΕΗΑ, ΖΘΓ.

Αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΗΘΔ, αἵτινες εἶναι ἐντὸς γωνίαι ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης ΕΖ καὶ μὴ προσκείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι*· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΓΘΗ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

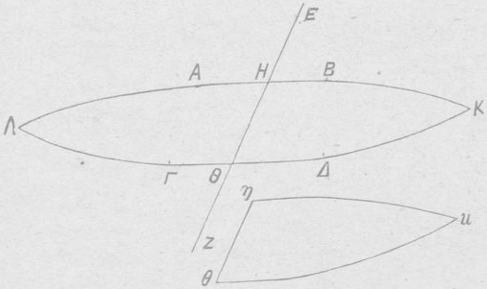
Αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΓΘΖ, αἵτινες εἶναι ἐκτὸς γωνίαι ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης καὶ μὴ προσκείμεναι, καλοῦνται *ἐκτὸς ἐναλλὰξ* γωνίαι· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΗΕ, ΔΘΖ.

Τέλος δὲ αἱ γωνίαι ΗΘΔ, ΕΗΒ, αἵτινες εἶναι ἡ μὲν ἐντὸς γωνία ἡ δὲ ἐκτὸς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τεμνούσης καὶ μὴ προσκείμεναι, καλοῦνται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΘ καὶ ΔΘΖ, ΓΘΗ καὶ ΑΗΕ, ΑΗΘ καὶ ΓΘΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

62. *Δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἐὰν τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσιν ἴσας ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας, ἢ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἢ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.*

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι μία οἱαδήποτε τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ὑποθέσεων συνεπάγεται καὶ τὰς λοιπάς. Ἐὰν παραδείγματος χάριν αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΗΘ, ΔΘΗ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν ΕΗΒ, ΓΘΖ. Τῶν τεσσάρων



δὲ τούτων γωνιῶν οὐσῶν ἴσων, θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις καὶ αἱ λοιπαὶ τέσσαρες γωνίαι ὡς παραπληρώματα αὐτῶν. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἴσαι καὶ αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ καὶ αἱ ἐντὸς ἐκτός. Καὶ τῶν ἐντὸς δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΔΘΗ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ὡς ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΑΗΘ.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ πρότασις ἀποδειχθῇ διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μίαν τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ὑποθέσεων θὰ εἶναι ἀποδεδειγμένη καὶ διὰ τὰς λοιπὰς τρεῖς. Ἂς λάβωμεν λοιπὸν ὡς ὑπόθεσιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΗΘΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λέγω δὲ ὅτι τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐκβαλλόμεναι ἱκανῶς συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Κ, ὅτε θὰ σχηματισθῇ τρίγωνον τὸ ΗΘΚ. Ἂς θεωρήσωμεν δεύτερον τρίγωνον ηθκ ἴσον τῷ ΗΘΚ, καὶ ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν ηθκ γωνίαν ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΗΘ, ἐπιθέτοντες τὴν θη ἐπὶ τῆς ΗΘ, ὅτε ἡ θκ ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΑ. Ἀλλ' ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν θηκ καὶ ΗΘΓ καὶ ἡ ηκ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΘΓ, ἑπομένως καὶ τὸ κ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κ θὰ κεῖται ἐνταὐτῷ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΑ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΓ, αὗται πρέπει νὰ συναντῶνται εἰς σημεῖόν τι Λ. Ἀλλὰ τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶχον κοινὰ δύο σημεῖα τὸ Κ καὶ τὸ Λ· μεταξὺ λοιπὸν τῶν σημείων Κ καὶ Λ θὰ ὑπῆρχον δύο διάφοροι εὐθεῖαι· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ πρῶτον περὶ εὐθείας ἀξίωμα. Ἀδύνατον ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ συναντηθῶσιν ἐπὶ τὰ μέρη ΗΒ, ΘΔ. Ἀλλ' οὐδ' ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ΗΑ καὶ ΘΓ δύνανται αἱ εὐθεῖαι νὰ συναντηθῶσι, διότι καὶ τῶν γωνιῶν ΑΗΘ καὶ ΗΘΓ τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαί. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

63. *Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.*

ΑΞΙΩΜΑ

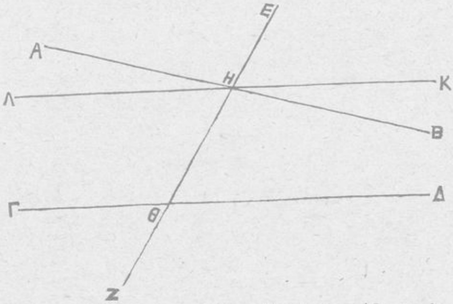
64. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσιν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται ἐκβαλλόμεναι συναντῶνται ἐπὶ τὰ μέρη, ἐφ' ἃ εἶναι αἱ τῶν δύο ὀρθῶν μικρότεραι γωνίαι.*

Ἔστωσαν τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΔΘΗ τὸ ἄθροισμα μικρότερον δύο ὀρθῶν· τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συναντῶνται ἐπὶ τὰ μέρη ΗΒ, ΘΔ, ἐφ' ἃ κεῖν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται αἱ ἐντὸς γωνίαι, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν.

Σημειωσις. Ἐὰν γωνίας ἴσης τῇ ΗΘΔ ἐφαρμοσθῇ ἡ κορυφὴ ἐπὶ τὸ σημεῖον Η, ἡ δὲ μία τῶν πλευρῶν ἐπὶ τὴν ΗΕ, ἡ ἑτέρα πλευρὰ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΗΚ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΚΛ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ



μέρη γωνιῶν ΚΗΘ καὶ ΔΘΗ εἶναι δύο ὀρθαί. Ὥστε *ἐκ δοθέντος σημείου Η κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, τῆς ΓΔ, ὑπάρχει παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ*. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα ἄλλη ἀπὸ τοῦ Η ἠγμένη πλὴν τῆς ΚΛ, σχηματίζει ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι πρὸς τὰ ἕτερα μέρη μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἑπομένως θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ, τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς μία μόνη παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ ὑπάρχει. (1)

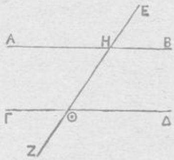
(1) Ἡ ἐν ἐδαφίῳ 64 πρότασις εἶναι τὸ πέμπτον αἴτημα ἢ κατ' ἄλλα χειρόγραφα τὸ ἑνδέκατον ἀξίωμα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Πλεῖσται ἀπόπειραι ἐγένοντο ἀπὸ τῶν ἀρχαίων χρόνων μέχρι τῆς σήμερον ὅπως ἡ πρότασις αὕτη ἀποδειχθῇ ὡς θεώρημα, ἀλλὰ πᾶσαι ἀπέτυχον. Πρῶτος ὁ Lobatschewsky ἔδειξεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀνωτέρω πρότασις δὲν ἀληθεύῃ, ἐὰν δηλαδὴ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύνανται νὰ ἀχθῶσιν πολλαὶ παράλληλοι τῆς αὐτῆς εὐθείας, τοῦτο εἰς οὐδεμίαν ἀντίφασιν πρὸς τὰ ἄλλα τῆς γεωμετρίας ἀξιώματα ἄγει, δύναται δὲ νὰ μορφωθῇ νέα τις γεωμετρία, ἣν ἐκάλεσαν *φανταστικὴν* ἢ *μὴ Εὐκλείδειον* γεωμετρίαν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς *Εὐκλειδείου*, ἐκείνης δηλαδὴ, ἐν ᾗ μετὰ τοῦ Εὐκλείδου δεχόμεθα τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα. Τὴν σήμερον δὲ ἐὰν τις ἀσχολῆται εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου ἀξιώματος, οὐ μόνον ματαιοπονεῖ, ἀλλὰ καὶ ἐξελέγχεται μὴ γνωρίζων πῶς ἔχουσι τανῦν τὰ τῆς γεωμετρίας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

65. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθὰς, καὶ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ὡσαύτως δὲ ἴσας καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ, καὶ τὰ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ



τῆς ΕΖ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΔΘΗ εἶναι δύο ὀρθαί.

Διότι ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα θὰ συναντῶνται ἐπὶ τὰ μέρη ΗΒ, ΘΔ. Ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν, τότε αἱ δύο ἄλλαι ἐντὸς γωνίαι ΑΗΘ, ΓΘΗ θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μικρότερον δυα ὀρθῶν, καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι θὰ συναντῶνται πρὸς τὰ μέρη ΗΑ, ΘΓ. Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὡς παράλληλοι ἐξ ὑποθέσεως δὲν συναντῶνται πρὸς οὐδέτερα τὰ μέρη. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΔΘΗ οὔτε μικρότερον οὔτε μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν δύναται νὰ εἶναι· ἄρα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τοῦ ὅτι δὲ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι ἄθροισμα δύο ὀρθὰς, ἕπεται ὡς καὶ ἐν ἐδαφίῳ (62) εἴπομεν, ὅτι καὶ αἱ ἐναλλὰξ ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ, καὶ αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

ΠΟΡΙΣΜΑ

66. *Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

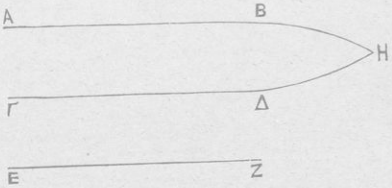
67. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.*

Ἔστω ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναιπαράλληλοι.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι παράλληλοι, ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σιν εἰς σημεῖόν τι Η· ἐκ τοῦ σημείου δὲ τούτου θὰ ὑπάρχωσιν ἠγμέναι δύο παράλληλοι τῇ ΕΖ ἡ ΗΑ καὶ ἡ ΗΓ· ὅπερ ἀδύνατον (64 σημ.).



ΘΕΩΡΗΜΑ

68. *Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτῶν διευθύνωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἀμφότεραι ἢ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα, παραπληρωματικαὶ δὲ, ἐὰν αἱ μὲν τῶν παραλλήλων πλευρῶν διευθύνωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα.*

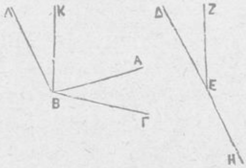
Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχουσαι τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ, καὶ τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΒΓ. Ἡ πλευρὰ ΕΔ ἐκβαλλομένη θέλει συμπέσει τῇ ΒΓ εἰς σημεῖόν τι Η. Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΔΕΖ ἴση τῇ ΘΗΓ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΘΚ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΘΗΓ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΘΚ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὡς ἴσαι τῇ αὐτῇ γωνίᾳ ΘΗΓ εἶναι καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. Καὶ ΙΕΚ δὲ ὡς ἴση τῇ ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ. Ἡ δὲ ΔΕΙ καὶ ἡ ΖΕΚ ὡς παραπληρώματα τῆς ΔΕΖ εἶναι καὶ τῆς ΑΒΓ παραπληρώματα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι αἱ μὲν γωνίαι ΔΕΖ, ΙΕΚ, ὧν ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ φέρονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΒΓ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα, εἶναι ἴσαι· ἡ δὲ γωνία ΔΕΙ, ἧς ἡ μὲν πλευρὰ ΔΕ φέρεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΑΒ μέρη, ἡ δὲ ΕΙ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῇ ΒΓ, εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒΓ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΚΕΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

69. *Δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους, ἑκατέραν ἐφ' ἑκατέρας, εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δὲ, ἐὰν ἡ μὲν εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀμβλεῖα.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχουσαι τὴν πλευρὰν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ τὴν ΒΓ



κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ, καὶ ἀμφότεραι ὀξεῖαι. Λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

Διότι ἐκ τῆς κορυφῆς Β τῆς γωνίας ΑΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΕΖ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἡ ΒΚ, καὶ ἡ ΒΛ παράλληλος καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ΕΔ. Ἡ γωνία ΚΒΛ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα· ἡ δὲ ΚΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἡ ΒΛ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος 66. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἴσων, ΚΒΓ, ΛΒΛ ἀφαιρεθῇ ἡ αὐτὴ γωνία ΑΒΚ, αἱ ὑπολειπόμεναι γωνίαι ΑΒΓ, ΚΒΛ θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Ἄρα ἡ ἴση τῇ ΚΒΛ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν τῶν γωνιῶν, ἡ ΑΒΓ, εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἑτέρα, ἡ ΖΕΗ, ἀμβλεῖα, ἐκβαλλομένης τῆς ΗΕ, σχηματίζεται ἡ ὀξεῖα γωνία ΔΕΖ, καὶ δεικνύεται ὅτι εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ· ἐπομένως ἡ ΗΕΖ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

70. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαί.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἂς ἐκβληθῇ δὲ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, οἷον ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΓΕ.

Ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΕ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΕ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἡ δὲ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΓΔ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι τῶν ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΒΓ, εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐφεξῆς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΔ γωνιῶν ΑΓΒ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ἤτοι δύο ὀρθαί.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόρισμα Α΄. *Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΕΓΔ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν ΒΑΓ, ΑΒΓ.*

Πόρισμα Β΄. *Ἐαν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν δύο εἶναι ὀξεῖα.*

Πόρισμα Γ΄. *Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρώματα ἀλλήλων.*

Πόρισμα Δ΄. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας ταῖς δύο γωνίαις, καὶ ἡ τρίτη γωνία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ γωνίᾳ τοῦ δευτέρου.*

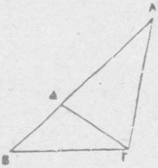
Πόρισμα Ε΄. *Ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ ἐκτὸς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία εἶναι διπλασία ἑκατέρας τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν, καὶ ἑκατέρα τούτων εἶναι ἴση μιᾷ ὀρθῇ ἠλαττωμένῃ κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας.*

Πόρισμα ΣΤ΄. *Τοῦ ἰσογωνίου τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν, ἤτοι δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

71. *Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτων γωνίαι θὰ εἶναι ἄνισοι, καὶ μείζων γωνία θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος πλευρᾶς.*

Ἔστω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ μείζων τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ, ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος πλευρᾶς ΑΒ, θὰ εἶναι μείζων τῆς γωνίας ΑΒΓ τῆς ἀπέναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς ΑΓ. Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ. Τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ὄντος ἰσοσκελοῦς ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση τῇ ΑΔΓ. Ἀλλ᾽ αὕτη ἡ ΑΔΓ ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΒΔΓ εἶναι μείζων τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΔΒΓ (70 πόρ. α΄.).



Ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι μείζων τῆς ΑΓΔ, διότι αὕτη εἶναι μέρος ἐκείνης, ἑπομένως καὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΔΓ. Ἡ ΑΓΒ λοιπὸν γωνία ὡς μείζων τῆς ΑΔΓ, θὰ εἶναι ἔτι μείζων τῆς ΑΒΓ, ἥτις ὡς εἴδομεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΔΓ.

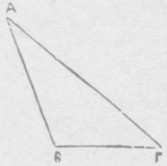
ΘΕΩΡΗΜΑ

72. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ναντι τούτων πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, καὶ μείζων πλευρὰ εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος γωνίας.

Ἔστω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία ΑΒΓ μείζων τῆς ΑΓΒ· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι μείζων τῆς ΑΒ. Διότι ἐὰν ἡ ΑΓ δὲν εἶναι μείζων τῆς ΑΒ θὰ εἶναι ἢ ἴση τῇ ΑΒ ἢ μικροτέρα αὐτῆς. Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΑΒ, τότε καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΒ (47), ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἐὰν δὲ ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ, τότε καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓΒ (71), ὅπερ καὶ τοῦτο εἶναι ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἐπειδὴ ἄρα ἡ ΑΓ οὔτε ἴση τῇ ΑΒ οὔτε μικροτέρα αὐτῆς δύναται νὰ εἶναι, θὰ εἶναι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Σημειωσις. Ὁ τρόπος ἀποδείξεως τοῦ ὁποίου ἐκάμομεν χρῆσιν ἐν τῷ ἀνωτέρω θεωρήματι, καθ' ὃν παραδεχόμενοι ὅτι δὲν ἀληθεύει ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ἀποδείξωμεν, φθάνομεν εἰς συμπέρασμα ψευδές, καλεῖται *ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.*

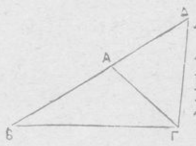
ΘΕΩΡΗΜΑ

73. *Ἑκάστη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι

$$ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ.$$

Διότι ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΓ. Ἐπειδὴ ἐκ κατασκευῆς ΑΔ=ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση τῇ ΑΔΓ, κατ' ἀκολουθίαν ἡ γωνία ΒΓΔ μείζων τῆς ΒΔΓ. Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΒΔΓ ἕπεται ὅτι ΒΓ < ΒΔ.



Ἀλλὰ ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΑ+ΑΓ· ἄρα

ΒΓ < ΒΑ + ΑΓ· ὅ. ἔ. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

74. *Ἑκάστη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι μείζων τῆς διαφορᾶς τῶν λοιπῶν δύο.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λέγω παραδείγματος χάριν ὅτι

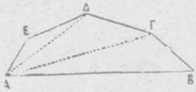
$$ΑΒ > ΒΓ - ΑΓ.$$

Διότι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι $ΑΒ + ΑΓ > ΒΓ$.

Ἐὰν δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὴν ΑΓ, λαμβάνομεν τὴν δεικτέαν ἀνισότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

75. *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης γραμμῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ καὶ ἡ εὐθεῖα πέρατα.*



Οἷον ἡ ΑΒ εὐθεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης τεθλασμένης ΑΕΔΓΒ.

Διότι ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΔ, ἔχομεν

$$ΑΒ < ΑΓ + ΓΒ.$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη διατηρεῖται ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΑΓ διὰ τῆς μείζονος $ΑΔ + ΔΓ$, ὅτε λαμβάνομεν

$$ΑΒ < ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ.$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν ἐν ταύτῃ τὴν ΑΔ διὰ τῆς μείζονος $ΑΕ + ΕΔ$, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται καὶ λαμβάνομεν

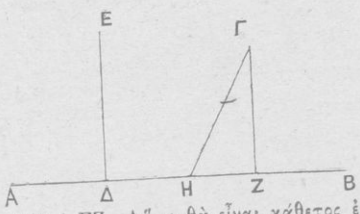
$$ΑΒ < ΑΕ + ΕΔ + ΔΓ + ΓΒ,$$

ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

76. *Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, καὶ μία μόνη.*

Ἔστω τὸ σημεῖον Γ μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ· λέγω ὅτι ἐκ τοῦ Γ δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ μία μόνη.



Διότι ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΔΕ (52), καὶ ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΔΕ ἡ ΓΖ. Αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ· διότι ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΓΖ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μία δὲ μόνη κάθετος ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ὑπάρχει· διότι πᾶσα ἄλλη ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἠγμένη, οἷον ἡ ΓΗ, ἀποτελεῖ μετὰ τῆς ΓΖ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΗΖ, οὗ ἡ γωνία ΓΗΖ εἶναι ὀξεῖα. Τῆς ΓΗΖ οὔσης ὀξείας ἡ προσκειμένη εἰς αὐτὴν ΓΗΑ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἄρα ἡ ΓΗ ὡς ἀποτελοῦσα μετὰ τῆς ΑΒ δύο ἐφεξῆς γωνίας ἀνίσους δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς, ἀλλὰ πλαγία.

ΘΕΩΡΗΜΑ

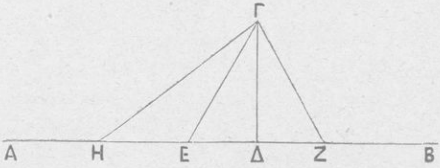
77. *Ἐὰν ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς εἶναι ἠγμένη ἡ ἐπὶ ταύτην κάθετος καὶ διάφοροι πλάγιαι.*

α') *Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.*

β') *Δύο πλάγιαι ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀφιστάμεναι εἶναι ἴσαι.*

γ') *Ἐκ δύο πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀφισταμένη εἶναι μείζων.*

α') Ἡ κάθετος ΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΓΕ. Διότι τοῦ τριγώνου ΓΕΔ ἡ ὀρθὴ γωνία ΓΔΕ εἶναι μείζων τῆς ὀξείας ΓΕΔ· ἄρα καὶ ΓΕ > ΓΔ.



β') Ἐὰν δύο πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ ἴσον ἀφίστανται ἀπὸ τῆς καθέτου, ἤτοι ἐὰν ΔΕ=ΔΖ, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι. Διότι τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΓΔ κοινήν, τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΔΖ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ ἴσας ὡς ὀρθάς. Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΖ.

γ') Ἐκ τῶν πλαγίων ΓΗ καὶ ΓΕ, ἡ πρώτη ἥτις ἀφίσταται ἀπὸ τῆς καθέτου μᾶλλον τῆς ΓΕ εἶναι μείζων ταύτης. Διότι τοῦ τριγώνου ΓΗΕ ἡ μὲν γωνία ΓΗΕ εἶναι ὀξεῖα, ὡς γωνία τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΗΔ, ἡ δὲ γωνία ΓΕΗ εἶναι ἀμβλεῖα ὡς παραπλήρωμα τῆς ὀξείας ΓΕΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΓΕΗ εἶναι μείζων τῆς ΓΗΕ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΗ μείζων τῆς ΓΕ.

Ἐὰν αἱ πλάγιαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου, ὡς ἡ ΓΗ καὶ ἡ ΓΖ, εἶναι δὲ ΔΗ > ΔΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ τὴν ΔΕ ἴσην

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῇ ΔΖ, καὶ ἄγομεν τὴν ΓΕ, ἥτις θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἴση τῇ ΓΖ. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, ΓΗ > ΓΕ, ἄρα καὶ ΓΗ > ΓΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

78. *Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν ἐπὶ ταύτην τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι.*

Διότι ἐὰν μὲν μία τῶν τριῶν εἶναι ἡ κάθετος, αὕτη θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν λοιπῶν δύο· ἐὰν δὲ καὶ αἱ τρεῖς εἶναι πλάγιαι καὶ πᾶσαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὴν κάθετον, θὰ καὶ αἱ τρεῖς ἄνισοι· ἐὰν δὲ κεῖνται δύο μὲν πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς καθέτου, ἡ δὲ τρίτη πρὸς τὸ ἕτερον, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου κείμεναι πλάγιαι θὰ εἶναι ἄνισοι.

Σημειωσις α΄. *Ἀπόστημα* σημείου ἀπὸ εὐθείας λέγεται ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἠγμένη κάθετος. Λαμβάνεται δὲ ἡ κάθετος ὡς ἀπόστημα, διότι μία οὖσα καὶ ὡρισμένη εἶναι καὶ ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

Σημειωσις β΄. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι τρία θεωρήματα συνηνωμένα· δὲν ἐξετέθησαν δὲ χωριστὰ χάριν συντομίας καὶ διὰ τὴν ὑπάρχουσαν μεταξύ των συγγένειαν. Καὶ τὰ ἀντίστροφα δὲ τρία θεωρήματα ἀληθεύουσιν, καὶ εὐκόλως δεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς·

α΄) *Ἡ ἐλαχίστη τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ δοθέντος σημείου ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἶναι ἡ ἐπὶ ταύτης κάθετος.*

β΄) *Δύο ἴσαι πλάγιαι ἴσον ἀφίστανται ἀπὸ τῆς καθέτου.*

γ΄) *Δύο ἄνισοι πλάγιαι ἄνισον ἀφίστανται ἀπὸ τῆς καθέτου, ἡ μείζων περισσότερον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

79. *Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι περισσότερα τῶν δύο κοινὰ σημεῖα.*

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, τὰ σημεῖα ταῦτα ἴσον θὰ ἀπέχωσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὥστε ἐκ τοῦ σημείου τούτου θὰ δύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νανται νὰ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι· ὅπερ ἐδείχθη ἀνωτέρω ἀδύνατον.

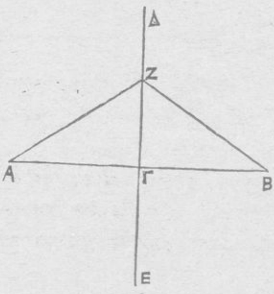
ΠΟΡΙΣΜΑ

80. *Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ καμπύλη.*

Διότι ὁσονδήποτε μέρος αὐτῆς δὲν δύναται νὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ὡς οὐδὲ τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας ἔχον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

81. *Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας εἶναι ἠγμένη κάθετος ἐπ' αὐτήν, α') πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ἴσον θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας· β') πᾶν σημεῖον μὴ ἐπὶ τῆς καθέτου κείμενον θὰ ἀπέχῃ ἄνισον ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἄκρων.*



Ἐκ τοῦ μέσου Γ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔστω ἠγμένη κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΔΕ.

α') Ἔστω σημεῖον ἐπὶ τῆς καθέτου κείμενον τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἀπὸ τοῦ Β, ἤτοι ὅτι ΖΑ=ΖΒ. Διότι ἡ ΖΑ καὶ ἡ ΖΒ εἶναι πλάγιαι ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ΖΓ ἀφιστάμεναι καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι.

β') Ἔστω σημεῖον μὴ ἐπὶ τῆς καθέτου κείμενον τὸ Η· λέγω ὅτι ΗΑ > ΗΒ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΔΕ ἡ ΗΚ. Αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ (66). Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ = ΓΒ, ἡ ΑΚ θὰ εἶναι μείζων τῆς ΚΒ. Ἡ ΗΑ λοιπὸν καὶ ἡ ΗΒ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΗΚ εἶναι πλάγιαι ἄνισον ἀπ' αὐτῆς ἀφιστάμεναι· καὶ ἐπειδὴ ΚΑ > ΚΒ, θὰ εἶναι καὶ ΗΑ > ΗΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

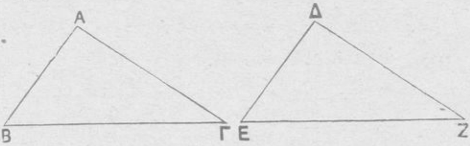
ΠΟΡΙΣΜΑ

82. *Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς ἠγμένης καθέτου.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

83. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ μίαν πλευράν, τὰς ὑποτεινούσας εἰς τὸ ἕτερον ζεῦγος τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Ἐν τοῖς τριγώνοις ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΕΖ, ἡ ΑΓΒ ἴση τῇ ΔΖΕ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἴση τῇ πλευρᾷ ΔΖ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Διότι τὰ δύο τρίγωνα ὡς ἔχοντα ἴσας τὰς δύο γωνίας θὰ ἔχωσιν ἴσην καὶ τὴν τρίτην γωνίαν, ἤτοι θὰ εἶναι ΒΑΓ=ΕΔΖ. Τότε δὲ τὰ τρίγωνα ἔχουσιν ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΔΖ καὶ τὰς εἰς ταύτας προσκειμένας γωνίας, ἐπομένως εἶναι ἴσα (45).

84. **Πόρισμα Α'.** *Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχωσι μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην μιᾷ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, καὶ τὰς εἰς τὰς γωνίας ταύτας ἢ τὰς ὀρθὰς γωνίας ὑποτεινούσας πλευρὰς ἴσας.*

85. **Πορισμα Β'.** *Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἠγμένη κάθετος διαιρεῖ ἐκ δύο ἴσα μέρη τήν τε βάσιν καὶ τὴν ἀπέναντι ταύτης γωνίαν.*

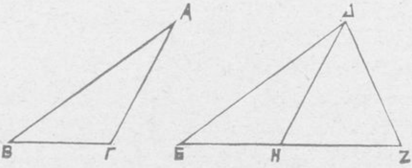
ΘΕΩΡΗΜΑ

86. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν μὲ ἑκατέραν, καὶ τὰς εἰς τὸ ἕτερον ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν ἀντικειμένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα δύνανται νὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα· ὅταν δὲ εἶναι ἄνισα, αἱ εἰς τὸ ἕτερον ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν ἀντικείμεναι γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ παραπληρωματικαί.*

Ἔστω ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΕΖ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν μὲν αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων.



Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἄνισοι, ἔστω μείζων ἡ ΕΖ· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ ἡ ΕΗ ἴση τῇ ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ. Τὸ τρίγωνον ΔΕΗ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΑΒΓ, καὶ ἡ γωνία ΔΗΕ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΑΓΒ. Ἀλλὰ ΔΗΕ$>$ΔΖΕ, ἄρα ΑΓΒ$>$ΔΖΕ. Αἱ ἄνισοι δὲ αὗται γωνίαι εἶναι καὶ παραπληρώματα ἀλλήλων. Διότι ΔΗΕ $+$ ΔΗΖ$=$2 ὀρθαῖς. Ἀλλ' ἡ γωνία ΔΗΖ εἶναι ἴση τῇ ΔΖΕ. Διότι ΔΗ $=$ ΑΓ, καὶ ΔΖ$=$ΑΓ, ἄρα ΔΗ$=$ΔΖ. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν ΔΗΕ διὰ τῆς ἴσης ΑΓΒ, καὶ τὴν ΔΗΖ διὰ τῆς ἴσης ΔΖΕ, λαμβάνομεν

ΑΓΒ $+$ ΔΖΕ$=$2 ὀρθαῖς.

Σημειωσεις. Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι ἴσαι γωνίαι Β καὶ Ε εἶναι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι, ἀναγκαίως αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ θὰ εἶναι ὀξεῖαι καὶ δὲν δύνανται νὰ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ εἶναι ἐνταυτῷ ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι. Καὶ ὀρθὴ δὲ ὅταν εἶναι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ καὶ Ζ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου **83**.

ΠΟΡΙΣΜΑ

87. *Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴσην.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

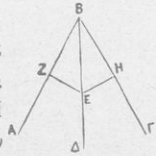
88. *Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτομούσης γωνίαν εὐθείας ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης.*

Καὶ ἀντιστρόφως·

Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ταύτην εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ ΒΔ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΑΒΓ, καὶ σημεῖον τῆς ΒΔ τὸ Ε· λέγω ὅτι τὸ Ε ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἤτοι ὅτι αἱ ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας κάθετοι ΕΖ καὶ ΕΗ εἶναι ἴσαι. Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΖ καὶ ΒΕΗ ἔχουσι κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὴν γωνίαν ΖΒΕ ἴσην τῇ ΗΒΕ· ἄρα εἶναι ἴσα (84) καὶ ἔχουσι καὶ τὴν ΕΖ ἴσην τῇ ΕΗ.



Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ΕΖ=ΕΗ, ἀχθείσης τῆς ΕΒ σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΖΕ καὶ ΒΗΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΕΒ, καὶ τὰς πλευρὰς ΕΖ καὶ ΕΗ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΖΒΕ εἶναι ἴση τῇ ΗΒΕ, ἐπομένως ἡ ΒΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΒΓ.

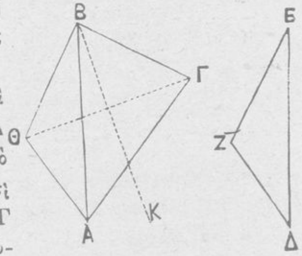
ΠΟΡΙΣΜΑ

89. *Τὰ μὴ ἐπὶ τῆς διχοτομούσης γωνίαν εὐθείας κείμενα σημεῖα ἄνισον ἀπέχουσι τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, καὶ τὰ ἄνισον ἀπέχοντα δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι, μείζων δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς μείζονος γωνίας.*

Τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔστω ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ γωνία ΑΒΓ>γωνίας ΔΕΖ· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς ΔΖ.



Ἂς ἐπιτεθῇ τὸ σημεῖον Ε ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ ΕΔ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΒΑ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἂς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἔχῃ μετ' αὐτοῦ κοινὸν μερος, λαμβάνον οὕτω τὴν θέσιν ΒΘΑ. Ἐπειδὴ δὲ ΘΑ εἶναι ἴση τῇ ΖΔ, ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΓ>ΑΘ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

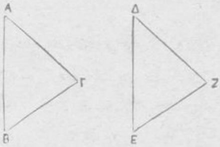
Πρὸς τοῦτο ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΓ. Ἐπειδὴ ΒΓ=ΕΖ=ΒΘ, τὸ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Β ἐπὶ τὴν βάσιν ΘΓ κάθετος ΒΚ θὰ διχοτομῇ καὶ τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ΘΒΓ (85). Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μείζων τῆς ΑΒΘ, ἡ ΒΑ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΘΒΚ, καὶ τὸ σημεῖον Α δὲν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΘΓ ἠγμένης καθέτου, διὰ τοῦτο δὲ θὰ ἀπέχῃ περισσότερον ἀπὸ τοῦ Γ ἢ ἀπὸ τοῦ Θ (81), ἤτοι θὰ εἶναι ἡ ΑΓ μείζων τῆς ΑΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει. Δεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα.*

Τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



Ἐν πρώτοις δεικνύομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι δύο ἴσων πλευρῶν γωνίαι, οἷον αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι. Διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἄνισοι, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ θὰ εἶναι ἄνισοι· ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (44).

Σημειωσις. Ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως καὶ ἐξ ἄλλων προδεδειγμένων ἀπορρέουσιν αἱ ἑξῆς περὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προτάσεις.

α΄) *Ἡ τὴν κορυφὴν καὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.*

β΄) *Ἡ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς διχοτομοῦσα εὐθεῖα διχοτομεῖ καὶ τὴν βάσιν καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς* (44).

γ΄) *Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ὑψουμένη κάθετος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς* (82) *καὶ διχοτομεῖ τὴν πρὸς ταύτῃ γωνίαν*

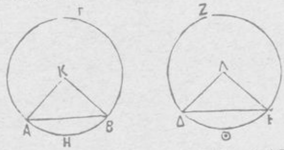
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

92. *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδὰς, καὶ ἴσαι χορδαὶ ἀνήκουσιν εἰς ἴσα τόξα.*

Ἔστωσαν ἴσων κύκλων ἴσα τόξα τὸ ΑΗΒ καὶ τὸ ΔΘΕ· λέγω ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΔΕ τῶν τόξων τούτων εἶναι ἴσαι.

Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, ΛΔ, ΛΕ αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΔΛΕ ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀκτῖνας ΛΔ, ΛΕ, τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΔΕ εἶναι ἴσα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΔΕ.



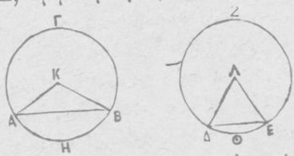
Ἀντιστρόφως, ὅταν εἶναι δεδομένη ἡ ἰσότης τῶν χορδῶν ΑΒ, ΔΕ, τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΔΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΔΛΕ, κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὰ τόξα ΑΗΒ, ΔΘΕ.

Σημειωσις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΕ δύνανται νὰ θεωρηθῶσι χορδαὶ καὶ τῶν τόξων ΑΓΒ καὶ ΔΖΕ. Καὶ ταῦτα δὲ εἶναι ἴσα· διότι ἐὰν ἀπὸ τῶν ὅλων περιφερειῶν ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα τόξα ΑΗΒ καὶ ΔΘΕ, τὰ ὑπολειπόμενα τόξα ΑΓΒ καὶ ΔΖΕ, θὰ εἶναι ἴσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

93. *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὸ μεγαλείτερον τόξον ἔχει μεγαλειτέραν χορδὴν, καὶ ἡ μεγαλειτέρα χορδὴ ἀνήκει εἰς μεγαλείτερον τόξον, ἐὰν λαμβάνωνται τὰ μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα.*

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι ὁ Κ καὶ ὁ Λ, καὶ ἐν αὐτοῖς τὸ τόξον ΑΗΒ μεγαλείτερον τοῦ τόξου ΔΘΕ, ἀμφότερα μικρότερα ἡμιπεριφερείας· λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς χορδῆς ΔΕ.



Διότι ἀχθεισῶν τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων ἀκτίνων, ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας ΔΛΕ ὡς βαίνουσα ἐπὶ μεγαλειτέρου τόξου. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΔΕ ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς ΚΑ, ΚΒ ἴσας μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΛΔ, ΛΕ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν πρώτων περιεχομένην γω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

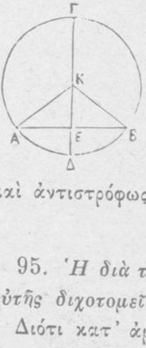
νίαν μεγαλειτέραν τῆς ὑπὸ τῶν δευτέρων· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΕ (90).

Ὅταν δὲ εἶναι δεδομένον ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΔΕ, ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων συνάγομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΚΒ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς γωνίας ΔΛΕ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ τόξον ΑΗΒ μεγαλείτερον τοῦ τόξον ΔΘΕ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

94. *Ἐὰν εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διερχομένη διχοτομῇ χορδήν τινα, θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς· καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ χορδῆς θὰ διχοτομῇ αὐτήν.*

Ἔστω ἡ ΓΔ ἠγμένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ μέσου Ε τῆς χορδῆς ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.



Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΚΒ εἶναι ἰσοσκελές. Γνωρίζομεν δὲ (91 Σημ.), ὅτι ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ διχοτομοῦσα τὴν βάσιν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς, καὶ ἀντιστρόφως ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν διχοτομεῖ αὐτήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

95. *Ἡ διὰ τοῦ κέντρου διχοτομοῦσα χορδὴν ἢ κάθετος ἐπ' αὐτῆς διχοτομεῖ ἀμφότερα τὰ τόξα, εἰς ἃ ὑποτείνει ἡ χορδή.*

Διότι κατ' ἀμφοτέρας τὰς ὑποθέσεις αἱ γωνίαι ΑΚΔ, ΒΚΔ εἶναι ἴσαι, διὰ τοῦτο δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΓ καὶ ΒΚΓ, ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΔΒ, καὶ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἴσα.

Σημειωσις. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ μέσον χορδῆς τινος, καὶ τὰ μέσα ἑκατέρου τῶν τόξων, εἰς ἃ ἡ χορδὴ αὕτη ὑποτείνει, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δύο δὲ σημεῖα ἀρκοῦσιν εἰς προσδιορισμὸν τῆς εὐθείας, ποριζόμεθα καὶ τὰς ἑξῆς προτάσεις.

Ἡ διὰ τοῦ κέντρου κύκλου καὶ τοῦ μέσου χορδῆς αὐτοῦ διερχομένη εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου ἀμφοτέρων τῶν τόξων, εἰς ἃ ὑποτείνει ἡ χορδή.

Ἡ διὰ τοῦ μέσου χορδῆς καὶ διὰ τοῦ μέσου ἑκατέρου τῶν τόξων, εἰς ἃ ἡ χορδὴ ὑποτείνει, διερχομένη εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

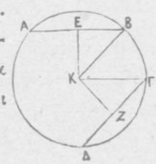
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ διὰ τῶν μέσων τῶν τόξων, εἰς ἃ χορδή τις ὑποτείνει, διερχομένη εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ μέσου τῆς χορδῆς καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

96. *Ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχουσαι χορδαὶ εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν ἴσαι χορδαὶ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ. Λέγω ὅτι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς ἠγμέναι κάθετοι ΚΕ καὶ ΚΖ εἶναι ἴσαι.



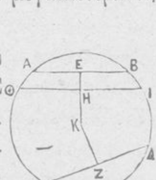
Ἐπειδὴ αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς χορδὰς κάθετοι διχοτομοῦσιν αὐτὰς, εἶναι δὲ ΑΒ=ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ΒΕ=ΓΖ. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΚΒΕ, ΚΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα (87). Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν ὅτι ΚΕ=ΚΖ· ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ΚΕ=ΚΖ, τὰ δύο τρίγωνα εἶναι καὶ τότε ἴσα· ἐξ οὗ συνάγομεν ΒΕ=ΓΖ, ὅθεν καὶ 2ΒΕ=2ΓΖ, ἤτοι ΑΒ=ΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. *Ἐν κύκλῳ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου χορδὴ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀπώτερον, καὶ ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἔγγιον τοῦ κέντρου εἶναι ἡ μεγαλειτέρα.*

Ἔστω ΚΖ$<$ΚΕ· λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ.



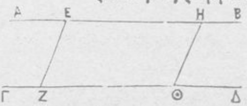
Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΚΕ ἡ ΚΗ ἴση τῇ ΚΖ, καὶ ἐκ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΕ ἡ ΘΙ. Ἡ χορδὴ ΘΙ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΓΔ (96). Εἶναι δὲ ἡ ΘΙ μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ ὡς ὑποτείνουσα εἰς τὸ μεγαλείτερον τόξον ΘΑΒΙ. Ἄρα καὶ ἡ ΓΔ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ΓΔ$>$ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ΚΖ$<$ΚΕ. Διότι ἐὰν μὲν ὑποτεθῇ ΚΖ=ΚΕ, θὰ εἶναι καὶ ΓΔ=ΑΒ· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΖ$>$ΚΕ, θὰ εἶναι καὶ ΓΔ$<$ΑΒ. Ἀλλὰ ταῦτα ἀμφότερα εἶναι ἐναντία τῇ ὑποθέσει· ἄρα εἶναι ΚΖ$<$ΚΕ.

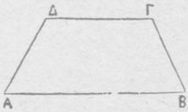
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΡΙΣΜΟΙ

98. *Παραλληλόγραμμον* καλεῖται τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.



Ἀποτελεῖται δὲ παραλληλόγραμμον ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τμηθῶσιν ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ.

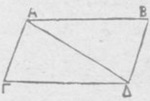


Τραπέζιον δὲ καλεῖται τὸ τετράπλευρον τὸ τὰς δύο μόνας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΓΔ, παραλλήλους ἔχον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

99. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι ΑΒ = ΓΔ, ΑΓ=ΒΔ, γωνία ΓΑΒ=γωνία ΓΔΒ, καὶ γωνία ΑΓΔ=γωνίᾳ ΑΒΔ.



Διότι ἀχθείσης τῆς διαγωνίου ΑΔ, τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΔ, ἴσα ἀλλήλοις, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΔ κοινήν, τὴν γωνίαν ΑΔΓ ἴσην τῇ ΔΑΒ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ, καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΓ ἴσην τῇ ΑΔΒ δι' ὅμοιον λόγον. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΓΔ, ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ΑΓΔ γωνία ἴση τῇ ΑΒΔ. Τέλος δὲ καὶ ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΓΔΒ, διότι αἱ δύο γωνίαι, ὧν ἡ πρώτη εἶναι ἄθροισμα, εἶναι ἴσαι ταῖς δύο γωνίαις, ὧν ἄθροισμα εἶναι ἡ δευτέρα.

Σημειωσις. Ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἐκ τούτου, ὅτι ἀμφότεραι εἶναι παραπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας· οἷον αἱ ΑΓΔ, ΑΒΔ, εἶναι παραπληρώματα τῆς ΒΑΓ, αἱ δὲ ΒΑΓ, ΒΔΓ παραπληρώματα τῆς ΑΓΔ. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως δὲ ὅτι αἱ εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν προσκείμεναι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι παραπληρωματικαί, συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς. α') *Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι γνωστή, καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι γνωσταί.* β') *Ἐὰν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ θὰ εἶναι ὡσαύτως ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αἱ ἐκ τῆς ἑτέρας δύο παραλλήλων ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἠγμέναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις.

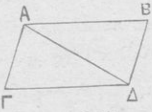
Διότι αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κάθετοι εἶναι παράλληλοι· παράλληλοι δὲ εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων περιεχόμεναι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

100. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ, καὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Διότι ἀχθείσης τῆς διαγωνίου ΑΔ, τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν. Ἔχουσι λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσας, ἤτοι τὴν ΑΔΒ ἴσην τῇ ΓΑΔ, καὶ τὴν ΒΑΔ ἴσην τῇ ΑΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΔ σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΔΒ, ΓΑΔ, ἴσας ἀλλήλαις, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι (62). Ὁμοίως διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΒΑΔ, ΑΔΓ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



ΘΕΩΡΗΜΑ

101. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΓΔ· λέγω ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. τὸ ἀνωτέρω).

Διότι ἀχθείσης τῆς διαγωνίου ΑΔ, τὰ δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΑΔ κοινήν, τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ, καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΔ ἴσην τῇ ΑΔΓ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Ἐκ

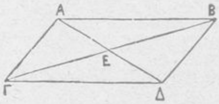
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων συνάγομεν ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΒΔ, ἔτι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῇ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΓΑΔ, ΑΔΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

102. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.*

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Ε,



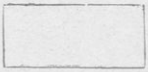
καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΒΓ, εἶναι τὸ μέσον ἀμφοτέρων.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΓΕΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ, τὴν γωνίαν ΒΑΕ ἴσην τῇ ΓΔΕ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΕ ἴσην τῇ ΕΓΔ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων συνάγομεν ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι ἴση τῇ ΔΕ, καὶ ΒΕ ἡ τῇ ΕΓ, ἤτοι ὅτι αἱ διαγώνιοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Σημειωσις. Τὸ ἀντίστροφον θεώρημα, *πᾶν τετράπλευρον, οὗ αἱ διαγώνιοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, εἶναι παραλληλόγραμμον*, ἀληθεύει ἐπίσης καὶ εὐκόλως δεικνύεται. Ὡσαύτως εὐκόλως δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Ε διερχομένη καὶ εἰς τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου περατουμένη τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ὅτι πᾶσα τοιαύτη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον.

ΟΡΙΣΜΟΙ

103. Παραλληλογράμμων διακρίνονται τέσσαρα εἴδη, τὰ ἑξῆς.

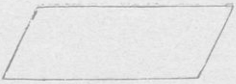


α') *Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον* ἢ ἁπλῶς *ὀρθογώνιον* καλεῖται τὸ ἔχον τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς προσκειμένας πλευρὰς ἀνίσους.

β') *Τετράγωνον* τὸ ἔχον τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας.

γ') *Ῥόμβος* τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις, τὰς δὲ γωνίας μὴ ὀρθάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



δ΄) Ῥομβοειδὲς τὸ καὶ τὰς προσκειμένας πλευρὰς ἀνίσους καὶ τὰς γωνίας μὴ ὀρθὰς ἔχον.

Σημειωσις Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ τετράγωνον, ὁ ῥόμβος καὶ τὸ ῥομβοειδὲς εἶναι παραλληλόγραμμα, πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω περὶ παραλληλογράμμου δειχθεῖσαι προτάσεις ἀληθεύουσι καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν. Εὐκόλως δὲ δύνανται νὰ δειχθῶσι καὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις.

Τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, τοῦ δὲ ῥόμβου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς ἄνισοι.

Τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς γωνίας, αἱ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς πρὸς μὴ ὀρθάς.

Ἐκ τούτων δὲ τῶν προτάσεων συνάγομεν καὶ τὰς ἑξῆς.

Παραλληλόγραμμον ἔχον τὰς διαγωνίους ἴσας εἶναι τετράγωνον μὲν, ἐὰν αἱ διαγώνιοι τέμνωνται πρὸς ὀρθὰς, ὀρθογώνιον δὲ, ἐὰν μὴ πρὸς ὀρθάς.

Παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἄνισοι, εἶναι ῥόμβος μὲν, ἐὰν αὗται τέμνωνται πρὸς ὀρθὰς, ῥομβοειδὲς δὲ, ἐὰν μὴ πρὸς ὀρθάς.

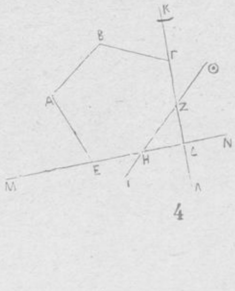
ΟΡΙΣΜΟΙ

104. Εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται *κυρτὸν*, ὅταν κεῖται ὅλον πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη οἱασδήποτε πλευρᾶς αὐτοῦ ἐκβληθείσης.

Παραδείγματος χάριν τὸ τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα· διότι οὐδεμία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐκβαλλομένη δύναται νὰ εἰσχωρήσῃ εἰς τὸ σχῆμα καὶ νὰ τὸ διαιρέσῃ εἰς μέρη, ὡς ἔχουσα ἤδη ἓν σημεῖον κοινὸν μεθ᾽ ἑκατέρας τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν, μὴ δυναμένη δὲ νὰ ἔχῃ καὶ δεύτερον.

Καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἐπίσης εἶναι κυρτὸν σχῆμα, ὡς εὐκόλως δεικνύεται.

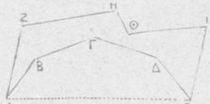
Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐὰν ἔχωμεν κυρτόν τι πολύγωνον, οἷον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπιζευχθέντων δι᾽ εὐθείας δύο σημείων Η, Ζ, δύο ἐφεξῆς πλευρῶν ἀποτελεῖται πολύγωνον ἔχον μίαν πλευρὰν περισσοτέραν καὶ ὡσαύτως κυρτὸν, τὸ ΑΒΓΖΗΕ. Ἔχει μὲν μίαν πλευρὰν περισσοτέραν, διότι ἀντὶ



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν δύο πλευρῶν ΓΔ, ΔΕ τοῦ πρώτου, ἔχομεν τρεῖς πλευρὰς τοῦ δευτέρου, τὴν ΓΖ, τὴν ΖΗ καὶ τὴν ΗΕ, πᾶσαι δὲ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ εἶναι κοιναὶ ἀμφοτέρων· εἶναι δὲ καὶ κυρτὸν τὸ νέον πολύγωνον, διότι προσεκβληθείσης τῆς πλευρᾶς ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ καὶ Ι, ἡ μὲν ΖΘ δὲν δύναται νὰ συναντήσῃ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ὡς κειμένου ὅλου ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΙ, ὡς κειμένου ὅλου ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΜΝ. Ἀρχόμενοι λοιπὸν ἀπὸ τριγώνου δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τετράπλευρον κυρτὸν, ἔπειτα ἐκ τούτου πεντάγωνον, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἄρα ὑπάρχει πολύγωνον κυρτὸν παντὸς ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕ λέγεται *κυρτὴ*, ὅταν ἐπιζευχθέντων τῶν ἄκρων αὐτῆς δι' εὐθείας ΑΕ, σχηματίζηται πολύγωνον κυρτὸν, τὸ ΑΒΓΔΕ.

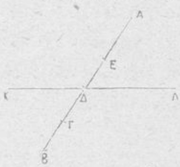


Τεθλασμένη γραμμὴ ΑΖΗΘΙΕ λέγεται ὅτι περιβάλλει ἄλλην τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔΕ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν, ὅταν ἐπιζευχθέντων δι' εὐθείας τῶν κοινῶν περάτων, τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης ἀποτελούμενον πολύγωνον περιέχῃ τὸ ὑπὸ ὑπὸ τῆς δευτέρας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. *Εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύναται νὰ τέμῃ περισσοτέρας τῶν δύο πλευρῶν κυρτοῦ πολυγώνου.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ τέμνει τρεῖς πλευρὰς τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε.



Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ μεσαίου σημείου Δ διερχομένη πλευρὰ ἐκβληθῇ ἑκατέρωσε ἐπὶ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ, τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἐκβληθείσης, καὶ τὸ πολύγωνον δὲν θὰ κεῖται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ταύτης· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

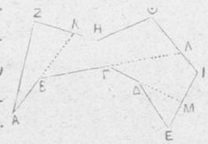
ΘΕΩΡΗΜΑ

106. *Πᾶσα κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ΑΖΗΘΙΕ περιβαλλούσης αὐτήν.*

Διότι ἂς ἐκβληθῇ ἡ πρώτη πλευρὰ ΑΒ μέχρις οὗ τέμῃ τὴν περιβάλλουσαν εἰς σημεῖόν τι Κ. Ἀντικαθιστῶντες ἐν ταύτῃ τὴν

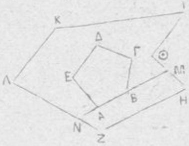
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΖΚ διὰ τῆς εὐθείας ΑΚ, λαμβάνομεν γραμμὴν μικροτέραν τὴν ΑΚΗΘΙΕ. Ὁμοίως ἀντικαθιστῶντες ἐν ταύτῃ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΒΚΗΘΛ διὰ τῆς εὐθείας ΒΛ λαμβάνομεν γραμμὴν μικροτέραν τὴν ΑΒΛΙΕ·



κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ταύτης μικροτέραν τὴν ΑΒΓΜΕ, καὶ τέλος ταύτης μικροτέραν τὴν ΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐλαττοῦντες πάντοτε τὴν γραμμὴν ΑΖΗΘΙΕ φθάνομεν εἰς τὴν ΑΒΓΔΕ, συνάγομεν ὅτι αὕτη εἶναι μικροτέρα ἐκείνης.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν ἡ κυρτὴ γραμμὴ εἶναι κλειστή, ἤτοι ἀποτελῇ τὴν περίμετρον κυρτοῦ πολυγώνου, οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσαν μετὰ τῆς περιβαλλούσης γραμμῆς· προσεκβάλλομεν δηλαδὴ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου μέχρις οὗ

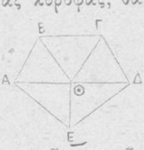


τέμῃ τὴν περιβάλλουσαν κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, καὶ ἀντικαθιστῶμεν ἐν ταύτῃ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΝΖΗΜ διὰ τῆς εὐθείας ΝΜ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

107. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου κυρτοῦ εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.*

Ἔστω πολύγωνον κυρτὸν τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν ἐκ σημείου Θ τῶν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς πάσας τὰς κορυφάς, θὰ σχηματισθῶσι τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Τῶν τριγώνων δὲ τούτων αἱ γωνίαι, ἐξαιρουμένων τῶν περὶ τὸ Θ, ἀποτελοῦσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου. Ὥστε τὸ ἄθροισμα



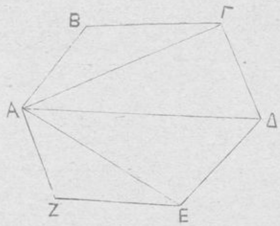
τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Θ γωνιῶν, ὅπερ εἶναι 4 ὀρθαί. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ἀποτελοῦσι 2 ὀρθάς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πάντων τῶν τριγώνων θὰ εἶναι τοσάκις 2 ὀρθαί, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, ἤτοι ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τούτου ἀφαιρεθῶσι 4 ὀρθαί, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐὰν ἄρα μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ θὰ εἶναι $2\times\mu-4$· ὅ. ἔ. δ.

Ἐκ τοῦ δειχθέντος θεωρήματος ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαί, τοῦ πενταγώνου 6, τοῦ ἑξαγώνου 8, τοῦ ἑπταγώνου 10, κ.τ.λ.

Σημειωσις. Τὸ θεώρημα δείκνυται καὶ ἄλλως, διαιρουμένου τοῦ πολυγώνου διὰ διαγωνίων αὐτοῦ εἰς τρίγωνα $\mu-2$, ὧν αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι τὰς τοῦ πολυγώνου· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτου εἶναι $2\times(\mu-2)$, ἤτοι $2\times\mu-4$.



Οὐ μόνον δὲ ὅταν πᾶσαι αἱ διαγώνιοι ἄγωνται ἀπὸ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, ὡς ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι, τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς $\mu-2$ τρίγωνα, ἀλλ' ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀχθῶσι διαγώνιοι, ὧν ἑκάστη ἀποτέμνει ἀπὸ τοῦ πολυγώνου ἓν τρίγωνον.

ΑΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

108. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ εὐθείας εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος οὐδὲν κοινὸν ἔχουσι σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος μηδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσι, τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος.*

Διότι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου ἠγμένης ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτου οὔσης μεγαλειτέρας τῆς ἀκτῖνος, ὁ πούς Γ τῆς καθέτου

κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· καὶ τὰ λοιπὰ δὲ σημεῖα τῆς ΑΒ, ὡς ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ περισσότερον ἢ τὸ Γ, θὰ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἀντιστρόφως ἐὰν ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τότε καὶ ὁ πούς

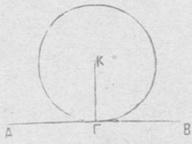
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ τῆς καθέτου θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΚΓ θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

109. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ εὐθείας εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν, ἤτοι ἡ εὐθεῖα εἶναι* **ἐφαπτομένη** *τοῦ κύκλου. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη κύκλου, τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστημα αὐτῆς εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.*

Διότι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἠγμένης καθέτου ὑποτιθεμένης ἴσης τῇ ἀκτῖνι, ὁ πούς τῆς καθέτου Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ παντὸς ἄλλου σημείου τῆς ΑΒ τὸ ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστημα εἶναι μεγαλείτερον τῆς καθέτου ΚΓ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος, πάντα τὰ σημεῖα τῆς ΑΓ πλὴν τοῦ Γ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.



Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι τὸ Γ, ἡ ἀκτὶς ΚΓ θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένων εὐθειῶν, κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐπὶ ταύτην κάθετος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

110. *Εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς περιφερείας δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχωσι περισσότεραι τῆς μιᾶς ἐφαπτόμεναι.*

Διότι ἡ κατὰ τὸ σημεῖον Γ ἐφαπτομένη εἶναι ὡς ἐδείξαμεν κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΓ· μία δὲ μόνη κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ ὑπάρχει.

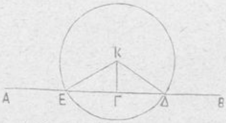
ΘΕΩΡΗΜΑ

111. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου κύκλου ἀπὸ εὐθείας εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν κύκλον, ἤτοι ἔχει δύο κοινὰ μετὰ τῆς περιφερείας σημεῖα, καὶ τὸ μὲν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸ δὲ λοιπὸν ἐκτός.*

Διότι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου ἠγμένης καθέτου ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν AB οὔσης μικροτέρας τῆς ἀκτῖνος, ὁ πούς Γ τῆς καθέτου κεῖται



ἐντὸς τοῦ κύκλου Πᾶσα δὲ διὰ τοῦ ἐντὸς τοῦ κύκλου κειμένου σημείου Γ ἠγμένη εὐθεῖα, ἄρα καὶ ἡ AB, τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα (26 καὶ 79) Δ καὶ Ε. Καὶ τὸ μὲν μεταξὺ τῶν σημείων Δ καὶ Ε μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, διότι τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Κ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος· τὸ δὲ λοιπὸν μέρος κεῖται ἐκτός, διότι τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Κ εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

112. *Εαν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος, κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν κύκλον.*

Διότι ἀχθεισῶν τῶν εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀκτίνων, σχηματίζεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΚΕΔ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν βάσιν ΔΕ κάθετος θὰ διέρχηται διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς ΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος ΚΓ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας ΚΕ, ἡ πρότασις εἶναι ἀποδεδειγμένη.

Σημειωσις. Ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ εὐθείας τοῦ κέντρου κύκλου ἀπόστημα παραβαλλόμενον πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἢ μικρότερον εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλείτερον, διὰ τοῦτο εὐθεῖα καὶ περιφέρεια κύκλου μόνον τρεῖς διαφόρους θέσεις δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας.

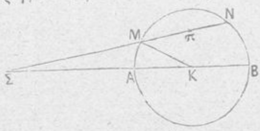
ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΑΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΘΕΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. *Ἐὰν διὰ δοθέντος σημείου Σ καὶ διὰ τοῦ κέντρου Κ δοθέντος κύκλου ἀχθῇ εὐθεῖα, ἐκ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β, εἰς ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν, τὸ μὲν κείμενον ἐπὶ τὰ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτὰ καὶ τὸ Σ ὡς πρὸς τὸ κέντρον μέρη, τὸ Α, εἶναι τὸ ἐγγύτατον τῷ Σ σημεῖον τῆς περιφερείας, τὸ δὲ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, τὸ Β, τὸ ἀπώτατον.



Διότι ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας· ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΜΣ, ΜΚ σχηματίζεται τρίγωνον τὸ ΜΣΚ, ἐξ οὗ ἔχομεν

$$\Sigma A + AK < \Sigma M + MK.$$

Ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῶν ἴσων ΑΚ καὶ ΜΚ, λαμβάνομεν $\Sigma A < \Sigma M$.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ αὐτοῦ δὲ τριγώνου ἔχομεν

$$\Sigma K + KM > \Sigma M$$

ἢ τῇ ἀντικαταστάσει τῆς ΚΜ διὰ τῆς ἴσης ΚΒ

$$\Sigma K + KB > \Sigma M,$$

ἤτοι $$\Sigma B > \Sigma M.$$

Ἐδείχθη ἄρα ὅτι τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ Σ εἶναι μεγαλείτερον μὲν τῆς ΣΑ, μικρότερον δὲ τῆς ΣΒ.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως καὶ ὅταν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἀλλ' οὐχὶ ἐπὶ τοῦ κέντρου, ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας. Κατὰ δὲ τὴν τελευταίαν δὲ ταύτην περίπτωσιν, τὸ μὲν ἐλάχιστον ἀπόστημα τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς περιφερείας εἶναι μηδέν, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου. Ἐξ οὗ συνάγομεν καὶ τοῦτο, ὅτε μεγίστη τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν εἶναι ἡ διάμετρος.

Πόρισμα. *Ἐκ πάντων τῶν σημείων τοῦ κύκλου ἐγγύτατον μὲν τῷ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένῳ σημείῳ Σ εἶναι τὸ Α, ἀπώτατον δὲ τὸ Β.*

Διότι ἡ ἐκ τοῦ Σ καὶ τοῦ τυχόντος σημείου π τοῦ κύκλου ἀγομένη εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Ν. Ἐπειδὴ δὲ $\Sigma A < \Sigma M$, καὶ $\Sigma M < \Sigma\pi$, θὰ εἶναι $\Sigma A < \Sigma\pi$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ $\Sigma B > \Sigma N$, καὶ $\Sigma N > \Sigma\pi$, θὰ εἶναι καὶ $\Sigma B > \Sigma\pi$.

Ὅταν τὸ Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐγγύτατον μὲν σημεῖον δὲν ὑπάρχει, ἀπώτατον δὲ εἶναι τὸ Β ἢ τὸ Α, καθ' ὅσον τὸ Σ κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Α, ἢ μεταξὺ Κ καὶ Β.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὰ τρία σημεῖα, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλας.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ σημεῖα κοινὰ δύο περιφερειῶν· λέγω ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλας.

Διότι τὸ κέντρον τῆς πρώτης περιφερείας ὡς ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν σημείων αὐτῆς Α καὶ Β θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ μέσον

τῆς ΑΒ ἠγμένης καθέτου ΔΕ (82)· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ ἠγμένης καθέτου ΖΗ. Ἄρα κέντρον τῆς πρώτης περιφερείας θὰ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον Κ τῶν δύο καθέτων ΔΕ καὶ ΖΗ. Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τῆς δευτέρας περιφερείας κέντρον θὰ εἶναι τὸ Κ. Ἄρα αἱ δύο περιφέρειαι θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἔχουσι δὲ καὶ ἴσας ἀκτῖνας· διότι ἡ τὸ Κ καὶ ἓν τῶν κοινῶν σημείων ἐπιζευγνύουσιν εὐθεῖα, οἷον ἡ ΚΑ, θὰ εἶναι ἀκτὶς ἑκατέρας τῶν περιφερειῶν. Ἄρα αἱ περιφέρειαι ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ ἴσας ἀκτῖνας ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

115. *Δύο περιφέρειαι ἐφαρμόζουσαι ἐπ' ἀλλήλας ἔχουσι τὸ αὐτὸ κέντρον· διὰ τοῦτο δὲ δύο περιφέρειαι ἔχουσαι διάφορα κέντρα δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας, ἄρα οὐδὲ νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

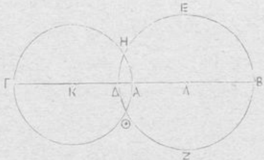
116. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ ἑκατέρας τῶν ἀκτίνων εἶναι μεῖζον τῆς ἑτέρας ἀκτῖνος, οἱ κύκλοι οὗτοι τέμνουσιν ἀλλήλους.*

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ ἑκατέρας τῶν ἀκτίνων εἶναι μεῖζον τῆς ἑτέρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα δύο κύκλων, ΚΑ καὶ ΛΒ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $ΚΛ + ΛΒ > ΚΑ$, τὸ σημεῖον Β τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον Δ τῆς διαμέτρου ΒΔ λέγω ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ μεταξὺ Α καὶ Γ, ἐπομένως ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ. Διότι ὄντος



$ΛΚ + ΚΓ > ΛΔ$, τὸ Δ θὰ κεῖται μεταξὺ Λ καὶ Γ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $ΚΛ < ΚΑ + ΛΔ$, τὸ Δ δὲν δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ Λ καὶ Α, οὐδ' ἐπὶ τοῦ Α· ἄρα θὰ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ, ἤτοι ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια ΔΕΒ συνάπτει τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ κείμενον σημεῖον Δ μὲ τὸ ἐκτὸς αὐτοῦ Β· ἄρα (51) θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ εἰς σημεῖόν τι Η. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ ἡ ἑτέρα ἡμιπεριφέρεια ΔΖΒ θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Κ εἰς σημεῖόν τι Θ. Ἄρα αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Περισσότερα δὲ τῶν δύο κοινὰ σημεῖα δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν, ὡς ἔχουσαι διάφορα κέντρα (115).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν καὶ τοῦτο, ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Η καὶ Θ τόξον ΗΔΘ τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐντὸς τοῦ Κ, καὶ τὸ τόξον ΗΑΘ τῆς περιφερείας Κ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Λ, καὶ ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἔχουσι μέρος κοινὸν τὸ ὑπὸ τῶν τόξων ΗΔΘ καὶ ΗΑΘ περιεχόμενον.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἐπειδὴ τὰ κέντρα ἴσον ἀπέχουσι ἀπ' αὐτῶν, ἡ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ΚΛ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς χορδῆς ΑΒ καὶ θὰ διχοτομῇ αὐτήν· ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὰ κοινὰ τῶν περιφερειῶν σημεῖα κεῖνται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΚΛ ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἕτερον τῶν κοινῶν σημείων, οἷον τὸ Α, ἐπιζευχθῇ μετὰ τῶν κέντρων, θὰ σχηματισθῇ τρίγωνον τὸ ΑΚΛ· Ἄρα θὰ εἶναι

$$ΚΛ < ΚΑ + ΛΑ,\quad ΚΛ + ΛΑ > ΚΑ,\quad ΚΛ + ΚΑ > ΛΑ·$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

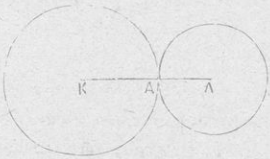
ΘΕΩΡΗΜΑ

117. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, οἱ κύκλοι οὗτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἤτοι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἔχουσι κοινὸν ἓν μόνον σημεῖον, καὶ ἑκάτερος τῶν κύκλων κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἑτέρου.*

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα εὐθείας ΚΛ ληφθῇ ἡ ΚΑ ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου Κ, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς ΚΛ ἡ



ΛΑ θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου Λ. Ἄρα τὸ σημεῖον Α ὡς ἄκρον ἀκτῖνος ἑκατέρου τῶν κύκλων θὰ εἶναι κοινὸν τῶν δύο περιφερειῶν σημεῖον. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πάντων τῶν σημείων τοῦ κύκλου Λ τὸ ἐγγύτατον τῷ κέντρῳ Κ εἶναι τὸ Α, πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτοῦ ὡς ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ Κ μᾶλλον τοῦ Α θὰ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, τὸ ἐγγύτατον τῷ Κ σημεῖον τοῦ κύκλου Λ θὰ εἶναι τὸ Α, θὰ κεῖται ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὸ Κ μετὰ τοῦ Λ εὐθείας. Οὔσης δὲ εὐθείας τῆς ΚΑΛ, εἶναι ΚΛ=ΚΑ+ΑΛ· ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο ἀνίσων κύκλων εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων, οἱ κύκλοι οὗτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, τουτέστιν ὁ μικρότερος τῶν κύκλων κεῖται ἐντὸς τοῦ μείζονος, καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον ἓν μόνον.*

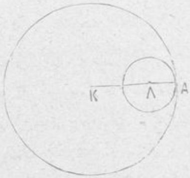
Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων.

Ἐκ τῆς γενομένης ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος εἶναι ἴσον τῇ μείζονι ἀκτῖνι. Ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων ΚΛ προσ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκβληθείσης ληφθῇ ἡ ΛΑ ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἡ ΚΑ θὰ εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ μείζονος κύκλου. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Α θὰ εἶναι κοινὸν τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πάντων τῶν σημείων τοῦ κύκλου Λ τὸ ἀπώτατον ἀπὸ τοῦ Κ εἶναι τὸ Α, τοῦτο δὲ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ, πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ κύκλου Λ θὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ.



Ἀντιστρόφως, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, τὸ ἀπώτατον ἀπὸ τοῦ Κ σημεῖον τοῦ κύκλου Λ εἶναι τὸ Α, θὰ κεῖται ἄρα ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Κ καὶ Λ διερχομένης εὐθείας. Οὔσης δὲ εὐθείας τῆς ΚΛΑ, εἶναι ΚΛ=ΚΑ—ΛΑ· ὅ. ἔ. δ.

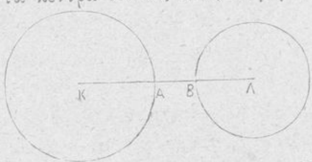
ΘΕΩΡΗΜΑ

119. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἑκάτερος τῶν κύκλων κεῖται ὅλος ἐκτὸς τοῦ ἑτέρου, καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.*

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν δύο κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα εὐθείας ΚΛ, ληφθῇ ἡ ΚΑ ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου Κ, καὶ ἡ ΛΒ ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου Λ, τὸ σημεῖον Β θὰ κεῖται μεταξὺ Λ καὶ Α, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΚΑ + ΛΒ < ΚΛ. Οὔσης δὲ τῆς ΚΒ μείζονος τῆς ΚΑ, τὸ σημεῖον Β, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ κύκλου Λ κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ.



Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὁ κύκλος Λ κεῖται ὅλος ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ εἶναι

$$ΚΒ > ΚΑ.$$

Προσθέτοντες δὲ ΒΛ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν

$$ΚΒ + ΒΛ > ΚΑ + ΒΛ$$

ἤτοι
$$ΚΛ > ΚΑ + ΒΛ\text{· ὅ. ἔ. δ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

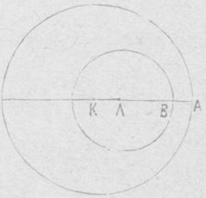
ΘΕΩΡΗΜΑ

120. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο ἀνίσων κύκλων εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων, ἤτοι ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος εἶναι μικρότερον τῆς μείζονος ἀκτῖνος, ὁ μικρότερος τῶν κύκλων κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ μείζονος, καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.*

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν κύκλος τις κεῖται ὅλος ἐντὸς ἑτέρου κύκλου, καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος εἶναι μικρότερον τῆς μείζονος ἀκτῖνος.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διὰ τῶν δύο κέντρων διερχομένης εὐθείας λάβωμεν τὴν ΛΒ ἴσην τῇ ἀκτῖνι τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $KΛ + ΛB < KA$, τὸ σημεῖον Β θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος Λ.



Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ὅλος ὁ κύκλος Λ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ κεῖται καὶ τὸ σημεῖον Β. Θὰ εἶναι λοιπὸν $KΛ + ΛB < KA$.

Σημειωσις. Αἱ ἀνωτέρω δύο προτάσεις ἀληθεύουσι καὶ ὅταν τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων ταὐτίζωνται, ὅτε οἱ κύκλοι καλοῦνται ὁμόκεντροι.

121. Σημειωσις γενικη. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι δύο κύκλων αἱ διάφοροι πρὸς ἀλλήλους θέσεις εἶναι ἕξ, αἱ ἑξῆς·

1) Ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλους, ὅταν τὰ κέντρα αὐτῶν ταὐτίζωνται, καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

2) Τέμνουσιν ἀλλήλους ὅταν $KΛ < KA + ΛB$

καὶ $KΛ + KA > ΛB$.

$KΛ + ΛB > KA$.

3) Ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός, ὅταν $KΛ = KA + ΛB$.

4) Ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, ὅταν $KΛ = KA - ΛB$.

5) Κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ὅταν $KΛ > KA + ΛB$.

6) Κεῖται ὁ εἷς ἐντὸς τοῦ ἑτέρου, ὅταν $KΛ < KA - ΛB$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωτέον δὲ ὅτι δύο μὲν ἄνισοι κύκλοι δύνανται νὰ ἔχωσι πάσας τὰς θέσεις ταύτας πλὴν τῆς πρώτης, δύο δὲ ἴσοι μόνον τὰς τέσσαρας, (1, 2, 3, 5).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩι ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

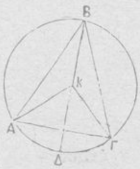
ΟΡΙΣΜΟΙ

122. *Γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κύκλῳ* λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Γωνία δὲ *ἐγγεγραμμένη ἐν τμήματι* εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἔκ τινος σημείου τοῦ τόξου τοῦ τμήματος εἰς τὰ ἄκρα τῆς τοῦ τόξου χορδῆς, ἥτις καλεῖται *βάσις* τοῦ τμήματος.

Οἷον ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κύκλῳ καὶ ἐν τῷ τμήματι ΑΒΓ, οὗ βάσις εἶναι ἡ ΑΓ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται *ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ*, ὅταν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας· ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα.



Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται *περιγεγραμμένον περὶ κύκλον*, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· ὁ δὲ κύκλος λέγεται *ἐγγεγραμμένος* ἐν τῷ σχήματι

ΘΕΩΡΗΜΑ

123. *Ἡ ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου βαινούσης πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας.*

Ἔστω γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν κύκλῳ ἡ ΑΒΓ· γωνία δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξου ΑΔΓ βαίνουσα ἡ ΑΚΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΓ, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι ἡ ΑΚΓ εἶναι διπλασία τῆς ΑΒΓ.

Διότι ἀχθείσης τῆς διὰ τοῦ Β διαμέτρου ΒΔ, ἡ γωνία ΑΚΔ, ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ εἶναι διπλασία τῆς

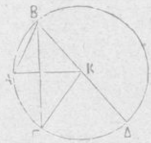
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας ΑΒΚ (70 πόρ. ε΄.)· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΚΓ εἶναι διπλασία τῆς ΚΒΓ. Εἶναι ἄρα

$$AK\Delta + \Delta K\Gamma = 2ABK + 2KB\Gamma = 2\,(ABK + KB\Gamma)$$

ἤτοι $$AK\Gamma = 2AB\Gamma\text{· ὅ. ἔ. δ.}$$

Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου, οἷον ἐὰν ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἡ ΑΒΔ (σχ. τὸ ἀνωτέρω), ἀμέσως κατὰ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ΑΚΔ=2ΑΒΔ.



Ἄς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ὡς ἐν τῷ ἀπέναντι σχήματι.

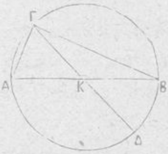
Ὡς καὶ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$AK\Delta = 2ABK$$
$$\Gamma K\Delta = 2\Gamma BK.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἴσων γωνιῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσαι, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα·

$$AK\Delta - \Gamma K\Delta = 2ABK - 2\Gamma BK = 2(ABK - \Gamma BK),$$

ἤτοι $$AK\Gamma = 2AB\Gamma\text{· ὅ. ἔ. δ.}$$



Πόρισμα Α΄. *Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν ἡμικυκλίῳ ΑΓΒ εἶναι ὀρθή.*

Διότι τότε ἡ ΑΚ καὶ ἡ ΚΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΚΔ καὶ ΒΚΔ ὡς ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα ἡ ΑΓΒ ὡς ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τούτου εἶναι μία ὀρθή.

Πόρισμα Β΄. *Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν τμήματι μείζονι ἡμικυκλίου, οἷον ἡ ΑΓΒ, εἶναι γωνία ὀξεῖα· πᾶσα δὲ γωνία ἐγγεγραμμένη ἐν τμήματι μικροτέρῳ ἡμικυκλίου, οἷον ἡ ΑΕΒ εἶναι γωνία ἀμβλεῖα.*

Διότι ἡ μὲν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κοίλης γωνίας ΑΚΒ, ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ΑΚΒ.

Πόρισμα Γ΄. *Πᾶσαι αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Οἷον ἡ ΑΓΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΔΒ, καὶ ἡ ΑΕΒ εἶνε ἴση τῇ ΑΖΒ.

Πόρισμα Δ΄. *Παντὸς ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, οἷον εἶναι τὸ ΑΓΒΕ, αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἔχουσι ἄθροισμα δύο ὀρθάς.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἡ μὲν ΑΓΒ γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς κοίλης γωνίας ΑΚΒ, ἡ δὲ ΑΕΒ τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ΑΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κοίλη μετὰ τῆς κυρτῆς ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς, ἡ ΑΓΒ μετὰ τῆς ΑΕΒ θὰ ἔχωσι ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

124. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἐπὶ ἴσων βαίνουσι τόξων.*

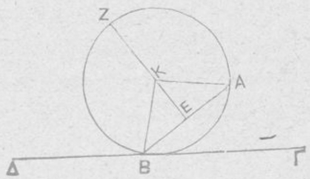
α') Ὅταν τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, εἶναι ἴσα, τότε καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ ἐγγεγραμμέναι ἄρα ὡς ἡμίση τῶν ἴσων τούτων γωνιῶν θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

β') Ἐὰν αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἐπὶ τῶν αὐτῶν τόξων βαίνουσαι πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ὡς διπλάσιαι τῶν ἐγγεγραμμένων θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν, θὰ εἶναι ἴσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

125. *Ἐν κύκλῳ ἡ ὑπὸ ἐφαπτομένης καὶ χορδῆς, διὰ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς ἠγμένης, σχηματιζομένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἐκείνης περιλαμβανομένου τόξου.*

Ἔστω ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΓΔ, καὶ χορδὴ διὰ τοῦ σημείου Β τῆς ἁφῆς ἠγμένη ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ βαινούσης κοίλης γωνίας ΑΚΒ, ἡ δὲ γωνία ΑΒΔ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΖΒ βαινούσης κυρτῆς γωνίας ΑΚΒ.



Διότι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ ἠγμένη κάθετος ΖΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΚΒ, τήν τε κοίλην καὶ τὴν κυρτήν (95). Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΒ ἡ γωνία ΚΒΕ καὶ μετὰ τῆς ΒΚΕ καὶ μετὰ τῆς ΑΒΓ ἀποτελεῖ μίαν ὀρθήν, συνάγομεν ὅτι

$$\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{BKE} = \frac{1}{2}\mathrm{AKB}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῶν γωνιῶν δὲ ΑΒΓ καὶ ΒΚΕ οὐσῶν ἴσων, καὶ τὰ παραπληρώματα αὐτῶν ΑΒΔ καὶ ΒΚΖ θὰ εἶναι ἴσα. Ἔχομεν ἄρα

$$ΑΒΔ = ΒΚΖ = \frac{1}{2} \text{κυρτῆς γωνίας ΑΚΒ.}$$

Πόρισμα. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται κύκλου, ἡ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς ἐπιξευγνύουσα χορδὴ σχηματίζει μετὰ τῶν ἐφαπτομένων γωνίας ἴσας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

126. *Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι συναντῶσι περιφέρειαν κύκλου, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιλαμβανόμενα τόξα εἶναι ἴσα.*

Τρεῖς περιπτώσεις διακρίνομεν, καθ' ὅσον αἱ παράλληλοι τέμνουσιν ἀμφότεραι τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, ἢ ἡ μὲν ἐφάπτεται ἡ δὲ τέμνει τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΠΡ καὶ ἡ ΓΔ, ἢ ἀμφότεραι ἐφάπτονται τῆς περιφερείας, ὡς ἡ ΠΡ καὶ ἡ ΣΤ.

α΄) Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἠγμένη κάθετος θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ (66)· ὡς κάθετος δὲ ἐπὶ τῶν χορδῶν ΕΖ καὶ ΗΘ θὰ διχοτομῇ τὰ τόξα ΕΜΖ καὶ ΗΝΘ κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰς ἡμιπεριφερείας ΜΕΗΝ καὶ ΜΖΘΝ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ μὲν τῆς πρώτης τὰ τόξα ΜΕ καὶ ΗΝ, ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας τὰ ἴσα τούτοις τόξα ΜΖ καὶ ΘΝ, ὑπολείπονται τόξα ἴσα τὸ ΕΗ καὶ τὸ ΖΘ· ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ὅταν ἡ μὲν τῶν παραλλήλων ΠΡ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ἑτέρα ΓΔ τέμνουσα, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ σημείου Μ τῆς ἀφῆς ἀγομένη εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΡ, ἄρα καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς ΓΔ· ὡς κάθετος δὲ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΗΘ διχοτομεῖ ἑκάτερον τῶν τόξων, εἰς ἃ ἡ χορδὴ ὑποτείνει, ἄρα καὶ τὸ τόξον ΗΜΘ, εἶναι δηλαδὴ τόξ. ΜΗ = τόξ. ΜΘ.

γ΄) Ὅταν ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι εἶναι ἐφαπτόμεναι, ὡς ἡ ΠΡ καὶ ΣΤ, ἡ ἐκ τοῦ Κ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς ἀφῆς Μ ἠγμένη εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας, καὶ διὰ τοῦτο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ ἑτέρου τῆς ἀφῆς σημείου τοῦ Ν. Ἄρα ἡ τὰ σημεῖα τῶν ἀφῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα εἶναι διάμετρος καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα ΜΕΗΝ καὶ ΜΖΘΝ θὰ εἶναι ἡμίση περιφερείας, ἑπομένως ἴσα ἀλλήλοις.

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

127. Λύσις γεωμετρικοῦ προβλήματος καθαρῶς γεωμετρικὴ εἶναι ἡ *κατασκευὴ* σχήματος ἔχοντος δοθείσας ἰδιότητας.

Αἱ στοιχειώδεις κατασκευαί, εἰς ἃς πρέπει νὰ ἀνάγηται ἡ λύσις παντὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος, εἶναι αἱ ἑξῆς·

α΄) *Ἡ κατασκευὴ εὐθείας διερχομένης διὰ δύο δοθέντων σημείων.*

β΄) *Ἡ προσεκβολὴ δοθείσης εὐθείας.*

γ΄) *Ἡ γραφὴ περιφερείας κύκλου, οὗ δίδονται τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτίς.*

δ΄) *Ἡ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ θέσις εὐθείας ἴσης δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

ε΄) *Ἡ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας λῆψις τμήματος ἀρχομένου ἀπὸ δοθέντος σημείου ταύτης καὶ ἴσου δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Τὰς κατασκευὰς ταύτας ἐν τῇ θεωρίᾳ λαμβάνομεν ὡς αἰτήματα· ἐν δὲ τῇ πράξει πραγματοποιοῦμεν αὐτὰς κάμνοντες χρῆσιν δύο ὀργάνων, *τοῦ κανόνος* καὶ *τοῦ διαβήτου*, ὧν τὴν περιγραφὴν καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως ὡς γνωστῶν παραλείπομεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

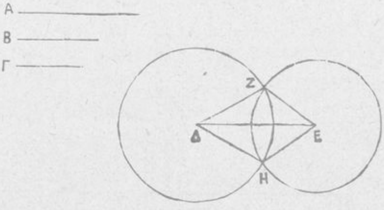
128. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας μὲ τρεῖς δοθείσας εὐθείας.*

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἡ Α, ἡ Β, καὶ ἡ Γ.

Περιορισμός. Πρέπει ἑκάστη τῶν δεδομένων εὐθειῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο (73)· ἄλλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις. Πρὸς τῷ τυχόντι σημείῳ Δ ἄς τεθῇ εὐθεῖα ἴση μιᾷ τῶν δεδομένων, οἷον τῇ Α, ἡ ΔΕ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἑτέραν τῶν λοιπῶν δύο εὐθειῶν, οἷον τὴν Β, ἄς γραφῇ δευτέρα περιφέρεια· καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν λοιπὴν εὐθεῖαν Γ ἄς γραφῇ τρίτη περιφέρεια· ἄς ἐπιζευχθῇ τέλος τὸ ἕτερον τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν τὸ Ζ μὲ τὰ κέντρα Δ καὶ Ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΖ καὶ ΕΖ· οὕτω συνίσταται τρίγωνον τὸ ΔΖΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας Α, Β, Γ.



Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας· διότι ἐξ ὑποθέσεως $Β + Γ > Α$, $Α + Γ > Β$, $Α + Β > Γ$, δηλονότι τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων μεθ' ἑκατέρας τῶν ἀκτίνων ὑπερβαίνει τὴν ἑτέραν ἀκτῖνα. Τοῦ σχηματισθέντος δὲ τριγώνου ἡ μὲν πλευρὰ ΔΕ ἐκ κατασκευῆς εἶναι ἴση τῇ Α, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΖ, ὡς ἀκτὶς τοῦ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Β γραφέντος κύκλου εἶναι ἴση τῇ Β, καὶ ἡ ΖΕ δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ἴση τῇ Γ.

Συνεστάθη ἄρα τρίγωνον τὸ ΔΖΕ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας ταῖς δοθείσαις εὐθείας Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ἐὰν καὶ τὸ δεύτερον τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν τὸ Η ἐπιζευχθῇ δι' εὐθειῶν μὲ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, σχηματίζεται καὶ δεύτερον τρίγωνον τὸ ΔΗΕ ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο τρίγωνον, ὡς καὶ πᾶν ἄλλο ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας Α, Β, Γ, εἶναι ἴσον τῷ ΔΖΕ, κατ' ἀκολουθίαν δὲν ἀποτελεῖ ἄλλην λύσιν. Τὸ δοθὲν ἄρα πρόβλημα μίαν μόνην ἔχει λύσιν, πληρουμένου τοῦ εἰρημένου περιορισμοῦ· μὴ πληρουμένου δὲ εἶναι ἀδύνατον.

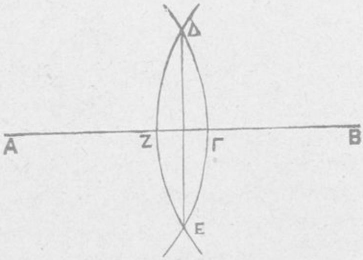
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

129. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ περασμένη εἰς δύο ἴσα μέρη.*

Ἐνταῦθα οὐδεὶς ὑπάρχει περιορισμός.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ· καὶ ἐὰν μὲν τὸ Γ συμβῇ νὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὸ πρόβλημα εἶναι λελυμένον· ἐὰν δὲ ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἄνισοι, καὶ μεγαλειτέρα ἡ ΑΓ, μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ ἂς γραφῇ περιφέρεια ΔΓΕ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἂς γραφῇ δευτέρα περιφέρεια ΔΖΕ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ἑτέραν περιφέρειαν κατὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε (116)· τέλος δὲ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ. Λέγω ὅτι τὸ σημεῖον εἰς ὃ αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



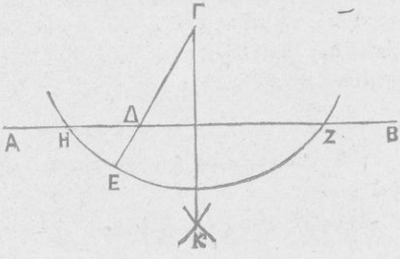
Διότι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἐκ κατασκευῆς ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ, ἄρα κεῖνται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἠγμένης καθέτου (82). Ἐπειδὴ δὲ δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν εὐθείας, ἡ διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἠγμένη εὐθεῖα ΔΕ εἶναι αὐτὴ ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἠγμένη κάθετος, κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον καθ' ὃ τέμνει τὴν ΑΒ εἶναι τὸ μέσον ταύτης.

Διῃρέθη ἄρα ἡ ΑΒ ἐπὶ δύο ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

130. *Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς.*

Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ τὸ Δ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ε· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΕ ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Η καὶ Ζ· διότι ἡ ΑΒ διέρχεται ἐκ σημείου Δ κειμένου ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Η καὶ

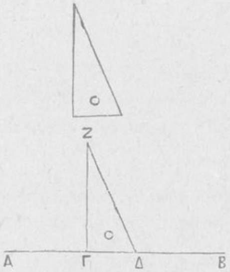


Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν τοῦ γεγραμμένου κύκλου ἃς γραφῶσι τόξα, ὧν τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς, τοῦ ἑτέρου ὄντος τοῦ Γ, ἔστω τὸ Κ· τέλος δὲ ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΚ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι τῶν σημείων Γ καὶ Κ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν σημείων Η καὶ Ζ, ἡ ΓΚ εἶναι ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ΗΖ ἠγμένη κάθετος, εἶναι ἄρα κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Σημειωσεις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ὡς καὶ τὸ τοῦ ἐδαφίου 52 λύονται *πρακτικῶς* δι' ὀργάνου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *γνώμων*. Εἶναι δὲ ὁ γνώμων ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ ξύλου ἢ μετάλλου.



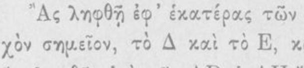
Ἵνα διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Γ, ἐφαρμόζεται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τοῦ γνώμονος, ἡ ΓΔ, ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπιτιθεμένης ἐπὶ τὸ Γ· τότε δὲ μεταχειριζόμενοι τὴν ἑτέραν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὴν ΓΖ, ὡς κανόνα γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΖΓ.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ πρόκειται νὰ ἀχθῇ ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς κατὰ τὸ Ζ, τότε ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων τοῦ γνώμονος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ κινοῦμεν αὐτὸν μέχρις οὗ ἡ ἑτέρα κάθετος διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Ζ, ἔπειτα γράφομεν τὴν κάθετον ΖΓ ὡς ἀνωτέρω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

131. *Κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Α τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ΔΓΕ.*

Ἂς ληφθῇ ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας τυχὸν σημεῖον, τὸ Δ καὶ τὸ Ε, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ. Ἔπειτα ἃς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΓΕ, καὶ ἃς κατασκευασθῇ



τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΔΕ, ἴσην τῇ ΓΕ ἔχον τὴν ΑΗ, τὴν ΑΖ τῇ ΔΓ καὶ τὴν ΖΗ τῇ ΔΕ, τὸ ΑΖΗ (**128**). Τοῦ τριγώνου τούτου ἡ γωνία ΖΑΗ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ΔΓΕ. Ἐκ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου Α τῆς δοθείσης εὐ-

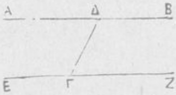
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θείας ΑΒ ἤχθη εὐθεῖα ἡ ΑΖ ἀποτελοῦσα μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ΖΑΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ΔΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

132. *Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς.*

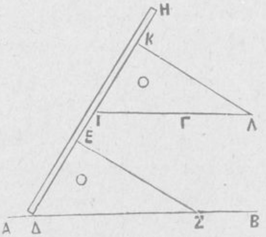
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ Γ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ.



Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ· ἔπειτα ἂς σχηματισθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΓΔ γωνία ἴση τῇ ΑΔΓ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς ΓΔ μέρη ἡ ΔΓΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓΖ ἐπὶ τὸ Ε. Λέγω ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

Διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΔΓ, ΔΓΖ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Σημειωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται πρακτικῶς διὰ τοῦ γνώμονος ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ ἀφοῦ ἐφαρμόσωμεν κανόνα ΔΗ ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΕ τοῦ γνώμονος, κινοῦμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος τὴν κάθετον ΔΕ μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα διέλθῃ διὰ τοῦ Γ. Μεταχειριζόμενοι τότε ταύτην ὡς κανόνα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΙΛ, ἥτις θὰ ἦναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Διότι ἡ γωνία ΚΙΛ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΕΔΖ, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΛΙ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΗΔ σχηματίζουσιν ἴσας τὰς ἐντὸς ἐκτὸς γωνίας ΕΔΖ, ΚΙΓ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι παράλληλοι.



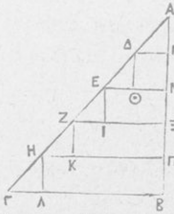
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

133. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν μερῶν ἴσων.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ προκείσθω νὰ διαιρεθῇ αὕτη εἰς πέντε μέρη ἴσα.

Ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα ἀπεριόριστος σχηματίζουσα μετ᾽ αὐτῆς γωνίαν, ἡ ΑΓ, καὶ ἐπ᾽αὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



τῆς ἂς ληφθῇ ἀπὸ τοῦ Α τυχόν τι μῆκος ΑΔ, καὶ ἂς ἐπαναληφθῇ τοῦτο ἐπὶ τῆς ΑΓ πεντάκις· ἔστω δὲ Γ τὸ ἄκρον τῆς πενταπλασίας τῆς ΑΔ εὐθείας· ἔπειτα ἐκ τῶν σημείων Δ,Ε,Ζ,Π, εἰς ἃ ἡ ΑΓ διαιρεῖται εἰς τὰ ἴσα τῇ ΑΔ μέρη, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ ΓΒ, ἥτις ἐπιζευγνύει τὸ Γ μετὰ τοῦ Β· λέγω ὅτι αἱ παράλληλοι αὗται θὰ τέμνωσι τὴν ΑΒ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ξ, Π εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Διότι ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, Η ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΔΘΕ, ΕΙΖ, ΖΚΗ καὶ ΗΛΓ εἶναι ἴσα τῷ ΑΔΜ. Τῷ ὄντι παραβάλλοντες τὸ ΑΔΜ πρὸς ἓν τούτων, οἷον πρὸς τὸ ΔΕΘ, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΔ ἴσην τῇ ΔΕ ἐκ κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΔΑΜ ἴσην τῇ ΕΔΘ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΜ, ΔΘ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ, καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΜ ἴσην τῇ ΔΕΘ δι' ὅμοιον λόγον. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΔΜ, ΔΕΘ, ΕΙΖ κτλ. συμπεραίνομεν ΑΜ=ΔΘ=ΕΙ=ΖΚ=ΗΛ. Ἀλλὰ ΔΘ=ΜΝ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΙ=ΝΞ, ΖΚ=ΞΠ, ΗΛ=ΠΒ. Ἄρα

ΑΜ=ΜΝ=ΝΞ=ΞΠ=ΠΒ,

δηλονότι ἡ ΑΒ εἶναι διῃρημένη εἰς πέντε ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

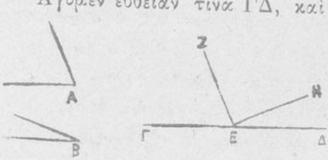
Σημειωσις. Ἐν τῇ πράξει ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ μία μόνη παράλληλος τῇ ΓΔ ἡ ΗΠ, καὶ ἔπειτα ἀπὸ τοῦ Π καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς ΒΑ νὰ ληφθῶσι τέσσαρα τμήματα ἴσα τῷ ΒΠ, ὧν τὸ τελευταῖον κατὰ τὰ δεδειγμένα θὰ λήγῃ εἰς τὸ Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

134. *Δοθεισῶν τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὴν τρίτην.*

Ἔστωσαν Α, Β αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι τοῦ τριγώνου· ζητεῖται ἡ τρίτη.

Ἄγομεν εὐθεῖαν τινὰ ΓΔ, καὶ πρὸς τῷ τυχόντι σημείῳ ταύτης Ε σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Α τὴν ΓΕΖ. Ἔπειτα πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ Ε σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Β τὴν ΔΕΗ. Λέγω ὅτι ἡ ζητου-



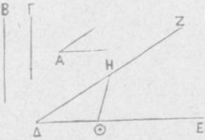
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένη τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ ΗΕΖ. Διότι ἀμφότεραι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὑπόλοιπα δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἠλαττωμένων κατ' ἴσας γωνίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

135. *Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν Β, Γ αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου, καὶ Α ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

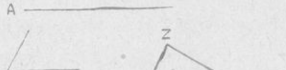


Ἄγομεν εὐθεῖαν τὴν ΔΕ, καὶ πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ Δ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Α τὴν ΕΔΖ· καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΔΖ λαμβάνομεν τὴν ΔΗ ἴσην τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας τὴν ΔΘ ἴσην τῇ Γ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΘΗ. Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΗΔΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

136. *Δοθεισῶν τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου καὶ τῆς εἰς ὡρισμένην γωνίαν αὐτοῦ ἀντικειμένης πλευρᾶς, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι δύνανται νὰ εἶναι ἢ ἀμφότεραι προσκείμεναι εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, ἢ ἡ μὲν προσκειμένη, ἡ δὲ ἀντικειμένη. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ζητοῦμεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει πάντοτε τὰς δύο εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν προσκειμένας γωνίας. Ἔστωσαν λοιπὸν ἡ μὲν δοθεῖσα πλευρὰ ἡ Α, αἱ δ' εἰς ταύτην προσκείμεναι γωνίαι ἡ Β, καὶ ἡ Γ.



Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην τῇ Α τὴν ΔΕ, καὶ κατὰ μὲν τὸ Δ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Β, κατὰ δὲ τὸ Ε γωνίαν ἴσην τῇ Γ. Αἱ πλευραὶ τῶν δύο τούτων γωνιῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν εἰς σημεῖόν τι Ζ, καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΖ. Συμπίπτουσιν δὲ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ὑποτίθεται μικρότερον δύο ὀρθῶν, εἰ δὲ μή, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

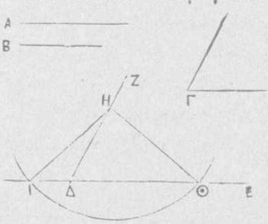
Σημειωσις. Ἐὰν δὲν δίδεται εἰς τίνα γωνίαν ἀντίκειται ἡ δεδομένη πλευρὰ, τὸ πρόβλημα ἔχει τρεῖς λύσεις, ὑπάρχουσι δηλαδὴ τρία διάφορα τρίγωνα ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Α καὶ δύο γωνίας ἴσας ταῖς δοθείσαις γωνίαις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

137. *Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ τῆς γωνίας εἰς ἣν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν τούτων ὑποτείνει, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι πλευραὶ ἡ Α καὶ ἡ Β, ἡ δὲ γωνία, εἰς ἣν ὑποτείνει ἡ πλευρὰ Α, ἡ Γ.

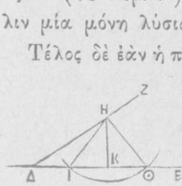
Ἂς κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ Γ ἡ ΖΔΕ, ἐπὶ τῆς ἑτέρας δὲ



τῶν πλευρῶν ταύτης ἃς ληφθῇ ἡ ΔΗ ἴση τῇ πλευρᾷ Β, καὶ ἐκ κέντρου τοῦ Η καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ εὐθείᾳ Α ἂς γραφῇ κύκλος. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα Α εἶναι μείζων τῆς Β, ὁ γραφεὶς κύκλος θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ εἰς δύο σημεῖα Θ, Ι, ἑκατέρωθεν τοῦ Δ κείμενα· ἐπειδὴ ἡ ΗΔ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας Α, ἑπομένως καὶ τῶν ἴσων τῇ Α ἀκτίνων ΗΘ, ΗΙ, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΙΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τοῦ Η ἀπόστημα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος ΗΘ, κεῖνται μεταξὺ τοῦ Ι καὶ Θ (111). Ἐκ τῶν δύο δὲ τριγώνων ΗΔΘ, ΗΔΙ τὸ πρῶτον μόνον πληροῖ τὰς δεδομένας συνθήκας· διότι ΗΔ$=$Β, ΗΘ$=$Α, καὶ γωνία ΗΔΘ$=$Γ. Τὸ δὲ δεύτερον ΗΔΙ, ἔχει μὲν τὰς πλευρὰς ΗΔ, ΗΙ ἴσας ταῖς εὐθείαις Α καὶ Β, ἀλλ' ἡ γωνία ΗΔΙ, εἰς ἣν ὑποτείνει ἡ ἴση τῇ Α πλευρὰ, δὲν εἶναι ἴση τῇ Γ, ἀλλὰ παραπλήρωμα αὐτῆς. Ἄρα ὅταν Α$>$Β, τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἔχει.

Ἐὰν ὑποτεθῇ Α$=$Β, ὅτε ἀναγκαίως ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ εἶναι ὀξεῖα (70 πόρ. ε'), τὸ σημεῖον Ι συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ, καὶ πάλιν μία μόνη λύσις ὑπάρχει.

Τέλος δὲ ἐὰν ἡ πλευρὰ Α$<$Β, πρέπει ἡ γωνία Γ νὰ εἶναι ὀξεῖα·



διότι ἡ εἰς τὴν πλευρὰν Β ἀντικειμένη γωνία θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς Γ. Τότε δὲ τὸ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Η καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Α γραφόμενον τόξον τέμνει τὴν ΔΕ εἰς δύο ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖα Θ, Ι, κείμενα ἀμφότερα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς κορυφῆς Δ τῆς γωνίας ΖΔΕ, ἐὰν ἡ Α εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἐκ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΔΕ ἠγμένης καθέτου ΗΚ. Τότε δὲ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις· διότι ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΗΔΘ, ΗΔΙ πληροῦσι τὰς δεδομένας συνθήκας.

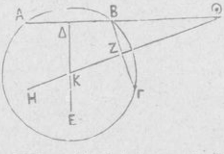
Ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα Α εἶναι ἴση τῇ καθέτῳ ΗΚ, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΔΕ κατὰ τὸ Κ, καὶ μία μόνη λύσις ὑπάρχει. Τέλος δὲ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἐὰν ἡ πλευρὰ Α εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου ΗΚ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

138. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.*

Ἔστωσαν τὰ τρία δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ τῶν σημείων τούτων.

Ἐπιζευγνύομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Β καὶ Γ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, διχοτομοῦμεν ταύτας (129), ἡ δὲ πρὸς τοῦτο κατασκευὴ μᾶς παρέχει τὰς ἐκ τῶν μέσων τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΒΓ καθέτους ΔΕ καὶ ΖΗ. Λέγω δὲ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΖΗ ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσι. Διότι ἐὰν ὑποτεθῶσι παράλληλοι, ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ θὰ εἶναι



κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτης ΖΗ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΒΓ, μὴ ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ κειμένη. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β ἤθελον λοιπὸν ὑπάρχει δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΘΗ, ἡ ΒΘ καὶ ἡ ΒΖ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΖΗ συμπίπτουσιν εἰς σημεῖόν τι Κ. Τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἀπὸ τοῦ Β, ὡς σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἠγμένης καθέτου. Ὡσαύτως δὲ τὸ Κ ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, ὡς σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ ἠγμένης καθέτου. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ ἢ τὴν ΚΒ, ἢ τὴν ΚΓ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέρχηται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

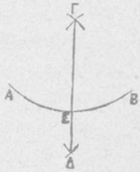
Σημειωτέον δὲ ὅτι μία μόνη περιφέρεια διέρχεται ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· διότι δύο περιφέρειαι ἔχουσι τρία κοινὰ σημεῖα ταὐτίζονται (114).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εὑρίσκεται τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου ἢ τόξου. Λαμβάνονται δηλαδὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ τόξου τρία τυχόντα σημεῖα καὶ ζητεῖται τὸ κέντρον τῆς διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων διερχομένης περιφερείας.

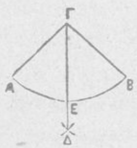
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

139. ***Νὰ διαιρεθῇ δίχα τὸ δοθὲν τόξον, ἢ ἡ δοθεῖσα γωνία.***



Ἔστω κατὰ πρῶτον τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΒ. Ποιοῦμεν τὴν κατασκευήν, δι' ἧς διχοτομεῖται ἡ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου Α καὶ Β ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα. Ἡ τὴν διχοτομίαν ταύτην ποιοῦσα εὐθεῖα ΓΔ θὰ διχοτομῇ καὶ τὸ τόξον ΑΒ κατὰ τὸ Ε. (95).

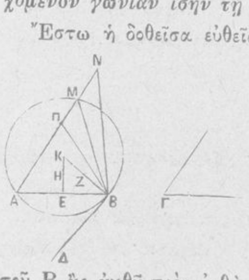
Ἔστω δεύτερον ἡ δοθεῖσα γωνία ἡ ΑΓΒ, ἥτις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ δίχα. Ἐκ κέντρου τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν κύκλον· ἔστω δὲ ΑΒ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον τόξον· διχοτομοῦμεν τὸ τόξον τοῦτο, εὑρίσκοντες πλὴν τοῦ Γ καὶ δεύτερον σημεῖον Δ ἴσον ἀπὸ τοῦ Α καὶ Β ἀπέχον, καὶ ἄγοντες τὴν ΓΔ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΑΓΒ· διότι τοῦ τόξου ΑΕ ὄντος ἴσου τῷ ΕΒ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΕ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΒΓΕ.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

140. ***Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.***

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Γ· πρόκειται ἐπὶ τῆς ΑΒ νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Γ.



Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ἀρκεῖ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου νὰ γραφῇ ἡμικύκλιον. Ὑποτεθείσθω λοιπὸν μὴ ὀρθή. Πρὸς τῷ σημείῳ Γ τῆς ΑΒ ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ Γ ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐκ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΔ ἡ ΒΖ, καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ταύτῃ ἡ ΕΗ. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ΒΖ, ΕΗ τέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μνουσιν ἀλλήλας· διότι ἐὰν ὑποτεθῶσι παράλληλοι, ἡ ΑΒ κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΕΗ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΒΖ, κατὰ τὸ σημεῖον Β· ἀλλὰ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΖ κατὰ τὸ Β εἶναι ἡ ΒΔ· ἔπρεπε λοιπὸν ἡ ΒΔ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἢ νὰ εἶναι προσεκβολὴ αὐτῆς· ὅπερ ἐαντίον τῇ ὑποθέσει. Ἐκ τοῦ σημείου λοιπὸν Κ, εἰς ὃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΒΖ ὡς κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΚΒ ἃς γραφῇ κύκλος· ὁ κύκλος οὗτος θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ σημείου Α, διότι ΚΑ=ΚΒ· θὰ ἐφάπτηται δὲ τῆς εὐθείας ΔΒ, ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ. Ἡ γωνία λοιπὸν ΑΒΔ ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΒΔ, θὰ εἶναι ἴση τῇ ἐγγεγραμμένῃ ἐν τῷ τμήματι ΑΜΒ, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ βαινούσης πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴση τῇ Γ, πᾶσα ἐν τῷ τμήματι ΑΜΒ ἐγγεγραμμένη γωνία ὡς ἴση τῇ ΑΒΔ θὰ εἶναι ἴση καὶ τῇ Γ.

Ἐγράφη ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΜΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Σημειωσις. Πάντα τὰ σημεῖα, ἀφ' ὧν αἱ εἰς τὰ δοθέντα σημεῖα Α, Β ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς εὐθείας ΑΒ μέρη, σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ Γ, κεῖνται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γεγραμμένου τμήματος κύκλου, τοῦ δεχομένου γωνίαν ἴσην τῇ Γ.

Διότι ἐὰν μὲν ληφθῇ σημεῖον τι Ν ἐκτὸς τοῦ τμήματος τούτου, ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΝΑ, ΝΒ, ΜΒ, ἡ γωνία ΑΝΒ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ· ἐὰν δὲ ληφθῇ σημεῖόν τι Π ἐντὸς τοῦ τμήματος, ἡ ΑΠΒ γωνία θὰ εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

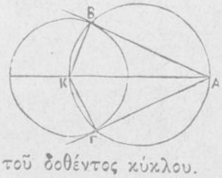
141. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου.*

α΄) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἀρκεῖ ἐκ τοῦ σημείου τούτου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εἰς αὐτὸ ἠγμένην ἀκτῖνα (109).

β΄) Ἐὰν δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς εὐθείας ΑΚ, τῆς ἐπιζευγνυούσης αὐτὸ μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ



κύκλου, ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ κύκλος, τὰ δὲ σημεῖα Β, Γ, καθ' ἃ ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὸν πρῶτον ἂς ἐπιζευχθῶσι μετὰ τοῦ Α διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου.

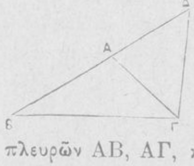
Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ, αἱ γωνίαι ΚΒΑ, ΚΓΑ ὡς ἐγγεγραμμέναι ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι ὀρθαί· ἑκατέρα ἄρα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ὡς κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνος τοῦ κύκλου κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς, εἶναι ἐφαπτομένη. Διὰ τῶν ἴσων δὲ τριγώνων ΑΒΚ, ΑΓΚ δεικνύεται ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι.

γ΄) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· διότι πᾶσα διὰ τοῦ σημείου τούτου ἠγμένη εὐθεῖα θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

142. *Δοθείσης τῆς βάσεως τριγώνου, τῆς ἑτέρας τῶν παρὰ τῇ βάσει γωνιῶν, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένη ἡ βάσις ΒΓ, ἡ γωνία ΑΒΓ, καὶ τὸ ἄθροι-



σμα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐὰν προσεκβληθῇ ἡ ΒΑ καὶ ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, καὶ ἀχθῇ ἡ ΔΓ, θὰ σχηματισθῇ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι δεδομένη ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ πλευρὰ ΒΔ, ὡς ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΒΔ περιεχομένη γωνία· τὸ τρίγωνον λοιπὸν τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Ὅπως δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζεται τὸ ΒΔΓ, οὕτω καὶ ἐκ τούτου δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ ΑΒΓ· διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ ΓΑ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν ΔΓΑ ἴσην τῇ ΓΔΒ. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγομεν τὴν ἑξῆς τοῦ προταθέντος προβλήματος λύσιν.

Πρὸς τῷ ἑτέρῳ τῶν ἄκρων τῆς δοθείσης βάσεως σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τὴν ΓΒΔ, λαμβάνομεν τὴν ΒΔ ἴσην τῷ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δοθέντι ἀθροίσματι τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἐπιζευγνύομεν τὴν ΓΔ, καὶ πρὸς τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ κατὰ τὸ σημεῖον Γ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ ΒΔΓ τὴν ΔΓΑ, καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

Διότι ἡ βάσις αὐτοῦ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ, ὡς καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ· τῆς δὲ γωνίας ΑΓΔ οὔσης ἴσης τῇ ΑΔΓ, ἡ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ ΑΓ, καὶ ἔχομεν ΑΒ+ΑΓ=ΑΒ+ΑΔ=ΒΔ· ἡ δὲ ΒΔ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴση τῷ δοθέντι ἀθροίσματι τῶν δύο τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Διὰ νὰ εἶναι δὲ τὸ πρόβλημα δυνατὸν, πρέπει ἡ γωνία ΒΓΔ νὰ εἶναι μείζων τῆς ΒΔΓ, ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΒΔ μείζων τῆς ΒΓ, τουτέστιν ἡ δοθεῖσα βάσις πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

143. Σημειωσεισ. Ἵνα λύσωμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ὑπεθέσαμεν δεδομένον τὸ ζητούμενον τρίγωνον, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐσχηματίσαμεν δεύτερον τρίγωνον τοιαύτην πρὸς τὸ πρῶτον σχέσιν ἔχον, ὥστε ἑκάτερον νὰ δύναται νὰ κατασκευασθῇ δοθέντος τοῦ ἑτέρου. Ἐπειδὴ δὲ ἐγνωρίζομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ δεύτερον τρίγωνον, διὰ τούτου κατεσκευάσαμεν καὶ τὸ πρῶτον, καὶ τὸ προταθὲν πρόβλημα ἐλύθη.

Ἡ τοιαύτη μέθοδος, καθ' ἣν ὑποθέτοντες ὡς δεδομένον τὸ ζητούμενον, ἢ ὡς ἀληθὲς τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα, καὶ συνδυάζοντες αὐτὸ μετ' ἄλλων γνωστῶν προτάσεων, φθάνομεν εἰς ἐξαγόμενον, ἐξ οὗ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἢ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἢ καὶ συμπεραίνομεν τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος, ἢ τὸ ψεῦδος τοῦ θεωρήματος, καλεῖται *ἀναλυτικὴ μέθοδος*, ἡ δὲ τοιαύτη διανοητικὴ ἐργασία λέγεται *ἀνάλυσις*. Ἡ δὲ μέθοδος ἐκείνη, καθ' ἣν ἀπὸ γνωστῶν ἀρχόμενοι καὶ ταῦτα ἢ τὰς συνεπείας τούτων μετὰ γνωστῶν συνδυάζοντες φθάνομεν τέλος εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, καλεῖται *συνθετική*. Κατὰ ταύτην δὲ τὴν μέθοδον ἐλύθησαν πάντα τὰ μέχρι τοῦδε προβλήματα, πλὴν τοῦ τελευταίου, καὶ ἀπεδείχθησαν πάντα τὰ θεωρήματα, πλὴν τῶν δειχθέντων διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς· διότι ἐν ταύτῃ δεικνύεται τὸ ψευδὲς τῆς ἐναντίας προτάσεως κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον. Καὶ τὴν ἀναλυτικὴν μὲν μέθοδον ἀκολουθοῦμεν, ὅταν ζητῶμεν τὴν λύσιν προβλή-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

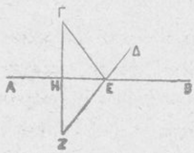
ματος ἢ τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, τὴν συνθετικὴν δὲ ὅταν θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν γνωστὴν οὖσαν.

Πρὸς ἄσκησιν δὲ περὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον λύομεν κατ' αὐτὴν καὶ τα ἑξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

144. *Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Γ καὶ Δ εὐθεῖαι νὰ σχηματίζωσι μετὰ τῆς δοθείσης γωνίας ἴσας.*

'Ανάλυσις. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, δι' ὃ ἡ γωνία ΓΕΑ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΒ. Ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ γωνία ΑΕΖ



ὡς ἴση τῇ ΔΕΒ θὰ εἶναι ἴση καὶ τῇ ΑΕΓ. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση τῇ ΕΓ καὶ ἀχθῇ ΓΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΗ, ΖΕΗ θὰ εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ΓΗ θὰ εἶνε ἴση τῇ ΗΖ, καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τὸ σημεῖον δὲ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὸ δοθὲν σημεῖον Δ μετὰ τοῦ Ζ. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως δὲ ταύτης συνάγομεν τὴν ἑξῆς τοῦ προβλήματος λύσιν.

Λύσις συνθετική. Ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν δοθέντων σημείων, τοῦ Γ, ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΓΗ, καὶ ἐπὶ ταύτης προσεκβληθείσης ἂς ληφθῇ ἡ ΗΖ ἴση τῇ ΓΗ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ Ζ μετὰ τοῦ Δ· τὸ σημεῖον Ε, καθ' ὃ ἡ ΖΔ τέμνει τὴν ΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι τὸ τρίγωνον ΓΕΗ εἶναι ἴσον τῷ ΖΕΗ, ἑπομένως ἡ γωνία ΓΕΗ ἴση τῇ γωνίᾳ ΖΕΗ· ἀλλ' ἡ ΖΕΗ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΒ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα ἡ γωνία ΓΕΑ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΒ.

Σημειωσις. Νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα καὶ ὅταν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς δοθείσης εὐθείας.

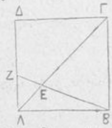
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

145. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ.*

'Ανάλυσις. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον· ἐὰν ἐπὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ ΓΑ ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΓΒ, ἡ ΑΕ θὰ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, ἑπομένως θὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΕ καὶ ἐκβληθῇ μέχρις οὗ συμπέσῃ τῇ ΑΔ κατὰ τὸ Ζ, τὰ τρίγωνα ΓΕΒ, ΑΕΖ εἶναι ἀμφότερα ἰσοσκελῆ· διότι ἐκ κατασκευῆς ἡ ΓΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΒ, δι' ὃ καὶ γωνία ΓΒΕ εἶναι ἴση τῇ ΓΕΒ· ἀλλ' ἡ ΓΒΕ εἶναι ἴση τῇ ΑΖΕ, ὡς ἐναλλὰξ ἐντὸς τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, ἡ δὲ ΓΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΑΕΖ, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση τῇ ΑΕΖ, ἑπομένως καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι ἰσοσκελές. Τὸ τρίγωνον δὲ τοῦτο δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν· διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΕ καὶ ΑΖ εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΖΑΕ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς.



Λύσις συνθετική. Κατασκευάζομεν τρίγωνον οὗ αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ, ἡ δ' ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία τὸ ἥμισυ ὀρθῆς, τὸ ΑΖΕ· κατὰ τὸ σημεῖον Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΖ τὴν ΑΒ, καὶ προσεκβάλλομεν τὴν ΖΕ μέχρις οὗ συμπέσῃ ταύτῃ κατὰ τὸ Β· κατασκευάζομεν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ΑΒΓΔ, καὶ τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι ἡ ΑΕ ἐκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ὡς διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΔΑΒ τοῦ τετραγώνου· τοῦ δὲ τριγώνου ΑΖΕ ὄντος ἰσοσκελοῦς, αἱ γωνίαι ΑΖΕ, ΑΕΖ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις· ἐπειδὴ δὲ ΑΖΕ=ΓΒΕ, καὶ ΑΕΖ=ΓΕΒ, ἄρα καὶ ΓΒΕ=ΓΕΒ, διὰ τοῦτο δὲ ΓΕ=ΓΒ. Ἡ ΑΕ εἶναι λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ τοῦ τετραγώνου, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ.

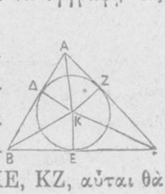
Σημειωσις. Νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ὅταν ἀντὶ τῆς διαφορᾶς δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

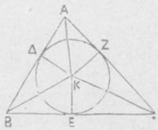
146. *Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.*

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· ζητεῖται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τοῦτο κύκλος.

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον· ἔστω δὲ Κ τὸ κέντρον τοῦ ἐν τῷ τριγώνῳ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς τοῦ κύκλου καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὰ Δ, Ε, Ζ, ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, αὗται θὰ



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου· ἄρα τὸ σημεῖον Κ ἴσον θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ, ὡς τοιοῦτο δὲ θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας ταύτας εὐθειῶν.

Λύσις συνθετική. Ἂς διχοτομηθῶσιν δύο τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, οἷον ἡ ΑΒΓ καὶ ἡ ΒΑΓ· ἔστω δὲ τὸ Κ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμπίπτουσιν αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας ταύτας εὐθεῖαι· ἐκ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπί τινα τῶν πλευρῶν, οἷον τὴν ΒΓ, ἡ ΚΕ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΕ ἂς γραφῇ κύκλος· ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ τριγώνῳ.

Διότι τῶν ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἠγμένων καθέτων ΚΕ, ΚΖ, ΚΔ οὐσῶν ἴσων, ἡ περιφέρεια ἡ γραφεῖσα μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΕ θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Δ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΚΔ, ΚΖ, ΚΕ κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῶν, θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

Σημειωσις α'. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν λοιπῶν δύο. Ὥστε ὑπάρχουσι τέσσαρες κύκλοι ἐφαπτόμενοι τριῶν εὐθειῶν, ὧν ἑκάστη τέμνει τὰς λοιπὰς δύο.

Σημειωσις β'. Ἐν τῇ λύσει τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐδείχθη τὸ θεώρημα, ὅτι *αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου εὐθεῖαι ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ συμπίπτουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

147. *Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων.*

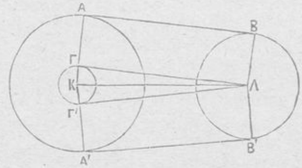
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες κύκλοι ὁ Κ καὶ ὁ Λ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ κοινὴ τούτων ἐφαπτομένη.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο κύκλοι δύνανται νὰ κεῖνται ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης, ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς, τὸ προτεθὲν πρόβλημα ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο.

α') *Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒ ἡ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς Α, Β ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν κέντρων, οἷον τοῦ Λ, παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΛΓ, θὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΛΓ. Ἐπειδὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲ ΓΑ=ΛΒ, ἡ ΚΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ. Ἐὰν δὲ γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ, ἡ ΛΓ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου ὡς κάθετος ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΓ κατὰ τὸ ἄκρον αὐτῆς. Ἀλλ' ἡ ΛΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ κατα τὸ ἐν ἐδαφίῳ 141 πρόβλημα· διότι εἶναι ἡ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Λ ἀγομένη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ—ΛΒ. Διὰ τῆς ΛΓ δὲ δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἡ ΑΒ· διότι ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ διὰ τοῦ Γ διερχομένη ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ, ἡ ΚΑ, καὶ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος ταύτῃ ἡ ΛΒ, καὶ νὰ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ.



Λύσις συνθετική. Μὲ κέντρον τὸ τοῦ ἑτέρου τῶν κύκλων, τὸ Κ, καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων ἂς γραφῇ κύκλος· ἐκ τοῦ κέντρου Λ τοῦ ἑτέρου κύκλου ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ γραφέντος κύκλου ἡ ΛΓ, καὶ ἡ διὰ τοῦ Γ διερχομένη ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ, ἡ ΚΑ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Λ παράλληλος τῇ ΚΑ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἡ ΛΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α, Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ· αὕτη θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τῶν δύο κύκλων Κ καὶ Λ ἐφαπτομένη.

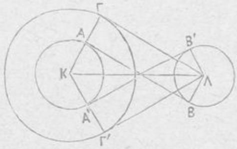
Διότι τῆς ΚΓ οὔσης ἴσης τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ, ἡ ΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΛΒ· εἶναι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῇ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ δὴ ὀρθογώνιον· διότι τῆς γωνίας ΚΓΛ οὔσης ὀρθῆς, καὶ ἡ ΑΓΛ εἶναι ὀρθή. Τοῦ σχήματος δὲ ΑΒΛΓ ὄντος ὀρθογωνίου, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῶν· ἄρα εἶναι ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

Σημειωτέον ὅτι διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Κ, πρέπει τὸ σημεῖον Λ νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου, ἤτοι τὸ ἀπόστημα ΚΛ τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων πρέπει νὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλείτερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι τὸ προτεθὲν πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν κύκλων εἶναι ἐντὸς τοῦ ἑτέρου, ἔχει δὲ δύο λύσεις, ἤτοι ὑπάρχουσι δύο ἐφαπτόμεναι ΑΒ, Α'Β', ὅταν οἱ κύκλοι εἶναι ὁ ἕτερος ἐκτὸς τοῦ ἑτέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρου, ἢ ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἢ τέμνωνται, καὶ μίαν μόνην λύσιν, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός.

β'.) ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων Κ καὶ Λ οὕτως, ὥστε οἱ κύκλοι νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ἀφῆς Α, Β, ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ, καὶ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος τῇ ΑΒ μέχρις οὗ συμπέσῃ τῇ προσεκβολῇ τῆς ΚΑ κατὰ τὸ Γ, τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ ἡ ΛΓ θὰ ἦναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ, ἥτις εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ.



Λύσις συνθετική. Μὲ κέντρον τὸ τοῦ ἑτέρου τῶν δοθέντων κύκλων, τὸ Κ, καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων γράφομεν κύκλον· ἐκ τοῦ κέντρου Λ τοῦ ἑτέρου κύκλου ἄγομεν ἐφαπτομένην τοῦ γραφέντος κύκλου, τὴν ΛΓ· ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ, καὶ ἐκ τοῦ Λ ἀκτῖνα παράλληλον ταύτῃ καὶ κατ' ἀντίθετον φορὰν τὴν ΛΒ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰ σημεῖα Α, Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ· αὕτη δὲ θὰ εἶναι κοινὴ τῶν δοθέντων κύκλων ἐφαπτομένη.

Διότι ἡ ΑΓ εἶναι ἐκ κατασκευῆς παράλληλος τῇ ΛΒ, καὶ ἴση δὲ ταύτῃ, διότι $ΚΓ = ΚΑ + ΛΒ$. Ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ εἶναι παραλληλόγραμον· καὶ δὴ ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία ΚΓΛ εἶναι ὀρθή. Ἡ ΑΒ λοιπὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ, κατὰ τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β· ἄρα εἶναι ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

Σημειωτέον δὲ ὅτι διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΚΓ, ἑπομένως διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν τὸ προτεθὲν πρόβλημα, πρέπει τὸ Λ νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου ΚΓ, τουτέστι πρέπει τὸ ἀπόστημα ΚΛ τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων νὰ μὴ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἤτοι πρέπει οἱ κύκλοι νὰ εἶναι ὁ ἕτερος ἐκτὸς τοῦ ἑτέρου, ἢ νὰ ἐφάπτωνται ἐκτός. Καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὑπάρχουσι δύο λύσεις, ἤτοι δύνανται νὰ ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμενα ἡ ΑΒ, καὶ ἡ Α'Β', κατὰ δὲ τὴν δευτέραν μία μόνη λύσις ὑπάρχει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

148. *Ἰσοδύναμα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἢ ἁπλῶς ἰσοδύναμα* εὐθύγραμμα σχήματα καλοῦμεν τὰ συνιστάμενα ἐκ μερῶν ἴσων καθ' ἕν, κατὰ διάφορον ὅμως τάξιν τεταγμένων, ὥστε τὰ ὅλα νὰ μὴ δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἐὰν σχῆμά τι διαιρεθῇ εἰς μέρη, καὶ τὰ μέρη ταῦτα διαταχθῶσι κατὰ διαφόρους τρόπους, πάντα τὰ οὕτως ἀποτελούμενα σχήματα εἶναι ἰσοδύναμα.

Πάντα τὰ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα σχήματα δύνανται νὰ θεωρῶνται ὡς προερχόμενα ἐκ τῆς διαιρέσεως εἰς μέρη ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος. Διότι ἐὰν τὰ μέρη ἐν ἑκάστῳ τῶν ἰσοδυνάμων διαταχθῶσιν ὅπως εἶναι διατεταγμένα ἔν τινι αὐτῶν Α, τότε πάντα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς προελθόντα ἐκ τοῦ Α.

ΑΞΙΩΜΑ

149. *Δύο σχήματα, ὧν τὸ ἕτερον εἶναι μέρος τοῦ ἑτέρου, δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐκ τῶν μερῶν τοῦ αὐτοῦ σχήματος διαφόρως τεταγμένων δὲν δύνανται νὰ προέλθωσι δύο σχήματα, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶναι μέρος τοῦ ἑτέρου.*

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο διαφέρει τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 15 μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἐκεῖ μὲν γίνεται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ὅλου σχήματος ἐπὶ τὸ ὅλον, ἐνταῦθα δὲ τῶν μερῶν τοῦ πρώτου ἐπὶ τὰ μέρη τοῦ δευτέρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

150. *Τὰ τῷ αὐτῷ ἰσοδύναμα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα.*

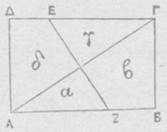
Ἔστω σχῆμά τι Α· ἐκ τῆς διαιρέσεως τούτου εἰς μέρη κατά τινα τρόπον, καὶ τῆς διατάξεως τούτων κατά τινα τρόπον προέρχεται τὸ σχῆμα Β· ἐκ τῆς διαιρέσεως πάλιν τοῦ Α κατ' ἄλλον τρόπον εἰς μέρη καὶ τῆς τούτων κατά τινα τρόπον διατάξεως προέρχεται

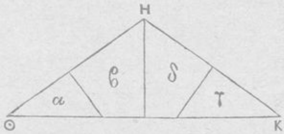
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

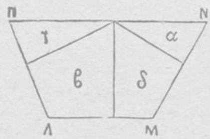
τὸ σχῆμα Γ· τὰ σχήματα Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν εἶναι ἰσοδύναμα τῷ Α, λέγω ὅτι εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα.

Διότι ἐὰν τὸ Α διαιρεθῇ ἐν ταὐτῷ εἴς τε τὰ μέρη τοῦ Β καὶ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ, θέλει εἶναι διῃρημένον εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα συναρμοζόμενα κατά τινα τρόπον ἀποτελοῦσι τὸ Β, κατ' ἄλλον δὲ τρόπον τὸ σχῆμα Γ· ὥστε τὸ Β καὶ Γ συνίστανται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν κατ' ἄλλην τάξιν τεταγμένων, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα.

Παραδείγματος χάριν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἂς διαιρεθῇ διὰ τῆς







διαγωνίου ΑΓ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα συναρμοζόμενα οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΑΔ νὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας, καὶ αἱ ὀρθαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἐφεξῆς, ἀποτελοῦσι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΘΗΚ. Τὸ αὐτὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἂς διαιρεθῇ διὰ τῆς τεμνούσης τὰς παραλλήλους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθείας ΕΖ εἰς δύο τραπέζια ΑΔΕΖ, ΒΓΕΖ, τὰ ὁποῖα συναρμοζόμενα οὕτως, ὥστε αἱ ἴσαι αὐτῶν πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ νὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας, καὶ νὰ εἶναι ἐφεξῆς αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΑΔΕ, ΖΒΓ, ἀποτελοῦσι τὸ τραπέζιον ΛΜΝΠ. Λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΘΚ καὶ τὸ τραπέζιον ΛΜΝΠ εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ γείνωσιν ἀμφότεραι αἱ διαιρέσεις, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη α, ϐ, γ, δ, τὰ ὁποῖα κατά τινα τάξιν τασσόμενα ἀποτελοῦσι τὸ τρίγωνον ΗΘΚ, κατ' ἄλλην δὲ τάξιν τὸ τραπέζιον ΛΜΝΠ.

Παρατηρητέον ὅτι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν διαιρεθῇ τὸ σχῆμα Α εἰς μέρη, καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ Β δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν ἐν τῷ Β ἕκαστον τῶν μερῶν α, ϐ, γ, δ, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τό τε Α καὶ τὸ Β, ὅπως τὰ μέρη ταῦτα διαιροῦνται ἐν τῷ Α ὑπὸ τῆς νέας τούτου διαιρέσεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

151. *Τὰ ἰσοδυνάμοις ἰσοδύναμα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα·*

Ἔστωσαν ἰσοδύναμα τὰ σχήματα Β καὶ Γ, καὶ τῷ μὲν Β ἰσοδύναμον τὸ Δ, τῷ δὲ Γ τὸ Ε· λέγω ὅτι τὸ Δ καὶ τὸ Ε εἶναι ἰσοδύναμα.

Διότι ἔστω Α τὸ σχῆμα, ἐξ οὗ δύνανται νὰ θεωρηθῶσι προερχόμενα τό τε Β καὶ τὸ Γ. Τὸ Δ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ Α, διότι ἀμφότερα εἶναι ἰσοδύναμα τῷ Β. Καὶ τὸ Ε δὲ θὰ εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμον τῷ Α, διότι ἀμφότερα εἶναι ἰσοδύναμα τῷ Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὡς ἐδείχθη τὸ Δ καὶ τὸ Ε εἶναι ἰσοδύναμα τῷ αὐτῷ σχήματι Α, εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πάντα τὰ σχήματα τὰ προερχόμενα ἐξ ἰσοδυνάμων σχημάτων διὰ τῆς διαιρέσεως τούτων καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ τῆς τῶν μερῶν τούτων κατατάξεως καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἶναι ἰσοδύναμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

152. *Ἐὰν εἰς ἴσα ἢ ἰσοδύναμα προστεθῶσιν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα, καὶ τὰ ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.*

Ἔστω Α ἴσον ἢ ἰσοδύναμον τῷ Β, καὶ Γ ἴσον ἢ ἰσοδύναμον τῷ Δ· λέγω ὅτι Α+Γ θὰ εἶναι ἴσον ἢ ἰσοδύναμον τῷ Β+Δ.

Διότι ἐὰν α, β, γ, δ, εἶναι τὰ μέρη τῶν ἰσοδυνάμων Α καὶ Β, ε, ζ, η τὰ μέρη τῶν ἰσοδυνάμων Γ καὶ Δ, τὸ Α+Γ καὶ τὸ Β+Δ. θὰ συνίστανται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων εἶναι ἰσοδύναμα.

ΟΡΙΣΜΟΙ

153. *Βάσις* παραλληλογράμμου καλεῖται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν, *ὕψος* δὲ τὸ ἀπ' ἀλλήλων τούτων ἀπόστημα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐὰν μία τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου ληφθῇ ὡς βάσις, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν προσκειμένων αὐτῇ πλευρῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦ τραπεζίου βάσεις λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραί, ὕψος δὲ τὸ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστημα τούτων.

Τοῦ τριγώνου βάσις λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι γωνίας ἠγμένη κάθετος. Ἡ κάθετος δὲ αὕτη δύναται νὰ πέσῃ εἴτε ἐπ᾽ αὐτὴν τὴν βάσιν, εἴτε ἐπὶ τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

154. *Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.*

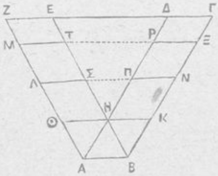
Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὰς ἴσας βάσεις ἐπ᾽ ἀλλήλας οὕτως, ὥστε τὰ παραλληλόγραμμα νὰ κεῖνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, αἱ ἀπέναντι τῶν βάσεων πλευραὶ θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου τῇ κοινῇ βάσει διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὑψῶν. Ἐν τῇ ἀποδείξει δὲ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ᾽ὅσον αἱ ἀπέναντι τῶν βάσεων πλευραὶ ἔχουσιν ἢ δὲν ἔχουσιν μέρος κοινόν.

α΄.) Ἂς λάβωμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ, ὧν αἱ ἀπέναντι τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒ πλευραὶ ΓΔ, ΕΖ ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ ΔΕ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΓΕ,ΑΔΖ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην τῇ ΑΔ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τὴν ΒΕ ἴσην τῇ ΑΖ ὡς ἀπέναντι

πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΖ, καὶ τὴν ΓΕ ἴσην τῇ ΔΖ, διότι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ὑπόλοιπα τῶν ἴσων τῇ ΑΒ καὶ διὰ τοῦτο ἀλλήλαις ἴσων εὐθειῶν ΓΔ, ΕΖ ἠλαττωμένων κατὰ τὴν ΕΔ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΓΕ, ΑΔΖ εἶναι ἴσα. Ἤδη βλέπομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα συνίστανται ἐκ μερῶν ἴσων, δηλαδὴ ἐκ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν μέρους ΑΒΕΔ, καὶ ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΒΓΕ, ΑΔΖ. Ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

β΄.) Ἂς λάβωμεν ἤδη παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ ἀπέναντι τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒ πλευραὶ ΓΔ, ΕΖ δὲν ἔχουσι κοινὸν μέρος, τὸ ΑΒΓΔ καὶ τὸ ΑΒΕΖ. Ἐκ τοῦ σημείου Η, καθ᾽ ὃ ἡ ΑΔ τέμνει τὴν ΒΕ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΘΚ. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΚΗ, ΑΒΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ, ΒΚΗ ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πρῶτον εἶναι ἴσα μὲ τὰ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



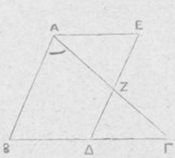
τρίγωνα ΑΒΗ, ΑΗΘ, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ δεύτερον. Ἄς ληφθῶσι ἤδη ἐπὶ τῆς ΘΖ ἀπὸ τοῦ Θ καὶ ἐφεξῆς μήκη ἴσα τῇ ΑΘ, τὰ ΘΛ, ΛΜ, μέχρις οὗ ἢ μηδὲν ὑπολειφθῇ, ἢ μῆκός τι μικρότερον τοῦ ΑΘ τὸ ΜΖ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Λ, Μ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΛΝ, ΜΞ. Κατὰ τὰ ἐν ἐδαφίῳ 133 ἐκτεθειμένα θὰ εἶναι ΑΗ=ΗΠ=ΠΡ. Οὕτω δὲ τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ θὰ εἶναι διῃρημένα τὸ μὲν εἰς παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΑΒΚΗ καὶ προσέτι τὸ ΡΞΓΔ, τὸ δὲ εἰς παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΑΒΗΘ, καὶ προσέτι τὸ ΜΤΕΖ. Καὶ τὰ μὲν ἴσα τοῖς παραλληλογράμμοις ΑΒΚΗ, ΑΒΗΘ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι καὶ ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα, τὰ δὲ δύο τελευταῖα ΡΞΓΔ, ΜΤΕΖ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ὑπάγονται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ὡς δύναται νὰ δειχθῇ τιθεμένων τῶν ἴσων βάσεων αὐτῶν ΡΞ, ΜΤ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ, ὡς ἐξ ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων ἀποτελούμενα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἔχοντι βάσιν καὶ ὕψος ἴσα τοῖς τοῦ παραλληλογράμμου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

155. *Πᾶν τρίγωνον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ ἔχοντι βάσιν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ ὕψος ἴσον τῷ τοῦ τριγώνου.*



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΓ. Οὕτω σχηματίζεται παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔΕΑ, ἔχον βάσιν τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου, καὶ ὕψος ἴσον, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετον. Λέγω δὲ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ. Διότι τὰ δύο ταῦτα σχήματα ἔχουσι μέρος κοινὸν τὸ ΑΒΔΖ, τὰ δὲ λοιπὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΖΔ εἶναι ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΖΕ. Τῷ ὄντι τὰ τρίγωνα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταῦτα ἔχουσι τὴν ΑΕ ἴσην τῇ ΔΓ, ὡς ἴσας ἀμφοτέρας τῇ ΒΔ, τὴν γωνίαν ΖΓΔ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΖΑΕ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ, καὶ τὴν γωνίαν ΓΔΖ ἴσην τῇ ΑΕΖ δι' ὅμοιον λόγον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

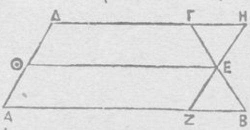
Διότι ἰσοδύναμα εἶναι τὰ παραλληλόγραμμα, οἷς ἰσοδύναμα εἶνε τὰ τρίγωνα ταῦτα. Τὰ δὲ ἰσοδυνάμοις ἰσοδύναμα εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

156. *Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ ἔχοντι ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τούτου.*

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, βάσεις αὐτοῦ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, καὶ ὕψος τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν παραλλήλων τούτων.

Ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἂς



ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ ΑΔ ἡ ΖΗ, καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΔΓ· οὕτω σχηματίζεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΖΗΔ, τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τραπεζίῳ. Διότι τὰ σχήματα ταῦτα ἔχουσιν ἓν μέρος κοινὸν τὸ ΑΖΕΓΔ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΓΕΗ, ΕΖΒ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΓΕ ἴσην τῇ ΕΒ ἐκ κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΗΓΕ ἴσην τῇ ΕΒΖ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΗ, καὶ τὴν γωνίαν ΓΕΗ ἴσην τῇ ΖΕΒ ὡς κατὰ κορυφήν.

Τὸ παραλληλόγραμμον δὲ τοῦτο ΑΖΗΔ τὸ τῷ τραπεζίῳ ἰσοδύναμον ἔχει ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ καὶ τὸ τραπέζιον, βάσεως λαμβανομένης τῆς ΑΖ, αὐτὴ δὲ ἡ βάσις ΑΖ λέγω ὅτι εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου. Διότι

$$\mathrm{AB}+\Gamma\Delta=\mathrm{AZ}+\mathrm{ZB}+\Gamma\Delta=\mathrm{AZ}+\Gamma\mathrm{H}+\Gamma\Delta=\mathrm{AZ}+\Delta\mathrm{H}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ $\mathrm{AZ}=\Delta\mathrm{H}$, ἔχομεν

$$\mathrm{AB}+\Gamma\Delta=2\mathrm{AZ}$$

ὅθεν
$$\frac{\mathrm{AB}+\Gamma\Delta}{2}=\mathrm{AZ}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ

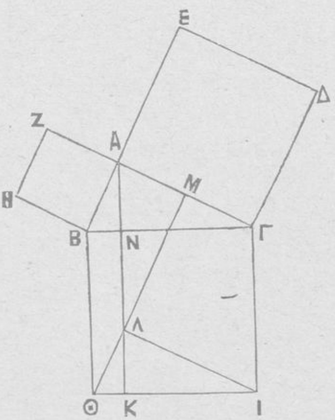
Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τούτου.

Σημειωσις. Ἐὰν ἐκ τοῦ Ε μέσου τῆς ΓΒ ἀχθῇ παράλληλος τῇ βάσει ΑΒ, τὸ σημεῖον Θ, καθ' ὃ ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν ΑΔ, εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ· διότι ΔΘ=ΗΕ, ΘΑ=ΕΖ, καὶ ἐπειδὴ ΗΕ=ΕΖ, ἄρα καὶ ΔΘ=ΘΑ. Εἶναι δὲ ἡ ΘΕ ἴση τῇ ΑΖ. Ἄρα *Πᾶν τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὴν τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τούτου ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

157. *Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τετραγώνων.*

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν κατασκευασθῶσι τετράγωνα, λέγω ὅτι, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης, τὸ ΒΓΙΘ, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τετραγώνων, ἤτοι τοῦ ΑΓΔΕ καὶ τοῦ ΑΒΗΖ.



Ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΘ καὶ διὰ τοῦτο κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ΘΙ ἡ ΑΚ, καὶ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ διὰ τοῦτο κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡ ΘΜ· οὕτω σχηματίζεται τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΛΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΑΒΓ. Διότι ΑΛ=ΒΘ=ΒΓ, ἡ γωνία ΛΑΜ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς αὐτῆς γω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νίας ΒΑΝ. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΛΑΜ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἴσα· ὡς ἐκ τούτου δὲ ΑΜ=ΑΒ καὶ ΛΜ=ΑΓ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΖΗ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΘΛ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὰ ὕψη ΑΖ καὶ ΑΜ ἴσα. Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΘΛ εἶναι ἰσοδύναμον καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΘΚΝ, ὡς ἔχον τὴν αὐτὴν καί τοῦτο βάσιν ΒΘ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΝ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΒΗΖ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΘΚΝ ὡς ἰσοδύναμα τῷ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΘΛ εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἰσοδύναμα.

Ὁμοίως δὲ ἀχθείσης τῆς εὐθείας ΙΛ δεικνύεται ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΚΙΓΝ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἰσοδύναμα τῷ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ ΑΓΙΛ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΗΖ καὶ ΑΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ὀρθογωνίων ΒΘΚΝ καὶ ΓΙΚΝ, ἤτοι τῷ τετραγώνῳ ΒΓΙΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

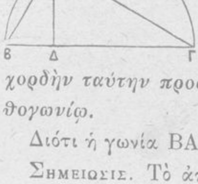
Τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίου παντὸς τετραγώνου τετράγωνον εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἐὰν ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ὅλης ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην τμήματος τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπί τινα διάμετρον αὐτῆς ΒΓ, καὶ χορδαὶ εἰς τὸ ἄκρον ταύτης ΑΒ, ΑΓ, τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν χορδῶν τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου καὶ τοῦ εἰς τὴν χορδὴν ταύτην προσκειμένου τμήματος αὐτῆς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν ἡμικυκλίῳ.

Σημειωσις. Τὸ ἀπ' εὐθείας τινὸς ΑΒ τετράγωνον θέλομεν σημειοῖ χάριν συντομίας πολλάκις ἐν τοῖς ἑξῆς οὕτω ΑΒ², τὸ δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

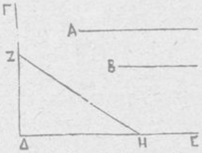
ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον οὕτω ΑΒ.ΒΓ. Κατὰ τὴν σημείωσιν ταύτην τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ τὸ πόρισμα 6'. σημειοῦνται ὡς ἑξῆς·

$$\mathrm{B\Gamma^{T}=AB^{T}+A\Gamma^{T}}$$
$$\mathrm{AB^{T}=B\Gamma.BN}$$
$$\mathrm{A\Gamma^{T}=B\Gamma.\Gamma N.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

158. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι δύο δοθέντων τετραγώνων.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων τετραγώνων. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΓΔΕ· ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν ταύτης λαμβάνομεν τὴν ΔΗ ἴσην τῇ πλευρᾷ Α τοῦ πρώτου τετραγώνου, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΓΔ λαμβάνομεν τὴν ΔΖ ἴσην τῇ πλευρᾷ Β τοῦ δευτέρου τετραγώνου, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΖΗ. Αὕτη δὲ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διότι τῆς γωνίας ΖΔΗ οὔσης ὀρθῆς ἔχομεν·



$$\mathrm{ZH^{T}=\Delta H^{\Gamma}+\Delta Z^{T}}$$

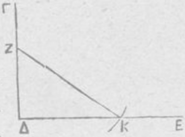
ἤτοι $\mathrm{ZH^{T}=A^{T}+B^{T}}$

Σημειωσις. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε δεδομένων τετραγώνων, ἐπαναλαμβάνοντες πολλάκις ἐφεξῆς τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

159. *Δοθέντων δύο ἀνίσων τετραγώνων νὰ εὑρεθῇ τρίτον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ μετὰ τοῦ μικροτέρου ἄθροισμα νὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ μεγαλειτέρῳ.*

Ἔστωσαν πάλιν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων. Ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΔΕ τῆς ΔΓ λαμβάνομεν τὴν ΔΖ ἴσην τῇ μικροτέρᾳ τῶν δύο πλευρῶν, τῇ Β ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΔΕ εἰς σημεῖόν τι Κ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ ΔΚ.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἐπιζευχθείσης τῆς ΖΚ ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΔΚ,

$$ZK^T = \Delta Z^T + \Delta K^T$$

ἤτοι

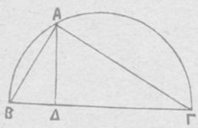
$$A^T = B^T + \Delta K^T$$

Λέγω δὲ ὅτι μόνον τὸ ἔχον πλευρὰν ἴσην τῇ ΔΚ τετράγωνον ἔχει τὴν ζητηθεῖσαν ἰδιότητα· διότι τὰ ἔχοντα πλευρὰς μεγαλειτέρας ἢ μικροτέρας τῆς ΔΚ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς Β ἀποτελοῦσι τετράγωνα μεγαλείτερα ἢ μικρότερα τοῦ A^T. Ἄνισα δὲ τετράγωνα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἰσοδύναμα (149).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

160. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.***

Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην τῇ μείζονι τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου τὴν ΒΓ, καὶ ἐπὶ ταύτης ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων Β τὴν ΒΔ ἴσην τῇ μικροτέρᾳ πλευρᾷ· ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον, ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ τὴν ΔΑ, καὶ τὸ σημεῖον Α, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνύομεν μετὰ τοῦ Β· λέγω δὲ ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι κατὰ τὸ τρίτον πόρισμα τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 157 θεωρήματος τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῆς ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

161. ***Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τριγώνῳ.***

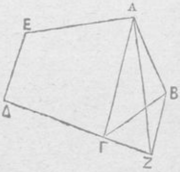
Κατασκευάζομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τοῦτο θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ. Διότι τό τε τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμα τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

162. ***Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τοῦτο.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἔκ τινος αὐτοῦ κορυφῆς Α ἂς ἀχθῇ διαγώνιος χωρίζουσα ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΑΓ· ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΓ, καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἡ ἑτέρα τῶν εἰς τὴν ΑΓ προσκειμένων πλευρῶν ΑΕ, ΓΔ τοῦ πολυγώνου, οἷον ἡ ΓΔ, μέχρις οὗ συμπέσῃ τῇ παραλλήλῳ τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ.



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΖΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ, καὶ τὰς κορυφὰς αὐτῶν Β καὶ Ζ ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει, διὰ τὸ ὁποῖον ἔχουσι καὶ ὕψη ἴσα. Καὶ ἐὰν μὲν εἰς τὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προστεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, παράγεται τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· ἂν δὲ εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα προστεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ, προέρχεται τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ. Ἄρα τὸ δοθὲν πολύγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ΑΖΔΕ· ἔχει δὲ τοῦτο μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ ΑΒΓΔΕ· καθ' ὅτι ἀντὶ τῶν δύο τούτου πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ὑπάρχει ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι μία μόνη πλευρὰ ἡ ΑΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρίγωνον ἰσοδύναμον παντὶ δοθέντι πολυγώνῳ.

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ πολύγωνον τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐφεξῆς πολλάκις, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

163. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι.*

Κατασκευάζομεν κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι, ἔπειτα κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦ ἐδαφίου 161 τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ εὑρεθέντι τριγώνῳ. Τὸ τετράγωνον τοῦτο θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι, διότι καὶ τοῦτο καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμα τῷ αὐτῷ τριγώνῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

164. *Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων σχημάτων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω Α ἴσον ἢ ἰσοδύναμον τῷ Γ, καὶ Β ἴσον ἢ ἰσοδύναμον τῷ Δ, λέγω ὅτι τὸ σχῆμα Α—Β θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ Γ—Δ, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γείνῃ ἡ ἀφαίρεσις.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς κατά τινα τρόπον ἀφαιρέσεως τοῦ Β ἀπὸ τοῦ Α, καὶ δι' $Υ_1$ τὸ ὑπόλοιπον τῆς κατά τινα τρόπον ἀφαιρέσεως τοῦ Δ ἀπὸ τοῦ Γ, θὰ ἔχωμεν

$$Α = Β + Υ$$
$$Γ = Δ + Υ_1,$$

τοῦ σημείου = παριστῶντος καὶ τὸ ἰσοδύναμον. Ἔστω Τ τὸ τετράγωνον τὸ ἰσοδύναμον τοῖς ἰσοδυνάμοις Α καὶ Γ, $Τ_1$ τὸ τετράγωνον τὸ ἰσοδύναμον τοῖς ἰσοδυνάμοις Β καὶ Δ, καὶ $Τ_2$ καὶ $Τ_3$ τὰ τετράγωνα τὰ ἰσοδύναμα τοῖς σχήμασι Υ καὶ $Υ_1$. Εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν $Τ = Τ_1 + Τ_2$

$$Τ = Τ_1 + Τ_3.$$

Ἀλλὰ τὰ τετράγωνα $Τ_2$ καὶ $Τ_3$ ὡς ἀποτελοῦντα μετὰ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου $Τ_1$ ἄθροισμα ἰσοδύναμον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ Τ εἶναι ἴσα. Τὰ σχήματα λοιπὸν Υ καὶ $Υ_1$ εἶναι ἰσοδύναμα ἴσοις τετραγώνοις καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωτέον δὲ ὅτι πάντα τὰ καθ' οἱονδήποτε τρόπον ὑπόλοιπα τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ Β ἀπὸ τοῦ Α εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἰσοδύναμα πάντα τῷ τετραγώνῳ, οὗ τὸ μετὰ τοῦ τετραγώνου $Τ_1$ ἄθροισμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ Τ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

165. *Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ταύτης τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ καὶ κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΑΚ· λέγω ὅτι

$$ΑΚ^{Τ} = ΒΚ . ΓΚ.$$

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ ἔχομεν

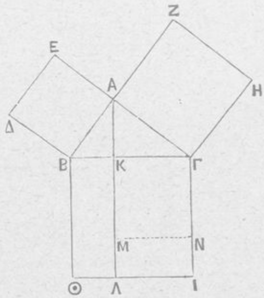
$$ΑΚ^{Τ} + ΓΚ^{Τ} = ΑΓ^{Τ}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀφαιροῦντες ἴσα ἢ ἰσοδύναμα ἀπὸ ἰσοδυνάμων λαμβάνομεν ἰσοδύναμα, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν $ΓΚ^{Τ}$ ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος λαμβάνομεν,

$$ΑΚ^{Τ} = ΑΓ^{Τ} - ΓΚ^{Τ}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Αντικαθιστῶντες ΑΓ^{T} διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου ὀρθογωνίου ΚΓΙΛ, λαμβάνομεν ΑΚ^{T}=ΚΒΙΛ—ΓΚ^{T}.



Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΚ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΓΙ τὴν ΓΝ ἴσην τῇ ΓΚ καὶ νὰ ἀγάγωμεν τὴν ΝΜ παράλληλον τῇ ΓΚ. Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται.

ΑΚ^{T}=ΚΓΙΛ—ΚΓΝΜ

ἤτοι ΑΚ^{T}=ΝΜΛΙ.

'Αλλὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΝΜΛΙ ἡ μὲν πλευρὰ ΝΙ εἶναι ἴση τῇ ΒΚ, διότι ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ὑπόλοιπα τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΒ καὶ ΓΙ τῶν ἴσων ΓΚ, ΓΝ, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ ΝΜ εἶναι ἴση τῇ ΓΚ. 'Εδείχθη ἄρα ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων ΒΚ καὶ ΓΚ τῆς ὑποτεινούσης περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

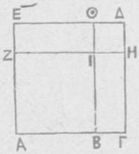
Σημειωσις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις παρέχει νέον τρόπον λύσεως τῷ ἐν ἐδαφίῳ 160 λυθέντος προβλήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

166. *Τὸ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθειῶν τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν τετραγώνων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένου ὀρθογωνίου.*

῎Εστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι (ΑΒ+ΒΓ)^{T}=ΑΒ^{T}+ΒΓ^{T}+2ΑΒ.ΒΓ.

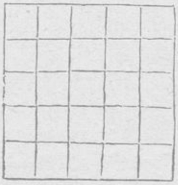
Διότι ἂς κατασκευασθῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ΑΓΔΕ, ἂς ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡ ΑΖ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ζ καὶ Β ἂν ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ μὲν ΑΓ ἡ ΖΗ τῇ δὲ ΑΕ, ἡ ΒΘ. Οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη. Τὸ πρῶτον τούτων ΑΒΙΖ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ δεύτερον ΘΙΗΔ εἶναι τετράγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι τῇ ΒΓ· διότι ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΑΓ, ΑΕ τῶν ἴσων ΑΒ, ΑΖ, τὰ ὑπόλοιπα ΒΓ, ΕΖ εἶναι ἴσα· εἶναι δὲ ΘΙ, ΔΗ, ἴσαι τῇ ΖΕ, καὶ αἱ ΘΔ, ΙΗ ἴσαι τῇ ΒΓ, ὡς παράλληλοι



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταξὺ παραλλήλων. Τοῦ τετραπλεύρου ΘΙΗΔ εἶναι λοιπὸν αἱ πλευραὶ ἴσαι τῇ ΒΓ, εἶναι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ὀρθαί· ἄρα εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον. Τὰ δὲ λοιπὰ σχήματα ΕΖΙΘ, ΒΓΗΙ εἶναι ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὸ μὲν πρῶτον βάσιν τὴν ΖΙ, ἴσην τῇ ΑΒ ὕψος δὲ τὴν ΖΕ, ἴσην τῇ ΒΓ· τὸ δὲ δεύτερον ἔχει βάσιν μὲ τὴν ΒΙ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ ὕψος τὴν ΒΓ. Ἐδείχθη ἄρα ὅτι κτλ.

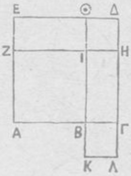
Σημειωσις. Ἐὰν αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τετραγώνου διαιρεθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ἀλλήλοις, καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεως σημείων ἀχθῶσι παράλληλοι ἑκατέρᾳ αὐτῶν, τὸ ὅλον τετράγωνον διαιρεῖται εἰς τόσα τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις, ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἴσων μερῶν, εἰς ἃ διῃρέθη ἡ πλευρά, πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτόν. Ἐὰν π. χ. αἱ πλευραὶ διαιρεθῶσιν εἰς 5 ἴσα μέρη, τὸ τετράγωνον διαιρεῖται εἰς 5×5 ἤτοι 25 τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις. Καὶ γενικῶς ἐὰν αἱ πλευραὶ διαιρεθῶσιν εἰς μ ἴσα μέρη, τὸ τετράγωνον διαιρεῖται εἰς $\mu \times \mu$ ἢ μ^2 τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις.



ΘΕΩΡΗΜΑ

167. *Τὸ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς δύο εὐθειῶν τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ δύο τούτων εὐθειῶν τετραγώνων ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένου ὀρθογωνίου.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΓ. Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ΑΓΔΕ, καὶ ληφθείσης ἐπὶ τῆς ΑΕ τῆς ΑΖ ἴσης τῇ ΑΒ, ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Β καὶ Ζ παράλληλοι τῇ ΑΕ καὶ ΑΓ αἱ ΒΘ, ΖΗ· ἐπὶ δὲ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΔΓ ἂς ληφθῇ ἡ ΓΛ ἴση τῇ ΒΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ΒΓΚΛ.



Παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΓΔΕ καὶ ΒΓΛΚ ἀφαιρεθῶσι τὰ ὀρθογώνια ΖΗΔΕ καὶ ΙΗΛΚ, ὑπολείπεται τὸ ΑΒΙΖ, ὅπερ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΔΕ ἔχει βάσιν τὴν ΖΗ, ἴσην τῇ ΑΓ. καὶ ὕψος τὴν ΖΕ, ἴσην τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ὀρθο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

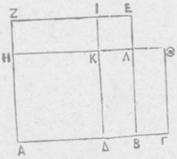
γώνιον ΙΗΛΚ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ ΑΓ, διότι ΒΙ=ΑΒ, ΒΚ=ΒΓ, καὶ ὕψος τὴν ΒΓ. Ἔχομεν ἄρα·

$$(\text{ΑΓ}-\text{ΒΓ})^{\tau}=\text{ΑΓ}^{\tau}+\text{ΒΓ}^{\tau}-2\text{ΑΓ}.\text{ΒΓ}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

168. *Τὸ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν τετραγώνων.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἡ δὲ ΑΔ διαφορὰ τῶν αὐτῶν, ληφθείσης τῆς ΒΔ ἴσης τῇ ΒΓ.



Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ΑΒΕΖ, καὶ ληφθείσης τῆς ΑΗ ἴσης τῇ ΑΔ ἂς κατασκευασθῇ τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΑΓΘΗ, καὶ τέλος ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΖ ἡ ΔΙ. Πρόκειται νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθογώνιεν ΑΓΘΗ, οὗ ἡ βάσις εἶναι ΑΒ+ΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ΑΗ=ΑΔ==ΑΒ—ΒΓ, εἶναι ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΒΓ τετραγώνων.

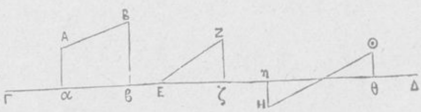
Τὸ ὀρθογώνιον ΗΚΙΖ εἶναι ἴσον τῷ ΒΓΘΛ, διότι ΗΚ=ΑΔ==ΑΗ=ΒΛ, καὶ ΗΖ=ΔΒ=ΒΓ. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΓΘΗ εἶναι ΑΒΛΗ+ΒΓΘΛ, ἢ ἀντικαθισταμένου τοῦ ΒΓΘΛ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΗΚΙΖ, ΑΒΛΗ+ΗΚΙΖ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ὀρθογωνίων εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΕΖ ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ΙΚΛΕ, ὅπερ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον. Ἄρα ἔχομεν·

$$\text{ΑΓΘΗ}=\text{ΑΒΕΖ}-\text{ΙΚΛΕ},$$

ἤτοι $(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}).(\text{ΑΒ}-\text{ΒΓ})=\text{ΑΒ}^{\tau}-\text{ΒΓ}^{\tau}.$

ΟΡΙΣΜΟΣ

169. *Προβολὴ* εὐθείας πεπερασμένης ἐπὶ ἑτέραν ἄπειρον εἶναι τὸ μέρος ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν ἠγμένων.

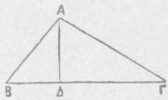


Οἷον προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ εἶναι ἡ αβ, τῆς ΕΖ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εἶναι ἡ ΕΖ, καὶ τῆς ΗΘ ἡ ηθ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

170. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ ἀπὸ τῆς εἰς ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν ταύτην γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν τούτων καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἑτέρας ἐπὶ ταύτην περιεχομένου.*



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ ἡ γωνία Γ ἔστω ὀξεῖα, προβολὴ δὲ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι εἶναι

$$ΑΒ^Τ=ΒΓ^Τ+ΑΓ^Τ-2ΒΓ.ΓΔ.$$

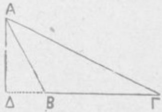
Διότι εἶναι $ΒΔ=ΒΓ-ΓΔ$· κατὰ δὲ τὴν τοῦ ἐδαφίου 167 πρότασιν ἔχομεν $ΒΔ^Τ=ΒΓ^Τ+ΓΔ^Τ-2ΒΓ.ΓΔ$.

Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη $ΑΔ^Τ$, λαμβάνομεν

$$ΑΔ^Τ+ΒΔ^Τ=ΒΓ^Τ+ΓΔ^Τ+ΑΔ^Τ-2ΒΓ.ΓΔ.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ΑΔ^Τ+ΒΔ^Τ=ΑΒ^Τ$, καὶ $ΓΔ^Τ+ΑΔ^Τ=ΑΓ^Τ$, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται·

$$ΑΒ^Τ=ΒΓ^Τ+ΑΓ^Τ-2ΒΓ\,ΓΔ·$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὅπερ συμβαίνει ὅταν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα, ἔχομεν

$$ΒΔ=ΓΔ-ΒΓ,$$

καὶ ἡ ἀπόδειξις προβαίνει ὡς ἀνωτέρω.

ΘΕΩΡΗΜΑ

171. *Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς εἰς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν πλευρῶν, καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἑτέρας ἐπὶ ταύτην.*

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν γωνίαν ἔχον τὴν ΑΓΒ, καὶ ΓΔ ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ὑπάρχει ἡ ἰσότης

$$ΑΒ^Τ=ΑΓ^Τ+ΒΓ^Τ+2ΒΓ.ΓΔ.$$

Διότι ἔχομεν $ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅθεν $\quad B\Delta^{T}=B\Gamma^{T}+\Gamma\Delta^{T}+2B\Gamma.\Gamma\Delta.$

Προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη $A\Delta^{T}$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\quad B\Delta^{T}+A\Delta^{T}=AB^{T}$, καὶ $A\Delta^{T}+\Gamma\Delta^{T}=A\Gamma^{T}$, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα, ἣν ἔπρεπε νὰ δείξωμεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

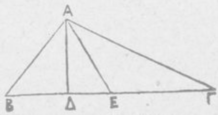
172. *Ἐὰν τὸ ἀπὸ πλευρᾶς τινος τριγώνου τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τετραγώνων, ἡ ὑποτείνουσα εἰς τὴν πλευρὰν ἐκείνην γωνία εἶναι ὀρθή.*

Διότι κατὰ τὰ προηγούμενα δύο θεωρήματα, ἐὰν ἡ γωνία ὑποτεθῇ ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εἰς ταύτην πλευρᾶς τετράγωνον θὰ εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τετραγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

173. *Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον Ε τῆς βάσεως ἡ ΑΕ, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς σχέσις·*

$$AB^{\Gamma}+A\Gamma^{T}=2AE^{T}+2BE^{T}.$$



Διότι ἀχθείσης τῆς ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ καθέτου ΑΔ, τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ, ὧν τὸ μὲν ἔχει ὀξεῖαν γωνίαν κατὰ τὸ Ε τὸ δὲ ἀμβλεῖαν, δίδουσι κατὰ τὰ θεωρήματα 170 καὶ 171·

$$AB^{\Gamma}=AE^{T}+BE^{T}-2BE.E\Delta$$
$$A\Gamma^{T}=AE^{T}+E\Gamma^{T}+2E\Gamma.E\Delta$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας καὶ παρατηροῦντες ὅτι $BE=E\Gamma$, λαμβάνομεν,

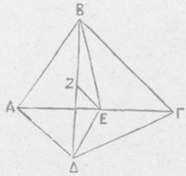
$$AB^{T}+A\Gamma^{T}=2AE^{T}+2BE^{T}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

174. *Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραγώνων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν δύο διαγωνίων τετραγώνων, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιοι αὐτοῦ ἡ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ, τὰ δὲ μέσα αὐτῶν τὸ Ε καὶ τὸ Ζ· λέγω ὅτι



$$AB^T + B\Gamma^T + \Gamma\Delta^T + A\Delta^T = $$
$$= A\Gamma^T + B\Delta^T + 4ZE^T.$$

Διότι ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΒΕ, ΔΕ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ, δίδουσι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὰς ἰσότητας

$$AB^T + B\Gamma^T = 2BE^T + 2AE^T$$
$$A\Delta^T + \Delta\Gamma^T = 2\Delta E^T + 2AE^T$$

Προσθέτοντες δὲ ταύτας λαμβάνομεν

$$AB^T + B\Gamma^T + A\Delta^T + \Delta\Gamma^T = 2BE^T + 2\Delta E^T + 4AE^T \ (1).$$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ ἔχομεν πάλιν κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα $BE^T + \Delta E^T = 2BZ^T + 2ZE^T$

καὶ διπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης,

$$2BE^T + 2\Delta E^T = 4BZ^T + 4ZE^T.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (1) ἀντὶ $2BE^T + 2\Delta E^T$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ $4BZ^T + 4ZE^T$ λαμβάνομεν

$$AB^T + B\Gamma^T + A\Delta^T + \Delta\Gamma^T = 4BZ^T + 4AE^T + 4ZE^T.$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $B\Delta = 2BZ$, καὶ $A\Gamma = 2AE$, εἶναι $B\Delta^T = 4BZ^T$, καὶ $A\Gamma^T = 4AE^T$ (166 Σημείωσ.). Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ τελευταίᾳ ἰσότητι, $4BZ^T$ καὶ $4AE^T$ διὰ τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς $B\Delta^T$ καὶ $A\Gamma^T$, λαμβάνομεν

$$AB^T + B\Gamma^T + A\Delta^T + \Delta\Gamma^T = B\Delta^T + A\Gamma^T + 4ZE^T.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ τὸ ἄθροισμα τὸ ἀπὸ τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραγώνων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀπὸ τῶν δύο διαγωνίων τετραγώνων.

Διότι ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΖΕ μηδενίζεται.

Σημειωτέον δὲ ὅτι καὶ ἡ ἀντίστροφος τῆς προτάσεως ταύτης ἀληθεύει.

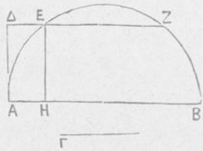
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

175. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, εἰς σημεῖόν τι δὲ τῆς ΑΒ, οἷον τὸ Α, ὑψοῦμεν κάθετον ἴσην τῇ Γ τὴν ΑΔ, ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν παράλληλον τῇ ΑΒ τὴν ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων, εἰς ἃ αὕτη τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν, οἷον τοῦ Ε, ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΕΗ. Λέγω δὲ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΗ καὶ ΗΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ ζητούμενον.



Διότι $\mathrm{AH}+\mathrm{HB}=\mathrm{AB}$, καὶ $\mathrm{AH}.\mathrm{HB}=\mathrm{HE}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A\Delta}^{\mathrm{T}}=\Gamma^{\mathrm{T}}$. (165)

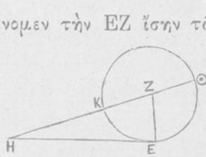
Σημειωσεις. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ΑΒ, εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ τῆς εὐθείας ΗΕ, ἥτις εἶναι ἡ κατὰ τὸ Η ὑψωμένη ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν, τὴν μεγίστην δὲ τοιαύτην εὐθεῖαν λαμβάνομεν, ὅταν τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ὅτε ἡ κάθετος εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου, ἤτοι τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ, συνάγομεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ἡ εὐθεῖα Γ ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, καὶ ὅτι *ἐκ πάντων τῶν ἴσας τὰς περιμέτρους ἐχόντων ὀρθογωνίων τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ τετράγωνον.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

176. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας Μ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας λαμβάνομεν τὴν ΕΖ ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, καὶ τὴν ΕΗ ἴσην τῇ Μ, ἄγομεν τὴν ΗΖ, ἣν προσεκβάλλομεν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐκ κέντρου τοῦ Ζ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ΖΕ γράφομεν κύκλον, ὅστις τέμνει τὴν ΗΘ εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Θ. Αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου εἶναι ἡ ΗΘ καὶ ἡ ΗΚ.



Διότι $\mathrm{H\Theta}-\mathrm{HK}=\mathrm{K\Theta}=2\mathrm{EZ}=\mathrm{AB}$.

$$\mathrm{H\Theta}.\mathrm{HK}=(\mathrm{HZ}+\mathrm{Z\Theta}).(\mathrm{HZ}-\mathrm{Z\Theta})=\mathrm{HZ}^{\mathrm{T}}-\mathrm{Z\Theta}^{\mathrm{T}}=$$
$$=\mathrm{HZ}^{\mathrm{T}}-\mathrm{ZE}^{\mathrm{T}}=\mathrm{EH}^{\mathrm{T}}=\mathrm{M}^{\mathrm{T}}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

177. Ὅταν πάντα τὰ σημεῖα τὰ κοινήν τινα ἰδιότητα ἔχοντα κεῖνται ἐπί τινος γραμμῆς, καὶ τἀνάπαλιν πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχωσι τὴν κοινὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἡ γραμμὴ λέγεται ὁ *γεωμετρικὸς τόπος* τῶν σημείων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α΄.) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Β, εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν Β. Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς, μόνα τὰ σημεῖα τὰ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμενα θεωροῦμεν.

β΄.) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας Α εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Β, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ Α, καὶ ἧς τὸ ἀπόσπασμα ἀπὸ τῆς πρώτης εἶναι ἴσον τῇ Β.

γ΄.) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας εἶναι ἡ κατὰ τὸ μέσον ταύτης ἠγμένη πρὸς ὀρθὰς γωνίας (82).

δ΄.) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν πλευρῶν γωνίας εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, εἶναι ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ταύτην εὐθεῖα (88).

ε΄) Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ᾽ ὧν αἱ εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ ἀγόμεναι εὐθεῖαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ταύτης μέρη, σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ Γ, εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχόμενον τμῆμα κύκλου (140).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

178. Σημειωσεις. Ἡ γνῶσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἶναι λίαν χρήσιμος εἰς τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Διότι πλεῖστα τούτων ἀνάγονται εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς σημείου. Οἷον ὅταν ζητῆται νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ὅταν δὲ ζητῆται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, κτλ.

Ἐὰν δὲ αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος εἶναι τοιαῦται, ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον νὰ κεῖται ἀναγκαίως ἐπὶ δύο διαφόρων γεωμετρικῶν τόπων, θὰ εἶναι τὸ κοινὸν τῶν δύο τούτων τόπων σημεῖον· καὶ ἐὰν οὗτοι ἔχωσι περισσότερα τοῦ ἑνὸς κοινὰ σημεῖα, θὰ ὑπάρχωσι λύσεις τοῦ προβλήματος περισσότεραι τῆς μιᾶς.

Παραδείγματος χάριν, *ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, οὗ ἡ περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων* Α,Β,Γ, θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰ δύο ἐξ αὐτῶν,οἷον τὸ Α καὶ τὸ Β· ἐπειδὴ δὲ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπὸ τοῦ Α καὶ Β ἀπεχόντων εἶναι ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας ἠγμένη ἐπὶ ταύτην κάθετος, τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης. Ὁμοίως δὲ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἐπιζευγνυούσης εὐθείας ἠγμένης ἐπὶ ταύτην καθέτου· ἄρα θὰ εἶναι τὸ σημεῖον,καθ' ὃ αἱ δύο αὗται κάθετοι τέμνουσιν ἀλλήλας.

Ἐν δὲ τῷ προβλήματι, *νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, οὗ τὸ κέντρον Κ, ἐκ τοῦ σημείου Α τοῦ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου*, τὸ ἄγνωστον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς πρέπει νὰ κεῖται πρῶτον ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας, καὶ δεύτερον νὰ εἶναι κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, ἧς αἱ πλευραὶ θὰ διέρχωνται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Κ, ἑπομένως νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν τὰ σημεῖα Α καὶ Κ ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν. Ἄρα τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς δοθείσης. Ἐπειδὴ δὲ δύο τομῆς σημεῖα ὑπάρχουσι, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις (141).

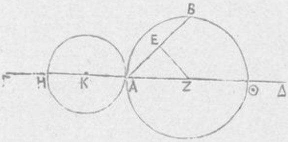
Ὡς παραδείγματα προβλημάτων λυομένων διὰ τῶν γεωμετρικῶν τόπων ἔστωσαν καὶ τὰ ἑξῆς τέσσαρα. Σημειωτέον δὲ ὅτι οἱ μόνοι γεωμετρικοὶ τόποι, οὓς θεωροῦμεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἡ περιφέρεια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

179. *Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Α καὶ διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β.*

Πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐφαπτόμενοι τοῦ δοθέντος κύκλου Κ κατὰ



τὸ σημεῖον Α ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Κ καὶ Α διερχομένης εὐθείας ΓΔ· ἐπὶ ταύτης λοιπὸν θὰ κεῖται καὶ τοῦ ζητουμένου κύκλου τὸ κέντρον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος οὗτος θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, τὸ κέντρον αὐτοῦ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἐπὶ ταύτην ἠγμένης καθέτου ΕΖ· ἄρα τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ὃ τέμνονται ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΕΖ. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΑ γραφῇ κύκλος, εἶναι φανερὸν ὅτι οὗτος ἐφάπτεται τοῦ δοθέντος κύκλου κατὰ τὸ Α, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Β.

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ, ἤτοι ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ὅταν δὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΕΖ καὶ τῆς ΓΔ εἶναι μεταξὺ τοῦ Α καὶ Κ, ὅπερ συμβαίνει ὅταν τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφάπτεται τοῦ δοθέντος ἐντός. Ὅταν δὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς εἶναι πέραν τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Γ, ὅπερ συμβαίνει ὅταν τὸ Β κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένης αὐτοῦ, ἐφ' ἃ καὶ ὁ κύκλος, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφάπτεται τοῦ δοθέντος περιέχων αὐτόν. Τέλος δὲ ὅταν καὶ τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου, ὁ γραφόμενος κύκλος ταὐτίζεται μετὰ τοῦ δοθέντος.

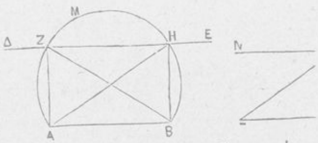
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

180. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις ΑΒ, τὸ ὕψος Ν, καὶ γωνία Γ, εἰς ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει.*

Ἐνταῦθα ἄγνωστος εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν αἱ εἰς τὰ πέρατα τῆς ΑΒ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ Γ, εἶναι τὸ τόξον ΑΜΒ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ βαίνοντος ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην τῇ Γ, ἡ κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου.

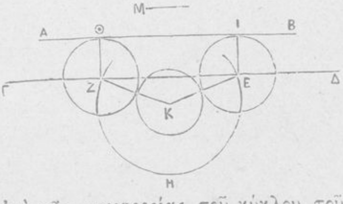


Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση τῇ εὐθείᾳ Ν, ἡ κορυφὴ αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΑΒ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ τμῆμα μερη, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην τῇ Ν κειμένης, τῆς ΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ καὶ τὸ τόξον ΑΜΒ ἔχουσιν ἐν γένει δύο κοινὰ σημεῖα Ζ καὶ Η, ἐὰν ταῦτα ἐπιζευχθῶσι μετὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, λαμβάνομεν τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΖΑΒ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἔχει. Σημειωτέον δὲ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ὅταν ἡ εὐθεῖα Ν εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ὑψωμένης καθέτου καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΜΒ περατουμένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

181. *Νὰ γραφῇ κύκλος ἔχων ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ, καὶ ἐφαπτόμενος τῆς τε δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ δοθέντος κύκλου Κ ἐκτός.*

Τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ κεῖται ἐν πρώτοις ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσην τῇ Μ εὑρισκομένης, τῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ὅταν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων, τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τοῦ γραφομένου μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην τὴν τοῦ δοθέντος κύκλου ηὐξημένη κατὰ Μ, τῆς ΕΗΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ περιφέρεια αὕτη καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἔχουσιν ἐν γένει δύο κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἐὰν μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, καὶ ἀκτῖνα ἴσην τῇ Μ γραφῶσι κύκλοι, οὗτοι θὰ ἐφάπτωνται τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ κύκλου Κ ἐκτός.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

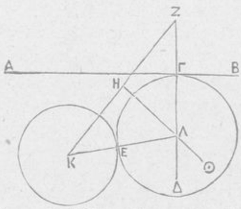
Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν ὅταν ὁ κύκλος ΕΗΖ ἐφάπτηται τῆς ΓΔ, ὅπερ συμβαίνει ὅταν τὸ Κ εὑρίσκηται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἴσην τῷ διπλασίῳ τῆς Μ ηὐξημένῳ κατὰ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Κ. Εἶναι δὲ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον ὅταν τὸ Κ εὑρίσκηται εἰς μεγαλειτέραν ταύτης ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀπόστασιν.

Σημειωσις. Ὁμοίως λύεται τὸ πρόβλημα καὶ ὅταν πρόκειται ὁ κύκλος νὰ ἐφάπτηται τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντός, ἤτοι περιέχων αὐτόν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις, τὸ πρόβλημα *νὰ γραφῇ κύκλος ἔχων ἀκτῖνα ἴσην τῇ Μ, καὶ ἐφαπτόμενος τῆς τε δοθείσης εὐθείας Β καὶ τοῦ δοθέντος κύκλου Κ*, ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

182. ***Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ τε δοθέντος κύκλου Κ ἐκτός, καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Β κατὰ τὸ ἐπὶ ταύτης δοθὲν σημεῖον Γ.***

Τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ κεῖται ἐν πρώτοις ἐπὶ



τῆς ἐκ τοῦ Γ ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, τῆς ΓΔ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστημα τοῦ κέντρου τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἀπὸ τοῦ Γ κατὰ τὴν ἀκτῖνα ΚΕ τοῦ δοθέντος κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΔΓ προσεκβληθείσης ἐπὶ τὸ Ζ ληφθῇ ἡ ΓΖ ἴση τῇ ΚΕ, τὰ σημεῖα Ζ καὶ Κ ἴσον θ' ἀπέχωσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ζητουμένου κύκλου· ἄρα τὸ κέντρον τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΚΖ ἐπὶ ταύτην ἠγμένης καθέτου ΗΘ. Τὸ κέντρον ἄρα τοῦ ζητουμένου κύκλου, ὡς κείμενον καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΘ, εἶναι τὸ σημεῖον Λ, καθ' ὃ αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας.

Σημειωσις. Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, καὶ ὅταν ὁ ζητούμενος κύκλος πρέπει νὰ ἐφάπτηται τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντός, περιέχων αὐτόν, ἢ περιεχόμενος ἐν αὐτῷ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄.) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα δύο τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ῥόμβου εἶναι ἴσον τῷ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστήματι τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν. (Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει).

2) Ἐὰν ἐκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πέραν τοῦ Γ, καὶ ληφθῇ ΓΑ΄=ΑΓ, ΓΒ΄=ΓΒ, καὶ ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Α΄,Β΄, τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, Α΄Β΄ καὶ τὸ σημεῖον Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

3) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΒΓ ληφθῶσιν δύο τυχόντα μήκη ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς, τὰ μήκη ΒΔ΄, ΒΕ΄, ἴσα τοῖς ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ΄, ΕΔ΄, τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΑΒΓ εὐθείας.

4) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου εὐθεῖα διχοτομῇ καὶ τὴν εἰς τὴν γωνίαν ταύτην ὑποτείνουσαν πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

5) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τριγώνου εὐθεῖαι, ἀχθῇ παράλληλος τινὶ τῶν πλευρῶν, αὕτη θὰ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιεχομένων μερῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

6) Ἐὰν ἐκ τριῶν κύκλων ἕκαστος ἐφάπτηται τῶν λοιπῶν δύο, καὶ κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων, αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

7) Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀχθῶσι παράλληλοι ταῖς πλευραῖς αὐτοῦ, σχηματίζεται τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου, ἧς εἶναι παράλληλος, αὐτὸ δὲ τὸ τρίγωνον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

8) Αἱ ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν παντὸς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἀγόμεναι κάθετοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου θὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου, καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος ὅτι αἱ κατὰ τὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μέσα τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου ὑψούμεναι κάθετοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

9) Παντὸς ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ πολυγώνου, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τάξεως περιττῆς εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι πασῶν τῶν γωνιῶν τάξεως ἀρτίας, ἀρχῆς γινομένης ἀφ' οἱασδήποτε τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου·

Β'.) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΕΙΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου τῶν ἴσων τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου σχηματίζουσιν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου σταθερᾶς τὸ μῆκος εὐθείας, ἧς τὰ ἄκρα κατὰ πάσας τὰς θέσεις, ἃς λαμβάνει, κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης ὀρθῆς γωνίας.

5) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

6) Ἐὰν ἐκ πάντων τῶν σημείων περιφερείας ἀχθῶσι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, τίς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν τούτων;

Γ'.) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

1) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις, τὸ ὕψος, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὸ μέσον τῆς βάσεως μετὰ τῆς κορυφῆς.

2) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἔχων τὰς διαγωνίους ἴσας ταῖς δοθείσαις εὐθείαις.

3) Μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων·

4) ἢ διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας·

5) ἢ ἐφαπτόμενος τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν·

6) ἢ ἐφαπτόμενος τῶν δύο δοθέντων κύκλων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ὡς ἐκ κέντρου νὰ γραφῇ κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κύκλον οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο δοθείσας παραλλήλους εὐθείας οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τούτων ἐναπολαμβανόμενον μέρος τῆς εὐθείας νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν δοθέντα κύκλον οὕτως, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ ἐν τῷ κύκλῳ ἐναπολαμβανόμενον νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

10) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τοὺς δύο δοθέντας κύκλους οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἐν τῷ πρώτῳ κύκλῳ ἐναπολαμβανόμενον μέρος τῆς εὐθείας νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Μ, τὸ δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ν.

11) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ λοιπαὶ δύο πλευραί.

12) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο δοθείσας εὐθείας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζηται τρίγωνον ἰσοσκελές.

13) Ἐκ τῶν δύο δοθέντων σημείων νὰ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι σχηματίζουσαι μετὰ τῶν δύο δοθεισῶν παραλλήλων ῥόμβον.

14) Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὡς βάσεως νὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

15) Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν τμημάτων τούτων τετραγώνων νὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

16) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ, καὶ τῆς ὁποίας ἡ μὲν ἑτέρα τῶν πλευρῶν νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, ἡ δὲ ἑτέρα νὰ εἶναι παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

17) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις, ἡ γωνία εἰς ἣν αὕτη ὑποτείνει, καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν.

18) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο γωνίαι καὶ τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν.

19) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο γωνίαι καὶ ἡ περίμετρος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΟΡΙΣΜΟΙ

183. Ὅταν θεωρῶμεν ποσότητά τινα μίαν καὶ ὡρισμένην, ἢ ποσότητας, αἵτινες ὡς ἐκ τοῦ εἴδους αὐτῶν εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις, τότε λέγομεν ὅτι ἡ μία ἐκείνη ποσότης, ἢ ἡ τὸ εἶδος τῶν πολλῶν καὶ ἴσων παριστῶσα, εἶναι ποσότης *σταθερά*. Οἷον δεδομένον σχῆμα ἢ ἀριθμὸς εἶναι ποσότης σταθερά. Ὡσαύτως τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου τῆς περιφερείας κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ εἶναι ποσότης σταθερά, διότι δυνάμεθα μὲν νὰ θεωρήσωμεν πολλὰ τοιαῦτα ἀποστήματα, καθ' ὅσον λαμβάνομεν διάφορα τῆς περιφερείας σημεῖα, ἀλλὰ πάντα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις. Ὁμοίως τὸ ἀπόστημα τῶν διαφόρων σημείων εὐθείας ἀπὸ εὐθείας παραλλήλου αὐτῇ εἶναι ποσότης σταθερά.

Ὅταν δὲ θεωρῶμεν ποσότητας ὁμοειδεῖς ἀνίσους, ἡ τὸ εἶδος αὐτῶν παριστῶσα ποσότης λέγεται *μεταβλητή*. Οἷον τὸ ἀπόστημα δοθέντος σημείου ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων εὐθείας δεδομένης εἶναι ποσότης μεταβλητή. Ὁμοίως ὅταν θεωρῶμεν διάφορα τὸ μέγεθος τόξα δοθέντος κύκλου, λέγομεν ὅτι τὸ τόξον εἶναι ποσότης μεταβλητή.

184. Δύο ποσότητες δύνανται νὰ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε μεταβαλλομένης τῆς ἑτέρας αὐτῶν νὰ μεταβάλληται καὶ ἡ ἑτέρα. Παραδείγματος χάριν ἡ πλευρὰ τετραγώνου καὶ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· διότι εἰς ὡρισμένην πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη διαγώνιος, καὶ τἀνάπαλιν· μεταβαλλομένης δὲ τῆς πλευρᾶς μεταβάλλεται καὶ ἡ διαγώνιος. Ὁμοίως τὸ τόξον καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων.

Εἰς τὴν μίαν τῶν ἀπ' ἀλλήλων ἐξαρτωμένων μεταβλητῶν δυνάμεθα νὰ δίδωμεν αὐθαιρέτους τιμάς, τότε δὲ ἡ ἑτέρα λαμβάνει τιμὰς οὐχὶ πλέον αὐθαιρέτους, ἀλλ' ἐξαρτωμένας ἐκ τῶν τιμῶν τῆς πρώτης.

Ἡ μεταβλητή, εἰς ἣν δίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς, καλεῖται *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*, ἡ δὲ μεταβλητή, ἧς αἱ τιμαὶ ἐξαρτῶνται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ τῶν τιμῶν ἐκείνης, καλεῖται *ἐξηρτημένη μεταβλητὴ* ἢ *συνάρτησις* τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Παραδείγματος χάριν ἐὰν εἰς τὴν πλευρὰν τετραγώνου δίδωμεν διαφόρους αὐθαιρέτους τιμάς, τότε ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ἡ πλευρά, συνάρτησις δὲ ἡ διαγώνιος.

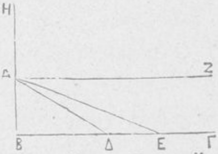
Αἱ μεταβολαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς δύνανται νὰ ἀκολουθῶσι νόμον τινά, οἷον νὰ αὐξάνῃ ἡ μεταβλητὴ ἀπαύστως ἢ νὰ ἐλαττῶται ἀπαύστως.

Μεταβαλλομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς κατά τινα νόμον συμβαίνει ἐνίοτε ἡ συνάρτησις αὐτῆς νὰ προσεγγίζῃ ἀπαύστως εἰς σταθεράν τινα ποσότητα, καὶ οὕτως, ὥστε ἡ διαφορὰ τῆς σταθερᾶς καὶ τῆς συναρτήσεως νὰ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα δοθείσης ποσότητος ε ὁσονδήποτε μικρᾶς, νὰ ἐξακολουθῇ δὲ μένουσα μικροτέρα τῆς ε καὶ διὰ τὰς μετέπειτα τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὰς τιμὰς δηλαδή, ἃς θὰ λάβῃ μετ' ἐκείνας, ἃς ἔχει ἤδη λάβῃ, ἐξακολουθούσης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς νὰ μεταβάλληται κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον.

Ἡ σταθερὰ ποσότης, εἰς ἣν συνάρτησις προσεγγίζει κατὰ τὸν ῥηθέντα τρόπον λέγεται *ὅριον* αὐτῆς.

Παραδείγματα ὁρίων.

α'.) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἂς ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἀπὸ τοῦ Α μῆκος τι αὐθαίρετον ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ. Ἡ γωνία ΒΑΔ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους ΒΓ, αὐξανομένου δὲ τούτου αὐξάνει καί ἡ γωνία, διότι εἰς τὸ μεῖζον μῆκος ΒΕ ἀντιστοιχεῖ μείζων γωνία ἡ ΒΑΕ. Αὐξανομένου δὲ ἀπαύστως τοῦ ἀπὸ τοῦ Β λογιζομένου μήκους, αὐξάνει ἀπαύστως καὶ ἡ γωνία καὶ προσεγγίζει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΖ, μένουσα πάντοτε μικροτέρα αὐτῆς. Ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μεταβλητῆς γωνίας ΒΑΔ καὶ τῆς σταθερᾶς ΒΑΖ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης γωνίας ληφθέντος τοῦ μεταβλητοῦ μήκους ἱκανῶς μεγάλου. Διότι πᾶσα ἐκ τοῦ Α καὶ πρὸς τὰ μέρη τῆς ΑΖ, ἐφ' ἃ καὶ ἡ ΒΓ, ἀγομένη εὐθεῖα, ὅσον μικρὰν γωνίαν φ καὶ ἂν σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΖ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἰς ἀπόστημά τι ἀπὸ τοῦ Β. Ληφθέντος δὲ μείζονος ἀποστήματος ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ διαφορὰ τῆς ἀντιστοιχούσης γω-



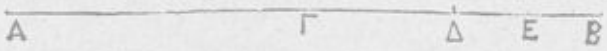
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νίας καὶ τῆς ὀρθῆς ΒΑΖ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας φ, καὶ θὰ ἐξακολουθῇ νὰ μένῃ μικροτέρα τῆς φ, ἐὰν τὸ μεταβλητὸν μῆκος ἐξακολουθῇ μεταβαλλόμενον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἤτοι ἀπαύστως αὐξανόμενον.

Ἄρα ἡ μεταβλητὴ γωνία ΒΑΔ ἔχει ὅριον τὴν ὀρθὴν ΒΑΖ, ὅταν τὸ μεταβλητὸν μῆκος ΒΔ, ἐξ οὗ ἐξαρτᾶται, αὐξάνῃ ἀπαύστως ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν ΗΑΔ, ἣν σχηματίζει ἡ προσεκβολὴ τῆς ΑΒ μετὰ τῆς ΑΔ, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐλαττοῦται ἀπαύστως καὶ ἔχει ὅρον τὴν ὀρθὴν ΗΑΖ.

Β') Ἐὰν δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ΑΓ, ἔπειτα τοῦ ὑπολοίπου ΓΒ τὸ ἥμισυ ΓΔ, ἔπειτα τοῦ ὑπολοίπου ΔΒ τὸ ἥμισυ ΔΕ, καὶ ἐξακολουθῶμεν οὕτως ἐπ' ἄπειρον, τὸ ἄθροισμα ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ



+ . . ., οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἔχει ὅριον τὴν ὅλην εὐθεῖαν ΑΒ. Διότι ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ μήκους καὶ τοῦ σταθεροῦ ΑΒ εἶναι κατὰ πρῶτον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒ, ἔπεται τὸ ἥμισυ τούτου, ἤτοι $\frac{1}{4}$ ΑΒ, ἔπειτα $\frac{1}{8}$ΑΒ, ἔπεται $\frac{1}{16}$ ΑΒ, καὶ ἂν ληφθῶσι μ μέρη τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶνε $\frac{AB}{2^\mu}$. Λέγω δὲ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο δύναται νὰ γείνῃ μικρότερον δοθέντος μήκους λ, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ τοῦτο. Διότι κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ 26 ἀξίωμα τὸ μῆκος λ πολλαπλασιαζόμενον ἱκανῶς δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ μῆκος ΑΒ· ἔστω δὲ $\lambda \times \nu > AB$. Τότε $\lambda > \frac{AB}{\nu}$· ἐὰν δὲ ληφθῇ $2^\mu > \nu$, θὰ εἶναι πολλῷ μᾶλλον $\lambda > \frac{AB}{2^\mu}$, τουτέστι τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται ὅταν λάβωμεν μ ὅρους τοῦ ἀθροίσματος ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ + , . εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μήκους λ, προφανῶς δὲ ἐξακολουθεῖ μένον μικρότερον τοῦ λ, ὅταν ἐξακολουθῶμεν νὰ λαμβάνωμεν καὶ ἄλλα μέρη. Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, συνάρτησις δὲ αὐτῆς τὸ ἀπαύστως αὐξανόμενον ἄθροισμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ'.) Ἄς θεωρήσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμόν, οὗ πᾶν δεκαδικὸν ψηφίον εἶναι 9, τὸν 0,999 . . . Καθ' ὅσον λαμβάνομεν περισσότερα δεκαδικὰ τούτου ψηφία ὁ δεκαδικὸς αὐξάνει· λέγω δὲ ὅτι ἔχει ὅριον τὴν μονάδα· διότι ἐὰν λάβωμεν ν τοιαῦτα ψηφία ἡ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς μονάδος θὰ εἶναι μία δεκαδικὴ μονὰς τῆς τάξεως ν, ἑπομένως δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ε, νὰ ἐξακολουθῇ δὲ μένουσα μικροτέρα τοῦ ε, καὶ διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ δεκαδικοῦ, ἐκείνας δηλαδή, ἃς εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἀπαύστως περισσότερα τῶν εἰλημμένων ψηφία.

Ἐνταῦθα ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ν τῶν λαμβανομένων ψηφίων, συνάρτησις δὲ ἡ τιμὴ τοῦ προκύπτοντος δεκαδικοῦ. Ὅταν δὲ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ συνάρτησις τείνει εἰς τὸ ὅριον 1.

Ὁμοίως τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,373737 . . . ἔχει ὅριον τὸ κλάσμα $\frac{37}{99}$, ὡς ἐδείχθη ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

Δ') Ἄς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5\chi+8}{7\chi+11}$, ἐν ᾧ τὸ γράμμα χ παριστᾷ ἀριθμὸν αὐθαιρέτως μεταβαλλόμενον· λέγω ὅτι ἐὰν τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπαύστως αὐξανούσας, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ ἐλαττῶται ἀπαύστως καὶ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$.

Διότι $$\frac{5\chi+8}{7\chi+11}-\frac{5}{7}=\frac{1}{7(7\chi+11)}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι πάντοτε μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$, ἡ δὲ ἀπὸ τούτου διαφορὰ ἐλαττοῦται, καθόσον τὸ χ αὐξάνει· ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι τὸ κλάσμα προβαίνει ἀπαύστως ἐλαττούμενον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ νὰ μένῃ τοιαύτη καὶ διὰ πάσας τὰς μεγαλειτέρας τοῦ χ τιμάς, συναγομεν ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα ἀπαύστως ἐλαττούμενον τείνει εἰς τὸ ὅριον $\frac{5}{7}$.

Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι τὸ χ, συνάρτησις δὲ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος, καὶ ὁ νόμος καθ' ὃν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταβάλλεται ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι ὅτι αὕτη αὐξάνει ἀπαύστως ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ κλάσματι ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ χ μεταβάλλεται ἐλαττούμενον ἀπαύστως, τὸ κλάσμα θὰ αὐξάνῃ ἀπαύστως καὶ ἔχει ὅριον τὸ κλάσμα $\frac{8}{11}$. Τῷ ὄντι

$$\frac{8}{11} - \frac{5\chi + 8}{7\chi + 11} = \frac{\chi}{11(7\chi + 11)}.$$

Ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ε. Διότι ἐὰν εἰς τὸ χ δοθῇ ἡ τιμὴ ε, ἡ διαφορὰ θὰ γείνῃ $\frac{\varepsilon}{11(7\varepsilon + 11)}$ καὶ θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{121}$. Διὰ μικροτέρας δὲ τιμὰς τοῦ χ ἡ διαφορὰ γίνεται ἔτι μικροτέρα.

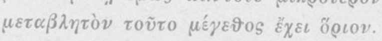
Σημειωσις. Ποσότης τις συμβαίνει νὰ ἐξαρτᾶται οὐχὶ ἐκ μιᾶς μόνης, ἀλλ' ἐκ πολλῶν ποσοτήτων, αἵτινες δύνανται νὰ μεταβάλλωνται ἀνεξαρτήτως ἀπ' ἀλλήλων. Οἷον ἡ διαγώνιος ῥομβοειδοῦς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους ἑκατέρας τῶν προσκειμένων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, εἰς ἣν ὑποτείνει ἡ διαγώνιος.

Ἡ ποσότης ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν, αἵτινες εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, καλεῖται *συνάρτησις δύο ἢ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν*.

Δύναται δὲ νὰ συμβῇ καὶ τοιαύτη συνάρτησις νὰ τείνῃ εἰς ὅριον, ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται, μεταβάλλωνται καθ' ὡρισμένον τινὰ νόμον. Ἀλλὰ περὶ τούτων δὲν δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ εἴπωμεν περισσότερα.

ΑΙΤΗΜΑ

185. *Ἐὰν μέγεθος μεταβλητὸν προβαίνῃ ἀπαύστως αὐξανόμενον μένῃ ὅμως πάντοτε μικρότερον ὡρισμένου μεγέθους, τὸ μεταβλητὸν τοῦτο μέγεθος ἔχει ὅριον.*



Ἵνα σαφηνίσωμεν τὸ αἴτημα τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι κινεῖται ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἀπαύστως, ἀλλ' οὕτως, ὥστε νὰ μὴ δύναται ποτὲ νὰ ὑπερβῇ σημεῖόν τι Μ τῆς εὐθείας. Τότε ὑπάρχει μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς ἕκαστον τῶν σημείων τοῦ ὁποίου θὰ εὑρεθῇ ποτε τὸ κινούμενον σημεῖον, καὶ ἄλλο μέρος, ἐφ' οὗ οὐδέποτε δύναται νὰ εὑρεθῇ. Τὰ δύο ταῦτα μέρη τῆς εὐθείας χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων ἀναγκαίως διὰ σημείου τινὸς Ρ. Το μῆκος ΑΡ θὰ εἶναι ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ μήκους, ὅπερ διατρέχει τὸ κινούμενον σημεῖον.

Εἰς τὸ προηγούμενον αἴτημα ἀνάγεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ἐὰν μέγεθος μεταβλητὸν προβαίνῃ ἀπαύστως ἐλαττούμενον, μένῃ ὅμως πάντοτε μεγαλείτερον ὡρισμένου μεγέθους, ἔχει ὅριον.

Διότι ὅταν τὸ μεταβλητὸν μέγεθος ΒΝ ἐλαττῶται μένον πάντοτε μεγαλείτερον τοῦ ΒΜ, τὸ ΑΝ θὰ αὐξάνῃ ἀπαύστως μένον πάντοτε μικρότερον τοῦ ΑΜ· ἑπομένως θὰ ἔχῃ ὅριόν τι ΑΡ. Τοῦ ΑΝ δὲ ἔχοντος ὅριον τὸ ΑΡ, τὸ ΒΝ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ ΒΡ.

ΑΞΙΩΜΑ

186. *Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες α καὶ β μεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε ἴσαι, τείνῃ δὲ ἡ ἑτέρα εἰς ὅριόν τι, καὶ ἡ ἑτέρα θὰ τείνῃ εἰς τὸ αὐτὸ ὅριον.*

Περὶ μετρήσεως τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ

187. *Κοινὸν μέτρον* δύο μεγεθῶν καλεῖται τρίτον μέγεθος, τοῦ ὁποίου ἀμφότερα ταῦτα εἶναι πολλαπλάσια.

Δύο μεγέθη ἔχοντα κοινὸν μέτρον καλοῦνται *σύμμετρα*. *Ἀσύμμετρα* δὲ μεγέθη λέγονται ἐκεῖνα, ὧν δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον. Ὅτι δὲ ὑπάρχουσιν ἀσύμμετρα μεγέθη δεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

188. *Παντὸς τετραγώνου ἡ διαγώνιος εἶναι ἀσύμμετρος τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον, ὅτι ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ ἔχουσι κοινὸν μέτρον εὐθεῖαν περιεχομένην μ φορὰς ἐν τῇ διαγωνίῳ καὶ ν φορὰς ἐν τῇ πλευρᾷ. Κατὰ τὰ ἐν τῇ σημειώσει τοῦ ἐδαφίου 166 τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίου τετράγωνον δύναται νὰ διαιρεθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τετράγωνα, ὧν ὁ ἀριθμὸς μ^2, ἔχοντα πλευρὰν τὸ κοινὸν μέτρον, τὸ δὲ δοθὲν τετράγωνον εἰς ν^2 τοιαῦτα τετράγωνα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ δευτέρου (157 α΄.) ὁ ἀριθμὸς μ^2 θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ ν^2, ἤτοι θὰ εἶναι $\mu^2=2\nu^2$, ὅθεν $\frac{\mu^2}{\nu^2}=2$, ἤτοι $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=2$. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ἀριθμὸς σύμμετρος ὁ $\frac{\mu}{\nu}$, οὗ τὸ τετράγωνον θὰ εἶναι 2· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι, ὡς ἐδείχθη ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, ὡς ὁ 2, οὐδὲ κλασματικοῦ εἶναι τετράγωνον.

Ἄρα δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

189. ***Μέτρησις*** μεγέθους καλεῖται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο μέγεθος ὁμοειδὲς ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μονάς*. Ἡ δὲ σύγκρισις αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ πόσαι μονάδες καὶ πόσα πολλοστὰ αὐτῆς ἀποτελοῦσι τὸ μέγεθος.

Ἐὰν τὸ μέγεθος εἶναι σύμμετρον τῇ μονάδι, κοινὸν μέτρον θὰ εἶναι ἢ αὐτὴ ἡ μονὰς ἢ πολλοστόν τι αὐτῆς. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ μέγεθος, ὡς ἴσον μὲ ἄθροισμα πολλῶν μονάδων, μετρούμενον μὲ ταύτην δίδει ἀκέραιον ἀριθμόν. Οἷον ἐὰν τὸ μέγεθος εἶναι ἀκριβῶς τὸ πενταπλάσιον τῆς μονάδος, ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτοῦ ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἀκέραιος 5.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ μέτρησις τοῦ μεγέθους παρέχει κλασματικὸν ἀριθμόν. Οἷον ἐὰν τὸ κοινὸν μέτρον τοῦ μεγέθους καὶ τῆς μονάδος αὐτοῦ περιέχηται ἐν μὲν τῷ μεγέθει 11 φορὰς ἐν δὲ τῇ μονάδι 7 φοράς, τὸ μέγεθος περιέχει 11κις τὸ ἕβδομον τῆς μονάδος, ἤτοι εἶναι τὰ $\frac{11}{7}$ τῆς μονάδος, ἑπομένωςπαρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{11}{7}$.

Ἀντιστρόφως ἐὰν ἡ μέτρησις μεγέθους παρέχῃ ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, τὸ μέγεθος τοῦτο εἶναι σύμμετρον τῇ μονάδι, δι' ἧς ἐμετρήθη.

Οἷον ἐὰν ἡ μέτρησις ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν 5, τοῦτο σημαίνει ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ μέγεθος εἶναι πενταπλάσιον τῆς μονάδος· τότε δὲ ἡ μονὰς εἶναι κοινὸν μέτρον, ὡς περιεχομένη ἅπαξ μὲν ἐν ἑαυτῇ ἐν δὲ τῷ μεγέθει πεντάκις.

Ἐὰν δὲ ἡ μέτρησις ἔδωκε τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{11}{7}$, τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ μέγεθος εἶναι ἑνδεκαπλάσιον τοῦ ἑβδόμου τῆς μονάδος· τότε δὲ κοινὸν μέτρον εἶναι τὸ ἕβδομον τῆς μονάδος ὡς περιεχόμενον ἐν ταύτῃ μὲν ἑπτάκις, ἐν δὲ τῷ μεγέθει ἑνδεκάκις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι μέγεθος ἀσύμμετρον τῇ μονάδι του μετρούμενον δὲν δύναται νὰ δώσῃ οὔτε ἀκέραιον οὔτε κλασματικὸν ἀριθμόν· ἄρα θὰ δώσῃ ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.

190. Ἡ μέτρησις εὐθείας γίνεται διὰ τῆς ἐπ' αὐτὴν ἐπιθέσεως τῆς ὡς μονάδος ληφθείσης εὐθείας ἐφεξῆς πολλάκις. Ἐκ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 26 πρώτου ἀξιώματος γνωρίζομεν ὅτι μετά τινας ἐφεξῆς ἐπιθέσεις τῆς μονάδος θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον ἢ μηδὲν ἢ μικρότερον τῆς μονάδος. Ἐὰν μείνῃ ὑπόλοιπον, τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετροῦμεν ὁμοίως λαμβάνοντες ὡς νέαν μονάδα πολλοστόν τι τῆς πρώτης, οἷον τὸ δέκατον· οὕτω θὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα δεκάτων μὴ ὑπερβαίνοντα τὸν 9. Ἐὰν μείνῃ ὑπόλοιπον μετροῦντες αὐτὸ μὲ τὸ ἑκατοστὸν τῆς μονάδος θὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα ἑκατοστῶν μὴ ὑπερβαίνοντα τὸν 9, καὶ οὕτω καθεξῆς. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ μέγεθος εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα του, θὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἔχοντα περιωρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ περιοδικόν· ἐὰν δὲ εἶναι ἀσύμμετρον, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν ἔχοντα ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία καὶ μὴ περιοδικά.

Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως εὐθείας ἀριθμὸς καλεῖται μῆκος τῆς εὐθείας.

Σημειωσις α'. Ἀπαραλλάκτως γίνεται καὶ ἡ μέτρησις τόξου κύκλου, ὅταν ὡς μονὰς ληφθῇ τόξον τι ἴσου κύκλου. Διότι τῶν ἴσων κύκλων τὰ τόξα ἐφαρμόζονται ἐπ' ἄλληλα ὅπως καὶ αἱ εὐθεῖαι.

Σημειωσις β'. Ἐν τῇ πράξει δὲν δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν τοιαύτην μέτρησιν ἐπ' ἀόριστον, διότι ἐπὶ τέλους φθάνομεν εἰς ὑπόλοιπα τόσον μικρά, ὥστε νὰ διαφεύγωσιν τὰ αἰσθητήρια

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡμῶν καὶ ὑπὸ ἐντελεστάτων ὀπτικῶν ὀργάνων βοηθούμενα. Ἄλλοτε δὲ ἑκουσίως καταπαύομεν τὴν ἐργασίαν μὴ ἔχοντες ἀνάγκην μείζονος ἀκριβείας. Οὕτως εἰς τὰς μετρήσεις τῶν μηκῶν περιοριζόμεθα συνήθως εἰς τὰ χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μέτρου.

Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τῶν ἐπιπέδων σχημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

191. Ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς μετρήσεως ἐπιφανείας, καλεῖται *ἐμβαδὸν* τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Ὡς μονὰς τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν λαμβάνεται συνήθως τὸ τετράγωνον τὸ πλευρὰν ἔχον τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ διαφόρους τρόπους δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας καὶ τὰ πολλοστὰ αὐτῆς ἐπὶ τὴν μετρητέαν ἐπιφάνειαν εἶναι ἀνάγκη νὰ δειχθῇ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

192. *Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γείνῃ ἡ μέτρησις τῆς ἐπιφανείας σχήματος τὸ αὐτὸ πάντοτε ἐμβαδὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ μονὰς μένῃ ἡ αὐτή.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον ὅτι μετρήσαντες κατὰ δύο διαφόρους τρόπους τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος Α μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα Μ εὕρομεν δύο διάφορα ἐμβαδά, οἷον $\frac{28}{19}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως κατὰ τὸν ἕνα τρόπον τῆς μετρήσεως, καὶ $\frac{34}{19}$ κατὰ τὸν ἕτερον. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{28}{19}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως εἶναι μέρος τῶν $\frac{34}{19}$ τοῦ αὐτοῦ, τὰ μέρη τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας Α διαφόρως τασσόμενα θὰ ἀπετέλουν ἀνίσους ἐπιφανείας· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ ἐδαφίου 149.

Σημειωσις. Τὸ ἐμβαδὸν α τοῦ σχήματος Α δυνάμεθα προφανῶς νὰ εὕρωμεν διαιροῦντες τοῦτο εἰς οἱαδήποτε καὶ ὁσαδήποτε μέρη Β, Γ, Δ, κτλ. εὑρίσκοντες ἑκάστου τούτων τὸ ἐμβαδόν, β,γ,δ, κτλ. καὶ λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν β, γ, δ, κτλ. Θὰ εἶναι δηλαδὴ

$$\alpha = \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

Τὰ ἰσοδύναμα σχήματα ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

193. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὁρίου μεταβλητοῦ σχήματος εἶναι τὸ ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ τούτου ἐμβαδοῦ.*

Ἔστω σχῆμα μεταβλητὸν τὸ Α ὅριον ἔχον τὸ σχῆμα Κ· λέγω ὅτι

ἐμβ. Κ=ὅρ. ἐμβ. Α.

Διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τιμήν τινα τοῦ μεταβλητοῦ σχήματος, δι' ἣν ἡ διαφορὰ τῶν σχημάτων Κ καὶ Α νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\nu}$ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας. Τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Κ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Α θὰ εἶναι ἀριθμοὶ διαφέροντες ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\nu}$ τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ ἐμβ. Κ καὶ τοῦ μεταβλητοῦ ἐμβ. Α ἡ διαφορὰ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς πολλοστοῦ τῆς μονάδος, συνάγομεν ὅτι ὁ δεύτερος ἀριθμὸς ἔχει ὅριον τὸν πρῶτον, ἤτοι ὅτι:

ἐμβαδὸν Κ=ὅριον ἐμβαδοῦ Α. ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

194. *Ἐὰν δύο μεταβλητὰ σχήματα εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, τείνωσι δὲ εἰς ὅρια, τὰ ὅρια ταῦτα θὰ ἔχωσιν ἴσα ἐμβαδά.*

Ἔστωσαν σχήματα Α καὶ Β μεταβλητά, καὶ οὕτω μεταβαλλόμενα ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα, τείνοντα δὲ τὸ μὲν Α εἰς τὸ ὅριον Κ τὸ δὲ Β εἰς τὸ ὅριον Λ· λέγω ὅτι Κ καὶ Λ ἔχουσι ἴσα ἐμβαδά.

Διότι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα

ἐμβ. Κ=ὅρ. ἐμβ. Α

ἐμβ. Λ=ὅρ. ἐμβ. Β

Ἀλλ' εἶναι πάντοτε

ἐμβ. Α=ἐμβ. Β

Ἄρα (186) θὰ εἶναι

ὅρ. ἐμβ. Α=ὅρ. ἐμβ. Β

ἤτοι ἐμβ. Κ=ἐμβ. Λ· ὅ. ἔ. δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

195. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀριθμῶν.*

α΄. Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον οἱ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, οἷον ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἡ βάσις ΑΒ περιέχει τὴν μονάδα Μ τοῦ μήκους πεντάκις, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ τρίς. Λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους 5×3 ἤτοι 15 φοράς, ὅτι δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 15.

Διότι ἐὰν ἡ βάσις ΑΒ διαιρεθῇ εἰς 5 μέρη ἴσα τῇ μονάδι τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἰς 3, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΒ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΓ, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΓ παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὸ ὀρθογώνιον διαιρεῖται εἰς μέρη, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι 5×3. Τῷ ὄντι αἱ μὲν παράλληλοι τῇ ΑΓ διαιροῦσι τὸ ὀρθογώνιον εἰς τόσα μέρη, ὅσα εἶναι τὰ μέρη τῆς ΑΒ, ἤτοι 5, αἱ παράλληλοι δὲ τῇ ΑΒ ἔπειτα διαιροῦσι ἕκαστον τῶν 5 τούτων μερῶν εἰς τόσα μέρη, ὅσα εἶναι τὰ μέρη τῆς ΑΓ, ἤτοι 3· ὥστε οὕτω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ διαιρεῖται εἰς μέρη 5×3. Πάντα δὲ τὰ μέρη ταῦτα εἶναι τετράγωνα ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς μονάδος Μ τετραγώνῳ, ὡς παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας τῇ μονάδι Μ. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει 5×3 μονάδας τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι ὅτι τὸ ἔμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 5×3.

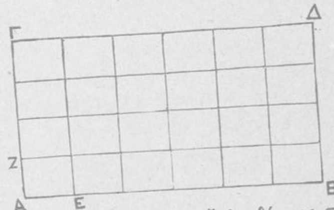
β΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου εἶναι ἑκάτερον πολλοστόν τι τῆς μονάδος, οἷον ὅτι ἡ μὲν βάσις εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς μονάδος τὸ δὲ ὕψος $\frac{1}{7}$. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου θὰ εἶναι $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}$, ἤτοι $\frac{1}{35}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἐὰν τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος τετραγώνου διαιρέσωμεν τὴν μίαν πλευρὰν εἰς 7 ἴσα μέρη, τὴν δὲ ἑτέραν εἰς 5, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀγάγωμεν παραλλήλους ταῖς πλευραῖς, τὸ τετράγωνον θὰ διαιρεθῇ εἰς 7×5 ἤτοι 35 ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὴν μὲν μίαν τῶν πλευρῶν ἴσην μὲ $\frac{1}{5}$ τῆς μονάδος τὴν δὲ ἑτέραν μὲ $\frac{1}{7}$.

Ἄρα ἓν οἱονδήποτε τῶν ὀρθογωνίων τούτων, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ δοθὲν ὡς ἴσον αὐτῷ, θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος τετραγώνου, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{35}$, δηλαδὴ $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7}$.

γ'.) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους ἀριθμοὶ εἶναι κλασματικοὶ οἱοιδήποτε, οἷον $\frac{6}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$.

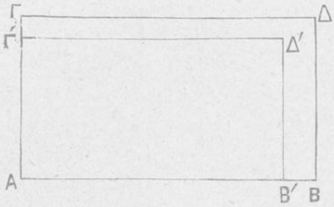


Ἐὰν τὴν βάσιν διαιρέσωμεν εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος εἰς 4, ἕκαστον μέρος ΑΕ τῆς βάσεως θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς μονάδος· καὶ ἕκαστον μέρος ΑΖ τοῦ ὕψους τὸ $\frac{1}{7}$. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀγάγωμεν παραλλήλους ταῖς πλευραῖς, τὸ ὀρθογώνιον θὰ διαιρεθῇ εἰς 6×4 ὀρθογώνια ἴσα, ὧν ἕκαστον ἔχει βάσιν $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος καὶ ὕψος $\frac{1}{5}$, ἑπομένως εἶναι τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος τετραγώνου. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν ΑΒΓΔ περιέχει 24 ὀρθογώνια ὧν ἕκαστον εἶναι τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος τετραγώνου, ἤτοι εἶναι τὰ $\frac{24}{35}$ τοῦ τετραγώνου τούτου· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{24}{35}$, ἤτοι $\frac{6}{5} \times \frac{4}{7}$.

δ'.) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς βάσεως καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ὕψους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀσύμμετροι Π καὶ Ρ. Ἔστωσαν π καὶ ρ οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ οἱ προερχόμενοι ἐκ τῶν ἀθροισμάτων μερῶν τοῦ Α καὶ τοῦ Β ἱκανῶν, ὥστε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν λοιπῶν μερῶν ἑκατέρου αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\nu}$· ΑΒ′ δὲ καὶ ΑΓ′ τὰ ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν π καὶ ρ παριστάμενα μήκη.



Τὸ γινόμενον $\pi \times \rho$ ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒ′Γ′Δ′. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$\pi \times \rho = \text{ΑΒ}'\text{Γ}'\text{Δ}',$$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς $\pi \times \rho$, ἀναφερόμενος εἰς τὴν μονάδα Μ τῆς ἐπιφανείας διαφέρει τοῦ δευτέρου μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ ἔχομεν μονάδας ἐπιφανείας καὶ πολλοστὰ αὐτῆς, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἰσοδύναμον ἐπιφάνειαν μὴ διῃρημένην.

Ὅταν ν αὐξάνῃ ἐπ᾽ ἄπειρον τὸ γινόμενον $\pi \times \rho$ ἔχει ὅριον $\Pi \times \text{Ρ}$, ὡς ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου δύο ἀπειρομερῶν ἀριθμῶν· τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΒ′Γ′Δ′ αὐξάνον ἀπαύστως ἔχει προφανῶς ὅριον τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ὅταν δύο μεταβληταὶ ποσότητες τείνουσαι ἑκατέρα εἰς ὅριον εἶναι πάντοτε ἴσαι, καὶ τὰ ὅρια αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι

$$\Pi \times \text{Ρ} = \text{ΑΒΓΔ}.$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

196. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ (τῇ δευτέρᾳ δυνάμει) τοῦ ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἐμβαδὸν τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

197. Τὸ ἐμβαδὸν τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων σχημάτων εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑκάστῳ αὐτῶν ἰσοδυνάμου ὀρθογωνίου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὰ περὶ ἰσοδυνάμων λοιπὸν εἰρημένα (154 μέχρι 157)·

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε πολυγώνου εὑρίσκομεν διαιροῦντες αὐτὸ εἰς τρίγωνα καὶ ἀθροίζοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων.

Ἢ ἄλλως, κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ (162 πόρ.) καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου.

Σχέσεις ἀριθμῶν προερχόμεναι ἐκ σχέσεων ἐπιφανειῶν.

198. Ἐπειδὴ διὰ τῆς μετρήσεως αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων παρίστανται δι' ἀριθμῶν, ἰσοδύναμα δὲ σχήματα ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά, ἤτοι ἐκφράζονται δι' ἀριθμῶν ἴσων, πᾶσα μεταξὺ ἰσοδυνάμων ἐπιφανειῶν ἰσότης παρέχει ἰσότητα μεταξὺ ἀριθμῶν· οἷον ἐκ τῆς ἐν ἐδαφίῳ 166 δειχθείσης ἰσότητος

$$(ΑΒ+ΒΓ)^{Τ}=ΑΒ^{Τ}+ΒΓ^{Τ}+2ΑΒ.ΒΓ,$$

παριστῶντες δι' α καὶ β τοὺς ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα προερχομένους ἀριθμούς, λαμβάνομεν τὴν μεταξὺ ἀριθμῶν ἰσότητα

$$(α+β)^2=α^2+β^2+2αβ.$$

Αὕτη δὲ ἐκφράζει τὸ ἑξῆς ἀριθμητικὸν θεώρημα.

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐν ἐδαφίῳ 168 δειχθείσης ἰσότητος

$$(ΑΒ+ΒΓ)\,(ΑΒ-ΒΓ)=ΑΒ^{Τ}-ΒΓ^{Τ},$$

λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$(α+β)\times(α-β)=α^2-β^2.$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $ΑΒ^{Τ}=ΒΓ^{Τ}+ΑΓ^{Τ}$, ἣν δίδει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Γ, λαμβάνομεν, παριστῶντες δι' α, β, γ τοὺς ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν πλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα προερχομένους ἀριθμούς, τὴν ἀριθμητικὴν σχέσιν $α^2 = β^2 + γ^2$.

Ἐκ τῆς σχέσεως δὲ ταύτης δυνάμεθα γνωρίζοντες τὰ μήκη δύο πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος καὶ τῆς τρίτης· οἷον ἐὰν ἡ μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἔχῃ μῆκος τριῶν πήχεων, ἡ δὲ ἑτέρα τεσσάρων, παραστήσωμεν δὲ διὰ χ τὸ ἄγνωστον μῆκος τῆς ὑποτεινούσης, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$χ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

ὅθεν

$$χ = 5.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα τριγώνου τινὸς ὀρθογωνίου ἔχῃ μῆκος 7 πήχεων, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν 4 πήχεων, ἡ ἑτέρα θὰ ἔχῃ μῆκος παριστάμενον ὑπὸ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 33.

Περὶ λόγου τῶν μεγεθῶν καὶ περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

199. *Λόγος* τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ ὁμοειδὲς μέγεθος Β λέγεται ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ Α μὲ μονάδα τὸ Β ἀριθμός. Ἡ εὕρεσις λοιπὸν τοῦ λόγου οὐδόλως διαφέρει τῆς μετρήσεως.

Ἐὰν τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα, ὁ λόγος αὐτῶν θὰ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, ἐὰν δὲ ἀσύμμετρα ἀσύμμετρος.

Ὁ λόγος τῶν μεγεθῶν σημειοῦται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου :, δι' οὗ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν ὁ λόγος Α : Β εἶναι παραδ. χάριν $\frac{5}{7}$, τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ Α εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ Β. Δυνάμεθα δὲ νὰ θεωρήσωμεν τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ Β *ὡς γινόμενον τοῦ Β ἐπὶ* $\frac{5}{7}$, ὅπως τὰ $\frac{5}{7}$ ἀριθμοῦ λέγονται γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ $\frac{5}{7}$, καὶ νὰ γράφωμεν αὐτὰ $\frac{5}{7}$Β ἢ $Β \times \frac{5}{7}$.

Σημειωτέον ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν ἰσχύει ὁ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπ' ἀριθμὸν ἐπιμεριστικὸς νόμος, δηλονότι ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μέγεθος Α ἐπὶ τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, καὶ προσθέτομεν πάντα τὰ γινόμενα.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι ὄντος $\frac{19}{8} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8}$, (1)

θὰ εἶναι $A \times \frac{19}{8} = A \times \frac{2}{3} + A \times \frac{5}{6} + A \times \frac{7}{8}$. (2)

Διότι ἡ ἰσότης (1) ἐκφράζει ὅτι τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ οἱασδήποτε μονάδος ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{19}{8}$ τῆς αὐτῆς μονάδος· ἐὰν δὲ ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ μέγεθος Β, προέρχεται ἡ σχέσις (2).

Εὐκόλως δὲ δεικνύεται καὶ ὅτι, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα μεγεθῶν ἐπί τινα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν μεγεθῶν τούτων ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, καὶ νὰ προσθέσωμεν πάντα τὰ γινόμενα.

Ἐὰν ὁ λόγος Α : Β εἶναι ἀπειρομερὴς ἀριθμός, παραδείγματος χάριν 2,3678...., τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ μέγεθος Α ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ Β, καὶ ἐκ τῶν 3 δεκάτων αὐτοῦ, καὶ ἐκ τῶν 6 ἑκατοστῶν, καὶ ἐκ τῶν 7 χιλιοστῶν καὶ οὕτω καθεξῆς, ἤτοι ὅτι

$$A = B \times 2 + B \times \frac{3}{10} + B \times \frac{6}{10^2} + B \times \frac{7}{10^3} + B \times \frac{8}{10^4} \cdots$$

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον τοῦ Β ἐπὶ τὸν ἀπειρομερῆ 2,3678..., καὶ νὰ γράψωμεν

$$A = B \times 2,3678 \ldots$$

Ἄρα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ὄντος τοῦ λόγου λ τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β, εἶναι

$$A = B \times \lambda.$$

200. Σημειωσις. Ἐὰν $B \times \mu < A$, ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου λ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Διότι ἀντικατασταθέντος ἐν τῇ ἀνισότητι τοῦ Α διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $B \times \lambda$, αὕτη γίνεται

$$B \times \mu < B \times \lambda.$$

Ἵνα δὲ ὑπάρχῃ ἡ ἀνισότης αὕτη πρέπει νὰ εἶναι $\mu < \lambda$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἐὰν $B \times \mu > A$ ὁ μ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ λόγου Α : Β.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

201. *Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν εἶναι ἴσος τῷ πηλίκῳ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν μεγεθῶν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα οἱανδήποτε.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο μεγέθη, α καὶ β οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῶν μὲ τὴν μονάδα Μ ἀριθμοί· λέγω ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β εἶναι ἴσος τῷ πηλίκῳ $\alpha : \beta$.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ὁ λόγος εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, οἷον $\frac{5}{7}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι

$$A = B \times \frac{5}{7}$$

Τοῦ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ Β ἀριθμοῦ ὄντος β, ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ πενταπλασίου τοῦ Β θὰ εἶναι $\beta \times 5$· τοῦ δὲ $B \times 5$ μετρουμένου ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\beta \times 5$, τὸ ἕβδομον τοῦ $B \times 5$ ἤτοι $B \times \frac{5}{7}$ θὰ μετρῆται ὑπὸ τοῦ ἑβδόμου τοῦ $\beta \times 5$, ἤτοι ὑπὸ τοῦ $\beta \times \frac{5}{7}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν ἴσων μεγεθῶν Α καὶ $B \times \frac{5}{7}$ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι

$$\alpha = \beta \times \frac{5}{7}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{7} = A : B \cdot \text{ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ὁ λόγος Α : Β εἶνε ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς λ, ὅτε εἶναι $A = B \times \lambda$, καὶ ἔστω λ_1 ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τῆς μονάδος τιμὴ τοῦ λ, ἤτοι

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \frac{1}{\nu}. \qquad (1)$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

$$B \times \lambda_1 < B \times \lambda < B \times (\lambda_1 + \frac{1}{\nu})$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἢ ἐπειδὴ $B\times\lambda=A$,

$$B\times\lambda_1<A<B\times(\lambda_1+\frac{1}{\nu})$$

Οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν ἀνίσων τούτων μεγεθῶν μὲ τὴν μονάδα Μ ἀριθμοί, θὰ εἶναι ἄνισοι, καὶ εἰς τὸ μεγαλείτερον μέγεθος θὰ ἀντιστοιχῇ μεγαλείτερος ἀριθμός, κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι

$$\beta\times\lambda_1<\alpha<\beta\times(\lambda_1+\frac{1}{\nu}) \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς (1) ἐπὶ β λαμβάνομεν

$$\beta\times\lambda_1<\beta\times\lambda<\beta\times(\lambda_1+\frac{1}{\nu}) \qquad (3)$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) δεικνύουσιν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\beta\times\lambda$ καὶ α περιλαμβάνονται ἑκάτερος μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀριθμῶν, ὧν ἡ διαφορὰ $\frac{\beta}{\nu}$ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι, ἤτοι ὅτι

$$\alpha=\beta\times\lambda.$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη σημαίνει ὅτι λ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β· ἄρα

$$A:B=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}\cdot \text{ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

Σημειωσις Α'. Διὰ τὴν ἀνωτέρω τοῦ λόγου δύο μεγεθῶν ἰδιότητα τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν καλεῖται καὶ λόγος αὐτῶν.

Σημειωσις Β'. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω δείξεως γίνεται φανερὰ καὶ ἡ ἀλήθεια τῆς ἑξῆς προτάσεως.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν οἱωνδήποτε α καὶ β ὑπάρχει πάντοτε πηλίκον αὐτῶν, ἤτοι ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ ἕτερος αὐτῶν δίδει γινόμενον τὸν ἕτερον.

Διότι ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ μήκη, ἃ παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἀναφερόμενοι πρός τινα μονάδα μήκους, καὶ λ ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Κατὰ τὰ ἀνωτερω δειχθέντα θὰ εἶναι $\alpha=\beta\times\lambda$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης δύναται μὲν νὰ γείνῃ καὶ ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν μεγεθῶν, ἀλλὰ τότε εἶναι πολὺ δυσκολωτέρα.

Σημειωσις Γ'. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν δύο ὀρθογώνια καὶ δύο τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν· ἐκ τούτου δὲ ἀμέσως συνάγομεν ὅτι,

Τὰ ὀρθογώνια καὶ τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν· τὰ δὲ ἔχοντα ἴσα ὕψη, ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

202. *Ὁ λόγος δύο μεταβλητῶν μεγεθῶν τεινόντων εἰς ὅρια ἔχει ὅριον τὸν λόγον τῶν ὁρίων τῶν μεγεθῶν τούτων.*

Ἔστωσαν μεγέθη μεταβλητὰ τὸ α καὶ τὸ β τείνοντα συγχρόνως εἰς τὰ ὅρια Α καὶ Β· λέγω ὅτι ὁ λόγος λ τοῦ α πρὸς τὸ β ἔχει ὅριον τὸν λόγον Λ τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

Διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\alpha=\beta\times\lambda$$
$$A=B\times\Lambda$$

Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ μεταβλητὰ μεγέθη ἀπαύστως αὐξανόμενα τείνουσιν εἰς τὰ ὅρια αὐτῶν. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ε τὴν διαφορὰν $B-\beta$, ἥτις δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, θὰ εἶναι $B=\beta+\varepsilon$, καὶ ἡ δευτέρα τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων δύναται νὰ γραφῇ,

$$A=(\beta+\varepsilon)\times\Lambda$$
ἢ
$$A=\beta\times\Lambda+\varepsilon\times\Lambda$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ταύτης τὴν πρώτην ἰσότητα κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$A-\alpha=\beta\times\Lambda+\varepsilon\times\Lambda-\beta\times\lambda$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη, καθ' ὅσον λ εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλείτερον τοῦ Λ, δύναται νὰ γραφῇ

$$A-\alpha=\beta\times(\Lambda-\lambda)+\varepsilon\times\Lambda$$
ἢ
$$A-\alpha=\varepsilon\times\Lambda-\beta(\lambda-\Lambda)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ $A-\alpha$ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, ὡς καὶ ἡ ποσότης $\varepsilon\times\Lambda$, ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων συνάγομεν ὅτι ἡ ποσότης $\beta\times(\Lambda-\lambda)$ ἢ $\beta\times(\lambda-\Lambda)$, ὡς διαφορὰ τῶν ποσοτήτων ἐκείνων δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος. Ἀλλ' ἵνα γίγνηται τοῦτο πρέπει ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν Λ καὶ λ νὰ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· διότι ἂν αὕτη ἦτο πάντοτε μεγαλειτέρα τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμοῦ δ, ἡ ποσότης $\beta\times(\Lambda-\lambda)$ ἢ $\beta\times(\lambda-\Lambda)$ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ β τὰς μεγαλειτέρας ὡρισμένης τινὸς τιμῆς β_1, θὰ ἦτο πάντοτε μεγαλειτέρα τοῦ $\beta_1\times\delta$, ἐν ᾧ ἐδείξαμεν ὅτι δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ Λ καὶ τοῦ μεταβλητοῦ λ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ συνάγομεν ὅτι

$$\text{ὅρ. } \lambda=\Lambda\cdot \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἐὰν τὰ μεταβλητὰ μεγέθη τείνωσιν εἰς τὰ ὅρια αὐτῶν ἀπαύστως ἐλαττούμενα, ἢ τὸ μὲν αὐξανόμενον τὸ δὲ ἐλαττούμενον.

Σημειωσις. Δύναται νὰ συμβῇ ὁ λόγος λ τῶν μεταβλητῶν μεγεθῶν νὰ εἶναι σταθερός. Τότε θὰ εἶναι $\lambda=\Lambda$. Διότι ὡς ἀνωτέρω δεικνύεται ἡ διαφορὰ τοῦ Λ καὶ λ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, ἐξ οὗ ἕπεται $\lambda=\Lambda$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

203. Ἡ ἰσότης δύο λόγων καλεῖται *ἀναλογία*. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν λόγον μεγέθους πρὸς μέγεθος ἢ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ὑπάρχουσιν ἀναλογίαι μεγεθῶν καὶ ἀναλογίαι ἀριθμῶν. Δυνάμεθα δὲ νὰ θεωρήσωμεν καὶ ἀναλογίαν, ἐν ᾗ ὁ ἕτερος τῶν λόγων νὰ εἶναι λόγος μεγεθῶν, ὁ δὲ ἕτερος λόγος ἀριθμῶν.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος δὲ τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 201 δειχθέντος καθίσταται φανερὸν ὅτι,

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως ἀμφοτέρων τῶν ὅρων ἑκατέρου τῶν λόγων μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα θὰ ἀποτελῶσιν ὡσαύτως ἀναλογίαν.

Καὶ ἀντιστρόφως·

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ τὰ μεγέθη ἃ παριστῶσιν οἱ ὅροι ἑκατέρου τῶν λόγων, ὅταν ἡ μονὰς παρασταθῇ διά τινος μεγέθους οἱουδήποτε, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.

204. Σημειωσις α΄. Αἱ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δειχθεῖσαι ἰδιότητες τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν ἀναλογιῶν ἐδείχθησαν ἐπ' ἀριθμῶν συμμέτρων. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τῶν πράξεων ἰδιότητες, ἐφ' ὧν στηρίζονται αἱ ἰδιότητες ἐκεῖναι, ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (ἴδε πέμπτην ἔκδοσιν τῆς ἐμῆς ἀλγέβρας), πᾶσαι αἱ ἐκεῖ δειχθεῖ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σαι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν ὑπάρχουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἐχόντων ὅρους ὅρους ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ἀναλογιῶν.

205. Σημειωσιν β΄. Ὅταν εἰς ἀναλογίαν μεγεθῶν ἐφαρμόζωμεν ἰδιότητας τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν ἀναλογιῶν, ὑποθέτομεν ὅτι διὰ τῆς μετρήσεως τῶν μεγεθῶν ἡ τῶν μεγεθῶν ἀναλογία μετετράπη εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν. Οἷον λέγοντες ὅτι ἐν τῇ μεγεθῶν ἀναλογίᾳ $A:B=\Gamma:\Delta$ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, ἐννοῦμεν ὅτι ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν μεγεθῶν A, B, Γ, Δ ἀριθμοί, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Δυνάμεθα δὲ οὕτω καὶ ἰδιότητας τῶν μεταξὺ μεγεθῶν ἀναλογιῶν νὰ ἀποδεικνύωμεν διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν ἀναλογιῶν. Παραδείγματος χάριν διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπαρχουσῶν μεταξὺ τῶν μεγεθῶν $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ τῶν ἀναλογιῶν,

$$A:B=\Gamma:\Delta$$
$$B:E=\Delta:Z,$$

θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀναλογία

$$A:E=\Gamma:Z,$$

μετασχηματίζομεν τὰς δοθείσας ἀναλογίας εἰς ἀναλογίας ἀριθμῶν,

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta$$
$$\beta:\varepsilon=\delta:\zeta.$$

Ἐκ τούτων δὲ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁμοταγῶν ὅρων λαμβάνομεν $\alpha\times\beta:\beta\times\varepsilon=\gamma\times\delta:\delta\times\zeta$.

Διαιροῦντες δὲ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου διὰ β, καὶ τοὺς τοῦ δευτέρου διὰ δ, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha:\varepsilon=\gamma:\zeta.$$

Ἀλλ' ὁ λόγος $\alpha:\varepsilon$ εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ $A:E$, καὶ ὁ $\gamma:\zeta$ ἴσος τῷ $\Gamma:Z$· ἄρα θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

$$A:E=\Gamma:Z,$$

ἣν ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Ὡσαύτως δεικνύεται ὅτι ὑπαρχούσης μεταξὺ τεσσάρων ὁμοειδῶν μεγεθῶν τῆς ἀναλογίας

$$A:B=\Gamma:\Delta$$

θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἐκ τῆς μεταθέσεως τῶν μέσων ταύτης προερχομένη ἀναλογία $A:\Gamma=B:\Delta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

206. Δύο ποσά, ὧν τὸ ἕτερον εἶναι συνάρτησις τοῦ ἑτέρου, λέγονται ἀνάλογα, ὅταν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου· ἐὰν δηλαδὴ Α καὶ $Α_1$ οὐσῶν δύο τυχουσῶν τιμῶν τοῦ ἑτέρου, καὶ Β καὶ $Β_1$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἑτέρου, ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία $Α : Α_1 = Β : Β_1$.

Ποσόν τι λέγεται *ἀνάλογον πολλῶν ἄλλων ποσῶν*, ὅταν ἐξαρτᾶται ἐξ ἑκάστου τούτων, καὶ οὕτως ὥστε, ἑνὸς ἐξ αὐτῶν μεταβαλλομένου καὶ τῶν ἄλλων μενόντων ἀμεταβλήτων, νὰ εἶναι ἑκάστοτε ἀνάλογον πρὸς τὸ μεταβαλλόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

207. *Δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν εἰς ἴσας τιμὰς τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀντιστοιχῶσιν ἴσαι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε τιμῶν τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀντιστοιχῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἑτέρου.*

Ἐκ τῆς γενομένης ὑποθέσεως ἕπονται τὰ ἑξῆς·

α'.) *Εἰς μεγαλειτέραν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ποσῶν ἀντιστοιχεῖ μεγαλειτέρα τιμὴ τοῦ ἑτέρου.*

Διότι ἂς ὑποτεθῇ ὅτι εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β τοῦ ἑτέρου. Πᾶσα τοῦ πρώτου τιμὴ μεγαλειτέρα τῆς Α δύναται νὰ παρασταθῇ δι' Α + Δ· ἐὰν δὲ εἰς τὴν τιμὴν Δ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ Ε τοῦ δευτέρου, εἰς τὴν τιμὴν Α + Δ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ Β + Ε τοῦ δευτέρου, κατ' ἀκολουθίαν εἰς τιμὴν τοῦ πρώτου μεγαλειτέραν τοῦ Α θὰ ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ δευτέρου μεγαλειτέρα τοῦ Β.

β'.) *Εἰς τιμὴν τοῦ ἑτέρου διπλασίαν, τριπλασίαν, . . . μυπλασίαν, ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τοῦ ἑτέρου διπλασία, τριπλασία, . . μυπλασία.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι εἰς τὴν τιμὴν $A+A$ ἤτοι $2A$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $B+B$ ἤτοι $2B$ τοῦ δευτέρου· εἰς τὴν τιμὴν $2A+A$ ἤτοι $3A$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $2B+B$ ἤτοι $3B$ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς.

γ'.) *Εἰς τιμὴν τοῦ ἑτέρου τῶν ποσῶν δίς, τρίς, κτλ. μικροτέρων, ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τοῦ δευτέρου δίς, τρίς, κτλ. μικροτέρα.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι εἰς τὴν τιμὴν $\frac{1}{7}A$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $\frac{1}{7}B$ τοῦ δευτέρου. Διότι ἐὰν ἑπταπλασιασθῇ ἡ τιμὴ $\frac{1}{7}A$, ὅτε θὰ γείνῃ A, θὰ ἑπταπλασιασθῇ καὶ ἡ εἰς $\frac{1}{7}A$ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ δευτέρου, καὶ τότε πρέπει νὰ γείνῃ B. Ἀλλ' ἡ ποσότης, ἥτις ἑπταπλασιαζομένη γίνεται B, εἶναι τὸ ἕβδομον τοῦ B.

δ'.) *Πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς A τοῦ πρώτου ἐπ' ἀριθμὸν σύμμετρον οἱονδήποτε, καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ B τοῦ δευτέρου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι εἰς τὴν τιμὴν $A\times\frac{13}{7}$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $B\times\frac{13}{7}$ τοῦ δευτέρου.

Διοτι ἐὰν

εἰς A ἀντιστοιχῇ B

εἰς $\frac{1}{7}A$ θὰ ἀντιστοιχῇ $\frac{1}{7}B$

καὶ εἰς $\frac{13}{7}A$ » » $\frac{13}{7}B$.

Τούτων δειχθέντων λέγω ὅτι ἐὰν A καὶ A_1 εἶναι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ποσῶν, B καὶ B_1 αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τοῦ ἑτέρου, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

$$A : A_1 = B : B_1.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ὁ λόγος $A : A_1$ εἶναι ὁ σύμμετρος ἀριθμὸς $\frac{\pi}{\rho}$, τουτέστιν ὅτι

$$A = A_1 \times \frac{\pi}{\rho}.$$

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τότε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐπειδὴ εἰς τὴν τιμὴν A_1 τοῦ πρώτου ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ B_1 τοῦ δευτέρου, εἰς τὴν τιμὴν $A_1 \times \frac{\pi}{\rho}$ τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $B_1 \times \frac{\pi}{\rho}$ τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἴσας τιμὰς τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι τιμαὶ τοῦ δευτέρου, εἶναι δὲ $A_1 \times \frac{\pi}{\rho}$ ἴσον τῷ A, θὰ εἶναι καὶ

$$B_1 \times \frac{\pi}{\rho} = B,$$

ἤτοι ὁ λόγος $B : B_1$ θὰ εἶναι $\frac{\pi}{\rho}$, ἴσος δηλαδὴ τῷ λόγῳ $A : A_1$.

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι ὁ λόγος $A : A_1$ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς λ, καὶ ἔστω λ_1 ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τιμὴ τοῦ λ, ἤτοι

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \frac{1}{\nu}.$$

Πολλαπλασιάζοντες δὲ A_1 ἐπὶ τοὺς ἀνίσους τούτους ἀριθμοὺς λαμβάνομεν

$$A_1 \times \lambda_1 < A_1 \times \lambda < A_1 \times (\lambda_1 + \frac{1}{\nu}),$$

ἢ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $A_1 \times \lambda = A$,

$$A_1 \times \lambda_1 < A < A_1 \times (\lambda_1 + \frac{1}{\nu}) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ πρώτου μεγέθους ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ $B_1 \times \lambda_1$, B, $B_1 \times (\lambda_1 + \frac{1}{\nu})$ τοῦ δευτέρου, καὶ εἰς τιμὰς μεγαλειτέρας τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦσι τιμαὶ μεγαλείτεραι τοῦ δευτέρου, θὰ εἶναι

$$B_1 \times \lambda_1 < B < B_1 \times (\lambda_1 + \frac{1}{\nu}) \qquad (2)$$

Αἱ σχέσεις αὗται δεικνύουσι (200) ὅτι ὁ λόγος $B : B_1$ εἶναι μεγαλείτερος τοῦ λ_1 καὶ μικρότερος τοῦ $\lambda_1 + \frac{1}{\nu}$, ἑπομένως περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων περι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαμβάνεται καὶ ὁ λόγος $A : A_1$, καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τούτων $\frac{1}{\nu}$ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, συνάγομεν ὅτι οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι, ἤτοι ὅτι

$$A : A_1 = B : B_1 \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

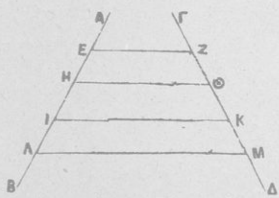
208. Σημειωσις. Διὰ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀναλόγου τῶν ποσῶν γίνεται ἁπλούστατα ἐν ἅπασι τοῖς κλάδοις τῆς τε καθαρᾶς καὶ τῆς ἐφηρμοσμένης μαθηματικῆς. Ἐφαρμογὴ δὲ αὐτοῦ εἰς τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη γίνεται εὐθὺς ἐν τῷ ἑπομένῳ θεωρήματι.

Περὶ εὐθειῶν ἀναλόγων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

209. *Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀπὸ παραλλήλων εὐθειῶν τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, κτλ. λέγω ὅτι δύο οἱαδήποτε τμήματα ΕΗ, ΗΙ τῆς πρώτης ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα τῆς δευτέρας τμήματα ΖΘ, ΘΚ.



Διότι ὡς ἐδείξαμεν ἀλλαχοῦ (133) εἰς ἴσα τμήματα ΕΝ, ΙΛ τῆς πρώτης ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τμήματα ΖΘ, ΚΜ τῆς δευτέρας· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα δύο τμημάτων ΕΗ, ΗΙ τῆς πρώτης, τὸ ΕΙ, ἀντιστοιχεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων ΖΘ, ΘΚ τῆς δευτέρας, τὸ ΖΚ. Ἄρα κατὰ τὸ περὶ ποσῶν ἀναλόγων θεώρημα δύο οἱαδήποτε τμήματα τῆς πρώτης εὐθείας ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα τμήματα τῆς δευτέρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

210. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων, δύο τμήματα τῶν εὐθειῶν τούτων ἀντιστοιχοῦντα, ἤτοι μεταξὺ τῶν αὐ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν παραλλήλων ἀπολαμβανόμενα, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ δύο ἄλλα οἱαδήποτε ἀντιστοιχοῦντα τμήματα.

Διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας

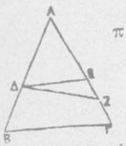
$$ΕΗ : ΗΙ = ΖΘ : ΘΚ,$$

τῇ μεταθέσει τῶν μέσων λαμβάνομεν ἣν ἔπρεπε νὰ δείξωμεν ἀναλογίαν

$$ΕΗ : ΖΘ = ΗΙ : ΘΚ.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

211. *Εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου καὶ παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ τέμνει τὰς πλευρὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.*



Ἐὰν δηλαδὴ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ ὑπάρχωσιν αἱ ἀναλογίαι

$$ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ$$
$$ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΕ$$
$$ΑΒ : ΔΒ = ΑΓ : ΕΓ.$$

Διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται, ἐὰν αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὑποτεθῶσι συνερχόμεναι εἰς ἓν σημεῖον, καὶ θεωρήσωμεν τμήματα τῶν δύο εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀρχόμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

212. *Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ τρίτῃ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ (σχ. τὸ ἀνωτέρω) ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΑΔ : ΔΒ=ΑΕ : ΕΓ, ἡ ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

Διότι ἐὰν ἡ ΔΕ δὲν εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΔΖ. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία,

$$ΑΔ : ΔΒ = ΑΖ : ΖΓ.$$

Ἔχομεν δὲ ἐξ ὑποθέσεως

$$ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν πορίζόμεθα

$$AZ : Z\Gamma = AE : E\Gamma$$

ἤ

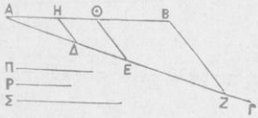
$$AZ : AE = Z\Gamma : E\Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ τελευταία ἀναλογία εἶναι ψευδής, διότι ὁ μὲν λόγος ΑΖ : ΑΕ εἶναι μεγαλείτερος τῆς μονάδος, ὁ δὲ λόγος ΖΓ : ΕΓ μικρότερος αὐτῆς. Κακῶς ἄρα ὑπετέθη ὅτι ἡ ΔΕ δὲν εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

213. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Π, Ρ, Σ.*

Ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα ἀπεριόριστος σχηματίζουσα

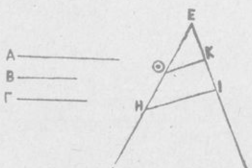


μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν, ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ ταύτης ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ Π, ἡ ΔΕ ἴση τῇ Ρ, καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ Σ· ἂς ἐπιζευχθῇ δὲ τὸ σημεῖον Ζ μετὰ τοῦ Β διὰ τῆς εὐθείας ΖΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Δ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ ἡ ΕΘ καὶ ἡ ΔΗ. Οὕτω ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ θεώρημα 209 εἶναι ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν Π, Ρ, Σ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

214. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ.*

Ἂς ληφθῇ γωνία τις τυχοῦσα ἡ ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἑτέρας



τῶν πλευρῶν ταύτης ἂς ληφθῇ ἡ ΕΗ ἴση τῇ Α, καὶ ἡ ΕΘ ἴση τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ἡ ΕΙ ἴση τῇ Γ· ἀχθείσης δὲ τῆς ΗΙ, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος ταύτῃ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος. Διότι τῆς ΘΚ οὔσης παραλλήλου τῇ ΗΙ, ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$EH : E\Theta = EI : EK,$$

ἤτοι

$$A : B = \Gamma : EK.$$

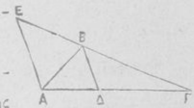
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις. Ὁμοίως εὑρίσκεται ἡ τρίτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Α καὶ Β· διότι αὕτη θὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Α, Β, Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ

215. *Ἡ δίχα τέμνουσα γωνίαν τριγώνου εὐθεῖα τέμνει τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας ταύτης πλευρὰν εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν εἰς ταῦτα προσκειμένων τοῦ τριγώνου πλευρῶν.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εὐθεῖα δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΔΑ : ΔΓ=ΑΒ : ΒΓ.



Διότι ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΔ, συμπίπτουσα τῇ προσεκβολῇ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ε.

Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΕΓ, τῆς ΒΔ οὔσης παραλλήλου τῇ ΑΕ, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

$$\Delta A : \Delta\Gamma = EB : B\Gamma.$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές· διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΒΔ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση τῇ ΔΒΓ, καὶ ἡ ΕΑΒ τῇ ΑΒΔ· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ΔΒΓ=ΑΒΔ, ἄρα καὶ ΑΕΒ=ΕΑΒ· διὰ τοῦτο δὲ ΕΒ=ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀναλογίᾳ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΕΒ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒ, λαμβάνομεν

$$\Delta A : \Delta B = AB : B\Gamma\cdot \quad \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

Σημειωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθὴς καὶ εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Περὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

216. *Ὅμοια* εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται τὰ ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένας, πρὸς δὲ τούτοις καὶ τὰς πλευράς, εἰς ἃς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἀναλόγους.

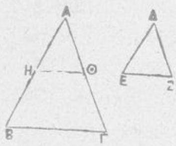
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὰς πλευράς, εἰς ἃς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι (ἢ αἵτινες ἐπιζευγνύουσι τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν), θὰ καλῶμεν διὰ συντομίαν *ὁμολόγους*. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν θὰ καλῶμεν *κορυφὰς ὁμολόγους*, καὶ τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν διαγωνίους, *ὁμολόγους διαγωνίους*.

Σημειωτέον ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

217. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ὅμοια.*



Ἔστωσαν τρίγωνα τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΔΕΖ ἔχοντα τὴν γωνία Α ἴσην τῇ γωνίᾳ Δ, τὴν Β ἴσην τῇ Ε, καὶ τὴν Γ ἴσην τῇ Ζ. Λέγω ὅτι θὰ εἶναι

$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ = ΒΓ : ΕΖ.$$

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴση τῇ ὁμολόγῳ αὐτῆς ΔΕ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἴση τῇ ὁμολόγῳ αὐτῆς ΔΖ ἡ ΑΘ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ. Τὸ τρίγωνον ΑΗΘ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΑΗΘ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ. Ἀλλὰ ΔΕΖ = ΑΒΓ· ἄρα καὶ ΑΗΘ=ΑΒΓ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν γωνιῶν τούτων συνάγομεν ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΗΘ· ἄρα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$ΑΒ : ΑΗ = ΑΓ : ΑΘ,$$

ἢ ἀντικαθισταμένων τῶν εὐθειῶν ΑΗ, ΑΘ διὰ τῶν ἴσων αὐταῖς ΔΕ, ΔΖ,

$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, γενομένης τῆς κατασκευῆς ἐπὶ των πλευρῶν τῆς γωνίας Γ, δεικνύεται ὅτι

$$ΑΓ : ΔΖ = ΒΓ : ΕΖ.$$

Ἄρα εἶναι $\quad ΑΒ : ΓΕ = ΑΓ : ΔΖ = ΒΓ : ΕΖ.$

ΘΕΩΡΗΜΑ

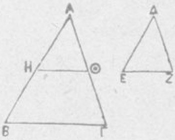
218. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους,*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας αὐτῶν, κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν τρίγωνα τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΔΕΖ. ἐν οἷς ὑποτίθεται ὅτι

ΑΒ : ΔΕ=ΑΓ : ΔΖ=ΒΓ : ΕΖ. (1)

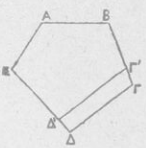


Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας, ἤτοι τὴν Α ἴσην τῇ Δ, τὴν Β ἴσην τῇ Ε, καὶ τὴν Γ ἴσην τῇ Ζ. Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΔΕ, ἥτις μετὰ τῆς ΑΒ ἀποτελοῦσι τοὺς ὅρους ἑνὸς τῶν ἴσων λόγων, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΗΘ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι ὅμοιον τῇ ΑΒΓ,διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

ΑΒ : ΑΗ=ΑΓ : ΑΘ=ΒΓ : ΗΘ. (2)

Τῶν τριῶν τούτων ἴσων λόγων ὁ πρῶτος ΑΒ : ΑΗ εἶναι ἴσος τῷ πρώτῳ τῶν τριῶν ἴσων λόγων(1),δηλαδὴ τῷ ΑΒ : ΔΕ, διότι ΑΗ=ΔΕ. Ἄρα καὶ οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἡγούμενοι τῶν ἴσων λόγων εἶναι ἴσοι, καὶ οἱ ἑπόμενοι θὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΘ=ΔΖ καὶ ΗΘ=ΕΖ.Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΑΕΖ ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΗΘ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ ΔΕΖ θὰ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ἐ τῶν ἀνωτέρω δύο προτάσεων φαίνεται ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν καὶ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει καὶ εἰς τὰ περισσοτέρας τῶν τριῶν πλευρῶν ἔχοντα εὐθύγραμμα σχήματα. Οἷον ἐὰν λάβωμεν ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον, τὰ σχήματα ταῦτα ἔχουσι μὲν τὰς γωνίας ἴσας, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· ἐὰν δὲ λάβωμεν τετραγωνον καὶ ῥόμβον, ταῦτα ἔχουσι μὲν τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἀλλὰ τὰς γωνίας ἀνίσους. Ὁμοίως ἐὰν ἐν τῷ πολυγώνῳ



ΑΒΓΔΕ ἀχθῇ ἡ Γ'Δ' παράλληλος τῇ ΓΔ, σχηματίζεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓ'Δ'Ε, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας ἴσας ταῖς τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· διότι εἰς τὰς ἴσας γωνίας Α καὶ Β ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων πρόσκειται ἡ αὐτὴ

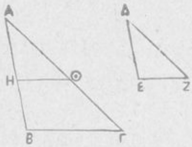
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρὰ ΑΒ, ἐν ᾧ εἰς τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ πρώτου πολυγώνου καὶ τὰς ἴσας αὐταῖς Β καὶ Γ′ τοῦ δευτέρου πρόσκεινται ἄνισοι πλευραὶ ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΒΓ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ

219. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, τὰς δὲ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.*

Ἔστωσαν τρίγωνα τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΔΕΖ, ἐν οἷς ὑποτίθεται Α=Δ



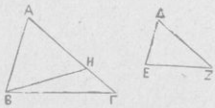
καὶ ΑΒ : ΔΕ=ΑΓ : ΔΖ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΘ. Τὸ τρίγωνον ΑΗΘ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἐν τῇ δεδομένῃ ἀναλογίᾳ, ἀντικαταστήσωμεν τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΔΖ διὰ τῶν ἴσων αὐταῖς ΑΗ, ΑΘ, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΗ=ΑΓ : ΑΘ. Ἐκ ταύτης δὲ συμπεραίνομεν (212) ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΗΘ = ΑΒΓ, καὶ ΑΘΗ = ΑΓΒ· ἄρα καὶ ΔΕΖ = ΑΒΓ, ΔΖΕ = ΑΓΒ· τουτέστι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια, καὶ ἑπομένως ὅμοια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

* 220. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, περὶ δὲ δύο ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέραν ἅμα ὀξεῖαν ἢ μὴ ὀξεῖαν, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ἰσογώνια, καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας, περὶ ἂς εἶναι αἱ ἀνάλογοι πλευραί.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΔΕΖ, ἐν οἷς ὑποτίθεται



Α=Δ, ΑΒ : ΔΕ=ΒΓ : ΕΖ, καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ ἢ ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι μὴ ὀξεῖαι· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ, καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Διότι ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, καὶ ΔΕΖ εἶναι ἄνισοι, ἔστω μείζων ἡ ΑΒΓ, καὶ ἂς σχηματισθῇ πρὸς τῇ εὐθείᾳ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Β γωνία ἴση τῇ ΔΕΖ ἡ ΑΒΗ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, ἡ δὲ ΑΒΗ ἴση τῇ ΔΕΖ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΗΒ ἴση τῇ ΔΖΕ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΗ, ΔΕΖ θὰ εἶναι ὅμοια, καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\mathrm{AB} : \Delta\mathrm{E} = \mathrm{BH} : \mathrm{EZ}\cdot$$

ἔχομεν δὲ καὶ ἐξ ὑποθέσεως

$$\mathrm{AB} : \Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Gamma : \mathrm{EZ}.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν συνάγομεν ὅτι $\mathrm{BH} = \mathrm{B}\Gamma$, διὰ τοῦτο δὲ καὶ ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ ΒΗΓ. Ἄς ὑποτεθῶσι δὲ κατὰ πρῶτον αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ ἑκατέρα ὀξεῖα· ἄρα τὸ παραπλήρωμα τῆς ΒΗΓ τῆς ἴσης τῇ Γ ἡ ΑΗΒ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα· ἐδείχθη δὲ ἡ αὐτὴ καὶ ἴση τῇ ΔΖΕ, ἥτις εἶναι ὀξεῖα· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ δὲν εἶναι ἄνισοι.

Ἄς ὑποτεθῇ τώρα ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ, Ζ μὴ ὀξεῖα. Τότε τὸ τρίγωνον ΒΗΓ θὰ ἔχῃ ἑκατέραν τῶν ἴσων γωνιῶν Γ καὶ ΒΗΓ μὴ ὀξεῖαν ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα καὶ κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ.

Σημείωσις. Ἐὰν αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἀμφότεραι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι, τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι ὅμοια, διότι αἱ γωνίαι Γ, Ζ θὰ εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι. Παρατηρητέον προσέτι ὅτι κατὰ τὴν μόνην περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ δύο τρίγωνα δὲν εἶναι ὅμοια, ὅταν δηλαδὴ τῶν γωνιῶν Γ καὶ Ζ ἡ μὲν εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ ἑτέρα τούτων εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἑτέρας, διότι ἡ μὲν θὰ εἶναι ἴση τῇ ΒΗΓ, ἡ δὲ τῇ ΑΗΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

221. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, ἑκάστην ἐφ' ἑκάστην, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας· ἴσαι δὲ γωνίαι θὰ εἶναι αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἢ τῶν ἐπ' ἀλλήλας καθέτων σχηματιζόμεναι.*

Ἔστωσαν Α,Β,Γ, αἱ γωνίαι τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων, Α΄,Β΄, Γ΄, αἱ τοῦ ἑτέρου· ἐσημειώθησαν δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος ἄνευ τόνου καὶ μετὰ τόνου αἱ γωνίαι αἱ τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους ἔχουσαι.

Ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τους ἢ ἴσαι εἶναι ἢ παραπληρωματικαί, διὰ τοῦτο περὶ τῶν γωνιῶν τῶν προκειμένων τριγώνων μόνας τρεῖς ὑποθέσεις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, τὰς ἑξῆς.

α'.) $A+A'=2^{\text{ὀρθ.}}$, $B+B'=2^{\text{ὀρθ.}}$, $\Gamma+\Gamma'=2^{\text{ὀρθ.}}$

β'.) $A+A'=2^{\text{ὀρθ.}}$, $B+B'=2^{\text{ὀρθ.}}$ $\Gamma=\Gamma'$.

γ'.) $A=A'$, $B=B'$, ὅτε καὶ $\Gamma=\Gamma'$.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτον ἴσον μὲ ἓξ ὀρθάς, ὅπερ ἀδύνατον· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν τὸ ἄθροισμα θὰ ἦτο μεγαλείτερον τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ εἶναι ὡσαύτως ἀδύνατον. Ἄρα μόνη ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

222. *Παράλληλοι τεμνόμεναι ὑπ' εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν παράλληλοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΝΙ,ΝΚ,ΝΛ,ΝΜ, αἵτινες πᾶσαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ν λέγω ὅτι θὰ εἶναι $EZ : IK = ZH : K\Lambda = H\Theta : \Lambda M$.

Διότι τῆς ΕΖ οὔσης παραλλήλου τῇ ΙΚ, τὰ δύο τρίγωνα ΝΙΚ,ΝΕΖ εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν $EZ : IK = NZ : NK$. Τὰ δὲ ὅμοια τρίγωνα ΝΖΗ,ΝΚΛ δίδουσι $ZH : K\Lambda = NZ : NK$. Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων ἀναλογιῶν πορίζόμεθα $EZ : IK = ZH : K\Lambda$. Ὁμοίως δεικνύομεν καὶ ὅτι $ZH : K\Lambda = H\Theta : \Lambda M$.

Σημείωσις. Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει. Ἐὰν δηλαδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι, καὶ προσέτι εἶναι

$$EZ : IK = ZH : K\Lambda = H\Theta : \Lambda M,$$

αἱ εὐθεῖαι αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων Ι καὶ Ε, Κ καὶ Ζ, Λ καὶ Η, Μ καὶ Θ, θὰ διέρχωνται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

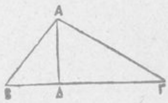
ΘΕΩΡΗΜΑ

223. *Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα εἶναι ὅμοια τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ἀχθεῖσα κάθετος μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινού-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σης, ἑκατέρα δὲ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὅλου τριγώνου πλευρῶν μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ τμήματος ταύτης τοῦ τῇ πλευρᾷ προσκειμένου.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἠγμένη κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια τῷ τε ὅλῳ τριγώνῳ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις.



Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν Β, ἔτι δὲ τὴν ὀρθὴν ΒΔΑ ἴσην τῇ ὀρθῇ ΒΑΓ· ἄρα ἔχουσι καὶ τὴν ΒΑΔ ἴσην τῇ ΑΓΒ. Εἶναι λοιπὸν ἰσογώνια, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΓΔ,ΑΒΓ, ἔχουσι τὴν γωνίαν Γ κοινήν, τὴν ὀρθὴν ΓΔΑ ἴσην τῇ ὀρθῇ ΒΑΓ, ἄρα καὶ τὴν ΔΑΓ ἴσην τῇ ΑΒΓ.

Καὶ τὰ τρίγωνα δὲ ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἰσογώνια· διότι ἐδείχθη ἡ γωνία ΑΒΔ ἴση τῇ ΔΑΓ, καὶ ἡ ΒΑΔ ἴση τῇ ΑΓΔ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ πορίζόμεθα τὴν ἀναλογίαν

$$ΒΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ.$$

Ἄρα ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τῆς ὑποτεινούσης τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ λαμβάνομεν

$$ΒΓ : ΑΒ = ΑΒ : ΒΔ.$$

Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ

$$ΒΓ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΔ.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἀναλογίαι ἐκφράζουσιν ὅτι ἑκατέρα τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ τμήματος ταύτης τοῦ εἰς τὴν πλευρὰν προσκειμένου, τοῦ ΒΔ ἢ τοῦ ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν

$$(ΑΔ)^2 = ΒΔ \times ΔΓ$$
$$(ΑΒ)^2 = ΒΓ \times ΒΔ$$
$$(ΑΓ)^2 = ΒΓ \times ΓΔ$$

Ἐκ δὲ τῆς προσθέσεως τῶν δύο τελευταίων τῶν ἰσοτήτων τούτων λαμβάνομεν $$(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ ἰσότητες αὗται ἐκφράζουσι τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις (157 καὶ 165) ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν ἀριθμῶν ἀποδειχθέντα θεωρήματα.

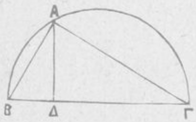
Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων λαμβάνομεν προσέτι $(AB)^2 : (A\Gamma)^2 = B\Gamma \times B\Delta : B\Gamma \times \Gamma\Delta$

ἢ $(AB)^2 : (A\Gamma)^2 = B\Delta : \Gamma\Delta$.

Τουτέστι *τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας τετράγωνα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ εἰς ταύτας προσκείμενα τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα καὶ τὸ ἑξῆς πόρισμα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἀχθῇ ἀπό τινος σημείου τῆς περιφερείας κάθετος ἐπί τινα διάμετρον, καὶ αἱ τὸ σημεῖον μετὰ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου ταύτης ἐπιζευγνύουσαι χορδαί, ἡ μὲν κάθετος θὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου, ἑκατέρα δὲ τῶν χορδῶν μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ τμήματος ταύτης τοῦ εἰς τὴν χορδὴν προσκειμένου.



Διότι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὸ Α, καὶ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς αὐτὸ τὰ ἐν τῷ ἀνωτέρω θεωρήματι δειχθέντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

224. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.*

Ἐπ' εὐθείας τινὸς ἂς ληφθῇ ἡ ΒΔ ἴση τῇ Μ (σχ. τὸ ἀνωτ.) καὶ ἡ ΔΓ ἴση τῇ Ν, ἐπὶ δὲ τῆς ὅλης ΒΓ ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ ἡμιπεριφέρεια· ἔπειτα ἐκ τοῦ Δ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέμνουσα τὴν ἡμιπεριφέρειαν κατὰ τὸ Α· ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος θὰ εἶναι ἡ ΔΑ.

Διότι κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$B\Delta : \Delta A = \Delta A : \Delta\Gamma$$

ἢ ἀντικαθισταμένων τῆς ΒΔ καὶ τῆς ΔΓ, ὑπὸ τῶν ἴσων αὐταῖς Μ καὶ Ν,

$$M : A\Delta = A\Delta : N.$$

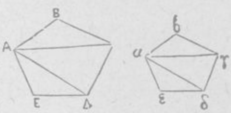
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

225. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ· πρόκειται νὰ γραφῇ πολύγωνον ὅμοιον τούτῳ.

Ἐκ τινος κορυφῆς Α τοῦ πολυγώνου ἃς ἀχθῶσι πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ· οὕτω τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα. Ἔπειτα ἃς ληφθῇ εὐθεῖα τις τυχοῦσα ἡ αϐ, καὶ πρὸς μὲν τῷ σημείῳ α ἃς κατασκευασθῇ



γωνία ἴση τῇ ΒΑΓ ἡ ϐαγ, πρὸς δὲ τῷ σημείῳ ϐ γωνία ἴση τῇ ΑΒΓ ἡ αϐγ· οὕτω σχηματίζεται τρίγωνον τὸ αϐγ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἃς σχηματισθῇ ἐπὶ τῆς αγ τὸ τρίγωνον αγδ ἰσογώνιον τῷ ΑΓΔ, ἤτοι ἔχον τὴν γωνίαν αγδ=ΑΓΔ,γαδ=ΓΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς αδ τὸ τρίγωνον αδε ἔχον τὴν γωνίαν αδε ἴσην τῇ ΑΔΕ καὶ τὴν δαε ἴσην τῇ ΔΑΕ. Λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματισθὲν πολύγωνον αϐγδε εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ.

Διότι ἡ γωνία ϐ εἶναι ἴση τῇ Β ἐκ κατασκευῆς. Ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ἴση τῇ ϐγδ· διότι ϐγα=ΒΓΑ, αγδ=ΑΓΔ· ἄρα ϐγα + αγδ =ΒΓΑ + ΑΓΔ, ἤτοι ϐγδ=ΒΓΔ. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὅτι ἡ γωνία γδε εἶναι ἴση τῇ ΓΔΕ, ἡ δεα τῇ ΔΕΑ, καὶ ἡ εαϐ τῇ ΕΑΒ.

Λέγω δὲ ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αϐγδε, ἔχουσι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους. Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, αϐγ, λαμϐάνομεν

$$\text{ΑΒ} : \text{αϐ} = \text{ΒΓ} : \text{ϐγ} = \text{ΑΓ} : \text{αγ}.$$

Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΔ, αγδ, λαμϐάνομεν

$$\text{ΑΓ} : \text{αγ} = \text{ΓΔ} : \text{γδ}.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀνωτέρω σειρᾷ τῶν ἴσων λόγων τὸν λόγον ΑΓ : αγ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ ΓΔ : γδ, ἔχομεν

$$\text{ΑΒ} : \text{αϐ} = \text{ΒΓ} : \text{ϐγ} = \text{ΓΔ} : \text{γδ}.$$

Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι ΓΔ : γδ=ΔΕ : δε=ΑΕ : αε.

Ἄρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αϐγδε ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

Σημειωσις α'. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ αϐ ἐλήφθη ὡς ἔτυχε, δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα τὸ πλῆθος πολύγωνα ὅμοια τῷ δοθέντι. Τὸ πρόβλημα δὲ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν δοθῇ ἡ αϐ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

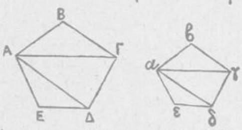
προσέτι ὁρισθῇ τίνι πλευρᾷ τοῦ δοθέντος πολυγώνου θὰ εἶναι αὕτη ὁμόλογος.

Σημειωσις. β΄. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου ἐδείχθη τὸ θεώρημα ὅτι, *δύο πολύγωνα συνιστάμενα ἐξ ἴσων τὸ πλῆθος τριγώνων ὁμοίων καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων εἶναι ὅμοια.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

226. *Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια καθ' ἕν, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.*

Ἔστωσαν ὅμοια πολύγωνα τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ αβγδε, ἔχοντα τὴν



γωνίαν Α=α, Β=β, Γ=γ, κτλ. Ἐκ δὲ τῶν κορυφῶν Α, α δύο ἴσων γωνιῶν ἂς ἀχθῶσιν ἐν ἑκατέρῳ τῶν πολυγώνων αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, αγ, αδ λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον τῷ αβγ, τὸ ΑΓΔ τῷ αγδ, καὶ τὸ ΑΔΕ τῷ αδε.

Κατὰ πρῶτον τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ β, καὶ τὰς περιεχούσας τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· διότι ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ΑΒ : αβ=ΒΓ : βγ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ εἶναι ἰσογώνια, καὶ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΒΓΑ ἴσην τῇ βγα. Ἐὰν δὲ αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν ἴσων ΒΓΔ, βγδ, αἱ ὑπολειπόμεναι γωνίαι ΑΓΔ, αγδ θὰ εἶναι ἴσαι. Καὶ αἱ περιέχουσαι δὲ τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ ἔχομεν

$$ΒΓ : βγ = ΑΓ : αγ.$$

Ἕνεκα δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων

$$ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν πορίζόμεθα

$$ΑΓ : αγ = ΓΔ : γδ.$$

Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, αγδ, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ αγδ, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ἡ ὁμοιότης τῶν λοιπῶν τριγώνων. Εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲ φανερὸν καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι τεταγμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς πολυγώνοις.

Σημειωσις. Ἡ διαίρεσις εἰς τρίγωνα δύναται νὰ γείνῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους· διότι ἀντὶ τῶν κορυφῶν Α καὶ α δύνανται νὰ ληφθῶσιν αἱ κορυφαὶ δύο ἄλλων ἴσων γωνιῶν. Παρατηρητέον δὲ ὅτι δύο διαγώνιοι ἐπιζευγνύουσαι ἴσων γωνιῶν τὰς κορυφὰς ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.

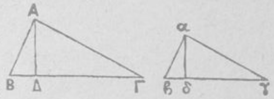
Ὡσαύτως δύναται νὰ διαιρεθῇ τὸ πρῶτον πολύγωνον εἰς τρίγωνα, ἀγομένων εὐθειῶν ἀπό τινος τῶν ἐντὸς αὐτοῦ σημείων εἰς τὰς κορυφάς, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρεθῇ καὶ τὸ δεύτερον πολύγωνον εἰς τρίγωνα ὅμοια τοῖς τοῦ πρώτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

227. *Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.*

Ἔστωσαν τρίγωνα ὅμοια τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ αϐγ, δηλαδὴ $Α=α$, $Β=ϐ$, $Γ=γ$. Ἂς ληφθῶσι ὡς βάσεις αὐτῶν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΒΓ καὶ ϐγ, ὅτε ὕψη θὰ εἶναι ἡ ΑΔ καὶ ἡ αδ.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\frac{1}{2}\,ΒΓ\times ΑΔ$, τὸ δὲ τοῦ αϐγ $\frac{1}{2}ϐγ\times αδ$. Ἄρα θὰ εἶναι (201)



$$ΑΒΓ : αϐγ=\frac{\frac{1}{2}ΒΓ\times ΑΔ}{\frac{1}{2}\,ϐγ\times αδ}=\frac{ΒΓ}{ϐγ}\times\frac{ΑΔ}{αδ} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ αϐδ εἶναι ὅμοια, διότι πλὴν τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ ϐ ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας Δ καὶ δ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δὲ ταύτης ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΔ}{αδ}=\frac{ΑΒ}{αϐ}=\frac{ΒΓ}{ϐγ}$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (1) τὸν λόγον $\frac{ΑΔ}{αδ}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{ΒΓ}{ϐγ}$, λαμβάνομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

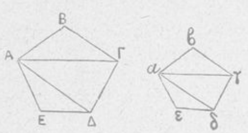
$$ΑΒΓ : αβγ = \frac{ΑΓ}{βγ} \times \frac{ΑΓ}{βγ}$$

ἤτοι $$ΑΒΓ : αβγ = \frac{(ΑΓ)^2}{(βγ)^2}. \qquad ὅ. ἔ. δ.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

228. *Τῶν ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἔστωσαν πολύγωνα ὅμοια τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ αβγδε. Ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σειρὰ ἴσων λόγων·



$$ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ = ΔΕ : δε = ΑΕ : αε.$$

Ἐκ ταύτης δὲ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς λαμβάνομεν,

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΑΕ : αβ + βγ + γδ + δε + αε = ΑΒ : αβ.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ταύτης εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ὁ δὲ δεύτερος ἡ τοῦ αβγδε, τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος εἶναι ἀποδεδειγμένον.

Ἵνα δὲ ἀποδείξωμεν καὶ τὸ δεύτερον, διαιροῦμεν τὰ πολύγωνα εἰς τρίγωνα ὅμοια. Ἔχομεν δὲ

$$ΑΒΓ : αβγ = (ΑΓ)^2 : (αγ)^2$$

$$ΑΓΔ : αγδ = (ΑΓ)^2 : (αγ)^2$$

Ἐκ τῶν δύο τουτων ἀναλογιῶν πορίζόμεθα

$$ΑΒΓ : αβγ = ΑΓΔ : αγδ.$$

Ὁμοίως δὲ δεικνύομεν καὶ ὅτι

$$ΑΓΔ : αγδ = ΑΔΕ : αδε.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν σειρὰν ἴσων λόγων

$$ΑΒΓ : αβγ = ΑΓΔ : αγδ = ΑΔΕ : αδε$$

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ : αβγ + αγδ + αδε = ΑΒΓ : αβγ.$$

Ἀλλὰ $$ΑΒΓ : αβγ = (ΑΒ)^2 : (αβ)^2.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀναλογίᾳ τὸν λόγον ΑΒΓ : αβγ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $(AB)^2 : (αβ)^2$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι

ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ = ΑΒΓΔΕ , αβγ + αγδ + αδε = αβγδε , λαμβάνομεν $$ΑΒΓΔΕ : αβγδε = (AB)^2 : (αβ)^2.$$

ΟΡΙΣΜΟΙ

229. *Ὅμοια τόξα λέγονται τὰ ὑποτείνοντα εἰς ἴσας πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας.*

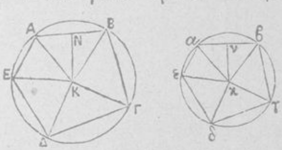
Ὅμοιοι δὲ τομεῖς καὶ ὅμοια τμήματα τὰ ἔχοντα τὰ τόξα αὐτῶν ὅμοια.

Ὅμοιαι δὲ τεθλασμέναι γραμμαὶ λέγονται αἱ ἔχουσαι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

230. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν ἄλλῳ κύκλῳ.*

Ἔστω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ Κ τὸ ΑΒΓΔΕ· ζητεῖται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον κ πολύγωνον ὅμοιον τούτῳ.



Ἂς διαιρεθῇ τὸ δοθὲν πολύγωνον δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ εἰς τρίγωνα, τὰ ΑΚΒ, ΒΚΓ, κτλ. ἔπειτα πρὸς τῷ κέντρῳ κ τοῦ δευτέρου κύκλου ἂς σχηματισθῇ ἡ ακβ γωνία ἴση τῇ ΑΚΒ, ἡ βκγ ἴση τῇ ΒΚΓ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἂς ἀχθῶσι δὲ αἱ χορδαὶ τῶν τόξων αβ, βγ, κτλ. τῶν μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν περιεχομένων, καὶ οὕτω σχηματίζεται πολύγωνον ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ τὸ αβγδε. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ακβ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΚΒ ἴσην τῇ ακβ, καὶ ὡς ἰσοσκελῆ ἀμφότερα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΒΚΓ εἶναι ὅμοιον τῷ βκγ, τὸ ΓΚΔ τῷ γκδ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ὡς συνιστάμενα ἐξ ἴσων τὸ πλῆθος τριγώνων ὁμοίων καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων εἶναι ὅμοια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις α'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δοθέντων δύο ὁμοίων τόξων ΕΑΒΓ, εαβγ, δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ δεύτερον τεθλασμένη γραμμὴ ὁμοία τῇ ἐγγεγραμμένῃ ἐν τῷ πρώτῳ.

Σημειωσις β': Πᾶν πολύγωνον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν κύκλῳ πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ εἶναι καὶ αὐτὸ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῇ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ κτλ., καὶ τὸ ὅμοιον αὐτῷ αβγδε εἰς τρίγωνα ὅμοια τοῖς τοῦ πρώτου, τὰ ακβ, βκγ, κτλ., ταῦτα θὰ εἶναι ὡς καὶ τὰ πρῶτα πάντα ἰσοσκελῆ, ἤτοι θὰ εἶναι κα=κβ=κγ=κδ=κε. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ κ καὶ ἀκτῖνα τὴν κα γραφῇ κύκλος, οὗτος θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον αβγδε.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται καὶ ὅτι πᾶσα τεθλασμένη γραμμὴ ὁμοία τῇ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένῃ εἶναι καὶ αὐτὴ ἐγγράψιμος εἰς κύκλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

231. *Τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν κύκλοις ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τούτων.*

Ἔστωσαν ἐγγεγραμμένα ἐν κύκλοις ὅμοια πολύγωνα τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ αβγδε (σχ. τὸ ἀνωτέρω). Ἐὰν καλέσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν Π καὶ π, τὰς δὲ ἐπιφανείας Ε καὶ ε, ἔχομεν (228),

$$\Pi : \pi = AB : \alpha\beta$$
$$E : \varepsilon = (AB)^2 : (\alpha\beta)^2 \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸ πρῶτον πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἔχοντα κορυφὴν τὸ κέντρον Κ τοῦ πρώτου κύκλου, τὰ ὅμοια τούτοις ἐν τῷ δευτέρῳ θὰ ἔχωσι κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα τὴν κορυφὴν αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον κ τοῦ δευτέρου κύκλου Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τριγώνων ΑΚΒ, ακβ λαμβάνομεν

$AB : \alpha\beta = AK : \alpha\kappa$, ὅθεν καὶ $(AB)^2 : (\alpha\beta)^2 = (AB)^2 : (\alpha\kappa)^2$.

Ἐὰν δὲ ἐν ταῖς ἀναλογίαις (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν λόγων $AB : \alpha\beta$, $(AB)^2 : (\alpha\beta)^2$ τοὺς ἴσους αὐτοῖς $AK : \alpha\kappa$, $(AK)^2 : (\alpha\kappa)^2$, λαμβάνομεν τὰς ἀναλογίας, ἃς ἔπρεπε νὰ δείξωμεν,

$$\Pi : \pi = AK : \alpha\kappa$$
$$E : \varepsilon = (AK)^2 : (\alpha\kappa)^2$$

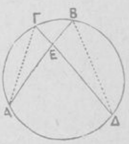
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

232. *Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ τμήματα ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἧς μέσοι μὲν εἶναι τὰ τμήματα τῆς ἑτέρας τῶν χορδῶν, ἄκροι δὲ τὰ τῆς ἑτέρας.*

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ δύο χορδαὶ κύκλου τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ.

Διότι ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΒΔ, τα δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΕ,ΒΔΕ ἔχουσι τὰς γωνίας ΓΕΑ, ΒΕΔ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν, τὰς γωνίας ΑΓΕ,ΕΒΔ ὡσαύτως ἴσας ὡς ἐγγεγραμμένας ἐν τῷ κύκλῳ γωνίας καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ παρέχουσι τὴν ἀναλογίαν ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐὰν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλας ἐν τῷ κύκλῳ, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑτέρας τῶν χορδῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑτέρας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Διότι ἐκ τῆς δειχθείσης ἀναλογίας ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ λαμβάνομεν ΕΑ×ΕΒ=ΕΔ×ΕΓ.

Σημειωσις. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ΕΑ : ΕΓ = ΕΔ : ΕΒ, τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Διότι τότε τὰ τρίγωνα ΑΕΓ, ΔΕΒ ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΕΓ ἴσην τῇ ΔΕΒ, καὶ τὰς περιεχούσας τὰς γωνίας ταύτας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια, καὶ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΑΓΕ ἴσην τῇ ΕΒΔ.

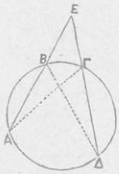
Ἐὰν δὲ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Δ, τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἐπ' αὐτῆς. Διότι πᾶσα γωνία ἴση τῇ ΑΒΔ καὶ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔ ἔχει τὴν κορυφὴν της ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒΔ (140 Σημ.).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

233. *Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς κύκλου κειμένου ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν, αἱ ὅλαι τέμνουσαι καὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρη αὐτῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἧς μέσοι μὲν εἶναι ἡ ἑτέρα τέμνουσα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ταύτης, ἄκροι δὲ ἡ ἑτέρα τέμνουσα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος αὐτῆς.*

Ἔστωσαν τέμνουσαι ἠγμέναι ἐκ τοῦ σημείου Ε, τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΔ, ἡ ΕΑ καὶ ἡ ΕΔ· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ.



Ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ· οὕτω σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν κατὰ τὸ Ε γωνίαν κοινήν, καὶ τὴν ΕΑΓ ἴσην τῇ ΒΔΕ, διότι ἀμφότεραι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐγγεγραμμέναι ἐν τῷ κύκλῳ καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ παρέχουσι τὴν ἀναλογίαν

ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ.

Σημειωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ἤτοι ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία ΕΑ : ΕΔ=ΕΓ : ΕΒ, τὰ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, δεικνύεται εὐκόλως, ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ προτάσει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

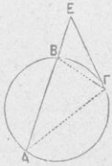
234. *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσιν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου καὶ τέμνουσα, περατούμεναι ἀμφότεραι εἰς τὴν περιφέρειαν, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ μὲν ΕΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΕΑ τέμνουσα, ἠγμέναι ἐκ τοῦ σημείου Ε τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ὄντος· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

ΕΑ : ΕΓ=ΕΓ : ΕΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΓ,ΒΕΓ ἔχουσι τὴν κατὰ τὸ Ε γωνίαν κοινήν, καὶ τὴν ΕΑΓ ἴσην τῇ ΒΓΕ· διότι αὕτη σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΕΓ καὶ τῆς χορδῆς ΓΒ,καὶ ἑπομένως (125) εἶναι ἴση τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ τῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ βαινούσῃ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν



$$ΕΑ : ΕΓ = ΕΓ : ΕΒ.$$

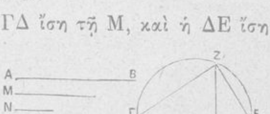
Σημειωσεις. Τὰ τρία ἀνωτέρω θεωρήματα ἔχουσι μεγάλην πρὸς ἄλληλα συγγένειαν· διότι τὸ μὲν δεύτερον διαφέρει τοῦ πρώτου κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι αἱ χορδαὶ ἀντὶ νὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ κύκλου τέμνονται ἐκτός, τὸ δὲ τρίτον ἐξάγεται ἐκ τοῦ δευτέρου, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ χορδὴ ΓΔ ἐλαττοῦται μέχρι μηδενίσεως,ὅτε ἡ ὅλη τέμνουσα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος αὐτῆς γίνονται ἀμφότεραι ἴσαι τῇ ἐφαπτομένῃ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

235. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς τὸ δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.*

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, αἱ δὲ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἡ Μ καὶ ἡ Ν. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς τὸ δοθὲν λόγον ἴσον τῷ Μ : Ν.

Ἂς ληφθῶσιν ἐπ' εὐθείας τινὸς ἡ ΓΔ ἴση τῇ Μ, καὶ ἡ ΔΕ ἴση τῇ Ν, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον· ἐκ δὲ τοῦ Δ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ, ὅπου αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΓ, ΖΕ. ἐπὶ τῆς ΖΕ ἐκβαλλομένης, ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΓΕ ἡ ΗΘ. Λέγω ὅτι ἡ ΖΘ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΓΕ καὶ ΗΘ ἔχομεν

$$ΖΘ : ΖΗ = ΖΓ : ΖΕ.$$

Ἄρα καὶ $(ΖΘ)^2 : (ΖΗ)^2 = (ΖΓ)^2 : (ΖΕ)^2.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΖΕ ἔχομεν (223 πόρ.)

$$(Z\Gamma)^2 : (ZE)^2 = \Gamma\Delta : \Delta E$$

Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων ἀναλογιῶν πορίζόμεθα

$$(Z\Theta)^2 : (ZH)^2 = \Gamma\Delta : \Delta E,$$

ἢ ἐπειδὴ $ZH = AB,\ \Gamma\Delta = M,\ \Delta E = N,$

$$(Z\Theta)^2 : (AB)^2 = M : N.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

236. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ τὸν δοθέντα λόγον Μ : Ν.*

Ἔστω Π ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ Α μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, Ρ ἡ ἐπιφανεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ Χ ἡ ὁμόλογος τῇ Α πλευρὰ αὐτοῦ· ζητεῖται νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία,

$$P : \Pi = M : N.$$

Ἀλλ' ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων Ρ καὶ Π ἔχομεν

$$P : \Pi = X^2 : A^2.$$

Παραβάλλοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας πορίζόμεθα

$$X^2 : A^2 = M : N.$$

Ἡ ἄγνωστος λοιπὸν πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, ἡ ὁμόλογος τῇ Α, θέλει εὑρεθῇ κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

237. *Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον τῷ εὐθυγράμμῳ σχήματι Ρ.*

Ἔστω Α πλευρά τις τοῦ εὐθυγράμμου Π, καὶ Χ ἡ ὁμόλογος ταύτῃ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου σχήματος Σ. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων θὰ εἶναι

$$\Pi : \Sigma = A^2 : X^2.$$

ἢ ἐπειδὴ τὸ Σ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ Ρ,

$$\Pi : P = A^2 : X^2$$

Ἐὰν δὲ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς Μ καὶ Ν τῶν ἰσοδυνάμων τοῖς σχήμασι Π καὶ Ρ τετραγώνων θὰ ἔχωμεν

$$M^2 : N^2 = A^2 : X^2.$$

Ὅθεν $M : N = A : X$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα ἡ πλευρὰ Χ τοῦ ζητουμένου εὐθυγράμμου σχήματος θὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

238. *Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Ρ νὰ κατασκευασθῇ τρίτον πολύγωνον ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων Π καὶ Ρ, καὶ Χ ἡ ὁμόλογος τούτων ἐν τῷ ζητουμένῳ πολυγώνῳ Σ, τῷ ἰσοδυνάμῳ τῷ ἀθροίσματι τοῦ Π καὶ τοῦ Ρ. Ἐκ τῶν ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Ρ λαμβάνομεν

$$\Pi : P = A^2 : B^2.$$

ὅθεν

$$\Pi + P : P = A^2 + B^2 : B^2$$

Ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων Σ καὶ Ρ λαμβάνομεν

$$\Sigma : P = X^2 : B^2.$$

Παραβάλλοντες τὴν ἀναλογίαν ταύτην πρὸς τὴν προηγουμένη, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν $\Pi + P = \Sigma$, τότε καὶ $A^2 + B^2 = X^2$, καὶ τἀνάπαλιν. Ἡ ἄγνωστος γραμμὴ Χ εἶναι λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ αἱ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ εἶναι Α καὶ Β.

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν Τ τὸ πολύγωνον τὸ ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν πολυγώνων Π καὶ Ρ, καὶ Υ τὴν ὁμόλογον ταῖς πλευραῖς Α καὶ Β πλευρὰν τούτου, θὰ εἶναι ἐπὶ τῇ ὑποθέσει $\Pi > P$,

$$\Pi - P : P = A^2 - B^2 : B^2$$

$$T : P = Y^2 : B^2.$$

Ἐκ δὲ τῶν ἀναλογιῶν τούτων συνάγομεν ὅτι Υ θὰ εἶναι ἡ ἑτέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι Α, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ Β.

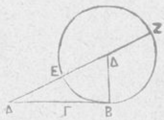
Σημείωσις. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου ἐδείχθη ὅτι ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευασθῶσι τρία ὅμοια πολύγωνα τὰς πλευρὰς ταύτας ὁμολόγους ἔχοντα, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν λοιπῶν δύο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Χρυσή τομή

239. *Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.*

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ τέμνεται κατὰ τὸ Γ ὅπως ζητεῖται, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία,



$$ΑΒ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ.$$

Ἐκ ταύτης δὲ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν λαμβάνομεν

$$ΑΒ + ΑΓ : ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ : ΑΓ$$

ἤτοι

$$ΑΒ + ΑΓ : ΑΒ = ΑΒ : ΑΓ.$$

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$ΑΒ^{Τ} = (ΑΒ + ΑΓ).ΑΓ$$

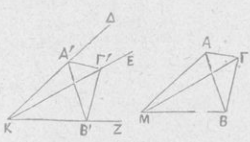
Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνήχθη εἰς τὸ ἑξῆς· νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, οὗ αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, καὶ ἰσοδύναμον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Τὸ πρόβλημα δὲ τοῦτο ἐλύθη ἐν ἐδαφίῳ 176.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

240. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΑΒΓ, καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ.*

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον, καὶ ὅτι Α′Β′Γ′ εἶναι τὸ ἴσον τῳ ΑΒΓ τρίγωνον ἐν τῇ θέσει, ἣν ἐζητεῖτο νὰ λάβῃ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Κ σημεῖον θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ γεγραμμένου ἐπὶ τῆς Α′Γ′ ὡς βάσεως, καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ΔΚΕ. Ὡσαύτως δὲ θὰ κεῖται τὸ Κ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ γραφομένου ἐπὶ τῆς Β′Γ′ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην τῇ ΕΚΖ. Ἄρα τὸ σημεῖον Κ θὰ εἶνα τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων τόξων. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν τὰ τόξα ταῦτα ἐπὶ τῶν



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ τοῦ δοθέντος τριγώνου, καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν Μ, νὰ ἀγάγωμεν τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, αἵτινες θὰ σχηματίζωσι πρὸς ἀλλήλας γωνίας ἴσας ταῖς ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν σχηματιζομέναις. Ἐὰν ἔπειτα ἐπιθέσωμεν τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΓ, ΜΒ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ ταύτας, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν, ἥτις ἐζητεῖτο, τουτέστι θὰ ἔχωμεν τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΓ καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ. Ἀντὶ δὲ νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ δεύτερον σχῆμα ἐπὶ τὸ πρῶτον, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ΚΑ' = ΜΑ, ΚΒ' = ΜΒ, ΚΓ' = ΜΓ, καὶ νὰ ἐπιζεύξωμεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' διὰ τῶν εὐθειῶν Α'Β', Β'Γ', Α'Γ'.

Σημειωσις. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου ἀντὶ νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι, ἐκάμομεν τὸ ἀντίστροφον, δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατεσκευάσαμεν εὐθείας διερχομένας διὰ τῶν κορυφῶν του καὶ σχηματιζούσας πρὸς ἀλλήλας γωνίας ἴσας ταῖς ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἀποτελουμέναις, καὶ ἔπειτα ἐπεθέσαμεν τὰς κατασκευασθείσας εὐθείας ἐπὶ τὰς δοθείσας, ἢ ἐπὶ τούτων κατεσκευάσαμεν τρίγωνον ἴσον τῷ ἐπὶ τῶν ἄλλων κειμένῳ. Ἡ τοιαύτη μέθοδος τοῦ λύειν τὰ προβλήματα καλεῖται *μέθοδος τῆς ἀντιστροφῆς*. Καὶ αὕτη δὲ ἡ μέθοδος, ὡς καὶ ἡ τῶν γεωμετρικῶν τόπων, ὑπάγονται εἰς τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

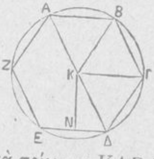
241. *Πολύγωνον κανονικὸν* καλεῖται τὸ ἐνταυτῷ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον. Οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ σχήματα.

Ὁμοίως λέγεται *κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ* ἡ ἔχουσα πάσας τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις.

ΘΕΩΡΗΜΑ

242. *Περὶ πᾶν κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ περιγραφῇ κύκλος, ἔτι δὲ καὶ νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ κύκλος.*

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ. Ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ τριῶν ἐφεξῆς κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, οἷον τῶν Α, Β, Γ· ἔστω δὲ Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.



Διότι ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ θὰ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα αἱ γωνίαι ΚΒΓ, ΚΒΑ θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἑπομένως ἑκατέρα ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· ἐπειδὴ δὲ ΚΓΒ=ΚΒΓ, ἡ γωνία ΚΓΒ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, ἑπομένως ἴση τῇ ΚΓΔ, Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΚΓΒ, ΚΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἄρα ἡ ΚΔ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΚΒ. Ἄρα ἡ γραφεῖσα περι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φέρεια διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Δ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ὅτι διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ πολυγώνου κορυφῶν. Ἄρα ὁ γραφεὶς κύκλος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.

Ἐὰν ἤδη ἀπὸ τοῦ Κ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου κάθετοι, αὗται θὰ εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς ἀποστήματα ἴσων χορδῶν τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Κ. Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τινὰ τῶν καθέτων, οἷον τὴν ΚΝ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ ἐφάπτηται πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου καὶ ἑπομένως ὁ κύκλος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος ἐν αὐτῷ.

Σημειωσις α'. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπαραλλάκτως δεικνύεται ὅτι περὶ πᾶσαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν δύναται νὰ περιγραφῇ κύκλος, ἔτι δὲ καὶ νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὴν κύκλος.

Σημειωσις β'. Τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου ἐν κανονικῷ πολυγώνῳ κύκλου καλεῖται καὶ *κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.*

Γωνία δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καλεῖται ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἠγμένων ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὰ ἄκρα πλευρᾶς τινος, οἷον ἡ ΒΚΓ. Πᾶσαι δὲ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ΑΚΒ,ΒΚΓ,ΓΚΔ, κτλ. εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΚΒ,ΒΚΓ κτλ. Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

243. *Ἐὰν ἡ περιφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς ἴσα μέρη περισσότερα τῶν δύο, αἱ χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον.*

Διότι αἱ πλευραὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου πολυγώνου εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων. Καὶ αἱ γωνίαι δὲ αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων. Καὶ τῷ ὄντι ἑκάστη γωνία βαίνει ἐπὶ τόξου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ ἠλαττωμένῃ κατὰ δύο τῶν ἴσων τόξων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

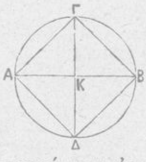
Ἐπειδὴ ἄρα πᾶσαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

Σημειωσις. Τὸ πρόβλημα, *νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μ πλευρὰς ἔχον*, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ προβλήματι, *νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

244. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Ἐὰν ἡ περιφέρεια ὑποτεθῇ διῃρημένη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, εἰς ἣν θὰ ὑποτείνῃ ἕκαστον τῶν τόξων, θὰ εἶναι τὸ τέταρτον 4 ὀρθῶν ἤτοι 1 ὀρθή.



Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῶσι δύο διάμετροι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα μέρη, καὶ ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΑΔ, αὗται σχηματίζουσι τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τετράγωνον.

Σημειωσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΓ λαμβάνομεν $(ΑΓ)^2=2(ΑΚ)^2$. Ἐντεῦθεν δὲ $ΑΓ=ΑΚ\sqrt{2}$, ἡ δὲ σχέσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁ *λόγος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ* 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

245. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

α'.) Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ εἶναι τὸ ἕκτον τῶν 4 ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Αἱ δὲ δύο λοιπαὶ γωνίαι ΚΑΒ, ΚΒΑ θὰ εἶναι ἴσαι μὲ $2-\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἑκατέρα αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{4}{3}$, ἤτοι $\frac{2}{3}$ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὀρθῆς. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΑΒ θὰ εἶναι ἰσογώνιον, ἑπομένως καὶ ἰσόπλευρον. Ἄρα ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ χορδὴ ἴση τῇ ἀκτῖνι, τὸ τόξον, εἰς ὃ ὑποτείνει ἡ χορδὴ αὕτη, θὰ εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας· λαμβάνοντες δὲ ἐφεξῆς ἓξ τόξα ἴσα τούτῳ, τὰ τόξα ΑΒ,ΒΓ, ΓΔ, κτλ., καὶ ἄγοντες τὰς χορδὰς τούτων σχηματίζομεν τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.

β'.) Ἐὰν λάβωμεν δύο τόξα ἴσα τῷ ἕκτῳ τῆς περιφερείας, τὸ ΑΒ καὶ τὸ ΒΓ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ΑΒΓ θὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{6}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιφερείας· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΓΔΕ τόξον, καὶ τὸ ΕΖΑ. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων, ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ, σχηματίζεται τὸ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

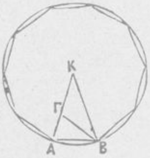
Σημείωσις. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΚ εἶναι ῥόμβος· διότι ΑΒ=ΒΓ=ΚΓ=ΚΑ. Ἄρα ἔχομεν (174 πόρ.) $(ΑΓ)^2+(ΚΒ)^2=4(ΚΑ)^2$. Ἐὰν δὲ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν $(ΚΒ)^2$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ ἴσον τούτῳ $(ΚΑ)^2$, λαμβάνομεν $(ΑΓ)^2=3(ΚΑ)^2$, ἐντεῦθεν δὲ $ΑΓ=ΚΑ\times\sqrt{3}$, δηλονότι ὁ λόγος *τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ* 3.

$\frac{\lambda_3}{R}=\sqrt{3}$ και $\lambda_3=R\sqrt{3}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

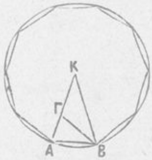
246. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, τοῦ τριγώνου ΚΑΒ ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ εἶναι τὸ δέκατον τῶν 4 ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{10}$ $=\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἑκατέρα λοιπὸν τῶν γωνιῶν ΚΑΒ καὶ ΚΑΒ θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $2-\frac{2}{5}$, ἤτοι τῶν $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἑπομένως ἴση μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἄρα ἑκα-



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τέρα τῶν γωνιῶν ΚΑΒ, ΚΒΑ θὰ εἶναι διπλασία τῆς ΑΚΒ. Ἐὰν δὲ διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΚΒΑ διὰ τῆς ΒΓ, ἡ γωνία ΚΒΓ θὰ εἶναι



$\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἐπομένως ἴση τῇ ΒΚΓ· διὰ τοῦτο δὲ θὰ εἶναι ΚΓ=ΒΓ. Ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές· διότι τῆς γωνίας ΓΒΑ οὔσης ἴσης μὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, τῆς δὲ ΒΑΓ μὲ $\frac{4}{5}$, καὶ ἡ ΒΓΑ θὰ εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΒΚ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία

ΚΒ : ΑΒ=ΚΓ : ΓΑ,

ἤ, ἀντικατασταθείσης τῆς ΚΒ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΚΑ, καὶ τῆς ΑΒ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΚΓ,

ΚΑ : ΚΓ=ΚΓ : ΓΑ.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης βλέπομεν ὅτι κατὰ τὸ σημεῖον Γ ἡ ἀκτὶς ΚΑ τοῦ κύκλου εἶναι διῃρημένη μέσον καὶ ἄκρον λόγον (239). Ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι ἴση τῷ μείζονι τῶν τμημάτων ΚΓ τῆς ἀκτῖνος οὕτω διαιρεθείσης.

Λύσις συνθετική. Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ κύκλου μέσον καὶ ἄκρον λόγον, λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην τῷ μείζονι τῶν τμημάτων ΚΓ τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἡ χορδὴ αὕτη εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΚ καὶ ΒΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΚΑΒ, ΓΑΒ ἔχουσι τὴν γωνίαν Α κοινήν, καὶ τὰς περὶ τὴν γωνίαν ταύτην πλευρὰς ἀναλόγους. Διότι ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΚΑ : ΚΓ=ΚΓ : ΓΑ, ἢ ἀντικατασθείσης τῆς ΚΓ διὰ τῆς ἴσης ΑΒ,

ΚΑ : ΑΒ=ΑΒ : ΑΓ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΓΑΒ εἶναι ὅμοια. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΚΑΒ εἶναι ἴση τῇ ΚΒΑ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΓΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο ΒΓ=ΑΒ· ἀλλὰ καὶ ΚΓ=ΑΒ· ἄρα ΒΓ=ΚΓ, δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΚΓΒ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἡ γωνία ΓΒΚ εἶναι ἴση τῇ ΓΚΒ. Ἡ γωνία ΑΓΒ ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τούτου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΒΚΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἴση τῇ γωνίᾳ ΑΓΒ εἶναι ἡ γωνία ΚΑΒ, ἑπομένως καὶ ἡ ΚΒΑ, βλέπομεν ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΚΑΒ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ Κ. Ἄρα αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΚΑΒ εἶναι ἴσαι τῷ πενταπλασίῳ τῆς Κ· ἄρα ἡ γωνία Κ εἶναι τὸ πέμπτον δύο ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ τῆς ὀρθῆς. Τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἄρα τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

247. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον κανονικὸν καὶ πεντεκαιδεκάγωνον.*

α'.) Εὑρίσκομεν τὸ δέκατον τῆς περιφερείας κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, τὸ διπλάσιον δὲ τούτου θὰ εἶναι $\frac{2}{10}$ ἤτοι $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τούτου θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου.

β'.) Ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας, ὅπερ εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἐγγραφῆς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{10}$, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας· τούτου δὲ ἡ χορδὴ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πεντεκαιδεκαγώνου.

Σημειωσις. Ἐὰν τῆς περιφερείας οὔσης διῃρημένης εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ὑποδιαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἡ περιφέρεια θέλει διαιρεθῇ εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν μερῶν ἴσων. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἄρα δυνάμεθα καὶ εἰς 4, 8, 16, 32, κτλ., ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσον μὲ δύναμίν τινα τοῦ 2, ἢ 2^{μ}. Ὁμοίως ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 3, 6, 12, 24, κτλ., ἢ γενικῶς εἰς $3\times2^{\mu}$ ἴσα μέρη· ἀπὸ δὲ τοῦ πενταγώνου εἰς 5, 10, 20, 40, κτλ., καὶ γενικῶς εἰς $5\times2^{\mu}$· τέλος δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀπὸ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου εἰς 15, 30, 60, κτλ. ἢ $3 \times 5 \times 2^{\mu}$ ἴσα μέρη ([1]).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

248. *Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ, νὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον τοῦτον πολύγωνον κανονικὸν ἔχον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ.*

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ Κ· ζητεῖται νὰ περιγραφῇ περὶ τοῦτον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον τόσας πλευράς, ὅσας καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον.

Ἐκ τοῦ μέσου Π τοῦ τόξου ΑΠΒ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἂς προσεκβληθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ μέχρις οὗ συμπέσωσι ταύτῃ κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ· ἔπειτα ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΚΓ, ΚΔ, κτλ. προσεκβαλλομένων ἂς ληφθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΙ, ΚΛ, κτλ. ἴσαι τῇ ΚΘ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ΘΙ, ΙΛ, κτλ. Οὕτω θέλει σχηματισθῇ τὸ πολύγωνον ΗΘΙΛΜΝ, τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶναι κανονικὸν καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.

Διότι τῆς κατὰ τὸ Π ἐφαπτομένης οὔσης παραλλήλου τῇ ΑΒ, αἱ γωνίαι ΚΗΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι ταῖς γωνίαις ΚΑΒ, ΚΒΑ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΑΒ=ΚΒΑ, ἄρα καὶ ΚΗΘ=ΚΘΗ, καὶ διὰ τοῦτο ΚΗ=ΚΘ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΘΚΙ, ΙΚΛ κτλ. εἶναι πάντα ἴσα τῷ ἰσοσκελεῖ ΚΗΘ· διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΚΘ, ΚΙ, ΚΛ ἴσας πάσας ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΛ κτλ, ἴσας ἀλλήλαις, ὡς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας τοῦ κανο-

[1]) Μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ παρόντος αἰῶνος ἐνομίζετο ὅτι μόνον τὰ ἀνωτέρω κανονικὰ πολύγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς τὸν κύκλον *γεωμετρικῶς*, ἤτοι διὰ τῆς χρήσεως μόνον εὐθείας γραμμῆς καὶ τόξων κύκλου. Ἀλλ' ὁ γερμανὸς μαθηματικὸς Gauss ἐν συγγράμματι, ἐκδοθέντι ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὸ 1801 καὶ ἐπιγραφομένῳ Disquisitiones arithmeticae, ἤτοι *Ἀριθμητικαὶ ἔρευναι*, ἔδειξεν ὅτι ἡ περιφέρεια δύναται νὰ διαιρεθῇ γεωμετρικῶς εἰς Ν ἴσα μέρη, ἐὰν ὁ Ν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος περιεχόμενος ἐν τῷ τύπῳ $2^{\mu}+1$, ἢ γινόμενον τοιούτων πρώτων παραγόντων, λαμβανομένων ἑκάστου ἅπαξ, ἢ γινόμενον τοιούτων ἀριθμῶν ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 2.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Τοῦ πολυγώνου λοιπὸν ΗΘΙΛΜΝ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις· διότι πᾶσαι εἶναι ἴσαι τῇ ΗΘ. Καὶ αἱ γωνίαι δὲ εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῶν ἴσων ἀλλήλοις ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἄρα τὸ πολύγωνον ΗΘΙΛΜΝ εἶναι κανονικόν· ἔχει δὲ προφανῶς τόσας πλευράς, ὅσας καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον. Εἶναι δὲ καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ· διότι αἱ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι τῇ ἀκτῖνι ΠΚ τοῦ κύκλου.

Σημειωσις α'. Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, οἷον τοῦ ΗΘΙΛΜΝ, δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν τῷ περιγεγραμμένῳ. Διότι ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀχθῶσιν εἰς τὸ κέντρον Κ αἱ εὐθεῖαι ΗΚ, ΘΚ, ΙΚ, κτλ. αἱ γωνίαι ΗΚΘ, ΘΚΙ, ΙΚΛ κτλ. θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κτλ. Ἐὰν λοιπὸν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων, σχηματίζεται κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, καὶ ἔχον τόσας πλευράς, ὅσας καὶ τὸ περιγεγραμμένον. Τὸ αὐτὸ δὲ γίνεται καὶ ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ τὰ σημεῖα τῶν ἁφῶν Π, Ρ, Σ κτλ. ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ΠΡ, ΡΣ κτλ. διότι τὰ τόξα ΠΒ, ΒΡ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν ἴσων τόξων ΑΠΒ, ΒΡΓ ἄρα τὸ τόξον ΑΠΒ εἶναι ἴσον τῷ ΠΒΡ, κτλ.

Σημειωσις β'. Δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν περὶ κύκλον ὅσα κανονικὰ πολύγωνα δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν, καὶ τἀνάπαλιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

249. *Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι ὅμοια.*

Διότι ἑκατέρου τῶν πολυγώνων ἑκάστη γωνία εἶναι $\frac{2\mu-4}{\mu}=$ $=2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθαί. Ἄρα τὰ πολύγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας. Ἔχουσι δὲ καὶ τὰς πλευράς των ἀναλόγους· διότι πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἑκατέρου τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΡΙΣΜΟΣ

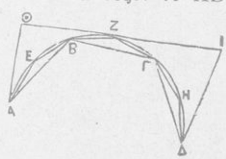
250. Μῆκος τόξου κύκλου καλεῖται τὸ ὅριον, εἰς ὃ τείνει ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένης ἐν αὐτῷ τεθλασμένης γραμμῆς, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ταύτης αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, αὗται δὲ αἱ πλευραὶ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀκριβής, πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τοιοῦτο ὅριον ὑπάρχει, καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται αἱ ἐν τῷ τόξῳ ἐγγεγραμμέναι τεθλασμέναι γραμμαί. Τοῦτο γίνεται ἐν ταῖς ἑξῆς τρισὶ προτάσεσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

251. *Ἐὰν εἰς τόξον κύκλου ἐγγραφῇ τεθλασμένη γραμμή, καὶ ἔπειτα διαιρεθέντος ἑκάστου τῶν τόξων, εἰς ἃ αἱ πλευραὶ ταύτης ὑποτείνουσιν, εἰς μέρη, ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τούτων, καὶ τοῦτο γίνηται ἐπ' ἄπειρον, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι τεθλασμέναι γραμμαὶ ἔχουσιν ὅριόν τι.*

Ἔστω τόξον τὸ ΑΒΓΔ, εἰς ὃ ἐγγράφομεν τεθλασμένην γραμμὴν τὴν ΑΒΓΔ· ἔπειτα διαιροῦντες τὰ τόξα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ εἰς μέρη ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ κτλ. ἄγομεν τὰς χορδὰς τούτων· οὕτω δὲ σχηματίζεται νέα τεθλασμένη γραμμὴ ἡ ΑΕΒΖΓΗΔ, ἥτις εἶναι μείζων τῆς ΑΒΓΔ·



διότι ΑΒ $<$ ΑΕ + ΕΒ, ΒΓ $<$ ΒΖ + ΖΓ, ΓΔ $<$ ΓΗ + ΗΔ. Ἐὰν ἔπειτα εἰς τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΕΒΖΓΗΔ κάμωμεν τὸ αὐτό, ὅπερ ἐκάμομεν εἰς τὴν ΑΒΓΔ, θὰ λάβωμεν νέαν τεθλασμένην γραμμὴν μείζονα, καὶ οὕτω καθεξῆς. Πᾶσαι δὲ αἱ τεθλασμέναι αὗται γραμμαὶ μένουσι μικρότεραι ὡρισμένης τινος γραμμῆς, οἷον τῆς ΑΘΙΔ, ἣν σχηματίζουσιν αἱ κατὰ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ ἡ κατὰ τὸ μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον Ζ ἐφαπτόμεναι. Ἀλλ' ὅταν μεταβλητή τις ποσότης αὐξάνῃ πάντοτε, μένουσα μικροτέρα δοθείσης τινὸς ποσότητος, ἔχει ὅριόν τι (185).

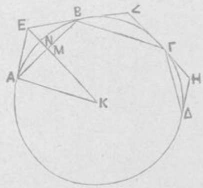
ΘΕΩΡΗΜΑ

252. *Ἐὰν ἐν τόξῳ κύκλου εἶναι ἐγγεγραμμένη τεθλασμένη τις γραμμὴ ΑΒΓΔ, κατὰ δὲ τὰ ἄκρα ταύτης καὶ τὰς κορυφὰς*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν γωνιῶν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἀποτελεῖται τεθλασμένη γραμμὴ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τόξον, ἡ ΑΕΖΗΔ, ἥτις ἔχει τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ὅριον (1).

Διότι ἀχθείσης τῆς ΕΚ καὶ τῆς ΚΑ, τὰ δύο τρίγωνα ΚΑΕ καὶ ΚΑΜ εἶναι ὅμοια, ὡς ὀρθογώνια τὸ μὲν κατὰ τὸ Α τὸ δὲ κατὰ τὸ Μ, καὶ ὡς ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Κ γωνίαν κοινήν, καὶ παρέχουσι τὴν ἀναλογίαν,



$$AE : AM = KE : KA.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΕΒ=ΑΕ, ΒΜ=ΑΜ καὶ διπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας λαμβάνομεν

$$AEB : AB = KE : KA.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$AEB - AB : AB = KE - KA : KA.$$

Ἢ ἐπειδὴ $KE - KA = KE - KN = EN$,

$$AEB - AB : AB = EN : KA.$$

Ἀλλ' ὁ λόγος ΕΝ:ΚΑ δύναται νὰ γείνῃ μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, ὅσον δήποτε μικροῦ. Διότι $EN < EM$· ἡ δὲ ΕΜ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΜ, ὅταν ἡ ΑΒ γίνῃ ἱκανῶς μικρά· διότι ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΑΜ ἡ γωνία ΕΑΜ ὡς ἴση γωνίᾳ πρὸς τῷ κέντρῳ βαινούσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ τείνει εἰς τὸ μηδέν, διὰ τοῦτο δὲ ἡ ΑΕΜ ἔχει ὅριον τὴν ὀρθήν. Εἰς τὴν μείζονα δὲ γωνίαν ὑποτείνει μείζων πλευρά. Ἄρα ὅταν ἡ ΑΒ γείνῃ μικροτέρα τοῦ νυοστοῦ τῆς ἀκτῖνος, ὁ λόγος ΕΝ : ΚΑ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{1}{\nu}$. Τοῦ λόγου δὲ $AEB - AB : AB$ ὄντος ἴσου τῷ λόγῳ ΕΝ : ΚΑ, καὶ διὰ τοῦτο μικροτέρου τοῦ $\frac{1}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$AEB - AB < AB \times \frac{1}{\nu}.$$

(1) Τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τῆς μετ' αὐτὴν δύναται νὰ παραλείπῃ ὁ διδάσκων πρὸς εὐκολίαν τῶν ἀρχαρίων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς μὴ ὑπερβαινουσῶν τὸ νυοστὸν τῆς ἀκτῖνος, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΒΖΓ}-\text{ΒΓ}<\text{ΒΓ}\times\frac{1}{\nu}.$$

$$\text{ΓΗΔ}-\text{ΓΔ}<\text{ΓΔ}\times\frac{1}{\nu}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{ΑΕΒ}+\text{ΒΖΓ}+\text{ΓΗΔ}-(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΒΔ})<\text{ΑΒ}\times\frac{1}{\nu}+$$

$$+\text{ΒΓ}\times\frac{1}{\nu}+\text{ΓΔ}\times\frac{1}{\nu},$$

ἤτοι $$\text{ΑΕΖΗΔ}-\text{ΑΒΓΔ}<\text{ΑΒΓΔ}\times\frac{1}{\nu}.$$

Ἡ ἀνισότης δὲ αὕτη μένει ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ διὰ τοῦ ὁρίου αὐτῆς Λ, διότι τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος γίνεται μικρότερον, τὸ δὲ δεύτερον μεγαλείτερον. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΑΕΖΗΔ}-\Lambda<\Lambda\times\frac{1}{\nu}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Lambda\times\frac{1}{\nu}$ δύναται νὰ γείνῃ μικρότερον παντὸς μήκους, λαμβανομένου τοῦ ν ἱκανῶς μεγάλου, συνάγομεν ὅτι ὅριον τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΕΖΗΔ εἶναι τὸ Λ. Ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα περιγεγραμμένη ΑΕΖΗΔ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις α΄. Πᾶσα ἐν τῷ τόξῳ ΑΒΔ ἐγγεγραμμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης περὶ τὸ τόξον περιγεγραμμένης γραμμῆς, ὡς κυρτὴ καὶ περιβαλλομένη ὑπ' αὐτῆς (83).

Σημειωσις β΄. Αἱ περὶ τὸ τόξον περιγεγραμμέναι γραμμαὶ τείνουσιν εἰς τὸ ὅριον Λ τῶν ἐγγεγραμμένων ἀπαύστως ἐλαττούμεναι. Τοῦτο καταφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, παραβαλλομένων δύο περιγεγραμμένων γραμμῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς δύο ἐφεξῆς ἐγγεγραμμένας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

253. *Πᾶσαι αἱ ἐν τόξῳ κύκλου ἐγγεγραμμέναι τεθλασμέναι γραμμαί, καθ' οἱονδήποτε νόμον καὶ ἂν σχηματίζωνται, τείνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ὅριον, ὅταν αἱ πλευραί των τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*

Ἔστω π ἐγγεγραμμένη τις εἰς τὸ τόξον γραμμή, Π ἡ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦσα περιγεγραμμένη, καὶ Λ τὸ κοινὸν αὐτῶν ὅριον· π' ἄλλη τις ἐγγεγραμμένη γραμμή, Π' ἡ ἀντιστοιχοῦσα περιγεγραμμένη, καὶ Λ' τὸ κοινὸν αὐτῶν ὅριον. Ἔστω προσέτι ε ἡ διαφορὰ $\Lambda-\pi$, ζ ἡ διαφορὰ $\Pi-\Lambda$, ε' καὶ ζ' αἱ διαφοραὶ $\Lambda'-\pi'$, καὶ $\Pi'-\Lambda'$. Δυνάμεθα δὲ νὰ λάβωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἐγγεγραμμένων γραμμῶν ἱκανῶς μικράς, ὥστε αἱ διαφοραὶ αὗται νὰ εἶναι ὅσον θέλωμεν μικραί. Λέγω ὅτι $\Lambda'=\Lambda$. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον $\Lambda>\Lambda'$. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν Α' εἶναι

$$\pi<\Pi'$$

ἤτοι $$\Lambda-\varepsilon<\Lambda'+\zeta'.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν

$$\Lambda-\Lambda'<\varepsilon+\zeta'.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon+\zeta'$ δύναται νὰ ὑποτεθῇ ὅσον θέλωμεν μικρόν, δύο δὲ σταθεραὶ ποσότητες, ὡς αἱ Λ καὶ Λ', ὧν ἡ διαφορὰ δύναται νὰ δειχθῇ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, εἶναι ἴσαι, συνάγομεν ὅτι $\Lambda=\Lambda'$.

Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι $\Lambda<\Lambda'$.

Ἔχομεν $$\pi'<\Pi$$

ὅθεν ὡς ἀνωτέρω, $$\Lambda'-\varepsilon'<\Lambda+\zeta.$$

Ἐντεῦθεν δὲ $$\Lambda'-\Lambda<\varepsilon'+\zeta.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος δὲ ταύτης συνάγομεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι

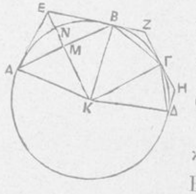
$$\Lambda=\Lambda'.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

254. *Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου πολυγωνικοῦ τομέως, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς ἐν τῷ τόξῳ ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΚΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τόξῳ αὐτοῦ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τομέως εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΚΑΒΓΔ.



Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰ ἄκρα Α καὶ Δ τοῦ τόξου καὶ κατὰ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τῶν γωνιῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς· οὕτω σχηματίζεται τομεὺς πολυγωνικὸς περιγεγραμμένος περὶ τὸν κυκλικὸν ὁ ΚΑΕΖΗΔ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ κυκλικὸς τομεὺς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγωνικοῦ, ὄντος μέρους του, καὶ μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου ὡς μέρος αὐτοῦ. Ἄρα ὁ κυκλικὸς τομεὺς διαφέρει ἑκατέρου τῶν πολυγωνικῶν ὀλιγώτερον ἢ ὅσον οὗτοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΕΒ,ΒΖΓ,ΓΗΔ. Τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μικρότερον ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων τούτων· τοιοῦτο δὲ ἔστω τὸ ΜΕ. Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὅσον αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τείνουσιν εἰς τὸ μηδέν, εἰς τὸ μηδὲν τείνει καὶ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο, διότι ἡ μὲν βάσις αὐτοῦ τείνει εἰς τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒΔ τὸ δὲ ὕψος ΜΕ τείνει εἰς τὸ μηδέν, συνάγομεν ὅτι ὁ κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ὅριον τοῦ τε ἐγγεγραμμένου πολυγωνικοῦ τομέως καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. *Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἴσον ἐμβαδὸν τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΑΚΔ, (σχ. τὸ ἀνωτέρω, ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ΚΑΒΓΔ, καὶ ὁ εἰς τοῦτον ἀντιστοιχῶν περιγεγραμμένος ὁ ΚΑΕΖΗΔ. Ὁ τελευταῖος οὗτος τομεὺς εἶναι ἰσοδύναμος ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν τὴν περίμετρον τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΕΖΗΔ, καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τοῦ κύκλου. Διότι ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς διαιρεῖται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΚΕ, ΕΚΖ, ΖΚΗ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΗΚΔ, τῶν ὁποίων τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΚΑ, ἐὰν κορυφὴ αὐτῶν ληφθῇ τὸ Κ. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὴν τοῦ τριγώνου καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ΚΑ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τριγώνων, ἤτοι ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ΚΑΕΖΗΔ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ὀρθογώνον ἔχον βάσιν τὸ ἄθροισμα ΑΕ + ΕΖ + ΖΗ + ΗΔ, ἤτοι τὴν περίμετρον τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΕΖΗΔ, καὶ ὕψος $\frac{1}{2}$ΚΑ.

Ἀλλ' ὁ μὲν πολυγωνικὸς τομεὺς ΚΑΕΖΗΔ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΚΔ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΑΕΖΗΔ.$\frac{1}{2}$ΚΑ ἔχει ὅριον ὀρθογώνιον βάσιν ἔχον τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒΔ καὶ ὕψος $\frac{1}{2}$ΚΑ· διότι ἡ μὲν βάσις αὐτοῦ ΑΕΖΗΔ ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒΔ, τὸ δὲ ὕψος $\frac{1}{2}$ ΚΑ εἶναι ἀμετάβλητον. Ἀλλὰ τὰ ὅρια μεταβλητῶν σχημάτων ἰσοδυνάμων ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδὰ (194)· ἄρα ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΒΔΚ ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον τῷ τοῦ ὀρθογωνίου

$$\text{τόξον ΑΒ}.\frac{1}{2}\text{ΚΑ}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

256. *Το ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του. Τοῦ δὲ ὅλου κύκλου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ὅλης περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

257. *Τῶν κύκλων αἱ μὲν περιφέρειαι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ὧν τὰς ἀκτῖνας ἃς παραστήσωμεν διὰ Α καὶ α, τὰς περιφερείας διὰ Π καὶ π, τὰς δὲ ἐπιφανείας διὰ Κ καὶ κ· λέγω ὅτι ὑπάρχουσιν αἱ ἀναλογίαι

$$\Pi : \pi = A : \alpha$$

$$K : \varkappa = A^2 : \alpha^2.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἃς ἐγγράψωμεν εἰς τοὺς δύο κύκλους δύο ὅμοια πολύγωνα (230). Παριστῶντες τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ τῶν γραμμάτων Σ καὶ σ, τὰς δὲ ἐπιφανείας διὰ τῶν γραμμάτων Ε καὶ ε, κατὰ τὸ θεώρημα 231 ἔχομεν

$$\Sigma : \sigma = A : \alpha$$

$$E : \varepsilon = A^2 : \alpha^2$$

Αἱ ἀναλογίαι αὗται ὑπάρχουσιν ὅσον μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, καὶ ὅσον μικραὶ γείνωσιν αὗται. Ὁ λόγος $\Sigma : \sigma$, πάντοτε ὢν ἴσος τῷ λόγῳ $A : \alpha$ ἔχει ὅριον τὸν λόγον $\Pi : \pi$ (202). καὶ ὁ λόγος $E : \varepsilon$ πάντοτε ὢν ἴσος τῷ λόγῳ $A^2 : \alpha^2$ ἔχει ὅριον τὸν λόγον $K : \varkappa$. Ἄρα ἔχομεν

$$\Pi : \pi = A : \alpha$$

$$K : \varkappa = A^2 : \alpha^2 \cdot$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

258. *Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ὁ αὐτὸς διὰ πάντα κύκλον.*

Διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\Pi : \pi = A : \alpha$, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 2 τοὺς δύο τελευταίους ὅρους λαμβάνομεν

$$\Pi : \pi = 2A : 2\alpha$$

καὶ μεταθέτοντες τοὺς μέσους,

$$\Pi : 2A = \pi : 2\alpha \cdot$$

τουτέστιν, ὃν λόγον ἔχει ἡ περιφέρεια Π πρὸς τὴν διάμετρόν της 2Α, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ πᾶσα ἄλλη περιφέρεια π πρὸς τὴν διάμετρόν της 2α.

Σημειωσις α΄. Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, παριστάμενος ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π, ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατωτέρω θέλομεν ἴδει πῶς δύναται νὰ ὁρισθῇ μὲ ὅσην θελήσωμεν προσέγγισιν. Εὑρίσκεται δὲ ὅτι εἶναι

$$\pi=3,1415926535897932\ \ldots$$

Ἡ περιφέρεια ἧς ἡ ἀκτὶς α παρίσταται διὰ τοῦ τύπου $2\pi\alpha$ Διότι καλοῦντες Γ τὴν περιφέρειαν ταύτην ἔχομεν $\frac{\Gamma}{2\alpha}=\pi$· ὅθεν $\Gamma=2\alpha\times\pi=2\pi\alpha$.

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν Κ τοῦ αὐτοῦ κύκλου παρίσταται διὰ τοῦ τόπου $\pi\alpha^2$· διότι $K=2\pi\alpha\times\frac{1}{2}\alpha=\pi\alpha^2$.

Σημειωσις β'. Τὸ ζήτημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου δοθέντι κύκλῳ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος ἰσοδυναμεῖ ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, γνωρίζομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ, τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο ἐὰν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς εὐθεῖαν ἔχουσαν μῆκος ἴσον τῷ τῆς περιφερείας. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, ὡς ἐδείχθη ἐν τοῖς ἐσχάτοις χρόνοις.

ΘΕΩΡΗΜΑ

259. *Τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, οἱ δὲ ὅμοιοι τομεῖς ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων.*

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἀπαραλλάκτως ὡς καὶ ἡ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἐγγραφομένων εἰς τὰ ὅμοια τόξα ὁμοίων τεθλασμένων γραμμῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

260. *Δοθεισῶν τῶν περιμέτρων π καὶ Π δύο κανονικῶν πολυγώνων ὁμοίων, τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ περίμετροι π' καὶ Π' τῶν διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἐχόντων κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων, ὧν αἱ περίμετροι εἶναι π καὶ Π, καὶ μ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Ἐὰν

τοῦ Ε ὄντος τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΑΕΒ, ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΕ, καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ΑΕΒ ἐφαπτόμεναι, ἡ μὲν ΑΕ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 2μ πλευράς, ἡ δὲ ΖΗ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου.

Διότι τὸ τόξον ΑΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΕΒ· ἀχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΖΚ,ΗΚ, ἡ γωνία ΖΚΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΒ. Τούτων τεθέντων ἔχομεν

$$\Pi : \pi = \Gamma\Delta : AB = K\Gamma : KA = K\Gamma : KE.$$

Τῆς δε ΖΚ διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΓΚΕ, ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$Z\Gamma : ZE = K\Gamma : KE.$$

Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας καὶ τῆς προηγουμένης $\Pi : \pi = K\Gamma : KE$ συνάγομεν

$$\Pi : \pi = Z\Gamma : ZE,$$

ὅθεν

$$\Pi + \pi : \pi = Z\Gamma + ZE : ZE.$$

Διπλασιάζοντες τοὺς δύο ἑπομένους, καὶ ἀντικαθιστῶντες ΖΓ + ΖΕ διὰ ΓΕ, λαμβάνομεν

$$\Pi + \pi : 2\pi = \Gamma E : 2ZE.$$

Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι ΓΕ καὶ 2ΖΕ ἢ ΖΗ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ περίμετροι Π καὶ Π′ διότι ἑκατέρα περιέχεται 2μ φορὰς εἰς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν περίμετρον. Ἄρα ἔχομεν

$$\Pi + \pi : 2\pi = \Pi : \Pi'$$

ὅθεν

$$\Pi' = \frac{2\pi \times \Pi}{\Pi + \pi}. \qquad (1)$$

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν περίμετρον π′ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΖΕΘ, ΕΑΛ εἶναι ἰσογώνια καὶ δίδουσι τὴν ἀναλογίαν

$$AE : A\Lambda = EZ : \Theta E$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΑΛ περιέχονται ἑκατέρα 2μ φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους π′ καὶ π, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΕ, 4μ φορὰς εἰς τὰς περιμέτρους Π′ καὶ π′, ἔχομεν $\pi' : \pi = \Pi' : \pi'$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅθεν $$\pi' = \sqrt{\Pi' \times \pi}$$

ἢ $$\pi' = \sqrt{\frac{2\Pi \times \pi^2}{\Pi + \pi}}.$$

Ὁ τύπος οὗτος καὶ ὁ ἀνωτέρω (1) παρέχουσι τὴν λύσιν τοῦ προτεθέντος προβλήματος.

Σημειωσις. Ἐν τοῖς ἑξῆς τὴν μὲν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου περὶ κανονικὸν πολύγωνον κύκλου θέλομεν καλεῖ διὰ συντομίαν ἀκτῖνα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τὴν δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀπόστημα αὐτοῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

261. *Δοθείσης τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κα τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος ἴσην τῷ πρώτῳ περίμετρον καὶ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἂς παραστήσωμεν δὲ δι' Α τὴν ἀκτῖνα ΚΑ καὶ δι' α τὸ ἀπόστημα ΚΓ τοῦ δοθέντος πολυγώνου, δι' Α' καὶ α' τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ ζητουμένου.

Ἐὰν προσεκβληθῇ τὸ ἀπόστημα ΓΚ μέχρις οὗ συναντήσῃ κατὰ τὸ Δ τὴν εἰς τὸ πολύγωνον περιγεγραμμένην περιφέρειαν, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΔ, ἡ γωνία ΑΔΒ θὰ εἶναι ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΚΒ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Κ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ ἡ ΚΕ, καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΕΖ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ νέου πολυγώνου· διότι εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· ἐπομένως τὸ νέον πολύγωνον ὡς ἔχον διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἢ τὸ πρῶτον, ἀλλ' ἑκάστην πλευρὰν δὶς μικροτέραν, θὰ ἔχῃ ἴσην τῷ πρώτῳ περίμετρον. Θὰ εἶναι δὲ ἐν αὐτῷ ἀκτὶς μὲν ἡ ΔΕ, ἀπόστημα δὲ ἡ ΔΗ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἶναι δὲ $\Delta H = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\Delta K + K\Gamma}{2} = \frac{A + \alpha}{2}$,

ἤτοι $$\alpha' = \frac{A + \alpha}{2}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου δὲ τριγώνου ΚΕΔ λαμβάνομεν

$$(\Delta E)^2 = \Delta K \times \Delta H, \text{ ἢ } A'^2 = A \times \alpha'$$

ὅθεν $$A' = \sqrt{A \times \alpha'} = \sqrt{A \times \frac{A + \alpha}{2}}.$$

Σημειωσις. Ἐὰν μετασχηματίσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ δεύτερον πολύγωνον εἰς τρίτον, ἔχον ἴσην περίμετρον καὶ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν, καὶ ἐξακολουθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς πολύγωνον, ἐν ᾧ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος νὰ εἶναι μικροτέρα δοθείσης εὐθείας οἱασδήποτε. Διότι ἐκ τοῦτριγώνου ΑΚΓ ἔχομεν

$$A - \alpha < A\Gamma.$$

Ἡ ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ μιᾶς τοῦ πολυγώνου πλευρᾶς· αὕτη δὲ ληφθέντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἱκανῶς μεγάλου, δύναται νὰ γείνῃ ὅσον θελήσωμεν μικρά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

262. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κατὰ δοθεῖσαν προσέγγισιν.*

Παριστῶντες διὰ Γ τὴν περιφέρειαν, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι α, ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $$\pi = \frac{\Gamma}{2\alpha}.$$

Ἐὰν λοιπὸν δοθείσης τῆς ἀκτῖνος α κύκλου τινὸς δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἢ τἀνάπαλιν, δοθέντος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, ὁ λόγος τοῦ πρώτου μήκους πρὸς τὸ δεύτερον θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος π. Τὸ πρῶτον τούτων δύναται νὰ γείνῃ κατὰ τὸ πρῶτον τῶν προηγουμένων δύο προβλημάτων, τὸ δὲ δεύτερον κατὰ τὸ δεύτερον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α') Λαμβάνομεν κύκλον, οὗ ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση τῇ μονάδι, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγράφομεν καὶ περιγράφομεν κανονικόν τι πολύγωνον, οἷον τετράγωνον. Ἡ περίμετρος π τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θὰ εἶναι $4\sqrt{2}$, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου Π θὰ εἶναι 8. Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους $\Pi' = \frac{2\Pi \times \pi}{\Pi + \pi}$, $\pi' = \sqrt{\Pi' \times \pi}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι $\sqrt{\frac{128}{2+\sqrt{2}}}$, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου $\frac{16\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. Διὰ τῶν αὐτῶν τύπων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων 32, 64, 128, κτλ. πλευράς. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνει, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν περιμέτρων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου ἐλαττοῦται καὶ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος. Ἐὰν λοιπὸν φθάσωμεν εἰς δύο περιμέτρους, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι παραδείγματος χάριν μικροτέρα ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, λαμβάνοντες τὴν ἑτέραν τούτων ἀντὶ τῆς περιφερείας, θὰ ἔχωμεν τὸ μῆκος ταύτης κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ· διαιροῦντες δὲ ταύτην διὰ 2 θὰ ἔχωμεν τὸν λόγον π μὲ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν.

β'.) Κατασκευάζομεν τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην τῇ μονάδι ἑπομένως περίμετρον 4. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Α καὶ α τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα τούτου θὰ εἶναι

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Κατὰ τοὺς τύπους δὲ τοῦ προηγουμένου προβλήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα A_1 καὶ τὸ ἀπόστημα α_1 τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου τοῦ ἔχοντος ἴσην τῷ τετραγώνῳ περίμετρον, ἤτοι 4. Εἶναι δὲ

$$A_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}, \qquad \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Κατὰ τοὺς αὐτοὺς τύπους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰ ἀποστήματα τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ὧν ἡ περίμετρος εἶναι 4, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν 16,32,64, κτλ. Δυνάμεθα δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

οὕτω νὰ φθάσωμεν εἰς πολύγωνον, ἐν ᾧ ἡ ἀκτὶς A_ν καὶ τὸ ἀπόστημα α_ν νὰ διαφέρωσιν ὅσον ὀλίγον θέλωμεν.

Ἀλλ᾽ αἱ περιφέρειαι αἱ ἔχουσαι ἀκτῖνας A_ν καὶ α_ν εἶναι ἡ μὲν μεγαλειτέρα ἡ δὲ μικροτέρα τοῦ 4, διότι ἡ μὲν αὐτῶν εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον περίμετρον 4 ἡ δὲ ἐγγεγραμμένη. Ἄρα ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα μῆκος 4 θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα περιλαμβανομένην μεταξὺ A_ν καὶ α_ν, καὶ ἡ ἀκτὶς αὕτη δύναται νὰ προσδιορισθῇ μὲ ὅσην θελήσωμεν προσέγγισιν. Ὁ ἑξῆς πίναξ περιέχει τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰ ἀποστήματα μὲ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ τὰ πολύγωνα ἀπὸ 4 μέχρι 8192 πλευρῶν.

Ἀριθμὸς πλευρῶν.	Ἀποστήματα.	Ἀκτῖνες
4	$\alpha_1 = 0,5000000$	$A_1 = 0,7071068$
8	$\alpha_2 = 0,6035534$	$A_2 = 0,6532815$
16	$\alpha_3 = 0,6284174$	$A_3 = 0,6407289$
32	$\alpha_4 = 0,6345731$	$A_4 = 0,6376435$
64	$\alpha_5 = 0,6361083$	$A_5 = 0,6366754$
128	$\alpha_6 = 0,6364919$	$A_6 = 0,6366836$
256	$\alpha_7 = 0,6365878$	$A_7 = 0,6366357$
512	$\alpha_8 = 0,6366117$	$A_8 = 0,6366237$
1024	$\alpha_9 = 0,6366177$	$A_9 = 0,6366207$
2048	$\alpha_{10} = 0,6366192$	$A_{10} = 0,6366199$
4096	$\alpha_{11} = 0,6366195$	$A_{11} = 0,6366197$
8192	$\alpha_{12} = 0,6366196$	$A_{12} = 0,6366196$

Ἐν τῷ ἀνωτέρω πίνακι βλέπομεν ὅτι ἐν τῷ πολυγώνῳ τῷ ἔχοντι 8192 πλευρὰς ἡ διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ἀποστήματος εἶναι μικροτέρα μιᾶς μονάδος τῆς ἑβδόμης δεκαδικῆς τάξεως· ἑπομένως ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, οὗ ἡ περιφέρεια εἶναι 4, εἶναι 0,6366196 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκακισεκατομμυριοστοῦ. Ἄρα

$$\pi = \frac{4}{0,6366196 \times 2} = 3,1415925 \ \ldots$$

Σημειώσεις. Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης εὗρε τιμὴν προσεγγίζουσαν τοῦ π δείξας ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3 + \frac{1}{7}$ μεγαλείτερος δὲ τοῦ $3 + \frac{10}{71}$. Ὁ Μέτιος εὗρε τὸν πολὺ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περισσότερον προσσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ μαθηματικοὶ ὑπελόγισαν τὸν π μὲ ἔτι μεγαλειτέραν προσέγγισιν, καὶ σήμερον εἶναι γνωστὸς μὲ 140 δεκαδικὰ ψηφία.

ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ = 3,14159

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

263. Μέτρησις γωνίας εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου αὐτῆς πρὸς ἑτέραν γωνίαν ληφθεῖσαν ὡς μονάδα, οἷον τὴν ὀρθήν. Ἀλλὰ κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ 207 θεώρημα ὁ λόγος δύο γωνιῶν εἶναι ἴσος τῷ λόγῳ τῶν εἰς ταύτας ὑποτεινόντων τόξων, τὰ ὁποῖα εἶναι γεγραμμένα μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν καὶ ἀκτῖνας ἴσας· διότι εἰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσιν ἴσα τόξα, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν ὑποτείνει τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς ταύτας ὑποτεινόντων τόξων. Ἵνα λοιπὸν εὕρωμεν τὸν λόγον γωνίας τινὸς πρὸς τὴν ὀρθήν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τοῦ εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦντος τόξου πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας.

Ἐν ταῖς πρακτικαῖς ἐφαρμογαῖς τῆς γεωμετρίας τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *μοῖραι*· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 90 ἴσα μέρη καλούμενα *λεπτὰ πρῶτα*, καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *λεπτὰ δεύτερα*.

Ἵνα μετρήσωμεν δὲ δοθεῖσαν γωνίαν θέτομεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ κέντρου κύκλου ὡς ἀνωτέρω διῃρημένου, καὶ βλέπομεν τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της περιεχόμενον τόξον πόσων μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων εἶναι. Ἐὰν εἶναι παραδείγματος χάριν 47 μοιρῶν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γωνία εἶναι τὰ $\frac{47}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν τὸ τόξον εἶναι 35 μοιρῶν 28 πρώτων λεπτῶν καὶ 47 δευτέρων (ὅπερ σημειοῦται $35^0\ 28'47''$), ἡ γωνία εἶναι $\frac{35}{90}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $\frac{28}{60}$ τοῦ ἐνενηκοστοῦ, καὶ $\frac{47}{60}$ τοῦ ἑξηκοστοῦ τοῦ ἐνενηκοστοῦ, ἤτοι $\frac{127727}{324000}$ τῆς ὀρθῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ὡς μέτρον τῆς γωνίας δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ μῆκος τοῦ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους γραφέντος τόξου, τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιλαμβανομένου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι 2π, ἤτοι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 3,1415926 . . ., τὸ μῆκος τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας θὰ εἶναι $\frac{\pi}{2}$, ἤτοι 1,5707963...., καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς. Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ ἐνενηκοστὸν τοῦ 1,5707963 . . ., ἤτοι 0,01745329 . . . Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ αἱ γωνίαι μετροῦνται μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α'.) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1). Τὸ σχῆμα τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι παραλληλόγραμμον.

2). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ἑτέρας τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὸ ἀπὸ ταύτης ἀπόστημα τοῦ μέσου τῆς ἑτέρας.

3). Ἡ ὑποτείνουσα παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

4). Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων παντὸς σημείου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀπὸ τῶν λοιπῶν δύο εἶναι σταθερός.

5). Ἡ πλευρὰ τοῦ περὶ κύκλον περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου.

6). Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων δύο ἄλλων κύκλων, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἶναι ἴση τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν περιφερειῶν τῶν δύο ἄλλων.

7). Ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιφερειῶν εἶναι ἰσοδύναμος κύκλῳ, οὗ ἡ διάμετρος εἶναι ἴση χορδῇ τῆς μεγαλειτέρας περιφερείας ἐφαπτομένη τῆς μικροτέρας.

8). Ἐὰν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ὡς διαμέτρων γραφῶσι κύκλοι, ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τῶν λοιπῶν δύο.

9). Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὡς διαμέτρου γραφῇ ἡμικύκλιον περιέχον αὐτό, καὶ ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, αἱ ἡμιπεριφέρειαι αὗται καὶ τὰ τόξα τῆς πρώτης, εἰς ἃ ὑποτείνουσιν αἱ χορδαὶ ΑΓ,ΒΓ, ἀποτελοῦσι σχήματα, ὧν ἑκάτερον καλεῖται *μηνίσκος τοῦ Ἱπποκράτους*, καὶ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

10). Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους, ὡς πρὸς βάσιν τὴν τρίτην πλευράν, ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

11). Παντὸς ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ γινόμενον τῶν δύο διαγωνίων εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

12). Ἐὰν διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β διέρχωνται περιφέρειαι τέμνουσαι δοθέντα κύκλον, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν τεμνόντων αὐτὸν διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β διερχομένης εὐθείας. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ σημείου διέρχεται καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ἐφαπτομένου τούτου καὶ διερχομένου διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

13) Δοθέντων δύο κύκλων, ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν ἄκρων δύο ἀκτίνων παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς τέμνει τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν πάντοτε κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ διερχομένη διὰ τῶν ἄκρων δύο ἀκτίνων παραλλήλων καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Καλεῖται δὲ ἑκάτερον τῶν σημείων τούτων *κέντρον ὁμοιότητος τῶν κύκλων*, τὸ μὲν πρῶτον *ἐκτός*, τὸ δὲ δεύτερον *ἐντός*.

14). Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου ὁμοιότητος δύο κύκλων, εἴτε τοῦ ἐκτός, εἴτε τοῦ ἐντός, ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς εἰς τὸ κυρτὸν τόξον τῆς ἑτέρας τῶν περιφερειῶν περατουμένης τεμνούσης, καὶ τῆς εἰς τὸ κοῖλον τῆς ἑτέρας, εἶναι σταθερόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

15). Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀγόμεναι εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Ἂς καλῶνται δὲ αἱ εὐθεῖαι αὗται *διάμεσοι*).

16). Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὕψῶν, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων, καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου τῶν σημείων τούτων ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου.

17). Ἐὰν τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐν κύκλῳ, οἱ πόδες τῶν ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε τῆς περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγομένων καθέτων κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

18). Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐκ πάντων τῶν ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων τριγώνων τὸ ἔχον μέγιστον ἐμβαδόν, ἐκ πάντων δὲ τῶν περιγεγραμμένων τὸ ἐλάχιστον.

Β′) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΕΙΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

1). Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον μ:ν.

2). Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀφ᾽ ὧν αἱ εἰς τὸν ἕτερον δύο δοθέντων κύκλων ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ σχηματιζομένῃ ὑπὸ τῶν εἰς τὸν ἕτερον κύκλων ἀγομένων ἐφαπτομένων.

3). Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον μ:ν.

4 καὶ 5). Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπιζευγνύεται μὲ σημεῖόν τι Μ τῆς δοθείσης εὐθείας ΒΓ, καὶ ἡ ΑΜ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε $AM:AN=\mu:\nu$, ἢ $AM \times AN=\lambda^2$· ζητεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Ν.

6 καὶ 7). Ὅμοια τοῖς ἀνωτέρω δύο ζητήμασιν ἀντικατασταθείσης τῆς εὐθείας ὑπὸ περιφερείας.

8). Δίδεται κύκλος καὶ διάμετρός τις αὐτοῦ· ἐφ᾽ ἑκάστης δὲ ἀκτῖνος λαμβάνεται μῆκος ἴσον τῇ ἀποστάσει τοῦ ἄκρου τῆς ἀκτῖνος ταύτης ἀπὸ τῆς δοθείσης διαμέτρου· τίς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἄκρων τῶν μηκῶν τούτων;

9 καὶ 10). Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπιζευγνύεται μὲ τυχὸν σημεῖον Β

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δοθείσης εὐθείας, καὶ ἐκ τοῦ Α ἄγεται εὐθεῖά τις ΑΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΒΑΓ γωνία νὰ εἶναι ἴση δοθείσῃ γωνίᾳ, καὶ προσέτι νὰ εἶναι $ΑΒ : ΑΓ = μ : ν$, ἢ $ΑΒ \times ΑΓ = λ^2$· ζητεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Γ.

11 καὶ 12). Ὅμοια ζητήματα τοῖς ἀμέσως προηγουμένοις ἀντικατασταθείσης τῆς εὐθείας ὑπὸ περιφερείας.

13 καὶ 14). Γεωμετρικὸς τρόπος τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἰσοδύναμον τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας Μ τετραγώνῳ.

15) Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ σημεῖον· ἐκ τοῦ σημείου δὲ τούτου ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τὴν προσεκβολὴν τῆς ἑτέρας· περὶ δὲ τὰ οὕτω σχηματιζόμενα τρίγωνα, τὰ κοινὴν κορυφὴν ἔχοντα τὸ δοθὲν σημεῖον, περιγράφονται κύκλοι· ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τῆς τομῆς τῶν κύκλων τούτων ;

16). Κύκλος τις κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα ὡρισμένης τινὸς διαμέτρου αὐτοῦ νὰ κεῖνται πάντοτε ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὡρισμένης τὴν θέσιν ὀρθῆς γωνίας· ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείου τινὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου ;

Γ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

1). Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας.

2). Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία, καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

3). Νὰ εὑρεθῇ ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσι τὸ τρίγωνον εἰς τρία τρίγωνα ἰσοδύναμα.

4). Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

5) Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων, νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τούτοις, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δοθέντων πολυγώνων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

7). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου νὰ εἶναι ἴση τῇ περιμέτρῳ τοῦ περὶ ἑτέραν δοθεῖσαν περιφέρειαν περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

8). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ὁμόκεντρος τῇ περιφερείᾳ τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ διαιροῦσα τοῦτον εἰς δύο μέρη ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον μ : ν.

9) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντός, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ διαιρῇ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος εἰς δύο μέρη ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον μ:ν.

10). Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 17 καὶ 13.

11). Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

12 καὶ 13). Διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο δοθεισῶν περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν ἐναπολαμβανόμενον τῆς εὐθείας μέρος νὰ εἶναι ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, ἢ νὰ τέμνηται κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.

14). Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ τρίγωνον ἴσον ἄλλῳ δοθέντι τριγώνῳ. (Ὅταν αἱ κορυφαὶ τριγώνου εἶναι ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου, τὸ πρῶτον λέγεται ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ τὸ δεύτερον περιγεγραμμένον περὶ τὸ πρῶτον).

15). Δοθέντος τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῶν περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένων τριγώνων τῶν ὁμοίων ἄλλῳ δοθέντι τριγώνῳ.

16). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ τρίγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΔΕΖ, καὶ ἔχον ἐπὶ τοῦ σημείου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τὴν ὁμόλογον τῇ Δ κορυφήν.

17 καὶ 18). Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ δοθὲν ἡμικύκλιον, ἢ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον. (Τὸ τετράγωνον πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἢ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, καὶ τὰς ἄλλας δύο ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ τῶν δύο ἄλλων τοῦ τριγώνου πλευρῶν).

19). Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ὅμοιον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῳ δοθέντι τριγώνῳ ΔΕΖ, καὶ τοιοῦτο, ὥστε τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΜΝ.

20 καὶ 21. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι ἢ τὰ τρία ὕψη.

22 καὶ 23). Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας οὕτως, ὥστε τὰ ἀποστήματα τοῦ Α ἀπὸ τῶν σημείων τῆς τομῆς νὰ ἔχωσι τὸν δοθέντα λόγον μ:ν, ἢ τὸ ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἀποστημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀπὸ τῆς εὐθείας Μ τετραγώνῳ.

24). Νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον τρεῖς κύκλοι, ὧν ἕκαστος νὰ ἐφάπτηται δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν ἄλλων δύο κύκλων ἐκτός. (Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἄνισοι οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι).

25). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα τομέα κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν δύο ἀκτίνων καὶ τοῦ τόξου τοῦ τομέως.

26). Νὰ τμηθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς δύο τμήματα οὕτως, ὥστε τὰ ἐπὶ τούτων ὡς βάσεων κατασκευαζόμενα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, καὶ τὰς κορυφὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔχοντα, νὰ εἶναι ὅμοια.

27). Δίδεται ἡμικύκλιον, ἐφ' ἑκατέρας δὲ τῶν ἀκτίνων, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γεγραμμένα δύο ἄλλα ἡμικύκλια περιεχόμενα ἐν τῷ πρώτῳ· ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

28). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι Α καὶ Β, καὶ τρίτη εὐθεῖα τέμνουσα ταύτας ἡ Γ· δίδεται δὲ καὶ τρίγωνον, τὸ ΔΕΖ· ζητεῖται νὰ λάβῃ τὸ τρίγωνον τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ Δ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Α, ἡ δὲ Ε ἐπὶ τῆς Β, καὶ ἡ Ζ ἐπὶ τῆς Γ.

29). Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΑΒΓ, καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ὧν ἑκάστη τέμνει τὰς λοιπὰς δύο, ἀλλ' οὐχὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

30). Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗ δίδονται ἡ βάσις, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν.

31) Δίδονται εὐθεῖα, κύκλος, καὶ τὸ σημεῖον Α· ζητεῖται δὲ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖόν τι Β τοιοῦτο, ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου νὰ εἶναι ἴση τῇ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐπιζευγνυούσῃ εὐθείᾳ.

32). Νὰ γραφῇ τρίγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι τριγώνῳ καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

33). Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου.

34). Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ ἐφαπτόμενος τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

35 καὶ 36). Δοθέντων δύο σημείων καὶ εὐθείας ἢ περιφερείας, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἢ τῆς περιφερείας τὸ σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ δύο δοθέντα σημεῖα σχηματίζουσι τὴν μεγίστην γωνίαν.

37). Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

38). Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων.

39). Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν δοθέντων κύκλων.

40). Νὰ γραφῇ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ τέμνῃ δίχα τὰς περιφερείας τῶν τριῶν δοθέντων κύκλων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΟΡΙΣΜΟΙ

264. Εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένων καὶ διερχομένων διὰ τοῦ ποδός της, ἤτοι τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

Εὐθεῖα λέγεται *παράλληλος ἐπιπέδῳ*, ὅταν δὲν συμπίπτῃ αὐτῷ, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσιν ἥ τε εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*, ἐὰν δὲν συμπίπτωσιν, ὅσον καὶ ἂν ἐκβληθῶσιν ἀμφότερα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

265. *Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

Διότι ἐν τῷ ὁρισμῷ τῶν παραλλήλων ὑποτίθεται ὅτι αὗται κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου τινός. Δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν αἱ δύο παράλληλοι νὰ κεῖνται ἐπὶ δύο διαφόρων ἐπιπέδων· διότι ἐὰν ληφθῇ ἓν σημεῖον ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἑτέρας, τὰ ἐπίπεδα ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ παράλληλοι, ὡς περιέχοντα τὰ τρία ληφθέντα σημεῖα, ἤτοι τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

266. *Ἐὰν δύο διάφορα ἐπίπεδα ἔχωσι κοινὰ δύο σημεῖα, θὰ ἔχωσι κοινὴν καὶ τὴν διὰ τῶν δύο τούτων σημείων διερχομένην*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὐθεῖαν μόνον δὲ τῆς εὐθείας ταύτης τὰ σημεῖα θὰ ἔχωσι κοινά.

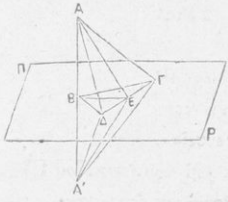
Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως εἶναι φανερὸν ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι πλὴν τῶν σημείων τῆς διὰ τῶν δύο κοινῶν σημείων διερχομένης εὐθείας ἔχουσι τὰ ἐπίπεδα καὶ ἄλλο σημεῖον κοινόν, τότε τὰ δύο ἐπίπεδα ὡς διερχόμενα διὰ τούτου καὶ δύο τῆς εὐθείας σημείων, ἤτοι διὰ τριῶν σημείων μὴ ὑπ' εὐθείας κειμένων, θὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἄλληλα καὶ ἓν μόνον θὰ ἀποτελῶσιν ἐπίπεδον(29)· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

ΟΡΙΣΜΟΣ

267. Ὅταν δύο διάφορα ἐπίπεδα ἔχωσι κοινὴν μίαν εὐθεῖαν, λέγεται ὅτι *τέμνουσιν ἄλληλα*· ἡ δὲ κοινὴ εὐθεῖα λέγεται τομὴ αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

268. *Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθειῶν τεμνομένων, κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διὰ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν διερχομένου.*



Ἐκ τινος σημείου Β τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἔν τινι ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΒ διερχομένῳ, ἡ ΒΓ, καὶ ἔν τινι ἄλλῳ ἐπιπέδῳ πάλιν διὰ τῆς ΑΒ διερχομένῳ κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΒΔ διερχομένου ἐπιπέδου ΠΡ.

Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΒΕ, καὶ διὰ δύο τυχόντων σημείων Γ καὶ Δ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἐν ᾗ περιέχεται ἡ ΒΕ, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΒΕ εἰς σημεῖόν τι Ε. Ἔπειτα ἂς ληφθῶσιν ἑκατέρωθεν τοῦ Β ἐπὶ τῆς ΑΒ δύο μήκη ἴσα ΒΑ καὶ ΒΑ', καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, Α'Γ, Α'Δ, Α'Ε.

Τῆς ΓΒ οὔσης καθέτου ἐπὶ τῆς ΑΑ' κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς Β, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ Α'Γ εἶναι ἴσαι· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ Δ=Α'Δ. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΓΔ, Α'ΓΔ ἔχουσι καὶ τὰς

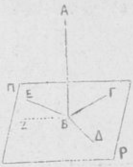
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, ἑπομένως εἶναι ἴσα· ἄρα ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΓ ἴσην τῇ Α'ΔΓ. Παραβάλλοντες ἤδη τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, Α'ΔΕ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΔ ἴσην τῇ Α'Δ, τὴν ΔΕ κοινήν, καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΕ ἴσην τῇ Α'ΔΕ· εἶναι ἄρα ἴσα, καὶ ἔχουσι καὶ τὴν πλευρὰν Α'Ε ἴσην τῇ ΑΕ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΕ ἔχει δύο σημεῖά της, τὸ Β καὶ τὸ Ε, ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Α', ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΑ', καὶ ἀντιστρόφως ἡ ΑΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσης εὐθείας διὰ τοῦ Β διερχομένης καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ κειμένης, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

269. *Πᾶσαι αἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου εὐθείας ἐπ' αὐτὴν ἀγόμεναι κάθετοι ἐν διαφόροις ἐπιπέδοις κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τῆς εὐθείας.*

Ἔστωσαν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας ΑΒ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, κτλ. περιεχόμεναι ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΕ, κτλ. λέγω ὅτι πᾶσαι αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.



Διὰ δύο τῶν εὐθειῶν τούτων, οἷον τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΒΔ, ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον, τὸ ΠΡ· λέγω ὅτι ἐν τούτῳ θὰ περιέχωνται καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι. Διότι ἐάν τις τούτων ΒΕ ὑποτεθῇ μὴ οὖσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΕ ἀγόμενον ἐπίπεδον θέλει τέμει τὸ ΠΡ κατ' εὐθεῖαν τινὰ ΒΖ, ἐφ' ἧς θὰ εἶναι κάθετος ἡ ΑΒ· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Β θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ἡ ΒΕ καὶ ἡ ΒΖ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

270. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον κατὰ τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα.*

Διότι πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β κεῖ-

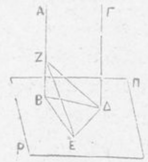
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς. Πᾶσαι δὲ αἱ κατὰ τὸ μέσον τῆς ΑΒ κάθετοι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐφ' οὗ εἶναι κάθετος ἡ ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

271. *Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου



ΠΡ, ὃ τέμνουσιν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ, καὶ κατὰ σημεῖον Δ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΔΕ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΔΕ καὶ τῆς ΒΑ δύο ἴσων μηκῶν, ΔΕ καὶ ΒΖ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ,ΖΕ,ΖΔ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, αἱ γωνίαι ΑΒΔ,ΑΒΕ,ΓΔΒ,ΓΔΕ εἶναι ὀρθαί. Τὰ δὲ τρίγωνα ΒΔΕ,ΖΒΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΒΖ, καὶ τὰς γωνίας ΖΒΔ καὶ ΒΔΕ ἴσας ὡς ὀρθάς· ἄρα ΒΕ=ΖΔ. Παραβάλλοντες ἤδη τὰ τρίγωνα ΖΒΕ,ΖΔΕ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὴν ΖΕ κοινήν, ΒΖ = ΔΕ, καὶ ΒΕ=ΖΔ· ἄρα ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν ΖΒΕ ἴσην τῇ ΖΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΖΒΕ εἶναι ὀρθή, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΖΔΕ εἶναι ὀρθή. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΔΒ,ΔΖ,ΔΓ κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τῆς ΔΕ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ ἐπιπέδῳ κεῖται καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ὡς διερχομένη διὰ δύο σημείων αὐτοῦ, τοῦ Ζ καὶ τοῦ Β. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· εἶναι δὲ καὶ κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΔ· ἄρα εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ εὐθεῖά τις ΔΕ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ποδὸς Β τῆς καθέτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθῇ τὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ μὲ τὸ Δ, ἡ ΖΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

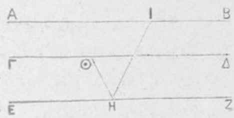
272. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ ἑτέρα δὲ τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου τινός, καὶ ἡ ἑτέρα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ (σχ. τὸ ἀνωτέρω), καὶ ἡ ἑτέρα τούτων ΑΒ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διότι γενομένης τῆς αὐτῆς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι κατασκευῆς, δεικνύεται ὡς ἐν ἐκείνῳ ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΖΒΔ, ΒΔΕ καὶ ΖΒΕ, ΖΔΕ, ἑπομένως ὅτι ἡ γωνία ΖΔΕ=ΖΒΕ=ὀρθῇ. Ἡ ΔΕ λοιπὸν ὡς κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΔΖ κειμένης ΓΔ. Ἀλλ' ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ διότι καὶ ἡ παράλληλος τῇ ΓΔ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτῆς. Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΒ καὶ τῆς ΔΕ, ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΕ, ἤτοι τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

273. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ. Ὑποτίθεται δὲ ἐνταῦθα ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη ἐν τοῖς προηγουμένοις (67).



Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Η τῆς ΕΖ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ, ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἡ ΗΙ. Ἡ ΕΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΘΗΙ· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ὡς παράλληλοι τῇ ΕΖ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ διὰ τοῦτο παράλληλοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

274. *Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ΠΡ· πρόκειται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ.

Ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ εὐθεῖά τις ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΑΔ, ἐκ δὲ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἡ ΔΕ, καὶ τέλος ἐκ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΑΕ· λέγω ὅτι αὕτη ἡ ΑΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ.

Διότι ἡ ΒΓ κάθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΔΕ καὶ τῆς ΔΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔΕ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΖΗ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΔΕ, ἑπομένως καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ. Ἡ ΑΕ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τῆς ΖΕ, εἶναι δὲ ἐκ κατασκευῆς καὶ ἐπὶ τῆς ΕΔ κάθετος· ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν ΖΕ καὶ ΕΔ, ἤτοι τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

275. *Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.*

Ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἀφ' οὗ πρόκειται νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἐφ' οὗ κεῖται.

Λαμβάνομεν τυχόν τι σημεῖον Γ μὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κείμενον, καὶ ἐκ τούτου ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὴν ΓΔ, ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΓΔ τὴν ΑΒ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (272).

Σημειωσις. Ἐκ δοθέντος σημείου μία μόνη παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄγεται· διότι τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ θὰ κεῖται ἡ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ· ἐν τῷ

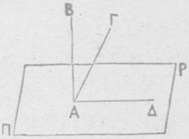
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτῷ δὲ ἐπιπέδῳ μία μόνη παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄγεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

276. *Ἀπὸ δοθέντος σημείου μία μόνη κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἄγεται, εἴτε ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, εἴτε ἐπ' αὐτοῦ τὸ δοθὲν σημεῖον εὑρίσκεται.*

Διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχουσι δύο κάθετοι ἐπ' αὐτοῦ, ἐπιζευγνυομένων τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, σχηματίζεται τρίγωνον ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ ὑπάρχουσι δύο

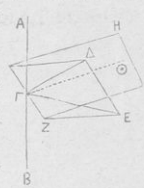


κάθετοι ἐπ' αὐτοῦ, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ, τὸ ἐπίπεδον τούτων ΒΑΓ θὰ τέμνῃ τὸ ΠΡ κατ' εὐθεῖαν τινὰ ΑΔ, ἐφ' ἧς θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου εὐθείας καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δὲν δύνανται νὰ ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπ' αὐτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

277. *Ἀπὸ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, καὶ ἓν μόνον.*

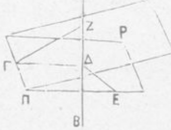
α'). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ. Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν δύο ἐπιπέδοις, ἡ ΓΔ καὶ ΓΕ· τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν τούτων, τὸ ΓΔΕ, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Λέγω ἤδη ὅτι οὐδὲν ἄλλο ἐπίπεδον διὰ τοῦ Γ διερχόμενον δύναται νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι ἂς ὑποτεθῇ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΗ κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐὰν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον ΖΗ κατ' εὐθεῖαν τινὰ ΓΘ· τότε δὲ ἐπὶ τοῦ σημείου Γ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΓΘ· ὅπερ ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β'). Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ.



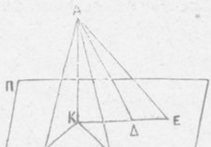
Ἐκ τοῦ σημείου Γ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ Δ ἐν ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τῆς ΑΒ ἠγμένῳ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΔΕ· τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν τούτων ΔΓ καὶ ΔΕ διερχόμενον ἐπίπεδον ΠΡ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Γ.

Πᾶν δὲ ἄλλο ἐπίπεδον διὰ τοῦ Γ διερχόμενον, οἷον τὸ ΠΣ, δὲν δύναται νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι ἐὰν ἦτο κάθετον, ἐπιζευχθέντος τοῦ σημείου Ζ, καθ' ὃ ἡ ΑΒ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΠΣ, μετὰ τοῦ Γ, θὰ ὑπῆρχον ἐκ τοῦ Γ δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ ΓΔ καὶ ΓΖ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν δύναται δὲ τὸ σημεῖον Ζ νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ Δ, διότι τότε ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ θὰ ὑπῆρχον δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' αὐτήν· ὅπερ ἀνωτέρω ἐδείχθη ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

278. *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἡ κάθετος καὶ πλάγιαι, ἡ κάθετος θὰ εἶναι βραχυτέρα πάσης πλαγίας, αἱ πλάγιαι αἱ ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀπέχουσαι θὰ εἶναι ἴσαι, καὶ ἐκ δύο πλαγίων ἄνισον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀπεχουσῶν μεγαλειτέρα θὰ εἶναι ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα*

Ἔστω ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, πλάγιαι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ. Τοῦ τριγώνου ΑΚΒ ὄντος ὀρθογωνίου κατὰ τὸ Κ, ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς ΑΚ, ἤτοι ἡ πλαγία ΑΒ εἶναι μείζων τῆς καθέτου ΑΚ. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΓ=ΚΒ, αἱ πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι ἴσαι· διότι τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΑΚΓ ἔχουσι τὴν ΑΚ κοινήν, τὴν ΚΒ ἴσην τῇ ΚΓ, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ΑΚΒ, ΑΚΓ ἴσας ὡς ὀρθάς. Ἄρα αἱ ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς Κ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶναι ἴσαι.



Ἐὰν δὲ ἡ ΚΕ εἶναι μείζων τῆς ΚΒ, ἡ πλαγία ΑΕ θὰ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

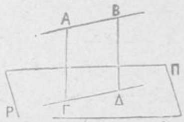
μείζων τῆς ΑΒ· διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΚΔ ἴση τῇ ΚΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ ΑΔ θὰ εἶναι ἴση τῇ ΑΒ· ἀλλὰ ΑΕ>ΑΔ· ἄρα καὶ ΑΕ>ΑΒ.

Σημειωσις. Ἀπόστημα σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου καλεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένη κάθετος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

279. *Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι παράλληλος εὐθείᾳ κειμένῃ ἐπὶ ἐπιπέδου τινός, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ΓΔ, κειμένῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ.



Διότι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔΓ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἐὰν λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ συνέπιπτε τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ, ἡ σύμπτωσις ἤθελε γίνει εἰς σημεῖόν τι τῆς εὐθείας ΓΔ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

280. *Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ πᾶν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενον καὶ τέμνον τὸ ΠΡ, τέμνει τοῦτο κατ᾿ εὐθεῖαν ΓΔ παράλληλον τῇ ΑΒ.*

Διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ΑΒ τέμνει τὴν ΓΔ, τότε θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἐφ᾿ οὗ κεῖται ἡ ΓΔ· ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἡ ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

281. *Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ, καὶ ἀπὸ σημείου τινὸς Γ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ ΓΔ, αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ.*

Διότι τὸ διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ τῆς εὐθείας ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατ᾿εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΒ·

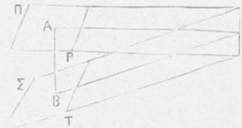
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Γ δὲν δύνανται νὰ ἀχθῶσι δύο παράλληλοι τῇ ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

282. *Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι παράλληλα.*

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΣΤ κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι παράλληλα.

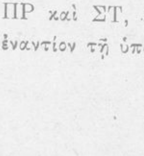


Διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνονται, καὶ σημεῖόν τι Γ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἐπιζευχθῇ μετὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, τὸ τρίγωνον ΓΑΒ θὰ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας, τὴν ΓΑΒ καὶ τὴν ΓΒΑ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

283. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ εἶναι παράλληλοι.*

Ἔστωσαν παράλληλα ἐπίπεδα τὸ ΠΡ καὶ τὸ ΣΤ, τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔΓ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.



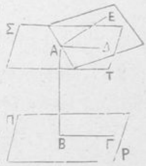
Διότι ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἵτινες κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, δὲν εἶναι παράλληλοι, ἐκβαλλόμεναι θὰ συμπέσωσιν εἰς σημεῖόν τι· τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων ΠΡ καὶ ΣΤ, ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θὰ τέμνωνται· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

284. *Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, καὶ ἓν μόνον.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Α καὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ΠΡ. Ἐκ τοῦ σημείου **Α** ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ τὴν ΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ Α ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὸ ΣΤ. Τὰ δύο ἐπίπεδα ΠΡ καὶ ΣΤ, κάθετα ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, εἶναι παράλληλα.



Δὲν ὑπάρχει δὲ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΠΡ διὰ τοῦ Α διερχόμενον. Διότι ἐὰν ὑποτεθῇ τοιοῦτο τὸ ΑΕ, ἐπίπεδόν τι διὰ τῆς ΑΒ ἀγόμενον θὰ τέμνῃ τὰ τρία ἐπίπεδα κατὰ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΑΔ, ΑΕ· κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΑΔ θὰ εἶναι ἀμφότεραι παράλληλοι τῇ ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

285. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἐπιπέδων, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου.*

Ἔστωσαν παράλληλα ἐπίπεδα τὸ ΠΡ καὶ τὸ ΣΤ (σχ. τὸ ἀνωτέρω), καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τοῦ ΠΡ· λέγω ὅτι αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ΣΤ.

Διότι ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΣΤ δὲν εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, δύναται ἐκ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὴν τὸ ΔΑΕ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τοῦτο θὰ εἶναι παράλληλον τῷ ΠΡ (282)· ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α θὰ ὑπῆρχον δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ΠΡ, τὸ ΣΤ καὶ τὸ ΔΑΕ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

286. *Δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.*

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ Γ· λέγω ὅτι εἶναι καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.

Διότι ἐὰν ἀχθῇ εὐθεῖά τις κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Γ, τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β ὡς παράλληλα τούτῳ θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, καὶ διὰ τοῦτο παράλληλα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

287. *Παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΡ καὶ ΣΤ· λέγω ὅτι ΑΒ=ΓΔ. Διότι ἐὰν διὰ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΠΡ, ΣΤ κατ' εὐθείας παραλλήλους, ΑΓ καὶ ΒΔ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ=ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

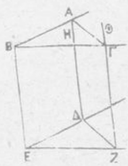
288. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Διότι ὡς κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι· παράλληλοι δὲ εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσαι·

ΘΕΩΡΗΜΑ

289. *Ἐὰν δύο γωνίαι, μὴ οὖσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διευθυνομένας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, μὴ κείμεναι ἐν αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχουσαι δὲ τὴν ΑΒ παράλληλον τῇ ΔΕ, καὶ τὴν ΒΓ παράλληλον τῇ ΕΖ, διευθυνομένας δὲ τὰς παραλλήλους πλευρὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ, καὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς πρώτης γωνίας παράλληλον τῷ τῆς δευτέρας.



Διότι ἂς ληφθῇ ΒΑ=ΕΔ, καὶ ΒΓ=ΕΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ,ΔΖ,ΒΕ,ΑΔ,ΓΖ.

Τῆς ΑΒ οὔσης ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ ΔΕ, τὸ σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΕ. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΕ. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΔ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΒΕ, ἄρα εἶναι καὶ ἀλλήλαις ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΔΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ΑΓ=ΔΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ.

Λέγω δὲ καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕΖ. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ Β παραλλήλως τῷ ΔΕΖ ἀγόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὰς εὐθείας ΔΑ καὶ ΖΓ κατὰ σημεῖα ἄλλα ἢ τὸ Α καὶ τὸ Γ, οἷον κατὰ τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Αἱ εὐθεῖαι ΗΔ καὶ ΘΖ θὰ εἶναι ἴσαι τῇ ΒΕ, ὡς παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων· ἀλλὰ καὶ ΑΔ=ΓΖ=ΒΕ· ἄρα θὰ εἶναι ΗΔ=ΑΔ, ΘΖ=ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

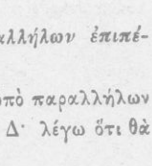
290. *Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων τεμνόντων ἄλληλα, αἱ γωνίαι ἃς σχηματίζουσιν αἱ τομαὶ τῶν πρώτων ἐπιπέδων ὑπὸ τῶν δευτέρων θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους.*

Σημειωσις. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν εἶναι μὲν παράλληλοι, ἀλλὰ δὲν διευθύνωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

291. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε, Ζ, Β, Γ, Η, Θ, Δ· λέγω ὅτι θὰ εἶναι ΑΕ : ΓΗ=ΕΖ : ΗΘ=ΖΒ : ΘΔ.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΓΔ, ἡ ΑΛ, καὶ ἔστωσαν Ι, Κ, Λ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὰ λοιπὰ ἐπίπεδα. Τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΛ ἀγόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, κατ' εὐθείας παραλλήλους, ΕΙ, ΖΚ, ΒΛ. Ἄρα εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΕ : ΑΙ=ΕΖ : ΙΚ=ΖΒ : ΚΛ.

Ἀλλὰ ΑΙ=ΓΗ, ὡς παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων· ὡσαύτως δὲ ΙΚ=ΗΘ, ΚΛ=ΘΔ. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀνωτέρω σειρᾷ ἴσων λόγων τὰς εὐθείας ΑΙ, ΙΚ, ΚΛ, διὰ τῶν ἴσων αὐταῖς ΓΗ, ΗΘ, ΘΔ, λαμβάνομεν ΑΕ : ΓΗ=ΕΖ : ΗΘ=ΖΒ : ΘΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ

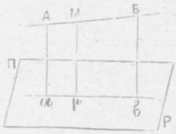
292. Καλεῖται *προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον* ὁ πούς τῆς καθέτου τῆς ἠγμένης ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Γραμμῆς δὲ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον καλεῖται γραμμὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἧς πάντα τὰ σημεῖα εἶναι προβολαὶ τῶν σημείων τῆς πρώτης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

293. *Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπίπεδον τὸ ΠΡ, μὴ περιέχον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.



Διότι ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α τῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἡ Αα, καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Αα ἐπίπεδον, τέμνον τὸ ΠΡ κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ· λέγω ὅτι ἡ προβολὴ παντὸς σημείου τῆς ΑΒ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς αβ, καὶ πᾶν σημεῖον τῆς αβ εἶναι ἡ προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ.

Διότι ἡ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος Μμ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ Αα, διὰ τοῦτο δὲ θὰ περιέχηται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑα, καὶ θὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατὰ σημεῖόν τι μ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς.

Ἀντιστρόφως δὲ καὶ ἡ ἐκ παντὸς σημείου τῆς αβ ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ συναντᾷ τὴν ΑΒ. Διότι ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς μ τῆς αβ ἀχθῇ παράλληλος τῇ Αα ἡ μΜ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ θὰ συναντᾷ τὴν ΑΒ.

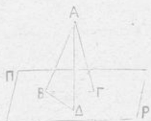
Σημειωσις. Ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦτο εἶναι ἓν μόνον σημεῖον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

294. *Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, ἡ γωνία ἣν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν εὐθειῶν τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ΒΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΔ, ἣν σχηματίζει ἡ ΑΒ μετ' εὐθείας ἄλλης οἱασδήποτε διὰ τοῦ Β διερχομένης καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ σημείου τινὸς Α τῆς ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, καὶ τὴν ΒΓ ἴσην τῇ ΒΔ, τὴν δὲ πλευρὰν ΑΓ μικροτέραν τῆς ΑΔ· διότι ἡ μὲν ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ ΑΔ πλαγία· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒΔ (71)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

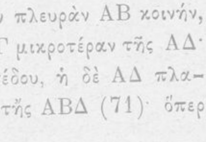
Σημειωσις. Ἡ ὀξεῖα γωνία, ἣν εὐθεῖά τις σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδόν τι, καλεῖται *κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

295. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, δύναται νὰ ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν κάθετος μία δὲ μόνη τοιαύτη ὑπάρχει, καὶ εἶναι τὸ ἐλάχιστον τῶν δύο εὐθειῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα*

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ

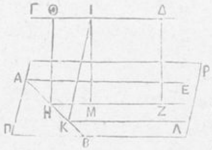
Ἐκ σημείου τινὸς Α τῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΓΔ, ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΕ ἐπίπεδον τὸ ΠΡ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι παράλληλον τῇ ΓΔ· ἔπειτα ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ΓΔ ἂς ἀχθῇ κάθετος



ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἡ ΔΖ, ἐκ δὲ τοῦ Ζ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἡ ΖΗ, καὶ τέλος ἐκ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΖΔ ἡ ΗΘ, τέμνουσα τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Θ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.



Διότι ἡ ΗΘ παράλληλος οὖσα τῇ ΖΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ διὰ τοῦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ· ὡς κάθετος δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΖ, εἶναι κάθετος καὶ καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου ταύτῃ ΓΔ.

Εἶναι δὲ ἡ ΗΘ ἡ μόνη δυνατὴ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ κοινὴ κάθετος. Διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη, ἡ ΙΚ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΚΛ τῆς παραλλήλου τῇ ΓΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ. Ἀλλ' ἡ ἐκ τοῦ Ι παράλληλος τῇ ΘΗ ἀγομένη, ἡ ΙΜ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι δύο κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, ἡ ΙΚ καὶ ἡ ΙΜ· ὅπερ ἀδύνατον.

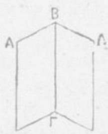
Τέλος δὲ ἡ ΗΘ εἶναι βραχυτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἐπιζευγνυούσης σημεῖόν τι τῆς ΑΒ μετά τινος σημείου τῆς ΓΔ, οἷον τῆς ΙΚ. Διότι ἡ ἐκ τοῦ Ι παράλληλος τῇ ΘΗ, ἡ ΙΜ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ διὰ τοῦτο ΙΜ $<$ ΙΚ· ἀλλὰ ΙΜ $=$ ΘΗ· ἄρα ΘΗ $<$ ΙΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ

296. Ὅταν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, τὸ σχῆμα, ὃ ἀποτελοῦσι περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν, καλεῖται *δίεδρος γωνία*.

Ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων καλεῖται *ἀκμὴ* τῆς διέδρου γωνίας, αὐτὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα ἀποτελοῦσι τὰς *ἕδρας* αὐτῆς.

Ἡ δίεδρος γωνία σημειοῦται διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ὧν τὰ



δύο τίθενται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἑκάτερον δὲ τῶν λοιπῶν δύο ἐφ' ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν· γράφονται δὲ τὰ τῆς ἀκμῆς μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Σημειοῦται προσέτι ἡ δίεδρος γωνία καὶ διὰ δύο μόνον γραμμάτων γραφομένων ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ὅταν αὕτη δὲν εἶναι κοινὴ πολλῶν διέδρων γωνιῶν. Οἷον ἡ ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι παρισταμένη δίεδρος γωνία σημειοῦται ΑΒΓΔ, ἢ ἁπλῶς ΒΓ.

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι *ἴσαι*, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἀλλήλας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δύο δίεδροι γωνίαι καλοῦνται *ἐφεξῆς*, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινήν, τὰ δὲ λοιπὰς δύο ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

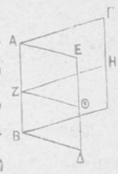
Ἡ ὑπὸ τῶν μὴ κοινῶν ἑδρῶν δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν ἀποτελουμένη δίεδρος γωνία καλεῖται *ἄθροισμα* τῶν δύο ἐκείνων διέδρων γωνιῶν.

Κατὰ κορυφὴν δὲ δίεδροι γωνίαι λέγονται, ὅταν αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι αἱ προσεκβολαὶ τῶν ἑδρῶν τῆς ἑτέρας.

Ἐὰν ἐπίπεδόν τι συναντᾷ ἄλλο ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε αἱ δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι, ἃς μετ' αὐτοῦ σχηματίζει, νὰ εἶναι ἴσαι, ἑκατέρα τούτων καλεῖται *ὀρθὴ δίεδρος γωνία*, τὸ δὲ πρῶτον τῶν δύο ἐπιπέδων *κάθετον* ἐπὶ τοῦ δευτέρου.

Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπ' αὐτήν, ἡ μὲν ἐν τῷ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ἡ δὲ ἐν τῷ ἑτέρῳ, ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουσιν αἱ εὐθεῖαι αὗται, λέγεται ἡ *ἀντίστοιχος τῇ διέδρῳ γωνίᾳ ἐπίπεδος γωνία*, ἢ καὶ *κλίσις τῶν δύο ἑδρῶν τῆς διέδρου γωνίας*.

Αἱ δὲ οὕτω σχηματιζόμεναι γωνίαι κατὰ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου γωνίας εἶναι πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις. Διότι ἔστωσαν ἡ ΑΓ καὶ ἡ ΑΕ κάθετοι ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου γωνίας ΓΑΒΔ κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἡ μὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΑΓ, ἡ δὲ ἐν τῷ ΒΑΕ, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΗ καὶ ΖΘ, κατὰ τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἀκμῆς· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΕΑΓ εἶναι ἴση τῇ ΘΖΗ. Διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΖΘ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΒΑΕ κείμεναι εἶναι παράλληλοι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΓΑΕ εἶναι ἴση τῇ ΘΖΗ, καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν τούτων παράλληλα. Σημειωτέον δὲ ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τῆς ΑΒ.



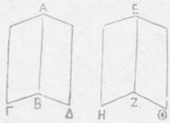
ΘΕΩΡΗΜΑ

297. *Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Ἔστωσαν δύο δίεδροι γωνίαι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΖ ὧν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΒΔ,ΗΖΘ εἶνα ἴσαι ἀλλήλαις· λέγω ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι ἐπιτεθέντος τοῦ ἐπιπέδου ΕΖΗ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ἀκμὴ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Ζ ἐπὶ τὸ Β, ἡ



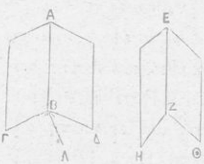
ΖΗ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΒΓ, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον ΗΖΘ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΒΔ· διότι τὸ μὲν εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΕΖ, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΕΖ ἐφήρμοσεν ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦ ἐπιπέδου ΗΖΘ ἐφαρμόσαντος ἐπὶ τὸ ΓΒΔ, καὶ τῆς ΖΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, θέλει ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΒΔ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΓΒΔ, ΗΖΘ, ἑπομένως καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΘ ἐπὶ τὸ ΑΒΔ. Ἄρα αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ ΕΖ ὡς ἐφαρμόζουσαι ἐπ' ἀλλήλας εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ὅτι δηλαδὴ ὅταν δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, εἶναι φανερά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

298. *Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι.*

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΕΖ δύο δίεδροι γωνίαι, ΓΒΔ καὶ ΗΖΘ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐταῖς ἐπίπεδοι γωνίαι· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία.



διεδρ.ΑΒ : διεδρ.ΕΖ = ΓΒΔ : ΗΖΘ.

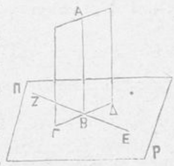
Διότι εἰς ἴσας διέδρους γωνίας ΓΒΑΛ καὶ ΗΖΕΘ ἀντιστοιχοῦσιν ἴσαι κλίσεις ΓΒΛ καὶ ΗΖΘ· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε διέδρων γωνιῶν ΓΒΑΛ, καὶ ΛΑΒΔ, ἤτοι τὴν δίεδρον ΓΑΒΔ, ἀντιστοιχεῖ κλίσις ΓΒΔ ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν κλίσεων ΓΒΛ καὶ ΛΒΔ τῶν δύο ἐκείνων διέδρων γωνιῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

299. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ τὸ ΑΒΓ, λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΠΡ.



Διότι ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς ΓΔ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ ταύτην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἡ ΕΖ. Ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ, τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κειμένης καὶ διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Β διερχομένης· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΕ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ὀρθαί, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀλλ' αἱ γωνίαι αὗται εἶναι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διέδρους γωνίας ΑΓΔΡ, ΑΓΔΠ. Ἄρα αἱ δίεδροι αὗται ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, τουτέστι τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ἵνα διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ κειμένης ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦτο, ἀρκεῖ ἐκ σημείου τινὸς Β τῆς ΓΔ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἡ ΑΒ καὶ τὸ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ διερχόμενον ἐπίπεδον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

300. *Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἑτέρου ἐπιπέδου, ἡ ἐκ σημείου τινὸς τῆς κοίνῆς αὐτῶν τομῆς ἐπὶ ταύτην ἠγμένη κάθετος ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ δευτέρου.*

Ἔστω ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ τὸ ΑΒΓ (σχ. τὸ ἀνωτέρω), καὶ ἐκ σημείου τινὸς Β τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ΓΔ κάθετος ἐπὶ ταύτην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ.

Διότι ἐὰν ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΠΡ ἐκ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΕΖ, αἱ γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ θὰ εἶναι αἱ εἰς τὰς διέδρους γωνίας ΑΓΔΡ, ΑΓΔΠ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ὑποτίθεται κάθετον ἐπὶ τοῦ ΠΡ, αἱ γωνίαι αὗται θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, διὰ τοῦτο δὲ ὀρθαί. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΒ σχηματίζει ὀρθὰς γωνίας καὶ μετὰ τῆς ΒΓ καὶ μετὰ τῆς ΒΕ· ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτων, τοῦ ΠΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ κειμένης εὐθείας ΓΔ ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοῦτο ἄγεται.

Διότι ἂν ὑποτεθῶσι ὅτι ὑπάρχουσι δύο, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β ἀχθῶσιν ἐν ἑκατέρῳ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ, αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ. Ἀλλὰ ἐκ σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου κειμένου δὲν ὑπάρχουσι δύο κάθετοι ἐπὶ τούτου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

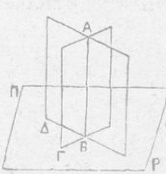
Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ καὶ ἐκ σημείου τινὸς Α τοῦ πρώτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον, αὕτη θὰ περιέχηται ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ.

Διότι ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον, δυνάμεθα ἀπὸ τοῦ Α νὰ φέρωμεν ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετον, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, κειμένη ἐν τῷ ΑΒΓ· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ ὑπάρχωσι δύο κάθετοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ· ὅπερ ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

301. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπιπέδου τινός, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἔστωσαν ἐπίπεδα τὸ ΑΓ καὶ τὸ ΑΔ τέμνοντα ἄλληλα κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, καὶ κάθετα ἀμφότερα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Διότι ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς Α τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΑΔ τομῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ· ἄρα θὰ εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ.



302. Σημειωσις. Ἐκ τοῦ πρώτου πορίσματος τοῦ ἐν ἐδαφίῳ 300 θεωρήματος ἕπεται ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Δύνανται δὲ νὰ ἀποδειχθῶσιν ἐπὶ τῶν διέδρων γωνιῶν θεωρήματα ὅμοια τοῖς ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δειχθεῖν, ἐξ ὧν ἀρκούμεθα νὰ μνημονεύσωμεν τὰ ἑξῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α') Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ ἕτερον ἐπίπεδον, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

β'). Ἡ ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης πρότασις.

γ'). Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

303. Καλεῖται *στερεὰ γωνία* τὸ σχῆμα τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ πολλῶν ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατουμένων ἑκάστου εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν προσεχῶν αὐτῷ δύο ἐπιπέδων.

Αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων καλοῦνται *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον δι' οὗ διέρχονται πᾶσαι αἱ ἀκμαί, καλεῖται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας

Τὰ ἐπίπεδα, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ στερεὰ γωνία, καλοῦνται ἕδραι αὐτῆς, αἱ δὲ γωνίαι, ἃς ἀποτελοῦσι τὰ πέρατα ἑκάστης ἕδρας, καλοῦνται καὶ αὗται ἕδραι ἢ *ἐπίπεδοι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Ἐὰν αἱ ἕδραι εἶναι τρεῖς, ἡ στερεὰ γωνία καλεῖται *τρίεδρος*.

Κυρτὴ στερεὰ γωνία λέγεται ἐκείνη, ἐν ᾗ τὸ ἐπίπεδον πάσης ἕδρας ἐκβαλλόμενον ἀφίνει ὅλον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Μόνον δὲ τοιαύτας στερεὰς γωνίας θέλομεν θεωρήσει ἐν τοῖς ἑξῆς.

Ἐὰν στερεᾶς γωνίας προσεβληθῶσι πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ πέραν τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία, ἥτις καλεῖται *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.

Οἷον τῆς στερεᾶς γωνίας ΚΑΒΓΔ συμμετρικὴ εἶναι ἡ ΚΑ'Β'Γ'Δ'.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι στερεά τις γωνία καὶ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς ἔχουσι τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς διέδρους γωνίας ἐπίσης ἴσας. Ἐν τούτοις αἱ δύο αὗται στερεαὶ γωνίαι ἐν γένει δὲν δύναται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἀλλήλας. Διότι ἐὰν ἐπιθέσωμεν τὴν ἕδραν Α'ΚΔ' ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΚΔ οὕτως, ὥστε ἀμφότεραι αἱ στερεαὶ γωνίαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς αὐτῶν

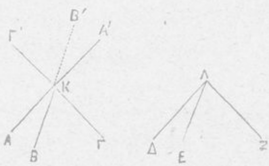
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

έδρας, αἱ ἕδραι καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι· ἐν ᾧ δηλαδὴ ἡ ἕδρα ΑΚΒ εἶναι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ΚΑΒΓΔ, ἡ ἴση αὐτῇ Α΄ΚΒ΄ θὰ εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

304. *Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην μιᾷ διέδρῳ γωνίᾳ, καὶ τὰς ἕδρας, αἵτινες σχηματίζουσι τὰς διέδρους ταύτας γωνίας, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν συστατικὰ ἴσα.*

Ἔστω ΑΚΒ=ΔΛΕ, ΒΚΓ=ΕΛΖ, καὶ ἡ δίεδρος γωνίᾳ ΚΒ. ἴση τῇ διέδρῳ γωνίᾳ ΛΕ.



Ἐφαρμόζομεν τὴν γωνίαν ΔΛΕ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΚΒ· τὸ ἐπίπεδον ΕΛΖ θὰ πέσῃ τότε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΚΓ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν ΚΒ καὶ ΛΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΕΛΖ εἶναι ἴση τῇ ΒΚΓ, ἡ ΛΖ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΚΓ. Ἄρα αἱ δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ΚΑΒΓ, ΛΔΕΖ ἐφαρμόζουσιν ἐπ᾽ ἀλλήλας, καὶ ἔχουσι πάντα τὰ συστατικὰ αὐτῶν ἴσα.

Ἐὰν δὲ ἡ τάξις τῶν ἑδρῶν εἶναι διάφορος ἐν ταῖς δύο τριέδροις γωνίαις, τότε ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τὴν συμμετρικὴν τῇ ἑτέρᾳ, καὶ ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος δεικνύεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

305. *Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην μιᾷ ἕδρᾳ, καὶ τὰς εἰς τὰς ἕδρας ταύτας προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν συστατικὰ ἴσα.*

Ἔστω ἡ γωνία ΑΚΓ ἴση τῇ ΔΛΖ (σχ. τὸ ἀνωτέρω), ἡ δίεδρος γωνία ΚΑ ἴση τῇ ΛΔ, καὶ ἡ ΚΓ τῇ ΛΖ.

Ἐφαρμόζομεν τὴν ἕδραν ΔΛΖ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΚΓ· τότε δὲ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν ΚΑ καὶ ΛΔ, ΚΓ καὶ ΛΖ, τὸ μὲν ἐπίπεδον ΔΛΕ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ ΑΚΒ, τὸ δὲ ΖΛΕ ἐπὶ τὸ ΓΚΒ, ἑπομένως καὶ ἡ ἀκμὴ ΛΕ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΚΒ Ἄρα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

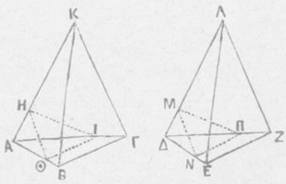
ἡ στερεὰ γωνία ΔΛΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΑΚΒΓ, ἐπομένως θὰ ἔχωσι πάντα τὰ συστατικὰ αὐτῶν ἴσα.

Ἐὰν ἡ τάξις τῶν ἑδρῶν ἦτο διάφορος εἰς τὰς δύο τριέδρους γωνίας, τότε ἠθέλομεν ἐφαρμόσει τὴν ἑτέραν ἐπὶ τὴν συμμετρικὴν τῆς ἑτέρας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

306. *Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, αἱ δίεδροι γωνίαι αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν θὰ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Ἔστω ΑΚΒ=ΔΛΕ, ΑΚΓ=ΔΛΖ, ΒΚΓ=ΕΛΖ.



Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν λαμβάνομεν ἓξ ἴσα μήκη ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΛΔ, ΛΕ, ΛΖ, καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΛΔΕ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, καὶ τὰς περιεχούσας τὰς ἴσας ταύτας γωνίας πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΚΓ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΔΛΖ, καὶ τὸ ΒΚΓ ἴσον τῷ ΕΛΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων συμπεραίνομεν ὅτι ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, καὶ ΒΓ=ΕΖ, ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΔΕΖ.

Ἤδη ἐκ τυχόντος σημείου Η τῆς ἀκμῆς ΚΑ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ΚΑΒ καὶ ΚΑΓ ἡ ΗΘ καὶ ἡ ΗΙ, αἵτινες θὰ συμπέσωσι μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ· διότι τῶν τριγώνων ΚΑΒ,ΚΑΓ ὄντων ἰσοσκελῶν, αἱ πρὸς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν γωνίαι ΚΑΒ,ΚΑΓ εἶναι ὀξεῖαι. Ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΘΙ. Ἀφοῦ δὲ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΛΔ ληφθῇ ἡ ΔΜ ἴση τῇ ΑΗ, ἂς γείνῃ κατασκευὴ ὁμοία τῇ προηγουμένῃ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΑΘ, ΜΔΝ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΗ ἴσην τῇ ΔΜ, καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΗΑΘ ἴσην τῇ ΜΔΝ, ἄρα εἶναι ἴσα, καὶ ΑΘ=ΔΝ, ΗΘ=ΜΝ. Ὁμοίως δεικνύεται διὰ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΙ, ΔΜΠ ὅτι ΑΙ = ΔΠ, καὶ ΗΙ=ΜΠ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

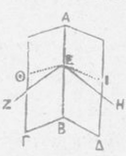
Ἤδη παραβάλλοντες τὰ τρίγωνα ΘΑΙ καὶ ΝΔΠ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὴν γωνίαν ΘΑΙ ἴσην τῇ ΝΔΠ, τὴν πλευρὰν ΑΘ ἴσην τῇ ΔΝ, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΙ ἴσην τῇ ΔΠ· ἄρα καὶ ΘΙ=ΝΠ. Τέλος δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΘΗΙ, ΝΜΠ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΗΘ=ΜΝ, ΗΙ=ΜΠ, ΘΙ=ΝΠ. Ἄρα καὶ ἡ γωνία ΘΗΙ εἶναι ἴση τῇ ΝΜΠ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διέδρους γωνίας ΚΑ καὶ ΛΔ, συμπεραίνομεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ἐὰν αἱ ἕδραι τῶν τριέδρων γωνιῶν εἶναι καὶ ὁμοίως τεταγμέναι, τότε αἱ τρίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, εἰ δὲ μή, συμμετρικαί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

307. ***Ἐὰν ἔκ τινος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἑκατέρα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕδρας, ἐφ' ἧς εἶναι κάθετος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἑτέρα ἕδρα, ἡ γωνία τῶν δύο τούτων καθέτων θὰ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ἐπιπέδου γωνίας.***

Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε τῆς ἀκμῆς ἡ



ΕΗ καὶ ἡ ΕΖ κάθετοι ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΔ, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ταύτης, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ γωνία ΖΕΗ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δίεδρον ΑΒ.

Διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΕΗ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ τέμνει τὰς ἕδρας τῆς διέδρου γωνίας κατὰ τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΙ, αἵτινες εἶναι καὶ αὐταὶ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΘΕΙ εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον ΑΒ. Ἀλλὰ τῆς ΕΗ οὔσης καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἡ γωνία ΗΕΘ εἶναι ὀρθή· δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ γωνία ΖΕΙ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἔχομεν

$$\text{ΗΕΘ} + \text{ΖΕΙ} = 2 \text{ ὀρθαῖς.}$$

Ἢ ἐπειδὴ

$$\text{ΗΕΘ} = \text{ΖΕΗ} + \text{ΖΕΘ},$$

$$\text{ΖΕΗ} + \text{ΖΕΘ} + \text{ΖΕΙ} = 2 \text{ ὀρθαῖς.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

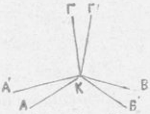
Καὶ ἀντικαθιστῶντες ΖΕΘ + ΖΕΙ διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ΘΕΙ, λαμβάνομεν

ΖΕΗ + ΘΕΙ = 2 ὀρθαῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

308. *Ἐὰν κατὰ τὴν κορυφὴν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ὑψωθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας, ἑκάστη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ εἶναι κάθετος, πρὸς ὃ καὶ ἡ τρίτη ἀκμή, ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ἀκμὰς ἔχουσα τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης, τουτέστιν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἑκατέρας τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διέδρους γωνίας τῆς ἑτέρας.*

Ἔστω τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΚΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ μὲν ΚΑ' κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΚΓ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΚΑ, ἡ δὲ ΚΒ' κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΚΓ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΚΒ, καὶ τέλος ἡ ΚΓ' κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΚΒ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΚΓ.

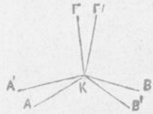


Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ γωνία Α'ΚΒ' εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΓ, ἡ Α'ΚΓ' τὸ παραπλήρωμα τῆς εἰς τὴν ΚΒ, καὶ ἡ Β'ΚΓ' τῆς εἰς τὴν ΚΑ· ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας ΚΑ'Β'Γ' εἶναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διέδρους γωνίας τῆς ΚΑΒΓ.

Ἵνα δείξωμεν ὅτι καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΚΑΒΓ εἶναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διέδρους γωνίας τῆς ΚΑ'Β'Γ', παρατηροῦμεν ὅτι ἡ Α'Κ ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΚΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΚΓ, καὶ ἡ Β'Κ ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΚΓ· ἄρα ἡ ΚΓ, ὡς κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΚΑ' καὶ ἐπὶ τῆς ΚΒ', εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α'ΚΒ'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΒ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ τούτου μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΚΓ, ἡ γωνία ΓΚΓ' εἶναι ὀξεῖα. Ἡ ΓΚ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λοιπὸν ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α΄ΚΒ΄, καὶ σχηματίζουσα



μετὰ τῆς Γ΄Κ γωνίαν ὀξεῖαν, κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Α΄ΚΒ΄, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΚΓ΄. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α΄ΚΓ΄, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ τούτου μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΚΒ΄, καὶ ὅτι ἡ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γ΄ΚΒ΄, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ τούτου μέρος, πρὸς ὃ καὶ ἡ ΚΑ΄. Ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΚΑΒΓ εἶναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διέδρους γωνίας τῆς ΚΑ΄Β΄Γ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ

309. *Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας.*

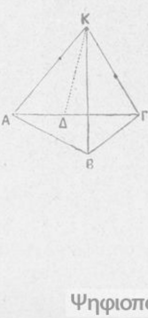
Ἔστωσαν δύο τρίεδροι γωνίαι Κ καὶ Κ΄, ἔχουσαι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, καὶ Τ, Τ΄ αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν.

Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι Κ καὶ Κ΄ ἔχουσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, αἱ Τ καὶ Τ΄ θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ἕδρας αὐτῶν. Ἔχουσαι δὲ αἱ Τ καὶ Τ΄ τὰς ἕδρας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς διέδρους των γωνίας ἴσας. Τέλος δὲ ἐπειδὴ αἱ Τ, Τ΄ ἔχουσι τὰς διέδρους των γωνίας ἴσας, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν Κ, Κ΄ θὰ ἔχωσιν τὰς ἕδρας των ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

310. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.*

Τὸ θεώρημα χρῄζει ἀποδείξεως μόνον ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἣν παραβάλλομεν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν δύο, εἶναι μείζων ἑκατέρας αὐτῶν.



Ἔστω λοιπὸν τρίεδρος γωνία ἡ ΚΑΒΓ, ἐν ᾗ ὑποτίθεται ἡ ΑΚΓ μείζων καὶ τῆς ΑΚΒ καὶ τῆς ΒΚΓ· λέγω ὅτι εἶναι $ΑΚΓ < ΑΚΒ + ΒΚΓ$.

Διότι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΓ ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΓΚΔ ἴση τῇ ΓΚΒ, καὶ ἐπιζευχθέντος σημείου τινὸς Α τῆς ΚΑ μετὰ σημείου τινὸς Γ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΓ διὰ τῆς ΑΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΚΔ εἰς σημεῖόν τι Δ, ἂς ληφθῇ ἡ ΚΒ ἴση τῇ ΚΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΒ,ΑΒ.

Τὰ τρίγωνα ΓΚΒ, ΓΚΔ ἔχουσι τὴν ΚΓ πλευρὰν κοινήν, τὴν ΚΒ ἴσην τῇ ΚΔ, καὶ τὴν γωνίαν ΓΚΒ ἴσην τῇ ΓΚΔ, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα εἶναι ἴσα, καὶ ΓΒ=ΓΔ. Ἀλλ' ἔχομεν ΑΓ$<$ΑΒ+ΒΓ. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γραμμὰς ΔΓ καὶ ΒΓ, λαμβάνομεν ΑΔ$<$ΑΒ. Ἤδη παραβάλλοντες τὰ τρίγωνα ΑΚΔ,ΑΚΒ βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΚΑ κοινήν, τὴν ΚΔ ἴσην τῇ ΚΒ, καὶ τὴν ΑΔ$<$ΑΒ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΚΔ$<$ΑΚΒ. Προσθέτοντες εἰς τὰς ἀνίσους ταύτας γωνίας τὰς ἴσας ΔΚΓ,ΒΚΓ λαμβάνομεν

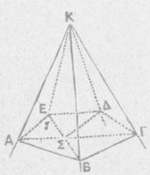
$$\text{ΑΚΔ}+\text{ΔΚΓ}<\text{ΑΚΒ}+\text{ΒΚΓ},$$

ἤτοι $\text{ΑΚΓ}<\text{ΑΚΒ}+\text{ΒΚΓ}$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

311. *Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν σχηματιζουσῶν κυρτὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.*

Ἔστω στερεὰ γωνία κυρτὴ ἡ Κ, σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΚΒ,ΒΚΓ,ΓΚΔ,ΔΚΕ,ΕΚΑ· λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι μικρότερον 4 ὀρθῶν.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδόν τι τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας κατὰ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε. Γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ ἐπίπεδόν τι διαφέρον τῶν ἐπιπέδων τῶν γωνιῶν, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ στερεὰ γωνία Κ, καὶ διὰ σημείου τινὸς Α μιᾶς τῶν ἀκμῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον αὐτῷ. Ἔπειτα ἐκ σημείου τινὸς Σ, ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ληφθέντος, ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς κορυφὰς τούτου αἱ εὐθεῖαι ΣΑ,ΣΒ,ΣΓ,ΣΔ,ΣΕ.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Κ εἶναι ἰσάριθμα τοῖς ἔχουσι κορυφὴν τὸ Σ, διὰ τοῦτο δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν πρώτων εἶναι ἴσον τῷ τῶν δευτέρων. Κατὰ τὸ σημεῖον Β τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΒΣ καὶ ΓΒΣ, ἤτοι ἡ γωνία ΑΒΓ, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΒΚ καὶ ΓΒΚ· ὁμοίως δὲ κατὰ τὸ ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖον Γ εἶναι ΒΓΣ + ΔΓΣ < ΒΓΚ + ΔΓΚ· τὸ αὐτὸ δὲ ὑπάρχει καὶ κατὰ τὰς λοιπὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Ἄρα τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς ταῖς βάσεσι γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸς ταῖς βάσεσι γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων κορυφὴν τὸ Κ· διὰ τοῦτο δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Σ γωνιῶν θὰ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περὶ τὸ Κ. Ἐπειδὴ δὲ τῶν περὶ τὸ Σ γωνιῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι 4 ὀρθαί, ἄρα τῶν περὶ τὸ Κ θὰ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

312. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν εἶναι μεγαλείτερον δύο καὶ μικρότερον ἓξ ὀρθῶν, ἑκάστη δὲ τῶν διέδρων γωνιῶν ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.*

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι τῆς δοθείσης τριέδρου γωνίας, καὶ Α, Β, Γ αἱ ἕδραι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς. Ἔχομεν

$$\alpha = 2^{\text{ὀρθ.}} - A,\quad \beta = 2^{\text{ὀρθ.}} - B,\quad \gamma = 2^{\text{ὀρθ.}} - \Gamma,$$

ὅθεν προσθέτοντες λαμβάνομεν

$$\alpha + \beta + \gamma = 6^{\text{ὀρθ.}} - (A + B + \Gamma).$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης φαίνεται ὅτι $\alpha + \beta + \gamma$ εἶναι μικρότερον ἓξ ὀρθῶν· ἐπειδὴ δὲ $A + B + \Gamma < 4$, εἶναι καὶ $\alpha + \beta + \gamma > 2$ ὀρθῶν.

Ἔχομεν δὲ καὶ $A < B + \Gamma$

ἢ ἐπειδὴ $A = 2^{\text{ὀρθ.}} - \alpha$, $B = 2^{\text{ὀρθ.}} - \beta$, $\Gamma = 2^{\text{ὀρθ.}} - \gamma$,

$$2^{\text{ὀρθ.}} - \alpha < 2^{\text{ὀρθ.}} - \beta + 2^{\text{ὀρθ.}} - \gamma.$$

Προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη $\alpha + \beta + \gamma$, καὶ ἀφαιροῦντες 2 ὀρθάς, λαμβάνομεν $\beta + \gamma < 2^{\text{ὀρθ.}} + \alpha$.

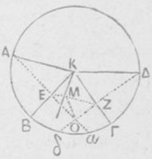
Ἡ ἀνισότης δὲ αὕτη δεικνύει τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

313. *Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν ἑκάστη εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο, καὶ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον 4 ὀρθῶν, δύναται νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

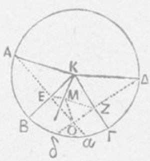
Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι γωνίαι ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ, ἃς ὑποθέτομεν κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐφεξῆς ἀλλήλαις. Ἐκ τοῦ σημείου Κ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ἃς γραφῇ περιφέρεια, καὶ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Δ ἃς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΒ καὶ τὴν ΚΓ, ἡ ΑΕ καὶ ἡ ΔΖ, αἵτινες ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὴν περιφέρειαν κατὰ τὰ σημεῖα α καὶ δ.



Ἐπειδὴ τὸ τόξον Βα εἶναι ἴσον τῷ ΑΒ, εἶναι δὲ ΑΒ<ΒΓ+ΓΔ, διότι καὶ ΑΚΒ<ΒΚΓ+ΓΚΔ, τὸ σημεῖον α θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ μεταξὺ Β καὶ Δ. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ τὸ δ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΒΑ μεταξὺ Γ καὶ Α. Λέγω δὲ ὅτι τὸ σημεῖον δ θὰ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τοῦ τόξου αΒΑ μεταξὺ α καὶ Α. Τοῦτο εἶναι φανερὸν ὅταν τὸ α κεῖται πέραν τοῦ Γ μεταξὺ Γ καὶ Δ· ὅταν δέ, ὡς ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι, τὸ α κεῖται μεταξὺ τοῦ Β καὶ Γ, πάλιν τὸ σημεῖον δ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου αΒΑ· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ κείμενον μεταξὺ α καὶ Γ, τότε θὰ εἶναι ΒΓ>Βα+Γδ ἢ ΒΓ>ΑΒ+ΓΔ· ὅθεν καὶ ΒΚΓ>ΑΚΒ+ΓΚΔ· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἐπειδὴ λοιπὸν τῆς χορδῆς Δδ τὸ μὲν ἕτερον ἄκρον δ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒα, τὸ δὲ ἕτερον Δ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ μέρους τῆς περιφερείας, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ εἶναι μικρότερον περιφερείας, αἱ χορδαὶ Αα καὶ Δδ τέμνουσιν ἀλλήλας πάντοτε εἰς σημεῖόν τι Ο ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον.

Μετὰ ταῦτα ἃς ὑψωθῇ ἐκ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν γωνιῶν ἡ ΟΜ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΟΜ ἃς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΕ, ὅστις θὰ τέμνῃ τὴν ΟΜ εἰς σημεῖόν τι Μ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΜΚ· οὕτω θέλει σχηματισθῆ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΚΒΜΓ, ἧς αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι ταῖς δοθείσαις γωνίαις. Διότι ἀχθείσης τῆς ΜΕ, τὰ τρίγωνα ΜΚΕ,ΑΚΕ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἀμφότερα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔχοντα τὴν μὲν ΚΕ κοινήν, τὴν δὲ ΕΜ ἴσην τῇ ΑΕ. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν γωνίαν ΜΚΕ ἴσην τῇ ΑΚΕ, ἤτοι τῇ ΑΚΒ. Ἀχθείσης δὲ τῆς ΜΖ, τὰ τρίγωνα ΜΚΖ, ΔΚΖ εἶναι ἴσα ὡς ἀμφότερα ὀρθογώνια κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἔχοντα τὴν μὲν ΚΖ κοινήν, τὴν δὲ ΚΜ=ΚΑ=ΚΔ· ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν γωνίαν ΜΚΖ ἴσην τῇ ΔΚΖ, ἤτοι τῇ ΔΚΓ..

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Σημειωσις Α'. Ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΒ τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας ΚΒΜΓ εἶναι ἡ γωνία ΜΕΟ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΕΟ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἡ ΕΜ, ἴση τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν καθέτων ἡ ΕΟ. Ἄρα δοθεισῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς τὴν κλίσιν δύο ἑδρῶν, οἷον τῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ θέσωμεν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἐφεξῆς, νὰ λάβωμεν ΚΔ $=$ ΚΑ, ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Δ νὰ ἀγάγωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΒ καὶ τὴν ΚΓ, καὶ νὰ σχηματίσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΑΕ, καὶ μίαν τῶν καθέτων τὴν ΕΟ· ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς τρίτης πλευρᾶς θὰ εἶναι ἡ γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΒ. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι ὅταν τὸ σημεῖον Ο πίπτῃ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς εὐθείας ΒΚ, ἢ ἐφ' ἃ εἶναι τὸ Γ, ἡ γωνία τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΕΟ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν ΚΒ.

Σημειωσις Β'. Ἵνα ἐκ τῶν τριῶν δοθεισῶν διέδρων γωνιῶν α, β, γ, σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, γνωρίζομεν (312) ὅτι ἀπαιτεῖται τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, καὶ προσέτι ἑκάστη τῶν τριέδρων γωνιῶν ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν δύο. Αἱ συνθῆκαι δὲ αὗται εἶναι καὶ ἀρκοῦσαι. Διότι τότε δύναται νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία μετὰ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$, Τῷ ὄντι τὸ ἄθροισμα $2-\alpha+(2-\beta)+(2-\gamma)$, ἢ $6-(\alpha+\beta+\gamma)$ θὰ εἶναι μικρότερον 4 ὀρθῶν, τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$ ὑπερβαίνοντος τὰς 2 ὀρθάς. Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ 4 ὀρθῶν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $2+\alpha>\beta+\gamma$, λαμβάνομεν

$$2-\alpha<(2-\beta)+(2-\gamma).$$

Ἀφοῦ δὲ σχηματισθῇ ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία μετὰ τῶν ἑδρῶν $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$, ταύτης ἡ παραπληρωματικὴ θὰ ἔχῃ διέδρους γωνίας τὰς δοθείσας α, β, γ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

314. α΄). Καλεῖται *στερεὸν πολύεδρον*, ἢ ἁπλῶς *πολύεδρον*, σῶμα περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων.

Τὰ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τεμνόμενα σχηματίζουσι, καλοῦνται *ἕδραι* τοῦ πολυέδρου· *γωνίαι* δὲ αὐτοῦ καλοῦνται αἱ στερεαὶ γωνίαι, ἃς αἱ ἕδραι σχηματίζουσι· *κορυφαὶ* αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν· *ἀκμαὶ* δὲ ἢ *πλευραὶ* τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, *διαγώνιοι* δὲ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι δύο κορυφὰς μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Καλεῖται δὲ ἰδίως *τετράεδρον* τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας, *ἑξάεδρον* τὸ ἕξ, *ὀκτάεδρον* τὸ ὀκτώ, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον· διότι τρία τοὐλάχιστον ἐπίπεδα ἀπαιτοῦνται ἵνα σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, ἵνα δὲ κλεισθῇ πανταχόθεν ὁ χῶρος, χρειάζεται καὶ τέταρτον ἐπίπεδον.

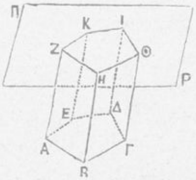
β΄). Πολύεδρον λέγεται *κυρτόν*, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον οἱασδήποτε τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἀφίνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του ὅλον τὸ στερεόν. Μόνον δὲ κυρτὰ πολύεδρα θέλομεν θεωρήσει ἐν τοῖς ἑξῆς.

Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ κυρτὸν πολύεδρον, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι πλευρά τις τούτου προσεκβαλλομένη συναντᾷ ἄλλην τινά, τότε καὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ ἡ πρώτη κεῖται, θὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ δευτέρα· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Διὰ τοῦτο δὲ καὶ εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κυρτοῦ πολυέδρου εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων.

γ΄). Καλεῖται *πρῖσμα* τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα. Ἵνα κατασκευάσωμεν πρῖσμα, λαμβάνομεν πολύγωνόν τι, οἷον τὸ



ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ πολυγώνου, τὸ ΠΡ, ἐπιζευγνύομεν τὸ σημεῖον Α μὲ σημεῖόν τι Ζ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ, καὶ ἄγομεν ἐκ τῶν λοιπῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου εὐθείας παραλλήλους τῇ ΑΖ, τεμνούσας τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατὰ τὰ σημεῖα Η,Θ,Ι,Κ, καὶ τέλος ἄγομεν τὰς εὐθείας ΖΗ,ΗΘ,ΘΙ,ΙΚ,ΚΖ.

Αἱ εὐθεῖαι ΖΑ καὶ ΒΗ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσαι, καὶ διὰ τοῦτο τὸ σχῆμα ΑΒΗΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τετράπλευρα ΒΓΘΗ,ΓΔΙΘ κτλ. Τὰ δὲ πολύγωνα ΖΗΘΙΚ καὶ ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας, καὶ τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ὡς ἀποτελουμένας ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διευθυνομένων.

δ'). Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα καλοῦνται *βάσεις* τοῦ πρίσματος, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα σχηματίζουσι τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος.

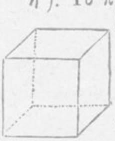
ε'). *Ὕψος* τοῦ πρίσματος λέγεται ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ, ἤτοι ἡ κάθετος ἡ ἠγμένη ἀπὸ σημείου τινὸς τῆς ἑτέρας βάσεως ἐπὶ τὴν ἑτέραν.

ς'). Τὸ πρῖσμα λέγεται *ὀρθόν*, ὅταν αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἐπιζευγνύουσι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν βάσεων, καὶ καλοῦνται ἰδίως *πλευραί*, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων· εἰ δὲ μή, τὸ πρῖσμα λέγεται *πλάγιον*.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, ἑκάστη δὲ πλευρὰ εἶναι ἴση τῷ ὕψει.

ζ'). Τὸ πρῖσμα λέγεται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικόν*, *πενταγωνικόν*, κτλ., ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον κτλ.

η'). Τὸ πρῖσμα τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα ἔχει πάσας



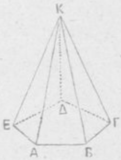
τὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ καλεῖται *παραλληλεπίπεδον*.

Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, καὶ προσέτι αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια, καλεῖται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι, τὸ στερεὸν καλεῖται *κύβος* ἢ *κανονικὸν ἑξάεδρον*.

θ'). Καλεῖται *πυραμὶς* στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ τρίγωνα βάσεις ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, καὶ κοινὴν κορυφὴν σημεῖόν τι μὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου ὑπάρχον. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται *βάσις* τῆς πυραμίδος, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, κτλ. ἀποτελοῦσι τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τῆς πυραμίδος. Τὸ σημεῖον Κ λέγεται *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος.



ι'). *Ὕψος* τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἠγμένη κάθετος.

ια'). Ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνικὴ* κτλ., ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον κτλ.

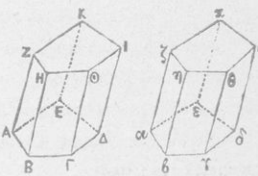
ιβ'). Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονική*, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως. Καλεῖται δὲ τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη *ἄξων* τῆς πυραμίδος.

ιγ'). Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος πάσας τὰς παραπλεύρους ἕδρας, τὸ μέρος αὐτῆς τὸ μεταξὺ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως περιλαμβανόμενον καλεῖται *κόλουρος πυραμίς*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

315. *Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα, ἐὰν αἱ τρεῖς ἕδραι αἱ σχηματίζουσαι στερεάν τινα γωνίαν τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἕδρας, αἵτινες σχηματίζουσι στερεὰν γωνίαν τοῦ δευτέρου, καὶ ὁμοίως τεταγμέναι.*

Ἔστωσαν δύο πρίσματα τὸ ΑΘ καὶ τὸ αθ, ἐν οἷς ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἕδραι αἱ σχηματίζουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν Β τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἕδρας, αἵτινες σχηματίζουσι τὴν στερεὰν γωνίαν β τοῦ δευτέρου, ἤτοι ΑΒΓΔΕ=αβγδε, ΑΒΗΖ =αβηζ, καὶ ΒΓΘΗ=βγθη· ἔτι δὲ



ὅτι αἱ ἴσαι ἕδραι εἶναι καὶ ὁμοίως τεταγμέναι· λέγω ὅτι τὸ πρῶτον πρῖσμα εἶναι ἴσον τῷ δευτέρῳ.

Ἄς ἐπιθέσωμεν τὸ πολύγωνον αβγδε ἐπὶ τὸ ἴσον αὐτῷ ΑΒΓΔΕ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα. Ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ σχηματίζουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν Β εἶναι ἴσαι μὲ τὰς σχηματιζούσας τὴν β, ἤτοι ΑΒΓ=αβγ, ΑΒΗ=αβη, καὶ ΓΒΗ =γβη, καὶ ἡ διάταξις εἶναι ἡ αὐτή, αἱ στερεαὶ γωνίαι θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπ' ἀλλήλας, καὶ ἡ βη θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΒΗ· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον αβηζ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ ΑΒΗΖ, καὶ τὸ βγθη ἐπὶ τὸ ΒΓΗΘ. Ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ηζ ἐπὶ τὴν ΗΖ, καὶ τῆς ηθ ἐπὶ τὴν ΗΘ, καὶ τὸ πολύγωνον ηθικζ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ ΗΘΙΚΖ, καὶ τὰ δύο στερεὰ θέλουσιν ἐφαρμόσει ἐπ' ἄλληλα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

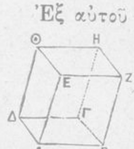
316. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.*

Διότι οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης τῇ αβ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ἴσου τῷ βη, τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΗΖ, αβηζ θὰ εἶναι ἴσα· ὁμοίως δὲ θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ὀρθογώνια ΒΓΘΗ, βγθη· ἑπομένως κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

317. *Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα.*

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ παραλληλεπιπέδου γνωρίζομεν ὅτι αἱ



βάσεις αὐτοῦ ΑΒΓΔ,ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα· πρόκειται δὲ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς παραπλεύρους ἕδρας τὰς ἀπέναντι ἀλλήλων οὔσας, οἷον τὰς ἕδρας ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΗΘ. Τῷ ὄντι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΓ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ἡ δὲ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΘ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΘΔ· ἄρα ἡ γωνία ΕΑΒ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΘΔΓ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΑΒ παράλληλον τῷ ΘΔΓ (289), ἑπομένως καὶ τὸ παραλ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ληλόγραμμον ΕΑΒΖ εἶναι ἴσον τῷ ΘΔΓΗ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΑΕΘ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον τῷ ΓΒΖΗ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθῶσι δύο οἱαιδήποτε τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν αὐτοῦ.

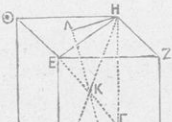
Σημειωσις. Ἐὰν δοθῶσι τρεῖς εὐθεῖαι πεπερασμέναι ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ, (σχ. τὸ ἀνωτέρω), ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐκ τοῦ ἄκρου δὲ ἑκάστης ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν λοιπῶν δύο, οἷον ἐκ τοῦ Β ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΔΑΕ, ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῷ ΔΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ Δ παράλληλον τῷ ΕΑΒ, σχηματίζεται παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι τότε ῥόμβοι. Τὸ τοιοῦτο δὲ στερεὸν καλεῖται *ῥομβόεδρον*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

318. *Τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἔστωσαν δύο διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ ἡ ΑΗ καὶ ΓΕ. Ἐὰν διὰ τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν ΑΕ, ΓΗ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὰς βάσεις κατὰ τὰς εὐθείας ΕΗ καὶ ΑΓ καὶ σχηματίζεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΗΕ, τοῦ ὁποίου διαγώνιοι εἶναι ἡ ΑΗ καὶ ἡ ΓΕ· ἄρα αὗται τέμνουσι ἀλλήλας δίχα. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἡ ΑΗ καὶ ἄλλη τις διαγώνιος, οἷον ἡ ΔΖ, τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· διότι εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΖΗ.



Σημειωσις. Πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἠγμένη καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου περατουμένη τέμνεται δίχα κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, τὸ ὁποῖον διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην καλεῖται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

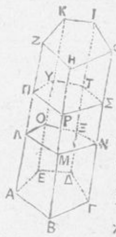
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῷ ὄντι ἔστω εὐθεῖά τις ΛΜ διὰ τοῦ κέντρου Κ τοῦ παραλληλεπιπέδου ἠγμένη, καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ περατουμένη. Ἐὰν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΗ καὶ ΛΜ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὰς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΛΗ καὶ ΑΜ, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΛΗ καὶ ΚΑΜ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΚΑ ἴσην τῇ ΚΗ, τὴν γωνίαν ΛΚΗ ἴσην τῇ ΑΚΜ, καὶ τὴν ΚΗΛ ἴσην τῇ ΚΑΜ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΜ καὶ ΗΛ. Ἄρα ΚΜ=ΚΛ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

ΘΕΩΡΗΜΑ

319. *Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι πολύγωνα ἴσα.*

Ἔστω πρῖσμα τὸ ΑΒΓΔΕΗΘ, καὶ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδων



παραλλήλων ἡ ΛΜΝΞΟ καὶ ἡ ΠΡΣΤΥ· λέγω ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Διότι αἱ πλευραὶ ΛΜ καὶ ΠΡ ὡς τομαὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΗΖ, εἶναι παράλληλοι· ἄρα τὸ σχῆμα ΛΜΡΠ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἡ ΛΜ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΠΡ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΜΝ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΡΣ, ἡ ΝΞ τῇ ΣΤ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Καὶ ἡ γωνία δὲ ΛΜΝ εἶναι ἴση τῇ ΠΡΣ, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, καὶ ἡ ΜΝΞ τῇ ΡΣΤ. κτλ. Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΛΜΝΞΟ καὶ ΠΡΣΤΥ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πᾶσα τομὴ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει εἶναι ἴση τῇ βάσει ταύτῃ.

Σημειωσις. Ἐὰν τὸ τέμνον τὸ πρῖσμα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἀκμῶν, ἡ τομὴ καλεῖται *κάθετος.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

320. *Ἰσοδύναμα* στερεὰ καλοῦνται τὰ συνιστάμενα ἐκ μερῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσων καθ' ἕν, κατὰ διάφορον ὅμως τάξιν τεταγμένων, ὥστε τὰ ὅλα νὰ μὴ δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα.

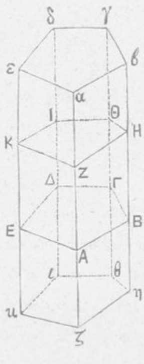
Εἰς τὰ οὕτως ὁριζόμενα ἰσοδύναμα στερεὰ ἐφαρμόζονται πάντα τὰ λεχθέντα περὶ τῶν ἰσοδυνάμων κατ' ἐπιφάνειαν ἐπιπέδων σχημάτων ἐν ἐδαφίοις 148 μέχρι καὶ 153.

Ἔπειτα γενικώτερον καλοῦμεν ἰσοδύναμα στερεὰ καὶ τὰ ὅρια στερεῶν ἰσοδυνάμων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

321. *Πᾶν πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθῷ πρίσματι ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν κάθετον ἐκείνου τομὴν ὕψος δὲ μίαν τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἀκμῶν.*

Ἔστω πρῖσμα πλάγιον τὸ ΑΒΓΔΕαϐγδε καὶ κάθετος τούτου τομὴ ἡ ΖΗΘΙΚ. Ἐὰν ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τοῦ δοθέντος πρίσματος προσεκϐληθεισῶν ληφθῶσιν Εκ=εΚ, Αζ = αΖ, Βη = ϐΗ, Γθ=γΘ, Δι=δΙ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, θὰ σχηματισθῇ πρῖσμα ὀρθὸν τὸ ΖΗΘΙΚζηθικ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν Ζζ, ἥτις εἶναι ἴση τῇ παραπλεύρῳ ἀκμῇ Αα τοῦ πλαγίου. Εἶναι δὲ Αα=Ζζ, διότι αἱ εὐθεῖαι αὗται ἔχουσι μέρος κοινὸν τὸ ΑΖ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη Ζα καὶ Αζ εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσα.



Λέγω δὲ ὅτι τὸ σχηματισθὲν ὀρθὸν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πλαγίῳ. Διότι τὰ στερεὰ ταῦτα ἔχουσι μέρος κοινὸν τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν ΖΗΘΙΚαϐγδε καὶ ΑΒΓΔΕζηθικ εἶναι ἴσα. Δεικνύεται δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ πολύγωνον ζηθικ ἐπὶ τὸ ἴσον αὐτῷ ΖΗΘΙΚ. Τότε ἡ ζΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν Ζα, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἴσαι· κατ' ἀκολουθίαν τὸ Α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ α· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὸ Β θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ ϐ, καὶ τὸ Γ ἐπὶ τὸ γ, καὶ τὸ Δ ἐπὶ τὸ δ καὶ τὸ Ε ἐπὶ τὸ ε, ὥστε τὰ δύο στερεὰ ζηθικΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘΙΚ αϐγδε θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα τὸ πλάγιον πρῖσμα καὶ τὸ ὀρθὸν ὡς συνιστάμενα ἐκ μερῶν ἴσων εἶναι ἰσοδύναμα.

Σημειωσις. Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀποδείξει ὑποτίθεται ὅτι ἡ κάθετος τομὴ οὐδετέραν τῶν βάσεων τοῦ πλαγίου πρίσματος τέμνει, ἤτοι ὅτι τὰ σημεῖα Η, Θ, Ι, Κ κεῖνται πάντα ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ πλαγίου πρίσματος. Τοῦτο γίνεται πάντοτε, ὅταν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς Αα τοῦ πρίσματος ὑπερβαίνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ,ΑΓ, ΑΔ,ΑΕ,ληφθῇ δὲ τὸ Ζ κατὰ τὸ μέσον τῆς Αα. Διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΗ, ΖΘ, ΖΙ, ΖΚ, εἶναι τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων ΑΒαβ,ΑΓαγ, ΑΔαδ, ΑΕαε, ταῦτα δὲ τὰ ὕψη πίπτουσι τότε ἐντὸς τῶν παραλληλογράμμων,ὡς εὐκόλως δεικνύεται. Ὅταν ὅμως τὸ ἥμισυ τῆς Αα δὲν ὑπερβαίνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κτλ. ἡ κάθετος τομὴ ἐξέρχεται τοῦ πρίσματος. Ἀλλὰ τότε δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος εἰς μέρη, καὶ ταῦτα νὰ λάβωμεν ὡς βάσεις πρισμάτων ἐχόντων ἄθροισμα τὸ δοθέν· τὰ δὲ μέρη τῆς βάσεως δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἱκανῶς μικρά, ὥστε τὸ ἥμισυ τῆς Αα νὰ ὑπερβαίνῃ πᾶσαν εὐθεῖαν ἐπιζευγνύουσαν δύο οἱαδήποτε σημεῖα τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων, εἰς ἃ διῃρέθη τὸ δοθέν. Τότε ἕκαστον τῶν πρισμάτων τούτων θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀντιστοιχοῦντι ὀρθῷ, καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν πρισμάτων τούτων, ἤτοι τὸ δοθὲν πρίσμα, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ὀρθῶν, ἤτοι τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τοῦ δοθέντος τομὴν καὶ ὕψος μίαν τῶν παραπλεύρων τούτων ἀκμῶν.

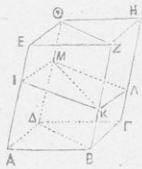
ΘΕΩΡΗΜΑ

322. *Ἐὰν διὰ δύο ἀντικειμένων παραπλεύρων ἀκμῶν παραλληλεπιπέδου ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.*

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· διὰ δύο ἀντικειμένων αὐτοῦ παραπλεύρων ἀκμῶν,τῆς ΒΖ καὶ τῆς ΔΘ,αἵτινες ὡς παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΕ εἶναι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι, ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὰς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου κατ' εὐθείας παραλλήλους τὰς ΒΔ καὶ ΖΘ. Τὸ στερεὸν ΒΔΓΖΘΗ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα· διότι τὰ τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΖΘΗ εἶναι ἴσα, ἔχουσι δὲ τὰς ἴσας πλευρὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως δὲ τὸ στερεὸν ΑΒΔΕΖΘ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, καὶ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα θὰ εἶναι ὀρθά· ὡς ἔχοντα δὲ ἴσας βάσεις ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ, θὰ εἶναι ἴσα. Ἐὰν δὲ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματά εἶναι πλάγια, δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα· διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι Α



καὶ Η σχηματίζονται μὲν ἐξ ἑδρῶν ἴσων κατὰ μίαν, ἀλλ' ἡ τάξις ἐν αὐταῖς εἶναι διάφορος. Λέγω δὲ ὅτι τότε τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τῶν δύο πρισμάτων, τὸ ΙΚΛΜ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΔΕΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι τῷ ἔχοντι βάσιν ΙΚΜ καὶ ὕψος ΒΖ, τὸ δὲ ΒΓΔΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι τῷ ἔχοντι βάσιν ΚΛΜ καὶ ὕψος ΒΖ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΙΚΜ εἶναι ἴσον τῷ ΚΛΜ, διότι ἡ ΙΜ εἶναι παράλληλος τῇ ΚΛ, καὶ ἡ ΙΚ τῇ ΜΛ, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΙΚΛΜ. Τὰ δύο λοιπὸν ὀρθὰ πρίσματα, οἷς ἰσοδύναμα εἶναι τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΕΖΘ,ΒΓΔΖΗΘ, εἶναι ἴσα ἀλλήλοις· ἄρα τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΔΕΖΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Α μὲ τὰς αὐτὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, τοῦ ἔχοντος ἑπομένως διπλασίαν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό.

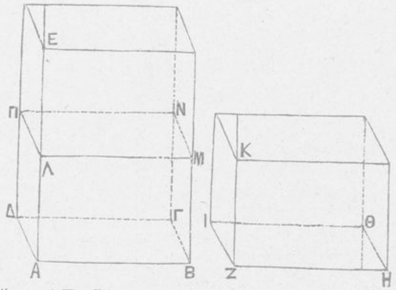
ΘΕΩΡΗΜΑ

323. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα ἴσας τὰς βάσεις εἶναι ἀνάλογα τῶν ὑψῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν ὀρθὰ πρίσματα τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ ΖΗΘΙΚ, ἴσας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχοντα τὰς βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΖΗΘΙ· λέγω ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶναι ἀνάλογα τῶν ὑψῶν αὐτῶν ΑΕ καὶ ΖΚ.



Διότι εἰς ἴσα ὕψη ΖΚ καὶ ΑΛ ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα στερεά, καὶ εἰς ἴσα στερεὰ ἴσα ὕψη· τὸ δὲ ἄθροισμα δύο τοιούτων στερεῶν ΑΒΓΔΛ καὶ ΛΜΝΠΕ τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕ, ὕψος ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν ΑΛ καὶ ΛΕ, ἤτοι ΑΕ. Ἄρα κατὰ τὴν ἐν ἐδαφίῳ 207 πρότασιν θὰ εἶναι

$$\text{ΑΒΓΔΕ} : \text{ΖΗΘΙΚ} = \text{ΑΕ} : \text{ΖΚ}$$

324. Σημειωσις. Ἐὰν τὰ πρίσματα ἔχωσι βάσεις ὀρθογώνια, δηλαδὴ ἐὰν εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, αἱ περὶ στερεάν τινα γωνίαν οἱανδήποτε ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, αἵτινες καλοῦνται *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (μῆκος, πλάτος, ὕψος) ὁρίζουσιν αὐτό. Ὡς πόρισμα δὲ τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἔχοντα ἴσας τὰς δύο διαστάσεις εἶναι ἀνάλογα τῆς τρίτης αὐτῶν διαστάσεως.

ΟΡΙΣΜΟΙ

325. Μέτρησις στερεοῦ εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου αὐτοῦ πρὸς ἕτερον στερεὸν ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.

Ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ ἀπὸ τῆς μονάδος τοῦ μήκους κύβος.

Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως στερεοῦ ἀριθμὸς καλεῖται *ὄγκος τοῦ στερεοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

326. *Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἐκ τῆς μετρήσεως τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν Α,Β,Γ αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π, καὶ α,β,γ οἱ ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῶν μὲ τὴν μονάδα Μ ἀριθμοί· λέγω ὅτι

$$\text{ὄγκος } \Pi = \alpha \times \beta \times \gamma.$$

Διότι ἔστω Π_1 τὸ τὰς διαστάσεις Α,Μ,Μ ἔχον ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον καὶ κ ὁ ἀπὸ τῆς μονάδος Μ κύβος.

Κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ 324 θεώρημα θὰ εἶναι

$$\Pi_1 : \kappa = A : M = \alpha$$

Ὄντος δὲ τοῦ λόγου $\Pi_1 : \kappa$ ἴσου τῷ ἀριθμῷ α, θὰ εἶναι

$$\Pi_1 = \kappa \times \alpha.$$

Ἂς παραβάλωμεν ἤδη τὸ τὰς διαστάσεις Α,Β,Μ ἔχον παραλληλεπίπεδον Π_2 πρὸς τὸ Π_1· θὰ ἔχωμεν·

$$\Pi_2 : \Pi_1 = B : M = \beta$$

ὅθεν $$\Pi_2 = \Pi_1 \times \beta,$$

καὶ ἀντικατασταθέντος Π_1 διὰ τοῦ ἴσου $\kappa \times \alpha$,

$$\Pi_2 = \kappa \times \alpha \times \beta.$$

Παραβάλλοντες τέλος τὸ στερεὸν Π πρὸς τὸ Π_2 ἔχομεν

$$\Pi : \Pi_2 = \Gamma : M = \gamma$$

ὅθεν $$\Pi = \Pi_2 \times \gamma$$

καὶ ἀντικατασταθέντος Π_2 διὰ τοῦ ἴσου $\kappa \times \alpha \times \beta$,

$$\Pi = \kappa \times \alpha \times \beta \times \gamma.$$

Ἡ σχέσις αὕτη δεικνύει (199) ὅτι ὁ λόγος Π : κ, ἤτοι ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\alpha \times \beta \times \gamma$· ὅ. ἔ. δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις α΄. Ἐπειδὴ $\alpha \times \beta$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἕδρας τινὸς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου, ἂν ἡ ἕδρα αὕτη ληφθῇ ὡς βάσις, ὕψος θὰ εἶναι ἡ τρίτη ἀκμή, ἧς τὸ μῆκος παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ γ, τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς·

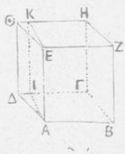
Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Σημειωσις β΄. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, οὗ ἡ πλευρὰ μετρηθεῖσα μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν α, εἶναι τὸ γινόμενον $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἤτοι α^3. Διὰ τοῦτο ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ ἐκλήθη *κύβος* αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

327. *Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

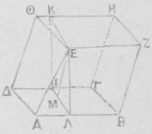
Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐδείχθη ἀνωτέρω διὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· ὑπολείπεται ἤδη νὰ δειχθῇ καὶ διὰ πᾶν ἄλλο μὴ ὀρθογώνιον.



α΄.) Ἔστω ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, ἔχον βάσιν τὸ ῥομβοειδὲς ΑΒΓΔ, καὶ ὕψος τὴν εὐθεῖαν ΑΕ. Ἐκ σημείου τινὸς Α τῆς ἀκμῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ταύτην. Ἡ ὑπὸ τούτου τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἡ ΑΙΚΕ, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον· διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου τούτου, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ ΕΑ ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΑΙ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ δοθὲν στερεὸν ΑΗ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ἔχοντι βάσιν ΑΙΚΕ καὶ ὕψος ΑΒ (321). Τὸ παραλληλεπίπεδον δὲ τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ βάσις αὐτοῦ ΑΙΚΕ εἶναι ὀρθογώνιον· ἐπομένως ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $AB \times AI \times AE$. Ἄρα καὶ τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος εἶναι $AB \times AI \times AE$. Ἐπειδὴ δὲ $AB \times AI$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ὁ ὄγκος οὗτος δύναται νὰ παρασταθῇ δι᾽ $AB\Gamma\Delta \times AE$, ἤτοι διὰ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β'.) Ἔστω πλάγιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, οὗ βάσις εἶναι τὸ ῥομβοειδὲς ΑΒΓΔ. Ἐκ τινος σημείου Ε τῆς ἀκμῆς τῆς ἑτέρας τῶν βάσεων αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην. Τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, τῷ ἔχοντι βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΕΚΙΛ καὶ ὕψος τὴν ΕΖ.



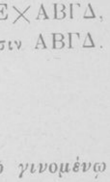
Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Ε ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ ἡ ΕΜ, αὕτη θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τε παραλληλεπιπέδου ΑΗ, καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΚΙΛ· διότι θὰ περιέχηται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΚΙΛ, καὶ ὡς κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τῆς ΛΙ. Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι λοιπὸν ΜΕ×ΛΙ×ΕΖ, ἢ ΜΕ×ΛΙ×ΑΒ. Καὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἄρα, ὡς ἰσοδυνάμου τῷ ὀρθῷ, ὁ ὄγκος εἶναι ΜΕ×ΛΙ×ΑΒ, ἢ ἐπειδὴ ΛΙ×ΑΒ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ΜΕ×ΑΒΓΔ, ἤτοι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΜΕ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

328. *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

α'.) Τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα, τὸ ἔχον βάσιν Β καὶ ὕψος Υ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ ἔχοντος διπλασίαν βάσιν, ἤτοι 2Β, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ Υ (322, πόρ.). Τούτου δὲ ὁ ὄγκος εἶναι 2Β×Υ. Ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 2Β×Υ, ἤτοι Β×Υ, δηλονότι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

β'.) Πᾶν πολυγωνικὸν πρῖσμα, οἷον τὸ ΑΙ, δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς τριγωνικὰ πρίσματα δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἔκ τινος παραπλεύρου αὐτοῦ ἀκμῆς ΑΖ καὶ πασῶν τῶν λοιπῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, ἐξαιρουμένων τῶν ΒΗ καὶ ΚΕ, αἵτινες κεῖνται ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς καὶ ἡ ΑΖ ἕδρας. Τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα ἔχουσι βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος, καὶ ὕψη ἴσα τῷ τοῦ πρίσματος, ὅπερ ὕψος ἂς παρασταθῇ διὰ τοῦ Υ. Τῶν τριγωνικῶν δὲ τούτων



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρισμάτων ὁ ὄγκος εἶναι ΑΒΓ×Υ, ΑΓΔ×Υ, ΑΔΕ×Υ. Ἄρα τοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος εἶναι ΑΒΓ×Υ + ΑΓΔ×Υ + ΑΔΕ×Υ = (ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ) × Υ = ΑΒΓΔΕ×Υ, τουτέστιν ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Δύο πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα.

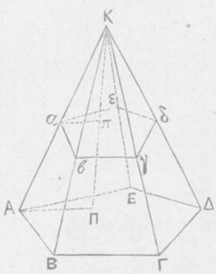
ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Δύο πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἄνισα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των· δύο δὲ πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἀνίσους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των.

ΘΕΩΡΗΜΑ

329. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ δὲ τομὴ αὐτῆς εἶναι πολύγωνον ὅμοιον τῇ βάσει.*

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔΕΚ, καὶ τομὴ ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει ἡ αβγδε.



Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αβ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ αβγ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΑΒ. Δι᾽ ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ βγ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἡ γδ τῇ ΓΔ, κτλ. καὶ ἡ απ τῇ ΑΠ. Ἄρα εἶναι ΚΑ:Κα = ΚΒ:Κβ = ΚΓ:Κγ = . . . = = ΚΠ : Κπ.

Προσέτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ αβγ, διότι αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι καὶ διευθύνονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ἴση τῇ βγδ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Αἱ περιέχουσαι δὲ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ τῶν πολυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γώνων ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ἀνάλογοι. Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΑΒ, Καβ ἔχομεν

$$ΑΒ : αβ = ΚΒ : Κβ\cdot$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΒΓ, Κβγ

$$ΒΓ : Βγ = ΚΒ : Κβ$$

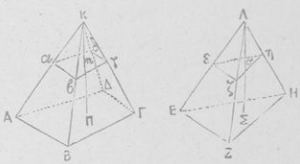
ὅθεν
$$ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ.$$

Ἄρα τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ

330. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων ταῖς βάσεσι καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν βάσεων.*

Ἔστωσαν πυραμίδες ἡ ΚΑΒΓΔ καὶ ΛΕΖΗ, ἔχουσαι ἴσα ὕψη, ΚΠ καὶ ΛΣ, καὶ τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων ταῖς βάσεσιν, καὶ εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἴσας, Κπ καὶ Λσ, ἡ αβγδ καὶ ἡ εζη· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία



$$ΑΒΓΔ : ΕΖΗ = αβγδ : εζη.$$

Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν τὰς ἀναλογίας

$$ΑΒ : αβ = ΚΠ : Κπ$$

$$ΕΖ : εζ = ΛΣ : Λσ.$$

Ἐπειδὴ δὲ ΚΠ=ΛΣ, καὶ Κπ=Λσ, οἱ δύο τελευταῖοι λόγοι τῶν προηγουμένων ἀναλογιῶν εἶναι ἴσοι· ἄρα ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒ : αβ = ΕΖ : εζ,$$

καὶ ἐκ ταύτης
$$(ΑΒ)^2 : (αβ)^2 = (ΕΖ)^2 : (εζ)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ, αβγδ εἶναι ὅμοια, ὁμολόγους

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευρὰς ἔχοντα ΑΒ καὶ αβ, καὶ τὰ ΕΖΗ, εζη ὡσαύτως ὅμοια, ὁμολόγους πλευρὰς ἔχοντα ΕΖ καὶ εζ, ἔχομεν

$$ΑΒΓΔ : αβγδ = (ΑΒ)^2 : (αβ)^2$$

$$ΕΖΗ \ : εζη = (ΕΖ)^2 : (εζ)^2 .$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεύτεροι λόγοι τῶν ἀναλογιῶν τούτων κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι ἴσοι, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒΓΔ : αβγδ = ΕΖΗ : εζη,$$

ὅθεν μεταθέσει τῶν μέσων λαμβάνομεν

$$ΑΒΓΔ : ΕΖΗ = αβγδ : εζη\text{· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

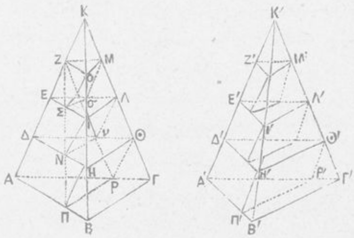
ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐὰν δύο ἰσοϋψῶν πυραμίδων αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων ταῖς βάσεσι καὶ ἴσον ἀπ' αὐτῶν ἀπεχόντων θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

331. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΚΑΒΓ, Κ'Α'Β'Γ', ἔχουσαι τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, καὶ τὰ ὕψη ἴσα, λέγω ὅτι πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.



Ἄς τεθῶσιν αἱ βάσεις τῶν δύο πυραμίδων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀφοῦ διαιρεθῇ μία τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, οἷον ἡ ΚΑ, εἰς ἴσα μέρη, ἄς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως Δ,Ε,Ζ ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων. Αἱ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου γινόμεναι τῶν δύο πυραμίδων τομαί, ΔΗΘ καὶ Δ'Η'Θ, ΕΙΛ καὶ Ε'Ι'Λ' κτλ. θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Μετὰ ταῦτα ἐκ τῶν κορυφῶν Η, Θ τῆς τομῆς ΔΗΘ ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΚΑ, αἵτινες τέμνουσι τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΒ καὶ τὴν ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Π,Ρ. Τὸ τρίγωνον ΠΑΡ θὰ εἶναι ἴσον τῷ ΗΔΘ, διότι ΑΠ=ΔΗ, ΑΡ=ΔΘ, καὶ ἡ γωνία ΠΑΡ ἴση τῇ ΗΔΘ. Αἱ δὲ ἴσαι πλευραὶ τῶν ἴσων τούτων τριγώνων εἶναι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ στερεὸν ΑΠΡΔΗΘ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα, τὰς βάσεις ἔχον ἴσας τῇ τομῇ ΔΗΘ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζομεν ὑφ' ἑκάστην τῶν τομῶν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχον ταύτην ὡς βάσιν, τὰς δὲ παραπλεύρους ἀκμὰς παραλλήλους τῇ ΚΑ, καὶ περατουμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς προηγουμένης τομῆς. Τὸ αὐτὸ δὲ πράττομεν καὶ εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα.

Τούτων γενομένων, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῖσμα ΑΠΡΔΗΘ, ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι, εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πρίσματι Α'Π'Ρ'Δ'Η'Θ', ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ δευτέρᾳ· διότι τὰ πρίσματα ταῦτα ἔχουσιν ἰσοδυνάμους βάσεις ΔΗΔ,Δ'Η'Θ', καὶ ὕψη ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὸ δεύτερον ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐγγεγραμμένῳ δευτέρῳ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τρίτῳ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι ἐγγεγραμμένων πρισμάτων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ.

Λέγω ἤδη ὅτι ἑκατέρα τῶν πυραμίδων εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένων πρισμάτων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον. Διότι τῶν εὐθειῶν ΚΖ, ΟΣ, ΙΝ, ΗΠ οὐσῶν παραλλήλων καὶ ἴσων ἀλλήλαις, ὡς ἴσων ταῖς ΚΖ,ΖΕ,ΕΔ, ΔΑ, ἡ διὰ τῶν σημείων Ζ καὶ Π ἀγομένη εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τῶν σημείων Σ καὶ Ν. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ρ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τῶν σημείων ν καὶ σ.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΠΡΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρισμάτων, ὡς ἀποτελουμένη ἐκ μερῶν τούτων· ἄρα ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρισμάτων καὶ τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ ἐν ᾗ εἶναι ἐγγεγραμμένα, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ΚΑΒΓ καὶ ΖΑΠΡ. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τούτων, ἤτοι τὸ στερεὸν ΚΒΓΖΠΡ εἶναι μικρότερον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν ΚΒΓ, καὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς ἴσας καὶ παραλλήλους τῇ ΖΚ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῖσμα τοῦτο τείνει εἰς τὸ μηδέν, διότι ἡ μὲν βάσις αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητος, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ ΚΖ, διαιρουμένης τῆς ΚΑ εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ἱκανῶς μέγαν, δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας,

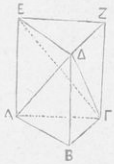
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

συμπεραίνομεν ὅτι ὅριον τῆς πυραμίδος ΖΑΠΡ, καὶ πολλῷ μᾶλλον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρισμάτων, εἶναι ἡ πυραμὶς ΚΑΒΓ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς Κ'Α'Β'Γ' εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένων πρισμάτων. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι ἐγγεγραμμένων πρισμάτων εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ πυραμίδι ἐγγεγραμμένων, βλέπομεν ὅτι αἱ πυραμίδες ΚΑΒΓ, καὶ ΚΑ'Β'Γ' εἶναι ὅρια ἰσοδυνάμων στερεῶν, ἐπομένως ἰσοδύναμοι κατὰ τὸν ὁρισμόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

332. *Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος.*

Ἔστω τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ τριγωνικὸν πρῖσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἔχον βάσιν τὴν τῆς πυραμίδος, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ὕψος τὸ αὐτό· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ.



Διότι ἀφαιρουμένης ἀπὸ τοῦ πρίσματος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ὑπολείπεται τὸ στερεὸν ΔΑΓΖΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΖΕ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Γ, ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὴν πυραμίδα ΔΑΓΖΕ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΔΑΓΕ καὶ ΔΖΓΕ, αἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι· διότι ἔχουσι τὰς βάσεις των ΑΓΕ καὶ ΖΓΕ ἴσας, ὡς ἡμίση τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ὕψος κοινὸν τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων ἠγμένην κάθετον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΔΖΓΕ εἶναι ἰσοδύναμος καὶ τῇ ΑΒΓΔ· διότι ἐὰν ὡς βάσεις τούτων ληφθῶσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τὰ ὕψη των θὰ εἶναι ἴσα, ὡς κάθετοι ἠγμένα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ἡ πυραμὶς ΔΑΓΕ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ ΔΖΓΕ, καὶ αὕτη ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΔ· ἄρα αἱ τρεῖς πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἰσοδύναμοι ἀλλήλαις· διὰ τοῦτο δὲ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος ἴσα τοῖς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

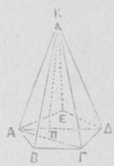
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

333. *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι ἴσος τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*

Ἂς λάβωμεν κατὰ πρῶτον τριγωνικὴν πυραμίδα, ἧς ἡ βάσις ἔστω Β καὶ τὸ ὕψος Υ. Τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν Β καὶ ὕψος Υ ὁ ὄγκος εἶναι $Β \times Υ$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{1}{3}Β \times Υ$.

Ἂς λάβωμεν δεύτερον πολυγωνικὴν πυραμίδα, τὴν ΚΑΒΓΔΕ· Ἐὰν ἡ βάσις διαιρεθῇ διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ εἰς τρίγωνα, καὶ διὰ τῆς κορυφῆς Κ καὶ τῶν διαγωνίων τούτων ἀχθῶσιν ἐπίπεδα, ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, αἵτινες βάσεις ἔχουσι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ, καὶ ὕψος κοινὸν τὴν ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ ἠγμένην κάθετον ΚΠ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος καὶ τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος. Οἱ ὄγκοι τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων εἶναι



$$\frac{1}{3}ΑΒΓ \times ΚΠ, \frac{1}{3}ΑΓΔ \times ΚΠ, \frac{1}{3}ΑΔΕ \times ΚΠ.$$

Ἄρα τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος ὁ ὄγκος εἶναι

$$\frac{1}{3}ΑΒΓ \times ΚΠ + \frac{1}{3}ΑΓΔ \times ΚΠ + \frac{1}{3}ΑΔΕ \times ΚΠ$$

ἢ

$$\frac{1}{3}(ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ) \times ΚΠ,$$

τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τὸ ὕψος ΚΠ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος βάσιν ἴσην ἢ ἰσοδύναμον τῇ τῆς πυραμίδος καὶ ὕψος ἴσον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Δύο πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους εἶναι ἀνά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

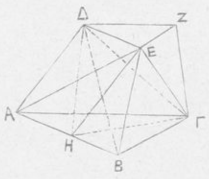
λογοι πρὸς τὰ ὕψη αὐτῶν, δύο δὲ πυραμίδες ἔχουσαι ἴσα ὕψη εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν.

Σημειωσις. Ἵνα μετρήσωμεν τὸν ὄγκον πολυέδρου δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς πυραμίδας, ἐχούσας βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ πολυέδρου ληφθέν, ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστης τῶν πυραμίδων, καὶ ἔπειτα νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

334. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἡ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς πυραμίδος τῆς ἐχούσης βάσιν τὴν τομὴν ὑπολειπομένη κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ὕψος μὲν ἔχουσι κοινὸν τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων ταύτης, ἡ δὲ τὴν ἑτέραν, ἡ δὲ μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.*

Ἔστω κατὰ πρῶτον κόλουρος πυραμὶς τριγωνικὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖ, ἧς αἱ βάσεις ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι παράλληλοι. Διὰ τῶν σημείων Ε, Α, Γ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον, καὶ διὰ τῶν σημείων Ε, Δ, Γ ἄλλο ἐπίπεδον. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διαιροῦσι τὴν κόλουρον πυραμίδα εἰς τρεῖς τριγωνικὰς πυραμίδας, ΕΑΒΓ, ΕΔΖΓ, ΕΑΔΓ. Τούτων ἡ πρώτη ΕΑΒΓ ἔχει βάσιν μὲ τὴν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἤτοι τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος. Ἡ δὲ δευτέρα ΔΕΖΓ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΔΕΖ, ὕψος δὲ καὶ αὐτὴ τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος. Ἡ δὲ τρίτη πυραμὶς ΕΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι τῇ ἐχούσῃ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν καὶ ἡ ΕΑΔΓ, τὴν ΑΔΓ, τὴν δὲ κορυφήν της εἰς τὸ σημεῖον Η, καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ Ε ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΔ τέμνει τὴν ΑΒ. Διότι τῆς ΕΗ οὔσης παραλλήλου τῇ ΑΔ, διὰ τοῦτο δὲ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΔΑΓ, αἱ ἐκ τῶν σημείων Ε καὶ Η ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κάθετοι θὰ εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες ΕΑΔΓ, ΗΑΔΓ ὡς ἔχουσαι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ'



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ πυραμὶς ΗΑΔΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἔχει βάσιν τὴν ΑΗΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ, ἑπομένως ὕψος ἴσον τῷ τῆς κολούρου πυραμίδος. Λέγω δὲ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΗΓ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Γ, τὰς δὲ βάσεις των ΑΒ καὶ ΑΗ ἐπ' εὐθείας· ἔχουσι λοιπὸν τὸ αὐτὸ ὕψος· ἄρα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις των, ἤτοι ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$ΑΒΓ : ΑΗΓ = ΑΒ : ΑΗ \qquad (1)$$

Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΗΓ, ΕΔΖ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΗΑΓ ἴσην τῇ ΕΔΖ. Ἐὰν δὲ ἐπιθέσωμεν τὸ τρίγωνον ΕΔΖ ἐπὶ τὸ ΑΗΓ ἐφαρμόζοντες τὴν ΕΔ ἐπὶ τὴν ΗΑ καὶ τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἐπὶ τὴν ΗΑΓ, ἡ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ΑΓ. Τότε δὲ τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἔχωσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Η καὶ τὰς βάσεις των ΑΓ καὶ ΔΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ἄρα θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν βάσεων αὐτῶν, ἤτοι θὰ εἶναι

$$ΑΗΓ : ΔΕΖ = ΑΓ : ΔΖ. \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχομεν

$$ΑΒ : ΔΕ = ΑΓ : ΔΖ$$

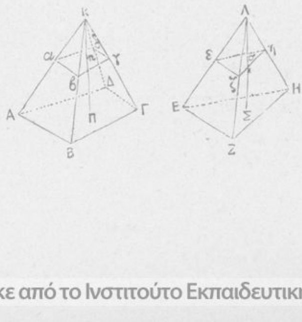
ἢ

$$ΑΒ : ΑΗ = ΑΓ : ΔΖ.$$

Ἡ ἀναλογία αὕτη δεικνύει ὅτι τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) οἱ δεύτεροι λόγοι εἶναι ἴσοι· ἄρα ἐκ τῶν πρώτων σχηματίζεται ἡ ἀναλογία $ΑΒΓ : ΑΗΓ = ΑΗΓ : ΔΕΖ$, ἥτις δεικνύει ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Ἄρα ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ ἐδείχθη ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων, αἵτινες πᾶσαι ἔχουσι κοινὸν ὕψος τὸ τῆς κολούρου, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων ταύτης, τὴν ΑΒΓ, ἡ δὲ τὴν ἑτέραν ΔΕΖ, ἡ δὲ τρίτη μέσην ἀνάλογον τούτων, τὴν ΑΗΓ.

Ἔστω ἤδη κόλουρος πυραμὶς πολυγωνικὴ ἡ ΑΒΓΔαβγδ, ἥτις ἐσχηματίσθη τμηθείσης τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τοῦ αβγ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔ, τὸ



ΕΖΗ, καὶ ἐπὶ τούτου ὡς βάσεως τριγωνικὴν πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος ἴσον τῷ τῆς πολυγωνικῆς, τὴν ΛΕΖΗ. Αἱ δύο πυραμίδες ΚΑΒΓΔ καὶ ΛΕΖΗ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Τὸ δὲ ἐπίπεδον αϐγ ἐκϐαλλόμενον τέμνει τὴν δευτέραν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον εζη, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ αϐγδ (330 πόρ.). Διὰ τοῦτο καὶ ἡ πυραμὶς Καϐγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ Λεζη. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν ἰσοδυνάμων πυραμίδων ΚΑΒΓΔ, ΛΕΖΗ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἰσοδύναμοι πυραμίδες Καϐγδ, Λεζη, τὰ ὑπολειπόμενα στερεά, ἤτοι αἱ κόλουροι πυραμίδες ΑΒΓΔαϐγδ καὶ ΕΖΗεζη θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἄρα ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔαϐγδ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν ὕψος μὲν ὅσον καὶ αὐτή, βάσεις δὲ ἡ μὲν ΕΖΗ, ἡ δὲ εζη, ἡ δὲ μέσην ἀνάλογον τούτων. Ἀλλ' αἱ τρεῖς αὗται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ταῖς ἐχούσαις τὸ αὐτὸ ὕψος, βάσεις δὲ ΑΒΓΔ, αϐγδ, καὶ τὴν μέσην τούτων ἀνάλογον. Ἄρα κτλ.

Σημειωσις. Ἔστωσαν Β καὶ ϐ αἱ δύο βάσεις κολούρου πυραμίδος ὑποτιθέμεναι παράλληλοι, καὶ Υ τὸ ὕψος αὐτῆς. Ὁ ὄγκος αὐτῆς Σ θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\Upsilon\times B+\frac{1}{3}\Upsilon\times ϐ+\frac{1}{3}\Upsilon\times\sqrt{B\times ϐ}$,

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{3}\Upsilon\times(B+ϐ+\sqrt{B\times ϐ}).$$

Ὁ τύπος οὗτος δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ· διότι ἐὰν καλέσωμεν Α καὶ α δύο ὁμολόγους πλευρὰς τῶν δύο βάσεων Β καὶ ϐ, ἐπειδὴ αὗται εἶναι ὅμοιαι, θὰ εἶναι $B : ϐ = A^2 : \alpha^2$· ὅθεν

$$ϐ=B\times\frac{\alpha^2}{A^2},\quad \sqrt{B\times ϐ}=\sqrt{B^2\times\frac{\alpha^2}{A^2}}=B\times\frac{\alpha}{A}.$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ $\Sigma=\frac{1}{3}\Upsilon\times(B+ϐ+\sqrt{B\times ϐ})$ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ ϐ καὶ $\sqrt{B\times ϐ}$ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς λαμβάνομεν

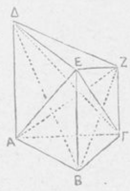
$$\Sigma=\frac{1}{3}\Upsilon\times B\left(1+\frac{\alpha}{A}+\frac{\alpha^2}{A^2}\right)\cdot$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

335. *Ἐὰν τριγωνικὸν πρῖσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως περιεχόμενον στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται κολοβὸν πρῖσμα, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τρεῖς πυραμίδας, βάσιν κοινὴν ἐχούσας τὴν τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς τῆς τομῆς κορυφάς.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω κολοβὸν πρῖσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ, καὶ βάσις μὲν αὐτοῦ ἡ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου τῇ βάσει τομὴ ἡ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τρεῖς πυραμίδας ἐχούσας βάσιν κοινὴν τὴν ΑΒΓ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Ε, Δ, Ζ.



Διότι διὰ τῶν σημείων Ε, Α, Γ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον· τοῦτο ἀποτέμνει ἀπὸ τοῦ στερεοῦ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἧς βάσιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Ε.

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς πυραμίδος ταύτης ὑπολείπεται ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΓΖΔ, ἧς Ε εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ ΑΓΖΔ ἡ βάσις. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων Ε, Γ, Δ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς, τὴν ΕΑΓΔ καὶ τὴν ΕΔΖΓ. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι ΔΑΒΓ, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουσι κοινὴν βάσιν τὴν ΑΔΓ, τὰς δὲ κορυφάς των ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ, παραλλήλου τῇ βάσει, ὡς παραλλήλου τῇ ΑΔ, διὰ τοῦτο δὲ ἔχουσι καὶ ὕψη ἴσα. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΔΑΒΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἄρα ἡ δευτέρα πυραμὶς ΕΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι τῇ ἐχούσῃ βάσιν τὴν τοῦ πρίσματος, καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἡ τρίτη τέλος πυραμὶς ΕΔΖΓ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πυραμίδι ΖΑΒΓ. Διότι τῶν πυραμίδων τούτων βάσεις δύνανται νὰ ληφθῶσι τὰ τρίγωνα ΖΓΔ, ΖΓΑ· ταῦτα δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι ἡ ΖΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΔ· ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμα. Καὶ τὰ ὕψη δὲ τῶν πυραμίδων εἶναι ἴσα, διότι αἱ κορυφαὶ Ε καὶ Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως. Ἀλλὰ τῆς πυραμίδος ΖΑΒΓ δύναται νὰ ληφθῇ βάσις ἡ ΑΒΓ καὶ κορυφὴ τὸ Ζ. Ἐδείχθη ἄρα ὅτι τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τρεῖς πυραμίδας ἐχούσας βάσιν κοινὴν τὴν ΑΒΓ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ$\times$(ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ).

Παντὸς δὲ κολοβοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος τῷ τρίτῳ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γινομένου τῆς καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτοῦ παραπλεύρων ἀκμῶν.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

336. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* πρὸς ἐπίπεδόν τι, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας καὶ τέμνῃ ταύτην δίχα.

Δύο γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἑτέρας ἔχωσι τὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμμετρικά των ἐπὶ τῆς ἑτέρας. Δύο δὲ σώματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Τὸ ἐπίπεδον, πρὸς ὃ δύο σχήματα εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων, καλεῖται *ἐπίπεδον συμμετρίας*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

337. *Τὸ πρὸς ἐπίπεδον συμμετρικὸν σχῆμα γραμμῆς εὐθείας εἶναι ὡσαύτως γραμμὴ εὐθεῖα.*

Λέγω ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχουσι τὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ συμμετρικά των ἐπὶ ἑτέρας τινὸς εὐθείας.

Ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἡ ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ, καὶ ἐπὶ τῶν προσεκβολῶν αὐτῶν ἂς ληφθῶσι ΓΑ′=ΓΑ, ΔΒ′=ΔΒ, καὶ διὰ τῶν σημείων, Α′ Β′ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα Α′Β′. Τὰ σημεῖα Α′, Β′ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων Α, Β. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον Μ τῆς ΑΒ, ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τῆς Α′Β′. Διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ΑΑ′, ΒΒ′ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

συμμετρίας ΠΡ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἐπομένως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, αὕτη θὰ τέμνῃ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΓΔ, καὶ ἐκβαλλομένη θὰ τέμνῃ τὴν Α'Β' εἰς σημεῖόν τι Μ', τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ. Διότι ἐὰν στρέψωμεν τὸ τετράπλευρον ΓΔΒΑ περὶ τὴν ΓΔ, ἵνα ἐφαρμόσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ ΓΔΒ'Α', ἡ ΓΑ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΓΑ', διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΔΓΑ καὶ ΔΓΑ', καὶ τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΓΑ'. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ ΔΒ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν ΔΒ'. Ἄρα καὶ ἡ ΑΒ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὴν Α'Β'. Ἡ δὲ ΕΜ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΓΕΜ καὶ ΓΕΜ' θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΕΜ· ἄρα τὸ σημεῖον Μ θὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τῆς ΕΜ' καὶ ἐπὶ τῆς Α'Β'· ἄρα θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Μ'. Εἶναι λοιπὸν ΕΜ=ΕΜ', καὶ τοῦ σημείου Μ τὸ συμμετρικὸν εἶναι τὸ Μ'.

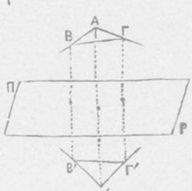
ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ἐπιζευγνύουσα δύο σημεῖα **Α** *καὶ* **Β**, *εἶναι ἴση τῇ εὐθείᾳ Α'Β', τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν Α' καὶ Β'.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

338. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι σχηματίζωσι γωνίαν, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν πρὸς ἐπίπεδον θὰ σχηματίζωσι γωνίαν ἴσην ἐκείνῃ.*

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ, σχηματίζουσαι γωνίαν τὴν ΒΑΓ· ἔστω δὲ ἡ συμμετρικὴ τῆς ΑΒ εὐθείας ἡ Α'Β', καὶ τῆς ΑΓ ἡ Α'Γ'. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α σημεῖον πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Β'Α' καὶ ἐπὶ τῆς Α'Γ, εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Α'. Ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ, ὧν τὰ συμμετρικὰ ἔστωσαν Β' καὶ Γ', καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Β'Γ'.



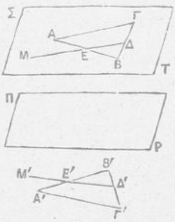
Τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουσιν ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ' καὶ ΒΓ=Β'Γ'· ἄρα εἶναι ἴσα, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση τῇ Β'Α'Γ'· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

339. *Τοῦ ἐπιπέδου τὸ συμμετρικὸν σχῆμα εἶναι ἄλλο ἐπίπεδον.*

Λέγω ὅτι τοῦ ἐπιπέδου ΣΤ τὸ συμμετρικὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ εἶναι ἄλλο τι ἐπίπεδον.



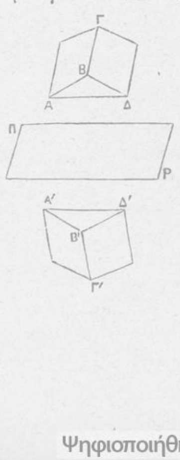
Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΤ ἂς ληφθῶσι τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, οἷον τὰ σημεῖα Α, Β, Γ· τὰ δὲ συμμετρικὰ τούτων ἔστωσαν τὰ Α', Β', Γ'· λέγω ὅτι ἐὰν διὰ τῶν σημείων Α', Β', Γ' ἀχθῇ ἐπίπεδον, πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ΣΤ θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν σημείων Α', Β', Γ' διερχομένου ἐπιπέδου.

Διότι ἡ τὸ σημεῖον Μ μετά τινος σημείου ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κειμένου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα θὰ τέμνῃ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, ὧν τὰ συμμετρικὰ ἔστωσαν Δ' καὶ Ε'. Τὸ σημεῖον Μ, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε διερχομένης εὐθείας, θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του Μ' ἐπὶ τῆς διὰ τῶν σημείων Δ' καὶ Ε' διερχομένης εὐθείας. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει πάντα τὰ σημεῖά της ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν σημείων Α', Β', Γ' διερχομένου ἐπιπέδου, ἄρα καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ σημεῖον Μ' θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

340. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα σχηματίζωσι δίεδρον γωνίαν, καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν θὰ σχηματίζωσι δίεδρον γωνίαν ἴσην ἐκείνῃ.*

Ἔστωσαν ἐπίπεδα τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ΔΒΓ σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν ΒΓ· καὶ τὰ συμμετρικὰ τούτων Α'Β'Γ' καὶ Δ'Β'Γ' σχηματίζοντα τὴν δίεδρον γωνίαν Β'Γ'· λέγω ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι ἴσαι.



Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα τῆς ἀκμῆς ΒΓ, ἐπειδὴ θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων Α'Β'Γ' καὶ Δ'Β'Γ' εἶναι ἡ ἀκμὴ Β'Γ'.

Ἂς τμηθῇ ἤδη ἡ δίεδρος γωνία ΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς ΑΒΔ, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία κατὰ τὸ Β· ἔστωσαν δὲ αἱ συμμετρικαὶ τῶν ἀκμῶν ΒΑ καὶ ΒΔ, ἡ

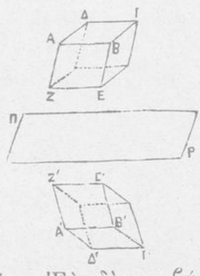
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'Α' καὶ ἡ Β'Δ'. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, αἵτινες σχηματίζουσι τὰς κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Β' τριέδρους γωνίας, εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΑΒΓ=Α'Β'Γ',ΔΒΓ=Δ'Β'Γ',ΑΒΔ=Α'Β'Δ' (338). Ἄρα καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΒΓ εἶναι ἴση τῇ διέδρῳ Β'Γ'(306)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

341. *Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα πολυέδρου πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἕτερον πολύεδρον, ἔχον τὰς ἕδρας ἴσας ταῖς τοῦ πρώτου, κατὰ μίαν, τὰς δὲ στερεὰς γωνίας συμμετρικὰς τῶν τοῦ πρώτου.*

Ἔστω πολύεδρον τὸ ΑΒΓΔΕ, τοῦ ὁποίου θέλομεν θεωρήσει τὸ συμμετρικὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ.



Τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (339). Θὰ εἶναι δὲ καὶ ΑΒ =Α'Β',ΒΓ=Β'Γ',ΓΔ=Γ'Δ', ΑΔ=Α'Δ' (337), καὶ αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι (338)· ἄρα ἡ ἕδρα Α'Β'Γ'Δ' θὰ εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓΔ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου ΑΒΓΔΕ θὰ ἔχῃ συμμετρικὴν ἐπιφάνειαν πολυέδρου,συγκειμένην ἐξ ἑδρῶν ἴσων ταῖς τοῦ πρώτου κατὰ μίαν. Ἐὰν δὲ παραβάλωμεν τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας τῶν δύο τούτων πολυέδρων, οἷον τὴν Β καὶ τὴν Β',βλέπομεν ὅτι αὗται θὰ ἔχωσι τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν, ἔτι δὲ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας (340). Ἀλλ' ἡ τάξις θὰ εἶναι διάφορος εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας· διότι ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν γωνίαν Α'Β'Ε', ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒΕ οὕτως, ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ, αἱ ἕδραι αὐτῶν θὰ εἶναι ἀντιστρόφως διατεταγμέναι. Ἄρα ἡ στερεὰ γωνία Β' εἶναι συμμετρικὴ τῆς Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Δύο συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδον πολύεδρα δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα.

Διότι αἱ πολύεδροι αὐτῶν γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ συμμετρικαί. Τοῦτο δὲ δεικνύεται καὶ ἄλλως· διότι ἐὰν ἐφαρμόσωμεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν ἕδραν Α′Β′Ε′Ζ′ ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ ΑΒΕΖ, τὰ δύο στερεὰ θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς αὐτῶν ἕδρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β′.

Πάντα τὰ πολύεδρα, τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου πρὸς διάφορα ἐπίπεδα, εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο πολύεδρα Π′, Π′′ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου Μ πρὸς δύο διάφορα ἐπίπεδα. Τὰ πολύεδρα Π′ καὶ Π′′ θὰ ἔχωσι τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν, ὡς ἴσας ταῖς τοῦ Π· ἔτι δὲ θὰ ἔχωσι τὰς στερεάς των γωνίας ἴσας, διότι αἱ τῇ αὐτῇ στερεᾷ γωνίᾳ συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Ἄρα τὰ δύο πολύεδρα Π′, Π′′ δύνανται ἐπιτιθέμενα νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἄλληλα· ἄρα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Σημειωσις Δύο πολύεδρα ἔχοντα τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς στερεὰς αὐτῶν γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν σχηματιζομένας, συμμετρικάς, λέγονται πάντοτε *συμμετρικά*, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις αὐτῶν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι δύο τοιαῦτα πολύεδρα δύνανται νὰ λάβωσι τοιαύτην θέσιν πρὸς ἐπίπεδόν τι, ὥστε τὸ ἕτερον νὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ἑτέρου. Διότι δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ δεύτερον ἐπὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρώτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

342. *Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας συμμετρικὰς ἀλλήλων ἀνὰ δύο.*

Ἂς τεθῶσι τὰ δύο συμμετρικὰ πολύεδρα Π, Π′ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδόν τι ΜΝ, ἂς ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι Σ ἐντὸς τοῦ πολυέδρου Π, καὶ ἔστω Σ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ ἐν τῷ δευτέρῳ. Ἐὰν ἀχθῶσιν ἐπίπεδα ἐκ τοῦ σημείου Σ καὶ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου Π, τὸ πολύεδρον τοῦτο θὰ διαιρεθῇ εἰς τόσας πυραμίδας, ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι αὐτοῦ. Ἐὰν τὸ αὐτὸ γείνῃ καὶ εἰς τὸ δεύτερον πολύεδρον Π′, ἀγομένων ἐπιπέδων διὰ τοῦ σημείου Σ′ καὶ ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τοῦ Π′, τὰ δύο πο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

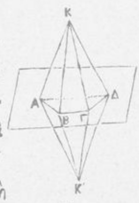
λύεδρα θὰ εἶναι διῃρημένα εἰς ἴσον ἀριθμὸν πυραμίδων, αἵτινες ἀνὰ δύο θὰ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Σημειωσις. Ἐὰν αἱ ἴσαι ἕδραι τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων ὁμολόγων, καὶ διὰ τῶν σημείων Σ, Σ΄, καὶ τῶν διαγωνίων τούτων ἀχθῶσιν ἐπίπεδα, τὰ δύο πολύεδρα θὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους τριγωνικὰς πυραμίδας συμμετρικὰς ἀνὰ δύο ἀλλήλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

343. *Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα ἔχουσιν ἴσους ὄγκους.*

Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον δύο πυραμίδας συμμετρικάς. Ἀφοῦ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' ἀλλήλας τὰς βάσεις αὐτῶν, αἱ κορυφαί των θὰ εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒΓΔ. Διότι ἐὰν λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ Κ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τὸ Κ΄, καὶ κατασκευάσωμεν πυραμίδα ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Κ΄ καὶ βάσιν τὴν ΑΒΓΔ, αὕτη θὰ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΚΑΒΓΔ, ἑπομένως θὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ, ἥτις εἶναι συμμετρικὴ τῆς αὐτῆς. Ἀλλ' αἱ πυραμίδες ΚΑΒΓΔ, Κ΄ΑΒΓΔ ἔχουσιν ἴσους ὄγκους ὡς ἔχουσαι τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψη ἴσα τὰς ἀπὸ τοῦ Κ καὶ τοῦ Κ΄ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καθέτους.



Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη δύο πολύεδρα οἱαδήποτε συμμετρικὰ ἀλλήλων. Ταῦτα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας συμμετρικὰς ἀνὰ δύο. Ἐπειδὴ δὲ αἱ συμμετρικαὶ πυραμίδες ἔχουσιν ἴσους ὄγκους ἄρα καὶ τὰ πολύεδρα, ὡς ἀθροίσματα ἴσων τὸν ὄγκον στερεῶν, θὰ ἔχωσιν ἴσους ὄγκους.

ΟΡΙΣΜΟΙ

344. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ πρὸς σημεῖόν τι*, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τῆς τὰ δύο ἐκεῖνα σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.

Δύο γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται συμμετρικαὶ πρὸς σημεῖόν τι, ὅταν πάντα τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ση-

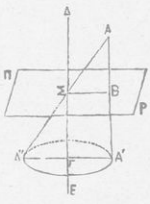
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖα τῆς ἑτέρας κεῖνται ἐπὶ τῆς ἑτέρας. Δύο δὲ στερεὰ καλοῦνται συμμετρικὰ πρὸς σημεῖόν τι, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

345. *Ἐὰν δύο πολύεδρα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδόν τι, δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς σημεῖόν τι τοῦ ἐπιπέδου τὸ τυχόν. Καὶ ἐὰν δύο πολύεδρα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς σημεῖόν τι, δύνανται νὰ λάβωσι τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδόν τι διὰ τοῦ σημείου ἀχθέν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Α′ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα δύο πολυέδρων Π καὶ Π′, συμμετρικῶν πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, καὶ Σ τυχόν τι σημεῖον τούτου.



Ἐκ τοῦ σημείου Σ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἡ ΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α′ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ Α′Γ, ἂς ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΣ, καὶ ἂς προσεκβληθῇ μέχρις οὗ συμπέσῃ τῇ προσεκβολῇ τῆς Α′Γ κατὰ τὸ Α″. Ἡ Α″Γ θὰ εἶναι ἴση τῇ Α′Γ. Διότι ἐπιζευχθέντος τοῦ σημείου Σ μετὰ τοῦ σημείου Β, καθ' ὃ ἡ ΑΑ′ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, διὰ τῆς εὐθείας ΣΒ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΣΒ, ΣΑ″Γ θὰ ἔχωσι τὴν ΒΑ = Α′Β = ΓΣ, ὡς πλευρὰς ἀπέναντι τοῦ ὀρθογωνίου ΣΒΑ′Γ, τὰς γωνίας ΑΒΣ καὶ ΣΓΑ″ ἴσας ἀλλήλαις ὡς ὀρθάς, καὶ τὰς γωνίας ΣΑΒ, Α″ΣΓ ὡσαύτως ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΑ′ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΑ″. Τὰ δύο λοιπὸν ταῦτα τρίγωνα ΛΣΒ καὶ ΣΑ″Γ θὰ εἶναι ἴσα, καὶ θὰ εἶναι Α″Γ = ΣΒ = Α′Γ, καὶ Α″Σ = ΑΣ. Ἄρα τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α πρὸς τὸ σημεῖον Σ θὰ εἶναι τὸ Α″. Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΑΑ′ στρέφεται περὶ τὴν ΔΕ· ἡ Α′Γ καθετος οὖσα ἐπὶ τῆς ΕΔ, ἐν πάσαις ταῖς θέσεσιν αὐτῆς, θέλει γράψει ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ ἀφοῦ τὸ σημεῖον Α′ γράψῃ ἥμισυ περιφερείας, θὰ πέσῃ ἐπὶ τὸ Α″. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ τὸ πολύεδρον Π′ τηρῇ πάντοτε τὴν αὐτὴν θέσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΑ′Γ, καὶ πᾶν ἄλλο ση-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεῖον Ζ τοῦ πολυέδρου Π' θέλει γράψει ἡμίσειαν περιφέρειαν, καὶ θέλει πέσει ἐπὶ τὸ συμμετρικόν του πρὸς τὸ σημεῖον Σ. Διότι ἡ ἐκ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος θὰ γράψῃ ἐπίπεδον, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ θὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ ΔΕΑ πάντοτε τὴν αὐτὴν δίεδρον γωνίαν, ὅταν τὸ σημεῖον Α' γράψῃ ἡμιπεριφέρειαν, καὶ τὸ Ζ θέλει γράψει ὡσαύτως ἡμιπεριφέρειαν, καὶ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ συμμετρικόν του πρὸς τὸ σημεῖον Σ. Ἄρα τὸ πολύεδρον Π' μετὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Π ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Σ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἔχωμεν δύο πολύεδρα Π καὶ Π', συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον Σ, καὶ διὰ τοῦ Σ ἀχθῇ ἐπίπεδόν τι, καὶ κάθετος ἐπὶ τοῦτο διὰ τοῦ Σ διερχομένη, περιστρέψωμεν δὲ τὸ Π' περὶ τὴν κάθετον ταύτην μέχρις οὗ σημεῖόν τι αὐτοῦ γράψῃ ἡμιπεριφέρειαν, τὸ Π' θὰ γείνῃ συμμετρικὸν τοῦ Π πρὸς τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα δοθέντος σχήματος πρὸς σημεῖον εἶναι ἴσον τῷ συμμετρικῷ τοῦ αὐτοῦ σχήματος πρὸς ἐπίπεδον, καὶ τἀνάπαλιν.

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

346. Δύο πολύεδρα καλοῦνται ὅμοια ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας των ἴσας τὸ πλῆθος, καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας.

Αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων καλοῦνται ὁμόλογοι, ὁμοίως καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν κορυφαὶ ὁμόλογοι,

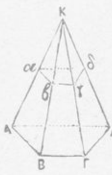
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι δύο ὁμολόγους κορυφὰς εὐθεῖαι ὁμόλογοι, καὶ αἱ ὅμοιαι ἕδραι ὁμόλογοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

347. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ἡ ἀποτεμνομένη πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ ὅλῃ.*

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΚΑΒΓΔ, καὶ τομὴ ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει ΑΒΓΔ ἡ αβγδ· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς Καβγδ εἶναι ὁμοία τῇ ΚΑΒΓΔ.



Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ (329). Τῆς δὲ αβ οὔσης παραλλήλου τῇ ΑΒ, τὸ τρίγωνον Καβ εἶναι ὅμοιον τῷ ΚΑΒ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τρίγωνον Κβγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΚΒΓ, τὸ Κγδ τῷ ΚΓΔ, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα αἱ πυραμίδες Καβγδ, καὶ ΚΑΒΓΔ ἔχουσι τὰς ἕδρας ὁμοίας κατὰ μίαν.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, οἷον ἡ β εἶναι ἴση τῇ Β. Διότι αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ πρώτη, εἶναι ἴσαι ταῖς ἐπιπέδοις γωνίαις, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ δευτέρα, ἡ αβγ τῇ ΑΒΓ, ἡ αβΚ τῇ ΑΒΚ, καὶ γβΚ τῇ ΓΒΚ· εἶναι δὲ καὶ ὁμοίως τεταγμέναι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ τῶν λοιπῶν στερεῶν γωνιῶν γ καὶ Γ, Δ καὶ δ, Α καὶ α. Ὡς πρὸς τὴν στερεὰν δὲ γωνίαν Κ, αὕτη εἶναι κοινὴ τῶν δύο πυραμίδων.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι πυραμίδες Καβγ, ΚΑΒΓΔ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ὁμοίας κατὰ μίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοιαι.

Σημειωσις. Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων πυραμίδων εἶναι ἀνάλογοι. Διότι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν αὐτῶν λαμβάνομεν ΑΒ:αβ=ΒΓ : βγ=ΓΔ : γδ=ΑΔ : αδ=ΚΑ : Κα=ΚΒ : Κβ κτλ.

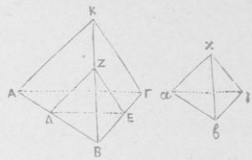
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

348. *Νὰ κατασκευασθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς ὁμοία τῇ δοθείσῃ τριγωνικῇ πυραμίδι.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ ΚΑΒΓ. Κατασκευάζομεν κατὰ πρῶτον τρίγωνον ὅμοιον μιᾷ τῶν ἑδρῶν τῆς ΚΒΑΓ πυραμίδος, οἷον τῇ ΑΒΓ, τὸ αβγ· ἔπειτα διὰ τῆς αβ ἄγομεν ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ αβγ δίεδρον γωνίαν ἴσην τῇ ΚΑΒΓ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἄγομεν ἐκ τοῦ β εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς αβ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΒΚ, καὶ ἐκ τοῦ α εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς αβ γωνίαν ἴσην τῇ ΒΑΚ, καὶ τὸ σημεῖον κ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἐπιζευγνύομεν μετὰ τοῦ γ· οὕτω σχηματίζεται τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ καβγ, ἥτις εἶναι ὁμοία τῇ ΚΑΒΓ. Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΑ ἡ ΒΔ ἴση τῇ βα, καὶ ἐκ τοῦ Δ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΓ καὶ τῇ ΑΚ, ἡ ΔΕ καὶ ΔΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΕ. Τὸ ἐπίπεδον ΖΔΕ εἶναι παράλληλον τῷ ΚΑΓ (228)· ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ πυραμὶς ΖΔΒΕ εἶναι ὁμοία τῇ ΚΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς καβγ εἶναι ἴση τῇ ΖΔΒΕ. Διότι τῆς αβ οὔσης ἴσης τῇ ΑΒ, τῆς γωνίας ΔΒΕ τῇ αβγ, καὶ τῆς ΒΔΕ = ΒΑΓ=βαγ, τὸ τρίγωνον ΔΒΕ εἶναι ἴσον τῷ αβγ. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ τὸ τρίγωνον καβ εἶναι ἴσον τῷ ΖΔΒ. Ἐὰν δὲ ἐπιθέσωμεν τὸ αβγ τρίγωνον ἐπὶ τὸ ἴσον αὐτῷ ΔΒΕ, τὸ ἐπίπεδον καβ θέλει πέσει ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚΑΒ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒ καὶ αβ, καὶ τὸ τρίγωνον καβ θέλει ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸ ΖΔΒ, καὶ ἡ πυραμὶς καβγ ἐπὶ τὴν ΚΔΒΕ. Ἄρα ἡ πυραμὶς καβγ ἴση οὖσα τῇ ΖΔΒΕ, ἥτις εἶναι ὁμοία τῇ ΚΑΒΓ, θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ὁμοία ταύτῃ.



Σημειωσις. Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀποδείξει ἐδείχθη τὸ ἑξῆς θεώρημα. *Ἐὰν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην μιᾷ διέδρῳ γωνίᾳ, τὰς δὲ περιεχούσας τὰς ἴσας διέδρους γωνίας ἕδρας ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

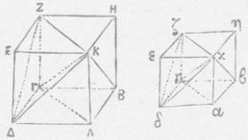
349. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύεδρον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυέδρῳ.*

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύεδρον τὸ ΚΓ· ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ πολύεδρον ὅμοιον τούτῳ.

Ἂς διαιρεθῶσι πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ ΚΓ πολυέδρου εἰς τρίγωνα, πλὴν τῶν ἀποτελουσῶν τὴν στερεὰν γωνίαν Κ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ καὶ τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαιροῦντα τὸ στερεὸν ΚΓ εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΚΑΒΓ, ΚΑΓΔ, ΚΓΔΖ, ΚΔΕΖ κτλ. ἔπειτα ἂς κατασκευασθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς ὁμοία τῇ ΚΑΒΓ ἡ καβγ, καὶ ἐπὶ τῆς καγ ἕδρας, τῆς



ὁμοίας τῇ ΚΑΓ, τριγωνικὴ πυραμὶς ὁμοία τῇ ΚΑΓΔ καὶ ὁμοίως κειμένη ἡ καγδ, καὶ ἐπὶ τῆς κγδ, ὁμοίας τῇ ΚΓΔ, τριγωνικὴ πυραμὶς ὁμοία τῇ ΚΓΔΖ καὶ ὁμοίως κειμένη, ἡ κγδζ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ σχηματισθῶσι τόσαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσαι κορυφὴν τὸ κ, ὅσαι καὶ αἱ τὸ Κ. Λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματισθὲν στερεὸν κγ εἶναι ὅμοιον τῷ ΚΓ.

Διότι ἐκ κατασκευῆς τὰ τρίγωνα τὰ ἀποτελοῦντα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου κγ εἶναι ὅμοια τοῖς ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΚΓ. Ἐὰν δὲ δύο προσεχῆ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΑΓ ἐν τῷ πολυέδρῳ ΚΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν αβγ, δαγ θὰ κεῖνται ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· διότι ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων ἡ δίεδρος γωνία ΚΑΓΒ εἶναι ἴση τῇ καγβ, καὶ ἡ ΚΑΓΔ τῇ καγδ· ἐπειδὴ δὲ τῶν ΚΑΓΒ, ΚΑΓΔ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον δύο ὀρθαῖς διέδροις γωνίαις, ἄρα καὶ τῶν ἴσων αὐταῖς καγβ, καγδ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἴσον δύο ὀρθαῖς, ἑπομένως τὰ τρίγωνα αβγ καὶ αγδ θὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν πάντα τὰ τρίγωνα τὰ σχηματίζοντα ἕδραν τινὰ τοῦ πολυέδρου ΚΓ, τὴν ΑΒΓΔ, τὰ ὁμόλογα αὐτοῖς τρίγωνα θὰ σχηματίζωσιν ἕδραν ὁμοίαν τῇ ΑΒΓΔ, τὴν αβγδ, ὡς συγκειμένην ἐκ τριγώνων ἴσων τὸ πλῆθος, ὁμοίων καθ' ἕν, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένων. Ἄρα αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου κγ θὰ εἶναι ὅμοιαι ταῖς τοῦ ΚΓ.

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν δύο ὁμολόγους διέδρους γωνίας τῶν δύο στερεῶν, οἷον τὴν ΑΚ καὶ τὴν ακ, αὗται θὰ εἶναι ἴσαι· διότι ἡ δίεδρος γωνία ΑΚ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν ΒΑΚΓ καὶ ΔΑΚΓ, καὶ ἡ ακ ἄθροισμα τῶν βακγ καὶ δακγ· καὶ ἐπειδὴ ΒΑΚΓ $=$ βακγ, καὶ ΔΑΚΓ $=$ δακγ, ἄρα καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΑΚ θὰ εἶναι ἴση τῇ ακ.

Ἐκ τῶν δειχθέντων δὲ ἕπεται ὅτι δύο ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι οἷον ἡ Α καὶ ἡ α εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἴσων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνιῶν σχηματιζομένας διέδρους γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως τεταγμένας.

Ἄρα τὰ πολύεδρα ΚΓ καὶ κγ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ὁμοίας κατὰ μίαν, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν ἀποτελουμένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Σημειωσις Ἐν τῇ ἀνωτέρω ἀποδείξει ἐδείχθη τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Δύο πολύεδρα συγκείμενα ἐκ τριγωνικῶν πυραμίδων ὁμοίων κατὰ μίαν καὶ ὁμοίως τεταγμένων εἶναι ὅμοια.

ΘΕΩΡΗΜΑ

350. *Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ἴσας τὸ πλῆθος, ὁμοίας κατὰ μίαν, καὶ ὁμοίας τεταγμένας.*

Ἂς διαιρεθῶσι πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ πρώτου πολυέδρου, (σχῆμ. τὸ ἀπέναντι) πλὴν τῶν σχηματιζουσῶν στερεάν τινα γωνίαν Κ, εἰς τρίγωνα, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τοῦ δευτέρου πολυέδρου εἰς τρίγωνα ὅμοια τοῖς πρώτοις καθ' ἓν (226), καὶ δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ τῶν ὁμολόγων κορυφῶν Κ καὶ κ καὶ τῶν πλευρῶν τῶν σχηματισθέντων τριγώνων ἂς διαιρεθῶσι τὰ δύο πολύεδρα εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Λέγω ὅτι αἱ τριγωνικαὶ πυραμίδες, εἰς ἃς διῃρέθη τὸ πρῶτον πολύεδρον, θὰ εἶναι ὅμοιαι ταῖς τριγωνικαῖς πυραμίσιν, εἰς ἃς διῃρέθη τὸ δεύτερον.

Διότι ἐὰν παραβάλωμεν τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΚΑΓΔ, καγδ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὴν ἕδραν ΚΔΑ ὁμοίαν τῇ κδα, καὶ τὴν ΓΔΑ ὁμοίαν τῇ γδα· διότι εἶναι ὁμόλογα τρίγωνα τῶν ὁμοίων ἑδρῶν ΚΑΔΕ, καὶ καδε, ΑΒΓΔ καὶ αβγδ. Καὶ ἡ δίεδρος δὲ γωνία ΑΔ εἶναι ἴση τῇ διέδρῳ γωνίᾳ αδ· διότι αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ὁμοίων πολυέδρων σχηματίζουσι διέδρους γωνίας ἴσας. Ἄρα ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΓΔ εἶναι ὁμοία τῇ καγδ (348 σημ.).

Ἐὰν ἤδη παραβάλωμεν τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΚΓΔΖ, κγδζ, βλέπομεν ὅτι ἔχουσι τὰς ἕδρας ΚΓΔ, κγδ ὁμοίας, ὡς ὁμολόγους ἕδρας τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων ΚΑΓΔ καὶ καγδ, καὶ τὰς ἕδρας ΓΔΖ, γδζ ὁμοίας, ὡς ὁμόλογα τρίγωνα τῶν ὁμοίων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

έδρων ΓΔΕΖ, γδεζ. Ἔτι δὲ καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΚΓΔΖ εἶναι ἴση τῇ κγδζ· διότι ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν ΓΔ καὶ γδ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι ΚΓΔΑ καὶ κγδα, ὑπολείπονται ἴσαι δίεδροι γωνίαι ΚΓΔΖ καὶ κγδζ. Ἄρα ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΒΔΖ εἶναι ὁμοία τῇ κγδζ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ἡ ὁμοιότης καὶ τῶν λοιπῶν.

Σημειωσις. Αἱ εὐθεῖαι Μ καὶ μ αἱ ἐπιζευγνύουσαι δύο κορυφὰς Α καὶ Ζ τοῦ πρώτου πολυέδρου, καὶ τὰς ὁμολόγους τούτων κορυφὰς α καὶ ζ τοῦ δευτέρου πολυέδρου εἶναι ἀνάλογοι δύο ὁμολόγων ἀκμῶν Θ καὶ θ τῶν πολυέδρων τούτων.

Διότι ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο πολύεδρα εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας, ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὰ σημεῖα Α καὶ α, αἱ εὐθεῖα Μ καὶ μ θὰ εἶναι ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων, αἵτινες ἀναγκαίως θὰ ἔχωσι δύο ὁμολόγους ἀκμὰς Η καὶ η ἀνηκούσας εἰς τὰ δύο πολύεδρα· ἄρα θὰ εἶναι

$$\text{Μ} : \mu = \text{Η} : \eta.$$

Ἀλλὰ $$\text{Η} : \eta = \Theta : \theta.$$

Διότι ἀπὸ τῶν δύο ἀκμῶν Η καὶ η δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν εἰς τὰς Θ καὶ θ, διερχόμενοι δι' ἀκμῶν ἐχουσῶν τὸν αὐτὸν πάντοτε λόγον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ ἀναλογιῶν συνάγομεν

$$\text{Μ} : \mu = \Theta : \theta\cdot \qquad \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

351. *Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.*

Ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες ἡ ΚΑΒΓΔ καὶ Καβγδ, ἃς ὑποθέτομεν οὕτω τεθείσας, ὥστε αἱ πρὸς ταῖς κορυφαῖς αὐτῶν ἴσαι στερεαὶ γωνίαι νὰ ἐφαρμόζωσι. Αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε τῶν πυραμίδων εἶναι τότε παράλληλοι διότι τοῦ τριγώνου ΚΑΒ ὄντος ὁμοίου τῷ Καβ, ἡ αβ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ· δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ βγ τῇ ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον αβγ θὰ εἶναι παράλληλον τῷ ΑΒΓ.

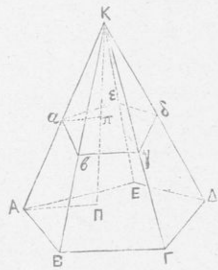
Τῶν βάσεων ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε οὐσῶν ἐξ ὑποθέσεως ὁμοίων ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$\text{ΑΒΓΔΕ} : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = (\text{ΑΒ})^2 : (\alpha\beta)^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΠ δὲ καὶ Κπ ὄντων τῶν ὑψῶν τῶν δύο πυραμίδων, ἐδείχθη ἐν ἐδαφίῳ 329 ὅτι

$$ΚΠ : κπ = ΑΒ : αβ.$$



Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἀντιστοίχους ὅρους τῶν ἀναλογιῶν τούτων λαμβάνομεν

$$ΑΒΓΔΕ \times ΚΠ : αβγδε \times Κπ = (ΑΒ)^3 : (αβ)^3$$

ὅθεν $\frac{1}{3} ΑΒΓΔΕ \times ΚΠ : \frac{1}{3} αβγδε \times Κπ = (ΑΒ)^3 : (αβ)^3$

Ἀλλ' οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς ἀναλογίας ταύτης παριστῶσι τοὺς ὄγκους τῶν πυραμίδων ΚΑΒΓΔΕ καὶ Καβγδε. Εἶναι ἄρα

$ΚΑΒΓΔΕ : Καβγδε = (ΑΒ)^3 : (αβ)^3$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

352. *Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν.*

Ἔστωσαν ὅμοια πολύεδρα τὸ Π καὶ τὸ π. Διαιροῦμεν τὸ πρῶτον εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας Τ, Τ΄, Τ΄΄ κτλ., καὶ τὸ δεύτερον εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας τ, τ΄, τ΄΄, κτλ. ὁμοίας ταῖς πρώταις. Ἔστωσαν δὲ Α, α, δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων Τ καὶ τ, Α΄, α΄ τῶν Τ΄ καὶ τ΄ κτλ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν

$$Τ : τ = Α^3 : α^3$$

$$Τ' : τ' = Α'^3 : α'^3$$

$$Τ : τ'' = Α''^3 : α''^3.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι γραμμαὶ τῶν ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι, θὰ εἶναι

$$Α : α = Α' : α' = Α'' : α''$$

ὅθεν καὶ $Α^3 : α^3 = Α'^3 : α'^3 = Α''^3 : α''^3.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν (1) οἱ δεύτεροι λόγοι εἶναι ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ πρῶτοι εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις, ἤτοι ἔχομεν

$$\mathrm{T} : \tau = \mathrm{T}' : \tau' = \mathrm{T}'' : \tau''$$

ὅθεν $$\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' : \tau + \tau' + \tau'' = \mathrm{T} : \tau = \mathrm{A}^3 : \alpha^3$$

ἢ ἐπειδὴ $$\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}''' = \Pi, \text{ καὶ } \tau + \tau' + \tau'' = \pi,$$

$$\Pi : \pi = \mathrm{A}^3 : \alpha^3.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

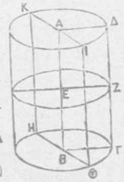
ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Α΄. ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

353. Καλεῖται *κύλινδρος* τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ὅταν ὀρθογώνιον στραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἀποκατασταθῇ εἰς τὴν θέσιν, ὅθεν ἤρχισε νὰ στρέφηται.

Ἔστω ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἂς ὑποτεθῇ ὅτι στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην του θέσιν.



Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΑΔ γράφουσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τῆς ΑΒ, τα δὲ σημεῖα Γ καὶ Δ περιφερείας κύκλου. Ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ παράγει ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται *παράπλευρος* ἢ *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου.

Οἱ κύκλοι οἱ ἔχοντες ἀκτῖνας ΒΓ καὶ ΑΔ καλοῦνται *βάσεις* τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου. Ὕψος δὲ τοῦ κυλίνδρου καλεῖται τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν βάσεων, ἴσον ὂν τῷ ἄξον' ΑΒ.

Πᾶσα τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἶναι κύκλος ἴσος ταῖς βάσεσι· διότι ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ε, καθ' ὃ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸν ἄξονα, ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ ΕΖ, αὕτη ἐν τῇ περιστροφῇ τοῦ ὀρθογω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νίου θέλει παραγάγει κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἑπομένως θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΗΘΙΚ, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ. Διότι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ θὰ πέσῃ δὶς ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ θὰ λάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΘΙ καὶ ΑΒΗΚ.

Ἐὰν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου ἐγγραφῇ πολύγωνον, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρῖσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἡ ἑτέρα βάσις τοῦ πρίσματος θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου. Τότε δὲ τὸ πρῖσμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* ἐν τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὁ κύλινδρος *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ πρῖσμα.

Ἐὰν δὲ περὶ τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου περιγραφῇ πολύγωνον, καὶ ἐπὶ τούτου κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρῖσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ πρῖσμα λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ τὸν κύλινδρον, καὶ ὁ κύλινδρος *ἐγγεγραμμένος* ἐν τῷ πρίσματι. Ἑκάστη δὲ παράπλευρος ἕδρα τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος θὰ ἐφάπτηται τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι ἡ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τοῦ κύκλου καὶ πλευρᾶς τινος τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εὐθεῖα, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τε πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου. Εὐκόλως δὲ δεικνύεται ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι πλὴν τῶν σημείων τῆς ῥηθείσης καθέτου οὐδὲν ἄλλο σημεῖον ἔχουσι κοινόν.

Δύο κύλινδροι λέγονται *ὅμοιοι*, ἐὰν οἱ ἄξονες αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

Σημειωσις. Τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν παραγομένην ὑπ' εὐθείας, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τῆς περιφερείας κύκλου, οὖσα κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ἑπομένως μένουσα παράλληλος ἑαυτῇ.

Γενικῶς δὲ καλεῖται ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ γεωμετρίᾳ *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας, ἥτις διέρχεται πάντοτε διὰ δεδομένης καμπύλης, μένουσα πάντοτε παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ. Καὶ ἡ μὲν εὐθεῖα καλεῖται *γενέτειρα*, ἡ δὲ καμπύλη *ὁδηγός*.

Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς εἶναι κλειστὴ καμπύλη, καὶ ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὸ στερεὸν τὸ περιε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

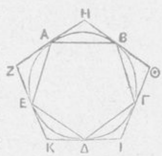
χόμενον ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται *κύλινδρος*, τοῦ ὁποίου βάσεις μὲν λέγονται αἱ ἐπίπεδοι ἕδραι, ὕψος δὲ τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν βάσεων.

Ἀλλ' ὁ μόνος κύλινδρος, ὃν θεωροῦμεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας, εἶναι ὁ ἀνωτέρω ὁρισθεὶς ὡς παραγόμενος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου, καὶ ὅστις καλεῖται *κύλινδρος ὀρθὸς μὲ κυκλικὴν βάσιν*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ πάντων τῶν ἄλλων κυλίνδρων. Τοῦτον δὲ θέλομεν ἐννοεῖ ἐν τοῖς ἑξῆς λέγοντες ἁπλῶς *κύλινδρον*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

354. *Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ πρίσματος, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τούτου τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*

Ἂς θεωρήσωμεν κύλινδρον ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓ καὶ ὕψος Υ. Ἂς ἐγγράψωμεν δὲ εἰς τὸν κύκλον πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου τούτου ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, αἵτινες τέμνουσαι ἀλλήλας ἀποτελοῦσι τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον ΖΗΘΙΚ.



Ἂς κατασκευάσωμεν δὲ δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα βάσεις τὸ μὲν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, τὸ δὲ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ, καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου. Τὸ πρῶτον τούτων θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ θὰ εἶναι μικρότερον αὐτοῦ, ὡς περιεχόμενον ἐν αὐτῷ· τὸ δὲ δεύτερον θὰ περιέχῃ τὸν κύλινδρον, ἑπομένως θὰ εἶναι μεγαλείτερον αὐτοῦ. Ἄρα ὁ κύλινδρος θὰ διαφέρῃ ἑκατέρου τῶν στερεῶν τούτων ὀλιγώτερον, ἢ ὅτι ταῦτα διαφέρουσιν ἀλλήλων. Ἀλλὰ τῶν πρισμάτων τούτων ἡ διαφορά εἶναι στερεὸν ἔχον ὕψος Υ, καὶ βάσιν τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας (254), ἄρα καὶ τὸ στερεὸν τὸ παριστῶν τὴν διαφορὰν τῶν δύο πρισμάτων δύναται νὰ γείνῃ μικρότερον παντὸς δοθέντος στερεοῦ. Ἄρα ἡ διαφορὰ τοῦ κυλίνδρου καὶ ἑκατέρου τῶν πρισμάτων, δύναται νὰ γείνῃ ὅσον θελήσωμεν μικρά, ἤτοι ὁ κύλινδρος εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

355. *Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω Κ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι Β τὸ δὲ ὕψος Υ. Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν πρῖσμα, οὗ τὴν βάσιν καλοῦμεν β. Ὁ ὄγκος τούτου εἶναι $\beta\times\Upsilon$· τὸ ὅριον δὲ τούτου εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ $\beta\times\Upsilon$ εἶναι $\mathrm{B}\times\Upsilon$, διότι τὸ μὲν Υ εἶναι ἀμετάβλητον, τὸ δὲ β ἔχει ὅριον τὸ Β· ἄρα

$$\mathrm{K}=\text{ὅρ}(\beta\times\Upsilon)=\mathrm{B}\times\Upsilon.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κύλινδροι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις των, οἱ δὲ ἔχοντες ἴσας βάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη των.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν, καὶ ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι κύλινδροι Κ, κ, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν Β, β, αἱ τούτων ἀκτῖνες Α, α, τὰ δὲ ὕψη Υ, υ. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{\mathrm{K}}{\kappa}=\frac{\mathrm{B}\times\Upsilon}{\beta\times\upsilon}=\frac{\mathrm{B}}{\beta}\times\frac{\Upsilon}{\upsilon}.$$

Ἀλλὰ
$$\frac{\mathrm{B}}{\beta}=\frac{\mathrm{A}^2}{\alpha^2}$$

ἐξ ὑποθέσεως δὲ $\frac{\mathrm{A}}{\alpha}=\frac{\Upsilon}{\upsilon}$· ὅθεν $\frac{\mathrm{A}^2}{\alpha^2}=\frac{\Upsilon^2}{\upsilon^2}$.

Ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι $\frac{\mathrm{K}}{\kappa}=\frac{\mathrm{B}}{\beta}\times\frac{\Upsilon}{\upsilon}$ ἀντὶ $\frac{\mathrm{B}}{\beta}$ τὸν ἴσον αὐτῷ λόγον $\frac{\Upsilon^2}{\upsilon^2}$, λαμβάνομεν

$$\frac{\mathrm{K}}{\kappa}=\frac{\Upsilon^2}{\upsilon^2}\times\frac{\Upsilon}{\upsilon}=\frac{\Upsilon^3}{\upsilon^3}=\frac{\mathrm{A}^3}{\alpha^3}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, οὗ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι Α, τὸ δὲ ὕψος Υ, παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi A^2 Y$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

356. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καλεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὁρίου, εἰς ὃ τείνει ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια πρίσματος ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυλίνδρῳ, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ὡς ἄθροισμα ὀρθογωνίων ἐχόντων ὕψος κοινὸν τὸ τοῦ πρίσματος καὶ βάσεις τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμος ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος ἴσον τῷ τοῦ πρίσματος, ἡ δὲ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὅριον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν ἴσην τῇ περιφερείᾳ ταύτῃ καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

357. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου· τοῦ ὀρθογωνίου δὲ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως θὰ εἶναι $2\pi\alpha$, ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $2\pi\alpha\upsilon$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν ἐχόντων ἴσας βάσεις κυλίνδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη των, τῶν δὲ ἐχόντων ἴσα ὕψη πρὸς τὰς περιφερείας ἢ τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

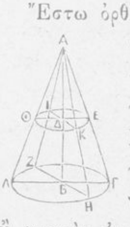
Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων κυλίνδρων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν αὐτῶν, καὶ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

Β'. ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

358. α'). Καλεῖται *κῶνος* τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ὅθεν ἤρχισε νὰ κινῆται.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι περιστρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην του θέσιν. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ὅστις καλεῖται *βάσις* τοῦ κώνου· ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ τὴν *παράπλευρον* ἢ *κυρτὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ κώνου.



Τὸ σημεῖον Α καλεῖται *κορυφὴ* τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα ΑΒ *ἄξων* ἢ *ὕψος*, καὶ ἡ ΑΓ *πλευρὰ* ἢ *ἀπόστημα* τοῦ κώνου.

Πᾶσα τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ τῆς βάσεως, ἑπομένως καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΘΙΕΚ, εἶναι κύκλος. Διότι ἂν ἐκ τοῦ σημείου Δ, καθ' ὃ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸν ἄξονα, ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦτον ἡ ΔΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐν τῇ περιστροφῇ τούτου ἡ ΔΕ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἑπομένως θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ.

Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νος, οἷον ἡ ΑΖΗ, εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελὲς διπλάσιον τοῦ παραγαγόντος τὸν κῶνον. Διότι ΖΗ οὔσης τῆς τομῆς τῆς βάσεως τοῦ κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΑ καὶ ΖΑ αὗται θὰ κεῖνται καὶ ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ΑΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου· ἄρα θὰ εἶναι αἱ τομαὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ ΒΗ = ΒΖ = ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΑΒΖ εἶναι ἴσα τῷ ΑΒΓ.

β'). Ἐὰν ὁ κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως μέρος τοῦ κώνου καλεῖται *κόλουρος κῶνος*. Τοιοῦτο στερεὸν εἶναι τὸ ΘΕΛΓ.

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι, ὑφ' ὧν περατοῦται ὁ κόλουρος κῶνος, καλοῦνται *βάσεις* αὐτοῦ, ἡ δὲ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα *ἄξων* ἢ *ὕψος* τοῦ κολούρου κώνου· *πλευρὰ* δὲ αὐτοῦ τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον. Ἐν τῷ ἀνωτέρω σχήματι οἱ κύκλοι ΘΕ καὶ ΛΓ εἶναι αἱ βάσεις τοῦ κολούρου κώνου, ἡ ΔΒ ὁ ἄξων ἢ τὸ ὕψος, καὶ ἡ ΕΓ ἡ πλευρά.

γ'). Ἐὰν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἐγγραφῇ πολύγωνον, ἡ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον τοῦτο, καὶ κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου, λέγεται *ἐγγεγραμμένη* ἐν τῷ κώνῳ, ὁ δὲ κῶνος *περιγεγραμμένος* περὶ τὴν πυραμίδα. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ μόνας τὰς εὐθείας ταύτας θὰ ἔχωσι κοινὰς αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος.

Ἡ δὲ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου, καὶ κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου, λέγεται *περιγεγραμμένη περὶ τὸν κῶνον*, ὁ δὲ κῶνος *ἐγγεγραμμένος ἐν τῇ πυραμίδι*.

Ἑκάστη παράπλευρος ἕδρα τῆς περιγεγραμμένης πυραμίδος θὰ ἐφάπτηται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου κατὰ τὴν ἀγομένην εὐθεῖαν ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ βάσις τῆς ἕδρας ταύτης τῆς βάσεως τοῦ κώνου· ἑπομένως ὁ κῶνος θὰ περιέχηται ὅλος ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ περὶ αὐτὸν πυραμίδι.

δ'). Δύο κῶνοι καλοῦνται *ὅμοιοι*, ἐὰν τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσεις. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι παράγεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τῆς περιφερείας κύκλου τινός, καὶ ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ ὑψουμένης εὐθείας.

Γενικῶς δὲ καλεῖται *κωνικὴ ἐπιφάνεια* ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ διὰ δεδομένης καμπύλης. Καὶ αὐτὴ μὲν ἡ κινουμένη εὐθεῖα λέγεται *γενέτειρα*, ἡ δὲ καμπύλη, δι' ἧς πάντοτε διέρχεται, καλεῖται *ὁδηγός*.

Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς εἶναι καμπύλη κλειστή, καὶ τμηθῇ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν γενέτειραν ἐν πάσαις ταῖς θέσεσιν αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον στερεὸν ὑπὸ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου καλεῖται *κῶνος*, οὗ κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον, δι' οὗ διέρχεται πάντοτε ἡ γενέτειρα, βάσις ἡ ἐπίπεδος αὐτοῦ ἕδρα· καὶ ὕψος ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως.

Ἀλλ' ὁ μόνος κῶνος, τὸν ὁποῖον ἐξετάζομεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας, εἶναι ὁ ἀνωτέρω ὁρισθεὶς ὡς παραγόμενος ὑπὸ τῆς περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ ὅστις πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν λοιπῶν καλεῖται *κῶνος ὀρθὸς μὲ κυκλικὴν βάσιν*. Τοῦτον δὲ θέλομεν ἐννοεῖ λέγοντες εἰς τὸ ἑξῆς ἁπλῶς *κῶνον*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

359. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμένης ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ταύτης τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*

Ἔστω κῶνος ἔχων βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓ καὶ ὕψος Υ. Ἂς ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνόν τι ΑΒΓΔΕ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου κατὰ τὰς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤτοι κατὰ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε, ἔστω τὸ ΖΗΘΙΚ.

Ἂς νοήσωμεν δὲ δύο πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τὰ πολύγωνα ταῦτα, καὶ κορυφὴν τὴν τοῦ κώνου· ἡ πρώτη τῶν πυραμίδων τούτων θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ κώνῳ, καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ τοῦτο μικροτέρα αὐτοῦ, ἡ δὲ δευτέρα περιγεγραμμένη καὶ διὰ τοῦτο μεγαλειτέρα. Ἄρα ὁ κῶνος θὰ διαφέρῃ ἑκατέρου τῶν στερεῶν τούτων ὀλιγώτερον, ἢ ὅτι ταῦτα διαφέρουσιν ἀλλήλων. Ἀλλ' ἐὰν παραστήσωμεν τοῦ μὲν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν διὰ β, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου διὰ Β, τῆς μὲν ἐγγεγραμένης πυραμίδος ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{1}{3}\beta\times\Upsilon$, τῆς δὲ περιγεγραμμένης $\frac{1}{3}B\times\Upsilon$, καὶ ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι

$$\frac{1}{3}B\times\Upsilon-\frac{1}{3}\beta\times\Upsilon,\ \text{ἤτοι}\ \frac{1}{3}(B-\beta)\times\Upsilon.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ $B-\beta$ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης ποσότητος, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης πυραμίδος δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, καὶ πολλῷ μᾶλλον ἡ διαφορὰ τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τῆς ἐγγεγραμμένης ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

360. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι ἴσος τῷ τρίτῳ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω κῶνος ὁ Κ, ἡ βάσις αὐτοῦ Β, καὶ Υ τὸ ὕψος. Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν πυραμίδα, ἧς τὴν βάσιν παριστῶμεν διὰ β. Ὁ ὄγκος ταύτης εἶναι $\frac{1}{3}\beta\times\Upsilon$. Τὸ ὅριον δὲ τούτου θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{3}\beta\times\Upsilon$ εἶναι $\frac{1}{3}B\times\Upsilon$, διότι οἱ παράγοντες $\frac{1}{3}$ καὶ Υ εἶναι ἀμετάβλητοι, ὅριον δὲ τοῦ β εἶναι Β. Ἄρα

$$\text{ὄγκ. } K=\text{ὄρ.}\left(\frac{1}{3}\beta\times\Upsilon\right)=\frac{1}{3}B\times\Upsilon.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν βάσεων αὐτῶν, οἱ δὲ ἔχοντες ἴσας βάσεις ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν των.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

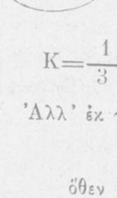
Οἱ ὅμοιοι κῶνοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν καὶ ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ὁμοία τῇ ἐν ἐδαφίῳ 355 πόρ. Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ

361. *Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, οἵτινες κοινὸν μὲν ὕψος ἔχουσι τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δὲ ὁ μὲν τὴν ἄνω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν κάτω, ὁ δὲ μέσην ἀνάλογον τούτων.*

Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΔΒΓΕ, ἔχων βάσεις τοὺς κύκλους ΕΓ καὶ ΔΒ, ὧν τὰς ἀκτῖνας ἂς παραστήσωμεν δι' Α καὶ α, καὶ ὕψος τὸ ΔΕ, τὸ ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν δι' Υ. Ὁ κόλουρος οὗτος κῶνος εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κώνων ΚΕΓ καὶ ΚΔΒ, ὧν οἱ ὄγκοι



εἶναι $\frac{1}{3}\pi A^2 \times KE$, καὶ $\frac{1}{3}\pi\alpha^2 \times K\Delta$.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου διὰ Κ, θέλομεν ἔχει

$$K = \frac{1}{3}\pi A^2 \times KE - \frac{1}{3}\pi\alpha^2 \times K\Delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ $KE = K\Delta + \Delta E = K\Delta + \Upsilon$,

$$K = \frac{1}{3}\pi A^2 \times K\Delta + \frac{1}{3}\pi A^2 \times \Upsilon - \frac{1}{3}\pi\alpha^2 \times K\Delta. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΔΒ καὶ ΚΕΓ ἔχομεν

$$K\Delta : KE = \alpha : A$$

ὅθεν

$$K\Delta : KE - K\Delta = \alpha : A - \alpha$$

ἢ

$$K\Delta : \Upsilon = \alpha : A - \alpha$$

ὅθεν

$$K\Delta = \frac{\alpha \times \Upsilon}{A - \alpha}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι (1) ἀντὶ ΚΔ τὸ ἴσον αὐτῷ κλάσμα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\frac{1}{3}\pi$ καὶ Υ εἶναι κοινοὶ παράγοντες πάντων τῶν ὅρων, λαμβάνομεν

$$K=\frac{1}{3}\pi\left(A^2\times\frac{\alpha}{A-\alpha}+A^2-\alpha^2\times\frac{\alpha}{A-\alpha}\right)\times\Upsilon.$$

Ἀλλὰ

$$A^2\times\frac{\alpha}{A-\alpha}-\alpha^2\times\frac{\alpha}{A-\alpha}=\frac{(A^2-\alpha^2)\times\alpha}{A-\alpha}=(A+\alpha)\times\alpha=A\alpha+\alpha^2.$$

Ἄρα $$K=\frac{1}{3}\pi(A^2+A\alpha+\alpha^2)\times\Upsilon.$$

ἢ $$K=\frac{1}{3}\pi A^2\times\Upsilon+\frac{1}{3}\pi A\alpha\times\Upsilon+\frac{1}{3}\pi\alpha^2\times\Upsilon.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι $\frac{1}{3}\pi A^2\times\Upsilon$ ἐκφράζει τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΕΓ, καὶ ὕψος Υ, $\frac{1}{3}\pi\alpha^2\times\Upsilon$ τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΔΒ καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ $\frac{1}{3}\pi A\alpha\times\Upsilon$ τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν $\pi A\alpha$ καὶ ὕψος τὸ αὐτό· εἶναι δὲ ὁ κύκλος $\pi A\alpha$ μέσος ἀνάλογος τῶν κύκλων πA^2 καὶ $\pi\alpha^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

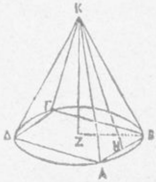
362. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καλεῖται τὸ ὅριον, εἰς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος ἐγγεγραμμένης ἐν τῷ κώνῳ, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως αὐτῆς τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

363. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω κῶνος ὁ ΚΑΒΓΔ. Ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν πυραμίδα, τὴν ΚΑΒΓΔ. Ἡ παράπλευρος ταύτης ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ· ἐὰν δὲ τῶν τριγώνων τούτων τὰ ὕψη παραστήσωμεν διὰ $\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon'', \Upsilon'''$, τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν εἶναι



$$\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\times\Upsilon, \frac{1}{2}\text{ΒΓ}\times\Upsilon', \frac{1}{2}\text{ΓΔ}\times\Upsilon'', \frac{1}{2}\text{ΔΑ}\times\Upsilon'''.$$

Παριστῶντες δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος δι' Ε, θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ε}=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\times\Upsilon+\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\times\Upsilon'+\frac{1}{2}\text{ΓΔ}\times\Upsilon''+\frac{1}{2}\text{ΔΑ}\times\Upsilon'''.$$

Ἐὰν δὲ τὸ μέγιστον τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων εἶναι Υ, θέλομεν ἔχει

$$\text{Ε}<\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\times\Upsilon+\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\times\Upsilon+\frac{1}{2}\text{ΓΔ}\times\Upsilon+\frac{1}{2}\text{ΔΑ}\times\Upsilon,$$

ἢ $$\text{Ε}<\frac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ})\times\Upsilon.$$

Ὁμοίως, ἐὰν τὸ ἐλάχιστον τῶν ὑψῶν τριγώνων εἶναι Υ''', θέλομεν ἔχει $\text{Ε}>\frac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ})\times\Upsilon'''$.

Ἀλλ' ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν, τὰ ὕψη τῶν τριγώνων, οἷον τὸ ΚΗ, ἔχουσι ὅριον τὴν πλευρὰν ΚΑ τοῦ κώνου· διότι ΚΑ—ΚΗ<ΑΗ· ἡ δὲ περίμετρος ΑΒΓΔ ἔχει ὅριον τὴν περιφέρειαν ΖΒ. Ἄρα ἑκατέρα τῶν ποσοτήτων

$$\frac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ})\times\Upsilon, \frac{1}{2}(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ})\times\Upsilon'''$$

ἔχει τὸ αὐτὸ ὅριον $\frac{1}{2}$περιφ.ΖΒ×ΚΑ. Ἄρα καὶ ἡ ποσότης Ε, ἥτις περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν, θὰ ἔχῃ ὅριον $\frac{1}{2}$ περιφ. ΖΒ×ΚΑ.

Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

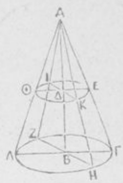
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημειωσις. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου παρασταθῇ δι' Α, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ λ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας εἶναι $\frac{1}{2}2\pi A\times\lambda$, ἤτοι $\pi A\lambda$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

364. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΒΖΗΓ, οὗ ἡ πλευρὰ ΒΓ ἂς παρασταθῇ διὰ λ. Ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια Ε εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων ΚΗΓ καὶ ΚΖΒ· τούτων δὲ τῶν ἐπιφανειῶν τὸ ἐμβαδόν, παρασταθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΔΓ καὶ ΕΒ τῶν βάσεων δι' Α καὶ α, εἶναι



$$\pi A\times K\Gamma \text{ καὶ } \pi\alpha\times KB.$$

Ἄρα $$E=\pi A\times K\Gamma-\pi\alpha\times KB,$$

ἢ ἐπειδὴ $$K\Gamma=KB+\lambda,$$

$$E=\pi A\times KB+\pi A\times\lambda-\pi\alpha\times KB. \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΔΓ καὶ ΚΕΒ λαμβάνομεν

$$K\Gamma : KB=A : \alpha$$

ὅθεν $$K\Gamma-KB : KB :=A-\alpha : \alpha$$

ἢ $$\lambda : KB=A-\alpha : \alpha.$$

Λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ ΚΒ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης, καὶ ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἀνωτέρω ἰσότητι (1), λαμβάνομεν

$$E=\pi A\times\frac{\alpha\lambda}{A-\alpha}+\pi A\lambda-\pi\alpha\times\frac{\alpha\lambda}{A-\alpha}$$

ἢ $$E=\pi\left(\frac{A\alpha}{A-\alpha}+A-\frac{\alpha^2}{A-\alpha}\right)\times\lambda.$$

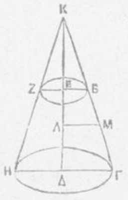
Ἀλλὰ $$\frac{A\alpha}{A-\alpha}-\frac{\alpha^2}{A-\alpha}=\frac{\alpha(A-\alpha)}{A-\alpha}=\alpha.$$

Ἄρα $$E=\pi(A+\alpha)\times\lambda.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\pi(A+\alpha)$, ἢ $\pi A+\pi\alpha$, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν $2\pi A$ καὶ $2\pi\alpha$, βλέπομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι ἴσον τῷ ἡμίσει τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Σημειωσις α΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΚΕ ἡ ΜΛ, ἐν τῷ τραπεζίῳ ΒΕΔΓ ἡ ΜΛ θὰ εἶναι ἴση τῷ ἡμίσει τοῦ ἀθροίσματος τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΕΒ, ἤτοι $ΜΛ = \frac{Α+α}{2}$, ἡ δὲ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ΜΛ, θὰ εἶναι $2\pi \times \frac{Α+α}{2}$, ἢ $\pi(Α+α)$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι $\pi(Α+α)\times\lambda$, συνάγομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν·

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἴσον ἀπὸ τῶν δύο βάσεων ἀπέχοντος κύκλου.

Σημειωσις β΄. Ἐὰν εὐθεῖά τις ΒΓ κειμένη ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς εὐθείας ΚΔ, καὶ ὅλη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, περιστραφῇ ὁλόκληρον περιστροφὴν περὶ τὴν ΚΔ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς ΒΓ γραφομένης ἐπιφανείας εἶναι πάντοτε

$$\frac{\text{περιφ. } ΓΔ + \text{περιφ. } ΒΕ}{2} \times ΒΓ,$$

ὅπου ΓΔ καὶ ΒΕ εἶναι αἱ ἐκ τῶν ἄκρων τῆς περιστραφείσης εὐθείας ἐπὶ τὸν ἄξονα ἠγμέναι κάθετοι.

Διότι ἐὰν ἡ ΒΓ προσεκβαλλομένη τέμνῃ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ σημεῖον Κ, ἡ ὑπὸ τῆς ΒΓ γραφεῖσα ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κολούρου κώνου, ἐν ᾧ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι ἡ ΓΔ καὶ ΒΕ. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἔχομεν κῶνον ὁλόκληρον, ἡ περιφέρεια ΒΕ μηδενίζεται, καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει $\frac{\text{περιφ.}ΓΔ}{2} \times ΒΓ$. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι, τότε $ΓΔ = ΒΕ$, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κυλινδρική, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $\text{περιφ.}ΓΔ \times ΒΓ$. Τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο μᾶς δίδει καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος, ὅταν ἐν αὐτῷ ὑποτεθῇ $ΒΕ = ΓΔ$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ'. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

365. α'.) Καλεῖται *σφαῖρα* στερεὸν περατούμενον εἰς ἐπιφάνειαν, ἧς πάντα τὰ σημεῖα ἴσον ἀπέχουσιν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ στερεοῦ κειμένων, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κέντρον*.

Δυνάμεθα δὲ νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν παραγομένην ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ· διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω παραγομένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας, θὰ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου ταύτης.

β'.) *Ἀκτὶς* τῆς σφαίρας καλεῖται ἡ τὸ κέντρον καὶ σημεῖον οἱοδήποτε τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα. *Διάμετρος* δὲ εἶναι πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ διάμετροι, ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

γ'.) Ἐπίπεδον εἶναι *ἐφαπτόμενον* σφαίρας, ὅταν ἔχῃ ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν μετὰ τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Δύο δὲ σφαῖραι εἶναι *ἐφαπτόμεναι* ἀλλήλων, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΣ ΣΦΑΙΡΑΝ

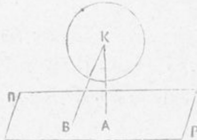
ΘΕΩΡΗΜΑ

366. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσι. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα μηδὲν ἔχωσι σημεῖον κοινόν, τὸ ἀπό-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στημα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεῖζον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

Διότι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἠγμένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, τῆς ΚΑ, οὔσης μεγαλειτέρας τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ δὲ παντὸς ἄλλου σημείου Β τοῦ ἐπιπέδου ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἀπόστασις εἶναι μεγαλειτέρα τῆς ΚΑ, καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο Β θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἄρα ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν σημεῖον κοινὸν θὰ ἔχωσι.

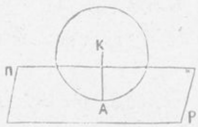


Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσι, τότε καὶ ὁ ποὺς Α τῆς καθέτου ΚΑ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἐπομένως ἡ ΚΑ θὰ εἶναι μείζων τῆς ἀκτῖνος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

367. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας, τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται σφαίρας, τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἀπόστημα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι ταύτης.*

Διότι τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἠγμένης καθέτου ΚΑ οὔσης ἴσης τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας, τὸ σημεῖον Α θὰ εἶναι κοινὸν τοῦ τε ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ δὲ παντὸς ἄλλου σημείου τοῦ ἐπιπέδου ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστασις εἶναι μείζων τῆς ΚΑ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ πλὴν τοῦ Α θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἤτοι τὸ ἐπίπεδον θὰ ἐφάπτηται τῆς σφαίρας.



Ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα μόνον τὸ σημεῖον Α ἔχουσι κοινόν, ἡ ἀκτὶς ΚΑ θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ, ἀγομένων εὐθειῶν, ἐπομένως ἡ ἐπὶ τοῦτο κάθετος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΟΡΙΣΜΑ

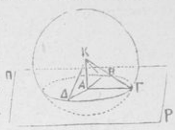
Κατὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἓν μόνον ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον ταύτης ὑπάρχει.

Διότι τὸ κατὰ τὸ σημεῖον Α τῆς σφαίρας ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον πρέπει νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΒ· ἓν δὲ μόνον ἐπίπεδον ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου εὐθείας κάθετον ἐπὶ ταύτης ὑπάρχει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

368. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν, ἡ δὲ τομὴ εἶναι κύκλος.*

Διότι τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ ἠγμένης καθέτου ΚΑ οὔσης μικροτέρας τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, ὁ ποὺς Α τῆς καθέτου κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας· πᾶν δὲ διὰ τοῦ ἐντὸς τῆς σφαίρας σημείου Α ἀγόμενον ἐπίπεδον ἀναγκαίως τέμνει αὐτήν.



Λέγω δὲ ὅτι ἡ τομὴ ΒΓΔ εἶναι κύκλος.

Διότι ἐὰν ἐκ διαφόρων σημείων Β, Γ, Δ τῆς γραμμῆς, ὑφ' ἧς περατοῦται ἡ τομή, ἀχθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον Α αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ, ΔΑ, καὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας ΒΚ, ΓΚ, ΔΚ, αὗται ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΚΑ εἶναι πλάγιαι. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ΒΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ Α· ἄρα ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρον ἔχοντος τὸ Α, ἤτοι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος.

Σημειωσις α'. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος ἔχων ἀκτῖνα τὴν τῆς σφαίρας· ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀκτὶς ΑΓ τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παραγομένου κύκλου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΓ.

Σημειωσις β'. Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, δηλαδὴ ὅτι, ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ σφαῖραν, τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τού-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

του ἀπόστημα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς, εὐκόλως δεικνύεται.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

369. *Ἕξ διαφόρους θέσεις δύνανται νὰ ἔχωσι δύο σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας, τὰς αὐτὰς ἃς καὶ δύο κύκλοι* (121).

Διότι ἐὰν διὰ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν δύο σφαιρῶν (σχ. τὸ ἀπέναντι), ἀχθῇ ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο κύκλους ΚΑ καὶ ΛΑ. Ἐὰν δὲ οἱ κύκλοι οὗτοι περιςραφῶσιν περὶ τὴν ΚΛ θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, τὴν αὐτὴν πάντοτε πρὸς ἀλλήλας θέσιν διατηροῦντες. Καθ' ὅσον δὲ οἱ κύκλοι οὗτοι τέμνουσιν ἀλλήλους, ἢ ἐφάπτονται ἀλληλων εἴτε ἐκτὸς εἴτε ἐντός, ἢ μηδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχωσιν αἱ περιφέρειαι αὐτῶν κειμένων εἴτε ἐκτὸς ἀλλήλων εἴτε τοῦ μικροτέρου ἐντὸς τοῦ μεγαλειτέρου, καὶ αἱ σφαῖραι ὡσαύτως θὰ τέμνωσιν ἀλλήλας, ἢ θὰ ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς ἢ ἐντός, ἢ μηδὲν σημεῖον θὰ ἔχωσι αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν κειμένων ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ τῆς μικροτέρας ἐντὸς τῆς μεγαλειτέρας.

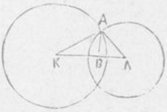
Ἐὰν δὲ τὰ κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν ταὐτίζωνται, ὅταν μὲν αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἄνισοι ἡ μικροτέρα θὰ κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς μεγαλειτέρας, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν οὐδὲν θὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον· ὅταν δὲ αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι αἱ σφαῖραι θὰ ἐφαρμόζωσιν ἐπ' ἀλλήλας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

370. *Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν ἐπιζευγνυούσης εὐθείας τὸ δὲ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας, Α σημεῖόν τι κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν, ΑΒ ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὰ κέντρα εὐθεῖαν ΚΛ ἠγμένη κάθετος. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΚΛ περιστραφῇ περὶ τὴν ΚΛ ὁλόκληρον περιστροφήν, ἡ ΑΒ θὰ γράψῃ κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ περιφέρεια τού κύκλου τούτου, ὑπὸ τοῦ σημείου Α γραφομένη, θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν σφαιρῶν. Οὐδὲν δὲ ἄλλο σημεῖον πλὴν τῶν τῆς περιφερείας ταύτης θὰ ἔχωσι κοινὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο σφαιρῶν· διότι πᾶν τοιοῦτο σημεῖον ἐπιζευγνυόμενον μετὰ τοῦ Κ καὶ Λ δι' εὐθειῶν σχηματίζει τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΚΛ. Τὸ δὲ τρίγωνον τοῦτο ἔλαβε πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις περὶ τὴν ΚΛ.



ΟΡΙΣΜΟΙ

371. α'). *Κύκλος μέγιστος* τῆς σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὅστις ἑπομένως ἔχει ἀκτῖνα τὴν τῆς σφαίρας. Πάντες δὲ οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσοι καὶ διαιροῦσιν ἀλλήλους εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι διάμετρος.

Πᾶς δὲ μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα τμήματα *ἡμισφαίρια* καλούμενα· διότι ἐάν, ἀφοῦ χωρίσωμεν τὰ δύο τμήματα, ἐφαρμόσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τὸ ἕτερον οὕτως, ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπ' ἀλλήλας.

Διὰ δύο σημείων οἱωνδήποτε τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διέρχεται τόξον μεγίστου κύκλου· διότι διὰ τῶν δύο τούτων σημείων καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν δύο σημείων. Ἓν δὲ μόνον τόξον μεγίστου κύκλου διέρχεται διὰ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, πλὴν ἐὰν τὰ δύο σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὅτε διὰ τῶν δύο σημείων ἄγονται ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν τόξα μεγίστων κύκλων.

β'). *Μικρὸς δὲ κύκλος τῆς σφαίρας* καλεῖται ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐκ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐν ἐδαφίῳ 370 θεωρήματος ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου.

Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶνε τοσούτῳ μικρότεροι, ὅσῳ μεγαλείτερον εἶνε τὸ ἀπόστημα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι τὸ ἀπόστημα τοῦτο καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ ἡ τῆς σφαίρας σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἐπομένως σταθερὰ τὸ μέγεθος. Ἄρα ὅταν ἡ μία τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐξάνῃ, ἡ ἑτέρα ἐλαττοῦται.

Ἡ θέσις μικροῦ κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὁρίζεται διὰ τριῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

γ') *Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας* λέγονται οἱ κύκλοι, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

δ'). Τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ κύκλου τινὸς καλοῦνται *πόλοι* τοῦ κύκλου τούτου.

ε'). Ἐὰν δύο τόξα κύκλων τῆς σφαίρας τέμνωνται εἰς σημεῖόν τι Α, λέγεται ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν*. Τὸ σημεῖον Α λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, τὰ δὲ τόξα *πλευραὶ* αὐτῆς.

Ἡ γωνία δύο τόξων ἔχει μέτρον τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζουσιν αἱ κατὰ τὴν κορυφὴν αὐτῆς ἐφαπτόμεναι τῶν δύο τόξων, κατὰ τὴν φορὰν τούτων λαμβανόμεναι.

Ἡ γωνία δύο τόξων μεγίστων κύκλων ἔχει μέτρον τὴν ἐπίπεδον γωνίαν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο κύκλων. Διότι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τόξων κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας εἶναι ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καθ' ἣν τέμνονται οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι, κείμεναι ἡ μὲν ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων, ἡ δὲ ἐν τῷ ἑτέρῳ.

ϛ'). *Σφαιρικὸν πολύγωνον* καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ τόξων μεγίστων κύκλων.

Τὰ τόξα ταῦτα καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ πολυγώνου, αἱ δὲ τῶν τόξων γωνίαι καὶ αἱ κορυφαὶ τούτων καλοῦνται *γωνίαι* καὶ *κορυφαὶ* τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου.

Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ἔχον τρεῖς πλευρὰς καλεῖται *σφαιρικὸν τρίγωνον*.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον καλεῖται *ἰσοσκελές*, *ἰσόπλευρον*, *σκαληνόν*, κατὰ τὰς αὐτὰς καὶ τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον περιστάσεις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζ'). Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται *κυρτόν*, ἐὰν κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἑκάστου τῶν μεγίστων κύκλων, ὧν τὰ τόξα σχηματίζουσι τὸ πολύγωνον.

Ἐὰν ἡ κορυφὴ στερεᾶς τινος γωνίας Κ τεθῇ εἰς τὸ κέντρον σφαίρας, αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ τέμνωσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας κατὰ τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ, τὰ ὁποῖα θὰ σχηματίζωσι σφαιρικὸν πολύγωνον. Αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου τούτου ἔχουσι μέτρον τὰς ἐπιπέδους γωνίας τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς διέδρους τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ κτλ. εἶναι τὸ μέτρον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ κτλ. ὑφ' ὧν ἀποτελεῖται ἡ στερεὰ γωνία· διότι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ κτλ. εἶναι γεγραμμένα μὲ ἴσας ἀκτῖνας, καὶ κέντρον ἔχουσι τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν.

Ἐὰν προσεκβληθῶσιν αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας ΚΑΒΓΔ, ἡ συμμετρικὴ ταύτης στερεὰ γωνία ΚΑ'Β'Γ'Δ' σχηματίζει σφαιρικὸν πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι ταῖς τοῦ ΑΒΓΔ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διάταξις τῶν ἴσων μερῶν εἶναι ἀντίστροφος, ὅπως καὶ τῶν συμμετρικῶν στερεῶν γωνιῶν, τὰ πολύγωνα ταῦτα δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' ἄλληλα· εἶναι δὲ **συμμετρικὰ** πρὸς τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας(344).

ΘΕΩΡΗΜΑ

372. *Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου.*

Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικὸν τρίγωνον· τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων, ὧν τόξα εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, σχηματίζουσι κατὰ τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας τρίεδρον στερεὰν γωνίαν ΚΑΒΓ, ἧς αἱ ἐπίπεδοι γωνία μετροῦνται ὑπὸ τῶν ἀντιστοιχουσῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, αἱ δὲ εἰς τὰς διέδρους ταύτης γωνίας ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΑΚΓ, ΑΚΒ, ΒΚΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο (310), τὸ αὐτὸ συμβαίνει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ εἰς τὰ τόξα ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ, τὰ μετροῦντα αὐτάς. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΚΓ, ΑΚΒ, ΒΚΓ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (311), τὸ ἄθροισμα τῶν μετρούντων τὰς γωνίας τόξων, ἤτοι τῶν τόξων ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ εἶναι μικρότερον περιφερείας.

Σημειώσεις. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καθιστᾷ φανερὸν ὅτι πᾶσα σχέσις μεταξὺ τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς γωνίας ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου. Οὕτω συνάγομεν τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

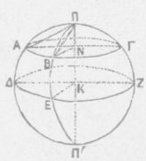
α'). *Ἐν παντὶ σφαιρικῷ τριγώνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλείτερον δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον ἕξ· ἑκάστη δὲ γωνία ηὐξημένη κατὰ δύο ὀρθὰς εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο* (312).

β'). *Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν παντὸς κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου* (311).

ΘΕΩΡΗΜΑ

373. *Πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας κύκλου τῆς σφαίρας ἴσον ἀπέχουσιν ἀφ' ἑκατέρου τῶν πόλων τοῦ κύκλου τούτου.*

Ἔστω κύκλος τῆς σφαίρας Κ ὁ ΑΒΓ, οὗ πόλοι εἶναι τὰ ἄκρα



Π καὶ Π' τῆς διαμέτρου τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἐπομένως διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Ν διερχομένης· λέγω ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Π ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων Α,Β,Γ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι. Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΝΑ, ΝΒ, ΝΓ αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ εἶναι πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Ν τῆς καθέτου ΠΝ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι ἀλλήλαις.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, διότι εἰς ταῦτα ὑποτείνουσιν ἴσαι χορδαί. Ἔτι δὲ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων τούτων κύκλων εἶναι κάθετα ἐπὶ τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ὡς διερχόμενα διὰ τῆς ΠΝ, καθέτου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἐφαρμόζονται καὶ εἰς μέγιστον κύκλον, οἷον τὸν ΔΕΖ. Τότε δὲ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΠΚΔ, ΠΚΕ, ΠΚΖ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐχουσῶν τὰς κορυφὰς πρὸς τῷ κέντρῳ τῶν μεγίστων κύκλων ΠΔ, καὶ ΠΕ, κτλ., τὰ τόξα ΠΔ, ΠΕ, ΠΖ κτλ. εἶναι τέταρτα περιφερείας, ἢ τεταρτημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐὰν τὰ ἀπὸ σημείου τινὸς Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰς δύο σημεῖα Δ, Ε τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ΔΕΖ ἠγμένα τόξα μεγίστων κύκλων ΠΔ καὶ ΠΕ εἶναι τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον Π εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΕΖ.

Διότι ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΔΚ,ΕΚ,ΠΚ, αἱ γωνίαι ΔΚΠ καὶ ΕΚΠ εἶναι ὀρθαί, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τῶν τεταρτημορίων ΠΕ καὶ ΠΔ· ἄρα ἡ ΠΠ' διάμετρος εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΕΖ, καὶ διὰ τοῦτο τὰ ἄκρα αὐτῆς Π καὶ Π' εἶναι πόλοι αὐτοῦ.

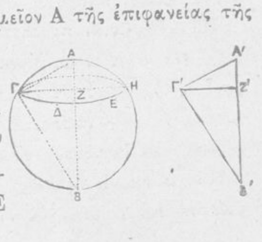
Σημειωσις. Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα τῶν πόλων δυνάμεθα νὰ γράφωμεν κύκλον ἐπὶ ἐπιφανείας σφαίρας τόσον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο γίνεται χρῆσις διαβήτου, οὗτινος τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα,καὶ ὅστις καλεῖται *σφαιρικὸς διαβήτης*. Ἐὰν στηρίζωμεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑτέρου σκέλους εἰς σημεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ περιστρέψωμεν τὸν διαβήτην οὕτως, ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἑτέρου σκέλους νὰ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ἄκρον τοῦτο θέλει γράψει περιφέρειαν κύκλου.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ γράψωμεν τόξον μεγίστου κύκλου, πρέπει ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου νὰ εἶναι ἴση τῇ χορδῇ τεταρτημορίου περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς ταύτης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

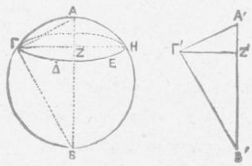
374. *Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης σφαίρας.*

Λαμβάνοντες ὡς πόλον τυχόν τι σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ΑΓ, γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον, τὸν ΓΔΕ. Ἔπειτα μετροῦμεν διὰ διαβήτου τὰς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις τριῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, τὰς ΓΔ, ΔΕ



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ΓΕ, καὶ κατασκευάζομεν τρίγωνον μὲ τὰς τρεῖς ταύτας πλευράς. Περιγράφομεν δὲ κύκλον περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο, καὶ ἡ ἀκτὶς τούτου θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΓΔΕ.

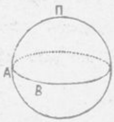


Τούτων γενομένων, ἂς νοήσωμεν τὴν διὰ τοῦ σημείου Α διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ μέγιστον κύκλον διὰ τῆς διαμέτρου ταύτης διερχόμενον, τὸν ΑΓΒ· τέλος δὲ ἂς νοήσωμεν ἠγμένας τὰς εὐθείας ΑΓ, ΓΒ καὶ ΓΖ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΓΖ εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΓΖ, δύναται λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ τρίγωνον Α′Γ′Ζ′ ἴσον τῷ ΑΓΖ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Γ′ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν Α′Γ′, καὶ προσεκβληθῇ ἡ Α′Ζ′, σχηματίζεται τρίγωνον Α′Γ′Β′ ἴσον τῷ ΑΓΒ· διότι Α′Γ′=ΑΓ, ἡ γωνία Α′=Α καὶ αἱ γωνίαι Α′Γ′Β′ καὶ ΑΓΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἄρα ἡ πλευρὰ Α′Β′ τοῦ τριγώνου Α′Γ′Β′ εἶναι ἴση τῇ ΑΒ, ἤτοι τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

375. *Νὰ γραφῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.*

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς πόλων καὶ μὲ ἀκτῖνα, ἤτοι ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου ἴσην τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου, γράφομεν δύο μεγίστους κύκλους· ἔστω δὲ Π τὸ ἕτερον τῶν σημείων, καθ᾽ ἃ οὗτοι τέμνουσιν ἀλλήλους.

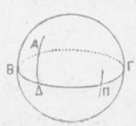


Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Π ὡς πόλου γράφομεν μέγιστον κύκλον, ὅστις θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β (373 πόρ.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

376. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νὰ ἀχθῇ τόξον μεγίστου κύκλου κάθετον ἐπὶ τὸν δοθέντα μέγιστον κύκλον ΒΔΓ.*

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς πόλου γράφομεν μέγιστον κύκλον, τέμνοντα τὸν δοθέντα ΒΔΓ κατὰ τὸ σημεῖον Π. Ἐκ τοῦ σημείου δὲ Π ὡς πόλου γράφομεν τόξον μεγίστου κύκλου ΑΔ, τὸ ὁποῖον θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΒΓ. Διότι τοῦ Π ὄντος



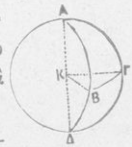
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πόλου τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΔ, πᾶς μέγιστος κύκλος διὰ τοῦ Π διερχόμενος θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ΑΔ, ἄρα καὶ ὁ ΒΔΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

377. *Ἡ γωνία δύο τόξων μεγίστων κύκλων ἔχει μέτρον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον τοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ὡς πόλου γεγραμμένου μεγίστου κύκλου.*

Ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι ὁ ΑΒΔ καὶ ὁ ΑΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ σημεῖον Α τῆς τομῆς αὐτῶν κορυφὴν ἔχουσα γωνία ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΒΓ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ πόλον ἔχει τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας.



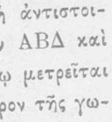
Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ καὶ ΚΓ, αἱ γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶναι ὀρθαί, διότι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι τεταρτημόρια. Ἄρα ἡ γωνία ΒΚΓ εἶναι ἡ γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν μεγίστων κύκλων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΒΚΓ ὡς γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου ΒΓ. Ἄρα τὸ τόξον ΒΓ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων δύνανται νὰ συγκρίνωνται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν των καὶ γεγραμμένων μὲ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν ὡς πόλους τόξων μεγίστων κύκλων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

378. α΄). *Σφαιρικὴ ζώνη* καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων. Οἱ κύκλοι, εἰς οὓς περατοῦται ἡ ζώνη, καλοῦνται *βάσεις* αὐτῆς, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων *ὕψος*.

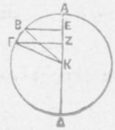


Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

β΄). *Τμῆμα σφαίρας* λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων. Οἱ κύκλοι, εἰς οὓς περα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦται τὸ τμῆμα λέγονται *βάσεις* αὐτοῦ, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων *ὕψος*.



Τὸ ἕτερον τῶν ἐπιπέδων δύναται νὰ ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ τμῆμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

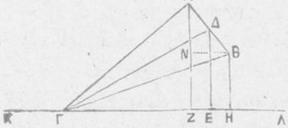
γ΄). Ἐν ᾧ τὸ ἡμικύκλιον στρεφόμενον παράγει τὴν σφαῖραν, πᾶς τομεὺς αὐτοῦ παράγει στερεόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται *σφαιρικὸς τομεύς*.

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν σφαῖραν παραγομένην ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΔ περὶ τὴν διάμετρον ΑΔ, τὸ τόξον ΒΓ θὰ γράψῃ ζώνην, ἧς βάσεις μὲν θὰ εἶναι οἱ κύκλοι οἱ ἔχοντες ἀκτῖνας ΒΕ καὶ ΓΖ, ὕψος δὲ ἡ ΕΖ. Τὸ τόξον ΑΒΓ θὰ γράψῃ ζώνην ἔχουσαν μίαν βάσιν. Τὸ μέρος ΒΓΖΕ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τμῆμα, ὡς καὶ τὸ ΑΒΓ, ὁ δὲ τομεὺς ΒΚΓ σφαιρικὸν τομέα, ὡς καὶ ὁ ΑΚΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

379. ***Ἡ ἐπιφάνεια ἡ γραφομένη ὑπὸ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου στρεφομένου περὶ εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς του, καὶ μὴ τέμνουσαν αὐτό, ἔχει ἐμβαδὸν τὸ γινόμενον τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα προβολῆς τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὸ ὕψος αὐτοῦ περιφέρειαν.***

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΓΑΒ, ἔχον τὴν ΓΑ ἴσην τῇ ΓΒ· ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι περιστρέφεται ὁλόκληρον περιστροφὴν περὶ τὴν ΚΛ, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς του, καὶ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἣν γράφει ἡ βάσις ΑΒ, καὶ ἣν διὰ συντομίαν θέλομεν σημειοῖ ἐπιφ.ΑΒ, ἔχει ἐμβαδὸν τὸ γινόμενον τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα προβολῆς τῆς ΑΒ, ἤτοι τῆς ΖΗ, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα τὸ ὕψος ΓΔ τοῦ τριγώνου, ἣν διὰ συντομίαν θέλομεν παριστᾷ διὰ περιφ.ΓΔ.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διότι κατὰ τὸ ἐδάφιον 364 ἔχομεν

ἐπιφ.ΑΒ=ΑΒ×περιφ.ΔΕ.

Ἀλλ' ἀχθείσης ἐκ τοῦ Β παραλλήλου τῷ ἄξονι τῆς ΒΝ, τὰ τρίγωνα ΑΒΝ καὶ ΓΔΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των καθέτους, ἑκάστην ἐφ' ἑκάστης. Ἐκ τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΒΝ = ΓΔ : ΔΕ.

Ἐπειδὴ δὲ ΒΝ=ΖΗ, καὶ ΓΔ : ΔΕ = περιφ. ΓΔ : περιφ.ΔΕ, ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας λαμβάνομεν

ΑΒ : ΖΗ=περιφ.ΓΔ : περιφ.ΔΕ,

ὅθεν ΑΒ×περιφ.ΔΕ=ΖΗ×περιφ.ΓΔ.

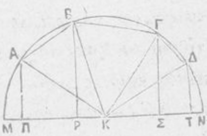
Ἄρα ἐπιφ.ΑΒ=ΖΗ×περιφ.ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει καὶ ὅταν ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι. Διότι τότε ἡ ΓΔ ταὐτίζεται τῇ ΔΕ, ἡ ΑΒ εἶναι ἴση τῇ προβολῇ αὐτῆς, καὶ ἀμέσως λαμβάνομεν

ἐπιφ.ΑΒ=ΖΗ×περιφ. ΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

380. *Ἐὰν εἰς τόξον κύκλου ἐγγραφῇ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, στραφῇ δὲ τὸ τόξον περὶ διάμετρόν τινα μὴ τέμνουσαν αὐτό, τὴν ΜΝ, ὁλόκληρον περιστροφήν, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς γραφομένης ἐπιφανείας ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα ΜΝ προβολῆς ΠΤ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ τόξον, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς ΑΒΓΔ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν.*



Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει τὸ τόξον ΑΒΓΔ, ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς τῆς τεθλασμένης γραμμῆς αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ κτλ. εἶναι ἰσοσκελῆ· παριστῶντες δὲ τὰ ὕψη αὐτῶν διὰ Υ, Υ', Υ'', κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν·

ἐπιφ.ΑΒ=ΠΡ×περιφ.Υ

ἐπιφ.ΒΓ=ΡΣ×περιφ.Υ'

ἐπιφ. ΓΔ=ΣΤ×περιφ.Υ''.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ Υ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων καὶ Υ'' τὸ ἐλάχιστον, ἔχομεν

$$\text{ἐπιφ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. ΓΔ} < (\text{ΠΡ} + \text{ΡΣ} + \text{ΣΤ}) \times \text{περιφ. Υ}$$

ἢ
$$\text{ἐπιφ.ΑΒΓΔ} < \text{ΠΤ} \times \text{περιφ. Υ}$$

Ὁμοίως
$$\text{ἐπιφ.ΑΒΓΔ} > \text{ΠΤ} \times \text{περιφ. Υ''}.$$

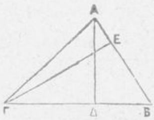
Ἀλλὰ Υ καὶ Υ'' ἔχουσι κοινὸν ὅριον τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ κύκλου. Ἄρα ἑκάτερον τῶν γινομένων ΠΤ×περιφ.Υ'', καὶ ΠΤ× περιφ.Υ ἔχει ὅριον ΠΤ×περιφ.ΚΑ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ τῶν γινομένων τούτων, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὴ τὸ αὐτὸ ὅριον, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ'(ἐπιφ.ΑΒΓΔ)} = \text{ΠΤ} \times \text{περιφ. ΚΑ}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

381. *Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τριγώνου περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του, καὶ μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης πλευρά, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ εἰς ταύτην ὡς βάσιν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους τοῦ τριγώνου.*

Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περί τινα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τὴν ΒΓ. Ὁ ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΓΑΒ παραγόμενος ὄγκος (ὃν διὰ συντομίαν θέλομεν σημειοῖ ὄγκ.ΓΑΒ), εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΑΔ καὶ ΒΑΔ. Ἄρα ἔχομεν



$$\text{ὄγκ.ΓΑΒ} = \frac{1}{3}\pi \times (\text{ΑΔ})^2 \times \text{ΓΔ} + \frac{1}{3}\pi \times (\text{ΑΔ})^2 \times \text{ΔΒ} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times (\text{ΑΔ})^2 \times \text{ΓΒ}.$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ἡ ΓΕ, θὰ εἶναι ΑΔ×ΓΒ=ΑΒ×ΓΕ, διότι ἑκάτερον τῶν γινομένων τούτων εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΓΑΒ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

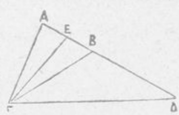
Ἐὰν λοιπὸν ἐν τῇ ἰσότητι $\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\frac{1}{3}\pi\times(ΑΔ)^2\times ΓΒ$, ἀντικαταστήσωμεν $ΑΔ\times ΓΒ$ διὰ $ΑΒ\times ΓΕ$, λαμβάνομεν

$$\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\frac{1}{3}\pi\times ΑΔ\times ΑΒ\times ΓΕ$$

Ἐπειδὴ δὲ $\pi\times ΑΔ\times ΑΒ$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῆς ΑΒ γραφομένης κωνικῆς ἐπιφανείας (363), ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\text{ἐπιφ}ΑΒ\times\frac{1}{3}ΓΕ.$$

β'). Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περὶ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ μόνης τῆς κορυφῆς Γ.



Ἄς προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ μέχρις οὗ συμπέσῃ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΕ. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\text{ὄγκ.}ΓΑΔ-\text{ὄγκ.}ΓΒΔ.$$

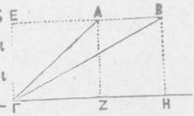
Ἀλλὰ $\text{ὄγκ.}ΓΑΔ=\text{ἐπιφ.}ΑΔ\times\frac{1}{3}ΓΕ$, $\text{ὄγκ.}ΓΒΔ=\text{ἐπ.}ΒΔ\times\frac{1}{3}ΓΕ$.

Ἄρα $\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\text{ἐπιφ.}ΑΔ\times\frac{1}{3}ΓΕ-\text{ἐπιφ.}ΒΔ\times\frac{1}{3}ΓΕ$,

ἢ $\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=(\text{ἐπιφ.}ΑΔ-\text{ἐπιφ}ΒΔ)\times\frac{1}{3}ΓΕ$

ἢ τέλος $\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\text{ἐπιφ.}ΑΒ\times\frac{1}{3}ΓΕ.$

γ'). Ὅταν ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι, καὶ τότε τὸ θεώρημα ἀληθεύει. Διότι ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΑΖ καὶ ἡ ΒΗ, ἔχομεν προφανῶς



$$\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\text{ὄγκ.}ΓΑΖ+\text{ὄγκ }ΑΖΗΒ-\text{ὄγκ.}ΓΒΗ.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ὄγκ.}ΓΑΖ=\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2\times ΓΖ$, $\text{ὄγκ.}ΑΖΗΒ=\pi(ΑΖ)^2\times ΖΗ$,

$\text{ὄγκ.}ΓΒΗ=\frac{1}{3}\pi(ΒΗ)^2\times ΓΗ=\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2\times ΓΗ$, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2\times ΓΖ+\pi(ΑΖ)^2\times ΖΗ-\frac{1}{3}\pi(ΑΖ)^2\times ΓΗ,$$

ἤτοι $\text{ὄγκ.}ΓΑΒ=\pi(ΑΖ)^2\times\left(\frac{1}{3}ΓΖ+ΖΗ-\frac{1}{3}ΓΗ\right).$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ ΓΗ=ΓΖ+ΖΗ, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται

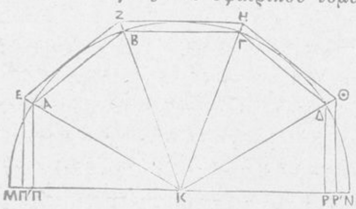
$$\text{ὄγκ.}\Gamma AB = \pi(AZ)^2 \times \frac{2}{3} ZH = 2\pi AZ \times ZH \times \frac{1}{3} AZ.$$

Ἀλλὰ 2πΑΖ×ΖΗ=2πΑΖ×ΑΒ=ἐπιφ.ΑΒ, καὶ ΑΖ=ΓΕ.

Ἄρα $\text{ὄγκ.}\Gamma AB = \text{ἐπιφ.}AB \times \frac{1}{3} \Gamma E\cdot$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

382. *Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΚΔ περὶ τὴν διάμετρον ΜΝ ὡς ἄξονα, εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς περιστροφῆς κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ἐγγεγραμμένου ἐν τῷ κυκλικῷ.*



Ἄς ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον ΑΔ κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ, καὶ ἄς περιγράψωμεν τὴν ὁμοίαν ταύτῃ ΕΖΗΘ. Ὁ ὄγκος τοῦ ὑπὸ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως ΚΑΒΓΔ παραγομένου στερεοῦ, ὃν διὰ συντομίαν θὰ παριστῶμεν δι' ὄγκ.ΚΑΒΓΔ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν ἴσων τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ὧν τὸ ὕψος παριστῶμεν δι' Υ. Ἄρα ἔχομεν

$$\text{ὄγ.}KAB\Gamma\Delta = \text{ἐπιφ.}AB \times \frac{1}{3}\Upsilon + \text{ἐπ.}B\Gamma \times \frac{1}{3}\Upsilon + \text{ἐπ.}\Gamma\Delta \times \frac{1}{3}\Upsilon.$$

ἤτοι $$\text{ὄγκ.}KAB\Gamma\Delta = \text{ἐπιφ.}AB\Gamma\Delta \times \frac{1}{3}\Upsilon.$$

Ὡμοίως εὑρίσκομεν, παρατηροῦντες ὅτι τὸ ὕψος τῶν περιγεγραμμένων τριγώνων εἶναι ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΚΑ τοῦ κύκλου,

$$\text{ὄγκ.}KEZH\Theta = \text{ἐπιφ.}EZH\Theta \times \frac{1}{3} KA.$$

Ἄς ζητήσωμεν ἤδη τὰ ὅρια, εἰς ἃ τείνουσιν οἱ ὄγκοι ΚΑΒΓΔ καὶ ΚΕΖΗΘ, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ τείνωσιν εἰς τὸ μηδέν. Ταῦτα εὑρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ εἶναι ΠΡ×περιφ.ΚΑ, τοῦ τῆς ἐπιφανείας ΕΖΗΘ εἶναι ὡσαύτως ΠΡ×περιφ.ΚΑ, διότι ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΠ' προβολὴ οὖσα τῆς ΑΕ τείνει εἰς τὸ μηδὲν μετὰ ταύτης ὡς καὶ ἡ Ρ'Ρ, διὰ τοῦτο δὲ ἡ Π'Ρ' ἔχει ὅριον τὴν ΠΡ, καὶ τοῦ Υ ὅριον εἶναι ἡ ΚΑ. Ἔχομεν λοιπὸν

$$\text{ὅρ. ὄγκ.}ΚΑΒΓΔ=\text{ὅρ.}(\text{ἐπιφ.}ΑΒΓΔ\times\frac{1}{3}Υ)=$$

$$ΠΡ\times\text{περ.}ΚΑ\times\frac{1}{3}ΚΑ.$$

$$\text{ὅρ. ὄγκ.}ΚΕΖΗΘ=\text{ὅρ. }(\text{ἐπιφ.}ΕΖΗΘ\times\frac{1}{3}ΚΑ)=$$

$$ΠΡ\times\text{περ.}ΚΑ\times\frac{1}{3}ΚΑ.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι οἱ ὄγκοι ΚΑΒΓΔ καὶ ΚΕΖΗΘ ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον· τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά των δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ὄγκου. Ἀλλ' ὁ σφαιρικὸς τομεὺς ὡς μείζων μὲν τοῦ στερεοῦ ΚΑΒΓΔ μικρότερος δὲ τοῦ στερεοῦ ΚΕΖΗΘ διαφέρει ἑκατέρου τούτων ὀλιγώτερον ἢ ὅτι οὗτοι διαφέρουσιν ἀλλήλων· ἄρα ἡ διαφορὰ τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ ΚΑΒΓΔ δύναται νὰ γείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ὄγκου, δηλονότι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ΚΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

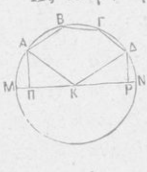
ΟΡΙΣΜΟΙ

383. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καλοῦμεν τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἣν παράγει περιστρεφομένη τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ τόξῳ τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὑφ' οὗ περιστρεφομένου παράγεται ὁ σφαιρικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ

384. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.*

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς περιστροφῆς τοῦ τόξου ΑΒΔ περὶ



τὴν διάμετρον ΜΝ παραγομένην ζώνην, καὶ ἔσωσαν ΑΠ καὶ ΔΡ αἱ ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ τόξου ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετοι. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης ταύτης εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὑπὸ τῆς ἐν τῷ τόξῳ ΑΓΔ ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παραγομένης ἐπιφανείας. Τὸ ὅριον δὲ τοῦτο κατὰ τὰ ἀνωτέρω (380) εἶναι ΠΡ$\times$περιφ.ΚΑ, ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ΠΡ τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

385. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου.*

Διότι ἐὰν ἀντὶ τοῦ τόξου ΑΓΔ ληφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΜΑΝ, ἡ ζώνη γίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὅλης σφαίρας, ὕψος δὲ αὐτῆς εἶναι ἡ διάμετρος ΜΝ τῆς σφαίρας.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας δι' Α, ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου εἶναι $2\pi A$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $2\pi A \times 2A$, ἤτοι $4\pi A^2$. Ἐπειδὴ δὲ πA^2 εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μεγίστου κύκλου, βλέπομεν ὅτι *ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασία τῆς ἐπιφανείας μεγίστου κύκλου αὐτῆς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

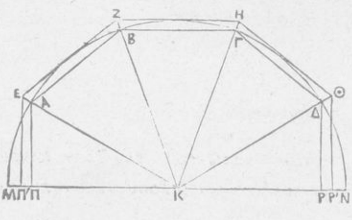
ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἐν ταῖς ἴσαις σφαίραις δύο ζῶναι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

386. *Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν σφαιρικὸν τομέα τὸν παραγόμενον ὑπὸ τῆς



περιστροφῆς τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΚΔ. Ἐὰν ἐν τῷ τόξῳ ΑΓΔ ἐγγραφῇ κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, ὁ σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι τὸ ὅριον τοῦ στερεοῦ, ὃ παράγει ὁ πολυγωνικὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τομεὺς ΚΑΒΓΔ. Τούτου δὲ ὁ ὄγκος ἔχει ὅριον κατὰ τὰ ἀνωτέρω (382) τὸ γινόμενον $\Pi P \times$ περιφ.$KA \times \frac{1}{3}KA$. Ἄρα

$$\text{σφ.τομ.}AK\Delta = \Pi P \times \text{περιφ.}KA \times \frac{1}{3}KA = \frac{2}{3}\pi (KA)^2 \times \Pi P$$

ἢ ἐπειδὴ $\Pi P \times$ περιφ.$KA =$ ζών.$A\Gamma\Delta$,

$$\text{ὄγκ.σφαιρ.τομ.}AK\Delta = \text{ζών.}A\Gamma\Delta \times \frac{1}{3}KA\cdot$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.

Διότι ἐὰν ἀντὶ τοῦ τόξου ΑΓΔ ληφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΜΑΝ, ἡ μὲν ζώνη ΑΔ γίνεται ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ὅλης σφαίρας, ὁ δὲ σφαιρικὸς τομεὺς ἴσος τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ.

Σημειώσεις. Ἔστω Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ Υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, ἥτις εἶναι βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Τῆς ζώνης τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι $2\pi A\Upsilon$, τοῦ δὲ σφαιρικοῦ τομέως ὁ ὄγκος

$$2\pi A\Upsilon \times \frac{1}{3}A, \text{ ἤτοι } \frac{2}{3}\pi A^2\Upsilon.$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ Υ ἴσον τῇ διαμέτρῳ 2Α τῆς σφαίρας, ὁ τομεὺς γίνεται ἴσος τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ· ταύτης λοιπὸν ὁ ὄγκος θὰ εἶναι

$$\frac{2}{3}\pi A^2 \times 2A, \text{ἤτοι } \frac{4}{3}\pi A^3.$$

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ Δ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, εἶναι

$A = \frac{\Delta}{2}, A^3 = \frac{\Delta^3}{8}$ καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{4}{3}\pi\frac{\Delta^3}{8}$ ἢ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν Σ καὶ σ εἶναι ἀνάλογοι τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν Α καὶ α.

Διότι $$\Sigma : \sigma = \frac{4}{3}\pi A^3 : \frac{4}{3}\pi\alpha^3,$$

ἤτοι $$\Sigma : \sigma = A^3 : \alpha^3.$$

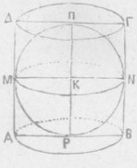
ΘΕΩΡΗΜΑ

387. *Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένου κυλίνδρου (συμπεριλαμ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) ὡς 2 πρὸς 3. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἶναι καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων σωμάτων.

Ἔστω ΠΜΡΝ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, ΑΒΓΔ τὸ περὶ



αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον. Ἐὰν στραφῇ περὶ τὴν ΠΡ τὸ ἡμικύκλιον ΡΜΠ καὶ μετ' αὐτοῦ τὸ ὀρθογώνιον ΠΡΑΔ, τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΠΡΑΔ τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν κύλινδρον.

Τὸ ὕψος ΠΡ τοῦ κυλίνδρου τούτου εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεως ΑΒ εἶναι ἴση τῇ διαμέτρῳ ΜΝ τῆς σφαίρας.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' Α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι $2\pi A \times 2A$ ἢ $4\pi A^2$, ἴση δηλονότι τῇ ἐπιφανείᾳ τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν καὶ τὰς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, αἵτινες εἶναι ἴσαι μεγίστοις κύκλοις τῆς σφαίρας, ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἑξαπλασία τῆς ἐπιφανείας μεγίστου κύκλου, ἤτοι $6\pi A^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια εἶναι $4\pi A^2$, ἔχομεν

$$\text{ἐπιφ.σφαίρας} : \text{ἐπιφ.κυλίνδρου} = 4\pi A^2 : 6\pi A^2 = 2 : 3.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ πA^2 ἐπὶ τὸ ὕψος 2Α, ἤτοι $2\pi A^3$· ὁ δὲ τῆς σφαίρας $\frac{4}{3}\pi A^3$.

Ἄρα $\quad \text{ὄγκ.σφαίρας} : \text{ὄγκ.κυλίνδρου} = \frac{4}{3}\pi A^3 : 2\pi A^3 = 2 : 3.$

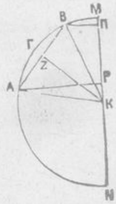
ΘΕΩΡΗΜΑ

388. *Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ κυκλικοῦ τμήματος στρεφομένου περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου μὴ τέμνουσαν τὸ τμῆμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου, οὗ ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, καὶ ὅστις ὕψος ἔχει τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.*

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΓΒ στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον ΜΝ. Ἔχομεν προφανῶς

$$\text{ὄγκ.ΑΓΒ} = \text{ὄγκ.ΚΑΓΒ} - \text{ὄγκ ΚΑΒ}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



'Αλλὰ ὄγκ.$ΚΑΓΒ=\frac{2}{3}\pi\times(ΚΑ)^2\times ΠΡ$,

ὄγκ.$ΚΑΒ=$ἐπιφ.$ΑΒ\times\frac{1}{3}ΚΖ$,

ἢ ἐπειδὴ ἐπιφ.$ΑΒ=2\pi\times ΚΖ\times ΠΡ$,

ὄγκ.$ΚΑΒ=\frac{2}{3}\pi\times(ΚΖ)^2\times ΠΡ$.

Ἄρα ὄγκ.$ΑΓΒ=\frac{2}{3}\pi\times(ΚΑ)^2\times ΠΡ-\frac{2}{3}\pi\times(ΚΖ)^2\times ΠΡ$.

ἤ, ὄγκ.$ΑΓΒ=\frac{2}{3}\pi[(ΚΑ)^2-(ΚΖ)^2]\times ΠΡ$.

'Αλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΖ ἔχομεν

$$(ΚΑ)^2-(ΚΖ)^2=(ΑΖ)^2=\frac{(ΑΒ)^2}{4}.$$

Ἄρα ὄγκ.$ΑΓΒ=\frac{2}{3}\pi\times\frac{(ΑΒ)^2}{4}\times ΠΡ$.

ἢ ὄγκ.$ΑΓΒ=\frac{1}{6}\pi\times(ΑΒ)^2\times ΠΡ$.

'Επειδὴ δὲ $\frac{1}{3}\pi\times(ΑΒ)^2\times ΠΡ$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, οὗ ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα ΑΒ, τὸ δὲ ὕψος εἶναι ΠΡ, ὁ ἀνωτέρω τύπος δεικνύει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΓΒ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου τούτου.

Σημειωσις. 'Εὰν τὸ κυκλικὸν τμῆμα γείνῃ ἴσον ἡμικυκλίῳ, ὁ ὑπ' αὐτοῦ παραγόμενος ὄγκος εἶναι ὁ τῆς σφαίρας ὁλοκλήρου· ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ χορδὴ ΑΒ καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς γίνονται ἴσαι τῇ διαμέτρῳ ΜΝ, ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει διὰ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας $\frac{1}{6}\pi\times(ΜΝ)^3$. Τοῦτο δὲ εὕρομεν καὶ ἐν τοῖς ἀνωτέρω.

ΘΕΩΡΗΜΑ

389. *'Ο ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος τῷ ὄγκῳ τῆς ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος σφαίρας, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων ἐχόντων βάσεις τὰς τοῦ τμήματος καὶ ὕψη ἴσα τῷ τοῦ τμήματος.*

Ἔστωσαν ΑΠ καὶ ΒΡ αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων καθέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΜΝ. Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ἔχον βάσεις τοὺς κύκλους τούτους καὶ ὕψος ΠΡ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΒΓ καὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΡΠ.

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{6}\pi \times (\text{ΑΒ})^2 \times \text{ΠΡ}.$$

Τοῦ δὲ ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΡΠ παραγομένου στερεοῦ ὄντος κολούρου κώνου, ἔχομεν (361).

$$\text{ὄγκ. ΑΒΡΠ} = \frac{1}{3}\pi[(\text{ΒΡ})^2 + (\text{ΑΠ})^2 + \text{ΒΡ} \times \text{ΑΠ}] \times \text{ΠΡ}.$$

Ἄρα $\quad \text{ὄγκ. ΑΓΒΡΠ} = \text{ὄγκ. ΑΓΒ} + \text{ὄγκ. ΑΒΡΠ} =$

$$= \frac{1}{6}\pi \times (\text{ΑΒ})^2 \times \text{ΠΡ} + \frac{1}{3}\pi[(\text{ΒΡ})^2 + (\text{ΑΠ})^2 + \text{ΒΡ} \times \text{ΑΠ}] \times \text{ΠΡ}.$$

$$\text{ἢ ὄγκ.ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi[(\text{ΑΒ})^2 + 2(\text{ΒΡ})^2 + 2(\text{ΑΠ})^2 + 2\text{ΒΡ} \times \text{ΑΠ}] \times \text{ΠΡ}$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΠ ἡ ΒΕ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ λαμβάνομεν

$$(\text{ΑΒ})^2 = (\text{ΒΕ})^2 + (\text{ΑΕ})^2 = (\text{ΠΡ})^2 + (\text{ΑΠ} - \text{ΒΡ})^2$$

$$\text{ἢ} \quad (\text{ΑΒ})^2 = (\text{ΠΡ})^2 + (\text{ΑΠ})^2 + (\text{ΒΡ})^2 - 2\text{ΑΠ} \times \text{ΒΡ}.$$

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ΑΒ^2 ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐκφράσει τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΓΒΡΠ, καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀναγωγάς, λαμβάνομεν

$$\text{ὄγκ.ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi[(\text{ΠΡ})^2 + 3(\text{ΒΡ})^2 + 3(\text{ΑΠ})^2] \times \text{ΠΡ}.$$

$$\text{ἢ ὄγκ.ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi \times (\text{ΠΡ})^3 + \frac{1}{2}[\pi(\text{ΒΡ})^2 \times \text{ΠΡ} + \pi.(\text{ΑΠ})^2 \times \text{ΠΡ}]$$

Ἀλλὰ $\frac{1}{6}\pi \times (\text{ΠΡ})^3$ ἐκφράζει τὸν ὄγκον σφαίρας, ἧς διάμετρος εἶναι τὸ ὕψος ΠΡ τοῦ τμήματος, τὰ δὲ γινόμενα $\pi(\text{ΒΡ})^2 \times \text{ΠΡ}$, $\pi.(\text{ΑΠ})^2 \times \text{ΠΡ}$ ἐκφράζουσι τοὺς ὄγκους δύο κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ΠΡ, ἤτοι τὸ τοῦ τμήματος, καὶ βάσεις τοὺς κύκλους ΒΡ καὶ ΑΠ, ἤτοι τὰς βάσεις τοῦ τμήματος. Ὥστε τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄). ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον καὶ σχηματίζουσα γωνίας ἴσας μετὰ τριῶν εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διερχομένων διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

2) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα ἐκείνη εἶναι παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ.

3) Ἐπίπεδον παράλληλον εὐθείᾳ καθέτῳ ἐπὶ δευτέρου ἐπιπέδου εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

4) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα διέρχωνται τὸ μὲν διὰ τῆς ἑτέρας δύο παραλλήλων εὐθειῶν τὸ δὲ διὰ τῆς ἑτέρας, ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλος ταῖς εὐθείαις ταύταις.

5) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα εἶναι παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων εἶναι παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.

6) Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ διερχόμενα διὰ δύο εὐθειῶν παραλλήλων, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένων, εἶναι παράλληλα.—Πόρισμα τούτου εἶναι ὅτι αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

7) Πᾶσα εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον εἶναι κάθετος ἐπὶ εὐθείας τινὸς κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διερχομένης διὰ τοῦ ποδός της· μία δὲ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει.

8) Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ταύτης ἐπὶ ἐπίπεδόν τι οἱονδήποτε εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ πρώτου.

9) Τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν ὕψων τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῆς τομῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς τριέδρου γωνίας δι' ἐπιπέδου, εἶναι ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προβολὴ τῆς κορυφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας.

10) Ἐὰν δύο ἕδραι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ εἰς ταύτας ἀντικείμεναι δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· καὶ τἀνάπαλιν.

11) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τριέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δρου στερεᾶς γωνίας καὶ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι τῆς ἀκμῆς ταύτης ἕδραν, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

12) Ἐὰν διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας εὐθειῶν ἀχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

13) Τὰ ἐκ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

14) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων πασῶν τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἐπιπέδου ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου εἶναι ἴσον τῷ ὀκταπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀποστήματος τοῦ κέντρου αὐτοῦ.

15) Πάντα τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα δύο σφαιρῶν, ἀφίνοντα ταύτας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, τέμνουσι τὴν διὰ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν διερχομένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα τῶν σφαιρῶν, ἀφίνοντα ταύτας πρὸς μέρη διάφορα.

16) Ἐὰν ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν τετραέδρου αχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ ταύτας, πάντα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν τεσσάρων τοῦ τετραέδρου κορυφῶν, ἑπομένως εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τετράεδρον περιγεγραμμένης σφαίρας.

17) Αἱ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

18) Ἐν παντὶ τετραέδρῳ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι ἑκάστην κορυφὴν μετὰ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι ἕδρας τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

19) Τῶν ἐχόντων ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας κυλίνδρων οἱ ὄγκοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων, τῶν δὲ ἐχόντων ἰσοδυνάμους ὄγκους αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν αὐτῶν ἀκτίνων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΕΙΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Ζητεῖται ὁ γεωμετρικὸς τόπος,

1) Τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων.

2) Τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

3) Τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

4) Τῶν σημείων ἐπιπέδου, ἅτινα ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

5) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΠΡ, ἐπὶ τὰς διαφόρους εὐθείας, αἵτινες κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

6 καὶ 7) Τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἔχουσι διαφορὰν ἢ ἄθροισμα σταθερόν.

8) Τοῦ μέσου εὐθείας σταθερᾶς τὸ μῆκος, ἧς τὰ ἄκρα κεῖνται πάντοτε ἐπὶ δύο εὐθειῶν, μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ σχηματιζουσῶν ὀρθὴν γωνίαν. (Γωνία δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λέγεται ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει ἡ ἑτέρα μετὰ τῆς ἔκ τινος σημείου ταύτης ἠγμένης παραλλήλου τῇ ἑτέρᾳ).

9) Τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

10) Τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον μ : ν.

11 καὶ 12) Τῶν κέντρων τῶν τομῶν δοθείσης σφαίρας ὑπ' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου, ἢ δοθείσης εὐθείας

13) Τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, αἵτινες τέμνουσι δύο δοθείσας σφαίρας κατὰ μεγίστους κύκλους.

14) Τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, αἵτινες τέμνουσι τρεῖς δοθείσας σφαίρας κατὰ μεγίστους κύκλους.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

1) Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

2) Δίδεται εὐθεῖα καὶ δύο σημεῖα· ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖον, οὗ τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο δοθέντων σημείων νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας Μ τετραγώνῳ.

3) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, τέμνουσα τὰς δύο δοθείσας εὐθείας ΓΔ καὶ ΕΖ, μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

3) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀποτμηθείσης πυραμίδος νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν τῆς δοθείσης τὸν δοθέντα λόγον $\mu : \nu$.

5) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα τετράεδρος στερεὰ γωνία οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

6) Νὰ γραφῇ σφαῖρα, ἧς ἡ ἐπιφάνεια νὰ διέρχηται διὰ τεσσάρων δοθέντων σημείων, ἅτινα δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

7) Διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς δοθείσης σφαίρας.

8) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῶν δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

9) Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ ὁρῶνται ὑπὸ ἴσας γωνίας αἱ ἀκτῖνες τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

10) Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῶν τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

11) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα εἰς τὸ δοθὲν τετράεδρον.

12) Νὰ γραφῇ σφαῖρα μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα, τέμνουσα κατὰ μεγίστους κύκλους τρεῖς δοθείσας σφαίρας.

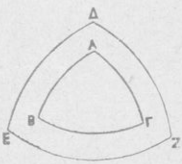
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, τοῦ ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ Α,Β,Γ ὡς πόλων γραφῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΕΖ, ΔΖ, ΔΕ, ταῦτα σχηματίζουσι νέον τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον καλεῖται *πολικὸν* τοῦ ΑΒΓ.



Ἡ τῇ Α ὁμόλογος κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῶν πόλους τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἐχόντων μεγίστων κύκλων, τὸ κείμενον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐκ τῶν δύο ἡμισφαιρίων, εἰς ἃ ὁ μέγιστος κύκλος ΒΓ διαιρεῖ τὴν σφαῖραν, ἐφ' οὗ καὶ τὸ σημεῖον Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

2. *Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ πολικὸν τὸ ΔΕΖ, καὶ τἀνάπαλιν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ ἔχῃ πολικὸν τὸ ΑΒΓ.* (Σχῆμα τὸ ἀνωτέρω).

Διότι τοῦ Α ὄντος πόλου τοῦ τόξου ΕΖ, ἡ ἀπόστασις ΑΕ εἶναι τεταρτημόριον. Ὁμοίως τοῦ σημείου Γ ὄντος πόλου τοῦ τόξου ΕΔ, τὸ ἀπόστημα ΓΕ εἶναι τεταρτημόριον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ἀποστήματα τοῦ σημείου Ε ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Γ εἶναι τεταρτημόρια, τὸ Ε εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ. Προσέτι δὲ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΓ πρὸς ὃ καὶ τὸ Β. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι τὸ Δ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΒΓ καὶ τὸ Ζ τοῦ ΑΒ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ πολικὸν τοῦ ΔΕΖ.

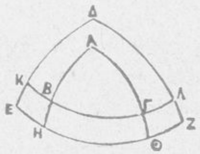
ΘΕΩΡΗΜΑ

3. *Δοθέντων δύο πολικῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων ἔχει μέτρον ἡμιπεριφέ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρειαν ἠλαττωμένην κατὰ τὴν ἀντικειμένην πλευρὰν τοῦ ἑτέρου τριγώνου.

Λέγω δηλαδὴ ὅτι ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον ἡμιπεριφέρειαν ἠλαττωμένην κατὰ τὸ τόξον ΕΖ, καὶ ἡ γωνία Δ ἡμιπεριφέρειαν ἠλαττωμένην κατὸ τὸ τόξον ΒΓ. Διότι ἂς προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρις οὗ συμπέσωσι τῇ ΕΖ κατὰ τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον



ΕΘ εἶναι τεταρτημόριον, διότι τὸ Ε εἶναι πόλος τοῦ ΑΘ, καὶ τὸ τόξον ΗΖ εἶναι τεταρτημόριον, διότι τὸ Ζ εἶναι πόλος τοῦ ΑΗ.

Ἄρα εἶναι ΕΘ + ΗΖ = ἡμιπεριφερείᾳ.

Ἀλλὰ ΕΘ + ΗΖ = ΕΘ + ΘΖ + ΘΗ = ΕΖ + ΗΘ.

Ἄρα ΕΖ + ΗΘ = ἡμιπεριφερείᾳ,

ὅθεν ΗΘ = ἡμιπεριφ. — ΕΖ.

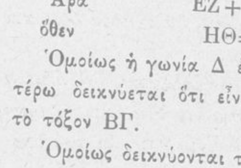
Ὁμοίως ἡ γωνία Δ ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΚΛ, ὅπερ ὡς ἀνωτέρω δεικνύεται ὅτι εἶναι ἴσον ἡμιπεριφερείᾳ ἠλαττωμένῃ κατὰ τὸ τόξον ΒΓ.

Ὁμοίως δεικνύονται τὰ αὐτὰ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν τῶν πολικῶν τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

4. *Δύο τρίγωνα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἔχουσι πάντα τὰ μέρη των ἴσα, ἐὰν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων.*

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ἡ πλευρὰ ΑΓ = ΔΖ, καὶ ἡ γωνία Α = Δ. Τότε, ἐὰν μὲν ἡ διάταξις τῶν δύο ἴσων πλευρῶν ὡς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἡ αὐτή, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἀπαραλλάκτως ὅπως καὶ δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων.



Ἐὰν δὲ ἡ διάταξις εἶναι διάφορος, ἐπιθέτομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ τὸ ΗΘΚ. Κατ' ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰ λοιπά των μέρη ἴσα, ἤτοι τὴν πλευρὰν ΒΓ =ΕΖ, τὴν γωνίαν Β=Ε καὶ τὴν γωνίαν Γ=Ζ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

5. *Δύο τρίγωνα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσα κατὰ πάντα τὰ μέρη των, ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ταύτῃ προκειμένας γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.*

Διότι τὸ ἕτερον τρίγωνον δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τὸ ἕτερον ἢ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ, ὅπως καὶ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

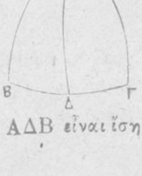
6. *Ἐὰν δύο τρίγωνα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἔχωσι τὰς πλευράς των ἴσας, θὰ ἔχωσιν ἴσας καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας.*

Διότι ἐὰν τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζεύξωμεν δι' εὐθειῶν μετὰ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, θὰ σχηματισθῶσι δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, ὧν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπὸ ἴσων τόξων, τῶν ἴσων πλευρῶν τῶν τριγώνων, μετρούμεναι. Ἀλλ' ὅταν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας των ἴσας, ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς διέδρους των γωνίας τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων ἑδρῶν. Ἀλλ' αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου· ἄρα αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

7, *Παντὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.*

Ἔστω ΑΒ=ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ Β=Γ.



Διότι ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθῇ εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως τόξον μεγίστου κύκλου, σχηματίζονται δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας καὶ διὰ τοῦτο ἴσα, τὸ ΑΒΔ καὶ τὸ ΑΓΔ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συνάγομεν ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι ἴση τῇ Γ. Ἐπειδὴ προσέτι ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἴση

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῇ ΑΔΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ ἴση τῇ ΓΑΔ, συνάγομεν ὅτι, *τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἀγόμενον τόξον μεγίστου κύκλου εἶναι κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.*

Σημειωσις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος συνάγομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου τρίγωνον εἶναι ἴσον αὐτῷ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

8. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου σφαιρικοῦ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι, δηλονότι τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.*

Διότι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, οὗ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ὑποτίθενται ἴσαι, τὸ συμμετρικὸν Α′Β′Γ′ θὰ ἔχῃ τὰς γωνίας Β′ καὶ Γ′ ἴσας. Ἐὰν δὲ θελήσωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τὸ συμμετρικόν του Α′Β′Γ′, ἡ πλευρὰ ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν Α′Γ′ τὴν ἴσην τῇ ΑΓ· ἄρα ΑΒ=ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

9. *Ἐὰν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι μείζων τῆς Γ, καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς Α γωνίας πλευρὰ ΑΓ θὰ εἶναι μείζων τῆς ἀπέναντι τῆς Γ γωνίας πλευρᾶς ΑΒ. Καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν ΑΓ>ΑΒ καὶ ἡ γωνία Β θὰ εἶναι μείζων τῆς Γ.*

Διότι ἂς σχηματισθῇ πρὸς τῷ σημείῳ Β ἡ γωνία ΓΒΔ ἴση τῇ Γ. Τότε ΓΔ = ΒΔ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν ΑΒ<ΑΔ + ΔΒ, καὶ ἀντικατασταθείσης τῆς ΔΒ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΔΓ, ΑΒ<ΑΔ + ΔΓ, ἤτοι ΑΒ<ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′). Ἐὰν ὑποτίθεται ΑΓ>ΑΒ, τότε καὶ ἡ γωνία Β θὰ εἶναι μείζων τῆς Γ. Διότι ἐὰν μὲν ὑποτεθῇ Β = Γ, τότε θὰ εἶναι καὶ ΑΓ = ΑΒ· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ Β<Γ, τότε θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ΑΓ<ΑΒ· ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἄρα Β>Γ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΩΡΗΜΑ

10. *Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα καὶ τὰς γωνίας των ἴσας ἔχοντα, ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἴσας.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα τρίγωνα, Π καὶ Ρ τὰ πολικὰ αὐτῶν. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα Α καὶ Β ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, τὰ πολικὰ αὐτῶν Π καὶ Ρ θὰ ἔχωσι τὰς πλευράς των ἴσας (3), ὡς ἐκ τούτου δὲ θὰ ἔχωσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας (6). Ἐκ τοῦ ὅτι δὲ τὰ τρίγωνα Π καὶ Ρ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, συνάγομεν ὅτι τὰ πολικὰ αὐτῶν Α καὶ Β θὰ ἔχωσι τὰς πλευράς των ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

11. *Ἐὰν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τὸ ἄθροισμα εἶναι μεγαλείτερον 2 ὀρθῶν καὶ μικρότερον 6, ἔτι δὲ τὸ ἄθροισμα οἱασδήποτε τῶν γωνιῶν καὶ δύο ὀρθῶν εἶναι μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο, δύναται νὰ σχηματισθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχον τὰς γωνίας ταύτας Α, Β, Γ.*

Διότι ὑπαρχουσῶν μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, δύναται νὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχουσα διέδρους τὰς γωνίας Α, Β, Γ, (313, σημ. Β'.). Ἐὰν δὲ ἡ κορυφὴ ταύτης τῆς στερεᾶς γωνίας τεθῇ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ τέμνωσι τὴν σφαῖραν κατὰ τρία τόξα μεγίστων κύκλων ἀποτελοῦντα τρίγωνον σφαιρικὸν ἔχον τὰς γωνίας Α,Β,Γ.

ΟΡΙΣΜΟΙ

12. Καλεῖται *ἄτρακτος* μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν αὐτῶν διάμετρον.

Σφαιρικὸς δὲ *ὄνυξ* εἶναι τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ περατούμενον ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων, καὶ τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ ἄτρακτος.

Σφαιρικὴ πυραμὶς εἶναι μέρος τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς γωνίας, ἧς ἡ κορυφὴ κεῖται ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ κέντρου. *Βάσις* τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν ῥηθέντων ἐπιπέδων ὁριζόμενον σφαιρικὸν πολύγωνον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

13. *Δύο ἄτρακτοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ γωνίαι των, ἢ ὡς τὰ τόξα τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας ταύτας.*

Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι διπλασιαζομένης ἢ τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς γωνίας τοῦ ἀτράκτου, καὶ οὗτος διπλασιάζεται ἢ τριπλασιάζεται κτλ.

Ἔστω Α ἄτρακτός τις καὶ Γ ἡ γωνία αὐτοῦ, Α′ ὁ ἄτρακτος, οὗ ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ ὅστις εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ὅλης σφαίρας· θέλομεν ἔχει $A : A' = \Gamma : 1 = \Gamma$.

Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἄτρακτος, οὗ ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, ληφθῇ ὡς μονάς, τοῦ ἀτράκτου Α μέτρον θὰ εἶναι ἡ γωνία του Γ· τοῦτο δὲ ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι ὁ *ἄτρακτος ἔχει μέτρον τὴν γωνίαν του*. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον Τ, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τὴν γωνίαν ὀρθὴν ἔχοντος ἀτράκτου, ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία γίνεται $A : 2T = \Gamma : 1$

ἤτοι $A : T = 2\Gamma : 1$.

Ἡ ἀναλογία αὕτη δεικνύει ὅτι *ἐὰν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, μέτρον τοῦ ἀτράκτου εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

14. *Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα συμμετρικὰ εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ Α′Β′Γ′ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Π τοῦ διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ διερχομένου μικροῦ κύκλου ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα. Ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΠΚΠ′, καὶ τὰ τόξα μεγίστων κύκλων Π′Α′, Π′Β′, Π′Γ′.

Αἱ γωνίαι ΠΚΑ καὶ Π′ΚΑ′ ὡς κατὰ κορυφὴν εἶναι ἴσαι· ἄρα τόξον ΑΠ=τόξῳ Α′Π′. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ΠΒ=Π′Β′, καὶ ΠΓ=Π′Γ′. Ἐπειδὴ δὲ

ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ, ἄρα καὶ Π′Α′=Π′Β′=Π′Γ′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

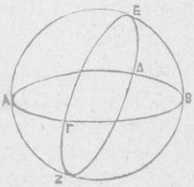
Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, Α'Π'Γ' ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν, ἔτι δὲ εἶναι ἰσοσκελῆ· ἄρα εἶναι ἴσα· Ὁμοίως δὲ τὸ τρίγωνον ΓΠΒ εἶναι ἴσον τῷ Γ'Π'Β', καὶ τὸ τρίγωνον ΑΠΒ ἴσον τῷ Α'Π'Β'. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ὡς ἀθροίσματα ἴσων τριγώνων κατὰ διάφορον τάξιν τεταγμένων εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐὰν ὁ πόλος Π ἦτον ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ ἦτο ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι δύο ἐκ τῶν τριῶν τριγώνων ΠΑΒ,ΠΑΓ,ΠΒΓ, ἠλαττωμένῳ κατὰ τὸ τρίτον. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ θὰ συνέβαινε καὶ εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ', καὶ πάλιν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β Γ' θὰ ἦσαν ἰσοδύναμα.

Σημειωσις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως καταφαίνεται ὅτι καὶ αἱ τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες αἱ ἔχουσαι βάσεις τὰ συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

15. *Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΕΒ, ΓΕΔ τέμνωνται ὁπωσδήποτε ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ ΑΒΓΔΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀτράκτῳ, οὗ ἡ γωνία εἶναι ΑΕΓ.*



Διότι ἂς προσεκβληθῶσι τὰ τόξα ΑΕ,ΕΓ μέχρις οὗ συμπέσωσι κατὰ τὸ Ζ. Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν ΑΕΒ καὶ ΕΑΖ ἀφαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΕ, μένει τὸ τόξον ΕΒ ἴσον τῷ τόξῳ ΑΖ. Ὁμοίως δὲ δεικνύεται καὶ ὅτι ΕΔ=ΓΖ καὶ ΒΔ=ΑΓ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΕΔ, ΑΖΓ ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας καὶ συμμετρικὰ ὄντα ἀλλήλοις εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἀθροίσματι τῶν τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΑΖΓ, ἤτοι τῷ ἀτράκτῳ ΕΑΖΓ, οὗ ἡ γωνία εἶναι ἡ ΑΕΓ.

Σημειωσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων τῶν ἐχουσῶν βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΔ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, οὗ ἡ γωνία εἶναι ἡ ΑΕΓ.

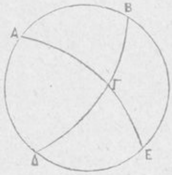
ΘΕΩΡΗΜΑ

16. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ὡς μονάδος ἐπιφα-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νείας λαμβανομένου τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας.

Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικὸν τρίγωνον· ἂς συμπληρωθῇ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΕΔ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι τὰ τόξα ΑΓ, ΒΓ μέχρις οὗ συμπέσωσι αὐτῷ κατὰ τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ. Ἔχομεν προφανῶς



ΑΒΓ + ΒΓΕ = ἀτράκτῳ Α

ΑΒΓ + ΑΓΔ = ἀτράκτῳ Β

καὶ ΑΒΓ + ΔΓΕ = ἀτράκτῳ Γ,

κατὰ τὸ ἀμέσως προηγούμενον θεώρημα. Προσθέτοντες τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ τούτων τριγώνων ὑπερβαίνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχομεν

$$2\text{ΑΒΓ} + \frac{1}{2}\text{σφαίρας} = \text{ἄτρ. Α} + \text{ἄτρ. Β} + \text{ἄτρ. Γ}.$$

Λαμβάνοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἰσοδυνάμων ἐπιφανειῶν, ἃς παριστῶσι τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος, καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμισφαιρίου εἶναι 4, εὑρίσκομεν

$$2.\ \text{ἐμβαδὸν ΑΒΓ} + 4 = 2\text{Α} + 2\text{Β} + 2\text{Γ}.$$

Ἀφαιροῦντες 4 ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ ἔπειτα διαιροῦντες διὰ 2 λαμβάνομεν

$$\text{ἐμβαδὸν ΑΒΓ} = \text{Α} + \text{Β} + \text{Γ} - 2\cdot$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω $\text{Α} = 63^0\ 25'$, $\text{Β} = 87^0\ 50'$, $\text{Γ} = 93^0\ 15'$. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τούτων $244^0\ 30'$, πρὸς 2 ὀρθάς, ἤτοι πρὸς 180^0, εἶναι $64^0\ 30'$. Ὁ λόγος ταύτης τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶναι $\frac{3870}{5400}$ ἢ ἁπλούστερον $\frac{43}{60}$. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δοθέντος τριγώνου εἶναι τὰ 43 ἑξηκοστὰ τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου.

Σημειωσις. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, ὡς μονάδος ὄγκου λαμβανομένης τῆς τρισορθογωνίου σφαιρικῆς πυραμίδος, εἶναι ἴσος τῇ ὑπεροχῇ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως αὐτῆς πρὸς δύο ὀρθάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΓΕΝΙΚΟΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Πᾶσα μεταξὺ γεωμετρικῶν ποσῶν σχέσις, ὅταν ταῦτα καταμετρηθῶσι μὲ μονάδα τινά, μεταβάλλεται εἰς σχέσιν μεταξὺ ἀριθμῶν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ληφθείσης μονάδος· διότι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μονάς, οἱ ἀριθμοὶ ἀναφερόμενοι εἰς αὐτὴν θὰ παριστῶσι τὰ μεγέθη, ὧν ἡ σχέσις ὑποτίθεται ὡρισμένη.

Τοὺς ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν ποσῶν ἀριθμούς, οἵτινες ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς λαμβανομένης μονάδος, παριστῶμεν γενικῶς διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου.

Καὶ αἱ μὲν εὐθεῖαι γραμμαὶ παρίστανται δι' ἑνὸς γράμματος, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τόξα κύκλου· διότι ἡ περιφέρεια, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι α, παρίσταται ὑπὸ τοῦ 2πα, τοῦ π ὄντος ἀριθμοῦ ὡρισμένου.

Αἱ δὲ ἐπιφάνειαι παρίστανται ὑπὸ τοῦ γινομένου δύο γραμμάτων, ἅτινα εἶναι αἱ δύο διαστάσεις τοῦ ἰσοδυνάμου τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου.

Πᾶν δὲ στερεὸν παρίσταται ὑπὸ τοῦ γινομένου τριῶν γραμμάτων, ἅτινα εἶναι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτῷ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

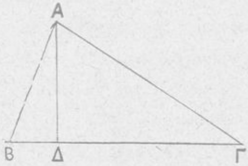
Ἀφοῦ παρασταθῶσιν οὕτω τὰ γεωμετρικὰ ποσὰ διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν ἐπὶ τούτων τοὺς λογισμοὺς τῆς ἀλγέβρας, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐν τοῖς ἑξῆς προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἐδόθησαν αἱ τρεῖς πλευραί.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ, πλευραὶ παρίστανται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α,β,γ· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.



Ἐὰν ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ, παραστήσωμεν δὲ ταύτην δι' υ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι $\frac{1}{2}\alpha\times\upsilon$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν

$$\upsilon=\sqrt{\gamma^2-(\mathrm{B\Delta})^2}\cdot \text{ ἄρα } \mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\gamma^2-(\mathrm{B\Delta})^2}.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 170 ἔχομεν

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\times\mathrm{B\Delta}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης λαμβάνομεν

$$\mathrm{B\Delta}=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴε τιμὴν ταύτην τοῦ ΒΔ ἐν τῇ ἀνωτέρω τιμῇ τοῦ Ε, λαμβάνομεν

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\gamma^2-\frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}}$$

ἤτοι
$$\mathrm{E}=\frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}$$

Ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ποσότης, ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας $2\alpha\gamma+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2$, καὶ $2\alpha\gamma-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2$. Ὁ πρῶτος τούτων εἶναι $(\alpha+\gamma)^2-\beta^2$, καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha+\gamma-\beta$· ὁ δὲ δεύτερος εἶναι $\beta^2-(\alpha-\gamma)^2$, καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας

$\beta+\alpha-\gamma$ καὶ $\beta+\gamma-\alpha$. Ἄρα ἔχομεν

$$\mathrm{E}=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι κατάλληλος εἰς τὸν διὰ λογαρίθμων λογισμόν. Παρατηρητέον δὲ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν γίνεται φανταστικόν, ἐὰν τις τῶν πλευρῶν ὑποτεθῇ μεγαλειτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο· γνωρίζομεν δὲ ὅτι τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἀδύνατον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

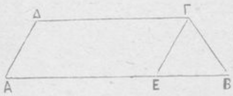
Σημειωσις. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον παραγόντων εἶναι $\alpha+\beta+\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀμετάβλητον, γίνεται μέγιστον, ὅταν πάντες οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις, συνάγομεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἐκ πάντων τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων τριγώνων τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ ἰσόπλευρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἐδόθησαν αἱ τέσσαρες πλευραί.

Ἔςω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, ἐν ᾧ $AB=\alpha, \Gamma\Delta=\beta, B\Gamma=\gamma, A\Delta=\delta$.



Ἐὰν ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΓΕ, τοῦ τριγώνου ΒΓΕ ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι $\alpha-\beta$, ἡ δὲ $\Gamma E=\Delta A=\delta$.

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν υ τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ τραπεζίου, Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, Ε′ τὸ τοῦ τριγώνου, θέλομεν ἔχει

$$E=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon, \quad E'=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\upsilon$$

ὅθεν

$$E : E'=\alpha+\beta : \alpha-\beta.$$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης λαμβάνομεν

$$E=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\times E'$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἔχομεν

$$E'=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha\text{-}\beta+\gamma+\delta)(\alpha\text{-}\beta+\delta\text{-}\gamma)(\alpha\text{-}\beta+\gamma\text{-}\delta)(\gamma+\delta+\beta\text{-}\alpha)}$$

Ἄρα

$$E=\frac{\alpha+\beta}{4(\alpha-\beta)}\sqrt{(\alpha\text{-}\beta+\gamma+\delta)(\alpha\text{-}\beta+\delta\text{-}\gamma)(\alpha\text{-}\beta+\gamma\text{-}\delta)(\gamma+\delta+\beta\text{-}\alpha)}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ καὶ ψ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, διὰ 2π τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ δι' α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις
$$\chi + \psi = \pi$$
$$\chi^2 + \psi^2 = 4\alpha^2$$

Τὴν δευτέραν δὲ ἐξίσωσιν λαμβάνομεν παρατηροῦντες ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

Ἀπαλείφοντες τὸ ψ μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων, καὶ λύοντες τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν
$$\chi = \frac{1}{2}\pi \pm \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Εἰς τὴν πρώτην τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ
$$\psi = \frac{1}{2}\pi - \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2},$$

εἰς δὲ τὴν δευτέραν $\psi = \frac{1}{2}\pi + \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}}$. Ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα συστήματα τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ παρέχουσι δύο ὀρθογώνια ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας διαστάσεις. Ἄρα ὑπάρχει μία μόνη λύσις. Ἐὰν δὲ χ εἶναι ἡ μεγαλειτέρα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν
$$\chi = \frac{1}{2}\pi + \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}$$
$$\psi = \frac{1}{2}\pi - \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει κατὰ πρῶτον αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ νὰ εἶναι πραγματικαί. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι $\frac{1}{4}\pi^2 = ἢ < 2\alpha^2$, ἤτοι $\pi = ἢ < 2\alpha\sqrt{2}$.

Ἡ μεγίστη λοιπὸν τιμή, ἣν δύναται νὰ λάβῃ τὸ π, εἶναι $2\alpha\sqrt{2}\cdot$ τότε δὲ $\chi = \psi = \frac{1}{2}\pi$. Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ πάντων τῶν ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων τὴν μεγίστην περίμετρον ἔχει τὸ τετράγωνον.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν ἀπαιτεῖται προσέτι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί. Καὶ ἡ μὲν τοῦ χ προφανῶς εἶναι θετική. Διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ ἡ τοῦ ψ θετικὴ πρέπει

νὰ εἶναι $$\frac{1}{2}\pi > \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς σχέσεως λαμβάνομεν κατὰ διαδοχὴν

$$\frac{1}{4}\pi^2 > 2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2, \quad \frac{1}{2}\pi^2 > 2\alpha^2, \quad \pi > 2\alpha.$$

Ἡ συνθήκη δὲ αὕτη $\pi > 2\alpha$ καὶ γεωμετρικῶς δεικνύεται ἀναγκαία· διότι ἡ διάμετρος 2α εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι εἶναι χ καὶ ψ.

Τέλος δὲ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν τὸ πρόβλημα αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ νὰ εἶναι μικρότεραι ἑκατέρα τὰ 2α· διότι χ καὶ ψ θὰ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ διάμετρος 2α. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἐὰν $\chi < 2\alpha$, πολλῷ μᾶλλον καὶ $\psi < 2\alpha$.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εἶναι

$$2\alpha > \frac{1}{2}\pi + \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, $\frac{1}{2}\pi$ δὲν ὑπερβαίνει $\alpha\sqrt{2}$, ἑπομένως εἶναι μικρότερα τὰ 2α, ἀφαιροῦντες $\frac{1}{2}\pi$ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος λαμβάνομεν·

$$2\alpha - \frac{1}{2}\pi > \sqrt{2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν κατὰ διαδοχὴν

$$4\alpha^2 - 2\alpha\pi + \frac{1}{4}\pi^2 > 2\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi^2$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha\pi + \frac{1}{2}\pi^2 > 0$$

$$\alpha^2 - \alpha\pi + \frac{1}{4}\pi^2 > 0$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ἡ τελευταία ἀνισότης ἐπαληθεύεται πάντοτε, διότι τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ ἐπομένως θετικὸν πάντοτε.

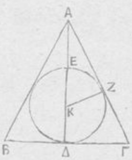
Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγομεν ὅτι διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν ἀπαιτοῦνται μόνον τὰ ἑξῆς δύο·

$$\frac{1}{2}\pi = \text{ἤ} < \alpha\sqrt{2}, \qquad \pi > 2\alpha.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Περὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἴσος δοθέντι ὄγκῳ.

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης σφαίρας, ΑΒΓ ὁ περιγεγραμμένος περὶ ταύτην κῶνος, β^3 ὁ δοθεὶς ὄγκος, καὶ ἂς παρασταθῇ διὰ χ ἡ ἄγνωστος εὐθεῖα ΕΑ. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ΑΒΓ εἶναι



$$\frac{1}{3}\pi \times (\Gamma\Delta)^2 \times \mathrm{A}\Delta.$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΑΚΖ λαμβάνομεν

$$\Gamma\Delta : \mathrm{KZ} = \mathrm{A}\Delta : \mathrm{AZ}, \text{ ὅθεν } \Gamma\Delta = \frac{\mathrm{KZ}\times\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AZ}}.$$

Εἶναι δὲ $\mathrm{KZ} = \alpha$, $\mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{E} + \mathrm{EA} = 2\alpha + \chi$. Ἡ δὲ ΑΖ, ὡς μέση ἀνάλογος τῆς ΑΔ καὶ τῆς ΔΕ, εἶναι $\sqrt{\chi(2\alpha+\chi)}$.

Ἄρα $\Gamma\Delta = \dfrac{\alpha(2\alpha+\chi)}{\sqrt{\chi(2\alpha+\chi)}}$, $(\Gamma\Delta)^2 = \dfrac{\alpha^2(2\alpha+\chi)^2}{\chi(2\alpha+\chi)} = \dfrac{\alpha^2(2\alpha+\chi)}{\chi}$.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι λοιπὸν

$$\frac{1}{3}\pi\frac{\alpha^2(2\alpha+\chi)}{\chi}(2\alpha+\chi), \text{ ἤτοι } \frac{1}{3}\pi\frac{\alpha^2(2\alpha+\chi)^2}{\chi}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος οὗτος θὰ εἶναι ἴσος τῷ β^3, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{3}\pi\alpha^2\frac{(2\alpha+\chi)^2}{\chi} = \beta^3.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{3\beta^3}{\pi\alpha^2}=4\mu$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\frac{(2\alpha+\chi)^2}{\chi}=4\mu.$$

Αὕτη δὲ ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$\chi^2-4(\mu-\alpha)\chi+4\alpha^2=0 \qquad (1)$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν,

$$\chi=2(\mu-\alpha)\pm 2\sqrt{\mu(\mu-2\alpha)}.$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ χ πραγματικαὶ πρέπει τὸ μ νὰ μὴ εἶναι μικρότερον τοῦ 2α. Ἄρα ἡ ἐλαχίστη τιμὴ ἣν δύναται νὰ λάβῃ τὸ μ εἶναι 2α· τότε δὲ $\chi=2\alpha$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι *ὁ ἐλάχιστος τῶν περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένων κώνων εἶναι ὁ ἔχων ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.*

Ὁ ἐλάχιστος δὲ οὗτος κῶνος ἔχει ὄγκον διπλάσιον τοῦ τῆς σφαίρας.

Διότι ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ $\frac{1}{3}\pi\frac{\alpha^2(2\alpha+\chi)^2}{\chi}$, ὅστις παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ διὰ 2α, λαμβάνομεν $\frac{8}{3}\pi\alpha^3$.

ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐκφράζοντος τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἧς ἡ ἀκτὶς εἶναι α.

Ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαί, εἶναι θετικαὶ ἀμφότεραι, διότι ὁ μὲν τελευταῖος ὅρος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετικός, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ χ ἀρνητικός. Ἄρα τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω δοθεῖσι προβλήμασιν ὑπετίθετο ὅτι αἵ τε δεδομέναι γραμμαὶ καὶ αἱ ἄγνωστοι παρίσταντο δι᾽ ἀριθμῶν, καὶ ἐκ τῶν μεταξὺ αὐτῶν σχέσεων ἐλαμβάνομεν ἐξισώσεις, ἃς λύοντες εὑρίσκομεν τὴν *ἀριθμητικὴν τιμὴν* τῶν ἀγνώστων γραμμῶν. Ἐνταῦθα θέλομεν δείξει πῶς, ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἢ ἀνάγηται εἰς ταύτας, δυνάμεθα νὰ *κατασκευάσωμεν τὴν ἄγνωστον γραμμήν*, ἤτοι ἐξ αὐτῶν τῶν γνωστῶν ἄνευ τῆς παραστάσεως αὐτῶν δι᾽ ἀριθμῶν νὰ εὕρωμεν αὐτὴν τὴν ἄγνωστον, διὰ γραφικῶν ἐργασιῶν, τουτέστι διὰ τῆς γραφῆς εὐθειῶν γραμμῶν καὶ τόξων κύκλων.

Ἀλλὰ πρὶν προβῶμεν εἰς τοῦτο, ἀφοῦ ὑπομνήσωμεν ὅτι βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου λέγεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλγεβρικῶν αὐτοῦ παραγόντων, ὧν ἕκαστος παρίσταται δι᾽ ἑνὸς γράμματος, καὶ ὅτι ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ὁμογενής, ὅταν πάντες οἱ ὅροι αὐτῆς εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, θέλομεν ἀποδείξει τὴν ἑξῆς πρότασιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Πᾶσα ἐξίσωσις ἐν ᾗ τὰ γράμματα παριστῶσι γραμμάς, οὐδεμία δὲ ὡρισμένη γραμμὴ ἐλήφθη ὡς μονάς, ἀφοῦ γείνῃ ῥητὴ καὶ ἀκεραία, εἶναι ὁμογενής, ἢ ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν μεταξὺ γραμμῶν μὴ ὁμογενῆ, οἷον περιέχουσαν ὅρους τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ πρώτου. Ἐὰν παραστήσωμεν δι᾽ Α, Β, Γ τὰ τρία ταῦτα εἴδη τῶν ὅρων, ἡ ἐξίσωσις θὰ εἶναι

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη θὰ ὑπάρχῃ, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νάς, δι' ἧς ἐμετρήθησαν αἱ γραμμαί. Ἐὰν διὰ μονάδα τινὰ Μ παραστήσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ Α, Β, Γ δι' α, β, γ, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Ἐὰν δὲ ἔπειτα λάβωμεν ἄλλην μονάδα Μ', ἥτις νὰ εἶναι ν φορὰς μικροτέρα τῆς Μ, ἕκαστος τῶν παριστώντων τὰς γραμμὰς ἀριθμῶν θὰ γείνῃ ν φορὰς μεγαλείτερος· ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος ὅρος τοῦ Α περιέχει τρεῖς παράγοντας, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ν^3· δι' ὅμοιον δὲ λόγον οἱ ὅροι τοῦ Β θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ν^2, καὶ οἱ τοῦ Γ ἐπὶ ν· ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha\nu^3+\beta\nu^2+\gamma\nu=0,$$

ἤτοι
$$\alpha+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu^2}=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ν δύναται νὰ ληφθῇ ὅσον θελήσωμεν μέγα, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα $\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu^2}$ ὅσον θελήσωμεν μικρόν, θὰ εἶναι ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς α ἴσος τῷ μεταβλητῷ καὶ τείνοντι εἰς τὸ μηδὲν $-\left(\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\nu^2}\right)$.

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, ἐκτὸς ἐὰν $\alpha=0$, ὅτε θὰ ὑπάρχῃ ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις $\mathrm{A}=0$. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\mathrm{B}=0$, $\Gamma=0$. Ἄρα ὅταν ἐξίσωσίς τις δὲν εἶναι ὁμογενής, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ πολλὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημειωσις. Ὅταν γραμμή τις ἐκ τῶν εἰσερχομένων εἰς τὴν ἐξίσωσιν ληφθῇ ὡς μονάς, ἡ ἐξίσωσις παύει νὰ εἶναι ὁμογενής. Οἷον ἡ μεταξὺ τῶν τριῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ὑπάρχουσα σχέσις, $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, ὅταν ἡ ὑποτείνουσα ληφθῇ ὡς μονάς, γίνεται $\alpha^2+\beta^2=1$, ἥτις δὲν εἶναι ὁμογενής. Δυνάμεθα δὲ ἐξίσωσιν, ἥτις δὲν εἶναι ὁμογενής, διότι ἰδιαιτέρα τις γραμμὴ ἐλήφθη ὡς μονάς, νὰ καταστήσωμεν ὁμογενῆ, παριστῶντες τὴν ὡς μονάδα ληφθεῖσαν γραμμὴν διὰ γράμματός τινος, καὶ θέτοντες τὸ γράμμα τοῦτο παρονομαστὴν πάντων τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει γραμμάτων.

Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\beta-\gamma\delta\varepsilon=\zeta,$$

ἥτις δὲν εἶναι ὁμογενής. διότι γραμμή τις Η ἐλήφθη ὡς μονάς. Ἕκαστον τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει γραμμάτων παριστᾷ τὸν λόγον γραμμῆς τινος πρὸς τὴν γραμμὴν Η. Οἷον τὸ ζ παριστᾷ τὸν λόγον τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γραμμῆς Ζ πρὸς τὴν Η. Ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὅταν ληφθῇ μονάς τις οἱαδήποτε, θὰ εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ $\frac{\zeta}{\eta}$. Ἡ ἀνωτέρω λοιπὸν ἐξίσωσις, ὅταν ἡ μονὰς εἶναι οἱαδήποτε, θὰ γείνῃ

$$\frac{\alpha\beta}{\eta^2}-\frac{\gamma\delta\varepsilon}{\eta^3}=\frac{\zeta}{\eta}$$

ἢ $\alpha\beta\eta-\gamma\delta\varepsilon=\zeta\eta^2$. Αὕτη δὲ εἶναι ὁμογενής.

Α΄) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ὅταν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἕνεκα τῆς ὁμογενείας ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου γραμμῆς χ θὰ εἶναι ὑπό τινα τῶν ἑξῆς μορφῶν.

$$\chi=\alpha\pm\beta,\quad \chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma},\quad \chi=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\varepsilon\zeta\eta},\quad \chi=\frac{\alpha\beta\gamma\pm\delta\varepsilon\zeta\pm\ldots}{\eta\theta\pm\iota\kappa\pm\ldots}$$

Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ χ, ἀρκεῖ εἰς τὴν γραμμήν, ἣν παριστᾷ τὸ α, νὰ προστεθῇ, ἢ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς, ἡ γραμμή, ἣν παριστᾷ τὸ β. Ὁμοίως δὲ κατασκευάζεται καὶ ἡ τιμὴ

$$\chi=\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\delta\ldots$$

Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ χ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν γ, α, β· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\gamma:\alpha=\beta:\chi,\ \text{λαμβάνομεν}\ \chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Ἡ δὲ ὑπὸ τὴν τρίτην μορφὴν τιμὴ τοῦ χ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ τόσων τετάρτων ἀναλόγων, ὅσοι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ. Διότι ἐὰν λάβωμεν

$$\psi=\frac{\alpha\beta}{\varepsilon},\quad \omega=\frac{\psi\gamma}{\zeta},\ \text{θὰ εἶναι}\ \chi=\frac{\omega\delta}{\eta}.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι ψ, ω καὶ χ κατασκευάζονται διὰ τετάρτων ἀναλόγων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τέλος δὲ ἡ ὑπὸ τὴν τετάρτην μορφὴν τιμὴ τοῦ χ ἀνάγεται εἰς τὴν τρίτην. Τῷ ὄντι

$$\chi=\frac{\alpha\beta\gamma\pm\delta\varepsilon\zeta}{\eta\theta\pm\iota\varkappa}=\frac{\alpha\beta\left(\gamma\pm\frac{\delta\varepsilon\zeta}{\alpha\beta}\right)}{\eta\left(\theta\pm\frac{\iota\varkappa}{\eta}\right)}$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\psi=\frac{\delta\varepsilon\zeta}{\alpha\beta}$ $\omega=\frac{\iota\varkappa}{\eta}$, λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\alpha\beta(\gamma\pm\psi)}{\eta(\theta\pm\omega)}.$$

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ψ, ω, καὶ ἔπειτα χ κατασκευάζονται διὰ τετάρτων ἀναλόγων.

Β'). ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δὲν εἶναι πλήρης, ἤτοι δὲν περιέχῃ τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ἀγνώστου, θὰ εἶναι ὑπό τινα τῶν ἑξῆς μορφῶν·

$$\chi^2=\alpha\beta,\ \chi^2=\alpha^2\pm\beta^2,\ \chi^2=\alpha\beta\pm\gamma\delta.$$

Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ γραμμὴ χ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α καὶ β· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha:\chi=\chi:\beta$, λαμβάνονμεν $\chi^2=\alpha\beta$.

Ἵνα δὲ κατασκευασθῇ ἡ γραμμὴ χ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\chi^2=\alpha^2\pm\beta^2$, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β τετραγώνων (158 καὶ 159).

Ὁμοίως δὲ κατασκευάζεται καὶ ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2=\alpha^2\pm\beta^2\pm\gamma^2\ \ldots$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις $\chi^2=\alpha\beta\pm\gamma\delta\pm\varepsilon\zeta\ \ldots$ ἀνάγεται εἰς τὴν προη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γουμένην, ἐὰν τεθῇ $φ^2=αβ$, $ψ^2=γδ$, $ω^2=εζ$, κτλ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι φ, ψ, ω κατασκευάζονται διὰ μέσων ἀναλόγων.

Εἰς τὰς προηγουμένας ὑπάγονται καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$χ^2=\frac{αβγδ}{εζ},\quad χ^2=\frac{αβγδ\pm εζηθ\pm\ldots}{λμ\pm νξ\pm\ldots}$$

Διότι ἡ πρώτη τούτων ἀνάγεται διὰ τετάρτων ἀναλόγων εἰς τὴν $χ^2=πρ$· ἡ δὲ δευτέρα ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην μετασχηματιζομένου τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς μονώνυμα, ὡς ἐγένετο τοῦτο ἀνωτέρω ἐν τοῖς περὶ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἄς θεωρησωμεν ἤδη τὴν πλήρη ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ,

$$χ^2\pm αχ\pm β^2=0.$$

Λύοντες ταύτην λαμβάνομεν,

$$χ=\mp\frac{α}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{α}{2}\right)^2\mp β^2}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $ψ^2=\left(\frac{α}{2}\right)^2\mp β^2$, τὸ ψ κατασκευάζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ θὰ ἔχωμεν $χ=\mp\frac{α}{2}\pm ψ$.

Ἵνα δὲ κατασκευασθῇ τὸ χ ὑπολείπεται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν $\frac{α}{2}$ καὶ ψ.

Γ΄. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ

Ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἡ περιέχουσα δηλαδὴ μόνην τὴν τετάρτην καὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀγνώστου, ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς μορφήν,

$$χ^4=\pm α^2χ^2\pm β^4=0.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi^2=\beta\psi$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\psi^2 \pm \frac{\alpha^2}{\beta}\psi \pm \beta^2=0.$$

Ἀφοῦ κατασκευασθῶσιν αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως ἐὰν εἶναι πραγματικαί, κατασκευάζομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ, εὑρίσκοντες μέσην ἀνάλογον τῆς γραμμῆς β καὶ ἑκάστης τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ ψ.

Σημειωσις. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς τὰς ρίζας πάσης ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\chi^\mu=\alpha\beta\gamma\ldots$, ὅταν ὁ μ εἶναι δύναμις τοῦ 2. Οἷον ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^4=\alpha\beta\gamma\delta,$$

ἐὰν θέσωμεν $\alpha\beta=\psi^2$, $\gamma\delta=\omega^2$, ἀνάγεται εἰς ταύτην, $\chi^4=\psi^2\omega^2$, ἢ $\chi^2=\psi\omega$. Τὸ ψ καὶ τὸ ω εὑρίσκονται διὰ μέσων ἀναλόγων, τὸ δὲ χ εἶναι μέση ἀνάλογος τοῦ ψ καὶ ω.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\chi^8=\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$, ἐὰν τεθῇ $\alpha\beta=\upsilon^2$, $\gamma\delta=\varphi^2$, $\varepsilon\zeta=\psi^2$, $\eta\theta=\omega^2$, ἀνάγεται εἰς τὴν $\chi^4=\upsilon\varphi\psi\omega$, δι᾽ ἣν εἴδομεν ἀνωτέρω πῶς κατασκευάζεται τὸ χ.

Ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^{2\mu} \pm \alpha^\mu \chi^\mu \pm \beta^{2\mu}=0,$$

ὅταν ὁ μ εἶναι δύναμις τοῦ 2. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\chi^\mu=\beta^{\mu-1}$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\psi^2 \pm \frac{\alpha^\mu}{\beta^{\mu-1}}\psi \pm \beta^2=0.$$

Κατασκευάζοντες τὰς ρίζας ταύτης, καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς θετικὰς ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^\mu=\beta^{\mu-1}$, ἔχομεν ἐξίσωσιν, δι᾽ ἣν τὸ χ κατασκευάζεται, ἐὰν ὁ μ εἶναι δύναμις τοῦ 2.

Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς, ἤτοι δι᾽ εὐθειῶν γραμμῶν καὶ τόξων κύκλων, τὸ χ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3=\alpha\beta\gamma$, ἣν θὰ εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐζητοῦμεν τὴν πλευρὰν τοῦ κύβου τοῦ ἰσοδυνάμου τῷ ὀρθογωνίῳ παραλληλεπιπέδῳ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι α, β, γ. Εἰς τὸ πρόβλημα δὲ τοῦτο ὑπάγεται καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, ἤτοι ἡ εὕρεσις κύβου διπλασίου δοθέντος κύβου· διότι τότε πρέπει νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3=2\alpha^3$.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Ἡ ἀλγεβρικὴ λύσις παντὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος περιλαμβάνει τὰ ἑξῆς τρία.

α'). Τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος. Ταύτας δὲ λαμβάνομεν παριστῶντες τάς τε γνωστὰς γραμμὰς καὶ τὰς ἀγνώστους διὰ γραμμάτων καὶ ἐκφράζοντες τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις, ἃς παρέχουσι γνωστὰ γεωμετρικὰ θεωρήματα.

β'). Τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, ἢ τῶν ἐξισώσεων. Ταύτην δὲ μᾶς παρέχει ἡ ἄλγεβρα.

γ'). Τὴν κατασκευὴν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Εἴδομεν δὲ ἐν τοῖς προηγουμένοις πότε ἡ τοιαύτη κατασκευὴ εἶναι δυνατή. Ὅταν ἡ κατασκευὴ αὕτη εἶναι ἀδύνατος, ἂν καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου δύναται νὰ εὑρεθῇ, ὅμως λέγεται ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν λύεται γεωμετρικῶς.

Σημειωτέον δὲ ὅτι τῆς ἀλγεβρικῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων προτιμητέα εἶναι ἡ καθαρῶς γεωμετρική. Καταφεύγομεν δὲ εἰς ἐκείνην, ὅταν δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ταύτην.

Τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἂς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα παρασταθῇ δι' α, τὸ δὲ μέρος αὐτῆς, τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁποῖον πρόκειται νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, διὰ χ, θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία α : χ=χ : α—χ, ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\chi^2=\alpha(\alpha-\chi),$$

ἢ

$$\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2=0.$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν

$$\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2}.$$

Ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ ἡ θετικὴ ῥίζα, ἀνευρίσκομεν τὴν ἐν ἐδαφίῳ 239 λύσιν.

Ἡ δὲ ἀρνητικὴ λύσις ἀπολύτως λαμβανομένη ταὐτοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2=\alpha(\alpha+\chi)$. Ταύτην δὲ θὰ ἐλαμβάνομεν, ἐὰν ἐζητοῦμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας α ἐκβαλλομένης σημεῖον, οὗ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων αὐτῆς νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου ἀποστάσεως καὶ τῆς α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα σφαῖρα δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε τὸ ἀποτεμνόμενον μικρότερον ἡμισφαιρίου τμῆμα νὰ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ κώνῳ, τῷ ἔχοντι βάσιν τὴν τομήν, καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ διὰ χ τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου ταύτης ἀπόστημα τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, ὁ ὄγκος τοῦ μὲν κώνου θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\pi(\alpha^2-\chi^2)\chi$, τοῦ δὲ σφαιρικοῦ τμήματος $\frac{1}{3}\pi\alpha^2(\alpha-\chi)$· διότι ἐξ ὑποθέσεως τὸ τμῆμα τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὅστις ἔχει βάσιν τὴν ζώνην τοῦ τμήματος. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{3}\pi(\alpha^2-\chi^2)\chi=\frac{1}{3}\pi\alpha^2(\alpha-\chi).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αὕτη δὲ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

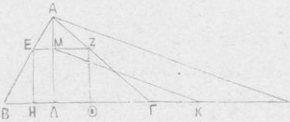
$$\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2=0.$$

ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· ἂς ὑποτεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα



λελυμένον, καὶ ΕΖΗΘ τὸ ἐν τῷ τριγώνῳ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον. Ἂς παραστήσωμεν τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου δι' α, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ δι' υ, τὴν δὲ πλευρὰν ΕΗ τοῦ τετραγώνου διὰ χ.

Τῆς ΕΖ οὔσης παραλλήλου τῇ ΒΓ, εἶναι

$$\text{ΕΖ} : \text{ΒΓ}=\text{ΑΕ} : \text{ΑΒ}=\text{ΑΜ} : \text{ΑΔ}$$

ἤτοι

$$\chi : \alpha=\upsilon-\chi : \upsilon$$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\upsilon\chi=\alpha(\upsilon-\chi),$$

ἣν λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{\alpha\upsilon}{\alpha+\upsilon}$.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν $\alpha+\upsilon$, α, υ.

Ἵνα κατασκευάσωμεν δὲ ταύτην λαμβάνομεν ΔΚ=ΒΓ, ΚΛ=ΑΔ, ἐπιζευγνύομεν τὸ Λ μετὰ τοῦ Α, καὶ ἐκ τοῦ Κ ἄγομεν παράλληλον τῇ ΑΛ, ἥτις τέμνει τὴν ΔΑ κατὰ τὸ σημεῖον Μ· ἡ ΔΜ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Ἄγοντες δὲ ἐκ τοῦ Μ παράλληλον τῇ ΒΓ, λαμβάνομεν τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΗΘΖ.

Σημειωσις. Τοῦ προβλήματος τούτου καθαρῶς γεωμετρικὴ λύσις γίνεται ἡ ἑξῆς. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγεται παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ τοῦ τριγώνου καὶ ἴση τῷ ὕψει αὐτοῦ ΑΔ, τὸ ἄκρον τῆς ἀχθείσης εὐθείας ἐπιζευγνύεται μετὰ τοῦ σημείου Β, καὶ τὸ σημεῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μνει τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τρι-
τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤ ... ΣΙΝ

1) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν, καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

2) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων νὰ εἶναι ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α, ἡ δὲ ἑτέρα κάθετος μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς α.

3) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τραπέζιον δι' εὐθείας παραλλήλου ταῖς βάσεσιν εἰς δύο μέρη ἔχοντα πρὸς ἄλληλα τὸν λόγον μ ... ἡ

4) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κῶνον κύλ ... κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἰσοδύναμος ... ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι μεγίστη;

... ὁ δοθεὶς κ ...

Πότε ἡ
... ου παραλλήλου τῇ
μέση ἀνάλογος τῶν δύο
... εῖται ὑπὸ τοῦ

ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου νὰ εἶναι
τῶν δύο ζωνῶν εἰς ἃς τὸ ἐπίπεδ

11) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα σ
λων καὶ ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου ... τὸ ἄθρ
σμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ... εἶναι ἴσον τῷ ἐμβαδῷ τῆς
μεταξὺ τῶν δύο τομῶ... ...νομένης σφαιρικῆς ζώνης.

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το ...