Λεοντίνης

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝ. ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Διὰ τὰ Ἡμιγυμνάσια καὶ τὰς κατωτέρας τάξεις τῶν Γυμνασίων κλπ.

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{21614}{7\text{-}6\text{-}1928}$ κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας, τῆς ἐγκρίσεως παραταθείσης ὑπὸ τοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου καὶ διὰ τὸ ἔτος 1932—33.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΩΔΕΚΑΤΗ

Ἀριθ. ἀδείας Κυκλοφορίας	$\frac{55.656}{17\text{-}10\text{-}32}$
Τιμὴ ἄνευ βιβλιοσήμου	30.30
ἀξία βιβλιοσήμου	12.10
Φορόσημον	3.70
Συνολικὴ τιμὴ Δρχ.	46.10

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝ. Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1932

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝ. ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

1/8/59

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Διὰ τὰ Ἡμιγυμνάσια καὶ τὰς κατωτέρας τάξεις τῶν Γυμνασίων κλπ.

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{21614}{7\text{-}6\text{-}1928}$ κατὰ κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας, τῆς ἐγκρίσεως παραταθείσης ὑπὸ τοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου καὶ διὰ τὸ ἔτος 1932—33.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1932

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

Σημειώσεις διὰ τοὺς διδάσκοντας.

α΄) Τὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἀναγράφεται ἀκριβῶς τὸ εἶδος τοῦ ἐμπορεύματος, καλὸν εἶνε νὰ συμπληροῦνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν καταλλήλως ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ, ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ ἐμπορεύματος νὰ ἁρμόζουν κατὰ τὸ δυνατὸν μὲ τοὺς ἀναγραφομένους ἀριθμοὺς εἰς τὸ πρόβλημα, νὰ εἶνε δὲ τὸ ἐμπόρευμα ἐκ τῶν μᾶλλον γνωστῶν εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ πρὸς τούτοις ἐκ τῶν προϊόντων ἰδίως τοῦ τόπου ἐν ᾧ λειτουργεῖ τὸ σχολεῖον.

β΄) Τὰ προβλήματα καὶ αἱ ἀσκήσεις τῶν τελευταίων ὁμάδων ἑκάστης μεθοδικῆς ἑνότητος τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου εἶνε κατάλληλα μᾶλλον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν σχολείων.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

Περὶ ἀριθμήσεως καὶ ἀριθμοῦ.

1. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἕνα σωρὸν ἀπὸ μῆλα. Ὁ σωρὸς θὰ γίνῃ μεγαλύτερος, ἂν θέσωμεν καὶ ἄλλα μῆλα εἰς αὐτόν, καὶ μικρότερος, ἂν λάβωμεν μερικὰ ἀπὸ τὰ μῆλα του. Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς ἕνα σωρὸν ἀπὸ βώλους, καὶ ἀπὸ γλυκύσματα ἢ εἰς ἕνα ὅμιλον ἀπὸ μαθητάς. Ἕκαστος ἐκ τῶν σωρῶν αὐτῶν ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν καὶ καλεῖται διὰ τοῦτο *ποσὸν* μήλων, βώλων, γλυκυσμάτων κλπ.

Γενικῶς, «*καλοῦμεν ποσὸν πᾶν ὅ,τι δύναται νὰ αὐξηθῇ καὶ νὰ ἐλαττωθῇ*».

2. Σωρὸς μήλων ἀποτελεῖται ἀπὸ μῆλα, καθὲν τῶν ὁποίων εἶνε αὐτοτελὲς καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ σωρὸν γλυκυσμάτων, βώλων, ὅμιλον μαθητῶν κλπ. Τὰ ποσὰ αὐτὰ καλοῦνται καὶ *πλήθη*.

Γενικῶς, «*πλῆθος καλεῖται πᾶν ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη αὐτοτελῆ καὶ καθὲν τῶν ὁποίων δύναται νὰ θεωρηθῇ χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη*».

3. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν πλῆθος μήλων, δυνάμεθα νὰ ἐρωτήσωμεν: πόσα μῆλα ἔχει τὸ πλῆθος; Διὰ ν' ἀπαντήσωμεν εἰς τὴν ἐρώτησιν, λαμβάνομεν ἓν μῆλον ἀπὸ τὸ πλῆθος καὶ τὸ θέτομεν χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Πλησίον αὐτοῦ θέτομεν ἓν ἄλλο, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀπὸ τἀπομείναντα τοῦ πλήθους καὶ λέγομεν ὅτι ἔχομεν *δύο* μῆλα χωριστὰ ἀπὸ τὸ πλῆθος. Ἔπειτα λαμβάνομεν ἓν ἀκόμη ἀπὸ τἀπομείναντα, θέτομεν αὐτὸ πλησίον τῶν δύο καὶ λέγομεν ὅτι ἐλάβομεν *τρία* μῆλα ἀπὸ τὸ πλῆθος. Οὕτω καθεξῆς ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως, ἐνόσῳ μένουν ἀκόμη μῆλα εἰς τὸ πλῆθος καὶ λέγομεν κατὰ σειρὰν ὅτι ἐλάβομεν *τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτὼ κλπ.* μῆλα ἀπὸ τὸ πλῆθος. Ἀφοῦ λάβωμεν ὅλα τὰ μῆλα τοῦ πλήθους, κατὰ τὸν τρόπον τὸν ὁποῖον εἴπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσα μῆλα ἔχομεν. Π. χ. *ἐννέα μῆλα*. Ἡ ἐργασία αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, πόσα μῆλα ἔχει τὸ δοθὲν πλῆθος τῶν μήλων, λέγεται *ἀρίθμησις* τῶν μήλων, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως λέγεται *ἀριθμός*. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσους βώλους ἢ γλυκύσματα ἔχει ἓν πλῆθος βώλων, γλυκυσμάτων κλπ., ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται καθὲν πλῆθος. Ἐκ τούτων τὸ ἓν τῶν μήλων, ὁ εἷς βῶλος, ἢ τὸ ἓν γλύκυσμα ἐκ τοῦ πλήθους αὐτῶν λέγεται καὶ *μονὰς* μήλων, βώλων, γλυκυσμάτων, καθεὶς δ' ἀριθμὸς ἀποτελεῖται, ἐν γένει, ἀπὸ πολλὰς μονάδας, ἤτοι εἶνε τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.

Ἐὰν ἔχωμεν ἓν πλῆθος σάκκων, οἱ ὁποῖοι εἶνε πλήρεις μήλων, καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσους σάκκους μήλων ἔχει τὸ πλῆθος αὐτό, θὰ θέτωμεν κατὰ μέρος ἕνα ἕνα σάκκον, καὶ θὰ κάμωμεν τὴν ἀρίθμησιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, καθὼς καὶ εἰς ἄλλας ὁμοίας, βλέπομεν ὅτι ἡ μονὰς τῶν σάκκων τούτων ἔχει πολλὰ μῆλα καὶ ὄχι ἓν μόνον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«μονὰς λέγεται ἓν ἀπὸ πολλὰ ὅμοια πράγματα ἢ καὶ πολλὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον».

4. ***«Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων, ἢ καὶ μία μονάς, καὶ παριστάνει ἓν ποσόν».***

5. ***«Ἀρίθμησιν ἑνὸς πλήθους λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ πλῆθος».***

6. *Συγκεκριμένος* ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος εἰς τὸν ὁποῖον ὁρίζεται τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον παριστάνει. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ ἑπτὰ μῆλα, ἓξ θρανία, τρεῖς βῶλοι κτλ. εἶνε συγκεκριμένοι.

7. *Ἀφῃρημένος* ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος εἰς τὸν ὁποῖον δὲν ὁρίζεται τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον παριστάνει. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ ἐννέα, δύο, ὀκτὼ κλπ. λέγονται ἀφῃρημένοι.

2. *Ὁμοειδεῖς* μὲν λέγονται δύο ἢ περισσότεροι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, ἂν παριστάνουν ποσὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους, *ἑτεροειδεῖς* δέ, ἂν παριστάνουν ποσὰ διαφόρων εἰδῶν. Οὕτω οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ὀκτὼ μῆλα, ἓξ μῆλα λέγονται ὁμοειδεῖς, ἐνῶ οἱ τρεῖς ἄνθρωποι, πέντε δραχμαὶ λέγονται ἑτεροειδεῖς.

9. Ἡ *Ἀριθμητικὴ* πραγματεύεται ἐν γένει περὶ τῶν ἀριθμῶν.

Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

10. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐὰν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων· δηλαδή, ἐὰν ὅσας μονάδας ἔχῃ ὁ εἷς τόσας ἔχει καὶ ὁ ἄλλος. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς καὶ τῶν τῆς ἀριστερᾶς. Σημειώνομεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, ἐὰν μεταξύ των γράφωμεν τὸ σημεῖον =, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ἴσον. Π. χ. ἐννέα ἴσον ἐννέα γράφεται οὕτω: ἐννέα = ἐννέα καὶ ἀπαγγέλλεται *ἐννέα ἴσον ἐννέα.*

11. Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς ἔχῃ περισσοτέρας μονάδας τοῦ ἄλλου, λέγεται *μεγαλύτερος* αὐτοῦ, ὁ ἄλλος *μικρότερος* τοῦ πρώτου, οἱ δύο δὲ ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ τρία καὶ ἑπτὰ εἶνε ἄνισοι. Σημειώνομεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι διὰ τοῦ σημείου > ἢ < γράφοντες εἰς τὸ κοῖλον μέρος τούτου τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸ κυρτὸν τὸν μικρότερον. Π. χ. τρία < ἑπτά, ὀκτὼ > πέντε καὶ ἀπαγγέλλομεν· τρία μικρότερον τοῦ ἑπτά· ὀκτὼ μεγαλύτερον τοῦ πέντε.

Τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως.

12. Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν *ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα,* . . . . οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῆς ἀριθμήσεως, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν *φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν,* ἡ ὁποία δὲν ἔχει τέλος. Διότι, ἡ προσθήκη μιᾶς μονάδος εἰς καθένα αὐτῶν δύναται νὰ γίνεται πάντοτε. Ὁ καθεὶς ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶνε μεγαλύτερος ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν προηγουμένων του καὶ μικρότερος τῶν ἑπομένων του. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ὀνομασίαν τῶν ἀριθμῶν τῆς φυσικῆς σειρᾶς εὐκολωτέραν, καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα εὐκολώτερον νὰ ἐνθυμούμεθα τὰς ὀνομασίας, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἓν παιδίον ἔχει ἓν πλῆθος βώλων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν θέτομεν τοὺς βώλους ἀνὰ δέκα εἰς σειράς. Οὕτω εὑρίσκομεν δύο σειρὰς π. χ. καὶ ὅτι μένουν καὶ τέσσαρες βῶλοι ἀκόμη.

. . . .

. . . .

. . . .

Τὸ σύνολον τῶν βώλων καθεμιᾶς σειρᾶς ἀπὸ δέκα μονάδας καλοῦμεν *δεκάδα* ἢ *μονάδα δευτέρας τάξεως.* Ὥστε τὸ παιδίον ἔχει δύο δεκάδας καὶ τέσσαρας βώλους. Ἐὰν οἱ βῶλοι εἶνε περισσότεροι, ὥστε αἱ δεκάδες τὰς ὁποίας θὰ σχηματίσωμεν, νὰ εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα (ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ δυσκολία θὰ παρουσιασθῇ καὶ τώρα διὰ τὴν ὀνομασίαν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων) δυνάμεθα ὁμοίως ἐργαζόμενοι, νὰ σχηματίσωμεν ἐκ δέκα δεκάδων, μίαν *ἑκατοντάδα* ἢ μίαν *μονάδα τρίτης τάξεως* καὶ θὰ ἔχωμεν π. χ. δύο ἑκατοντάδας, πέντε δεκάδας καὶ ἑπτὰ βώλους.

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι μὲ δέκα μονάδας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν καὶ *μονάδας ἁπλᾶς* ἢ *πρώτης τάξεως*, σχηματίζομεν μίαν *μονάδα δευτέρας τάξεως* ἢ μίαν *δεκάδα*. Μὲ δέκα μονάδας δευτέρας τάξεως σχηματίζομεν *μίαν μονάδα τρίτης τάξεως*, ἢ μίαν *ἑκατοντάδα*. Καθ' ὅμοιον τρόπον μὲ δέκα μονάδας τρίτης τάξεως σχηματίζομεν μία *τετάρτης* ἢ μίαν *χιλιάδα*· μὲ δέκα χιλιάδας μίαν *δεκάδα χιλιάδων* κλπ. Ἐὰν οἱ βῶλοι τοῦ παιδίου εἶνε ἀκόμοι περισσότεροι καὶ τακτοποιήσωμεν αὐτοὺς εἰς σειρὰς ἀπὸ χιλιάδας, δεκάδας καὶ μείνουν ἀκόμη, αὐτοὶ θὰ εἶνε ὀλιγώτεροι τῶν δέκα. Θὰ γνωρίζωμεν λοιπὸν πόσους βώλους ἔχει τὸ παιδίον, ἂν εὕρωμεν πόσας σειρὰς ἐκ χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων ἔχει καὶ πόσοι βῶλοι μένουν ἀκόμη.

Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὥστε ἀπὸ δέκα μονάδας μιᾶς τάξεως νὰ σχηματίζεται μία μονὰς ἀμέσως μεγαλυτέρας τάξεως, λέγεται *δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως*. Ἡ ἁπλῆ *μονάς*, ἡ *δεκάς*, ἡ *ἑκατοντάς*, ἡ *χιλιάς*, ἡ *δεκὰς χιλιάδων*, *ἑκατοντὰς χιλιάδων*, τὸ *ἑκατομμύριον* κλπ. λέγονται *μονάδες διαφόρων τάξεων*.

Ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.

13. Τὸ δεκαδικὸν σύστημα εὐκολύνει νὰ σχηματίζωμεν ὅλα τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν μὲ ὀλίγας λέξεις, τὰς ὁποίας διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας. 1) τὰς λέξεις *ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, μηδέν*· 2) τὰς *μονὰς, δεκάς, ἑκατοντάς, χιλιάς, δεκὰς χιλιάδων, ἑκανοντὰς χιλιάδων, ἑκατομμύριον, δεκὰς ἑκατομμυρίου, ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου, δισεκατομμύριον κλπ.* Μὲ αὐτὰς δυμάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἐὰν μεταχειριζώμεθα τὴν λέξιν *μηδὲν* διὰ νὰ δείξωμεν τὴν ἔλλειψιν μονάδων.

Πραγματικῶς, ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἀριθμὸν μήλων, εὕρωμεν δὲ ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει ὀκτὼ δεκάδας χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, μηδὲν ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ τέσσαρας μονάδας π. χ., ἔχομεν ἀμέσως τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῶν λέξεων τούτων.

14. Τὴν δεκάδα λέγομεν καὶ *δέκα*, τὰς δύο δεκάδας καὶ *εἴκοσι*, τὰς τρεῖς καὶ *τριάκοντα*, τὰς τέσσαρας καὶ *τεσσαράκοντα*, τὰς πέντε, ἕξ ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα καὶ *πεντήκοντα*, *ἑξήκοντα*, *ἑβδομήκοντα*, *ὀγδοήκοντα*, *ἐννενήκοντα*. Ἐπίσης τὴν ἑκατοντάδα καλοῦμεν καὶ *ἑκατόν*, τὰς δύο ἑκατοντάδας καὶ *διακόσια* καὶ οὕτω καθεξῆς, τὰς τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα ἑκατοντάδας καὶ *τριακόσια*, *τετρακόσια*, *πεντακόσια*, *ἑξακόσια*, *ἑπτακόσια*, *ὀκτακόσια*, *ἐννεακόσια*. Τὴν χιλιάδα καλοῦμεν *χίλια* τὴν δεκάδα χιλιάδων καὶ *δέκα χιλιάδας* κ. ο. κ., *εἴκοσι χιλιάδας*, *τριάκοντα χιλιάδας*,.., *ἑκατὸν χιλιάδας*.

Ἀντὶ τῶν ὀνομασιῶν μία δεκὰς καὶ μία μονάς, μία δεκὰς καὶ δύο μονάδες κλπ. λέγομεν *ἕνδεκα*, *δώδεκα*, *δέκα τρία*, *δέκα τέσσαρα*, *δέκα πέντε*, *δέκα ἕξ*, *δ κα ἑπτά*, *δέκα ὀκτώ*, *δέκα ἐννέα* κ. ο. κ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν δεκάδα χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, ἕξ ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ δύο μονάδας ἔχει τὴν ὀνομασίαν δέκα πέντε χιλιάδες ἑξακόσια τριάκοντα δύο.

Ἀσκήσεις

1) Πόσας μονάδας ἔχει μία δεκάς; μία ἑκατοντάς; μία χιλιάς; μία ἑκατοντὰς χιλιάδων; ἓν ἑκατομμύριον;

2) Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει α΄) μία χιλιάς; β΄) μία δεκὰς χιλιάδων; γ΄) μία ἑκατοντὰς χιλιάδων;

3) Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ἓν ἑκατομμύριον;

4) Μία μονὰς μιᾶς τάξεως πόσας μονάδας ἔχει τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως;

5) Ποίας τάξεως μονὰς εἶνε ἡ μονὰς τῶν δεκάδων; τῶν ἑκατοντάδων; τῶν χιλιάδων; ἡ δεκὰς τῶν χιλιάδων; ἡ ἑκανοντὰς τῶν χιλιάδων; τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον;

6) Πόσαι ἁπλαῖ μονάδες σχηματίζουν μίαν ἑκατοντάδα; μίαν χιλιάδα; ἓν ἑκατομμύριον;

Περὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

15. Ἂν καὶ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν μὲ τὸ ὄνομά του, δηλαδὴ μὲ τὴν λέξιν ἢ τὰς λέξεις τοῦ ὀνόματός του, ἐν-τούτοις εὑρέθη ἓν μέσον διὰ τοῦ ὁποίου γράφομεν εὐκολώτερον πάντα ἀριθμόν, καθὼς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν.

Καθὼς ἀνωτέρω εἴδομεν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καθένα ἀριθμὸν διὰ τῶν λέξεων· ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, μηδὲν καὶ τῶν λέξεων τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

Ἐὰν ἀντὶ τῶν πρώτων λέξεων μεταχειριζώμεθα τὰ σύμβολα 1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9· 0, τὰ ὁποῖα λέγονται *ψηφία* καὶ ἀντὶ τῶν ὀνομασιῶν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τὰ ἀρχικὰ γράμματα αὐτῶν Μ, Δ, Ε, Χ, $Δ_χ$, $Ε_χ$, $Μ_ε$, $Δ_ε$, $Ε_ε$, κλπ., δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ π. χ. ὀκτὼ χιλιάδας τετρακόσια εἴκοσι πέντε νὰ γράψωμεν συντομώτερον 8Χ 4Ε 2Δ 5Μ. Ἀκόμη ὅμως συντομώτερον θὰ κάμωμεν τὴν γραφὴν τοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι *αἱ ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ θὰ εὑρίσκωνται πάντοτε εἰς τὴν πρώτην θέσιν πρὸς τὰ δεξιά· αἱ δεκάδες εἰς τὴν δευτέραν· αἱ ἑκατοντάδες εἰς τὴν τρίτην, αἱ χιλιάδες εἰς τὴν τετάρτην*, καὶ οὕτω καθεξῆς, παραλείπωμεν δὲ τοιουτοτρόπως τὴν γραφὴν τῶν γραμμάτων Μ, Δ, Ε, Χ,.... ὡς μὴ χρησίμων πλέον. Οὕτω διὰ τὸν ἀριθμὸν ὀκτὼ χιλιάδες τετρακόσια εἴκοσι πέντε, ἀντὶ τοῦ

8Χ 4Ε 2Δ 5Μ

ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 8425.

16. Ἐὰν εἰς ἕνα ἀριθμὸν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως παριστάνομεν τὴν ἔλλειψιν αὐτήν, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ μηδὲν καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῆς τάξεως αὐτῆς τῶν μονάδων τὸ σύμβολον 0. Κατὰ ταῦτα τὸν ἀριθμὸν ὀκτὼ χιλιάδες πεντήκοντα δύο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν 8Χ 5Δ 2Μ, ἢ ἁπλούστερον καὶ συντομώτερον 8052.

17. *Μονοψήφιος* λέγεται εἷς ἀριθμός, ἂν ἔχῃ ἓν ψηφίον, καθὼς π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 1, 7, 9· *διψήφιος* λέγεται ἂν ἔχῃ δύο ψηφία, καθὼς οἱ 25, 63, 96, κλπ· *τριψήφιος*, ἂν ἔχῃ τρία ψηφία, καὶ *πολυψήφιος*, ἂν ἔχῃ πολλὰ ψηφία, καθὼς ὁ 83 574.

18. Εἷς διψήφιος, τριψήφιος, ἢ καὶ πολυψήφιος ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἐν γένει ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων. Π. χ. ὁ 37 ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 μονάδας ἁπλᾶς καὶ 3 δεκάδας· ὁ 3 562 ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἁπλᾶς μονάδας, 6 δεκάδας, 5 ἑκατοντάδας καὶ 3 χιλιάδας.

19. Διὰ καθὲν ψηφίον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν 1) τὴν ἀξίαν αὐτοῦ ὡς ψηφίου, δηλαδὴ πόσας μονάδας παριστάνει τοῦτο· καὶ 2) τὴν ἀξίαν του ὡς ἐκ τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο εἰς τὸν ἀριθμὸν μεταξὺ τῶν ἄλλων ψηφίων, τῆς τάξεως μετρουμένης ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερά· δηλαδὴ τίνος τάξεως εἶνε αἱ μονάδες του.

Ἐκ τοῦ τρόπου τοῦ σχηματισμοῦ τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων ἔχομεν ὅτι,

$1\Delta = 10M$, $1E = 100M$, $1X = 1000M$, $1\Delta_\chi = 10000M$, ...

$1E = 10\Delta$, $1X = 100\Delta$, $1\Delta_\chi = 1000\Delta$, . . . $1X = 10E$, $1\Delta_\chi = 100E$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί· α΄) διακόσια ἑξήκοντα ἑπτά· β) ἑπτακόσια ὀγδοήκοντα ἕξ· γ΄) πεντακόσια τεσσαράκοντα· δ΄) ἐννεακόσια δύο· ε΄) ἑπτακόσια ἕν· στ΄) πέντε χιλιάδες τριακόσια ἑξήκοντα ἕξ.

2) Ὁμοίως αἱ ἀριθμοί· α΄) χίλια τετρακόσια πεντήκοντα τέσσαρα. β΄) ἐννέα χιλιάδες ἑξήκοντα· γ΄) ἐννέα χιλιάδες ἑκατὸν ἑπτά.

3) Νὰ γραφοῦν διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί.

α΄) 7X 8M 3E· β΄) 7X 8A 3E· γ΄) 7X 8E 3M· δ΄) $7M_\varepsilon$· ε΄) $84M_\zeta$.

4) Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί α΄) 25Δ· δ΄) 183Δ· γ΄) 95E· δ΄) 83X·

Περὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

20. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 24. Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν αὐτόν, ἢ ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον ὡς μονάδας τὰς ὁποίας παριστάνει τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον, δηλαδὴ ὡς ἁπλᾶς μονάδας, ἢ ἀπαγγέλλομεν καθὲν ψηφίον τούτου χωριστὰ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων αὐτοῦ, τὰς ὁποίας παριστάνει. Οὕτω λέγομεν: *εἴκοσι τέσσαρες μονάδες, ἢ δύο δεκάδες καὶ τέσσαρες μονάδες*. Ὁμοίως τὸν ἀριθμὸν 648 ἐπαγγέλλομεν, ἐὰν εἴπωμεν, *ἑξακόσια τεσσαράκοντα ὀκτὼ μονάδες, ἢ ἓξ ἑκατοντάδες τέσσαρες δεκάδες καὶ ὀκτὼ μονάδες.*

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶνε πολυψήφιος, ἀπαγγέλλεται κατὰ δύο τρόπους κυρίως. 1) *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερά, καὶ ἀκολούθως ἀπαγγέλλομεν καθὲν τούτων μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου πρὸς τὰ δεξιά*· τὸ πρῶτον τριψήφιον τμῆμα πρὸς τὰ δεξιὰ λέγεται *τμῆμα τῶν ἁπλῶν μονάδων*, τὸ ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ *τμῆμα τῶν χιλιάδων*, τὸ ἀμέσως ἑπόμενον *τμῆμα τῶν ἑκατομμυρίων*, τὸ ἄλλο *τμῆμα τῶν δισεκατομμυρίων* κλπ. Εἶνε φανερὸν ὅτι, κατὰ τὸν χωρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τριψήφια τμήματα εἶνε δυνατὸν τὸ τελευταῖον τμῆμα πρὸς τἀριστερὰ νὰ εἶνε διψήφιον ἢ μονοψήφιον· 2) *ἀπαγγέλλομεν καθὲν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ.*

Καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἀρχίζομεν συνήθως τὴν ἀπαγγελίαν ἐκ τοῦ πρώτου ψηφίου ἢ τμήματος ἐξ ἀριστερῶν. Κατὰ ταῦτα τὸν ἀριθμὸν 6 834 572 ἀπαγγέλλομεν λέγοντες : 1) *ἓξ ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιαι τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες, πεντακόσια ἑβδομήκοντα δύο·* ἢ 2) *ἓξ ἑκατομμύρια, ὀκτὼ ἑκατοντάδες χιλιάδων, τρεῖς δεκάδες χιλιάδων, τέσσαρες χιλιάδες, πέντε ἑκατοντάδες, ἑπτὰ δεκάδες καὶ δύο μονάδες.*

Ἀσκήσεις.

1) Ἀπαγγείλατε τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς καὶ εὕρετε πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κλπ. ἐν ὅλῳ ἔχει καθεὶς ἐξ αὐτῶν. 245· 569· 950· 907· 1000· 2 635· 7 400.

2) Ὁμοίως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 64 000· 87 000· 600 070· 637 535· 507 402· 24 693 972· 9 324 652.

3) α΄) Γράψατε ἕνα ἀριθμόν, π. χ. τὸν 643 καὶ ἔπειτα πρὸς τἀριστερὰ τοῦ 6 ἕν, δύο, τρία... μηδενικὰ καὶ ἀπαγγείλατε ἔπειτα τὸν νέον ἀριθμόν. Τί παρατηρεῖτε λοιπόν, ἐὰν πρὸς τἀριστερὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικά ; β΄) Μεταβάλλεται ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν μετὰ τὸ ψηφίον 3 γράψωμεν ἕνα 0, καὶ ποίαν θέσιν λαμβάνει τότε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ 643 ; ποίαν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ποίαν τὸ τῶν ἑκατοντάδων ; Τί παθαίνει λοιπὸν ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ γράψωμεν ἓν 0 ; γ΄) Μεταβάλλεται ἡ ἀξία τοῦ 643, ἐὰν δεξιὰ τοῦ 3 γράψωμεν δύο 0 καὶ ποίαν θέσιν λαμβάνει τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τὸ τῶν ἑκατοντάδων ; Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐὰν εἰς τὸ τέλος πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράψωμεν ἕν, δύο... μηδενικά ;

Αἱ ἐν Ἑλλάδι κυριώτεραι μονάδες μετρήσεως μήκους, βάρους, χρόνου κλπ.

21. Συνήθως οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν ἐπωνυμίαν *μέτρα, χιλιόμετρα, ὀκάδες, δράμια, δραχμαί, λεπτὰ κλπ.* Αἱ κυριώτεραι μονάδες τοῦ μήκους, βάρους, χρόνου καὶ νομισμάτων τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις ἐν Ἑλλάδι εἶνε αἱ ἑξῆς.

Πρὸς μέτρησιν τοῦ μήκους μεταχειρίζονται συνήθως ὡς μονάδα τὸ *μέτρον*, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, καθὲν τῶν ὁποίων καλεῖται *παλάμη*. Καθεμία παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, καθὲν τῶν ὁποίων λέγεται *δάκτυλος* ἢ *πόντος*. Ὥστε ἓν μέτρον ἔχει 10 παλάμας ἢ 100 δακτύλους.

Τὸ μῆκος χιλίων μέτρων λέγεται *χιλιόμετρον*.

22. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν *πῆχυν*, ὁ ὁποῖος ἰσοδυναμεῖ μὲ 64 δακτύλους περίπου, καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ρούπια*.

23. Διὰ μέτρησιν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων μεταχειρίζονται ὡς μονάδα τὴν *ὀκᾶν*, ἡ ὁποία ἔχει 400 *δράμια*. Βάρος 44 ὀκάδων λέγεται *στατὴρ* (κοινῶς *καντάρι*).

24. Διὰ μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν *ἡμέραν*, ἡ ὁποία ἔχει 24 *ὥρας*. Καθεμία ὥρα ἔχει 60 *πρῶτα λεπτά*, τὰ ὁποῖα σημειώνομεν μὲ ἓν μικρὸν λ, τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. 35^{λ}. Καθὲν πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 *δεύτερα λεπτά*, τὰ ὁποῖα σημειώνομεν μὲ ἓν μικρὸν δ, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. 12^{δ}. Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 366. Τὸ ἔτος ἔχει 12 *μῆνας*.

25. Μονὰς νομισμάτων εἶνε ἡ *δραχμή*, ἡ ὁποία ἔχει 100 *λεπτά*.

Δέκα μὲν δραχμαὶ κάμουν ἓν *δεκάδραχμον*, ἑκατὸν δραχμαὶ ἓν *ἑκατοντάδραχμον*· 5 δραχμαὶ κάμνουν ἓν *τάληρον*.

26. Θὰ σημειώνομεν χάριν συντομίας τὰ μέτρα διὰ τοῦ μ., τὰ χιλιόμετρα διὰ χμ., τοὺς πήχεις διὰ τοῦ πχ., τὰ ρούπια διὰ τοῦ ρ., τὰς ἡμέρας διὰ τοῦ ἡμ. τὰς ὥρας διὰ τοῦ ὥρ., τὰ ἔτη διὰ ἔτ., τὰς δὲ δραχμὰς καὶ λεπτά, διὰ τῶν δρ. καὶ λ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Θεμελιώδεις πράξεις τῶν ἀριθμῶν

Περὶ προσθέσεως.

27. Ἐὰν ἔχωμεν 8 δρ. καὶ 6 δρ. πόσας ἔχομεν ἐν ὅλῳ;

Θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν καὶ οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ 8 καὶ 6· ἤτοι 14 δραχμάς. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 14 λέγεται *πρόσθεσις*.

Ὁμοίως, ἂν ἔχομεν 5 βιβλία καὶ τρία βιβλία καὶ ζητεῖται πόσα ἔχομεν ἐν ὅλῳ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 5, τοῦ 3 καὶ τοῦ 7· ἤτοι τὸν 15, ἡ δὲ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν 15 ἐκ τῶν 5, 3 καὶ 7 λέγεται *πρόσθεσις*.

Γενικῶς, ***«πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλας τὰς μονάδας τῶν δοθέντων».***

28. Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι θὰ προστεθοῦν λέγονται *προσθετέοι*, ὁ δὲ ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς προσθέσεως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς λέγεται *ἄθροισμα*. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 6 γράφομεν οὕτω $8+6$, ἢ $6+8$ καὶ ἀναγινώσκομεν ὀκτὼ *σὺν* ἕξ, ἢ ἕξ *σὺν* ὀκτὼ ἢ 6 *καὶ* ὀκτώ. Ὥστε τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶνε τὸ $+$ τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλεται *σὺν* ἢ *καί*.

29. Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶνε συγκεκριμμένοι ἢ ἀφῃρημένοι. Ἐὰν εἶνε συγκεκριμμένοι, πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς· δηλαδὴ ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν. Ἐὰν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶνε συγκεκριμμένοι ὁμοειδεῖς, τὸ ἄθροισμά των εἶνε ὁμοειδὲς μὲ αὐτούς.

30. Ἂν δίδωνται δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά των, λαμβάνομεν ἕνα ἐκ τῶν δοθέντων, αὐτὸν αὐξάνομεν κατὰ τὰς μονάδας ἑνὸς ἄλλου ἐξ αὐτῶν, καὶ οὕτω ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς δοθέντας, *χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν τάξιν τὴν ὁποίαν καθεὶς ἔχει.*

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.

31. Ἐὰν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως θέλωμεν νὰ ἴδωμεν, ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ πρῶτον ἀλλάξωμεν τὴν μεταξύ των θέσιν τῶν προσθετέων, ἐπαναλαμβάνομεν ἀκολούθως τὴν πρόσθεσιν καὶ βλέπομεν, ἂν εὑρίσκωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, καθὼς καὶ πρίν. Ἡ νέα αὕτη πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ ἐλέγξωμεν τὴν προηγουμένην, λέγεται *δοκιμὴ* τῆς προσθέσεως.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὕρετε τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα.

α') 7 ὀκ. + 6 ὀκ. β') 9 δραχ. + 8 δραχ. γ') 17 μέτρα + 8 μέτρα. δ') 3 τάλ. + 9 τάλ. ε') 9 δρ. + 7 δρ. στ') 3 ὀκ. + 8 ὀκ + 7 ὀκ· ζ') 12 πήχ. + 7 πήχ. + 6 πήχ. η') 59 δρ. + 7 δρ. θ') 13 ἑκατοντάδραχ. + 9 ἑκ. + 7 ἑκ. ι') 16 δεκάδρ. + 8 δεκ. + 7 δεκ.

2) Λαμβάνει τις τὴν πρώτην ἡμέραν 8 δρ., τὴν δευτέραν ἡμέραν 6 δρ., τὴν δὲ τρίτην 9 δρ. ;πόσας δρ. λαμβάνει ἐν ὅλῳ ;

3) Ἀγοράζει τις ἀπὸ ἓν πρᾶγμα 7 ὀκ., ἔπειτα 6 ὀκ. καὶ πάλιν 10 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Σχηματίσασε τὰ ἀθροίσματα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο. Δηλαδὴ α') 1+1, 1+2, κλπ. μέχρι τοῦ 1+9. β') 2+1, 2+2, . . . κλπ. μέχρι τοῦ 2+9 καὶ οὕτω καθεξῆς . . . ., 9+1, 9+2 κλπ. μέχρι τοῦ 9+9.

2) Εὕρετε τὰ ἀθροίσματα α') 1+3+5+7+9· β') 2+4+6+8· γ') 3+5+7+9.

3) 5+2=7, 7+2=9, προχωρήσατε τοιουτοτρόπως μέχρις ὅτου εὕρετε 101.

4) 5+3=8, 8+3=11, προχωρήσατε μέχρι ὅπου εὕρετε 104.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Διὰ εὰ εὕρωμεν τὸ 50+20 παρατηροῦμεν ὅτι 50=5 δεκάδες, 20=2 δεκ., καὶ 50+20=5 δεκ.+2 δεκ.=7 δεκ.=70. Εὕρετε ὁμοίως α') 30+40· β') 70+40· γ') 60+40.

2) Εὕρετε τὰ α') 600+300· β') 200+500· γ') 400+700 δ') 900+200. ε') 600+400· στ') 3 000+5 000.

3) Εὕρετε τὰ α΄) 30+40+50· β΄) 20+40+30· γ΄) 600+200 +100· δ΄) 400+200+300.

4) Σχηματίσατε τὴν σειρὰν 30+50=80· 80+50=130 κλπ. μέχρι τοῦ 580.

5) Ὁμοίως τὴν σειρὰν 20+40=60 κλπ. μέχρι τοῦ 340.

6) Ὁμοίως τὴν σειρὰν 100+200=300 κλπ. μέχρι τοῦ 2100.

7) Ὁμοίως τὴν σειρὰν 300+400=700 κλπ. μέχρι τοῦ 7300.

Ὁμὰς τετάρτη. Ἐφαρμογαὶ τῆς προσθέσεως ὅμοιαι πρὸς τὰς ἑπομένας εἶνε ἄξιαι ἰδιαιτέρας προσοχῆς.

α΄) Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος *ἐκέρδισεν* ἢ ὅτι ἔχει *κέρδος* ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ, ὑπάρχει δ' ἡ ἑξῆς σχέσις.

Ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως=μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς+ τὸ κέρδος

τιμὴ τῆς πωλήσεως	
τιμὴ τῆς ἀγορᾶς	κέρδος

β΄) Ὅταν ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε μικροτέρα τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος *ἐζημιώθη* ἢ ὅτι ἔχει *ζημίαν* ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ, ὑπάρχει δ' ἡ ἑξῆς σχέσις.

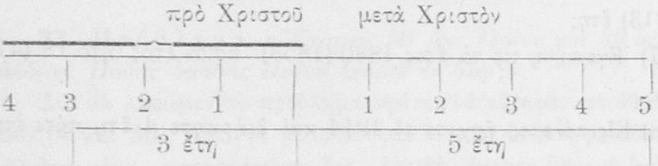
Ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς=μὲ τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως+τὴν ζημίαν

τιμὴ τῆς ἀγορᾶς	
τιμὴ τῆς πωλήσεως	ζημία

γ΄) Ὅταν ἓν ἐμπόρευμα ἢ ἀντικείμενον εὑρίσκεται ἐντὸς ἑνὸς ἀγγείου, π. χ. ἔλαιον ἐντὸς βαρελίου, οἶνος ἐντὸς φιάλης, σάπων ἐντὸς κυβωτίου κλπ., λέγομεν *μικτὸν βάρος* αὐτοῦ τὸ βάρος ἐμπορεύματος καὶ ἀγγείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχεται· *καθαρὸν βάρος* (κοινῶς νέτο) λέγεται τὸ βάρος μόνον τοῦ ἐμπορεύματος καὶ *ἀπόβαρον* (κοινῶς ντάρα) τὸ βάρος μόνον τοῦ ἀγγείου. Μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις.

Τὸ καθαρὸν βάρος + τὸ ἀπόβαρον=μὲ τὸ μικτὸν βάρος.

δ΄) Ἓν γεγονὸς ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτου π. Χ. καὶ ἐτελείωσεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἕκτου ἔτους μ. Χ. Πόσα ἔτη διήρκεσεν τὸ γεγονὸς αὐτό;

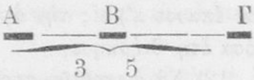


Καθὼς βλέπομεν, θὰ ἔχωμεν 3 ἔτη+5 ἔτη=8 ἔτη.

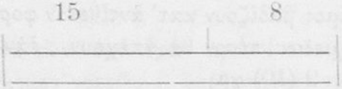
ε´) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν Α καὶ Β εἶνε 3 χμ., τῶν Β καὶ Γ εἶνε 5 χμ., πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν Α καὶ Γ;

Προφανῶς ἔχομεν

ΑΓ=3 χμ.+5 χμ.=8 χμ.



στ´) Εἰς μερικὰς προσθέσεις δὲν δίδονται ὅλοι οἱ προσθετέοι, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς ἀπὸ σχέσιν τινά, ἡ ὁποία δίδεται. Π. χ. ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ εἷς εἶνε 15, ὁ ἄλλος κατὰ 8 μεγαλύτερος· πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;



15+8=23

Καθὼς βλέπομεν καὶ ἐκ τοῦ σχήματος, ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶνε 15+8=23· ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶνε 15+23=38.

1) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπόρευμα ἀντὶ 20 (14)* δρ: ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 6(6) δρχ;

2) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 38 (45) δρχ. καὶ τὸ πωλεῖ 12 (15) δρχ. ἀκριβώτερον· ἀντὶ πόσων δρ. τὸ πωλεῖ;

3) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἓν ἐμπόρευμα ἀντὶ 30 (26) δρχ. μὲ ζημίαν 10 (14) δραχμῶν· ἀντὶ πόσων δρ. τὸ εἶχε ἀγοράσει;

4) Ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἐμπορεύματος ἦτο 22 (43) δρχ., ἡ δὲ ζημία 12 (17) δρ.· ποία ἦτο ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς;

5) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος ἦτο 38 (19) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 7 (6) ὀκ.· πόσον ἦτο τὸ μικτὸν βάρος του;

* Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ διατύπωσις ἑνὸς προβλήματος μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς γράφονται πρὸς συντομίαν μόνον οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἐν παρενθέσει.

6) Εἷς εἶνε ἡλικίας 48 (37) ἐτῶν· ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ μετὰ 14 (13) ἔτη;

7) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1880 (1853)· ποῖον ἔτος ἦτο 18 (47) ἐτῶν;

8) Εἷς πόλεμος ἤρχισε τὸ 1914 καὶ διήρκησε 4 ἔτη· πότε ἐτελείωσε;

9) Ἓν παιδίον ἀπέθανε τὸ 75 (94) π. Χ. εἰς ἡλικίαν 5 (3) ἐτῶν· πότε ἐγεννήθη;

10) Ἡ πόλις τῆς Ῥώμης ἱδρύθη τὸ 753 π. Χ.· πόσα ἔτη ἐπέρασαν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς της μέχρι τοὺς (12) ἔτους μ. Χ.;

11) Ἓν γεγονὸς ἤρχισε κατὰ τὸ τέλος τοῦ 8 (15) ἔτους π. Χ. καὶ ἔπαυσε α΄) εἰς τὴν ἀρχὴν β΄) εἰς τὸ τέλος τοῦ 8 ἔτους μ. Χ.· πόσα ἔτη διήρκησε;

12) Νὰ συντεθοῦν προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 1—7 καὶ νὰ λυθοῦν.

Ὁμὰς πέμπτη 1) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 5 (9) χμ., ἡ ΒΓ 10 (15) χμ· πόση εἶνε ἡ ἀπόστασις ΑΓ;

2) Δύο ταχυδρόμοι βαδίζουν κατ' ἀντίθετον φοράν, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον· πόσον θὰ ἀπέχουν, ἐὰν ὁ εἷς διανύσῃ 8 (7) χμ., ὁ δὲ ἄλλος 9 (10) χμ;

3) Μία ῥάβδος εἶνε 9 (10) παλάμας μακροτέρα ἄλλης καὶ αὐτὴ κατὰ 6 (5) παλ. μακροτέρα τρίτης, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 5 (8) παλ.· πόσον μῆκος ἔχει καθεμία; ἡ α΄ 20 (23).

4) Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου φοιτοῦν 4 (3) μαθηταὶ περισσότεροι τῶν εἰς τὴν β΄. Εἰς τὴν β΄ φοιτοῦν 6 (5) περισσότεροι τῶν εἰς τὴν γ΄. Εἰς τὴν γ΄ φοιτοῦν 3 (2) περισσότεροι ἢ εἰς τὴν δ΄. Πόσους μαθητὰς ἔχει καθεμία τάξις, ἂν ἡ δ΄ ἔχει 34 (28) μαθητάς; 47, 43, 37, 34. (38, 35, 30, 28).

5) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τοῦ 20 (36), τοῦ 25 (24) καὶ τοῦ κατὰ 5 (10) μεγαλυτέρου τούτου;

6) Εἷς ἔμπορος εἰσπράττει τὴν πρώτην ἡμέραν 18 (22) δρ.· τὴν δευτέραν 8 (6) δρ. ἐπὶ πλέον καὶ τὴν τρίτην 4 (5) δρ. περισσοτέρας ἢ ὅσον τὴν δευτέραν· πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 74 (83).

7) Συνθέσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 2,4,6 καὶ λύσατε αὐτά.

Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.

32. Πρόβλημα. *«Ἔχομεν 50 ὀκ. ἐλαίου καὶ 30 ὀκάδας ἀκόμη. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου ἔχομεν ἐν ὅλῳ;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν 58 καὶ 30. Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 58 τὰς μονάδας τοῦ 30 ἀνὰ μίαν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἔχομεν 58 = μὲ 5 δεκάδας + 8 μονάδας, 30 = μὲ 3 δεκάδας, θὰ εἶνε

$58 + 30 = 5Δ + 3Δ + 8M = 8Δ + 8M = 88$ · ἤτοι ἔχομεν 88 ὀκάδας.

Δηλαδὴ λέγομεν συντόμως καὶ ἀπὸ μνήμης $58 + 30 = 50 + 30$ ἴσον 80, καὶ 8 ἴσον 88.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $48 + 35$. Εὑρίσκομεν αὐτὸ εὐκολώτερον καὶ ἀπὸ μνήμης ὡς ἑξῆς.

Προσθέτομεν εἰς τὸν 48 τὸν 30 καὶ εὑρίσκομεν 78· εἰς τὸ 78 προσθέτομεν ἀκόμη 5, ὅτε εὑρίσκομεν 83.

Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ ἄθροισμα $26 + 16 + 14$ εὐκολώτερον καὶ ἀπὸ μνήμης, σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $26 + 14 = 40$, καθὼς εἴδομεν, καὶ εἰς τὸ 40 προσθέτομεν ἀκόμη 16, ὅτε εὑρίσκομεν 56.

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω προσθέσεων, καθὼς καὶ ἄλλων τοιούτων, εὑρίσκομεν νοερῶς ἢ ἀπὸ *μνήνης, χωρὶς νὰ γράφωμεν τοὺς προσθετέους καὶ τὰ ἀπὸ κάθεμίαν πρόσθεσιν ἀθροίσματα.* Διὰ τοῦτο, ὅταν προσθέσωμεν οὕτω, λέγομεν ὅτι ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ μνήμης.

33. *Παρατήρησις.* Ἐπειδὴ τὸ 0 οὐδένα ἀριθμὸν παριστάνει, διὰ τοῦτο ὅταν προστίθεται εἰς ἀριθμὸν δὲν μεταβάλλει αὐτόν. Ἤτοι εἶνε π. χ. $7 + 0 = 7$. Ὁμοίως εἶναι $0 + 13 = 13$.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα.

α΄) $28 + 80$· β΄) $39 + 70$· γ΄) $59 + 40$· δ΄) $30 + 64 + 20$.

2) Ὁμοίως τά· α΄) $264 + 40$· β΄) $50 + 56 + 4$.

γ΄) $65 + 35$· δ΄) $70 + 32 + 19$· ε΄) $98 + 22 + 15$.

3) Ὁμοίως τά· α΄) $63 + 17 + 9$· β΄) $28 + 62 + 18$.

γ΄) $67 + 29 + 31$· δ΄) $65 + 28 + 32$· ε΄) $9 + 625 + 25$.

4) Ὁμοίως τά· α΄) $70 + 12 + 13 + 27$· β΄) $999 + 15 + 35$.

γ΄) $28 + 32 + 48 + 12$· δ΄) $650 + 62 + 240 + 50 + 8$.

Γενικὸς κανὼν τῆς προσθέσεως.

34. *Πρόβλημα. «Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε κατὰ τὸν μῆνα Ἰανουάριον 2 417 δραχμάς, κατὰ τὸν Φεβρουάριον 2 135 δραχμάς, κατὰ τὸν Μάρτιον 2 509 δραχμὰς καὶ κατὰ τὸν Ἀπρίλιον 1 928 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

2 417 δρ. + 2 135 δρ. + 2 509 δρ. + 1 928 δρ.

Ἐπειδὴ δὲν εἶνε εὔκολον νὰ κάμωμεν τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν ἀπὸ μνήμης, οὔτε νὰ προσθέσωμεν τὰς μονάδας τῶν προσθέσεων ἀνὰ μίαν, παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστος τῶν προσθετέων ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ διάφορα ψηφία των. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰ ψηφία τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν προσθετέων, χωριστὰ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων, χωριστὰ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων αὐτῶν κλπ., καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα θὰ προκύψουν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου καὶ σύρομεν κάτωθεν αὐτῶν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 2\ 417 \\ 2\ 135 \\ 2\ 509 \\ 1\ 928 \\ \hline 8\ 989 \end{array}$$

Προσθέτομεν ἀκολούθως πρῶτον τὰ ψηφία τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ λέγομεν 8 καὶ 9, 17 καὶ 5, 22 καὶ 7, 29. Ἐπειδὴ τὸ 29 ἔχει 2 δεκάδας καὶ 9 μονάδας, γράφομεν 9 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν καὶ κρατοῦμεν τὰς δεκάδας διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων.

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τῶν δεκάδων καὶ λέγομεν· 2 τὸ κρατούμενον καὶ 2, 4 καὶ 3, 7 καὶ 1, 8. Γράφομεν τὸ 8 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν.

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων τῶν ἀριθμῶν καὶ λέγομεν· 9 καὶ 5, 14 καὶ 1, 15 καὶ 4, 19. Ἐπειδὴ 19 ἑκατοντάδες ἔχουν 1 χιλιάδα καὶ 9 ἑκατοντάδας, γράφομεν 9 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 χιλιάδα, διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῶν χιλιάδων.

Προσθέτομεν καὶ τὰ ψηφία τῶν χιλιάδων καὶ λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1, 2 καὶ 2, 4 καὶ 2, 6 καὶ 2, 8. Γράφομεν 8 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ψηφίων τῶν χιλιάδων τῶν ἀριθμῶν.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων προσθετέων εἶνε 8 989. Δηλαδὴ ἡ οἰκογένεια ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ 8 989 δραχμάς.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προσθέσεως καὶ ἄλλων ὁμοίων ἔχομεν τὸ ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς προσθέσεως.

«***Γράφομεν ἕνα τῶν προσθετέων καὶ κάτωθεν αὐτοῦ ἄλλον ἐξ αὐτῶν· κάτω τούτου ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου γράψωμεν ὅλους τοὺς δοθέντας ἀλλ' ὥστε, τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Σύρομεν κάτωθεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία καθεμιᾶς στήλης· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἐὰν ὅμως περιέχῃ καὶ δεκάδας, τότε γράφομεν μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἑπομένης στήλης πρὸς τἀριστερά. Οὕτω προχωροῦμεν μέχρις ὅτου προσθέσωμεν καὶ τὰ ψηφία τῆς τελευταίας στήλης πρὸς τἀριστερά***».

Παραδείγματα.

α')	8 854	β')	13 063	γ')	14 032
	9 271		207 409		9 850
	6 142		81 476		17 497
	4 021		7 304		8 965
	28 288		17 003		50 344
			326 255		

35. *Παρατήρησις.* Πρέπει νὰ ἐπιδιώκωμεν νὰ κάμωμεν ἂν εἶνε δυνατόν, πᾶσαν πρόσθεσιν ἀπὸ μνήμης, μόνον δὲ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶνε μεγάλοι ἀριθμοὶ ἢ καὶ πολλοὶ νὰ ἐκτελοῦμεν αὐτὴν γραπτῶς κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνουν αἱ ἑπόμεναι προσθέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των.

α΄) 940+2 775+30· β΄) 960+864+90· γ΄) 3 635+743+95+9 545· δ΄) 670+3 570+680· ε΄)1 965+643+96+198 524+72. στ΄) 1 840+983+60+20 207+15 903· ζ΄) 950+962+60. η΄) 925+585+87+145+9 582.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἷς χωρικὸς ἀγοράζει χωράφιον ἀντὶ 4 182 (132) δρ. καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 864 (973) δρ.· ἀντὶ πόσων δραχμ. πωλεῖ αὐτό; 5 046 (7 105).

2) Ἔμπορος πωλεῖ ζάχαριν ἀντὶ 6 783 (4 871) δρ. μὲ ζημίαν 385 (576) δρ.· πόσον τοῦ ἐκόστιζεν; 7 168 (5 447)

3) Τὸ καθαρὸν βάρος βαρελίου οἴνου εἶνε 728 (313) ὀκ. τὸ δὲ ἀπόβαρον 12 (19) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ μικτὸν βάρος; 740 (3324)

4) Συνθέσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὸ 1, 2, 3 καὶ λύσατε αὐτά.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐγεννήθη τις τὸ 1 743 (1 736) καὶ ἔζησεν 89 (74) ἔτη· ποῖον ἔτος ἀπέθανε; 1 832 (1 810)

2) Ἀπέθανέ τις τὸ 324 (453 π. Χ. εἰς ἡλικίαν 85 (95) ἐτῶν· πότε ἐγεννήθη; 507 (548).

3) Ὁ φιλόσοφος Θαλῆς ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 640 π. Χ.· πόσα ἔτη ἐπέρασαν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους αὐτοῦ μέχρι τῆς ἀρχῆς τοῦ τρέχοντος ἔτους;

4) Ἓν γεγονὸς ἤρχισε κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους 643 (528) π.Χ. καὶ διήρκεσε μέχρι τῆς ἀρχῆς (τοῦ τέλους) τοῦ ἔτους 324 (1 218) μ. Χ. Πόσα ἔτη διήρκησε; 965 (1 745)· 966 (1 746)·

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι ἀντιθέτως· πόσον θὰ ἀπέχουν, ἐὰν ὁ μὲν διανύσῃ 24 825 (36 124) μ., ὁ δὲ 34 105 (37 158) μ.; 58 930 (73 282).

2) Τέσσαρες τόποι Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 1 684 (9325) μ., ἡ ΒΓ εἶνε 7 108 (2 974) μ., ἡ δὲ ΓΔ 7 418 (3 078) μ.· πόσον ἀπέχουν μεταξύ των οἱ Α καὶ Δ; 16 210 (15 777).

Περὶ ἀφαιρέσεως.

36. *Πρόβλημα.* «**Ἠγόρασέ τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 5 δραχμῶν καὶ τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 8 δραχμῶν· πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε;**»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν 8 δρ. τὰς ὁποίας ἔλαβεν οὗτος ἀπὸ τὴν πώλησιν, αἱ 5 δρ. ἦσαν ἰδικαί του, ἐπειδὴ τὰς ἐξώδευσε κατὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ἐμπορεύματος, αἱ δὲ ἄλλαι εἶνε κέρδος. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 δρ. κατὰ τὰς μονάδας τοῦ 5 δρ. Ἐλαττώνοντες ἀνὰ μίαν τὰς 8 μονάδας κατὰ 5, εὑρίσκομεν ὅτι μένουν 3. Ὥστε ἐκέρδισεν οὗτος 3 δραχμάς.

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν τὸν 8 κατὰ τὰς μονάδας τοῦ 5 λέγεται *ἀφαίρεσις*.

Ἐν γένει, *«ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἐλαττώνομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ὁ ἄλλος»*.

37. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος θὰ ἐλαττωθῇ λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος φανερώνει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλλατωθῇ ὁ μειωτέος λέγεται *ἀφαιρετέος*. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται *διαφορὰ* τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ *ὑπόλοιπον* τῆς ἀφαιρέσεως. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μειωτέος μὲν εἶνε τὸ 8 δρ., ἀφαιρετέος τὸ 5 δρ., διαφορὰ δὲ ὁ 3 δρ.

Τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 8 καὶ 5 σημειώνομεν οὕτω, 8—5 καὶ ἀπαγγέλλομεν: ὀκτὼ *πλὴν* πέντε ἢ ὀκτὼ *μεῖον* πέντε ἢ πέντε ἀπὸ ὀκτώ. Ὥστε σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ — τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται *πλὴν* ἢ *μεῖον*.

38. Ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος δύνανται νὰ εἶνε καὶ οἱ δύο ἀφῃρημένοι ἢ συγκεκριμένοι. Ὅταν ὅμως εἶνε συγκεκριμένοι *πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς*, ὅτε καὶ ἡ διαφορά των εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς αὐτούς, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα.

39. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον εἶνε τὸ κέρδος, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν ἀνὰ μίαν μονάδα τὸν ἀριθμὸν 5 δρ., μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸν 8 δρ. Πράγματι ἔχομεν 5 δρ. καὶ 1 δρ., 6 δρ. καὶ 1 δρ., 7 δρ. καὶ 1 δρ. 8 δρ. Ἤτοι, ἂν αὐξήσωμεν τὸν 5 δρ. κατὰ 3 δρ. εὑρίσκομεν τὸν 8 δρ. Οὕτω ἔχομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, *«ἀφαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον δίδει ἄθροισμα τὸν μεγαλύτερον»*.

41. Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι, προφανῶς ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε 0. Ἂν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε 0, τὸ ὑπόλοιπον ἰσοῦται μὲ τὸν μειωτέον. Π. χ. εἶνε 7—0=7, διότι τὸ ψηφίον 0 οὐδένα ἀριθμὸν παριστάνει. Ἂν μειωτέος εἶνε τὸ 0, τότε ἡ ἀφαίρεσις δὲν δύναται νὰ γίνῃ καὶ λέγομεν ὅτι εἶνε **ἀδύνατος**. Ἐπίσης ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀδύνατος, ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου.

Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.

41. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον, ἕπεται ὅτι, *«διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸν ἀφαιρετέον, καὶ ἂν εὕρωμεν ἄθροισμα τὸν μειωτέον, τότε ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀκριβής»*. Οὕτω εἰς τὴν ἀφαίρεσιν 8—5 τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 3, τὸ δὲ ἄθροισμα 5+3 εἶνε ἴσον μὲ 8. Ἑπομένως ἡ ἀφαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὕρετε τὰς ἑπομένας διαφοράς· α΄) 9 ὀκ.—4 ὀκ. β΄) 8Δ—2Δ. γ΄) 12 Ε—10 Ε. δ΄) 7Χ—4 Χ. ε΄) 15 δρχ.—9 δρχ. στ΄) 20 δρ.—16 δρ. ζ΄) 9Δ—4Δ. δ΄) 14 ἡμ—7 ἡμ. ε΄) 28Χ—18Χ.

2) Ἀριθμήσατε ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100 ἀναδρομικῶς, ἐνόσω εἶνε δυνατόν. α΄) ἀνὰ 1. β΄) ἀνὰ 2. γ΄) ἀνὰ 3. δ΄) ἀνὰ 4 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ ἀνὰ 10.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔστω ἡ διαφορὰ 80—50. Ἐπειδὴ εἶνε 80=μὲ 8Δ καὶ 50=μὲ 5Δ, ἔχομεν ὅτι 80—50 ἰσοῦται μὲ 8Δ—5Δ=3Δ· δηλαδὴ 80—50=30. Εὕρετε ὁμοίως τὰς διαφοράς· α΄) 40—20· β΄) 700—300· γ΄) 900—800· δ΄) 8 000—3 000· ε΄) 28000—18 000.

2) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα· α΄) 9+4—7· β΄) 20 δρ.+24δρ.—38 δρ. γ΄) 39 μ.+11 μ.—20 μ. δ΄) 140 ὀκ.—100 ὀκ.+60 ὀκ.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐὰν εἴς τινα ἀριθμὸν προσθέσω τὸν 30 (90) εὑρίσκω τὸν 50 (140)· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;

2) Ἐὰν εἴς τινα ἀριθμὸν προσθέσω τὸ ἄθροισμα 2 (8)+6 (9) +9 (19) εὑρίσκω τὸν 27 (30)· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;

3) Λαμβάνει τις 4 000 (600) δρ. καὶ ἐξ αὐτῶν ἐξοδεύει 2 000 (400) δρ.· πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν;

4) Μίαν πρωΐαν ἡ θερμοκρασία ἦτο 19° (21°)· τὴν μεσημβρίαν τῆς αὐτῆς ἡμέρας 24° (32°), τὴν δὲ ἑσπέραν 20° (24°)· κατὰ πόσους βαθμοὺς ἡ θερμοκρασία τῆς μεσημβρίας καὶ τῆς ἑσπέρας ἦτο μεγαλυτέρα τῆς πρωϊνῆς;

Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.

42. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον 300 δρχ.+39 δρχ.—100 δρ., ἀρκεῖ ἀπὸ τὸν 300 δρχ. ν' ἀφαιρέσωμεν 100 δρχ. καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον 200 δρχ. νὰ προσθέσωμεν 29 δρχ., ὅτε εὑρίσκομεν 239 δραχμάς.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 39 κατὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ 16 καὶ 14, ἤτοι κατὰ 30. Θὰ ἔχωμεν 39—30=9. Εἶνε φανερὸν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ἂν ἀπὸ τὸ 39 ἀφαιρέσωμεν πρῶτον 14 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 25 ἀφαιρέσωμεν τὸν 16.

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 90—58, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 90 τὸ ἄθροισμα 50+8 καὶ εὑρίσκομεν 90—50=40 40—8=32.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 40—14—6, δυνάμεθα ἀπὸ τὸν 40 ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ 14 καὶ τοῦ 6, ἤτοι τὸν 20, ὅτε εὑρίσκομεν 20.

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀνωτέρω πράξεων καθὼς καὶ ἄλλων ὁμοίων περιπτώσεων προσπαθοῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν χωρὶς νὰ γράφωμεν τὰς μερικὰς πράξεις, ἀλλὰ νοερῶς καὶ ἀπὸ μνήμης.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, ἀλλ' ἀπὸ μνήμης· α') 127+6—27· β') 439+4—39· γ') 649+9—349· δ') 259+36—59—6· ε') 839+38—39—8.

2) Ὁμοίως τὰ α') 96—16—30· β') 94—14—30· γ') 70—12 —28+16· δ') 64—68+24+14.

Γενικὸς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

43. *Πρόβλημα.* ***«Εἶχέ τις 976 δραχ. καὶ ἐξώδευσε 245 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;»***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 245 δρ. ἀπὸ τὰς 976 δρ. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶνε εὔκολον οὔτε ἀνὰ μίαν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, οὔτε νὰ κάμωμεν ἀπὸ μνήμης τὴν ἀφαίρεσιν αὐτήν, παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων καί μάλιστα ὁ μὲν μειωτέως ἀποτελεῖται ἀπὸ 9Ε, 7Δ καὶ 6Μ, ὁ δὲ ἀφαιρετέος ἀπὸ 2Ε, 4Δ καὶ 5Μ. Ἀφαιροῦμεν λοιπὸν χωριστὰ τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ μειωτέου, ἔπειτα τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν πρῶτον τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου (ὅπως γράφομεν τοὺς προσθετέους εἰς τὴν πρόσθεσιν), σύρομεν κάτωθεν αὐτῶν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 976 \\ 245 \\ \hline 731 \end{array}$$

καὶ λέγομεν· 5 ἀπὸ 6, 1· γράφομεν τὸ 1 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ψηφίων τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Προχωροῦμεν ἀφαιροῦντες τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ τοῦ μειωτέου, καὶ λέγομεν· 4 ἀπὸ 7, 3· γράφομεν τὸ 3 κάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν. Ἀφαιροῦμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ τοῦ μειωτέου καὶ λέγομεν· 2 ἀπὸ 9, 7· γράφομεν τὸ 7 κάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων. Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 731. Ἤτοι ἔμειναν 731 δρχ.

44. *Ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.* Εἶνε δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε ἓν ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶνε μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

«Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

Ἐὰν ἔχωμεν π.χ. τὴν ἀφαίρεσιν 7—4, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3, καθὼς φαίνεται καὶ ἐὰν καθεμίαν μονάδα τῶν ἀριθμῶν παραστήσωμεν μὲ μίαν στιγμήν.

Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 5, θὰ ἔχωμεν πάλιν

διαφορὰν 3 ἤτοι $(7+5)-(4+5)=3$.

45. *Πρόβλημα.* ***«Ἔμπορος ἐπλήρωσε διὰ ἔλαιον 12 625 δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε 13 804 δρ.· πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε»;***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα θὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς 12 625 δρ. ἀπὸ τὰς 13 804 δρ. Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτω τοῦ μειωτέου, καθὼς εἰς τὴν προηγουμένην ἀφαίρεσιν, καὶ λέγομεν 5Μ ἀπὸ 4Μ δὲν ἀφαιροῦνται·

$$\begin{array}{r} 13\,804 \\ 12\,625 \\ \hline 1\,179 \end{array}$$

Αὐξάνομεν τὸν μειωτέον κατὰ 10Μ καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ 1Δ καὶ λέγομεν· 5Μ ἀπὸ 14Μ μένουν 9Μ· γράφομεν τὸ 9 κάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ψηφίων τῶν μονάδων. Προχωροῦμεν τώρα ὡς ἑξῆς. Λέγομεν 1 (τὸ κρατούμενον) καὶ 2, 3 ἀπὸ 0 δὲν ἀφαιρεῖται· ἀπὸ 10, 7· γράφομεν τὸ 7 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Προχωροῦμεν λέγοντες· 1 (τὸ κρατούμενον) καὶ 6, 7 ἀπὸ 8, 1· γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων· 2 ἀπὸ 3, 1· γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων· 1 ἀπὸ 1 μηδέν· γράφομεν 0 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων ἢ δὲν γράφομεν τίποτε, ἐπειδὴ τὸ 0 τοῦτο δὲν ἔχει καμμίαν ἀξίαν ὅταν εὑρίσκεται ὡς πρῶτον ψηφίον καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ. Ὥστε ὁ ἔμπορος ἐκέρδισε 1179 δραχμάς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀριθμῶν.

«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, ὥστε τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν καθὲν

ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου, ἀρχίζομεν δὲ ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ τὰ ὑπόλοιπα γράφομεν κάτωθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην καθενός. Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ μὲν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10, τὸ δὲ ἀμέσως ἑπόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ μίαν μονάδα καὶ ἀφαιροῦμεν· οὕτω ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν μέχρις ὅτου ἀφαιρεθοῦν πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου».

Παραδείγματα ἀφαιρέσεων.

α')	15 647	β')	82 351	γ')	70 220
	9 269		41 230		16 531
	6 378		41 121		53 789

46. *Παρατηρήσεις.* Πρέπει νὰ ἐπιδιώκωμεν νὰ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν, ἂν εἶνε δυνατόν, ἀπὸ μνήμης καὶ ἰδίως ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μικροί.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των· α') 476—143· β') 8693—5746· γ') 9663—8569 δ') 869λ.—307λ.

2) Νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπον τὸ 8963+3276—5864.

3) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 89342 ν' ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα 2632+7624+5846. (Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον κατὰ δύο τρόπους).

4) Νὰ ἐλαττωθῇ τὸ ἄθροισμα 7936+5284 κατὰ τὴν διαφορὰν 14645—8993.

5) Νὰ ἐλαττωθῇ ἡ διαφορὰ 2178—1937 κατὰ τὴν 8873—8864. 132.

6) Ἀπὸ τὸν 9306 ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 846· ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ν' ἀφαιρεθῇ πάλιν ὁ 846 καὶ οὕτω καθεξῆς ὅσον εἶνε δυνατόν. 11 φοράς.

7) Αὐξάνω ἀριθμόν τινα κατὰ 387 (95) καὶ εὑρίσκω τὸν 496 (126). Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; 109(31).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος ἠγόρασε οἶνον ἀντὶ 3824 (768) δρ. καὶ τὸν ἐπώλησεν ἀντὶ 4128 (879) δρ. πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε; 304 (111).

2) Ἔμπορος ἐπώλησε τυρὸν ἀντὶ 2 107 (175) δρ., ἐκέρδισε δὲ 478 (79) δρ.· πόσον τὸν ἠγόρασε; 1 709 (840).

3) Εἷς ἠγόρασε σάπωνα ἀντὶ 1 678 (332) δρ. καὶ τὸν μετεπώλησε μὲ ζημίαν 472 (122) δρ.· πόσον τόν ἐπώλησε; 1206 (840).

4) Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 386 (415) ὀκ., τὸ δὲ καθαρὸν βάρος 317 (368) ὀκ., πόσον εἶνε τὸ ἀπόβαρον; 69 (17).

5) Νὰ συντεθοῦν προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 1—4 καὶ νὰ λυθοῦν.

6) Ἐγεννήθη τις τὴν 1ην Ἰανουαρίου τοῦ 1749 καὶ ἀπέθανε τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1832· εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε; (83)

7) Ἐγεννήθη τις εἰς τὸ τέλος τοῦ 1571 καὶ ἀπέθανε α΄) εἰς τὴν ἀρχήν, β΄) εἰς τὸ τέλος τοῦ 1630· πόσα ἔτη ἔζησε; 58 (59).

8) Ἓν γεγονὸς ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 836 (925) π. Χ. καὶ διήρκησεν 76 (78) ἔτη· πότε ἐτελείωσεν; 760 (847).

9) Ἓν γεγονὸς ἤρχισεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους 711 (387) π. Χ. καὶ ἐτελείωσεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 685 (297) π. Χ.· πόσον χρόνον διήρκεσε; 27 (91).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔχει τις 4 876 (3 122) δρ. καὶ ἐξοδεύει 2 998 (1380) δρ.: ἔπειτα εἰσπράττει 896 (475) δρ. καὶ δαπανᾷ 711 (88) δρ.· πόσαι δρ. τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 2063(2129).

2) Ἔχει τις περιουσίαν 52 864 (83 467) δρ. καὶ χαρίζει εἰς ἓν φιλανθρωπικὸν κατάστημα 2 865 (4 569) δρ. εἰς ἄλλο 3 562 (5 882) δρ. καὶ εἰς τρίτον 7 826 (4 835) δρ.· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 38611 (60191)

6) Εἷς σιδηρόδρομος εἰσπράττει κατὰ μῆνα Ἰανουάριον, Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον ἀντιστοίχως 224 516 δρ., 198 213 δρ., 234 787 δρ. Τὰ ἔξοδά του κατὰ τοὺς τρεῖς τούτους μῆνας ἦσαν ἀντιστοίχως 218 415 δρ., 200 816 δρ., 218 793 δρ.· πόσον κέρδος ἔχει κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας; 19 492.

4) Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀναχωροῦν δύο πεζοπόροι, διευθυνόμενοι πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν· πόσον θ' ἀπέχουν μεταξύ των, ἐὰν ὁ μὲν διατρέξῃ 586 (961) μ., ὁ δὲ 489 (1 024) μ.; 97 (63).

5) Ἀπὸ δύο τόπους οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 328 (170) μ, ἀναχωροῦν πρὸς ἀντιθέτους φορὰς δύο ταχυδρόμοι, διὰ νὰ συναντηθοῦν· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ μίαν ἡμέραν, ἐὰν ὁ πρῶτος διανύῃ 28(27) χμ., ὁ δὲ 27(31) χμ. καθ' ἡμέραν; 273 (112).

γ 6) Ἀπὸ δύο τόπους Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 25(45) χμ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν· πόσον θ᾽ἀπέχουν ἐάν, ὁ ἐκ τοῦ Α ἀναχωρήσας διανύσῃ 125 (125) χμ., ὁ δ᾽ ἐκ τοῦ Β 327 (385) χμ.; 237 (115).

7) Ἐκ τριῶν προσώπων Α, Β, Γ, ὁ Α ἔχει 4 826 (176) δρ. Ὁ Β 625 (83) ὀλιγωτέρας τοῦ Α καὶ ὁ Γ 178 (24) δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ Β. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Γ 48 (22) δρ., ὁ Γ ὅμως δίδει εἰς τὸν Β 243 (18) δρ.· πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ καθείς;
4 778· 4 444· 2 828· (154, 111, 73).

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

47. *Πρόβλημα.* *«Ἂν ἡ μία ὀκᾶ ὀσπρίων κοστίζῃ 9 δραχμάς, πόσον κοστίζουν αἱ 5 ὀκάδες τῶν αὐτῶν ὀσπρίων;»*

Ἀφοῦ διὰ καθεμίαν ὀκᾶν πληρώνομεν 9 δρ., διὰ τὰς 5 ὀκ. θὰ πληρώσωμεν 9 δρ.+9 δρ.+9 δρ.+9 δρ.+9 δρ.=45 δραχμάς.

Καθὼς βλέπομεν, εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀριθμοί, οἱ 9 καὶ 5 καὶ σχηματίζομεν ἓν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τόσους προσθετέους ἴσους μὲ τὸν πρῶτον 9, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος 5. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸν τρίτον ἀριθμὸν 45 λέγεται *πολλαπλασιασμός*.

Ἐν γένει, *πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἕνα (ὡς προσθετέον) τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος».*

48. Ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἐπαναλαμβάνεται λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ ἄλλος *πολλαπλασιαστὴς* (καὶ φανερώνει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος), οἱ δύο δὲ μαζὺ *παράγοντες*. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λέγεται *γινόμενον*.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφηρημένος ἀριθμός· ὁ πολλαπλασιαστέος δύναται νὰ εἶνε ἀφηρημένος ἢ συγκεκριμένος, τὸ δὲ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 9 δρ., πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς 2, καὶ τὸ γινόμενον 45 δρ. εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν π.χ. τῶν 9 καὶ 5, γράφομεν οὕτω 9×5 ἢ 9.5 καὶ ἀπαγγέλλομεν ἐννέα *ἐπὶ* 5· δηλαδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε τὸ $\times$ἢ . καὶ ἀπαγγέλλεται *ἐπί*. Οὕτω τὸ 7×4 φανερώνει τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τεσσάρων προσθέτων ἴσων μὲ 7, ἤτοι $7\times4=7+7+7+7=28$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν αἱ κάτωθι προσθέσεις ὡς πολλαπλασιασμοὶ καὶ ν εὑρεθῇ ἕκαστον γινόμενον. α΄) $6+6+6$· β΄) $94+94$· γ΄) 130 δρ. $+$130 δρ. $+$130 δρ. δ΄) 832μ. $+$832μ. ε΄) 9Δ$+$9Δ$+$9Δ.

2) Νὰ γραφοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ ὡς προσθέσεις καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα· α΄) 18×4· β΄) 100×5· γ΄) 1250×2 δ΄) 9 800Μ$\times$4· ε΄) 560Χ$\times$3· στ΄) 89Δ$\times$5· ζ΄) 12Ε$\times$5· η΄) 38×7·

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α΄) 40×6· β΄) 50×9· γ΄) 300×6· δ΄) 8000×9· ε΄) 900×7. (Παρατηρήσατε ὅτι $40\times6=$4Δ$\times6$ $=$24Δ$=240$).

4) Σχηματίσατε τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 1,2,3,4,5· δηλαδὴ τὸ γινόμενον καθενὸς τῶν 1,2,3, μέχρι τοῦ 9 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3, ἐπὶ 4, ἐπὶ 5.

5) Νὰ εὑρεθουν τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐπὶ 6,7,8,9.

6) Εὕρετε τὰ γινόμενα τοῦ 10 ἐπὶ 1,2,3,4..., 10,11,12.

7) Ἂν μία εὐθεῖα κοπῇ εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ καθὲν τούτων κοπῇ πάλιν εἰς 5 ἴσα μέρη, εἰς πόσα ἴσα μέρη διαιρεῖται οὕτω ἡ εὐθεῖα;

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

49. *Ἰδιότης τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν.*

Ἔστω ὅτι θέλομεννὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 6×4.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ μιᾶς στιγμῆς καθεμίαν μονάδα τῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι $6=\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 6×4, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὰς μονάδας τοῦ 6 τέσσαρας φοράς· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

ἄθροισμά των πάντοτε 4.		
	$\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot$	ἄθροισμά των 6
	$\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot$	ἄθροισμά των 6
	$\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot$	ἄθροισμά των 6
	$\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot$	ἄθροισμά των 6
	4 4 4 4 4 4	

Ἐὰν μὲν προσθέσωμεν τὰς μονάδας αὐτὰς κατὰ σειράς, θὰ εὕρωμεν $6+6+6+6=6\times4=24$· ἐὰν δὲ προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ στήλας, θὰ ἔχωμεν $4+4+4+4+4+4=4\times6=24$. Τὰ δύο ἐξαγόμενα εἶνε ἴσα, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων, τὰς ὁποίας προσθέτομεν. Ὥστε εἶνε $6\times4=4\times6$· ἤτοι, *«τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων»*.

50. *Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*. Τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα μεταχειριζόμεθα διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· δηλαδὴ διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔγινε χωρὶς λάθος. Πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, ἐναλλάσσομεν τοὺς παράγοντας καὶ ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἂν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον συνάγομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

51. Συνήθως ἐναλλάσσομεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐὰν τοῦτο εὐκολύνῃ εἰς τὴν ταχυτέραν καὶ μάλιστα εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως. Ἐὰν δ' ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμός, ὑποθέτομεν καὶ αὐτὸν ἀφῃρημένον καὶ κάμνομεν τὴν ἐναλλαγήν, ἐὰν συμφέρῃ, καὶ εἰς τὸ γινόμενον δίδομεν τὴν ἐπωνυμίαν τοῦ συγκεκριμένου πολλαπλασιαστέου. Οὕτω ἂν ἔχωμεν 3 δρ.$\times$20, γράφομεν $20\times3=60$, τὸ ὁποῖον θὰ παραστάνῃ δραχμάς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον καὶ νὰ γίνουν καὶ αἱ δοκιμαί.

α′) 3×50· β′) 4×20· γ′) 6×30· δ′) 5×40· ε′) 3×200· στ′) 4×500· ζ′) $2\times3\,000$ η′) $3\times2\,000$.

2) Ὁμοίως τὰ α′) 7 δρ.$\times$20· β′) 5 όκ.$\times$40· γ′) 2 π.$\times$50. δ′) 4 ἡμ.$\times$20· ε′) 3 μ.$\times$300· στ′) 4δρ.$\times$2000.

52. *«Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα εἶνε ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός»*. Διότι ἂν ἔχωμεν π. χ. τὸ γινόμενον 3×1 καὶ ἐναλλάξωμεν τοὺς παράγοντας (δεχόμενοι ὅτι ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἐναλλαγῆς καὶ ὅταν εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε 1), ἔχομεν $1\times3=1+1+1$, δηλαδὴ ἴσον 3. Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. $8\times1=1\times8=8$, $15\times1=1\times15=15$·

53. *«Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ μηδὲν εἶνε ἴσον μὲ μηδέν»*. Διότι ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸ γινόμενον 4×0, ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς παράγοντας, (δεχόμενοι ὅτι ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἐναλλαγῆς τῶν παραγόντων καὶ ὅταν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε 0), θὰ ἔχωμεν $0\times4=0+$ $+0+0+0$, δηλαδὴ ἴσον μηδέν. Ἐπίσης εἶνε π. χ. $0\times3=0+0+$ $+0=0$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν οἰκονομῇ τις ἓν ἑκατοντάδραχμον τὴν ἡμέραν, πόσα ἑκατοντάδραχμα θὰ οἰκονομήσῃ εἰς 7 ἡμέρας; εἰς 10 ἡμέρας; εἰς 50 ἡμέρας;

2) Εὕρετε τὰ γινόμενα καὶ κάμετε ἀμέσως καὶ τὰς δοκιμάς των. α΄) 15×0· β΄) 23×1· γ΄) 0×12· δ΄) 1×7· ε΄) 100×0. στ΄) $7X\times1$· ζ΄) 300×1· η΄) 1547 δρ.$\times1$· θ΄) 1042×0.

54. *Πρόβλημα. «Ἂν μία ὀκᾶ σάπωνος τιμᾶται 25 δρ., πόσον τιμῶνται 9 ὀκάδες;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 25 δρ.$\times9$.

Ἐπειδὴ τὸ 25 ἔχει 2Δ καὶ 5Μ, ἤτοι=μὲ 2Δ+5Μ, δυνάμεθα ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 25 ἐπὶ 9, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 2Δ ἐπὶ 9 καὶ τὰς 5Μ ἐπὶ 9, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν 2Δ$\times$9=18Δ καὶ 5Μ $\times$9=45Μ. Οὕτω προκύπτει 18Δ+45Μ=180Μ+45Μ=225. Ἤτοι, αἱ 9 ὀκ. σάπωνος τιμῶνται 45 δρ.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα πολλαπλασιασμοῦ.

«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν νὰ ἐξαγόμενα».

55. ***Πρόβλημα. «Μαθητὴς ἀγοράζει 6 τετράδια πρὸς 50 λεπτὰ τὸ ἕν· ἄλλην φορὰν ἀγοράζει 3 τετράδια πρὸς 50 λεπτὰ τὸ ἓν· πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;».***

Θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ μαθητὴς ἐπλήρωσε τόσα, ὅσα θὰ ἐπλήρωνεν, ἐὰν ἠγόραζεν 6 τετρ.+3 τετρ.=9 τετρ. πρὸς 50 λ. καθέν· ἤτοι $50\times9=450$ λ. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 50 λ. 6 ἐπὶ καὶ ἔπειτα τὸ 50 λ. ἐπὶ 3, καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα· ἤτοι 50 λ.$\times(6+3)=$ 50 λ.$\times6+$50 λ.$\times3=$50 λ.$\times9=450$ λ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ

νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ καθένα τῶν προσθετέων καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».

56. *Π ρ ό β λ η μ α.«Ἔμπορος παραγγέλλει καὶ τοῦ στείλλουν 30 ὀκ. ἑνός ἐμπορεύματος πρὸς 8 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἀλλ' ἐκ τούτων ἐπέστρεψε τὰς 10 ὀκ· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ;».*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο—παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ἔμπορος πρέπει νὰ πληρώσῃ μόνον τὰς 30 ὀκ.—10 ὀκ.=20 ὀκ., τὰς ὁποίας ἐκράτησε,πρὸς 8 δρ.καθεμίαν· ἤτοι θὰ πληρώσῃ 8 δρ.$\times$20 =160 δραχμάς. Ἀλλὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 8 δραχμὰς$\times$30, καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο 240 δρ. ἀφαιρέσωμεν τὸ 8 δρ.$\times$10=80 δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν 8 δραχμὰς$\times$30 πλὴν 8 δρχ.$\times$10=8 δραχμὰς$\times$(30—10) = 8 δρχ.$\times$20=160 δραχ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ὅτι, 25—5 ἐπὶ 4 ἰσοῦται μὲ 25$\times$4=100, πλὴν 5$\times$4=20· δηλ. μὲ 80. Ἤτοι.

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς, καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον».

57. *Π ρ ό β λ η μ α. «Ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος κοστίζῃ 96 δρχ., πόσον κοστίζουν οἱ 10 πήχεις;».*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 96 δρ.$\times$10.

Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἡ δραχμὴ ληφθῇ ὡς προσθετέος 10 φοράς, θὰ δώσῃ ἓν δεκάδραχμον· ἄρα αἱ 96 δρ.$\times$10 θὰ δώσουν 96 δεκάδραχμα, τὰ ὁποῖα ἰσοῦνται μὲ 960 δρ. Δηλαδὴ οἱ 10 πήχεις κοστίζουν 960 δρ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 96Μ$\times$100=96Ε=9 600, καὶ 96$\times$1 000=96Χ=96 000 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἤτοι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10,100,1000, . . ., ἀρκεῖ, νὰ γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ ἕν, δύο, τρία,... μηδενικά».

Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.

58. Ἐπιδιώκομεν νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν νοερῶς ἢ ἀπὸ μνήμης ὄχι μόνον ὅταν καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μονοψήφιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ καὶ ὅταν τοὐλάχιστον εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε μονοψήφιος, ὁ δὲ ἄλλος διψήφιος ἢ καὶ πολυψήφιος ἐνίοτε, καθὼς καὶ ὅταν ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε 10 ἢ 100, ἢ 1000, κλπ. Διὰ τὴν ἀπὸ μνήμης ἐκτέλεσιν πολλαπλασιασμοῦ τινος ἐφαρμόζομεν κυρίως τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας. Π.χ. ἂν ἔχωμεν 32×7, λέγομεν 30×7=210, καὶ 2×7=14· 210 καὶ 14=224. Ὁμοίως διὰ τὸ 143×5 λέγομεν· 100×5=500, 40×5=200, 500 καὶ 200, 700· 3×5=15· 700 καὶ 15, 715. Ἂν εἶνε 1 483×10 λέγομεν ἀμέσως 14 830.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατωτέρω γινόμενα ἀπὸ μνήμης κατὰ δύο τρόπους· α΄) 36×3· β΄)84×4· γ΄) 46×6· δ΄) 37×9· ε΄) 25×5· στ΄) 86×7· ζ΄) 96×7· η΄) 92×4.

2) Ὁμοίως τὰ α΄)15×13· β΄)25×18· γ΄)25δρ.×14·δ΄)12Δ×8· ε΄) 28μ.×30· στ΄) 30ὀκ.×10· ζ΄) 30 πήχ.×12· η΄) 15μ.×40.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν α΄)38×5+12×5· β΄)66×5+34×5· γ΄) 65×8+85×8· δ΄) 28×9+32×9+90×9.

4) Ὁμοίως τὰ α΄) 89×4—9×4· β΄) 136×5—96×5.

5) Εὕρετε τὰ γινόμενα τῶν 10, 11,...μέχρι 30 ἐπὶ 1,2,...9,10.

6) Ὁμοίως τῶν 31, 32,...50, ἐπὶ 1, 2,....9, 10.

7) Ὁμοίως τῶν 51, 52,...100, ἐπὶ 1, 2, 3,...9, 10.

8) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α΄) 96×100· β΄) 87×10· γ΄) 657×1 000· δ΄) 592×10 000· ε΄) 427×100 000.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

59. *Πρόβλημα*. *«Εἷς ἐργάτης λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας του 5 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς τέσσαρας ἡμέρας ἂν ἐργάζεται 10 ὥρας καθ' ἑκάστην ;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ διὰ μίαν ὥραν λαμβάνει 5 δραχ., διὰ 10 ὥρας, δηλαδὴ εἰς μίαν ἡμέραν, λαμβάνει 5×10 δραχ. Καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς 4 ἡμέρας, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 5×10 ἐπὶ τὸν 4· ἤτοι πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ 5×10×4. Ἐπειδὴ τὸ 5×10=μὲ 50, καὶ 50×4=200, ἕπεται ὅτι ὁ ἐργάτης θὰ λάβῃ 200 δραχμάς. Τὸ γινόμενον 5×10×4, λέγεται *γινόμενον* τῶν *τριῶν παραγόντων* 5,10,4, καὶ εὑρίσκεται, ἂν εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου παράγοντος 5 ἐπὶ τὸν δεύτερον 10, καὶ τοῦτο ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα 4.

Γενικῶς, *«καλοῦμεν γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἢ παραγόντων τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου»*.

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον $2\times3\times4$ ἰσοῦται μὲ $6\times4=24$· τὸ γινόμενον $4\times2\times3\times5=8\times3\times5=24\times5=120$.

60. Ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσχύει καὶ διὰ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ἤτοι, *«τὸ γινόμενον παραγόντων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱονδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας»*. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $3\times2\times5$, θὰ εἶνε $3\times2\times5=6\times5=30$. Ἀλλ' εἶνε καὶ $3\times5\times2=15\times2=30$. Ἐπίσης ἔχομεν $2\times3\times5=6\times5=30$, καὶ $2\times5\times3=10\times3=30$. Δηλαδὴ καὶ ἂν ἀλλάξωμεν τὰς θέσεις τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, τὸ ἐξαγόμενον δὲν μεταβάλλεται.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον.

α') $8\times4\times5$· β') $6\times8\times5$· γ') $4\times8\times2$· δ') $6\times4\times3\times5$· ε') $8\times5\times3\times9$· ϛ') $2\times2\times2$· ζ') $3\times0\times4$· η') $7\times7\times7$ θ') $0\times3\times4$· ι') $2\times7\times0\times8$· ια') $2\times1\times0\times7$.

2) Εἶχέ τις 4 τόπια ὕφασμα καὶ ἔκοψε τὸ καθὲν εἰς 5 ἴσα μέρη, ἕκαστον δὲ τούτων πάλιν εἰς 6 ἴσα μέρη. Εἰς πόσα ἴσα μέρη ἔκοψε καὶ τὰ 4 τόπια ;

3) α') Πόσον εἶνε τὸ 5×7 τρὶς φοράς ; β') πόσον εἶνε 8 φορὰς τὸ 5×4; τὸ 13; τὸ 17; 6 φορὰς τὸ 50×2; 3 φορὰς τὸ $2\times25\times4$;

4) Ἂν ἓν μανδήλιον κοστίζῃ 7 δρχ., πόσον κοστίζουν 5 δωδεκάδες μανδήλια ; (μία δωδεκὰς ἔχει 12 μανδήλια).

5) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχουν 3 ὧραι ; 4, 5, 6 ὧραι ;

6) Πόσας δραχμὰς λαμβάνει εἰς τεχνίτης εἰς 4 ἑβδομάδας, ἂν λαμβάνῃ 100 δρχ. τὴν ἡμέραν ;

Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ.

61. *Π ρ ό β λ η μ α. «Λαμβάνει τις 9 δρ. διὰ μίαν ὥραν ἐργασίας· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς 9 ὥρας;»*.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα θὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 9 δρ. $\times 9 = 81$ δρ.

Καθὼς παρατηροῦμεν ἀπαντῶμεν γινόμενα μὲ παράγοντας ἴσους καθὼς τὰ 9×9, 3×3, $6\times6\times6$, καὶ οὕτω καθεξῆς. Μεταχειριζόμεθα δι' αὐτὰ γραφὴν συντομωτέραν καὶ τὰ ὀνομάζομεν μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα. Γράφομεν μόνον ἕνα τῶν ἴσων παραγόντων, δεξιὰ δι' αὐτοῦ καὶ ἄνω τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας φορὰς ὑπάρχει ὁ παράγων αὐτὸς εἰς τὸ γινόμενον. Οὕτω τὸ $3\times3\times3$ γράφεται 3^3, τὸ $6\times6\times6\times6\times6=6^5$, τὸ $9\times9=9^2$. Τοιαῦτα γινόμενα λέγονται *δυνάμεις* τῶν ἀριθμῶν. Οὕτω τὸ 3^3 λέγεται *τρίτη δύναμις* τοῦ 3, καὶ ἀπαγγέλλεται *τρία εἰς τὴν τρίτην δύναμιν*, τὸ δὲ 6^5 λέγεται *πέμπτη δύναμις* τοῦ 6, ἢ 6 εἰς τὴν *πέμπτην δύναμιν* κ. ο. κ.

Κατὰ ταῦτα, *«δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων μὲ τὸν ἀριθμόν»*. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου, λέγεται *ἐκθέτης τῆς δυνάμεως*, ὁ δὲ εἷς τῶν ἴσων παραγόντων λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως.

Ἂν οἱ ἴσοι παράγοντες εἶνε δύο, ἡ δύναμις λέγεται *τετράγωνον* ἢ *δευτέρα δύναμις* αὐτοῦ· ἂν εἶνε τρεῖς λέγεται *κύβος* τοῦ ἀριθμοῦ ἢ *τρίτη δύναμις*· ἂν τέσσαρες, πέντε, λέγεται *τετάρτη, πέμπτη... δύναμις* κ.ο.κ. Οὕτω ὁ κύβος τοῦ 4 εἶνε $4^3=4\times4\times4=$ $=64$. Τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶνε $5^2=5\times5=25$.

Εἶνε φανερόν, ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 1 εἶνε ἴση μὲ 1, πᾶσα δὲ δύναμις τοῦ 10 εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα, ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως. Οὕτω ἔχομεν ὅτι $10^2=10\times10=100$· $10^3=10\times10\times10=1\,000$.

62. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τὰς 5^2 καὶ 5^4 θὰ εἶνε $5^2\times5^4=5\times5\times5\times5\times5\times5=$ $=5^6$. Ὁμοίως τὸ $6^3\times6^2=6^5$· τὸ $7^2\times7^2\times7^5=7^9$. Ἤτοι,

«τὸ γινόμενον δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δοθεισῶν δυνάμεων».

Ἐφαρμογὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.

63. Ἐκ τῶν πολλῶν ἐφαρμογῶν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σπουδαιοτέρα εἶνε ἐκείνη, καθ' ἣν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων.

Πρόβλημα 1) «***Ἂν ἡ ὀκᾶ σάπωνος τιμᾶται 25 δραχμάς, πόσον τιμῶνται αἱ 4 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ σάπωνος;***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο (καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ) κάμνομεν πρῶτον τὴν καλουμένην διάταξιν αὐτοῦ, παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x καὶ γράφομεν

1 ὀκ.	τιμᾶται 25 δρ.
4	x

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ ὀκ. τιμᾶται 25 δρ., αἱ 2 ὀκάδες θὰ τιμῶνται 25 δρ. + 25 δρ. = 25 δρ. $\times$ 2· καὶ αἱ 4 ὀκ. θὰ τιμῶνται 25 δρ. + 25 δρ. + 25 δρ. + 25 δρ. = 25 δρ. $\times$ 4 = 100 δρ.

Πρόβλημα 2) «***Δίδει τις μίαν ὀκᾶν καφὲ καὶ λαμβάνει 5 ὀκ. σάπωνος· ἐὰν δώσῃ 8 ὀκ. καφέ, πόσας ὀκάδας σάπωνος θὰ λάβῃ***»;

Καθὼς καὶ ἀνωτέρω, κάμνομεν τὴν διάταξιν ὡς ἑξῆς, γράφοντες

1 ὀκ. καφὲ	5 ὀκ. σάπωνος
8	x

Σκεπτόμενοι δὲ καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, βλέπομεν ὅτι, ἀφοῦ διὰ μίαν ὀκᾶν καφὲ λαμβάνει 5 ὀκ. σάπωνος, διὰ δύο ὀκάδας καφὲ θὰ λάβῃ 5$\times$2 ὀκάδας σάπωνος· καὶ διὰ 8 ὀκ. καφὲ θὰ λάβῃ 5$\times$8=40 ὀκ. σάπωνος.

«***Τἀνωτέρω προβλήματα, εἰς καθὲν τῶν ὁποίων δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτά, λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἀδιαφόρως τοῦ τί παριστάνει), πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται (καὶ εἶνε εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμὸς ἀφῃρημένο). Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ φανερώνει ὅ,τι καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος***».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

Ὁμὰς πρώτη. 1) Μία ὀκᾶ οἴνου τιμᾶται 8(10) δρ.· πόσον τιμῶνται 8(7) ὀκ. τοῦ αὐτοῦ οἴνου;

2) Ἡ μία ὀκᾶ (δραχμὴ) ἔχει 400 (100) δράμια (λεπτά)· πόσα ἔχουν αἱ 3, αἱ 5 αἱ 9 ὀκ. (δραχμαί);

3) Ἓν χρηματικὸν κεφάλαιον δίδει τόκον εἰς ἓν ἔτος 300 (600) δρ.· πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 5 (8) ἔτη; 1 500(4 800).

4) Ἂν ἡ ὀκᾶ τῆς ζαχάρεως τιμᾶται 20 (25) δρ., πόσον τιμῶνται αἱ 2, 3, 5, 8, 10 ὀκ.;

5) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥραν 40 (60) χμ.· πόσα διατρέχει εἰς 3, 4, 5, 6, εἰς 10 ὥρας;

6) Εἷς ἐργάτης κερδίζει καθ' ἡμέραν 20 δρ.· πόσον κερδίζει α') εἰς 8 ἡμέρας; β') εἰς μίαν ἑβδομάδα;

7) Ἀγοράζει τις 80 ὀκ. σίτου πρὸς 8(5) δραχ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ;

8) Ἔμπορος ἀγοράζει 6 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 72 δρ. καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 10 δραχμὰς τὸν πῆχυν· ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον; ζ. 12.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 5(12) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος* πρὸς 32(53) δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 37 (56) δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς κερδίζει ἐν ὅλῳ; 25(36).

2) Ἔμπορος ἠγόρασεν 8 (9) ὀκ πράγματος ἀντὶ 120 (150) δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 20 (25) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον ἐκέρδισε;

3) Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ὁμάδος.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι ἀντιθέτως· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ 3(4) ἡμ., ἐὰν ὁ πρῶτος διατρέχῃ 25 (38) χμ., ὁ δὲ δεύτερος 36 (42) χμ. καθ' ἡμέραν; 183(320).

2) Πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν αὐτῶν ταχυδρόμων, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν; 33 (16).

---

* Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καθὼς καὶ εἰς ἄλλα εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἀναφέρεται ἀκριβῶς τὸ εἶδος τοῦ ἐμπορεύματος, καλὸν εἶνε νὰ ὁρίζῃ αὐτὸ ὁ καθηγητὴς εἰς τρόπον, ὥστε ν' ἁρμόζουν καὶ αἱ ἀναγραφόμεναι τιμαὶ διὰ καθέν, καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν συμφώνως πρὸς τὰ προϊόντα τοῦ τόπου ἐνῷ λειτουργεῖ τὸ σχολεῖον.

3) Ἔχομεν ἕνα ἀριθμὸν μαθητῶν καὶ τοποθετοῦμεν εἰς καθὲν ἐκ 3 (4) θρανίων 7 (8), περισσεύουν δὲ 6 (6) μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχομεν; 27 (38)

4) Ἔχομεν 4 (5) θρανία καὶ δοκιμάζομεν νὰ τοποθετήσωμεν εἰς καθὲν 6 (7) μαθητάς, ἀλλὰ περισσεύουν 2 (3) θέσεις κεναί· πόσους μαθητὰς ἔχομεν; 22 (32)

5) Τρεῖς τόποι Α,Β,Γ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ· ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 4 (6) χμ., ἡ ΒΓ 8 (12) χμ. μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς ΑΒ· πόση εἶνε ἡ ΑΓ; 24 (36)

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

64. *Πρόβλημα. «Εἷς ποιμὴν πωλεῖ 496 δρχ. ἓν πρόβατον. Πόσον ἐπώλησε τὰ πέντε πρόβατα μὲ τὴν αὐτὴν τιμήν;».*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 496×5, καὶ τὸ ἐξαγόμενον θὰ παριστάνῃ δραχμάς. Ἀλλὰ τὸ 496×5 ἰσοῦται, καθὼς γνωρίζομεν, μὲ $496+496+496+496+496$.

Ἂν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων προσθετέων κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τῆς προσθέσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{array}{r} 496 \\ 496 \\ 496 \\ 496 \\ 496 \\ \hline 2480 \end{array}$$

Ἤτοι ἄθροισμα εἶνε 2 480 δρχ., δηλαδὴ ὁ ποιμὴν ἐπώλησε τὰ 5 πρόβατα ἀντὶ 2 480 δρχ.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 496 προστίθεται ἢ ἐπαναλαμβάνεται 5 φορὰς κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρόσθεσιν. Διὰ τοῦτο κάμνομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 496×5 εὐκολώτερον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ ἐπὶ 5, καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Πρὸς συντομίαν γράφομεν κάτωθεν τοῦ 496 τὸν 5, σύρομεν κάτωθεν αὐτῶν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ λέγομεν· 5 ἐπὶ 6, 30· γράφομεν κάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων 0 καὶ κρατοῦμεν 3· 5 ἐπὶ 9, 45 καὶ 3 τὸ κρατούμενον 48· γράφομεν 8 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ κρατοῦμεν 4· 5 ἐπὶ 4, 20 καὶ 4, 24· γράφομεν 24 ἀριστερὰ τοῦ 8. Οὕτω εὑρίσκομεν γινόμενον 2 480.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον ἀριθμόν.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

α')	β')	γ')
62 147	18 037	90 307
6	9	8
372 882	162 333	482 456

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίων ἀριθμῶν.

65. *Π ρ ό β λ η μ α.* «*Ἂν εἷς πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζῃ 387 δρ., πόσον κοστίζουν 562 πήχεις τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ;*»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 387×562 καὶ θὰ παριστάνῃ δραχμάς.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὸ 387 ὡς προσθετέον 562 φοράς, εἶνε τὸ αὐτό, ἐὰν λάβωμεν αὐτὸν πρῶτον 500 φοράς, ἔπειτα 60 φορὰς καὶ τέλος 2 φορας ἀκόμη, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$387 \times 500 = 387 \times 5 \times 100 = 1\,935 \times 100 = 193\,500,$$
$$387 \times 60 = 387 \times 6 \times 10 = 2\,322 \times 10 = 23\,220,$$
$$387 \times 2 = 774,$$

Ἤτοι $387 \times 562 = 193\,500 + 23\,220 + 774$. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα αὐτά, ἐφαρμόζομεν τὸν γενικὸν κανόνα τῆς προσθέσεως, ὅτε ἔχομεν

	774
	23 220
	193 500
ἄθροισμα	217 494

Ἤτοι οἱ 562 πήχεις κοστίζουν 217 494 δρχ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν σύντομον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 774 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τὸ ψηφίον 2 τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ 562· τὸ 2 322 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τὸ ψηφίον 6 τῶν δεκάδων τοῦ 562, καὶ τὸ 1 935 εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 387 ἐπὶ τὸ ψηφίον 5 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 562. Πρὸς τούτοις βλέπομεν, ὅτι τὸ 2 322 γράφεται ὑποκάτω τοῦ 774, ἀφοῦ ἀφεθῇ μία θέσις ἐκ τοῦ τέλους πρὸς τὰ δεξιά, εἰς τὴν ὁποίαν γράφεται 0 (τὸ ὁποῖον δύναται καὶ νὰ παραληφθῇ)· ἐπίσης τὸ 1 935 γράφεται ὑποκάτω τοῦ 2 322, ἀφοῦ ἀφεθῇ μία θέσις πρὸς τὰ δεξιά.

Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸ 387 καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ τὸ 562· σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ κάτωθεν αὐτῆς γράφομεν τὰ γινόμενα 774· 2 322· 1 935, καθὼς εἴπομεν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον καθενὸς τῶν γινομένων τοῦ 387 ἐπὶ τὰ ψηφία τοῦ 562 εὑρίσκεται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μὲ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τούτου.

		387
		562
Ἤτοι τὸ 4 τοῦ 774 εὑρίσκεται ὑποκάτω	(1)	774
τοῦ 2 τοῦ 562· τὸ 2 τοῦ 2 322 εὑρί-	(2)	2322
σκεται ὑποκάτω 6 τοῦ τοῦ 562· τὸ 5 τοῦ	(3)	1935
1 935 εὑρίσκεται ὑποκάτω τοῦ 5 τοῦ		2 17494

562.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον π.χ. 83 054×413 λέγομεν, ἀφοῦ γράψωμεν τὸ 83 054, ὑποκάτω αὐτοῦ τὸ 413 καὶ κάτωθεν τούτου σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν.

3×4=12, γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 1· 3×5=15 καὶ 1=16,

	83 054
	413
(1)	249 162
(2)	830 54
(3)	33221 6
	34301 302

γράφομεν 6 καὶ κρατοῦμεν 1· 3×0=0 καὶ 1=1, γράφομεν τὸ 1· 3×3=9, γράφομεν τὸ 9· 3×8=24, γράφομεν 24. Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν τὸ 83 054 ἐπὶ 1 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ 1 ἀρχίζομεν νὰ γράφωμεν ἐκ τῆς θέσεως ἡ ὁποία εἶνε ὑποκάτω τοῦ 1 τοῦ 413 κ.ο.κ.

Τὰ γινόμενα τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ καθὲν τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λέγονται *μερικὰ γινόμενα*. Οὕτω τὰ (1), (2), (3) εἶνε μερικὰ γινόμενα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ καθὲν τῶν ψηφίων τοῦ πολλλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ τῶν δεξιῶν, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα ὑπὸ τὴν γραμμήν, τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον καθενὸς τούτων νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν. Ἀκολούθως σύρομεν κάτωθεν τοῦ τελευταίου τῶν μερικῶν γινομένων γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν ταῦτα, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμήν».

66. *Συντομίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.* Ἂν εἷς ἢ καὶ δύο παράγοντες ἔχουν εἰς τὸ τέλος των (δεξιὰ) μηδενικά, παραλείπομεν αὐτὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ γράφομεν τὰ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος (δεξιὰ) τοῦ γινομένου. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ γινόμενον 6 370×4 800 πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸ 637 ἐπὶ 48 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 30 576 γράφομεν τὰ τρία μηδενικά, ὅτε ἔχομεν ὡς γινόμενον 30 576 000.

67. Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀριθμῶν λαμβάνομεν ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν ἔχοντα ὀλιγώτερα ψηφία, διὰ νὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 125· 3 642· 83.513 ἐπὶ καθένα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

2) Νὰ πολλαπλασιασθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 831· 605· 2 353· 2 793 ἀντιστοίχως ἐπὶ 75· 19· 187· 322 καὶ νὰ γίνουν καὶ αἱ δοκιμαί.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα· α) 2 174×1 079×2 009· β') 8 172×3 021×715· γ') 3 005×7×2×3×5.

(Ἀπόκρ. α') 4 712 603 714. β') 17 651 642 580. γ') 631 050).

4) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου 8 262×7 132 καὶ τοῦ 3 151×829 ; 61 536 763.

5) Πολλαπλασιάσατε τὸν 48 000×400 καὶ δείξατε ὅτι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 48×4 καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ γινομένου αὐτοῦ νὰ γράψωμεν πέντε μηδενικὰ (ὅσα ἔχουν εἰς τὸ τέλος καὶ οἱ δύο παράγοντες).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μία δωδεκὰς ἔχει δώδεκα τεμάχια· πόσα τεμάχια ἔχουν 24 (36) δωδεκάδες; 288 (432).

2) Μία δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά· πόσα λεπτὰ ἔχουν 68 (125) δραχμαί; 6 800 (12 500).

3) Τὸ ἀγγλικὸν μίλιον ἔχει 1 760 ὑάρδας· πόσας ὑάρδας ἔχουν 196 (285) μίλια; 344 960 (501 600).

4) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει 35 (68) χμ. εἰς μίαν ὥραν· πόσα διατρέχει εἰς 29 (45) ὥρας; 1 015 (3 060).

5) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον 240 (348) δραχμὰς ἐτησίως· πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 12 (16) ἔτη; 2 880 (5 568).

6) Πληρώνει τις ἕνα ἐργάτην 220 (280) δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα· πόσα θὰ τὸν πληρώσῃ εἰς 64(18) ἑβδομάδας; 14080 (5040).

7) Ἐργάτης λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 240 (260) δραχ. τὴν ἑβδομάδα· πόσα θὰ λάβῃ εἰς 35 (43) ἑβδομάδας; 8 400 (11 180).

8) Ἀγοράζει τις 325 (486) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 415 (725) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσα θὰ πληρώσῃ; 134 875 (352 350).

9) Ἔμπορος ἀγοράζει 283(563)ὀκ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 27 451 (53 485) δραχμῶν, πωλεῖ δὲ τὴν ὀκᾶν πρὸς 89 (87) δραχμάς· πόσον ἐζημιώθη; 2 264 (4 504).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀγοράζει τις 18 (63) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος πρὸς 135 (235) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ πωλεῖ πρὸς 178 (265) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, πόσον κερδίζει; 3 354 (1 890) δραχμάς.

2) Ἐὰν ἔμπορος πωλήσῃ 278 (137) μ. ὑφάσματος ἀντὶ 1 673 (1 224) δραχμῶν, κερδίσῃ δὲ 4 (7) δραχμὰς εἰς καθὲν μέτρον, ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασε τὸ ἐμπόρευμα; 561 (265).

3) Ἠγόρασέ τις 385 (426) μ. ὑφάσματος πρὸς 125 (238) δραχ. τὸ μέτρον· πόσον θὰ πωλήσῃ τὸ ὕφασμα διὰ νὰ κερδίσῃ 36 δραχμὰς (75 δραχ.) τὸ μέτρον; 61 985 (133 338) δραχμάς.

4) Ἀπὸ ἕνα τόπον ἀναχωροῦν σιδηροδρομικῶς κατ' ἀντίθετον φορὰν δύο ταχυδρόμοι· πόσον θὰ ἀπέχουν ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον μετὰ 47 (86) ὥρ., ἐὰν ἡ μία ἁμοξοστοιχία διανύῃ 35 (25) χιλ., ἡ δὲ ἄλλη 65 (54) χιλ. τὴν ὥραν; 4 700 (1794).

5) Πόσον θ' ἀπέχουν οἱ δύο ταχυδρόμοι, ἐὰν διευθύνωνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν; 1 410 (2 494).

6) Ἀγοράζει τις 68 (53) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 78 (93)

δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· 712 (623) ὀκ. πρὸς 126 (385) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ 226 (30) ὀκ. πρὸς 125 (318) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσον πληρώνει ἐν ὅλῳ; 123 266 (254 324)

7) Ἓν ποσὸν χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς 125 (136) ἀνθρώπους εἰς τρόπον, ὥστε καθεὶς ἔλαβε 53 (75) δραχμάς, ἐπερίσσευσαν δὲ καὶ 28 (32) δραχμαί· πόσον ἦτο τὸ ποσόν; 6 653 (10 237).

8) Ἓν χρηματικὸν ποσὸν πρέπει νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ 118 (102) πτωχῶν οἰκογενειῶν, διὰ νὰ λάβῃ καθεμία 217 (408) δραχμάς, ἀλλ' ἐλλείπουν 825 (716) δραχμαί· πόσον εἶνε τὸ ποσόν; 24 781 (40 900).

Περὶ διαιρέσεως.

68. *Πρόβλημα.* ***«Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 20 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 5 πτωχούς. Πόσον θὰ εἶνε τὸ μερίδιον ἑκάστου πτωχοῦ;»***

Ἐπειδὴ αἱ 20 δραχ. θὰ γίνουν 4 ἴσα μερίδια, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε ἴσων μεριδίων θὰ εἶνε 20 δραχμαί. Ἑπομένως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ παριστάνῃ ἕκαστον μερίδιον, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον τὸ 20. Ἤτοι θὰ εὕρωμεν πόσον εἶνε ἕκαστον μερίδιον, ἂν εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 δίδει τὸν 20. Δοκιμάζομεν λοιπὸν $5\times1=5$, $5\times2=10$, $5\times3=15$, $5\times4=20$, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου πτωχοῦ εἶνε 4 δραχμαί. Ἡ πρᾶξις αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν τὰς 20 δρ. εἰς 5 ἴσα μέρη λέγεται *διαίρεσις*.

Ἐν γένει, *«διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν μοιράζομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς τόσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος»*.

69. Ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον μοιράζομεν εἰς ἴσα μέρη λέγεται *διαιρετέος*. Ἐκεῖνος δὲ ὁ ὁποῖος φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ διαιρετέος λέγεται *διαιρέτης*, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως *πηλίκον*, παριστάνει δὲ καθὲν τῶν ἴσων μερῶν. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος, εἶνε τὸ 20 δρ., διαιρέτης τὸ 5 καὶ τὸ πηλίκον 4 δρ.

70. Τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν π. χ. τῶν 20 καὶ 5 σημειώνομεν οὕτω 20:5 καὶ ἀπαγγέλλομεν, εἴκοσι *διὰ* πέντε, ἢ εἴκοσι *διαιρούμενον* διὰ πέντε. Ἤτοι τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶνε τό : καὶ ἀπαγγέλλεται *διά*, γράφεται δὲ μεταξὺ αὐτῶν.

71. Ἡ ἀνωτέρω διαίρεσις καὶ αἱ ὅμοιαι μὲ αὐτὰς λέγεται λέγεται καὶ *μερισμὸς* ἢ *διαίρεσις μερισμοῦ*, ἐπειδὴ μερίζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

Ὁ διαιρέτης εἰς τὸν μερισμὸν θεωρεῖται πάντοτε ἀφῃρημένος ἀριθμός, ἐνῶ ὁ διαιρετέος εἶνε συγκεκριμένος ἢ ἀφῃρημένος. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε συγκεκριμένος, τὸ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον, καθὼς π. χ. συμβαίνει εἰς τὸ ἀνωνέρω παράδειγμα.

72. Ἐπειδή, καθὼς εἴδομεν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστάνει τὸ μερίδιον πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

«διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν δίδει τὸν ἄλλον».

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ μοιρασθοῦν 4 δρ., 6, 8, 10, 14, 20, 30 δρ. εἰς 2 ἴσα μέρη.
2) Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις τῶν 6, 9, 12, 12, 18, 21 διὰ τοῦ 3.
Ὁμοίως τῶν 6, 12, 18, 21, 30,... 60 διὰ τοῦ 6.
4) Τῶν 10, 15, 20, 25, 30,... 80 ὀκ. διὰ 5.
5) Τῶν 7, 14, 21, 28,... 70, διὰ 7.
6) Τῶν 8, 16, 32, 40,... 80 διὰ 8.
7) Τῶν 9, 18, 27,... 99 διὰ 9.
8) Τῶν 10, 20, 30,... 100 διὰ τοῦ 10.

73. *Πρόβλημα. «Αἱ 10 δρ. κάμνουν ἓν δεκάδραχμον· πόσα δεκάδραχμα κάμνουν 50 δραχμαί;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀνὰ 10 δρ. ἀπὸ τὰς 50 δραχ., μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὰς 50 δρ., ὅσας δὲ φορὰς ἀφαιρέσωμεν, τόσα δεκάδραχμα θὰ σχηματίσωμεν. Λέγομεν λοιπόν· 50 δρ. πλὴν 10 δρ., 40 δρ. (μίαν)· 40 δρ. πλὴν 10 δρ., 30 δρ. (δύο)· 30 δρ. πλὴν 10 δρ., 20 δρ. (τρεῖς)· 20 δρ. πλὴν 10 δρ., 10 δρ. (τέσσαρες)· 10 δρ. πλὴν 10 δρ., 0 (πέντε). Ὥστε θὰ σχηματίσωμεν 5 δεκάδραχμα.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν προσθετέων, οἱ ὁποῖοι εἶνε ἴσοι μὲ 10 δρ., ὥστε τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶνε 50 δρ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10 δίδει γινόμενον τὸν 50.

Ἑπομένως καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀριθμοί, οἱ 50 καὶ 10, καὶ εὑρίσκομεν τρίτον τὸν 5, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα, τὸν 10 δίδει τὸν ἄλλον 50. Διὰ τοῦτο ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας λύεται τὸ πρόβλημα εἶνε διαίρεσις. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὐτή, καὶ αἱ ὅμοιαι μὲ αὐτήν, λέγεται καὶ *μέτρησις* ἢ *διαίρεσις μετρήσεως*, ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν *μετροῦμεν* πόσας φορὰς αἱ 10 δρ. ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰς 50 δρ., ἢ πόσας φορὰς *χωρεῖ* τὸ 10 δρ. εἰς τὰς 50 δρ.

Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, *«διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον»*,

74. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῆς μετρήσεως ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶνε ἢ ἀφῃρημένοι ἀριθμοὶ ἢ συγκεκριμένοι καὶ οἱ δύο, τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, καλεῖται δὲ καὶ *λόγος* τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν καὶ φανερώνει πῶς ὁ διαιρετέος γίνεται ἀπὸ τὸν διαιρέτην διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτω εἰς το ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶνε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ 50 δρ. καὶ 10 δρ., ὁ δὲ λόγος αὐτῶν εἶνε ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς 5, ὅστις φανερώνει ὅτι τὸ 50 δρχ.=μὲ 10 δρ.×5.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε πόσον χωρεῖ τὸ 2 εἰς τὸ 10, τὸ 20, τὸ 12, τὸ 18.
2) Ὁμοίως τὸ 4 εἰς τὸ 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 40, 44,...60.
3) Ὁμοίως τὸ 5 εἰς τὸ 10, 15, 20, 25, 30, ... , 50, . . . 100.
4) Πόσας ἑβδομάδας κάμνουν 14, 21, 28, 35, 42 ἡμέραι;
5) Πόσας δωδεκάδας μανδήλια κάμνουν 24, 36, 48, 60 μανδήλια;
6) Πόσα τάλληρα κάμνουν 10, 15, 20, 25, 30,. . . 100 δραχμαί;
7) Πόσα εἰκοσιπεντάδραχμα κάμνουν 50, 75, 100, 200 δραχμαί;
8) Συνθέσατε καὶ λύσατε 3 ὅμοια προβλήματα πρὸς τἀνωτέρω.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

75. *Πρόβλημα. «Ἂν μοιράσωμεν 8 βώλους εἰς 3 παιδία, πόσους θὰ δώσωμεν εἰς ἕκαστον καὶ πόσοι θὰ περισσεύσουν;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα θὰ διαιρέσωμεν τὸ 8 β. διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 β., καὶ ὅτι περισσεύουν καὶ 2 βῶλοι. Διότι 2 β.×3=6 β., ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν 8 β, περισσεύουν καὶ 2 β. Ἡ διαίρεσις αὕτη, καθὼς καὶ πᾶσα ἄλλη εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος δὲν μοιράζεται ἀκριβῶς εἰς ὅσα ἴσα μέρη δεικνύει ὁ διαιρέτης, ἀλλὰ περισσεύει καὶ κάτι, λέγεται *ἀτελὴς* διαίρεσις, ἐνῷ ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν μοιράζεται ἀκριβῶς ὁ διαιρετέος καὶ δὲν περισσεύει τίποτε λέγεται *τελεία*.

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις περισσεύει εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν λέγεται *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 2 βῶλοι. Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0, εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ εἶνε ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Διότι ἂν ἦτο ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, τότε αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς θὰ διῃρεῖτο ἀκόμη διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ θὰ εἴχομεν πηλίκον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ εὑρεθέν.

76. Εἰς ἑκάστην τελείαν διαίρεσιν *«ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον»*. Π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν $20:5=4$ ἔχομεν $20=5\times4$. Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν, *«ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τὸ ὑπόλοιπον»*. Οὕτω εἰς τὴν διαίρεσιν $8:3$ εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον εἰς τὸ γινόμενον 2, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 3 ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 καὶ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον 2, ἔχομεν $6+2$ ἴσον 8· δηλαδὴ τὸν διαιρετέον.

77. Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, π. χ. $7:7$, τὸ πηλίκον ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0. Πράγματι, ἂν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 7 βώλους εἰς 7 παιδία, θὰ λάβῃ καθὲν ἕνα βῶλον καὶ δὲν θὰ περισσεύσῃ τίποτε.

Τὸ πηλίκον τοῦ 0 διά τινος ἀριθμοῦ εἶνε 0, καθὼς καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Π. χ. ἂν ἔχωμεν $0:3$, θὰ εἶνε $0:3=0$, διότι τὸ 3×0 ἰσοῦται μὲ 0. Ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0, λέγομεν ὅτι τοιαύτη διαίρεσις δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ γίνῃ, ἤτοι εἶνε *ἀδύνατος*.

78. *Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως*. Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέρος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τὸ ὑπόλοιπον, διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν μιᾶς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, καὶ ἐὰν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $24:7$ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ἔχομεν 7 ἐπὶ 3, 21 καὶ 3, 24· ἤτοι εὑρίσκομεν μὲ τὴν δοκιμὴν τὸν διαιρετέον, καὶ ἡ διαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

(νὰ γίνωνται καὶ αἱ δοκιμαὶ τῶν διαιρέσεων).

Ὁμὰς πρώτη. Πόσα τάλληρα κάμνουν 17 δρ., 24 δρ., 35 δρ., 47 δρ. καὶ πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη ;

2) Πόσα δεκάδραχμα κάμνουν 23 δρ., 35 δρ., 47 δρ., 60 δρ., 92 δρ., 103 δρ. καὶ πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη ;

3) Πόσας ἑβδομάδας κάμνουν 9 ἡμ., 17 ἡμ., 24 ἡμ., 35 ἡμ., 62 ἡμ. καὶ πόσαι ἡμέραι μένουν ἀκόμη ;

4) Πόσα μέτρα κάμνουν 320 δάκτυλοι ; 470 δ. 105 δ., 132δ. καὶ πόσοι δάκτυλοι μένουν ἀκόμη ;

5) Πόσα δεκάλεπτα κάμνουν 17 λ., 25 λ., 36 λ,, 89 λ. καὶ πόσα λεπτὰ μένουν ἀκόμη ;

6) Πόσαι δωδεκάδες μανδήλια κάμνουν 17 μανδ., 26 μανδ., 48 μανδ., 64 μανδ. καὶ πόσα μανδήλια μένουν ἀκόμη ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ γίνουν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των. α΄) τὸ 6, 12, 17, 21, 31, 27 διὰ 2. β΄) Πόσον χωρεῖ τὸ 2 εἰς τὸ 6, 9, 18, 21 καὶ τί μένει ; γ΄) Πόσον χωρεῖ τὸ 3 εἰς τὸ 9, 15, 17, 25, 32, 37, 62 καὶ τί μένει ἀκομη ;

2) Πόσον εἶνε 35 : 1, 12 : 12, 25 : 25, 0 : 2, 0 : 7, 0 : 15 ;

3) Τρέψατε τὸν 8 εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε 2.

4) Ὁμοίως τὸν 12, τὸν 20, τὸν 26, τὸν 34, τὸν 50.

5) Πόσον χωρεῖ τὸ 7 εἰς τὸ 0, 7, 14, 19, 21, 28, 30, 35 καὶ τί μένει ;

6) Πόσον χωρεῖ τὸ 9 εἰς τὸ 0, 9, 11, 18, 20, 27, 36, 40 καὶ τί μένει ;

Ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.

79. *Πρόβλημα. «8 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν 24 δρ., ἔπειτα 16 δρ. καὶ ἔπειτα πάλιν 40 δρ., πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ἐν ὅλῳ»* ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος καθεμίαν φοράν, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερίδιά του. Δηλαδὴ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον τὰς 24 δρ. : 8, ἔπειτα τὰς 16 δρ. : 8, καὶ τέλος τὰς 40 δρ. : 8 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα. Ἔχομεν 24 δρ. : 8=3 δρ. 16 δρ. : 8=2 δρ., καὶ 40 δρ. :8=5 δρ. Προσθέτομεν τὰς 3 δρ., 2 δρ. καὶ 5 δρ. καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶνε 10 δραχ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι οἱ 8 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἐν ὅλῳ 24 δρ.+16 δρ.+ +40 δρ.=80 δρ. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ἐν ὅλῳ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 80 δρ.: διὰ 8, τὸ ὁποῖον εἶνε 10 δρ.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

«Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἂν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι) καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα».

Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὰ πηλίκα κατὰ δύο τρόπους τῶν α') 10+15+35 διὰ 5. β') 30+20+80+20 διὰ 10. γ') 40+160+80 διὰ 20. δ') 505 +100+150 διὰ 50 ε') 21+70+28+35+42 διὰ 7.

80. *Πρόβλημα* *«Ἐμοιράσαμεν 72 μῆλα εἰς 24 παιδία. Πόσα μῆλα ἔλαβεν ἕκαστον;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 72 : 24. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 72 : 24, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 24 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 8×3, καὶ ἑπομένως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὰ 72 μ. εἰς 24 μερίδια, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ 72 μ. εἰς 8 μερίδια καὶ ἔπειτα καθὲν τοιοῦτον μερίδιον πάλιν εἰς 3 μερίδια. Οὕτω εὑρίσκομεν πρῶτον 72 μ. : 8=9 μ. καὶ 9μ. : 3 =3 μ. Ὥστε ἕκαστον τῶν 24 παιδίων θὰ λάβῃ 3 μῆλα.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου (ἂν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι)».

81. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 5×7 δρ. εἰς 7 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5×7:7. Ἀλλὰ τὸ πηλικον αὐτὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἂν εἰς τὸ γινόμενον 5×7 παραλείψωμεν τὸν 7, δηλαδὴ τὸ πηλίκον εἶνε 5. Διότι ἂν τὸ 5 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 7 εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον 5×7. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ 5 δρ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ $6\times9\times5\times8$ διὰ 5 δίδει πηλίκον $6\times9\times8$. Ἡ διαίρεσις τοῦ $6\times7\times5\times8$ διὰ τοῦ 5×8 δίδει πηλίκον 6×7. Διότι ἂν τὸ 6×7 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5×8, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $6\times7\times5\times8$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον παραγόντων δι᾽ ἑνὸς ἢ διὰ τοῦ γινομένου μερικῶν ἐκ τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παράγοντας αὐτοὺς ἀπὸ τὸ γινόμενον».

82. Ἔστω ὅτι ἐμοιράσαμεν 13 δρ. εἰς 4 ἀνθρώπους. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον ἑκάστου, θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 13 δρ. : 4. Τὸ πηλίκον εἶνε 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 1. Ὥστε ἕκαστος ἔλαβε 3 δρ. καὶ ἔμεινε καὶ 1 δραχμή. Ἂν τώρα μοιράσωμεν 13 δίδραχμα, ἤτοι 26 δραχμάς, ἀλλὰ εἰς 8, δηλαδὴ εἰς διπλασίους ἀνθρώπους, ἢ πρίν, καθεὶς θὰ λάβῃ πάλιν 3 δραχμὰς καὶ θὰ μείνῃ 1 δίδραχμον, δηλαδὴ 2 δραχμαί. Ὥστε ἔχομεν ὅτι

13 δρ. :4=3 δρ. καὶ ὑπόλοιπον 1 δρ.

13×2 δρ. : $4\times2=3$ δρ. καὶ ὑπόλοιπον 1×2 δρ.

Ἤτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 2, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι,

«ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ 2, 3, 4, . . . τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται μὲ 2, 3, 4, . . . »,

83. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 120 καρύδια εἰς 20 παιδιά.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα θὰ λάβῃ καθέν, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 120 : 20. Ἀλλ᾽ ἂν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ 10, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν 12 : 2, ἡ ὁποία μᾶς δίδει πηλίκον 6. Ἑπομένως ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ 6 καρύδια.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 800 δρ. : 80 εὑρίσκομεν, ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 80 : 8, ὅτε εὑρίσκομεν 10 δρ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἔχομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερον τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς μηδενικά, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν ἰσάριθμα μηδενικὰ ἐκ τοῦ τέλους (πρὸς τὰ δεξιὰ) καὶ τῶν δύο».

84. Ἂν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 28 δρ. εἰς 10 ἀνθρώπους, παρατηροῦμεν ὅτι καθεὶς θὰ λάβῃ 2 δρ. καὶ θὰ μείνουν καὶ 8 δρ. Διότι, ἂν κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως, ἔχομεν 10×2=20 καὶ 8 ἴσον 28· δηλαδὴ τὸν διαιρετέον.

Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι 256 δρ. : 100 δίδει πηλίκον 2 δρ. καὶ ὑπόλοιπον 56 δρ. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 10, 100, 1 000,..., χωρίζομεν ὡς ὑπόλοιπον τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὸ ἕν, δύο, τρία,... τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὅ,τι μένει εἶνε τὸ πηλίκον».

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα α΄) 140 : 70 β΄) 1 500 : 500 γ΄) 160 : 80· δ΄) 1 200 : 600· ε΄) 18 000 : 9 000· ϛ΄) 6 000 : 300.

2) Εὕρετε πόσα δεκάδραχμα κάμνουν 49 δρ., 87 δρ., 125 δρ., 356 δρ., 1 545 δρ. καὶ πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη.

3) Πόσα ἑκατοντάδραχμα κάμνουν 147 δρ., 292 δρ., 1492 δρ., 956 δρ., 10 657 δρ. καὶ πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη ;

4) Πόσα χιλιόδραχμα κάμνουν 1 862 δρ., 3 957 δρ., 10 852 δρ. καὶ πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀκόμη ;

5) Πόσα μέτρα κάμνουν 192 πόντοι, 647π., 1 492 π. καὶ πόσοι πόντοι μένουν ἀκόμη ;

6) Ἂν μοιρασθοῦν 156 470 δραχμαὶ εἰς 1 000 πρόσωπα, πόσα θὰ λάβῃ καθὲν καὶ πόσαι δραχμαὶ θὰ μείνουν ;

7) Εὕρετε τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων· α΄) 63 : 10· β΄) 147 : 10· γ΄) 497 : 100· δ΄) 1 497 : 100· ε΄) 21 378 : 100 στ΄) 63 720 : 1 000.

85. *Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.* Ἐπιδιώκομεν νὰ κάμωμεν νοερῶς ἢ ἀπὸ μνήμης ὄχι μόνον πᾶσαν διαίρεσιν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος εἶνε μονοψήφιος ἢ διψήφιος καὶ ὁ διαιρέτης μονοψήφιος, ἀλλὰ καὶ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, ἂν τοῦτο εἶνε δυνατόν, καὶ πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν κυρίως τὰς προηγουμένας ἰδιότητας.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις ἀπὸ μνήμης κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον· α΄) 3×6×8: 3×6· β΄) 5×3×2×9 : 5×9.

2) Ὁμοίως αἱ ἑπόμεναι κατὰ δύο τρόπους μετὰ τῶν δοκιμῶν των. α΄) $24 \times 3 \times 2 \times 48 : 2 \times 3$. β΄) $64 : 8 \times 2$· γ΄) $60 : 2 \times 10$.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον καθεμιᾶς τῶν κάτωθι διαιρέσεων· α΄) 390 : 10. β΄) 390 : 100. γ΄) 886 : 100. δ΄) 16 987 : 1 000.

4) Ἐὰν ἓν ποσὸν μοιρασθῇ ἐξ ἴσου μεταξὺ δύο πτωχῶν, λαμβάνει καθεὶς 38 δραχμάς. Ἂν τὸ τριπλάσιον ποσὸν μοιρασθῇ εἰς τριπλασίους πτωχούς, πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς; Διατί;

5) Διὰ νὰ διανύσῃ τις μίαν ἀπόστασιν κάμνει 30 βήματα· πόσα βήματα θὰ κάμῃ, ἐὰν ἡ ἀπόστασις καὶ τὸ βῆμά του διπλασιασθοῦν; Διατί;

Ἐφαρμογαὶ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.

86. Ἐφαρμογαὶ τῆς διαιρέσεως εἰς τὸν πρακτικὸν βίον εἶνε κυρίως ὡς αἱ ἑπόμεναι.

Πρόβλημα. ***1) «Ἐὰν αἱ 5 ὀκάδες ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δραχμάς, πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ αὐτοῦ;»***

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος κάμνομεν τὴν διάταξιν αὐτοῦ, παριστάνοντες διὰ τοῦ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, καὶ γράφομεν

5	ὀκ.	τιμῶνται	20 δρ.
1	ὀκ.	τιμᾶται	x

Λέγομεν τώρα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος εἶνε ὑπεράνω τῆς μονάδος (ἢ ἀπέναντι τοῦ x καὶ πλαγίως). Ἀφοῦ αἱ 5 ὀκ. τιμῶνται 20 δραχμάς, ἡ μία ὀκᾶ θὰ τιμᾶται 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι θὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 20 δραχμάς : 5, ὅτε εὑρίσκομεν 4 δραχμάς. Ὥστε ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 4 δραχμάς.

Πρόβλημα. ***2) «Δίδει τις 8 ὀκ. καφὲ καὶ λαμβάνει ἀντ' αὐτῶν 24 ὀκ. σάπωνος· διὰ μίαν ὀκᾶν καφὲ πόσας ὀκάδας σάπωνος θὰ λάβῃ;»***

Κάμνομεν πάλιν πρῶτον τὴν διάταξιν αὐτοῦ γράφοντες

8 ὀκ. καφὲ	ἀνταλλάσσονται μὲ	24 ὀκ. σάπωνος
1 » »	»	x

Διὰ τὴν λύσιν σκεπτόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, ἤτοι λέγομεν· ἀφοῦ αἱ 8 ὀκ. καφὲ ἀνταλλάσσονται μὲ 24 ὀκ. σάπωνος, ἡ μία ὀκᾶ καφὲ θ' ἀνταλλάσσεται μὲ 8 φορὰς ὀλιγωτέρας ὀκάδας σάπωνος, ἤτοι μὲ 24 ὀκ. : 8. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν 3 ὀκ. σάπωνος. Ὥστε ἡ μία ὀκᾶ καφὲ ἀνταλλάσσεται μὲ 3 ὀκ. σάπωνος.

Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς τῶν μονάδων τούτων. Οὕτω εἰς τὸ πρόβλημα 1) δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 5 ὀκ., δηλαδὴ αἱ 20 δραχμαὶ καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκ. Εἰς τὸ πρόβλημα 2) δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 8 ὀκ. καφέ, δηλαδὴ αἱ 24 ὀκ. σάπωνος, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκ. καφέ.

«Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὰς πολλὰς μονάδας. Ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε μερισμοῦ καὶ τὸ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον, ἐνῷ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης)

1) 12 (15) τεμάχια ὑφάσματος στοιχίζουν 60 (45) δραχμάς. πόσον στοιχίζει τὸ ἓν τεμάχιον ; 5 (3).

2) Μικρὸς ἐργάτης λαμβάνει εἰς 6 (7) ἡμ. 72 (63) δραχμάς· πόσας λαμβάνει εἰς 1 ἡμ. κατὰ μέσον ὅρον ; 12 (9).

3) Αἱ 8 (9) ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 88 (81) δραχμάς· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ ; 11 (9).

4) Αἱ 2, 3, 4 ὧραι ἔχουν 120λ, 180λ, 230λ · πόσα λεπτὰ ἔχει ἡ ὥρα ; (60).

5) Ἐὰν τὰ 45 (72) δράμια ἐμπορεύματος τιμῶνται 9 (12) δραχμάς· πόσον ἀγοράζομεν ἐξ αὐτοῦ μὲ 1 δραχμήν; 5 (6).

6) Οἰκονομεῖ τις 90 (80) δραχμὰς εἰς 27 (32) ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας οἰκονομεῖ ἓν δεκάδραχμον ; 3 (4).

7) Ποσὸν 360 (260) δραχμῶν πρέπει νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου μεταξὺ 60 (130) προσώπων· πόσον θὰ λάβῃ καθέν ;

8) Συνθέσατε τρία προβλήματα μερισμοῦ καὶ λύσατε αὐτά.

87. ***Μέση τιμή.*** *Πρόβλημα.* ***«Ἐργάζεταί τις τρεῖς ὥρας, καὶ λαμβάνει τὴν πρώτην ὥραν 7 δραχμὰς ὡς ἀμοιβήν, τὴν δευτέραν ὥραν 5 δραχμὰς καὶ τὴν τρίτην 6 δραχμάς· πόσας δραχμὰς λαμβάνει κατὰ μέσον ὅρον καθ' ὥραν;»***

Δηλαδὴ πόσας δραχμὰς θὰ ἐλάμβανε καθ' ὥραν, ἐὰν ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς καθεμίαν ὥραν;

Ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὰς τρεῖς ἡμέρας λαμβάνει 7 δρ. + 5 δρ. + 6 δρ. = 18 δρ., ἕπεται ὅτι καθεμίαν ὥραν θὰ ἐλάμβανε 18 δρ. : 3 = = 6 δραχμάς.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ ἡ ζητουμένη τιμὴ λέγεται *μέση τιμή*, τὰ δὲ προβλήματα λέγονται *μέσης τιμῆς* καὶ λύονται διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ.

88. *Προβλήματα μίξεως.* Συγγενῆ μὲ τὰ προβλήματα τῆς μέσης τιμῆς εἶνε καὶ τὰ προβλήματα μίξεως, π. χ. τὸ ἑξῆς.

«Ἀναμιγνύει τις 6 ὀκ. ἐμπορεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 5 δραχμάς, μὲ 3 ὀκ. ἄλλης ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δραχ.· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;»

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα ἔχει βάρος $6+3=9$ ὀκ. καὶ θ' ἀξίζῃ $5\times 6+8\times 3=30+24$ δρ. $=54$ δρ., ἕπεται ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θ' ἀξίζῃ $54 : 9=6$ δραχμάς. Καθὼς βλέπομεν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ποσότητες δύο ἢ περισσοτέρων ἀναμιγνυομένων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν καθεμιᾶς τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ μῖγμα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

1) Λαμβάνει τις εἰς μίαν ὥραν 6 (8) δραχμάς· εἰς ἄλλην ὥραν 9 (12) δραχμάς, εἰς ἄλλην 10 (8) δραχμὰς καὶ εἰς ἄλλην 15 (22) δραχμάς· πόσας δραχμὰς λαμβάνει κατὰ μέσον ὅρον εἰς καθεμίαν τῶν τεσσάρων ὡρῶν; 10 (12).

2) Ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς ἐμπορεύματος 2 (2) ὀκ. ἀντὶ 12 (7) δρ.· ἔπειτα 3 (3) ὀκ. ἀντὶ 16 (9) δραχμῶν καὶ τέλος 4 (5) ὀκ. ἀντὶ 26 (14) δρ.· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; 6 (3).

3) Ἔμπορος ἀναμιγνύει 2 (4) ὀκ. τεΐου τῶν 70 (90) δραχμῶν κατ' ὀκᾶν, μὲ 5 (5) ὀκ. τῶν 140 (180) δραχμῶν κατ' ὀκᾶν· πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; 120 (140).

89. *Πρόβλημα.* ***1) «Ἂν μία ὀκᾶ σταφύλια τιμᾶται 8 δραχμάς· πόσαι ὀκάδες τιμῶνται 32 δρ.;»***

Κάμνομεν τὴν διάταξιν τοῦ προβλήματος παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, καὶ γράφομεν

1 όκ.	τιμᾶται	8 δρ.
x		32

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα σκεπτόμεθα ὅτι, καθεμίαν φορὰν ὅταν δίδωμεν 8 δρ., λαμβάνομεν μίαν όκ. σταφύλια. Ἑπομένως θ' ἀγοράσωμεν τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν 8 δραχμὰς ἀπὸ τὰς 32 δρ., ἢ ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 8 δρ. εἰς τὰς 32 δρ. ἤτοι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν μετρήσεως, 32 δρ. : 8 δρ. = 4.

Ὥστε αἱ 4 όκ. σταφύλια τιμῶνται 32 δρχ.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπέναντι καὶ πλαγίως τοῦ x. Ἀφοῦ 8 δραχμὰς τιμᾶται ἡ 1 όκ., 32 δραχμὰς θὰ τιμῶνται τόσαι ὀκάδες, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 8 δρ. εἰς τὸ 32 δραχμαί· ἤτοι 32 δρχ. : 8 =4 ὀκάδες.

Πρόβλημα 2). ***Εἰς πόσους μῆνας θὰ πληρώσωμεν δι' ἐνοίκιον μιᾶς οἰκίας 2 400 δραχμάς, ἐὰν διὰ καθένα μῆνα πληρώνωμεν 800 δραχμάς;»***

Κάμνομεν πάλιν τὴν διάταξιν, γράφοντες

δι' ἕνα 1 μῆνα	800 δραχ.
x	2 400

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπέναντι τοῦ x. Ἀφοῦ τὰς 800 δραχμὰς πληρώνομεν δι' ἕνα μῆνα, διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ πόσους μῆνας θὰ πληρώσωμεν 2 400 δραχ., πρέπει νὰ μετρήσωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ 800 δρ. εἰς τὰς 2 400 δραχ. Ἤτοι πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν μετρήσεως 2 400 δρ. : 800 δρ., ἢ τὴν 24 : 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3. Ὥστε εἰς 3 μῆνας θὰ πληρώσωμεν 2 400 δραχμάς.

Εἰς καθὲν τῶν δύο τούτων προβλημάτων καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ ἄλλων ὁμοειδῶν μονάδων, ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων. Οὕτω ἔχομεν εἰς τὸ πρόβλημα 1) ὅτι δίδεται ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς, δηλαδὴ αἱ 8 δραχ., ἡ τιμὴ ἄλλων ὀκάδων, δηλαδὴ αἱ 32 δραχ., ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὀκάδων τούτων.

Ὁμοίως εἰς τὸ πρόβλημα 2) δίδεται ἡ τιμὴ τοῦ 1 μηνός, δηλαδὴ αἱ 800 δραχ. καὶ ζητεῖται πόσαι μονάδες ἔχουν τὴν τιμὴν 2 400 δραχμῶν.

«Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων, μετροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος εἰς τὴν τῶν πολλῶν ἀλλ' ἀγνώστων τὸ πλῆθος μονάδων. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶνε μετρήσεως, ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ἀριθμὸς ἀφῃρημένος καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ θὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει ὅ,τι καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ δίδεται».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

1) Πόσα δοχεῖα τῶν 9 ὀκάδων θὰ πληρωθοῦν μὲ 72, 99 ὀκάδες ἐλαίου;

2) Πόσοι σάκκοι τῶν 40 ὀκάδων θὰ πληρωθοῦν μὲ 1 600 ὀκ.;

2) Θέλει τις νὰ σχηματίσῃ σειρὰς ἀπὸ 12 (18) σφαίρας καθεμίαν· πόσας σειρὰς θὰ σχηματίσῃ μὲ 144 (108) σφαίρας; 12 (6).

4) Συνθέσατε τρία προβλήματα μετρήσεως καὶ λύσατε αὐτά.

Προβλήματα ἀναλυόμενα εἰς δύο ἁπλούστερα.

(ἢ λυόμενα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα).

90. *Πρόβλημα. «Ἂν 5 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 60 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 9 πήχεις τοῦ ὑφάσματος;»*

Λύσις. Κάμνομεν ἐν πρώτοις τὴν διάταξιν ὡς ἑξῆς

5	πήχ.	ἀξ.	60 δρ.
9	»	»	x

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς πήχεως, διαιροῦντες τὰς 60 δρ. διὰ 5, καὶ ἔπειτα θὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 9 πήχεων, πολλαπλασιάζοντες τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς πήχεως ἐπὶ 9.

Ἐκτέλεσις τῶν πράξεων:

ἀξία 5 πήχ.		60 δρ.
» 1	»	60 δρ. : 5=12 δρ.
» 9	»	12 δρ.×9=108 δρ.

Ἀπάντησις. Ὅταν οἱ 5 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 60 δρ., οἱ 9 πήχ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἀξίζουν 108 δρ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λέγομεν ὅτι ἐλύθη *«δι᾽ ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα»*, ἐπειδὴ διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς τιμῆς πολλῶν μονάδων τὴν τιμὴν ἄλλων πολλῶν μονάδων (τῶν 9 πήχ.), εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος (τοῦ ἑνὸς πήχεως).

91. *Παρατήρησις.* Κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τινῶν δὲν εἶνε ἀπαραίτητον νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος. Π. χ.

1) «Ἂν 6 πήχεις ἀξίζουν 48 δρ., πόσον ἀξίζουν οἱ 18 πήχ.;«

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ 18 εἶνε τριπλάσιον τοῦ 6, οἱ 18 πήχ. θὰ ἀξίζουν τριπλάσιον τῶν 48 δρ., δηλαδὴ 48 δρ.$\times$3=144 δρ.

2) Ἂν ἓν ζεῦγος αὐγῶν πωλῆται 3 δρ.· πόσον θὰ πωληθοῦν 600 αὐγά;»

Ἀφοῦ 2 αὐγὰ πωλοῦνται 3 δρ., τὰ 200=100 ζεύγη αὐγὰ θὰ πωληθοῦν 300 δρ., καὶ 600 αὐγὰ θὰ πωληθοῦν 300$\times$3=900 δρ.

3) «Ἂν διὰ τὸ φαγητὸν 400 στρατιωτῶν χρειάζωνται 35 ὀκάδες φασόλια, πόσαι ὀκάδες χρειάζονται διὰ τὸ φαγητὸν 80 στρατιωτῶν;»

Ἐπειδὴ τὸ 400 ἰσοῦται μὲ 80$\times$5, ἕπεται ὅτι τὸ 80 εἶνε 5 φορὰς μικρότερον τοῦ 400. Ἑπομένως διὰ τὸ φαγητὸν τῶν 80 στρατιωτῶν θὰ χρειασθοῦν 5 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 35 ὀκ., δηλαδὴ 35 : 5=7 ὀκ.

4) «Ἂν 100 πήχ. πανίου τιμῶνται 250 δρ., πόσον τιμῶνται 70 πήχεις;»

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ 10 πήχ. τιμῶνται 250 δρ. : 10=25 δρ. Ἑπομένως οἱ 70 πήχ. θὰ τιμῶνται 25 δρ.$\times$7=175 δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

1) Πόσον ἀξίζουν 6, 12, 20, 36, 40, 50, 60, 80 αὐγά, ὅταν τὸ ἓν ζεῦγος ἀξίζῃ 280 λ.;

2) Πόσον θὰ ἐπληρώναμεν τὸν Μάρτιον τοῦ 1917 διὰ 10, 20, 30, 40, 80, 70 ὀκάδες ξυλανθράκων, ἂν διὰ 2 ὀκάδας ἐπληρώναμεν 90 λ.;

3) Ἂν πεζὸς διανύῃ εἰς 7 ὥρας 35 χιλιόμετρα, ποῖον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 21, 6, 8, 20, 28 ὥρας ;

4) Ἐὰν μία ἁμαξοστοιχία διανύῃ εἰς 2 ὥρας 75 χμ., ποῖον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 12, 6, 16, 8, 4, 10 ὥρας ;

5) Ἂν μία οἰκογένεια ἐξοδεύῃ εἰς 10 ἡμέρας 1200 δρ., πόσα ἐξοδεύει εἰς 2, 4, 5, 20 ἡμέρας;

6) Ἂν 2 ὀκ. τοῦ καφὲ τιμῶνται 160 δρ., πόσον τιμῶνται 5, 6, 8, 10 ὀκάδες;

7) Νὰ συντεθοῦν τρία προβλήματα ἀναλυόμενα εἰς δύο ἁπλούστερα ὡς τὰ ἀνωτέρω καὶ νὰ λυθοῦν. (Ἡ διαίρεσις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος πρέπει νὰ εἶνε τελεία).

Γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

92. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 6 825 δρ. εἰς 32 πρόσωπα. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 6 825 δρ. ἔχει 6 χιλιόδραχμα, 8 ἑκατοντάδραχμα, 2 δεκάδραχμα καὶ 5 δραχμάς, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς μονάδας ταύτας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 32 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ ἓξ ὁλόκληρα χιλιόδραχμα δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ 32, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἑκατοντάδραχμα, ἤτοι εἰς 60 ἑκατοντάδραχμα, ὅτε ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 60 καὶ 8=68 ἑκατοντάδραχμα διὰ τοῦ 32.
Τὸ 68Ε:32 εἶνε κατὰ προσέγγισιν 60Ε : 30=6Ε : 3=2Ε.

Κάμνομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς· ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὰς 2Ε τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην 32 καὶ εὑρίσκομεν 2×32=64Ε. Καθὼς βλέπομεν τὸ 64Ε εἶνε κατὰ 4Ε μικρότερον τοῦ 68Ε τοῦ διαιρετέου, ἤτοι μένουν ὡς ὑπόλοιπον 4Ε.

Διὰ νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 4Ε, τὰς 2Δ καὶ 5Μ διὰ τοῦ 32. Ἀλλὰ 4Ε=40Δ. Ἑπομένως εἶνε τὸ αὐτό, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς 40Δ+2Δ+5Μ διὰ τοῦ 32, ἢ τὰς 42Δ+5Μ διὰ τοῦ 32. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πρῶτον τὰς 42Δ:32 καὶ εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν 40Δ:30=4Δ:3=1Δ. Κάμνομεν πάλιν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, καθὼς ἀνωτέρω, καὶ ἔχομεν 1Δ×32=32Δ. Ἑπομένως μέχρι τῶν 42Δ μένουν 10Δ. Μένει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὰς 10Δ καὶ 5Μ διὰ τοῦ 32. Ἀλλὰ 10Δ==100Μ. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς 100Μ+5Μ=105Μ:32. Ἔχομεν πάλιν κατὰ προσέγγισιν 100Μ:30=10Μ:3=3Μ. Ἡ δοκιμὴ δίδει 3Μ×32=96Μ· ἄρα μένει ὑπόλοιπον 105Μ—96=9Μ. Ἤτοι εὑρήκαμεν πηλίκον 2Ε, 1Δ, 3Μ, δηλ. 213 καὶ ὑπόλοιπον 9.

Πρὸς εὐκολίαν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, καὶ σύρομεν μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν γραμμὴν κατακόρυφον, κάτωθεν δὲ τοῦ διαιρέτου ὁριζοντίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ γράφωμεν τὰ ψηφίου τοῦ πηλίκου, ἐνῷ κάτωθεν τοῦ διαιρετέου τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων καὶ λέγομεν·

$$\begin{array}{r|l} 68'2'5' & 32 \\ \cline{2-2} 42\ \ & 213 \\ 105 & \\ 09 & \end{array}$$

Ὁ διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία· χωρίζομεν καὶ ἀπὸ τὸν διαιρετέον δύο ψηφία ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά· τὸ 68· Τὸ 32 εἰς τὸ 68 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 6· τὸ 3 εἰς τὸ 6, 2· γράφομεν 2 εἰς τὸ πηλίκον. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 68· 2×2=4 ἀπὸ 8 τοῦ διαιρετέου=4. Γράφομεν 4 ὑποκάτω τοῦ 8· 2×3=6 ἀπὸ 6=0. Καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου 2 καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 4. Οὕτω ἔχομεν τὸ 42. Τὸ 32 εἰς τὸ 42 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 4· τὸ 3 εἰς τὸ 4=1. Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 2 τὸ 1 καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 32, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 42, ὅτε εὑρίσκομεν 10. Καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ 10, ὅτε λαμβάνομεν 105. Τὸ 32 εἰς τὸ 105 χωρεῖ *περίπου* ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 10· τὸ 3 εἰς τὸ 10=3. Γράφομεν 3 εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 1. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 3 ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ 105, ὅτε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 9. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 213 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 9.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 32 ἐπὶ τὸ πηλίκον 213, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον 9 καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον 6 825, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἄρα ἡ διαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος.

93. Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, προσέχοντες νὰ χωρίζωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τόσα ψηφία, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Ἐὰν ἀφοῦ χωρίσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, τύχῃ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν, νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ διαιρέτου, χωρίζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου ψηφίου τινὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον διαιρετέον δὲν γίνεται, γράφομεν ἀντὶ τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τοῦ πηλίκου τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, μέχρις ὅτου τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον διαιρετέον.

94. Ἐὰν διαιρετέος τις ἐκ τῶν προκυπτόντων ἐὰν καταβιβάσωμεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ δοθέντος διαιρετέου, δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν ἀμέσως τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν.

Οὕτω εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 14 023 : 23 ἔχομεν.

1 4' 0' 2' 3	*2 3*
2 2 3	*609*
1 6	

Ἤτοι τὸ πηλίκον εἶνε 609 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 16.

Παραδείγματα διαιρέσεων.

α')	*6 3' 4' 7'*	*9*	β')	*2 7 16' 7' 9' 3'*	*543*	γ')	*5 8 9 2' 3' 4'*	*8 153*
	47	*705*		*1 7 9 3*	*5003*		*18 5 2 4*	*72*
	2			*1 6 4*			*2 2 1 8*	

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ διαιρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 146· 538· 2 307· 5 906· 7 662· 9 781 διὰ καθενὸς μονοψηφίων 2· 3...........9.

2) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α') 8 965 : 42. β') 8 930 : 75, γ') 30 078 : 13· δ') 764 832: : 835.

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ λάβωμεν 121 (315) φορὰς ὡς προσθετέον, διὰ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα 34 563 (65 205); 202 (207).

4) Ἐκτελέσατε τὴν διαίρεσιν $5^4=5\times5\times5\times5$ διὰ τοῦ $5^3=$ $=5\times5\times5$. Ὁμοίως $6^3 : 6^2$ καὶ $10^4 : 10^2$· τί παρατηρεῖτε ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων ; μὲ τί ἰσοῦται τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Αἱ 375 (3489) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύσατος στοιχίζουν 29 988 (226 785) δραχμάς, πόσον στοιχίζει ἡ ὀκά ; 79 καὶ ὑπ. 363 (65).

2) Σιδηρόδρομος εἰσπράττει εἰς ἓν ἔτος 81 711 820 (2 764 430) δραχμάς· πόσα εἰσπράττει καθ' ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον, ἐὰν τὸ ἔτος ἔχῃ 365 ἡμέρας; 223 868 (7 582).

3) Ποσὸν ἐκ 415 460 (46 336) δραχμῶν πρόκειται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ 315 (128) ἀνθρώπων· πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ; 684 (362).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἐπλήρωσε δι' ἀξίαν 318 (327) ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος 20 988 (22890) δραχμάς, ἐπώλησε δὲ ἀνὰ 728 (459) ὀκ. ἀντὶ 52 416 (302 924) δρχ.· πόσον ἐκέρδισεν εἰς τὴν 1 ὀκᾶν; 6 (ζ. 4) δρχ.

2) Πληρώνει τις διὰ 37 (49) ὀκ. ἐμπορεύματος 10 471 (6 223) δρ., κερδίζει (ζημιοῦται) δὲ κατὰ τὴν πώλησιν 374 (224) δρ. νὰ 17 (16) ὀκ.· πόσον ἐπώλησε καθεμίαν ὀκᾶν; 305 (114) δρ.

3) Ἀγοράζει τις 28 (16) ὀκ. πράγματος ἀντὶ 504 (96) δραχ. ἔπειτα 36 (18) ὀκ. ἀντὶ 432 (144) δραχμῶν, καὶ τέλος 8 (14) ὀκ. ἀντὶ 216 (336) δραχμῶν· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον; 16 (12).

4) Ἀτμάμαξα τρέχει ἐπὶ 35λ· (56λ) ἀπὸ 784 (612) μ. εἰς 1λ· ἔπειτα ἐπὶ 48λ (58λ) διανύουσα 898 (765) μ. εἰς 1λ· πόσα μέτρα διατρέχει κατὰ μέσον ὅρον ; 801 (631).

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Ποσὸν 4 500 (60 225) δραχμῶν πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἀνθρώπων, ὥστε ὁ καθεὶς νὰ λάβῃ 125 (825) δραχμάς· πόσοι εἶνε οἱ ἄνθρωποι; 36 (73).

2) Πόσας φορὰς δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν μῆκος 128 (253) δακτ. ἐπὶ ἄλλου μήκους 4 736 (20 999) δακτ.; 37 (83).

3) Πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ περιεχόμενον δοχείου 26 (16) ὀκ. εἰς 884 (944) ὀκ.; 34 (59).

4) Μία δωδεκὰς καλτσῶν ἐτιμᾶτο 432 πεντηκοντάλεπτα· πόσον ἐτιμᾶτο ἡ μία ἐξ αὐτῶν; 18 δραχμάς.

5) Θέλει τις νὰ τοποθετήσῃ 1 645 (4 165) σφαίρας εἰς 35 (34) ἴσας σειράς· πόσας σφαίρας πρέπει νὰ θέτῃ εἰς καθεμίαν ; 47 (119).

6) Ἔμπορος ἀναμιγνύει 12 (32) ὀκ. οἴνου τῶν 10 (6) δρ. τὴν ὀκᾶν, 16 (36) ὀκ. τῶν 9 δραχμῶν (720 λ.) καὶ 24 (24) ὀκ. τῶν 8 δραχμῶν (520 λ.), πρὸς δὲ 8 ὀκ. ὕδατος· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος ; 760 (576) λ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Περὶ διαιρετότητος καὶ περὶ πρώτων ἀριθμῶν

Γνωρίσματα τῆς διαιρετότητος.

95. Ἡ πρώτη Ἰανουαρίου τοῦ 1909 ἔπεσεν ἡμέραν Παρασκευήν. Θέλομεν νὰ μάθωμεν, ἂν ἡ πρώτη τοῦ 1910 ἔπεσε Παρασκευήν.

Ἂν συνέβη τοῦτο, πρέπει, ἐὰν τὰς 365 ἡμέρας τοῦ ἔτους 1910 διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7, νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 0. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις 365 : 7 δίδει ὑπόλοιπον 1. Ὥστε ἡ 1η Ἰανουαρίου τοῦ 1910 ἔπεσε τὴν ἑπομένην ἡμέραν τῆς Παρασκευῆς, δηλαδὴ Σάββατον.

Ὡς βλέπομεν, ἐνίοτε ἐνδιαφερόμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ ὄχι τὸ πηλίκον αὐτῆς, καὶ μάλιστα ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0. Εἴς τινας διαιρέσεις δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ ὑπόλοιπον.

Ἐὰν μία διαίρεσις εἶνε τελεία, π. χ. ἡ 18 : 3, λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος εἶνε *πολλαπλάσιον* τοῦ διαιρέτου, ἢ ὅτι εἶνε *διαιρετὸς* διὰ τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ διαιρέτης λέγεται ἁπλῶς *διαιρέτης* τοῦ διαιρετέου ἢ *παράγων* ἢ *ὑποπολλαπλάσιον* αὐτοῦ.

Προφανῶς *«πᾶς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τῆς 1 καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του»*.

96. *Πρόβλημα.* *«Ἓν παιδίον λαμβάνει 6 543 δραχμὰς μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τὰς μοιράσῃ εἰς πτωχούς, δίδον εἰς καθένα 2 δραχμ., ὅ,τι δε μείνει νὰ κρατήσῃ αὐτό. Πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν;»*

Ἀντὶ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 6 543 : 2 μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, σκεπτόμεθα ὅτι, τὸ παιδίον ἔλαβεν 654 δεκάδραχμα καὶ 3 δραχμάς, διὰ νὰ τὰς μοιράσῃ καθὼς εἴπομεν. Ἀλλ' ἂν μοιράσῃ ἓν δεκάδραχμον καὶ δώσῃ 2 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, θὰ τὸ μοιράσῃ εἰς 5 πτωχοὺς καὶ δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε. Ἄρα ἂν μοιράσῃ ὁμοίως καὶ τὰ 654 δεκάδραχμα, δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε· τέλος ἀπὸ τὰς 3 δραχμὰς τοῦ μένει 1 δραχμή, ἀφοῦ δώσει 2 δραχμὰς εἰς ἕνα πτωχόν. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπόν, ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 2, ἀρκεῖ νὰ διαιρέρέσωμεν μόνον τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2 καὶ ὅ,τι ὑπόλοιπον εὕρωμεν αὐτὸ θὰ εἶνε καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν τὸ παιδίον δώσῃ 5 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν. Ὥστε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

«ἀριθμὸς εἶνε διὰ 2, ἢ 5, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5».

97. Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω κανόνα πάντες οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0· 2· 4· 6· 8 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 καὶ λέγονται *ἄρτιοι* ἢ *ζυγοὶ ἀριθμοί*. Τοὐναντίον οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 1· 3· 5· 7· 9 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2 ἀφήνουν ὑπόλοιπον 1 καὶ λέγονται *περιττοὶ* ἢ *μονοὶ* ἀριθμοί.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε 0 ἢ 5 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5.

98. Ἂν τὸ παιδίον δίδῃ 10 δρ. εἰς ἕκαστον πτωχόν, παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι ἀπὸ τὰ 654 δεκάδραχμα δὲν θὰ μείνῃ τίποτε, διότι θὰ δοθοῦν ἀνὰ ἓν εἰς 654 πτωχούς, καὶ τέλος θὰ τοῦ μείνουν μόνον αἱ τρεῖς δραχμαί. Ἂν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας θὰ μοιράσῃ λήγῃ εἰς 0, δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε. Ἑπομένως *«ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 10 ἂν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ εἶνε 0»*.

99. Ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 9 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἀπὸ καθὲν δεκάδραχμον, ἑκατοντάδραχμον, χιλιόδραχμον κ.λ.π. τὸ ὁποῖον θὰ μοιράζῃ οὕτω, θὰ τοῦ μείνῃ ἀνὰ μία δραχμή. Διότι ἡ διαίρεσις 10 δρ. : 9 δίδει ὑπόλοιπον 1 δρ.· αἱ 100 δρ. : 9 δίδει πηλίκον 11 καὶ ὑπόλοιπον 1 δρ.· αἱ 1 000 δρ. : 9 δίδει πάλιν ὑπόλοιπον 1 δρ. κ.λ.π. Ἄρα ἀπὸ τὰ 6 χιλιόδραχμα θὰ μείνουν 6 δρ., ἂν μοιράζῃ 9 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν· ἀπὸ τὰ 5 ἑκατοντάδραχμα θὰ μείνουν 5 δρ· ἀπὸ 4 δεκάδραχμα 4 δραχμαί. Ἑπένως ἀπὸ τὰς 6 543 δραχμὰς αἱ ὁποῖαι $=$μὲ $6X+5E+4\Delta+3M$ δραχμὰς θὰ τοῦ μείνουν $6+5+4+3=$ 18 δραχμαί. Ἀλλ' αὐτὰς πρέπει νὰ μοιράσῃ πάλιν εἰς πτωχούς, δίδον εἰς καθένα 9 δραχ.· θὰ δώσῃ λοιπὸν αὐτὰς εἰς 18 δρ. : 9$=$ 2 πτωχοὺς καὶ δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε.

Ἂν εἶχε νὰ μοιράσῃ 851 δρ. ἀπὸ 9 εἰς καθένα, θὰ εὕρωμεν ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ὅτι θὰ τοῦ ἔμενον πρῶτον $8+5+1=14$δρ.

ἀπὸ αὐτὰς δ' ἔπειτα 5 δρχ. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ 9 εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα διαιρέσωμεν διὰ 9. Τὸ ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, θὰ εἶνε καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 3 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, καὶ ἔχομεν συμπέρασμα ἀνάλογον πρὸς τἀνωτέρω. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, ***«ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 3, ἢ 9»***.

100. Ἂν τὸ παιδίον δίδῃ 4 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι ἀπὸ καθὲν ἑκατοντάδραχμον, χιλιόδραχμον κλπ. δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε (διότι 100 : 4 = 25 ἀκριβῶς, 1 000 : 4 = 250), ἀπὸ δὲ τὰς ὑπολοιπομένας 43 δρχ. ἐκ τῶν 6 543 θὰ δώσῃ τὰς 40 δραχμὰς εἰς 10 πτωχοὺς καὶ θὰ τοῦ μείνουν 3 δραχμαί. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπόν, ἂν εἷς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία ἐκ δεξιῶν διὰ 4. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 25 δραχμάς, ἢ 100 δραχμὰς εἰς καθένα πτωχόν.

Ὅθεν, ***«ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, ἢ 25 μὲν ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, ἢ 25. διὰ τοῦ 100 δέ, ἂν τὰ δύο τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία του εἶνε μηδενικά»***.

101. Ἐὰν τὸ παιδίον δίδῃ 8 δρχ. εἰς καθένα πτωχόν, παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ καθὲν χιλιόδραχμον δὲν θὰ τοῦ μείνῃ τίποτε. Διότι 1 000 : 8 = 125 ἀκριβῶς. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τί θὰ τοῦ μείνῃ ἀπὸ τὰς ἄλλας 543 δραχμάς, διαιροῦμεν τὸ 543 : 8 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 7 δραχμάς.

Ὥστε, *«ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 8, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 8»*.

Ἀσκήσεις.

1) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 436· 965· 589· 2 028· 7 968· 38 684· 26 336· 228 762· 850 340· εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5, τοῦ 8, τοῦ 3, τοῦ 9 ;

2) *Ἄν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 6.* Ποῖοι ἐκ τῶν 846· 7 283· 8421· 9 324· 16 843· 76 224 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3· 2· 4· 6;

3) Διὰ ποίων ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9· 25· 100 εἶνε διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 95 365· 839 715· 932 405;

4) Ποῖον ψηφίον νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τελευταίου δεξιὰ τῶν ἀριθμῶν 2 825· 39 894· 386 427, διὰ νὰ γίνουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5, τοῦ 3, τοῦ 10;

5) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, ἢ 9, καὶ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶνε πάλιν διαιρετὸς διὰ 3, ἢ 9. Διατί;

6) Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ εἰς τὸ τέλος τρία μηδενικά, διαιρεῖται διὰ τοῦ 1 000· ἂν τέσσαρα, διαιρεῖται διὰ τοῦ 10 000. Διατί;

7) Ὅταν ἐξετάζωμεν ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, ἢ 9 δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰ ψηφία τὰ ὁποῖα εἶνε διαιρετὰ διὰ 3, ἢ διὰ 9. Διατί;

Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

102. Ὑπάρχουν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των, π. χ. οἱ 2· 3· 5· 7· 11· 29, καὶ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας, καθὼς οἱ 4· 8· 15· 21 κ.λ.π. Ἐκεῖνοι οἱ μὲν ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαιρέτας μόνον τὸν ἑαυτόν των καὶ τὴν μονάδα, λέγονται *πρῶτοι*, ἐκεῖνοι δὲ οἱ ὁποῖοι ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας λέγονται *σύνθετοι* ἀριθμοί. Ἐπειδὴ πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διαιρεῖται μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶνε ἡ 1 καὶ ὁ ἄλλος αὐτὸς ὁ ἀριθμός. Οὕτω ἔχομεν ὅτι ὁ $7 = 1 \times 7$· ὁ $11 = 1 \times 11$· ὁ $13 = 13 \times 1$· ὁ $29 = 29 \times 1$ κ.λ.π

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, ***«πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς δὲν δύναται ν᾽ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων μικροτέρων αὐτοῦ».***

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

103. Ἐπειδὴ πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτας, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶνε μικρότερος αὐτοῦ. Οὕτω π. χ. ὁ 6 ἔχει διαιρέτην τὸν 2 καὶ εἶνε $6 = 2 \times 3$.

Ἐὰν ἀριθμὸς σύνθετος ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, δυνάμεθα καθένα τῶν παραγόντων τούτων, ἐὰν δὲν εἶνε πρῶτοι, νὰ τρέψωμεν εἰς γινόμενον δύο ἄλλων παραγόντων μικροτέρων αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ ἐξακολουθήσωμεν μέχρις ὅτου ὅλοι οἱ παράγοντες τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν, νὰ εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι,

«πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν».

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν 60 εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν. Ἔχομεν $60=4\times15$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε $4=2\times2$ καὶ $15=3\times5$, ἕπεται ὅτι εἶνε $60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$.

Ὅταν πρόκειται περὶ μεγάλων ἀριθμῶν, π. χ. ἐὰν θέλωμεν ν' ἀναλύσωμεν τὸν 560 εἰς γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν 560 διὰ τοῦ μικροτέρου τῶν πρώτων ἀριθμῶν, διὰ τοῦ ὁποίου διαιρεῖται. Ἔπειτα ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως μὲ τὸ πηλίκον καὶ οὕτω καθεξῆς μὲ τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον, ἐν ὅσῳ τοῦτο εἶνε δυνατόν· δηλαδὴ ἐν ὅσῳ δὲν εὑρίσκομεν πηλίκον πρῶτον ἀριθμόν· Οὕτω ὁ 560 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 καὶ ἔχομεν

	$560:2=280$·	ἑπομένως	$560=2\times280$·
Ὁμοίως	$280:2=140$·	»	$280=2\times140$·
»	$140:2=70$·	»	$140=2\times70$·
»	$70:2=35$·	»	$70=2\times35$·
»	$35:5=9$·	»	$35=5\times7$.

Ἄρα τὸ $560=2\times280=2\times2\times140=2\times2\times2\times70=2\times2\times2\times2\times35=2\times2\times2\times2\times5\times7=2^4\times5\times7$.

Συνήθως ἡ πρᾶξις τῆς ἀναλύσεως διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

διὰ τὸν 60

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60=2^2\times3\times5$·

διὰ τὸν 560

560	2
280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

$560=2^4\times5\times7$.

Ἀσκήσεις.

1) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 ἕως 30 εἶνε πρῶτοι ;

2) Ποῖοι ἐκ τῶν 30 ἕως 50 εἶνε πρῶτοι ; Ποῖοι ἐκ τῶν 50 ἕως 100 ;

2) Ν' ἀναλυθοῦν ἀπὸ μνήμης εἰς γινόμενα δύο παραγόντων ἐκ τῶν ὁποίων εἷς τοὐλάχιστον νὰ εἶνε πρῶτος οἱ 24· 32· 36· 39· 40.

3) Ὁμοίως οἱ 69· 75· 78· 81· 84· 85· 87· 91· 100.

4) Ν' ἀναλυθοῦν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν 8· 12· 16· 20· 34· 27· 28· 32· 36· 40· 44· 48· 50· 52· 60· 63· 64.

5) Ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων ἀριθμῶν οἱ ἀριθμοὶ 432· 2 145· 700· 728· 5 445· 871· 1 764.

Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἀριθμῶν.

104. Ὁ ἀριθμὸς 15 ἔχει τοὺς διαιρέτας 1· 3· 5· 15· Ὁ 40 ἔχει τοὺς 1· 2· 4· 5· 8· 10· 20· 40. Οἱ 15 καὶ 40 ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 1 καὶ 5, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερος εἶνε ὁ 5.

Ὁ μεγαλύτερος αὐτὸς κοινὸς διαιρέτης τῶν 15 καὶ 40 λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* τῶν 15 καὶ 40.

Ἐν γένει, *καλοῦμεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν*, θὰ παριστάνωμεν δ' αὐτὸν διὰ τοῦ *μ. κ. δ.*

105. Ὅταν δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν μ. κ. δ. τὴν 1, θὰ λέγωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

106. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, πρέπει νὰ εὕρωμεν τοὺς διαιρέτας καθενὸς ἐκ τούτων, νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των μόνον τοὺς κοινοὺς ἐξ αὐτῶν, καὶ νὰ κρατήσωμεν τὸν μεγαλύτερον. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. εἶνε δύσκολος, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι, ἔχομεν τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικὸν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν 24· 60· 72.

Ἀναλύομεν καθένα ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ὅτε λαμβάνομεν $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$, $60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$, $72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 3, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὰ τρία γινόμενα, τὰ διαιρεῖ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο παράγοντας, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς καθένα τῶν τριῶν τούτων γινομένων, π. χ. ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $2\times3=6$, τοῦτο διαιρεῖ καὶ τὰ τρία γινόμενα, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 24· 60· 72. Ἑπομένως ὁ 6 εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν, ἤτοι τοὺς 2· 2· 3. Ὥστε ὁ μ.κ.δ. τῶν 24· 60· 72 εἶνε ὁ $2\times2\times3=2^2\times3=12$. Ὡς βλέπομεν, ὁ 2 περιέχεται εἰς τοὺς 24· 60· 70, καὶ εἰς μὲν τὸν πρῶτον ἔχει τὸν ἐκθέτην 3, εἰς τὸν δεύτερον 2, καὶ εἰς τὸν τρίτον 3, εἰς δὲ τὸν μ. κ. δ. $2^2\times3$ τὸ 2 περιέχεται μὲ ἐκθέτην 2· δηλαδὴ μὲ τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους αὐτὸς ἔχει εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸν παράγοντα 3.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν 32· 80· 120.

Ἔχομεν δηλαδὴ

$$32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$$
$$80=2\times2\times2\times2\times5=2^4\times5$$
$$120=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3\times5.$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες εἶνε μόνον ὁ 2, καὶ ὁ μικρότερος ἐκθέτης αὐτοῦ, μὲ τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἶνε ὁ 3, ἄρα $2^3=8$ εἶνε ὁ μ. κ. δ. τῶν 32· 80· 120. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν καθένα ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν, καθενὸς λαμβανομένου μὲ τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὰ γινόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνελύθησαν οἱ ἀριθμοί»

107. ***Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τῶν μ. κ. δ. ἀριθμῶν.***

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν ὑπάρχει καὶ ἡ ἑξῆς ὡραία μέθοδος, γνωστὴ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ *Εὐκλείδου* (γεννηθέντος τὸ 300 π. Χ.).

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 810 καὶ 279. Διαιροῦμεν τὸν 810 διὰ τοῦ 279 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 252. Τὸν Διαιρέτην 279 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 252 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 27. Διαιροῦμεν πάλιν τὸν 252 διὰ τοῦ 27 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 9. Τέλος διαιροῦμεν τὸν 27 διὰ τοῦ 9 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ τελευταῖος αὐτὸς διαιρέτης 9 εἶνε ὁ μ. κ. δ. τῶν 810 καὶ 279.

Ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διαιρῇ τούς ἄλλους, αὐτὸς εἶνε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ τῆς εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. λέγεται μέθοδος *διὰ διαιρέσεως*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης, ἡ ὁποία λέγεται *δι' ἀναλύσεως εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας*.

Ἡ μέθοδος *διὰ διαιρέσεως* ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 125· 350· 480· 500.

Λαμβάνομεν τὸν μικρότερον 125. Διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ πάντας τοὺς ἄλλους, καὶ γράφομεν κάτωθεν καθενὸς τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, κάτωθεν δὲ τοῦ μικροτέρου τὸν ἴδιον.

Εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὁμοίως, διαιροῦντες τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν (ὁ ὁποῖος δὲν πρέπει νὰ εἶνε 0) καὶ οὕτω προχωροῦμεν ὁμοίως, μέχρις ὅτου πάντα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως εἶνε ἴσα μὲ 0, ὅτε ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶνε ὁ μ. κ. δ.

Οὕτω διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 125· 350· 480· 500 θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς σειράς.

125·	350·	480·	500	
				διαιρέτης ὁ 125
125·	100·	105·	0	
				διαιρέτης ὁ 100
25·	100·	5·	0	
				διαιρέτης ὁ 5
0·	0·	5·	0	
				μ. κ. δ. ὁ 5

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν δι' ἀναλύσεως καὶ διὰ διαιρέσεως· α΄) 18, 14, 60, 72· β΄) 25, 30, 24, 39, 50. γ΄) 25, 100, 60, 90.

2) Ὁμοίως τῶν α΄) 6, 8, 12· β΄) 12, 16, 24· γ΄) 12, 20, 30. δ΄) 135, 625, 350, 140.

3) Νὰ εὑρεθῇ διὰ διαιρέσεως καὶ δι' ἀναλύσεως ὁ μ. κ. δ. τῶν 360, 781, 3 784.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Διατὶ ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ὁ διαιρέτης τῶν ἄλλων εἶνε ὁ μ. κ. δ. των;

2) Εἰς πόσους τὸ πολὺ πτωχοὺς δύνανται νὰ μοιρασθοῦν 2 400 ὀκ. ἀλεύρου, 720 τυροῦ καὶ 2 000 δραχμαὶ καὶ πόσα θὰ λάβῃ καθεὶς ;

5 6 4
3) Ἓν παιδίον ἔχει 60 σφαίρας λευκάς, 72 ἐρυθρὰς καὶ 48 μαύρας· θέλει δὲ ἐκ τοῦ καθενὸς εἴδους νὰ σχηματίσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρους σωρούς, ἀλλ' οὕτως ὥστε ὁ καθεὶς σωρὸς νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος σφαιρῶν· α') πόσους τοιούτους σωροὺς δύναται νὰ σχηματίσῃ ; β') ἐκ πόσων σφαιρῶν θ' ἀποτελῆται καθεὶς σωρός ;

4) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι, π. χ. οἱ 5 καὶ 7, θὰ εἶνε καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διατί ;

Περὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν.

108. Ἓν παιδίον λαμβάνει ἀπὸ σήμερον ἀνὰ 4 ἡμέρας χρήματα ἀπὸ τὸν πατέρα του ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν μητέρα του ἀπὸ σήμερον, ἀλλά ἀνὰ ἓξ ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ λάβῃ πάλιν χρήματα κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο διὰ πρώτην φοράν ;

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν πατέρα του θὰ λάβῃ τὴν 4ην, 8ην, 12ην... ἡμέραν ἀπὸ σήμερον, καὶ ἀπὸ τὴν μητέρα του τὴν 6ην, 12ην, 18ην..., συνάγομεν ὅτι, τὴν δωδεκάτην ἡμέραν ἀπὸ σήμερον θὰ λάβῃ χρήματα καὶ ἀπὸ τοὺς δύο διὰ πρώτην φορὰν ἐκτὸς τῆς σημερινῆς.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μικρότερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τῶν 4 καὶ 6 ἢ εἰς τὸν ὁποῖον ὁ 4 καὶ ὁ 6 χωροῦν ἀκριβῶς. Τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους ὁ 4 καὶ ὁ 6 χωροῦν ἀκριβῶς καλοῦμεν *κοινὰ πολλαπλάσια τῶν 4 καὶ 6*. Τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν 4 καὶ 6 λέγεται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 4 καὶ 6*.

Ἐν γένει, ***«καλοῦμεν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς ὁποίους οἱ δοθέντες χωροῦν ἀκριβῶς».***

Θὰ παριστάνωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ ἑ. κ. π.

109. *Εὕρεσις τοῦ ἑ. κ. π. διὰ πολλαπλασιασμοῦ.* Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 5· 6· 7· 10, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸ ἑ. κ. π. Παρατηροῦμεν ἐὰν ὁ μεγαλύτερος αὐτῶν, ὁ 10, διαιρῆται διὰ καθενὸς τῶν ἄλλων. Καὶ ἂν μὲν διαιρῆται, αὐτὸς θὰ εἶνε τὸ ἑ. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ διπλάσιον (20), τὸ τριπλάσιον (30),... μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται διὰ καθενὸς τῶν δοθέντων. Ὁ ἀριθμὸς 210, τὸν ὁποῖον πρῶτον θὰ εὕρωμεν τοιουτοτρόπως, θὰ εἶνε τὸ ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ὁμοίως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2· 4· 5· 6 εὑρίσκομεν ἐ. κ. π. αὐτῶν τὸν 60.

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐ. κ. π. λέγεται καὶ *μέθοδος διὰ πολλαπλασιασμοῦ*.

110. *Εὕρεσις τοῦ ἐ. κ. π. δι᾿ ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 8· 18· 24. Ἀναλύομεν καθένα αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ὅτε λαμβάνομεν $8=2\times2\times2=2^3$, $18=2\times3\times3=$ $=2\times3^2$, $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $8=2\times2\times2$, πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γινόμενον $2\times2\times2$. Ἐπίσης διὰ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 18, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον $2\times3\times3$. Διὰ τοῦτο πρέπει εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ $2\times2\times2$ νὰ παραθέσωμεν καὶ τοὺς παράγοντας 3×3, ὅτε λαμβανόμενον, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον $2\times2\times2\times3\times3$. Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ $24=2\times2\times$ $\times2\times3$, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ γινόμενον τοῦτο $2\times2\times2\times3$, τὸ ὁποῖον πράγματι περιέχει. Ἄρα τὸ $2\times2\times2\times3\times3$, εἶνε ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τῶν δοθέντων, εἶνε δὲ καὶ τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν. Διότι οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος αὐτοῦ διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν τριῶν 8· 18· 24. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π. εἶνε ὁ $2\times2\times2\times$ $\times3\times3=72$.

Καθ᾿ ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμενοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. οἱωνδήποτε ἄλλων ἀριθμῶν. Π. χ. διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 5· 35· 80· 120 ἔχομεν $5=5$· $35=5\times7$· $80=2^4\times5$· $120=2^3\times3\times5$.

Τὸ δὲ ἐ. κ. π. αὐτῶν εἶνε τὸ $2^4\times3\times5\times7=1\,680$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀναλύομεν καθένα τούτων εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων τῶν γινομένων τούτων, καθενὸς λαμβανομένου μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην».

111. Ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πολὺ μεγάλοι, ἀποφεύγομεν τὴν ἀνάλυσιν καθενὸς ἐξ αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ἀλλ᾿ ἐργαζόμεθα συνήθως ὡς ἑξῆς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3· 5· 9· 12· 16.

Εὑρίσκομεν τὸν μικρότερον πρῶτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τοὐλάχιστον δύο ἐξ αὐτῶν. Διαιροῦμεν δι᾽ αὐτοῦ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται, καὶ ὑποκάτω καθενὸς τούτων γράφομεν τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων, κάτωθεν δὲ τῶν ἄλλων αὐτοὺς τοὺς ἰδίους ἀριθμούς. Ἐπὶ τῶν νέων ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων ἀποτελουμένην, ἢ καὶ ἐκ τοιούτων, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ εἷς πρῶτος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον δύο ἐξ αὐτῶν. Τοὺς ἑκάστοτε εὑρισκομένους διαιρέτας, καθὼς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς ἐκτὸς τῆς 1, γράφομεν εἰς στήλην, κειμένην ἀριστερὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἀπὸ τῶν ὁποίων χωρίζεται διὰ γραμμῆς κατακορύφου.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

2	3·	5·	9·	12·	16·
2	3·	5·	9·	6·	8·
3	3·	5·	9·	3·	4·
3	1·	5·	3·	1·	4·
4					
5					

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀνωτέρω δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε τὸ γινόμενον $2\times2\times3\times3\times4\times5$· ἤτοι τὸ $2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=720$.

Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 7· 12· 15· 27 35· 40· 45 ἔχομεν

2	7·	12·	15·	27·	35·	40·	45·
2	7·	6·	15·	27·	35·	20·	45·
3	7·	3·	15·	27·	35·	10·	45·
3	7·	1·	5·	9·	35·	10·	15·
5	7·	1·	5·	3·	35·	10·	5·
7	7·	1·	1·	3·	7·	2·	1·
2	1·	1·	1·	3·	1·	2·	1·
3							

Τὸ ἐ. κ. π. εἶνε τὸ $2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times7=7\,560$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

1) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν α') 15· 30· β') 20· 80· γ') 20· 30· δ') 50· 40· ε') 100· 80· στ') 7· 21· 84· ζ') 7, 14, 21· η') 10, 15, 20· θ') 10, 20, 40, 120.

2) Ὁμοίως τῶν κάτωθι ἀριθμῶν δι' ἀναλύσεως καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ· α') 8, 9, 6, 12, 15, 20· β') 18, 24, 60, 80· γ') 50, 65. 16, 6.

3) Ὁμοίως τῶν α') 2, 4, 8, 14· β') 6, 12, 5, 16, 10· γ') 8, 12, 16, 5, 6· δ') 7, 2, 4, 6, 8· ε') 8, 6, 9, 12, 25, 30.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. καὶ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α') 240 360, 144, 6 948· β') 280, 644, 600, 1 024, 1 800. γ') 3 700, 72, 130, 366· δ') 770, 2 420, 3 850.

5) Ἐκ τοῦ λιμένος Πειραιῶς ἀναχωρεῖ ἀνὰ 7 ἡμέρας ἀτμόπλοιον διὰ Βόλον· πάντοτε ἀνὰ 3 ἡμέρας ἄλλο διὰ Σπέτσας καὶ ἄλλο ἀνὰ 2 δι' Ἰτέαν. Ἐὰν μίαν Κυριακὴν συμπέσῃ ἡ ἀναχώρησις τριῶν ἀτμοπλοίων ἐκ Πειραιῶς διὰ Βόλον, Σπέτσας, Ἰτέαν, πότε πάλιν θὰ συμπέσῃ ἡ πρώτη κοινὴ ἀναχώρησις; (42 ἡμ.),

6) Ὁ Α καὶ ὁ Β ἀρχίζουν νὰ κτυποῦν ἐπὶ δύο διαφόρων ὀργάνων συγχρόνως. Ὁ Α ἐπαναλαμβάνει τὸν κτύπον ἀνὰ $8^{λ}$ ($9^{λ}$), ὁ δὲ Β ἀνὰ $12^{λ}$ ($5^{λ}$)· μετὰ πόσα λεπτὰ θὰ κτυπήσουν συγχρόνως πάλιν διὰ δευτέραν φοράν; 24 (45).

7) ἐ. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί;

8) Τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί;

9) Διατὶ ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εἷς διαιρούμενος ὑπὸ τῶν ἄλλων εἶνε τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Σχηματισμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

112. *Πρόβλημα.* «*Ἂν θέλωμεν να μοιράσωμεν 1 δραχμὴν εἰς 10 παιδιά, τί θὰ δώσωμεν εἰς καθέν;*»

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι μία δραχμὴ ἔχει 10 δεκάλεπτα, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὴν δραχμὴν εἰς 10 δεκάλεπτα καὶ νὰ δώσωμεν εἰς ἕκαστον παιδίον ἓν δεκάλεπτον. Τὸ δεκάλεπτον καλεῖται καὶ *δέκατον* τῆς δραχμῆς, ἐπειδὴ εἶνε ἓν ἐκ τῶν δέκα ἴσων μερῶν αὐτῆς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν φαντασθῶμεν μίαν μονάδα, π. χ. μίαν γραμμήν, ἓν μῆλον κ.λ.π., χωρισμένον εἰς δέκα ἴσα μέρη, θὰ καλοῦμεν ἓν τοιοῦτον μέρος ἓν δέκατον τῆς μονάδος αὐτῆς.

Δυνάμεθα τώρα νὰ σχηματίσωμεν ἀριθμοὺς ὄχι μόνον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων (ἁπλῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων κλπ.), τὰς ὁποίας παρεστήσαμεν διὰ τῶν Μ,Δ,Ε,Χ,..,ἀλλὰ καὶ ἐκ δεκάτων, τὰ ὁποῖα θὰ σημειώνωμεν διὰ τοῦ δ. Οὕτω ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ σχηματισθῇ καθὼς οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοί, δηλαδὴ πάντοτε 10 μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 5Ε, 3Δ, 8Μ, 6δ, τὰ 10 δέκατα ἀποτελοῦν μίαν μονάδα, αἱ 10 μονάδες μίαν δεκάδα καὶ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἂν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 1 δραχμὴν εἰς 100 παιδιά, ἐπειδὴ ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὴν δραχμὴν εἰς λεπτὰ καὶ νὰ δώσωμεν 1 λεπτὸν εἰς ἕκαστον παιδίον. Τὸ ἓν λεπτὸν καλεῖται καὶ *ἑκατοστὸν* τῆς δραχμῆς, ἐπειδὴ εἶνε ἓν τῶν 100 ἴσων μερῶν αὐτῆς. Ἀλλ' ἂν ἠθέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἓν δεκάλεπτον, δηλαδὴ ἓν δέκατον τῆς δραχμῆς, εἰς δέκα παιδιά, θὰ ἐδίδομεν 1 λεπτὸν εἰς ἕκαστον, ἐπειδὴ τὸ δεκάλεπτον ἔχει 10 λεπτά. Τὸ ἓν λεπτὸν λοιπὸν εἶνε τὸ δέκατον τοῦ δεκαλέπτου. Ἤτοι τὸ ἓν ἑκατοστὸν τῆς δραχμῆς εἶνε τὸ ἓν δέκατον τοῦ δεκάτου αὐτῆς. Γενικῶς, ἂν διαιρέσωμεν ἓν δέκατον τῆς μονάδος εἰς 10 ἴσα μέρη, ἓν τοιοῦτον μέρος θὰ καλοῦμεν *ἑκατοστὸν* τῆς μανάδος, καὶ θὰ σημειώνωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ε. Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ὄχι μόνον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν μονάδων, ἀλλὰ καὶ ἐκ δεκάτων καὶ ἑκατοστῶν. Ἐπίσης καὶ οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ θὰ σχηματίζωνται, ὡς οἱ μέχρι τοῦδε. Π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 2Δ 3Μ 0δ 3ε, τὰ 10ε ἀποτελοῦν 1δ· τὰ 10δ ἀποτελοῦν 1Μ· αἱ 10Μ μίαν δεκάδα καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν οὕτω ἐξακολουθήσωμεν, δυνάμεθα τὸ ἓν ἐκ τῶν 10 ἴσων μερῶν ἑνὸς ἑκατοστοῦ νὰ καλέσωμεν *χιλιοστόν*, τὸ ἓν τῶν 10 ἴσων μερῶν τοῦ χιλιοστοῦ *δέκατον τοῦ χιλιοστοῦ* καὶ οὕτω καθεξῆς, νὰ σχηματίσωμεν δὲ ἀριθμούς, ἀκριβῶς ὅπως τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστούς. Τὰς νέας αὐτὰς μονάδας *(δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστόν, δέκατον χιλιοστοῦ, ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ, ἑκατομμυριοστόν,...)* καλοῦμεν *δεκαδικὰς κλασματικὰς ἢ ἁπλῶς δεκαδικὰς μονάδας*, τοὺς δὲ νέους ἀριθμούς, *δεκαδικοὺς κλασματικοὺς ἢ ἁπλῶς δεκαδικοὺς ἀριθμούς*, ἐνῷ τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς καλοῦμεν *ἀκεραίους*.

113. Ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν δεκαδικῶν μονάδων ἔχομεν ὅτι 1Μ=μὲ 10δ=μὲ 100ε=1000χ.· 1δ=μὲ 10ε=μὲ 100χ. κλπ.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

114. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς συμφώνως πρὸς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων, ἐὰν θέσωμεν ὡς ἀρχὴν ὅτι, *«δεξιὰ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ εἰς τὴν πρώτην θέσιν θὰ γράφωμεν τὰ δέκατα, εἰς τὴν δευτέραν θέσιν τὰ ἑκατοστά, εἰς τὴν τρίτην τὰ χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθεξῆς»*.

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ποία θέσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, γράφομεν πρὸς διάκρισιν μεταξὺ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ τῶν δεκάτων ἓν *κόμμα (,)*. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 6Δ 3Μ 4δ 7ε θὰ γραφῇ οὕτω 63,47 καὶ καλεῖται τὸ μὲν πρὸς τἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος *ἀκέραιος* τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεκαδικὸν μέρος* τοῦ ἀριθμοῦ 63,47. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκεραίας μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3δ 7ε 2χ γράφεται οὕτω 0, 372.

115. Ἡ ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 23,407 δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τρεῖς τρόπους κυρίως. 1) λέγομεν 23 ἀκέραιος, 4 δέκατα καὶ 7 χιλιοστά· ἤτοι ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα καθὲν δεκαδικὸν ψηφίον σημαντικὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστάνει· 2) ἐπειδὴ 4δ 0ε 7χ εἶνε ἴσον μὲ 407 χιλιοστά, (διότι ἓν δέκατον ἔχει 100 χιλιοστὰ καὶ τὰ 4δ = μὲ 400 χιλιοστά), λέγομεν 23 ἀκέραιος καὶ 407 χιλιοστά. Ἤτοι ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος, ὀνομάζοντες αὐτὸ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου. 3) Ἐπειδὴ 1Μ = μὲ 10δ, αἱ 23 μονάδες ἔχουν 230 δέκατα, τὰ 230δ = μὲ 23 00ε, καὶ τὰ 2 300ε = μὲ 23 000χ. Ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς 23,407 εἶνε ἴσος μὲ 23407 χιλιοστά· ἀπαγγέλλομεν λοιπὸν εἴκοσι τρεῖς χιλιάδες τετρακόσια ἑπτὰ χιλιοστά. Ἤτοι ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς νὰ ἦτο ἀκέραιος, ὀνομάζοντες αὐτὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου αὐτοῦ.

116. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, συνήθως ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιόν του καὶ χωριστὰ τὰ δεκαδικὰ ψηφία του κατὰ τμήματα τριψήφια ἐξ ἀριστερῶν (ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα δύναται νὰ τύχῃ νὰ εἶνε διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον), εἰς καθὲν δὲ τούτων προσαρτῶμεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου. Π. χ. τὸν ἀριθμὸν 48,042 628 9 ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς· 48 ἀκέραιος, 42 χιλιοστά, 628 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 9 δέκατα ἑκατομμυριοστοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφοῦν οἱ ἑπόμενοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί· α') 7 ἀκέραιος, 8 δέκατα, 6 ἑκατοστὰ καὶ 3 χιλιοστά β') 162 ἀκέραιος, 5 ἑκατοστὰ καὶ 6 χιλιοστά. γ') 6 ἑκατοστά, 9 χιλιοστὰ καὶ 7 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ. δ') 9δ, 6ε καὶ 3Μ· ε') 6ε, 9χ, 7δχ καὶ 3δ.

2) Νὰ γραφοῦν οἱ ἀριθμοί· α') 64 δέκατα· β') 627 ἑκατοστά. γ') 955 χιλιοστά. δ') 863 δέκατα χιλιοστοῦ.

3) Νὰ τραποῦν α') 9Μ καὶ 6δ εἰς ἑκατοστά· β') 9Ε καὶ 6δ εἰς δέκατα. γ') 6Μ, 5Δ καὶ 3Ε εἰς δέκατα. δ') 8ε, 4Μ καὶ 3Δ εἰς χιλιοστά.

4) Ν' ἀπαγγελθῇ καθεὶς τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν κατὰ τρεῖς τρόπους καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ σημασία καθενὸς ψηφίου ἐκ τῆς θέσεώς του.

α') 0,385· β') 29,084· γ') 249,343 5· δ') 0,006 84.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

117. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 8,7 δρ. Ἐπειδὴ ἡ 1 δραχ. ἔχει δέκα δέκατα, αἱ 8 δρ. ἔχουν 80δ. καὶ 7δ, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ ἀριθμός, ἴσον 87δ. Ὥστε ὁ 8,7 δρ. γράφεται καὶ 87δ. δρχ. Ἀλλὰ 1δ ἔχει 10ε· ἄρα τὰ 87δ ἔχουν 870ε. Ὥστε τὰ 87δ=μὲ 870 ε, ἢ ἂν γράψωμεν καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἔχομεν 8,7 = 8,70.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 8,7=μὲ 8,70=μὲ 8,700=μὲ8,7000 κλπ. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, «*ἡ ἀξία ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν γράψωμεν (ἢ καὶ παραλείψωμεν) ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος καὶ δεξιὰ αὐτοῦ*».

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην, πᾶς ἀκέραιος γράφεται ὡς δεκαδικὸς μὲ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εἶνε μηδενικά. Π.χ. εἶνε 5= μὲ 5,0=μὲ 5,00=μὲ 5,000 κλπ. Ὁ 6=6,0=6,00= =6,000 κλπ.

118. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 3,65 δραχμάς. Ἐπειδὴ 1 δρ. ἔχει 100 ἑκατοστά, αἱ 3 δρ. ἔχουν 300ε, καὶ 65ε, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ ἀριθμός, ἴσον 365 ἑκατοστά. Ὥστε 3,65 δρ.=μὲ 365ε τῆς δραχμῆς. Ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ 3,65 δρ. μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 36,5 δρ. Ἐπειδὴ δὲ 1 δρ, ἔχει 10 δέκατα δραχμῆς αἱ 36 δρ. ἔχουν 360 δ καὶ 5 τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ ἀριθμός, ἴσον 265δ δραχμάς. Ὥστε εἶνε 36,5 δρ.= 265 δ. δραχμῆς. Ἐπειδὴ τὸ 1 δέκατον εἶνε δεκαπλάσιον τοῦ ἑκατοστοῦ, ὁ ἀριθμὸς 365δ. εἶνε δεκαπλάσιος τοῦ 365ε. Ἤτοι ὁ 36,5 δρ. εἶνε δεκαπλάσιος τοῦ 3,65 δρ. Δηλαδὴ ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 3,65 μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10. Τοὐναντίον, ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ 36,5 δρ. μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, εὑρίσκομεν τὸν 3,65 δρ., ὁ ὁποῖος εἶνε δέκα φορὰς μικρότερος τοῦ 36,5 δρ. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, «*ἂν μὲν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μίαν, δύο, τρεῖς,..θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1 000,.... ἐὰν δὲ πρὸς τὰ ἀριστερά, διαιρεῖται διὰ 10, 100, 1 000,...*».

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Γράψατε τοὺς ἀριθμοὺς 32· 28· 145· 3· 7· 12 ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν μὲ 2, 3, 4 δεκαδικὰ ψηφία,

2) Πόσον τιμῶνται 10,100, 1000 σταφύλια, ἂν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 7,5 δρ;

3) Πόσον κοστίζει ἡ χιλιὰς τὰ λεμόνια, ἂν τὸ ἓν κοστίζῃ 0,4 δρχ; πόσον κοστίζουν τὰ 10, τὰ 100 λεμόνια;

4) Ἡ χιλιὰς τὰ πορτοκάλια κοστίζουν 800 δρχ. πόσον κοστίζει τὸ ἓν πορτοκάλιον; πόσον τὰ 10, τὰ 100;

5) Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου, ἂν 10 ὀκάδες πωλοῦνται 375,0 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται αἱ 100 ὀκάδες;

Πρόσθεσις.

119. *Πρόβλημα.* »*Ἔμπορος εἰσέπραξεν 145,85 δρ. καὶ 852,35 δρ. καὶ 20,7· πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ*».

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 145,85 δρ. 852, 35 δρ. καὶ 20, 7 δρ. «*Ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὅπως καὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, γράφοντες τοὺς προσθέτους τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων καθὼς καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ προσέχοντες νὰ γράφωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ ἄθροισμα εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν προσθετέων*». Οὕτω γράφομεν ὡς ἀπέναντι καὶ λέγομεν· 5 καὶ 5, 10· γράφομεν 0 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 7, 8 καὶ 3, 11, καὶ 8, 19· γράφομεν 9 καὶ κρατοῦμεν 1, *γράφομεν τὸ κόμμα*· 1 καὶ 2, 3 καὶ 5, 8· 2 καὶ 5, 7 καὶ 4, 11· γράφομεν 1 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 καὶ 8, 9 καὶ 1, 10· γράφομεν τὸ 10 ὥστε ὁ ἔμπορος εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 1018,90 δρχ.

$$\begin{array}{r} 145{,}85 \\ 852{,}35 \\ 20{,}70 \\ \hline 1018{,}90 \end{array}$$

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν καὶ οἱωνδήποτε δεκαδικῶν ἀριθμῶν, γράφοντες ἐπαρκῆ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος δεξιὰ αὐτῶν, ὥστε νὰ ἔχουν ὅλοι ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἡ δοκιμὴ τῆς προθέσεως τῶν δεκαδικῶν γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

Παραδείγματα προσθέσεων.

α΄)		β΄)		γ΄)	
	8,35		0,350		63,1400
	14,73		6,820		2,0580
	2,62		19,145		147,5000
	0,95		7,255		20,0000
	26,65		33,570		308,1273
					540,8253

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα· α΄) 2,837+ +18+16,13+0,343. β΄) 3,815+35,61+6286+130,5+83,02. γ΄) 0,31+3,167+0,12+9,11.

2) Ὁμοίως νὰ γίνουν αἱ προσθέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α΄) 6,6+9,3+0,36+8+0,092. β΄) 53+8,56+3,64—7,8+8,61· γ΄) 0,3+5,69+7,56+8,3+2,1389· δ΄) 1850+0,386+0,0073 +1546+4,7+3,06+17,04093.

3) Ἔμπορος εἰσπράττει κατὰ τὸν Μάρτιον 3 864,25 (1 225,34) δρχ., τὸν Ἀπρίλιον 2 864,01 (1 365, 1) δρχ., τὸν Μάϊον 3 925 (1 521,34) δρχ., καὶ τὸν Ἰούνιον 3 877,7 (1 526) δρχ.· πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 14530,96 (5637,78).

4) Ἐκ τριῶν κεφαλαίων τὸ α΄ δίδει τόκον 125,34 (1825,26) δρ., τὸ β΄ 385,9 (2 485,6) δρχ., τὸ δὲ γ΄ 1 675,3 (5 721,34) δρχ. πόσος εἶνε ὁ ὁλικὸς τόκος; 2 186,54 (10 032,2).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀντὶ 1846,5 (2877,27) δρχ.· πωλεῖ δὲ αὐτὰ 375,12 (874,64) δρχ. ἀκριβώτερον. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἐπώλησε; 2221,62 (3751,91).

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπορεύματα ἀντὶ 28 426,45 (89 811,45) δρχ. μὲ ζημίαν 825,11 (6 345,51) δρχ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἠγόρασε; 2 925,6 (56 156,96).

3) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶνε 123,45 (217,48) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον 6,04 (9 423) ὀκ.· πόσον εἶνε τὸ μικτὸν βάρος; 129,49 (226,903).

4) Οἱ τόποι Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 3,146 (8,076) χμ., ἡ ΒΓ 2,38 (6,345) χμ., ἡ δὲ

ΓΔ 5,3 (8,12) χμ. πόση εἶνε ἡ ΑΓ; ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΒΔ;
5,526 (14,421)· 10,826 (22, 541)· 7,68 (14,465).

5) Δύο τόποι κεῖνται ἑκατέρωθεν πόλεως καὶ ἐπ' εὐθείας γραμμῆς μετ' αὐτῆς· πόσον ἀπέχουν μεταξύ των, ἐὰν ὁ εἷς ἀπέχῃ αὐτῆς 4,347 χμ., ὁ δὲ ἄλλος 2,42 χμ.; 6,762.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Κατά τινα πρωΐαν ἡ θερμοκρασία ἦτο 16,5° (8,4°), ἀνῆλθε δὲ μέχρι τῆς μεσημβρίας κατὰ 5,1° (4,2°)· πόση ἦτο τὴν μεσηβρίαν; 21,6° (12,6°).

2) Ἔμπορος εἰσπράττει εἰς ἓν ἔτος 36 854,21 (125 943,12) δρ., εἰς τὸ ἑπόμενον ἔτος 3 758,21 (42 896,56) δρ. περισσοτέρας· τὸ ἑπόμενον 6 815,39 (431,79) δρ. περισσότερα, ἢ ὅσον τὸ α' καὶ β' ὁμοῦ· πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ; 161 748,65 (589 997,39).

3) Τέσσαρες τόποι Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 3,845 (6,123) χμ.· ἡ ΒΓ 3,122 (4,38) χμ. μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης· ἡ ΓΔ 5,385 (6,122) χμ. μεγαλυτέρα τῆς ΑΓ· πόση εἶνε ἡ ΑΔ; 27,009 (39,374).

Ἀφαίρεσις.

120. *Πρόβλημα. «Εἶχέ τις 918,8 δρ. καὶ ἐξώδευσε 96,75 δρ.· πόσαι τοῦ ἔμειναν;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 96,75 δρ. ἀπὸ τὸν 918,8 δρ. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτήν, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Ἤτοι, *«γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ἡ ὑποδιαστολὴ ὑπὸ τὴν ὑποδιαστολήν, κατὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν γράφομεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν ἀριθμῶν.* Οὕτω ἔχομεν, γράφοντες ἓν 0 εἰς τὸ τέλος δεξιὰ τοῦ μειωτέου

$$\begin{array}{r} 918,80 \\ 96,75 \\ \hline 822,05 \end{array}$$

καὶ λέγομεν· 5 ἀπὸ 0 δὲν ἀφαιρεῖται· 5 ἀπὸ 10, 5· γράφομεν τὸ 5· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 7,8 ἀπὸ 8,0· γράφομεν τὸ 0· *γράφο-*

μεν τὸ κόμμα· 6 ἀπὸ 8,2· γράφομεν τὸ 2· 9 ἀπὸ 1 δὲν ἀφαιρεῖται· 9 ἀπὸ 11,2· 1 τὸ κρατούμενον ἀπὸ 9,8· γράφομεν τὸ 8. Τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 822,05. Ὥστε ἔμειναν 822,05 δρ.

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν καὶ πᾶσαν ἄλλην ἀφαίρεσιν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, γράφοντες συνήθως εἰς τὸ τέλος καὶ δεξιὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν, ἐπαρκῆ μηδενικά, ὥστε καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ νὰ ἔχουν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως δεκαδικῶν γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

Παραδείγματα ἀφαιρέσεων.

α')	637,87	β'	30,642	γ')	813,00
	80,98		15,830		32,65
	556,89		14,812		780,35

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των· α') 13,2—0,1, β') 184,34—167,95. γ') 1,345—0,467· δ') 33,3—29,84· ε') 128,58—899,88· στ') 185—129, 121· ζ') 386,1—123,147· η') 13,04—5,682—14.

2) Ἀπὸ τὸ 278,45+3,127 ν' ἀφαιρεθῇ 1,1846+264,437—4.

3) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 76,46 ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 0,485 καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ὁ 6,913 καὶ πάλιν ὁ 13,001. 56, 061.

4) Ἀπὸ τὸν 83,126—9 ν' ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 7,14—6,458. (73,444).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀντὶ 311,45 (217,75) δρ., πωλεῖ δὲ αὐτὰ ἀντὶ 337,95 (238,44) δρχ.· πόσα κερδίζει; 26,5 (20,87).

2) Πωλήσας τις ἐμπορεύματα ἀντὶ 468,12 (617,34) δραχμῶν ἐκέρδισε 59,355 (48,56) δρχ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὰ ἠγόρασε; 408,78 (468,78).

3) Ἀγοράζει τις ἐμπορεύματα ἀντὶ 7 846,12 (3 819,02 δρχ. πωλεῖ δὲ αὐτὰ ἀντὶ 7 211,44 (3 798,64)· πόσα ἐζημιώθη; 634,28 (20,38).

4) Ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 45,126 (83,457) χμ. ἀναχωροῦν δύο ἁμαξοστοιχίαι πρὸς τὴν φορὰν Α Β. Ἡ ἐκ τοῦ Α ἀναχωροῦσα διανύει 60,48 (58,64) χμ., ἡ δ' ἐκ τοῦ Β 45,17 (40,856) χμ., τὴν ὥραν· πόση θὰ εἶνε ἡ ἀπόστασίς των μετὰ μίαν ὥραν ; 29,816 (65,673).

5) Αὐξάνω ἕνα ἀριθμὸν κατὰ 38,4 καὶ εὑρίσκω 126· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός ; 87,6.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Εἰσπράττει τις 7 856,25 (3 904, 85) δρχ. καὶ ἐξοδεύει ἀμέσως 487,30 (1 040,65)· δρχ. λαμβάνει πάλιν 4 976,34 (5 807,38) δρχ. καὶ ἐξοδεύει 417,87 (334,58) δρχ.· πόσα τοῦ μένουν ; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 11 927,42(8 337).

2) Ἔχει τις περιουσίαν 26 418,56 (43 189,51) δρχ. καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 477,38 (125,68 δρχ., ἔπειτα πάλιν 5 218,97 (1 875,36) δρχ. καὶ τέλος 387,51 (217,77) δρχ.· πόσα τοῦ ἔμειναν ; (Νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους). 20 334,80 (40 970,70).

Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 13,12 + 8,416 ν' ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ 25—23,84. 20,376.

3) Ἀπὸ τὸν 930,6 (6,72) ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 84,6 (0,84)· ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πάλιν ὁ 84,6 (0,84) καὶ οὕτω καθεξῆς ἐν ὅσῳ εἶνε δυνατόν. 11 (3)

Πολλαπλασιασμός.

α') Ὅταν ὁ εἷς παράγων εἶνε δεκαδικὸς καὶ ὁ ἄλλος ἀκέραιος.

121. *Πρόβλημα. «Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 215,75 δρχ.· πόσον τιμῶνται 37 πήχεις αὐτοῦ ;»*

Ἐπειδὴ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ 215,75 δρχ. τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 37 μονάδων, θὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Διότι οἱ δύο πήχεις θὰ τιμῶνται 2 φορὰς τὸ 215,75 δρχ. καὶ οἱ 37 πήχεις, 37 φορὰς τὸ 215,75 δρχ. Ἤτοι θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 215,75 δρχ. ἐπὶ 37. Ἐπειδὴ τὸ 215,75 δρχ. ἔχει 21 575 ἑκατοστὰ δραχμῆς, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 21 575 ἑκατοστὰ δρχ. ἐπὶ 37, τὸ δὲ ἐξαγόμενον θὰ παριστάνῃ ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς. Ἀλλὰ τοῦτο θὰ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων 21 575 καὶ 37 καὶ θὰ παριστάνῃ ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς. Δηλαδὴ ἔχομεν 21 575×37=798 275 ἑκατοστὰ δραχμῆς, ἢ μὲ 7 982,75 δραχμάς. Ὥστε οἱ 37 πήχεις τιμῶνται 7 982,75 δραχμάς.

Γενικῶς, ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ

5,484 ἐπὶ τὸν 263· ἤτοι τὸ 5,484×263. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 5,484=5 484 χιλιοστά. Ὥστε θὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 5 484 χιλιοστὰ × 263.

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 484 καὶ 263 καὶ παριστάνει χιλιοστά. Δηλαδὴ 1 442 292 χιλιοστὰ= 1 442,292.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, *«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν ὡς νὰ ἦσαν καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, ἀλλ' εἰς τὸ οὕτω προκύπτον γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ ὅσα ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός»*.

Οὕτω καὶ διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα γράφομεν ὡς κατωτέρω καὶ πολλαπλασιάζομεν, ὅπως τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, χωρίζομεν δὲ εἰς μὲν τὸ πρῶτον γινόμενον δύο δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερά, εἰς δὲ τὸ δεύτερον τρία.

$$\begin{array}{r} 215,75 \\ 37 \\ \hline 1510\,25 \\ 6472\,5 \\ \hline 7982,75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,484 \\ 263 \\ \hline 164\,5\,2 \\ 3290\,4 \\ 1096\,8 \\ \hline 1442,292 \end{array}$$

122. *Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε 10· 100· 1000·... ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν τὸ κόμμα τοῦ δεκαδικοῦ μίαν, δύο, τρεῖς,... θέσεις πρὸς τὰ δεξιά»*. Διότι τότε, καθὼς γνωρίζωμεν, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000,...

Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικά, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, γενικῶς, ὅτι·

«ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10· 100· 1000,.. ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ μίαν, δύο, τρεῖς,.. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 5,34· 6,782· 0,1234 ἐπὶ καθένα τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων.

2) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 2,37· 31,58· 0,875· 87,875 ἐπὶ 25· 17· 27· 39 ἀντιστοίχως.

3) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 25,135 ἐπὶ τὸ 125+315+278

(κατὰ δύο τρόπους). 18 046,93.

4) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 127,123 ἐπὶ τὸ 38×105. 507220,77.

6) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 3,31· 14,15· 0,578 ἐπὶ 10· 100· 1000.

6) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν 1,68· 2,37· 13,47· 0,451· 0,1237 ἐπὶ 20· 70· 300· 600· 700· 9000.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 38 (137) ὀκ. ἐμπορεύματος πρὸς 53,4 (60,1) δραχμὰς τὴν ὀκᾶν· πόσα πληρώνει; 2 563,2 (8 233,7).

2) Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 22,5 (35,6) δραχμὰς ὡς ἀμοιβήν· πόσα θὰ λάβῃ εἰς 28 (38) ἡμέρας; 630 (1 281,6).

3) Πληρώνει τις καθ' ἡμέραν ἐργασίας 38,5 (45,6) δραχμὰς εἰς καθένα ἐργάτην· πόσα θὰ πληρώσῃ εἰς μίαν ἡμέραν εἰς 87 (72) ἐργάτας; 3 272,5 (3 283,2).

4) Ἓν κεφάλαιον φέρει ἐτήσιον τόκον 385,56 (475,86) δραχμάς· πόσον τόκον θὰ φέρῃ εἰς 18 (21) ἔτη: 6 940,08 (9 993,06).

5) Τὸ γεωγραφικὸν μίλιον ἔχει 7 420,44 μ.· πόσα μέτρα ἔχουν 325 (634) γεωγρ. μίλια; 2 411 643 (4 704 558,96).

6) Συνθέσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω 1-3 καὶ λύσατε αὐτά.

β') Ὅταν καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε δεκαδικοί.

123. *Πρόβλημα.* «*Ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 32,7 δρχ., πόσον τιμῶνται 3,5 ὀκάδες;*»

Ἐπειδὴ 3 5 ὀκ. γράφεται καὶ 35δ ὀκᾶς, ἕπεται ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται τὰ 35 δ τῆς ὀκᾶς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον τιμᾶται τὸ 1δ τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα τὰ 35 δ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 32,7 δρχ., τὸ 1 δ τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 10 φορὰς μικρότερον τῆς ὀκᾶς θὰ τιμᾶται καὶ 10 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 32,7 δρχ. ἤτοι 3,27 δρχ. (διότι ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μίαν θέσιν πρὸς τἀριστερὰ ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10)· καὶ τὰ 35 δ. θὰ τιμῶνται 35 φορὰς περισσότερον τῶν 3,27 δρ· ἤτοι 3,27×35 δρ. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν 114,45 δρ. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν εὐκολώτερον ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 32,7 καὶ 3,5 ὡς ἀκεραίους, καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν καὶ οἱ δύο ἀριθμοί.

Ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 32,7 \\ 3,5 \\ \hline 16\ 35 \\ 98\ 1 \\ \hline 114,45 \end{array}$$

Ὥστε αἱ 3,5 ὀκ. τιμῶνται 114,45 δρ.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, *«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερά, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες»*.

124. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ 3 ὀκάδων καὶ 5 δεκάτων τῆς ὀκᾶς· δηλαδὴ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὀκάδων καὶ μέρους τῆς ὀκᾶς, καὶ διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς 32,7 καὶ 3,5.

Ἐν γένει, *«τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμειοδῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος, λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται, καὶ τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον»*.

Κατὰ τἀνωτέρω, ἂν 1 πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 12 δρ. καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ 6,4 πήχ., θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 12 δρ. ἐπὶ 6,4. Ἐπειδὴ ἔχομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 12×64, ἐκτελοῦμεν αὐτὸν κατὰ τὸν ἀνώτέρω κανόνα καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 76,8. Ἄρα οἱ 6,4 πήχ. τιμῶνται 76,8 δρ.

125. *Παρατηρήσεις.* 1) Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον 12×6,4=76,8 εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 6,4×12. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, ἡ ἰδιότης κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καὶ ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς παράγοντας, ἰσχύει καὶ ἂν ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

2) Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμῶν.

α')	β')	γ')
4,53	3,02	65 1
6,24	1,15	2,7
18 12	15 10	45 57
90 6	30 2	130 2
2718	302	17 57,7
28,26 72	3,47 30	

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 4,38· 26,14· 0,8762· 163,001· ἐπὶ α') 0,1· β') 0,001· γ') 0,0001· δ') 0,00001.

2) Πόσον εἶνε τὸ δέκατον, ἑκατοστόν, χιλιοστὸν τῆς δραχμῆς ; τῶν 3, 4, 8 δρ. ;

3) Πόσον εἶνε τὸ δέκατον, ἑκατοστόν, τῶν 400 δραμίων ;

4) Νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 8,67· 0,413· 119,121· 123,78· 387,123 ἐπὶ α') 8,3· β') 6,122· γ') 0,315.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 6,5 (18,52) ὀκ. σάπωνος πρὸς 23,34 (26,5) δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ; 164,71· (490,78).

2) Ἀτμάμαξα διανύει καθ' ὥραν 46,3 (54,62) χμ. · πόσα χιλιόμ. θὰ διανύσῃ εἰς 26,6 (18,4) ὥρας ; 1 217,69 (1 005,008).

3) Ἓν γεωγραφικὸν μίλιον ἔχει 7420,44 μ· πόσα μέτρα ἔχουν τὰ 3,25 (36,4) γεωγρ. μίλια ; 24 116,43 (270 104,016).

4) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον ἐτήσιον 385,56 (4 758,6) δρχ. πόσον θὰ δώσῃ εἰς 18,25 (21,75) ἔτη ; 7 036,47 (103 499,55).

5) Πόσον εἶνε τὰ 3 δέκατα, τὰ 7 ἑκατοστὰ τοῦ 100 ; τὰ 9 δέκατα τοῦ 400 ;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἔμπορος ἀγοράζει 84,5 (65,5) ὀκ. κριθῆς πρὸς 5,5 (4,4) δρ. τὴν ὀκᾶν· ἀντὶ πόσων δραχμῶν θὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 0,25 (0,24) δραχμὰς κατ' ὀκᾶν ; 485,3 (303,92).

2) Ἀγοράζει τις 75,12 (8 346) μ. ὑφάσματος πρὸς 12,75 (13,25) δρ. τὸ μέτρον, πωλεῖ δὲ αὐτὸ πρὸς 15,5 (14,75) δρ. τὸ μέτρον· πόσον εἶνε τὸ κέρδος ; 206,58 (12 519).

3) Πωλεῖ τις 25,12 (34,35) μ. ὑφάσματος ἀντὶ 865,12 (963,46) δρ. καὶ κερδίζει 3,25 (4,6) δρ. εἰς ἓν μέτρον· πόσον τὸ ἠγόρασεν ; 783,48 (805,45).

4) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα 285,16 (597,94) μ. πρὸς 5,21 (7,58) δρ. τὸ μέτρον. Τὰ μεταφορικὰ στοιχίζουν 0,08 (0,10) δρ. τὸ μέτρον· πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 0,46 (9,82) δρ. εἰς ἓν μέτρον; 1 639,67 (4 484,51).

5) Ἔμπορος ἠγόρασε 318,2 (122) πήχ. ἐμπορεύματος πρὸς 0,45 (0,26) δρ. τὸν πῆχυν· ἔπειτα 817 (131,5) πήχ. πρὸς 1,25 (0,26) δρ. τὸν πῆχυν καὶ 79,1 (0,375) π. πρὸς 6,7 (0,8) δρ. τὸν πῆχυν· πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ; 1 694,41 (161,59).

6) Ἐξ 712 (815) ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι ἐμοιράσθησαν ἓν ποσὸν χρημάτων, ἔλαβε καθεὶς 35,78 (46,34) δρχ., καὶ ἐπερίσσευσαν 413,52 (518,46) δρχ.· πόσα χρήματα ἐμοιράσθησαν; 25 888,88 (38 285,56).

5) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶνε 1,23 (2,34) καθεὶς δὲ τῶν ἄλλων τὰ 0,84 (0,45) τοῦ τοῦ προηγουμένου του; 3,131 088 (3,86685).

8) Ἓν ἐμπόρευμα ἔχει μικτὸν βάρος 128,46 (365,12) ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον εἶνε 3,46 (5,12) ὀκ.· πόσον ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν ἡ ὀκᾶ στοιχίζῃ 4,6 (5,8) δρχ., ἔδιδε δὲ κέρδος 0,9 (1) δρχ. καθεμία ὀκᾶ; 687,5 (2 448).

9) Ἓν δοχεῖον, περιέχον ἔλαιον, ζυγίζει 86,42 (93,51) ὀκ.· πόσον στοιχίζει τὸ ἔλαιον ἂν τὸ δοχεῖον ζυγίζῃ 7,18 (9,36) ὀκ. καὶ ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 45 (38) δρχ.; 3 565,8 (3 197,7).

Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

126. *Πρόβλημα.* «*Ἂν 7 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 162,4 δρχ., πόσον τιμᾶται ὁ εἷς πῆχυς;*»

Ἀφοῦ οἱ 7 π. τιμῶνται 162,4 δρ., ὁ 1 π. θὰ τιμᾶται 7 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 162,4 δρ. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς πήχεως πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 162,4 δραχ. διὰ 7. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 162,4 δρ. ἀποτελεῖται ἀπὸ 162 δρ. καὶ 4 δέκατα δραχμῆς. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὰς 162,4 δρχ. διὰ 7, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς 162 δρχ. διὰ τοῦ 7 καὶ τὰ 4 δέκατα τῆς δρ. διὰ 7, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα. Τὸ 162 δρχ. : 7=23 δρχ. καὶ μένει καὶ 1 δραχμή. Αὐτὴν πάλιν πρέπει νὰ τὴν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7· ἀλλὰ 1 δρχ. ἔχει 10 δέκατα τῆς δραχμῆς· καὶ 4 δέκατα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθῇ ἐξ ἀρχῆς=14 δέκατα τῆς δρ. Τὰ 14 δ. τῆς δραχμῆς διαιρούμενα διὰ 7, δίδουν πηλίκον 2 δ. τῆς δραχ. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 23 δρ. + 2 δέκατα τῆς δρ. Ἤτοι ὁ πῆχυς τιμᾶται 23,2 δρχ. Οὕτως ἔχομεν 162,4 : 7 = 23,2 ἡ δὲ διαίρεσις γίνεται ὡς κατωτέρω.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν αὐτὸν ὡς νὰ εἶνε ἀκέραιος, θέτομεν δὲ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον, ὅταν τελειώσῃ ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ πρόκειται νὰ καταβιβάσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων τοῦ διαιρετέου».***

Παραδείγματα διαιρέσεων.

α')

16'2',4'	7
22	23,2
1,4	
0	

β')

63',7'2'	12
3,7	5,31
12	
0	

γ')

61,6'3'2'	856
1712	0,072
000	

127. Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς (μὲ μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία), ἕπεται ὅτι ἡ διαίρεσις αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι' ἀκεραίου, ἡ ὁποία δὲν εἶνε ἀμέσως τελεία. Π. χ. διὰ τὴν διαίρεσιν 13 : 4 ἔχομεν.

13',0'0'	4
1,0	3,25
20	
0	

128. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως δεκαδικῶν γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων.

2) Ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε 10, 100, 1000, ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου μίαν, δύο, τρεῖς,.. θέσεις πρὸς τἀριστερά, διότι τότε ὁ δεκαδικὸς διαιρεῖται διὰ 10, 100, 1000,...

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαὶ τῶν ἑξῆς διαιρέσεων· α') 64,8 : 2· β') 423,876 : 6· γ') 0,0124125 : 125· δ') 14,464 : 8.

2) Ὁμοίως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων. α') 825 : 10· β') 624 : 100· γ') 3874 : 1000· δ') 621 : 1000· ε') 786,1 : 10· στ') 0,789 : 100.

'Εξαγόμενον κατὰ προσέγγισιν.

129. *Πρόβλημα.* «*'Εὰν 38 δραχμαὶ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου εἰς 7 ἀνθρώπους, πόσα θὰ λάβῃ καθεὶς;*»

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ διαιρέσωμεν τὸν 38 ἢ τὸν ἴσον αὐτοῦ 38,00... δρχ. διὰ τοῦ 7.

'Εὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην μέχρις ὅτου εὕρωμεν τρία δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, προκύπτει πηλίκον 5,428 δρχ. καὶ ὑπόλοιπον 4 χιλιοστά. Ἂν περιορισθῶμεν εἰς τὸ πηλίκον αὐτό, βλέπομεν ὅτι καθεὶς ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δρ. 42 λ. καὶ 8 δέκατα τοῦ λεπτοῦ.

'Αλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα τῆς μετρήσεως τῶν νομισμάτων δὲν ὑπάρχουν νομίσματα μικρότερα τοῦ λεπτοῦ, περιοριζόμεθα μόνον εἰς τὰ δύο δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ φροντίζομεν, ὥστε τὸ σφάλμα τὸ ὁποῖον προέρχεται ἕνεκα τούτου, νὰ εἶνε ὅσω τὸ δυνατὸν μικρότερον.

'Εὰν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5,428 δρχ. λάβωμεν τὸ 5,42 δραχ., λαμβάνωμεν ὀλιγώτερον, καὶ τὸ σφάλμα εἶνε 8 χιλιοστά.

'Εὰν ἀντὶ τοῦ 5,428 δρχ. λάβωμεν 5,43 δρχ., λαμβάνομεν περισσότερον καὶ τὸ σφάλμα εἶνε 2 χιλιοστά. 'Εκ τούτων βλέπομεν ὅτι, τὸ δεύτερον εἶνε ἀκριβέστερον τοῦ πρώτου. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ἐὰν ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 5,426· 5,427· 5,428· 5,429. Καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εἶνε ἀκριβέστερον, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν νὰ λάβωμεν τὸ 5,43 δρχ. καὶ ὄχι τὸν 5,42 δρχ. Διότι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως 4· 3· 2· 1· χιλιοστὰ περισσότερα, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν 6· 7· 8· 9· χιλιοστὰ ὀλιγώτερα.

'Εὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,425 δρχ., θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ 5,42 δρχ. ἢ 5,43 δρχ. πρὸς εὐκολίαν. Διότι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ σφάλμα εἶνε 5 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον. 'Εν τούτοις θὰ λάβωμεν πάντοτε τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν 5,43 δρχ., ἕνεκα τοῦ ἑξῆς λόγου. 'Εὰν ὑπῆρχον σημαντικὰ ψηφία μετὰ τὸ τρίτον δεκαδικόν, π. χ. ἂν ὁ ἀριθμὸς ἦτο 5,4251 καὶ ἐλαμβάνομεν τὸ 5,42, θὰ ἐγίνετο λάθος 51 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον, ἐνῷ, ἐὰν λάβωμεν τὸ 5,43 γίνεται λάθος μόνον κατὰ 49 χιλιοστὰ ἐπὶ πλέον.

'Εν γένει, ἐὰν θέλωμεν ἀντὶ τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ νὰ λάβωμεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία τούτου, περιοριζόμενοι εἰς τὰ δεκαδικὰ ψηφία μιᾶς ὡρισμένης τάξεως, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σφάλμα τὸ ὁποῖον γίνεται ἕνεκα τούτου νὰ εἶνε μικρότερον, αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, εἰς τὴν τάξιν τοῦ ὁποίου περιοριζόμεθα, ἐὰν τὸ πρῶτον τῶν παραλειπομένων ψηφίων εἶνε ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ 5. Τοὐναντίον λαμβάνομεν τοῦτο ἀμετάβλητον, ἐὰν τὸ πρῶτον τῶν παραλειπομένων εἶνε μικρότερον τοῦ 5. Οὕτω π. χ. ἀντὶ τοῦ 8,35671 θὰ λάβωμεν τὸν 8,36. Ἀντὶ τοῦ 3,0452 τὸν 3,05. Ἀντὶ τοῦ 2,1374 τὸν 2,137 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐπειδὴ τὰ τοιαῦτα ἐξαγόμενα δὲν εἶνε τελείως ἀκριβῆ, διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἶνε *κατὰ προσέγγισιν* μιᾶς μονάδος τῆς τάξεως ταύτης. Οὕτω π. χ. ἀντὶ τοῦ 8,35671 ἔχομεν τὸν 8,36 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (*καθ' ὑπεροχήν*)· ἐπίσης ἀντὶ τοῦ 2,1374 τὸν 2,137 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ (*κατ' ἔλλειψιν*).

130. Καθ' ὅμοιον τρόπον συντομεύομεν τὸ δεκαδικὸν πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ἐὰν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ,... ὅταν περιοριζώμεθα εἰς δέκατα, ἑκατοστά,.. Οὕτω π. χ. ἂν θέλωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 139,491 διὰ τοῦ 11 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, εὑρίσκομεν 139,491 : 11= 12, 681 κατ' ἀρχάς, καὶ ἀκολούθως λαμβάνομεν 12,68 μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (κατ' ἔλλειψιν), τὸ δὲ σφάλμα εἶνε 1 χιλιοστὸν καὶ θὰ λέγωμεν, ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον κατ' ἔλλειψιν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ· α') 27 : 21· β') 124 : 7. γ') 385,92 : 9.

2) Ὁμοίως τὰ πηλίκα τῶν ἑπομένων διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, καὶ χιλιοστοῦ· α') 423,87 : 6. β') 0,012495: 123· γ') 7481 : 1001· δ') 8921 : 107· ε) 786,1 : 13.

Διαίρεσις διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

131. *Πρόβλημα*. «*Ἂν μία ὀκᾶ σῦκα τιμῶνται 6,5 δρ., πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 22,75 δρ.;*»

Ἀφοῦ μὲ 6,5 δρχ. ἀγοράζομεν μίαν ὀκᾶν, μὲ 22,75 δρχ. ἀγοράζομεν τόσας ὀκάδας, ὅσον χωρεῖ τὸ 6,5 δρχ. εἰς τὸ 22,75 δρχ. Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 22,75 διὰ τοῦ 6,5. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν αὐτήν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται. Πολλαπλασιάζομεν ἐδῶ αὐτοὺς ἐπὶ 10 ὅτε ὁ μὲν διαιρετέος γίνεται 227,5 ὁ δὲ διαιρέτης 65. Οὕτω ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 227,5 διὰ τοῦ ἀκεραίου 65· ἤτοι ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν πηλίκον 3,5. Ἑπομένως μὲ 22,75 δρχ. θὰ ἀγοράσωμεν 3,5 ὀκ. σῦκα.

Ὥστε ἀντὶ τῆς διαιρέσεως 22,75 : 6,5 ἔχομεν τὴν 227,5:65

$$\begin{array}{r|l} 227',5' & 65 \\ \cline{2-2} 3\,2\,5 & 3,5 \\ 0 & \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι, *«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, 100, ..ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνῃ ἀκέραιος, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου»*.

132. *Παρατηρήσεις.* Ἐπειδὴ ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, πρέπει τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὑπόλοιπον νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (10, ἢ 100, ἢ 1000,...) μὲ τὸν ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη ὁ διαιρέτης διὰ νὰ γίνῃ ἀκέραιος, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν τὸ ἀκριβὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ δεκαδικοῦ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των α') 23,37 : 1,23· β') 812,07 : 25,78· γ') 1,28 228 : 123,2· δ') 10,8 102 : 12,14.

2) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 23,6 (0,0867) διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 19,588 (0,0 299 115); 0,83 (0,345).

3) Αἱ 3,456 ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 86,4 δραχ.· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ καὶ πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 1 δρχ; 25. (0,04).

4) Ἁμαξοστοιχία διανύει 91,685 (77,52) μ. εἰς 5,5λ. (4,75λ.)· πόσον διανύει εἰς 1λ. καὶ πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ διατρέξῃ 1 μ; 16,76 μ. 0,0599λ. (16,32· 0,0 612...)

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις 7,62 (3,25) μ. ὑφάσματος ἀντὶ 419,1 (142,32) δρχ.· ἔπειτα 6,95 (4,68) μ. ἄλλης ποιότητος ἀντὶ 333,392 (210,6) δρχ., καὶ τέλος 7,32 (6,42) μ. ἀντὶ 622,2 (353,12) δρχ.· α΄) πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ μέτρον κατὰ μέσον ὅρον; β΄) πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

62,80· 0,158.... (49,2· 0,02032...)

2) Ἀγοράζει τις 14,8 (12,2) ὀκ. πράγματος πρὸς 128,5 (148,5) δρχ. τὴν ὀκᾶν· 16,2 (13,4) ὀκ. πρὸς 31,5 (150,5) δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 19,4 (18,5) ὀκ. πρὸς 30,5 (146,5) δρχ. τὴν ὀκᾶν· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον καὶ πόσον ἀγοράζει μὲ 1 δραχμήν; 30,23....· 0,0331.... (148,28...· 0.0076...)

3) Ἔμπορος ἀγοράζει 4,24 (5,26) στατ. ὄξους πρὸς 225 (285) δρχ. τὸν στατῆρα, πληρώνει δὲ διὰ τὴν φόρτωσίν του 35,8 (27,9) δρχ., καὶ ἀναμιγνύει αὐτὸ μὲ 0,34 (0,47) στατ. ὕδατος· πόσον θὰ πωλῇ τὸν στατῆρα, ἐὰν ἡ ἀνάμιξίς του στοιχίσῃ 11,5 (12,4) δρχ., καὶ κερδίσῃ (ἢ ζημιωθῇ) 121, 5 (31, 7) δρ. ἐν ὅλῳ;

272, 92... (263,12).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Σχηματισμὸς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

133. *Πρόβλημα.* «*Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἓν γλύκισμα εἰς 4 παιδία· πόσον μέρος τοῦ γλυκίσματος πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς καθέν;*»

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν τὸ γλύκισμα εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ νὰ δώσωμεν εἰς καθὲν παιδίον ἀνὰ ἓν ἐκ τῶν μερῶν. Τὸ ἓν τῶν τεσσάρων ἴσων μερῶν τοῦ γλυκίσματος λέγεται *ἓν τέταρτον* τοῦ γλυκίσματος. Ὥστε ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ ἓν τέταρτον τοῦ γλυκίσματος.

Ἐν γένει, ἐὰν διαιρέσωμεν, τὴν μονάδα, π. χ. ἓν μῆλον, μίαν γραμμὴν κλπ. εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἔστω εἰς 6 ἴσα μέρη, καὶ λάβωμεν ἓν ἐξ αὐτῶν, θὰ καλοῦμεν τοῦτο *ἓν ἕκτον* τῆς μονάδος. Ἐὰν λάβωμεν ὡρισμένον πλῆθος ἐξ αὐτῶν, ἔστω 5 τοιαῦτα, θὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν *κλασματικὸν ἀριθμὸν* ἢ *κλάσμα*. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμόν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα, καὶ πόσα τοιαῦτα μέρη θὰ λάβωμεν· δηλαδὴ ἔχομεν ἀνάγκην δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη χωρίζομεν τὴν μονάδα λέγεται *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματος, ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσα ἴσα μέρη λαμβάνομεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ κλάσμα, λέγεται *ἀριθμητὴς* τοῦ κλάσματος. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς λέγονται μὲ ἓν ὄνομα *ὅροι τοῦ κλάσματος*.

Ἐὰν ἡ μονάς, π. χ. μία εὐθεῖα γραμμή, διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν λέγεται *ἓν δεύτερον* τῆς γραμμῆς, ἂν δὲ διαιρεθῇ εἰς τρία, τέσσαρα,... ἴσα μέρη, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν λέγεται *ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον*,... τῆς γραμμῆς. Ἐὰν λάβωμεν τρία ἐκ τῶν ἴσων μερῶν τῆς μονάδος, τὰ ὁποῖα ἔστω ὅτι εἶνε πέντε, τὸ κλάσμα λέγεται *τρία πέμπτα* τῆς γραμμῆς, καὶ γράφεται οὕτω, $\frac{3}{5}$ τῆς γραμμῆς, ἢ συντόμως $\frac{3}{5}$ γρ., γράφομεν δηλαδὴ τὸν παρονομαστὴν ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ μικρᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *γραμμὴν τοῦ κλάσματος*. Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφομεν καὶ πᾶν ἄλλο κλάσμα. Τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὴν τὴν μονάδα λέγονται καὶ *κλασματικαὶ μονάδες*.

Ὅθεν, «*κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἓν τῶν ἴσων μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος*». Οὕτω κλασματικαὶ μονάδες εἶνε αἱ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \ldots\ldots$ καὶ ὀνομάζονται *ἓν δεύτερον, ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον, ἓν δέκατον, ἓν ἑνδέκατον*

«*Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν τὴν μονάδα διαιρέσωμεν εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν λάβωμεν ἓν πλῆθος ὡρισμένον*».

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ λέγωμεν ὅτι,

«*κλάσμα λέγεται τὸ σύνολον κλασματικῶν μονάδων*».

134. Πᾶς κλασματικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ $\frac{5}{6}$ ὀκ. δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ καὶ νὰ γραφῇ ὡς 5 μὲ τὴν ἐπωνυμίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ, δηλαδὴ ὡς *5 ἕκτα* τῆς ὀκᾶς. Ὁμοίως ὁ $\frac{7}{10}$ δρ. δύναται νὰ γραφῇ καὶ ἀπαγγελθῇ ὡς *7 δέκατα* δραχμῆς, καὶ οὕτω καθεξῆς τὰ $\frac{3}{4}$ μήλου ὡς *3 τέταρτα μήλου*, τὰ $\frac{5}{6}$ ὀρθογωνίου ὡς *5 ἕκτα ὀρθογωνίου*. Αὐτὸς π.χ. δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ διὰ τοῦ κατωτέρω σχήματος.

$\frac{5}{6}$					
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

135. *Μικτὸς ἀριθμός*. Ἐὰν ἔχωμεν 4 ὀκ. καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, γράφομεν αὐτὸν $4 + \frac{3}{5}$ ὀκ. ἢ συντομώτερον $4\frac{3}{5}$ ὀκ. ἀπαγγέλλεται *τέσσαρα καὶ τρία πέμπτα* ὀκ. καὶ λέγεται μικτὸς ἀριθμός, ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 4 καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$. Ἐν γένει, «*μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀποτελούμενος ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ κλάσμα*».

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ $3\frac{1}{2}$ δρ., $6\frac{1}{5}$, $7\frac{4}{9}$ εἶνε μικτοί.

136. *Παρατηρήσεις*. Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶνε καὶ δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλασματικός, ἐνίοτε δὲ καὶ ὡς μικτὸς ἀριθμός, Π. χ. ὁ 0,3 δρχ. εἶνε ἴσος μὲ τὸν $\frac{3}{10}$ δραχ. Ὁ $0{,}73 = \frac{73}{100}$, ὁ 1,7 εἶνε ἴσος μὲ 17 δέκατα $= \frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$, ὁ 4,33 $= \frac{433}{100}$ ἢ μὲ $4\frac{33}{100}$.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

Ὁμὰς πρώτη. 1) Τί μέρος τῆς δραχμῆς; εἶνε τὸ πεντάλεπτον, δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον;

2) Ἐξηγήσατε τὴν σημασίαν τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν καὶ ἀπεικονίσατε αὐτὴν διὰ σχήματος ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἢ ἐπὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὡς ἀνωτέρω· α΄) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $3\frac{1}{2}$.

β΄) $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $2\frac{1}{3}$. γ΄) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $2\frac{3}{4}$. δ΄) $\frac{6}{6}$, $\frac{2}{3}$,

3) Τρέψατε α΄) τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{7}{13}$, τοῦ ἔτους εἰς μῆνας.

β΄) τὰ $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{10}$, $4\frac{2}{15}$ τοῦ μηνὸς εἰς ἡμέρας (ἂν ὁ μὴν λογαριάζεται 30 ἡμ.)

γ΄) τὰ $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $2\frac{5}{6}$, $5\frac{11}{12}$ τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας.

δ΄) τὰ $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Τρέψατε τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $2\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς εἰς λεπτά.

2) Ποῖον μέρος τῆς δραχμῆς εἶνε τὰ 50· 80· 5· 10 λεπτά;

3) Τρέψατε εἰς κλάσματα ἢ εἰς μικτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς α΄) 11, 3· ὀκ. β΄) 17, 7 μ. γ΄) 29,04 μ. δ΄) 0,78 μ. ε΄) 1,2345.

Τροπὴ ἀκεραίου καὶ μικτοῦ εἰς κλάσμα.

137. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἓν μῆλον π. χ. εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν καὶ τὰ τέσσαρα, τότε τὰ *τέσσαρα τέταρτα μήλου ἀποτελοῦν τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1* μῆλον· ἤτοι 1 μῆλον $= \frac{4}{4}$ μήλου.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	1		

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν σκεφθῶμεν, εὑρίσκομεν ὅτι 1 πῆχυς $=$ μὲ $\frac{8}{8}$ πήχ., 1 ὀκᾶ $= \frac{2}{2}$ ὀκᾶς καὶ ἐν γένει ἡ $1 = \frac{3}{3}$, $1 = \frac{6}{6}$ κ.λ.π.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 2 δρχ. εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 5, δηλ. εἰς πέμπτα, σκεπτόμεθα ὅτι, ἀφοῦ ἡ μία δραχμὴ ἔχει 5 εἰκοσάλεπτα ἢ πέμπτα δραχμῆς, αἱ 2 δραχμαὶ ἔχουν 10 εἰκοσάλεπτα ἢ πέμπτα τῆς δραχμῆς. Ὥστε θὰ ἔχωμεν 2 δρ. $= \frac{10}{5}$ δραχμῆς.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1					1				

Ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, π. χ. τὸν 4 εἰς ἕκτα, λέγομεν. Ἀφοῦ ἡ μία ἀκεραία μονὰς ἔχει 6 ἕκτα, αἱ δύο ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 12 ἕκτα, καὶ αἱ 4 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν $6 \times 4 = 24$ ἕκτα· ἤτοι εἶνε $4 = \frac{4 \times 6}{6} = \frac{24}{6}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, «***διὰ νὰ τρέψωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν δοθέντα***».

138. Ἵνα μικτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $2\frac{1}{4}$ ὀκ., τρέψωμεν εἰς κλασματικόν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 4 τέταρτα, αἱ δύο ὀκάδες ἔχουν 8 τέταρτα, καὶ ἓν τέταρτον τὸ ὁποῖον ἔχει δοθῆ, γίνεται 9 τέταρτα· ἤτοι ἔχομεν $2\frac{1}{4}$ ὀκάδες $= \frac{9}{4}$ ὀκᾶς.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1				1				

Καθ' ὅμοιον τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἔχομεν $3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$, $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἤτοι, «***διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ*** *τὸν ἀκέραιον, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ὅ,τι εὕρωμεν γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν γράφομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος».*

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης)

1) Νὰ τραπῇ ἡ μονὰς εἰς δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, δέκατα, δωδέκατα.

2) Τρέψατε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 2· 3· 4· 5· 8· 10· 12 εἰς δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, ἔννατα, εἰκοστά.

3) Νὰ τραποῦν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα.

α′) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$. β′) $1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$.

γ′) $1\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{2}$, $6\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$. δ′) $83\frac{2}{3}$, $60\frac{4}{9}$, $100\frac{5}{9}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.

139. Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\frac{8}{2}$ δραχμῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι 2 δεύτερα δραχ. ἀποτελοῦν μίαν δραχμήν. Ἑπομένως τὰ 4 δεύτερα δρ. ἀποτελοῦν 2 δρ. καὶ τὰ $\frac{8}{2}$ δραχ. ἀποτελοῦν 4 δραχ. Ἤτοι ἔχομεν $\frac{8}{2}$ δραχ. $= 4$ δρ.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1		1		1		1	

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{15}{4}$ ὀκ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. ἀποτελοῦν μίαν ὀκᾶν· ἑπομένως τὰ $\frac{15}{4}$ ἀποτελοῦν τόσας ὀκάδας, ὅσον χωρεῖ τὸ 4 τέταρτα εἰς τὰ 15 τέταρτα. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $15 : 4 = 3$ καὶ μένουν 3 τέταρτα, ἕπεται ὅτι $\frac{15}{4}$ ὀκ. $= 3\frac{3}{4}$ ὀκ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{24}{5} = 4$ ἀκέραιαι μονάδες καὶ 4 πέμπτα· ἤτοι $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι *«ἓν κλάσμα περιέχει μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τούτου εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ»*. Ἀκόμη δὲ ὅτι,

«διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τούτου, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως γράφομεν ὡς ἀκέραιον, τὸ ὑπόλοιπον ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος»

140. Δοθὲν κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.

141. Κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ λέγεται *γνήσιον*, ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, λέγεται *μὴ γνήσιον* καὶ τότε τρέπεται εἰς ἀκέραιον ἢ εἰς μικτὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

1) Ἐξάγετε τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν κλασμάτων $\frac{9}{7}, \frac{11}{6}, \frac{17}{5}, \frac{28}{7}, \frac{29}{9}, \frac{47}{9}, \frac{108}{17}, \frac{235}{7}, \frac{456}{17}, \frac{240}{17}, \frac{28}{1}, \frac{7}{1}$.

2) Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἀκεραίους ἢ μικτούς.

α΄) $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{2}{2}, \frac{31}{2}$. β΄) $\frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{35}{3}$.

γ΄) $\frac{4}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{24}{4}, \frac{31}{4}$. δ΄) $\frac{13}{12}, \frac{17}{12}, \frac{24}{12}, \frac{23}{12}, \frac{48}{12}, \frac{18}{12}, \frac{60}{12}$.

3) Πότε κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος προκύπτει μόνον ἀκέραιος καὶ πότε μικτός;

4) Μὲ τί εἶνε ἴσα τὰ κλάσματα, τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα;

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

142. *Πρόβλημα.* ***«Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 2 δραχμὰς εἰς 5 πτωχούς· πόσον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς καθένα;»***

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δραχμὴ ἔχει πέντε εἰκοσάλεπτα. Ἂν λοιπὸν μοιράσωμεν 1 δρ. εἰς 5 πτωχούς, θὰ δώσωμεν 1 εἰκοσάλεπτον εἰς καθένα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰκοσάλεπτον εἶνε τὸ πέμπτον τῆς δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ τὴν μίαν δραχμὴν τὸ $\frac{1}{5}$ της. Ἑπομένως ἀπὸ τὰς δύο δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Ἀλλ' ἀφοῦ ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 2 δρ. εἰς 5 ἴσα μέρη, ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας λύεται τὸ πρόβλημα εἶνε ἡ διαίρεσις 2 δρ :5, τὸ δὲ πηλίκον, ὡς εἴδομεν, εἶνε τὸ $\frac{2}{5}$ δρ. Ἤτοι τὸ πηλίκον εἶνε κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον 2 καὶ παρανομαστὴν τὸν διαιρέτην 5.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν 3 γλυκίσματα εἰς 7 παιδία, εὑρίσκομεν 3 γλ. $:7 = \frac{3}{7}$ γλ. Διότι ἂν κόψωμεν τὸ ἓν γλύκισμα εἰς 7 ἴσα μέρη, ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ ἓν μέρος ἐκ τούτων, δηλαδὴ $\frac{1}{7}$ τοῦ γλ., καὶ ἀπὸ τὰ 3 γλ. θὰ λάβῃ $\frac{3}{7}$ γλ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, *«τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶνε κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην»*.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\frac{5}{8}$ πήχ. Ἐπειδὴ ἂν διαιρέσωμεν τὸ 5 πήχεις διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν $\frac{5}{8}$ πήχ., ἕπεται ὅτι τὸ $\frac{5}{8}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 8.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἔχωμεν κλάσμα, π. χ. τὸ $\frac{3}{4}$, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 : 4. Διότι τὸ 3 : 4 ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{4}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«πᾶν κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ».

143. *Παρατηρήσεις.* 1) Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ τέλειον πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων, θέτοντες τὸν διαιρετέον ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην παρονομαστήν. Π. χ. $3:2 = \frac{3}{2}$, $1 : 5 = \frac{1}{5}$ κ. λ. π.

2) ἐπειδὴ κατὰ τ' ἀνωτέρω $\frac{7}{1} = 7$, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{3}{1} = 3$, ἕπεται ὅτι, *«πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα»*.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης)

1) Ἂν μοιρασθοῦν 7 ὀκ. εἰς 8 ἀνθρώπους πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

2) Ἂν μὲ 5 πήχ. χασὲ κατασκευάσωμεν 15 μανδήλια, πόσον μέρος τοῦ πήχεως χρειαζόμεθα δι' ἓν μανδήλιον;

3) Εὕρετε τὰ τέλεια πηλίκα τῶν διαιρέσεων 5 ὀκ. : 6· 7 ὀκ. : 8 4μ. : 9· 25 δρ. : 4.

4) Ὁμοίως τῶν 1 : 7· 15 : 18· 20 : 3· 18 : 5· 6 : 13.
1 : 3· 9 : 12· 8 : 3· 8 : 23· 14 : 28· 47 : 5· 69 : 6.

5) Τίνος τελείας διαιρέσεως εἶνε πηλίκον τὸ 5; 7; 8; 9;

6) Τίνος διαιρέσεως εἶνε πηλίκον τὸ $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{5}{38}$, $\frac{1}{12}$;

7) Γράψατε ὡς κλασματικοὺς τοὺς ἀκεραίους 5· 7· 12· 26· 35.

144. Ἔστω ὅτι ἔχει τις $\frac{1}{8}$ πήχ. καὶ ἄλλος $\frac{6}{8}$ πήχ. Ἐπειδὴ ὁ πῆχυς ἔχει 8 ρούπια, τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. εἶνε ἓν ρούπιον· τὰ $\frac{3}{8}$ πήχ. εἶνε 3 ρούπια, καὶ τὰ $\frac{6}{8}$ πήχ. εἶνε 6 ρούπια. Προφανῶς ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἔχει 6 ρ. ἔχει διπλάσια ἀπὸ τὸν ἔχοντα 3 ρ. Δηλαδὴ τὸ μὲν κλάσμα $\frac{6}{8}$ εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$ π., τὸ δὲ $\frac{3}{8}$ π. εἶνε δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{6}{8}$ π.

Κατ' ἀναλογίαν σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὰ $\frac{4}{5}$ δρ. εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{2}{5}$ δρ. καὶ γενικῶς τὸ $\frac{8}{10}$ π. χ. εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{4}{10}$, ἐνῷ τὸ $\frac{4}{10}$ εἶνε δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{10}$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ $\frac{6}{8}$ ἔχει ἀριθμητὴν διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$. Ὁμοίως τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ τὸ $\frac{4}{5}$ ὡς πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$, καὶ διὰ τὸ $\frac{8}{10}$ ὡς πρὸς τὸ $\frac{4}{10}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«*ἂν μὲν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμὸν τὸ κλάσμα πολαπλασιάζεται, ἂν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

145. Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\frac{3}{4}$ δρ. Ἐπειδὴ τὸ τέταρτον τῆς δραχμῆς εἶνε 25 λεπτά, τὰ $\frac{3}{4}$ δρ. εἶνε 75 λεπτά. Ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου διὰ 2, θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{2}$ δρ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $\frac{1}{2}$ δρ. εἶνε 50 λεπτά, τὰ $\frac{3}{2}$ δρ. θὰ εἶνε 150 λ. Ὥστε $\frac{3}{4}$ δρ. $=$ 75 λ., καὶ $\frac{3}{2}$ δρχ. $=$ 150 λ. Ἀλλὰ τὰ 150 λ. εἶνε διπλάσια τῶν 75 λ. Ἄρα καὶ τὸ $\frac{3}{2}$ δρ. εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{4}$ δρ., τὸ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶνε δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{3}{2}$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«ἂν μὲν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμὸν τὸ κλάσμα διαιρεῖται, ἂν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

146. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 4 : 8. Ἀλλ' ἐπειδὴ καθὼς γνωρίζομεν, ἂν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἕπεται ὅτι τὸ $4\times2 : 8\times2$ δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον μὲ τὴν διαίρεσιν 4 : 8. Ἀλλὰ τὸ $4\times2 : 8\times2$ ἰσοῦται μὲ $\frac{4\times2}{8\times2}$ καὶ τὸ 4 : 8 ἰσοῦται μὲ $\frac{4}{8}$. Ἄρα ἔχομεν $\frac{4}{8}=\frac{4\times2}{8\times2}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ $\frac{4}{8}=$ μὲ τὸ $\frac{4:2}{8:2}=\frac{2}{4}$. Ἐπομένως,

«ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται».

147. *Παρατήρησις.* Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμόν του (δηλαδὴ ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν) μὲ ὅρους μεγαλυτέρους ἢ μικροτέρους. Π. χ. ἔχομεν $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$ κ. λ. π.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

Ὁμὰς πρώτη. 1) Δύο ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἓν ποσὸν χρημάτων καὶ ἔλαβεν ἕκαστος $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ, πόσα ἕβδομα ἔλαβον καὶ οἱ δύο;

2) Δύο ἀδελφοὶ θέλουν να μοιράσουν τὰ $\frac{4}{7}$ μιᾶς περιουσίας· πόσα ἕβδομα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

3) Τρεῖς ἀδελφοὶ δικαιοῦνται νὰ μοιράσουν τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς περιουσίας· τί μέρος αὐτῆς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθείς;

4) Μία γυνὴ ἔδωκε εἰς καθεμίαν ἐκ τῶν τριῶν θυγατέρων αὐτῆς τὰ $\frac{2}{9}$ ἑνὸς γλυκίσματος· τί μέρος ἔδωκε καὶ εἰς τὰς τρεῖς; Ἂν ἔδιδε καὶ εἰς τὰς τρεῖς τὰ $\frac{2}{9}$, τί μέρος θὰ ἔδιδεν εἰς καθεμίαν;

5) Νὰ γίνουν τὰ κλάσματα $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{18}$ δύο φορὰς μεγαλύτερα κατὰ δύο τρόπους.

6) Τὰ κλάσματα $\frac{9}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{3}{25}$ νὰ γίνουν τρεῖς φορὰς μικρότερα κατὰ δύο τρόπους.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα, δηλαδὴ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀξίαν· α΄) τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς ἄλλα μὲ παρονομαστὰς τοὺς 4·6·8·10·12·16·18·20· β΄) τὸ $\frac{1}{3}$ εἰς ἄλλα μὲ παρονομαστὰς 6·9·12·15·24·36·90·150. γ΄) Τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς ἄλλα μὲ παρονομαστὰς 12·16·24·40·60·20·64·36· δ΄) τὸ $\frac{2}{3}$ εἰς ἄλλα μὲ παρονομαστὰς 6·9·12. ε΄) τὸ $1\frac{1}{3}$ εἰς κλάσματα μὲ παρονομαστὰς 6·12·15·9·15.

2) Νὰ τραποῦν τὰ κλάσματα α΄) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμά των μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 4·8·12·20· β΄) τὰ $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{6}$ εἰς ἄλλα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν 6·12·30. γ΄) τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ εἰς ἄλλα μὲ παρονομαστὴν 6· 12· 18· 24· 36· 72.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

148. Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται *ὁμώνυμα* μέν, ἂν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, *ἑτερώνυμα* δέ, ἂν ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς. Π. χ. τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$ λέγονται ὁμώνυμα ἐνῷ τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$ λέγονται ἑτερώνυμα.

Ἐὰν ἔχωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, π.χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα τούτων καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δηλαδὴ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα τούτων καὶ ὁμώνυμα. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ τὰ ζητούμενα κλάσματα θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, θὰ προκύπτῃ οὗτος ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ· ἤτοι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν νέων κλασμάτων θά εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων. Ἂν θέλωμεν ὅμως ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶνε τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 3· 5· 6· 4. Τοῦτο εἶνε τὸ 60. Τὸ 60 διαιροῦμεν δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα τοὺς ἀριθμοὺς 20· 12· 10· 15. Τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 20, τοὺς τοῦ δευτέρου ἐπὶ 12, τοῦ τρίτου ἐπὶ 10 καὶ τοῦ τετάρτου ἐπὶ 15, εὑρίσκομεν δὲ τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα κλάσματα, ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

$$\frac{40}{60},\quad \frac{48}{60},\quad \frac{50}{60},\quad \frac{15}{60}$$

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, τῶν ὁποίων ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶνε τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π αὐτῶν, ἀκολούθως διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων, καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος».

Συνήθως γράφομεν δεξιὰ τῶν δοθέντων κλασμάτων τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν, τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων τούτων διὰ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν ὑπεράνω τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος, τὰ δὲ νέα κλάσματα ἀντιστοίχως ὑποκάτω ἑκάστου τῶν δοθέντων, ὡς κάτωθι.

$$\overset{20}{\smile}\quad \overset{12}{\smile}\quad \overset{10}{\smile}\quad \overset{15}{\smile}$$

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{1}{4}\qquad \text{ἐ. κ. π. } 60$$

$$\frac{40}{60},\quad \frac{48}{60},\quad \frac{50}{60},\quad \frac{15}{60}$$

149. *Παρατήρησις.* Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τῶν ζητουμένων κλασμάτων κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, προτιμῶμεν ὅμως συνεθέστατα τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, ὡς μικρότερον τῶν ἄλλων.

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα. α΄) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$. β΄) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, γ΄) $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{27}$. δ΄) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$. ε΄) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. στ΄) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{20}$. ζ΄) $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$. η΄) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{100}$. θ΄) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, ι΄) $\frac{2}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{17}{45}$. θ΄) $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{9}$.

Πῶς συγκρίνομεν κλάσματα.

150. *Πρόβλημα. «Ἐργάζεταί τις $\frac{5}{7}$ τῆς ἑβδομάδος καὶ ἄλλος $\frac{3}{7}$ τῆς ἑβδομάδος. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἐργάζεται περισσότερον ;»*

Τὰ δύο κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν, ἤτοι τὸ $\frac{5}{7}$. Διότι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ $\frac{5}{7}$, ἐλάβομεν ἐκ τῶν 7 ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ μονάς, τὰ 5, ἐνῷ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ $\frac{3}{7}$, ἐλάβομεν τὰ 3. Ἑπομένως ὁ πρῶτος εἰργάσθη περισσότερον.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ πολλῶν ὁμωνύμων κλασμάτων, π. χ. ἐκ τῶν $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{9}$, μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{7}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, μικρότερον δὲ τὸ $\frac{1}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον ἀριθμητήν. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρανομαστὴν μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν, μικρότερον δὲ τὸ ἔχον τὸν μικρότερον ἀριθμητήν».

151. Ἐὰν ἔχωμεν κλάσματα, ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, π. χ. τὰ $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{4}{10}$, μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{4}{6}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μικρότερον παρονομαστήν. Διότι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ $\frac{4}{6}$, ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἐλάβομεν τὰ 4. Ἐνῷ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ $\frac{4}{10}$, ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 10 ἴσα μέρη, ἐπομένως εἰς μικρότερα μέρη ἢ πρίν, καὶ ἐλάβομεν τὰ 4. Τὴν δευτέραν φορὰν ἐλάβομεν λοιπὸν τὸ αὐτὸ μὲν πλῆθος μερῶν, ἀλλὰ μικρότερα μέρη ἢ τὴν πρώτην (ὡς φαίνεται καὶ εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα)· ἄρα τὸ $\frac{4}{6}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{4}{10}$.

$$\frac{4}{6}$$

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\frac{4}{10}$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$ μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{2}{3}$, ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν, μικρότερον δὲ τὸ $\frac{2}{11}$, ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν.

Ὅθεν, ***«ὅταν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν, καὶ μικρότερον τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν»***.

152. Ἐὰν τὰ δοθέντα πρὸς σύγκρισιν κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἢ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν, ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον, συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω.

Ἁπλοποίησις κλάσματος

153. *Ἁπλοποίησις* ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὸ μὲ ὅρους μικροτέρους.

Π.χ. ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{4}$ εὑρίσκομεν τὸ $\frac{1}{2}$, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ 2, καὶ εἶνε $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἁπλοποιοῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα, π. χ. τὸ $\frac{594}{1386}$. Ἐπειδὴ διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις ἕνα κοινὸν διαιρέτην τῶν ὅρων τούτου· π. χ. τὸν 2· ἀκολούθως διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τοὺς ὅρους του καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἴσον αὐτοῦ κλάσμα $\frac{297}{693}$. Τὴν ἐργασίαν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν πάλιν εἰς τὸ προκύπτον κλάσμα, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι ὅτου εὕρωμεν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην. Οὕτω ἔχομεν,

$$\frac{594}{1386}\overset{2}{\frown}=\frac{297}{693}\overset{9}{\frown}=\frac{33}{77}\overset{11}{\frown}=\frac{3}{7},$$

Οἱ ἀριθμοὶ 2, 9, 11 φανερώνουν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ὅρων τοῦ πρὸς τ' ἀριστερὰ αὐτῶν κλάσματος, διὰ τῶν ὁποίων διαιροῦμεν αὐτούς.

Ταχύτερον εὑρίσκομεν ἀπὸ δοθὲν κλάσμα τὸ ἴσον αὐτοῦ ἁπλούστερον, καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν διαιρέτην, ἂν ἐν πρώτοις εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος, καὶ ἀκολούθως διαιρέσωμεν καθένα τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν. Οὕτω διὰ τὸ κλάσμα $\frac{594}{1386}$ ὁ μ.κ.δ. τῶν 594 καὶ 1386 εἶνε ὁ 198, εὑρίσκομεν δ' ἀμέσως τὸ $\frac{3}{7}$ διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων τοῦ $\frac{594}{1386}$ διὰ τοῦ 198.

Τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, ἀλλ' εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγεται *ἀνάγωγον* καὶ προφανῶς δὲν ἁπλοποιεῖται.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως ἐπιδιώκομεν συνήθως νὰ τρέψωμεν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ ἀνάγωγον.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν α΄) εἰς δεύτερα τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{6}{10}$, β΄) εἰς τρίτα τὰ $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$. γ΄) εἰς τέταρτα τὰ $\frac{4}{16}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{20}$ δ΄) εἰς ὄγδοα τὰ $\frac{2}{16}$, $\frac{21}{56}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{2}{16}$.

2) Νὰ τραποῦν α΄) εἰς δεύτερα τὰ $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{28}{4}$ β΄) εἰς τρίτα τὰ $\frac{12}{9}$, $\frac{21}{9}$, $\frac{30}{18}$, $\frac{42}{9}$, γ΄) εἰς πέμπτα τὰ $\frac{28}{30}$, $\frac{39}{15}$, $\frac{56}{10}$,

3) Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ ἑξῆς κλάσματα.

α΄) $\frac{10}{6}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{22}{6}$, $\frac{28}{6}$, $\frac{36}{6}$, β΄) $\frac{6}{8}$, $\frac{14}{8}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{38}{8}$, γ΄) $\frac{6}{9}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{24}{9}$, $\frac{46}{12}$, $\frac{34}{12}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{48}{12}$. δ΄) $\frac{8\times16}{3\times8}$, $\frac{159\times9}{3\times9}$, $\frac{4\times100}{8\times10}$, $\frac{9\times4\times25}{2\times100}$, ε΄) $\frac{4\times14\times6}{6\times40\times7}$, $\frac{70\times85\times26}{13\times350\times17}$.

Πρόσθεσις.

154. *Πρόβλημα. «Ἔχει τις $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{1}{12}$ καὶ $\frac{3}{12}$ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσον μέρος τοῦ ὑφάσματος ἔχει ἐν ὅλῳ».*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{1}{12}$ καὶ $\frac{3}{12}$. Ἀλλὰ 5 δωδέκατα καὶ 1 δωδέκατον καὶ 3 δωδέκατα κάμνουν 9 δωδέκατα. Ἤτοι ἔχομεν $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{9}{12}$. Ὥστε ἔχει ἐν ὅλῳ $\frac{9}{12}$ τοῦ ὑφάσματος. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=$ μὲ $\frac{7}{3}=$ καὶ τοῦτο μὲ $2\frac{1}{3}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν αὐτόν».***

155. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ἑτερωνύμων κλασμάτων, π. χ. τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα, ὅτε λαμβάνομεν τὰ ἀντίστοιχα ἴσα μὲ αὐτὰ $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$, καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν ταῦτα καθὼς ἀνωτέρω. Οὕτω εὑρίσκομεν $\frac{59}{30}$ = τὸ ὁποῖον = μὲ $1\frac{29}{30}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱαδήποτε ἄλλα ἑτερώνυμα κλάσματα. Ὅθεν,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ὁμωνύμων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τούτων».

156. *Πρόβλημα. «Ἔχει τις $2\frac{3}{4}$ δρ καὶ $6\frac{1}{5}$ δρ.· πόσα ἔχει ἐν ὅλῳ ;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς $2\frac{3}{4}$ δρ. καὶ $6\frac{1}{5}$ δρ. Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν πρῶτον τὰς 2 δρ. καὶ 6 δρ. καὶ εὑρίσκομεν 8 δρ. Ἔπειτα προσθέτομεν τὰς $\frac{3}{4}$ δρ. καὶ $\frac{1}{5}$ δρ. καὶ ἔχομεν $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=\frac{19}{20}$. Ἑπομένως ἔχει ἐν ὅλῳ $8\frac{19}{20}$ δρ. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους τούτων, καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα».

Οὕτω διὰ τὸ $2\frac{3}{4}+5\frac{1}{3}$ ἔχομεν $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{9}{12}+\frac{4}{12}=\frac{13}{12}=$ $=1\frac{1}{12}$. καὶ $2+5=7$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων μικτῶν εἶνε $1\frac{1}{12}+7=8\frac{1}{12}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς προσθέσεις.

α′) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. β′) $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$. γ′) $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$. δ′) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{8}{8}$. ε′) $\frac{5}{10}+\frac{9}{10}+\frac{7}{10}$. στ′) $\frac{7}{25}+\frac{3}{25}+\frac{8}{25}+\frac{1}{25}+\frac{5}{25}$.

2) Ὁμοίως αἱ α′) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. β′) $\frac{5}{2}+\frac{7}{9}$. γ′) $2\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

3) Ἐπίσης αἱ α′) $\frac{1}{2}+\frac{4}{8}+5\ \frac{1}{4}$. β′) $2\ \frac{1}{8}+3\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

γ′) $\frac{3}{10}+\frac{5}{2}+\frac{7}{10}$. δ′) $2\frac{1}{2}+5\ \frac{7}{9}+13\frac{1}{3}+7\ \frac{1}{10}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔμπορος ἐπώλησε ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος $\frac{3}{8}$ πήχ., ἔπειτα $\frac{1}{2}$ πήχ. καὶ ἔπειτα $2\ \frac{1}{4}$ πήχ.· πόσους πήχεις ἐπώλησε ἐν ὅλῳ;

2) Ἐργάτης τελειώνει εἰς μίαν ἡμ. τὸ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$ ἑνὸς ἔργου· δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)$ καὶ τρίτος τὸ $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)$ τοῦ ἔργου. πόσον μέρος τοῦ ἔργου τελειώνουν καὶ οἱ τρεῖς, μαζῆ ἐργαζόμενοι, εἰς 1 ἡμ.; ὁλόκληρον $\left(\frac{9}{10}\right)$.

3) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν βρύσεων. Ἡ πρώτη πληροῖ εἰς 1 ὥρ. τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὰ $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{8}\right)$ καὶ ἡ τρίτη τὸ $\frac{1}{10}\left(\frac{11}{12}\right)$ αὐτῆς· ποῖον μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ πληρωθῇ εἰς 1 ὥρ., ἐὰν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς βρύσεις μαζῆ; $\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\right)$.

4) Ἔμπορος ἐπώλησεν $83\ \frac{69}{105}\left(36\frac{4}{5}\right)$ ὀκάδες ἐμπορεύματος ἔπειτα $94\ \frac{1}{2}\left(47\frac{3}{4}\right)$ ὀκ., βραδύτερον $120\ \frac{7}{25}\left(87\frac{4}{25}\right)$ ὀκ. καὶ τέλος $125\ \frac{9}{20}\left(98\frac{7}{20}\right)$· πόσας ὀκ. ἐπώλησε ἐν ὅλῳ;

$423\ \frac{621}{700}\left(270\ \frac{3}{50}\right)$.

5) Εἰσέπραξέ τις $15\ \frac{3}{4}$ δρ. καὶ $85\ \frac{1}{2}$ δρ. καὶ $145\ \frac{3}{5}$ δρ. καὶ 200 δρ. καὶ $2\ \frac{1}{20}$ δρ. πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀγοράζει τις 71 (41) ὀκ. ἐμπορεύματος ἀντὶ $127\frac{3}{5}\left(225\frac{17}{25}\right)$ δρ.· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν 1 ὀκ., ἐὰν ἡ φόρτωσίς του στοιχίζῃ $3\frac{6}{25}\left(5\frac{1}{5}\right)$ θέλει δὲ νὰ κερδίσῃ καὶ $11\frac{4}{25}\left(15\frac{2}{25}\right)$ δρ. ἐν ὅλῳ; 2 (6)

2) Βαδίζει τις μίαν ἡμέραν ἐπὶ $2\frac{1}{5}\left(1\frac{1}{4}\right)$ ὥρ. καὶ εἰς καθεμίαν τῶν ἑπομένων ἡμερῶν $1\frac{1}{4}\left(1\frac{1}{3}\right)$ὥρας περισσότερον τῆς προηγουμένης· πόσας ὥρας ἐβάδισεν εἰς 4 (5) ἡμέρας;

$16\frac{3}{10}\left(19\frac{7}{12}\right)$.

3) Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἡ πρώτη εἶνε $32\frac{3^0}{4}\left(10\frac{5^0}{6}\right)$ ἡ δευτέρα $10\frac{1^0}{2}\left(7\frac{7^0}{10}\right)$ μεγαλυτέρα τῆς πρώτης, ἡ δὲ τρίτη εἶνε κατὰ $41\frac{3^0}{20}\left(28\frac{4^0}{15}\right)$ μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας· πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν; $16^0\ 24'$ $(75^0\ 56')$

Ἀφαίρεσις.

157. *Πρόβλημα.* «*Εἶχε τις $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{6}$ αὐτοῦ· πόσον τοῦ ἔμεινε;*»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν δύο ὁμωνύμων κλασμάτων $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{2}{6}$. Ἀλλὰ 5 ἕκτα—2 ἕκτα=3 ἕκτα, ἤτοι $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$. Ὥστε τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{3}{6}$ τοῦ ὑφάσματος.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ. $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}=\frac{3}{9}$.

Ὅθεν, ***«διὰ ν᾽ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα ὁμώνυμα ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν τοῦ μειωτέου, τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν».***

158. Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$ τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα ὅτε ἔχομεν $\frac{15}{20}-\frac{8}{20}$ καὶ ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, οὕτω δ' εὑρίσκομεν διαφορὰν $\frac{7}{20}$.

Ἤτοι, ***«διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀφαιροῦμεν ταῦτα».***

159. *Π ρ ό β λ η μ α. «Εἶχέ τις $3\frac{1}{2}$ δρ. καὶ ἐξώδευσε $1\frac{1}{4}$ δρ.· πόσα τοῦ ἔμειναν;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς $3\frac{1}{2}$ δρ. τὰς $1\frac{1}{4}$ δρ. Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, ὅτε θὰ ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $3\frac{2}{4}$ δρ. $-1\frac{1}{4}$ δρ. Ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους τούτων, ὅτε λαμβάνομεν ὑπόλοιπον $2\frac{1}{4}$ δρ. Ὥστε ἔχομεν $3\frac{1}{2}$ δρ. $-1\frac{1}{4}$ δρ. $=2\frac{1}{4}$ δρ. Ἤτοι ἔμειναν $2\frac{1}{4}$ δρ.

Ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $12\frac{1}{5}$ ὀκ. $-5\frac{3}{4}$ ὀκ., τρέπομεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ θὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $12\frac{4}{20}$ ὀκ. $-5\frac{15}{20}$ ὀκ. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{15}{20}$ ὀκ. δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὰ $\frac{4}{20}$ ὀκ., λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 12 ὀκ. μίαν ὀκᾶν καὶ τὴν τρέπομεν εἰς εἰκοστά· ἤτοι εἰς εἴκοσι εἰκοστά. Αὐτὰ προσθέτομεν εἰς τὰ 4 εἰκοστὰ τοῦ μειωτέου, καὶ ἔχομεν 24 εἰκοστά. Γράφομεν λοιπὸν ἀντὶ $12\frac{4}{20}$ ὀκ. τὸ $11\frac{24}{20}$ ὀκ. καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἀφαίρεσιν $11\frac{24}{20}$ ὀκ. $-5\frac{15}{20}$. Ἀφαιροῦμεν τώρα χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ τοὺς ἀκεραίους καὶ εὑρίσκομεν $6\frac{9}{20}$ ὀκ. Ὥστε ἔχομεν $12\frac{1}{5}$ ὀκ. $-5\frac{3}{4}$ ὀκ. $=12\frac{4}{20}$ ὀκ. $-5\frac{15}{20}$ ὀκ. $=11\frac{24}{20}$ ὀκ. $-5\frac{15}{20}$ ὀκ. $=6\frac{9}{20}$ ὀκ.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, *«διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν δύο μικτοὺς ἀριθμούς, τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα (ἐὰν εἶνε ἑτερώνυμα)· ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερον τοῦ ἀφαιρετέου, λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ μειωτέου, καὶ τὴν τρέπομεν εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν τῶν κλασμάτων. Τοῦτο προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτως, ὥστε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ν' ἀφαιρῆται τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου. Τέλος ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ὑπολειφθέντα ἀκέραιον τοῦ μειωτέου».*

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις.

α') $\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$· β') $3\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$· γ') $3\frac{5}{12} - 2\frac{7}{12}$· δ') $8\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ ε') $17 - 1\frac{1}{2}$· ς') $4\frac{5}{3} - 2\frac{7}{8}$· ζ') $\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$· η') $\frac{2}{1} - \frac{2}{3}$· θ') $\frac{5}{1} - \frac{1}{5}$· ι') $\frac{6}{1} - \frac{1}{8}$.

2) Ὁμοίως αἱ ἀφαιρέσεις· α') $8\frac{4}{5} - 2\frac{7}{24}$· β') $12\frac{8}{15} - 4\frac{9}{20}$· γ') $7\frac{13}{72} - 3\frac{13}{45}$· δ') $85\frac{1}{6} - 48\frac{17}{19}$· ε') $29\frac{1}{8} - 17\frac{1}{24}$.

3) Ἀφαιρέσατε ἀπὸ τὸ 1 τὸ $\frac{1}{5}$, τὰ $\frac{5}{8}$, τὰ $\frac{9}{12}$. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ 2 ὀκ. τὸ $1\frac{1}{4}$ ὀκ., ἀπὸ τὸ 4 πήχ. τὸ $\frac{3}{8}$ πήχ. καὶ εὕρετε ἕνα κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀκέραιον κλάσμα, ἢ μικτόν.

4) Ἔχει τις $35\frac{1}{2}$ δρ. καὶ ἄλλος $25\frac{3}{4}$ δρ. Πόσα ἔχει ὁ πρῶτος περισσότερα τοῦ δευτέρου ;

5) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον ἀντὶ $38\frac{1}{2}$ δρ. ζάκχαριν ἀντὶ $22\frac{1}{5}$ δρ. καὶ καφὲ ἀντὶ 36 δρ. Ἔδωκε ἓν χαρτονόμισμα 100 δραχμῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ὡς ὑπόλοιπον ;

6) Δίδομεν ἕνα χαρτονόμισμα 50 δρ. διὰ νὰ πληρώσωμεν κρέας $38\frac{3}{4}$ δρ. Πόσα θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον ;

7) Πωλεῖ τις ἐμπόρευμα $127\frac{11}{20}$ $\left(146\frac{17}{20}\right)$δρ. μὲ κέρδος $43\frac{1}{2}$ $\left(61\frac{1}{5}\right)$ δρχ.· πόσον τὸ ἠγόρασεν; 84 δρ. 5 λ. (75, 64).

8) Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν εἰς τὰς $6\frac{3}{4}$ ὥρ. π. μ. καὶ φθάνει εἰς Κόρινθον εἰς τὰς $9\frac{2}{3}$ ὥρ. π. μ. Εἰς πόσας ὥρας διατρέχει τὴν σιδηροδρομικὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐξώδευσέ τις πρῶτον $18\frac{4}{5}$ $\left(23\frac{1}{4}\right)$ δρ. ἐκ τῶν $728\frac{3}{4}$ $\left(143\ \frac{7}{10}\right)$ δρχ., τὰς ὁποίας εἶχεν· ἔπειτα $27\frac{1}{20}$ $\left(13\frac{1}{2}\right)$ δρ., καὶ τέλος $54\frac{2}{25}$ $\left(18\frac{4}{5}\right)$ δρ.· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; (Κατὰ δύο τρόπους). 628 (82259,15).

2) Ἔχει τις $36\frac{1}{4}$ $\left(18\frac{2}{3}\right)$ δρχ., δεύτερος ἔχει $8\frac{7}{9}$ $\left(1\ \frac{1}{2}\right)$ δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ πρώτου, καὶ τρίτος $7\frac{7}{12}$ $\left(3\ \frac{6}{7}\right)$ δρχ. ὀλιγωτέρας τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων. Πόσας δραχμὰς ἔχει ἕκαστος καὶ πόσας καὶ οἱ τρεῖς; $27\frac{17}{36}$ $\left(17\frac{1}{6}\right)$, $56\frac{5}{36}$ $\left(31\frac{41}{42}\right)$, $119\frac{31}{36}$ $\left(6717\frac{17}{42}\right)$

3) Ἓν ἔργον ἤρχισεν εἰς τὰς $8\frac{8}{4}$ $\left(4\ \frac{5}{12}\right)$ ὥρ.π.μ.καὶ διήρκεσε $10\frac{5}{6}$ $\left(9\ \frac{3}{39}\right)$ ὥρ. πότε ἐτελείωσε; 7 ὥρ. 35΄λ. (1 ὥρ. 39΄ λ.)μ. μ.

Πολλαπλασιασμός.

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε ἀκέραιος.

160. *Πρόβλημα.* ***«Ἂν ἓν πορτοκάλιον τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δρ., πόσον τιμῶνται τὰ 5 πορτοκάλια;»***

Ἀφοῦ τὸ 1 πορτοκ. τιμᾶται $\frac{3}{4}$δρ., τὰ δύο πορτοκ. θὰ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ. $\times$ 2, καὶ τὰ 5 πορτοκ. θὰ τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δρ. $\times$ 5. Ἤτοι θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5. Ἀλλὰ γνω-

γνωρίζομεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) κλάσματος μὲ ἕνα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἑπομένως, ἔχομεν $\frac{3}{4}$δρ.$\times 5 = \frac{15}{4}$ δρ. $= 3\frac{3}{4}$ δρ. $= 3,75$ δρ. Δηλαδὴ τὰ 5 πορτ. τιμῶνται 3,75 δρ.

Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, $\frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{9:3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀφήνομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν διαιρῆται) καὶ ἀφήνομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν».***

161. *Πρόβλημα*. ***«Ἂν ἡ ὀκᾶ κριθῆς τιμᾶται $6\frac{3}{4}$ δρ., πόσον τιμῶνται αἱ 3 ὀκάδες τῆς κριθῆς ;»***

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται $6\frac{3}{4}$ δρ., αἱ 2 ὀκ. θὰ τιμῶνται 2 φορὰς περισσότερον τῶν $6\frac{3}{4}$ δρ., καὶ αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται 3 φορὰς περισσότερον τῶν $6\frac{3}{4}$ δρ.· ἤτοι $6\frac{3}{4}$ δρ. $\times 3$. Ἐπειδὴ τὸ $6\frac{3}{4}$ δρ. $= 6$ δρ. $+ \frac{3}{4}$ δρ., ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 6 δρ. $\times 3 = 18$ δρ., τὸ $\frac{3}{4}$ δρ. $\times 3 = \frac{9}{4}$δρ., καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Οὕτω εὑρίσκομεν $18 + \frac{9}{4}$ δρ.$=$ $20\frac{1}{4}$ δρ. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $6\frac{3}{4}$ δρ.$\times 3 = \frac{27}{4}$ δρ.$\times 3 = \frac{81}{4}$δρ.$=$ $20\frac{1}{4}$ δρ. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀκέραιον καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀκέραιον».

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

Εὕρετε τὰ γινόμενα α') $\frac{4}{9}\times 5, \frac{2}{7}\times 8, \frac{4}{15}\times 21, \frac{18}{64}\times 32, \frac{191}{400}\times 8$. β') $1\frac{1}{4}\times 9,\ 4\frac{1}{3}\times 2,\ 5\frac{1}{7}\times 4,\ 6\frac{1}{8}\times 5,\ 3\frac{2}{7}\times 5,\ 6+\frac{3}{8}\times 10,\ 10\frac{6}{17}\times 4$.

2) Ἂν διὰ μίαν ἐνδυμασίαν ἀπαιτοῦνται $4\frac{3}{8}$ πήχ., πόσοι πήχεις ἀπαιτοῦνται διὰ 10 ἐνδυμασίας; $43\frac{6}{8}$

3) Ἔδωκέ τις ἀπὸ $4\frac{4}{5}$ δρ. εἰς καθένα ἐκ 15 πτωχῶν· πόσας δραχμὰς ἔδωκε ἐν ὅλῳ; 72

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλάσμα ἢ μικτός.

162. *Πρόβλημα. «Ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 40 δρ. πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;»*

Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 40 δρ., τὸ ἓν τέταρτον τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 4 φορὰς μικρότερον τῆς μιᾶς ὀκᾶς, θὰ τιμᾶται καὶ 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 40 δρ., δηλαδὴ 40 δρ. : 4 = 10 δρ.· καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 3 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἑνὸς τετάρτου, θὰ τιμᾶται καὶ 3 φορὰς περισσότερον τῶν 10 δρ.· δηλαδὴ 10 δρ. $\times$ 3 = 30 δρχ. Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ κρέατος τιμῶνται 30 δρ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μέρους ἢ τῶν πολλῶν καὶ μέρους τῆς μονάδος, λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ πολλαπλασιαστέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ μέρος ἢ τὰς πολλὰς καὶ τὸ μέρος τῆς μονάδος, καὶ τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον».

Οὕτω τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 40 δρ. $\times\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον 30 δρ. εὑρίσκομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 40 δρ. $\times$ 3, ὅτε ἔχομεν

40 δρ. $\times 3$ καὶ τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4. Πράγματι ἔχομεν $\frac{40 \times 3}{4} = \frac{10 \times 3}{1} = 30$ δρ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι, ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 28 δρ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, θὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 28 δρ. $\times \frac{5}{8}$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 28 δρ. $\times 5$ καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 8. Ἤτοι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως τιμῶνται $\frac{28 \times 5}{8}$ δρ. $= \frac{7 \times 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ δρ. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος».

163. *Πρόβλημα. «Ἂν ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται $\frac{9}{10}$ δρ., πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ $\frac{9}{10}$ δρ. τῆς μιᾶς μονάδος, δηλαδὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς, δηλαδὴ μέρος τῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο θὰ λυθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\frac{9}{10}$ δρ. $\times \frac{4}{5}$. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται $\frac{9}{10}$ δρ., τὸ ἓν πέμπτον τῆς ὀκᾶς (τὸ ὁποῖον εἶνε 5 φορὰς μικρότερον τῆς μιᾶς ὀκᾶς) θὰ τιμᾶται 5 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{9}{10}$ δρ.· δηλαδὴ $\frac{9}{10}$ δρ. : 5. Ἀλλὰ τοῦτο ἰσοῦται (καθὼς γνωρίζομεν 145) μὲ $\frac{9}{10 \times 5}$ δρ. Καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς (τὸ ὁποῖον εἶνε 4 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἓν πέμπτον), θὰ τιμῶνται 4 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{9}{10 \times 5}$ δρ.· δηλαδὴ $\frac{9}{10 \times 5}$ δρ. $\times 4$. Ἀλλὰ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\frac{9 \times 4}{10 \times 5}$ δρ. $= \frac{9 \times 2}{5 \times 5} = \frac{18}{25}$ δρ. Ὥστε τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς τιμῶνται $\frac{18}{25}$ δρ. Καθὼς βλέπομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{9 \times 4}{10 \times 5}$ τῶν δύο κλασμάτων $\frac{9}{10}$ καὶ $\frac{4}{5}$ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμητάς των καὶ τοὺς παρονομαστάς των, καί τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.

Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. ὅτι, ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{14}{5}$ δρ. τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως θὰ τιμῶνται $\frac{14}{5}$ δρ. $\times \frac{5}{8}$. Εὑρίσκομεν δ' ὁμοίως σκεπτόμενοι ὅτι, $\frac{14}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{14\times5}{5\times8}=\frac{7\times1}{1\times4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$.

Ἑπομένως τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. τιμῶνται $1\frac{3}{4}$ δρ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, ἔπειτα τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστήν»,

164. *Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν τά οὕτω προκύπτοντα κλάσματα»,* ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τό κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα. Π. χ. ἔχομεν $3\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$.

Ὁμοίως $6\frac{1}{2}\times3\frac{1}{4}=\frac{13}{2}\times\frac{13}{4}=\frac{169}{8}=21\frac{1}{8}$. ἢ καὶ ἄλλως

$$6\frac{1}{2}\times3\frac{1}{4}=6\frac{1}{2}\times3+6\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{2}\times3+\frac{13}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{39}{2}+$$
$$+\frac{13}{8}=19\frac{1}{2}+1\frac{5}{8}=20+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=20+\frac{9}{8}=21\frac{1}{8}.$$

Ἰδιότης τοῦ γινομένου κλασμάτων.

165. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος τοῦ γινομένου δύο κλασμάτων συνάγομεν εὐκόλως ὅτι,

«τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων».

Διότι π. χ. τὸ γινόμενον $\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}$ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{2\times4}{5\times9}$. Ἀλλ' εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν τούτου ἔχομεν γινόμενον ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ δυνάμεθα ὡς γνωστὸν (49, σελὶς 30) ν' ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν· ὥστε ἔχομεν

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{2\times4}{5\times9}=\frac{4\times2}{9\times5}=\frac{4}{9}\times\frac{2}{5}.$$

166. ***«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον περισσοτέρων τῶν δύο κλασμάτων, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρανομαστῶν αὐτῶν».***

Οὕτω τὸ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2\times4\times1\times2}{3\times5\times2\times5}=\frac{16}{150}$.

Ἐπίσης εὐκόλως βλέπομεν ὅτι, τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας.

167. *Παρατηρήσεις.* Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τοῦ γινομένου κλασμάτων συνάγομεν ὅτι,

«δυνάμεθα πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, νὰ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου τούτων».

Οὕτω καθιστῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εὐκολώτερον. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$, ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ $\frac{4\times3}{9\times8}$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 4 καὶ 8 διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν $\frac{1\times3}{9\times2}$. Διαιροῦντες πάλιν τὸ 3 καὶ 9 διὰ τοῦ 3, λαμβάνομεν ἐξαγόμενον $\frac{1\times1}{3\times2}=\frac{1}{6}$.

Γράφομεν συνήθως οὕτω,

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν,

$$\frac{15}{24}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{12}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{12}\times\frac{1}{1}\times\frac{3}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατωτέρω γινόμενα, ἀφοῦ προηγουμένως γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις· α') $\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$.

β΄) $\frac{18}{25} \times \frac{5}{9}$· γ΄) $\frac{45}{56} \times \frac{64}{81}$· δ΄) $\frac{9}{14} \times \frac{36}{39}$· ε΄) $8\frac{2}{3} \times \frac{6}{13}$·

ϛ΄) $8\frac{1}{8} \times 4\frac{4}{15}$· ζ΄) $8\frac{14}{15} \times 2\frac{1}{4}$· η΄) $\frac{8}{11} \times 33$· θ΄) $42 \times \frac{2}{8}$.

2) Ὁμοίως τά· α΄) $\frac{3}{7} \times \frac{7}{10} \times \frac{10}{21}$· β΄) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{4}{28} \times \frac{6}{5}$.

γ΄) $364 \times \frac{23}{21} \times \frac{3}{16} \times \frac{9}{29}$.

3) Ὁμοίως τά· α΄) $1\frac{3}{10} \times \frac{15}{26} \times 1\frac{13}{40}$· β΄) $2\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} \times \frac{25}{24} \times \frac{2}{9}$.

4) Ὁμοίως τά· α΄) $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$· β΄) $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100}$· γ΄) $\frac{1}{100} \times \frac{1}{1000}$·

δ΄) $10 \times \frac{1}{1000}$ ε΄) $10 \times \frac{3}{10}$.

5) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμητὴν τούτου. Διατί ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἡ ὀκᾶ πράγματος στοιχίζει $2\frac{3}{4}\left(3\frac{1}{2}\right)$ δρχ. πόσον στοιχίζουν $\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$ ὀκ.; 1,10(1,40)·4,40(5,60)·7,70(9,80).

2) Πόσον θὰ στοιχίσουν τὰ $\frac{3}{4}\left(1\frac{3}{5}\right)$ πήχ., ὅταν ὁ πῆχυς τιμᾶται $3\frac{1}{4}\left(250\frac{1}{4}\right)$ δρ. ; $2\frac{7}{16}$ (400,40).

3) Ἓν κινητὸν διανύει εἰς 1 ὥραν $5\frac{3}{4}\left(7\frac{1}{8}\right)$ χμ.· πόσα διανύει εἰς $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{50}$, $1\frac{3}{20}$ ὥρ.; 4,6 (5,7)· 1,725

(2,1375), (10,6875)· 4, 865, (7,2675)· 3,625 6,6125 (8,19875).

4) Ἔχει τις χρήματα διὰ νὰ περάσῃ $18\frac{3}{4}\left(9\frac{1}{5}\right)$, ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $10\frac{1}{5}\left(8\frac{3}{4}\right)$ δρ. καθ' ἡμέραν· πόσας δραχμὰς ἔχει ;

191.15(80,50).

5) Ἀγοράζει τις $36\frac{1}{5}\left(84\frac{3}{4}\right)$ ὀκ. πράγματος πρὸς $5\frac{1}{4}\left(6\frac{1}{5}\right)$ δρ. τὴν ὀκᾶν, τὸ πωλεῖ δὲ μὲ κέρδος $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)$ δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσον τὸ ἐπώλησεν ; 199,10 (318, 45).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἐκ δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξὺ των $100\frac{3}{4}\left(607\frac{4}{5}\right)$ χμ., ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ μὲν διανύῃ $8\frac{3}{4}\left(28\frac{1}{4}\right)$ χμ. καθ' ἡμέραν, ὁ δὲ $6\frac{1}{5}\left(32\frac{1}{2}\right)$ χμ.. πόσον θ' ἀπέχουν μετὰ $5\frac{1}{2}(10)$ἡμ.; 18,525(0,3)

2) Ἔχει τις $824\frac{1}{4}\left(526\frac{1}{2}\right)$δρ. ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}\right)$ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$ αὐτῶν καὶ τέλος τὰ $\frac{11}{21}\left(\frac{9}{12}\right)$αὐτῶν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ; (Κατὰ δύο τρόπους). 0 (52,65).

3) Ἔχει τις $855\left(156\frac{3}{5}\right)$ δρ. καὶ ἐξοδεύει τὰ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)$ αὐτῶν· ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, καὶ ἐκ τοῦ νέου ὑπολοίπου τὰ $\frac{3}{5}\left(\frac{10}{11}\right)$ αὐτοῦ· τί ἔμεινε; $38\left(1\frac{247}{275}\right)$.

4) Ὀπωροπώλης ἔχει 35 (25) μῆλα· πωλεῖ τὸ $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)$ αὐτῶν καὶ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)$ τοῦ μύλου· ἔπειτα πωλεῖ τὰ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$ τοῦ μήλου· πόσα μῆλα τοῦ ἔμειναν ; 5 (2).

5) Ἀπὸ βαρέλιον, ἔχον $56\frac{2}{3}\left(42\frac{1}{4}\right)$ όκ. οἴνου ἀφαιροῦμεν τὰ $\frac{2}{5}\left(\frac{2}{13}\right)$ αὐτοῦ, καὶ χύνομεν $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{8}\right)$ όκ. οἴνου· ἀφαιροῦμεν πάλιν τὰ $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)$ τοῦ εἰς τὸ βαρέλιον οἴνου καὶ πάλιν $\frac{7}{10}\left(1\frac{1}{10}\right)$ όκ. Πόσος οἶνος ἔμεινε ; $6\frac{1}{4}\left(6\frac{1}{8}\right)$.

Διαίρεσις.

α΄) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος.*

168. *Πρόβλημα. «Ἂν 3 πήχεις ταντέλας τιμῶνται $\frac{21}{5}$ δρ, πόσον τιμᾶται ὁ εἷς πῆχυς ;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, δηλαδὴ τῶν τριῶν πήχεων, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς, ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως, καὶ διὰ τοῦτο θὰ λυθῇ διὰ διαιρέσεως (μερισμοῦ). Πράγματι, ἀφοῦ οἱ 3 π. τιμῶνται $\frac{21}{5}$ δρ., ὁ 1 πῆχυς θὰ τιμᾶται

3 φορὰς ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{21}{5}$ δρ., ἤτοι θὰ διαιρέσωμεν τὸ $\frac{21}{5}$ δρχ. διὰ 3. Γνωρίζομεν ὅπως ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος δι' ἀριθμοῦ τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἐπομένως διὰ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{21}{5}$ δρ. : 3, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 21 διὰ τοῦ 3 καὶ νὰ γράψωμεν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 5. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν $\frac{21}{5}$ δρ. $:3 = \frac{7}{5}$ δρ. Ἄρα ὁ 1 π. τιμᾶται $\frac{7}{5}$ δραχμ. ἢ $1\frac{2}{5}$ δρ.

Ἂν 4 ὀκ. πράγματος τιμῶνται $\frac{17}{5}$ δρ. καὶ ζητεῖται πόσον τιμᾶται ἡ μία ὀκᾶ, θὰ ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{17}{5}$ δρ. : 4.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμητὴς 17 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4, καὶ γνωρίζομεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος μὲ ἕνα ἀριθμὸν τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ κλάσματος ἐπὶ 4 καὶ γράφομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. Οὕτω ἔχομεν $\frac{17}{5}$ δρ. $: 4 = \frac{17}{20}$ δρ.

Ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται $\frac{17}{20}$ δρ.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ ἀφήσωμεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ ἀφήσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν».

169. *«Ἂν ὁ διαιρετέος εἶνε μικτὸς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου».*

Π. χ. ἔχομεν $3\frac{1}{2} : 5 = \frac{7}{2} : 5 = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$.

Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ διὰ τοῦ δοθέντος ἀκεραίου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Π. χ. εἶνε $8\frac{4}{9} : 2 = 8 : 2 + \frac{4}{9} : 2 = 4 + \frac{2}{9} = 4\frac{2}{9}$.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

1) Εὕρετε τὰ πηλίκα α΄) $\frac{15}{19}:5$, $\frac{27}{35}:9$, $\frac{16}{17}:8$, $\frac{33}{40}:3$

β΄) $\frac{12}{7}:5$, $\frac{19}{4}:5$, $\frac{18}{25}:4$, $\frac{6}{7}:5$, $\frac{3}{7}:8$, $\frac{13}{4}:6$, $\frac{16}{11}:9$, $\frac{141}{5}:100$

γ΄) $\frac{5}{1}:4$, $\frac{9}{1}:7$, $\frac{8}{1}:4$, $\frac{15}{1}:3$, $\frac{15}{3}:5$, $6\frac{1}{7}:8$.

δ΄) $6\frac{1}{4}:5$, $7\frac{2}{5}:4$, $12\frac{1}{2}:25$, $\frac{1}{4}=3$, $1\frac{5}{8}:10$, $7\frac{1}{5}:100$.

2) Ἂν διὰ 5 ἐνδυμασίας ἀπαιτοῦνται $12\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος· πόσον ἀπαιτεῖται διὰ μίαν ἐνδυμασίαν;

3) Τὸ τριπλάσιον τῆς ἡλικίας ἑνὸς παιδίου εἶνε $35\frac{1}{5}$ ἔτη· πόση εἶνε ἡ ἡλικία του;

β΄) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε κλάσμα ἢ μικτός.

170. *Πρόβλημα.* ***«Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται $\frac{9}{10}$ δραχμάς· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;***

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος λέγομεν.

Ἀφοῦ τὰ 5 ὄγδοα τοῦ πήχεως τιμῶνται $\frac{9}{10}$ δρ., τὸ ἓν ὄγδοον θὰ τιμᾶται 5 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{9}{10}$ δρ., ἤτοι $\frac{9}{10}$ δρ. : 5, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $\frac{9}{10\times5}$ δρ. Καὶ τὰ 8 ὄγδοα τοῦ πήχεως, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα πῆχυν, θὰ τιμῶνται 8 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{9}{10\times5}$ δρ. ἤτοι $\frac{9}{10\times5}\times8$ δρ., τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $\frac{9\times8}{10\times5}$ δρ. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πῆχυς τιμᾶται $\frac{72}{50}=\frac{36}{25}=1\frac{11}{25}$ δρ.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδεται ἡ τιμὴ $\frac{9}{10}$ δρ. μέρους τῆς μονάδος, δηλαδὴ τῶν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως, καὶ λύεται ἂν διαιρέσωμεν τὸ $\frac{9}{10}$ διὰ τοῦ $\frac{5}{4}$, δηλαδὴ διὰ τῆς διαιρέσεως $\frac{9}{10}$ δρ. : $\frac{5}{8}$. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{9\times8}{10\times5}$ τῆς λύσεως εὑρίσκεται ἂν τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ $\frac{8}{5}$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{5}{8}$ ἂν ἀντιστρέψωμεν αὐτὸ (δηλαδὴ ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς ὅρους του). Πράγματι ἔχομεν $\frac{9}{10}\times\frac{8}{5}=\frac{9\times5}{10\times8}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καί ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα τοῦ διαιρέτου».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$.

$\frac{20}{27}:\frac{15}{32}=\frac{20}{27}\times\frac{32}{15}=\frac{4}{27}\times\frac{32}{3}=\frac{128}{81}=1\ \frac{47}{81}$.

171. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $5:\frac{9}{4}=5\times\frac{4}{9}$, $2\frac{1}{3}:\frac{5}{7}=$ $=2\frac{1}{3}\times\frac{7}{5}$ κλπ. Ἤτοι, *«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».*

172. Ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτὸς ἀριθμὸς τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν διαίρεσιν διὰ κλάσματος. Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ ἐὰν ὁ διαιρετέος ἢ καὶ οἱ δύο εἶνε μικτοὶ ἀριθμοί.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν $6\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{13}{2}:\frac{3}{4}=\frac{13}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{13\times2}{1\times3}=\frac{26}{3}$ $=8\ \frac{2}{3}$. Ὁμοίως $2\frac{1}{5}:4\frac{1}{2}=\frac{11}{5}:\frac{9}{2}=\frac{11}{5}\times\frac{2}{9}=\frac{22}{45}$.

173. *Πρόβλημα. «Πόσους πήχεις ταντέλας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $\frac{7}{8}$ δρ., ἂν ὁ πῆχυς τιμᾶται $\frac{2}{5}$ δρ.;».*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, δηλαδὴ $\frac{2}{5}$ δρ. καὶ ἡ τιμὴ $\frac{7}{8}$ δρ. πολλῶν ἢ μέρους τῆς μονάδος, καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων, θὰ λυθῇ δὲ διὰ διαιρέσεως (μετρήσεως). Πράγματι, ἐπειδὴ δίδομεν $\frac{2}{5}$ δρ. διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 1 π., μὲ $\frac{7}{8}$ δρ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσους πήχεις, ὅσον χωρεῖ τὸ $\frac{2}{5}$ δρ. εἰς τὸ $\frac{7}{8}$ δρ.· δηλαδὴ θὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{7}{8}$ δρ.: $\frac{2}{5}$ δρ.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν $\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{16} =$ $= 2\frac{3}{16}$. Ὥστε μὲ $\frac{7}{8}$ θὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{3}{16}$ πήχ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων· α′) $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$. β′) $\frac{35}{12} : \frac{15}{3}$. γ′) $\frac{5}{6} : \frac{2}{9}$. δ′) $4\frac{1}{2} : \frac{4}{5}$. ε′) $8\frac{5}{6} : 1\frac{1}{5}$. ϛ′) $5\frac{1}{4} : 4\frac{2}{7}$. ζ′) $\frac{2}{5} : 1\frac{13}{15}$. η′) $\frac{21}{37} : \frac{15}{8}$. θ′) $4\frac{11}{15} : \frac{7}{9}$.

2) Ὁμοίων τῶν· α′) $6 : \frac{2}{3}$. β′) $12 : \frac{6}{7}$. γ′) $22 : 3\frac{2}{3}$. δ′) $50 : \frac{25}{3}$. ε′) $26 : 8\frac{2}{3}$. ϛ′) $7\frac{2}{3} : 9\frac{1}{2}$. ζ′) $13\frac{1}{4} : 5\frac{1}{6}$.

3) Ὁμοίως τῶν· α′) $7 : \frac{1}{2}$. β′) $51 : \frac{1}{4}$. γ) $13,5 : \frac{1}{8}$.

4) Ὁμοίως τὰ α′) $\frac{1}{10} : \frac{1}{100}$. β′) $\frac{1}{100} : \frac{1}{10}$. γ′) $\frac{1}{1000} : \frac{1}{10}$. δ′) $\frac{1}{1000} : \frac{1}{100}$. ε′) $10 : \frac{1}{10}$.

5) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ τὸ ἀντίστροφόν του εὑρίσκομεν γινόμενον 1. Διατί ;

6) Ἐὰν οἱονδήποτε ἀκέραιον παραστήσωμεν ὡς κλασματικόν, ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν 1, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του ἰσοῦται μὲ 1. Διατί ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Μὲ $18\frac{3}{4}\left(9\ \frac{1}{5}\right)$δρ. ἀγοράζομεν $11\frac{1}{4}\left(1\ \frac{21}{25}\right)$ μέτρα ὑφάσματος· πόσα μέτρα ἀγοράζομεν μὲ 1 δρ. ; $\frac{9}{17}\left(\frac{1}{5}\right)$.

2) Αἱ $25\left(4\ \frac{1}{5}\right)$ δκ. πράγματος τιμῶνται $26\frac{1}{4}\left(73\frac{1}{2}\right)$ δρ.· πόσον τιμᾶται ἡ 1 δκᾶ ; 1,05 (17,50).

3) Ἁμαξοστοιχία διανύει 330 χμ. εἰς $7\ \frac{1}{3}$ ὥρ.· πόσα χμ. διανύει εἰς 1 ὥραν ;

4) $3\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν $2\frac{3}{4}$ δρ.· πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ;

5) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ πράγματος, ἂν $5\frac{3}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν $4\frac{3}{10}$ δρ.;

6) Ὅταν δι' ἕνα πῆχυν ὑφάσματος δίδωμεν $1\frac{1}{5}$ δρ., πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 36 δρ. ; Πόσας μὲ $24\frac{3}{5}$; Μὲ $49\frac{7}{20}$;

7) Ταχυδρόμος διανύει $37\frac{1}{8}\left(48\frac{4}{5}\right)$ χμ. καθ' ἡμέραν· πόσας ἡμέρας χρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ $126\frac{9}{19}\left(204\,\frac{24}{25}\right)$ χμ.;

$3\frac{85}{209}\left(4\,\frac{1}{5}\right)$

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα.

α') $2\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}:\frac{5}{8}$· β') $1\frac{11}{15}:1\frac{5}{9}\times\frac{15}{35}$· γ') $3\frac{1}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}:\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$.

2) Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $3\frac{1}{2}\left(4\,\frac{1}{6}\right)$ δίδει γινόμενον $1\frac{1}{2}\left(2\,\frac{1}{2}\right)$· ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς αὐτός ; $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)$

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $2\frac{1}{7}\left(\frac{2}{5}\right)$ διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον $9\left(1\,\frac{1}{2}\right)$; $4\frac{1}{5}\left(3\,\frac{3}{4}\right)$

4) Ἔχει τις χρήματα διὰ νὰ περάσῃ $7\left(\frac{3}{4}18\frac{1}{2}\right)$ ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $8\frac{1}{5}\left(7\,\frac{1}{5}\right)$ δρ. καθ' ἡμέραν· πόσα χρήματα ἔχει καὶ πόσας ἡμέρας θὰ περάσῃ μὲ τὰ χρήματα αὐτά, ἐὰν ἐξοδεύῃ $\left(9\,\frac{8}{10}\right)\,7\frac{2}{5}$ δρ. καθεμίαν ἡμέραν ; 596,55 (133,20) 61,5 (18).

Σύνθετα κλάσματα.

174. Καθὼς γνωρίζομεν τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{3}{4}:5$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ κλάσματος $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$ τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν κλασματικὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$ καὶ παρονο-

παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 5. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{4}:5=\frac{\frac{3}{4}}{5}$ καὶ καλεῖται τὸ κλάσμα τοῦτο *σύνθετον*.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον οἱωνδήποτε ἀριθμῶν παριστάνομεν ὡς κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Οὕτω ἔχομεν $7:\frac{5}{8}=\frac{7}{\frac{5}{8}}$, $\quad \frac{4}{3}:\frac{4}{7}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{7}}$.

$$8:3\frac{1}{4}=\frac{8}{3\frac{1}{4}}, \quad 7\frac{4}{5}:\frac{3}{8}=\frac{7\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}.$$

$$3{,}58:2\frac{1}{4}=\frac{3{,}58}{2\frac{1}{4}}.$$

Ἐν γένει, *σύνθετα κλάσματα καλοῦνται τὰ κλάσματα τῶν ὁποίων τοὐλάχιστον εἷς ὅρος δὲν εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός*, ἐνῷ τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ κλάσματα καλοῦμεν *ἁπλᾶ*.

Τοὺς ὅρους τῶν συνθέτων κλασμάτων κλείομεν συνήθως ἐντὸς παρενθέσεων, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν αὐτούς.

175. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν, ἐπειδὴ εἶνε πηλίκα διαιρέσεων τῶν ἀριθμητῶν διὰ τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἔστω ὅτι δίδεται ἓν σύνθετον κλάσμα, π. χ. τὸ $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ καὶ θέλομεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν. Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{3}{1}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως τὸ

$$\frac{6\frac{1}{2}}{5}=6\frac{1}{2}:5=\frac{13}{2}:5=\frac{13}{10}=1\frac{3}{10}=1{,}3.$$

Ἐπίσης τὸ

$$\frac{2\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = 2\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{11}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{11}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, τῆς ὁποίας διαιρετέος εἶνε ὁ ἀριθμητὴς καὶ διαιρέτης ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ».***

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 5) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ.

α′) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{4}{6}}$ β′) $\dfrac{3}{4\frac{1}{5}}$. γ′) $\dfrac{2\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}}$. δ′) $\dfrac{8{,}35}{6\frac{1}{5}}$.

ε′) $\dfrac{\frac{13}{5}}{3\frac{1}{2}}$ στ′) $\dfrac{3+2\frac{1}{5}}{7\frac{3}{8}}$ ζ) $\dfrac{\left(\frac{28}{3}\right)}{\left(\frac{\frac{2}{3}}{4}\right)}$. η′) $\dfrac{\left(\frac{2}{4\frac{1}{5}}\right)}{\frac{4}{25}}$

θ′) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\left(\frac{3}{8\frac{1}{2}}\right)}$. ι′) $\dfrac{2\frac{54}{100}+\frac{3}{4}-\frac{15}{100}}{8-5\frac{1}{2}}$.

Ὁμὰς δευτέρα (χρησιμοποιήσατε σύνθετα κλάσματα). 1) Πόσον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right)$ εἰς τὸν ἀριθμὸν $123\frac{1}{4}\left(616\frac{1}{4}\right)$;

308, 125 (24, 65)

2) Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται $3\frac{3}{4}$ δρ. πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $32\frac{2}{3}$ δρ. ; $8\frac{32}{45}$.

3) Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται $6\frac{1}{5}$ δρ. πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; 9,30 δρ.

4) Πόσον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $6\frac{1}{2}$ ὀκ. εἰς τὸ 150 ὀκ. ; $23\frac{1}{13}$.

5) Ἠγόρασέ τις $3\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματος, ἔπειτα $\frac{4}{45}$ πήχ. ἄλλου ὑφάσματος καὶ $2\frac{1}{8}$ πήχ. ἄλλου, ἐπλήρωσε δὲ ἐν ὅλῳ $60\frac{4}{5}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς κατὰ μέσον ὅρον; $10\frac{1318}{2057}$

Λύσις προβλημάτων δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

α΄) Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ.

176. *1) «Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δρ.· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;»*

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 4 δρ., τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον εἶνε 4 φορὰς μικρότερον τῆς ὀκᾶς, θὰ τιμᾶται 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 4 δρ.· ἤτοι 4 δρ. : 4 = 1 δρ.· καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τὸ ὁποῖον εἶνε 3 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ., θὰ τιμᾶται 3 φορὰς περισσότερον τῆς 1 δρ. ἤτοι 1 δρ.$\times$3=3 δρ. Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται 3 δραχμάς.

Ἡ λύσις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς.

Ἡ 1 $\left(=\frac{4}{4}\right)$ ὀκ. τιμῶνται . . . . . 4 δρ.

τὸ $\frac{1}{4}$ . . . . 4 δρ. : 4=1 δρ.

τὰ $\frac{3}{4}$ . . . . 1 δρ.$\times$3=3 δρ.

Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρισκόμενον ταχύτερον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 4 δρ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$' ἤτοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 4 δρ. $\times\frac{3}{4}$· Πράγματι ἔχομεν 4 δρ. $\times\frac{3}{4}=$ 1 δρ.$\times\frac{3}{1}=$ 3 δρ.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Διότι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ., εὑρήκαμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ. (τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδος) καὶ ἀκολούθως τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ. (τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων).

2) *«Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 48»*.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁλόκληρος ὁ ἀριθμός ἔχει $\frac{6}{6}$ καὶ λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Τὸ $\frac{6}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 48

τὸ $\frac{1}{6}$ . . . . $48:6=8$

τὰ $\frac{5}{6}$ . . . . $8\times5=40$.

Ὥστε τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 48 εἶνε 40. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $48\times\frac{5}{6}$ Πράγματι εἶνε $48\times\frac{5}{6}=8\times\frac{5}{1}=40$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ λύσις ὁμοίων προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μικτοί. Πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν αὐτοὺς προηγουμένως εἰς κλασματικούς. Οὕτω π. χ. λύομεν τὸ κατωτέρω πρόβλημα.

3) *«Ὁ 1 πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $15\frac{1}{2}$ δρ. πόσον τιμῶνται $4\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ πήχ. αὐτοῦ;»*

Ἐν πρώτοις γράφομεν

1 πῆχ. τιμᾶται $15\frac{1}{2}=\frac{31}{2}$ δρ.

$4\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ x

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Ὁ 1 $\left(=\frac{4}{4}\right)$ πῆχ. τιμᾶται . . $\frac{31}{2}$ δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{31}{2}:4=\frac{31}{8}$ δρ.

τὰ $\frac{17}{4}$ . . . . $\frac{31}{8}\times17=\frac{527}{8}=65\frac{7}{8}$ δρ.

Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος. Πρὸς λύσιν αὐτῶν κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, καὶ πολλαπλασιαστέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος παριστάνει τὰς πολλὰς ἢ καὶ τὸ μέρος τῆς μονάδος, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα περιλαμβάνονται καὶ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται εἰς ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πολλαπλάσιον ἢ καὶ μέρος αὐτοῦ.

Συγκρίνοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρὸς τὸν τῆς σελίδος 36, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε ὅμοιος πρὸς ἐκεῖνον καὶ συνάγομεν ὅτι,

«δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ πλεῖστα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος».

β') Προβλήματα διαιρέσεως (μερισμοῦ).

177. *1) «Τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται $10\frac{1}{2}$ δρ. πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς;»*

Τρέπομεν τὸν μικρὸν εἰς κλάσμα καὶ γράφομεν

$$\frac{5}{8} \text{ πήχεως τιμῶνται } 10\frac{1}{2}=\frac{21}{2} \text{ δρ.}$$
$$1 \text{ πῆχυς} \qquad x$$

Ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. τιμῶνται $\frac{21}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » $\frac{21}{2}:5=\frac{21}{2\times5}=\frac{21}{10}$ δρ.

τὰ $\frac{8}{8}$ $(=1)$ » $\frac{21}{10}\times8=\frac{21}{5}\times4=\frac{84}{5}=16\frac{4}{5}$ δρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ $\frac{21}{5}$ δρ. διὰ τοῦ $\frac{5}{8}$. Πράγματι $\frac{21}{2}$ δρ. $:\frac{5}{8}=\frac{21}{2}$ δρ. $\times\frac{8}{5}=\frac{21}{1}$ δρ. $\times\frac{4}{5}=\frac{84}{5}$ δρ. $=16\frac{4}{5}$ δρ.

2) «Αἱ $5\frac{1}{2}$ ὀκ. ἑνὸς πράγματος τιμῶνται $27\frac{1}{2}$ δραχμάς· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;»

Ἐν πρώτοις γράφομεν

$$5\frac{1}{2}=\frac{11}{2} \text{ δκ. τιμῶνται } 27\frac{1}{2}=\frac{55}{2} \text{ δρ.}$$

$$\underline{\qquad 1 \text{ δκ.} \qquad\qquad\qquad x \qquad}$$

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{11}{2}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{55}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{2}$ » » $\frac{55}{2}:11=\frac{55}{2\times 11}$ δρ.

τὰ $\frac{2}{2}\ (=1)$ » » $\frac{55}{2\times 11}\times 2=5$ δρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ $27\frac{1}{2}$ δρ. διὰ τοῦ $5\frac{1}{2}$. Πράγματι ἔχομεν $27\frac{1}{2}$ δρ. : $5\frac{1}{2}=\frac{55}{2}$ δρ. : $\frac{11}{2}=$ $=\frac{55}{2}$ δρ. $\times\frac{2}{11}=\frac{55}{11}$ δρ. $=5$ δρ.

3) «Τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 11. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς αὐτός;»

Γράφομεν ἐν πρώτοις

$$3\frac{2}{3}=\frac{11}{3} \text{ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε } 11$$

$$\underline{\qquad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad x \qquad}$$

καὶ λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Τὰ $\frac{11}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 11

τὸ $\frac{1}{3}$ » » $11:11=1$

τὰ $\frac{3}{3}\ (=1)$ » » $1\times 3=3$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 11 διὰ τοῦ $\frac{11}{3}$. Πράγματι εἶνε $11:\frac{11}{3}=11\times\frac{3}{11}=3$.

Εἰς τἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Πρὸς λύσιν αὐτῶν κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμοῦ). καὶ διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ἢ καὶ τοῦ μέρους τῆς μονάδος, ἡ ὁποία δίδεται, διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος παριστάνει τὰς πολλὰς ἢ καὶ τὸ μέρος τῆς μονάδος (παράβαλε μὲ 86, σελὶς 52). Εἰς τὸν αὐτὸν κανόνα περιλαμβάνεται καὶ ἡ λύσις τῶν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται πολλαπλάσιον ἢ καὶ μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς (τοιοῦτον εἶνε καὶ τὸ ἀνωτέρω τελευταῖον πρόβλημα).

Συγκρίνοντες τὸν κανόνα αὐτὸν πρὸς τὸν 86 τῆς σελίδος 52 παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε ὅμοιος μὲ ἐκεῖνον, καὶ συνάγομεν ὅτι,

«δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ διαιρέσεως (μερισμοῦ) πλεῖστα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους αὐτῆς, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος».

γ΄) Προβλήματα διαιρέσεως μερισμοῦ.

178. *1) «Μὲ $2\frac{1}{2}$ δρ. ἀγοράζει τις 1 ὀκ. πράγματος· μὲ 17 δρ. πόσας ὀκάδας θ᾽ ἀγοράσῃ;»*

Γράφομεν ἐν πρώτοις

μὲ $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει 1 ὀκ.

» 17 x

καὶ ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

Μὲ $\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει . . . . 1 ὀκ.

» $\frac{1}{2}$ » . . . . $1:5=\frac{1}{5}$ ὀκ.

» $\frac{2}{2}(=1)$ » . . . $\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$ ὀκ.

» 17 » . . . . $\frac{2}{5}\times 17=\frac{34}{5}=6\frac{4}{5}$ ὀκ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 17 δρ.: $2\frac{1}{2}$ δρ. Πράγματι ἔχομεν 17 δρ.: $\frac{5}{2}=17$ δρ. $\times\frac{2}{5}$ $=\frac{34}{5}$ ὀκ. $=6\frac{4}{5}$. ὀκ. Δηλαδὴ μὲ 17 δρ. θὰ ἀγοράσῃ $6\frac{4}{5}$ ὀκ.

2) «Εἷς ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 1 ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ἔργου;»

Γράφομεν ἐν πρώτοις

$\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου τελειώνει εἰς 1 ὥρ.

$\frac{7}{10}$ x

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου τελειώνει εἰς . . . . 1 ὥρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » . . . . $1:3=\frac{1}{3}$ ὥρ.

τὰ $\frac{8}{8}$ (=1) » » . . . . $\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$ ὥρ.

τὸ $\frac{1}{10}$ » » . . . . $\frac{8}{3}:10=\frac{8}{3\times10}$ ὥρ.

τὰ $\frac{7}{10}$ » » . . . . $\frac{8}{3\times10}\times 7=\frac{56}{30}$ ὥρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{7}{10}:\frac{3}{8}$. Πράγματι ἔχομεν $\frac{7}{10}:\frac{3}{8}=\frac{7}{10}\times\frac{8}{3}=\frac{56}{30}$. Ἤτοι $\frac{56}{30}$ ὥρ.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω δύο τελευταίων προβλημάτων καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους αὐτῆς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος μονάδων τούτων. Ἑπομένως,

«***τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους αὐτῆς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων λύομεν διὰ διαιρέσεως (μετρήσεως)· διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος***». (Παράβαλε μὲ τὸν κανόνα τῆς σελίδος 55).

ϛ') Προβλήματα χωριζόμενα εἰς δύο ἄλλα.

179 *1) «Ἐὰν ἱππεύς τις εἰς* 3 $\frac{2}{3}$ *ὥρας διανύῃ 44 χμ., πόσα θὰ διανύσῃ εἰς* 5 $\frac{1}{4}$ *ὥρας ;»*

Γράφομεν ἐν πρώτοις

$3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ ὥρας διανύει 44 χμ.

$5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$ ὥρ. » x

καὶ ἀκολούθως λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

Εἰς $\frac{11}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χμ.

» $\frac{1}{3}$ » » 44 : 11=4 χμ.

» $\frac{3}{3}$ (=1) ὥρ. . $4\times3=12$ χμ.

$\text{εἰς } \frac{1}{4}$ » » $12 : 4 = 3$ χμ.

» $\frac{21}{4}$ » » $3 \times 21 = 63$ χμ.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύομεν ἐὰν τὸ χωρίσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς δύο ἁπλᾶ προβλήματα, α′) Εἰς $3\frac{2}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χμ.

» 1 » x

καὶ εὑρίσκομεν $44 : 3\frac{2}{3} = 44 : \frac{11}{3} = 44 \times \frac{3}{11} = \frac{4 \times 3}{1} = 12$ χμ.

β′) Εἰς 1 ὥραν διανύει 12 χμ.

» $5\frac{1}{4}$ » » x καὶ $x = 12 \times 5\frac{1}{4} = 63$ χμ.

2) *«Ἂν οἱ $3\frac{1}{4}$ πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν $54\frac{3}{5}$ δρ., πόσον ἀξίζουν $\frac{3}{8}$ πήχεις αὐτοῦ;»*

Γράφομεν $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ πήχ. ἀξίζουν $\frac{273}{5}$ δρ.

$5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$ » » x

καὶ λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς.

$\frac{13}{4}$ πήχ. ἀξίζουν $\frac{273}{5}$ δρ.

$\frac{1}{4}$ » » $\frac{273}{5} : 13 = \frac{273}{5 \times 13}$ δρ.

$\frac{4}{4}\,(=1)$ » $\frac{273}{5 \times 13} \times 4 = \frac{273 \times 4}{5 \times 13}$ δρ.

$\frac{1}{8}$ πήχ. » $\frac{273 \times 4}{5 \times 13} : 8 = \frac{273 \times 4}{5 \times 13 \times 8}$ δρ.

$\frac{43}{8}$ » » $\frac{273 \times 4 \times 43}{5 \times 13 \times 8}$ δρ. $= \frac{21 \times 1 \times 43}{5 \times 1 \times 2} = 90\frac{3}{10}$ δρ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται, ἂν εὕρωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς πήχεως διὰ τῆς διαιρέσεως $54\frac{3}{5}$ δρ.: $3\frac{1}{4} = \frac{273}{5} : \frac{13}{4} = \frac{273}{5} \times \frac{4}{13} = \frac{21 \times 4}{5 \times 1}$ δρ., καὶ δεύτερον ἂν εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $5\frac{3}{8}$ πήχ. διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\frac{21 \times 4}{5}$ δρ. $\times 5\frac{3}{8} = \frac{21 \times 4}{5} \times \frac{43}{8} = 90\frac{3}{10}$ δρ. $= 90{,}30$ δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Λυόμενα δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ δι' ἀναλύσεως εἰς δύο προβλήματα)

1) Μὲ $10\frac{1}{2}$ ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ ὀκᾶς τυροῦ. Πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $19\frac{1}{4}$ δρ.;

2) Ὑφάντρια ὑφαίνει 1 πῆχυν εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας· πόσους πήχεις ὑφαίνει εἰς $10\frac{3}{4}$ ὥρ.; Πόσους εἰς $9\frac{1}{4}$ ὥρ.; Πόσους εἰς 8 ὥρ.;

3) Ἐὰν τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ εἶνε 60, πόσον εἶνε τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ;

4) Μὲ 1 δρ. ἀγοράζομεν $1\frac{1}{4}$ πήχ. Πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν διὰ $18\frac{3}{8}$ πήχ.; Πόσας διὰ $25\frac{3}{4}$ πήχ.; Πόσας διὰ 30 πήχ.;

5) Ὑφαίνει τὶς $1\frac{1}{2}$ πήχ. εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρ. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς $11\frac{5}{12}$ ὥρας;

6) Πόσον εἶνε τὰ $2\frac{1}{2}$ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὰ $5\frac{1}{5}$ εἶνε 520;

Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

180. Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα, π. χ. τὸ $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν αὐτὸ εἰς τὴν διαίρεσιν 3:8, ἐπειδὴ εἶνε $3 : 8 = \frac{3}{8}$ (κατὰ τὰ ἐν 142 σελ. 98).

Ἐὰν τὸν διαιρετέον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς γράψωμεν ὡς δεκαδικὸν 3,00.... θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{8} = 3{,}00.. : 8$ καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν πηλίκον 0,375. Ὥστε εἶνε $\frac{2}{8} = 0{,}375$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{13}{20} = 13{,}000.. : 20 = 0{,}65$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, «*διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν καὶ ἀκολούθως διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος*».

181. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν τὸ κλάσμα $\frac{1}{3}$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3}=1,000...: 3=0,333...$

Καθὼς βλέπομεν, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν ὅσον θέλομεν, χωρὶς νὰ εὕρωμεν ποτὲ ὑπόλοιπον 0, τὸ δὲ πηλίκον θὰ ἔχῃ ἀναρίθμητα δεκαδικὰ ψηφία. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἐὰν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ καὶ θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, κατὰ τὴν τροπὴν κλάσματος εἰς δεκαδικὸν ἢ θὰ εὕρωμεν κατὰ τὴν διαίρεσιν ὑπόλοιπον 0, ὁπότε τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἢ ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ ἐπ' ἄπειρον, ὁπότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀναρίθμητα ψηφία τοῦ πηλίκου.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν παρατηροῦμεν ὅτι, ἓν ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οὕτω π. χ. κατὰ τὴν τροπὴν τοῦ $\frac{1}{3}$ εἰς δεκαδικόν, τὸ πηλίκον ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία καὶ πάντα τὰ αὐτά. Ὁμοίως κατὰ τὴν τροπὴν τοῦ $\frac{2}{7}$ ἔχομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 0,285714285..., ἤτοι ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὰ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τὰ 2· 8· 5· 7· 1· 4.

Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀναρίθμητα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονναι ἀπό τινος καὶ ἑξῆς κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγονται *περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί*, ἡ δὲ ὁμὰς τῶν ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*. Οἱ μέχρι τοῦδε δεκαδικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων λέγονται *κοινοὶ δεκαδικοὶ* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν περιοδικῶν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν τὰ ἑπόμενα κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. (Ἐὰν ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶνε περιοδικός, νὰ διακοπῇ ἡ διαίρεσις μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς περιόδου). α΄) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{11}{21}$, β΄) $\frac{2}{3}, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}, \frac{8}{25}$. γ΄) $\frac{7}{12}, 6\frac{2}{3}, 16\frac{1}{11}, \frac{10}{13}$.

2) Ὁμοίως τὰ κλάσματα). α΄) $\frac{37}{180}, \frac{57}{200}, \frac{753}{1080}, \frac{8483}{1000}$. β΄) $\frac{2}{10}, \frac{1}{11}, \frac{5}{12}$. γ΄) $\frac{7}{13}, \frac{5}{7}, \frac{4}{24}$, δ΄) $\frac{17}{63}, \frac{8}{15}, \frac{51}{12}, \frac{107}{12}$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑξῆς πράξεων.

α΄) $1\frac{1}{2}+3,5$· β΄) $2\frac{3}{4}-152$· γ΄) $2\frac{4}{50}\times 3,12$,

δ΄) $3\frac{3}{20}\times 4,1$. ε΄) $4\frac{5}{5}:2,16$.

Τροπὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.

182. Διὰ νὰ τρέψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, π. χ. τὸν 0,345, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς· *τριακόσια τεσσαράκοντα πέντε χιλιοστά*, καὶ γράφομεν αὐτὸν ἀμέσως ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν, ἤτοι $\frac{345}{1000}$, ἁπλοποιοῦντες δ᾽ αὐτὸ εὑρίσκομεν $\frac{69}{200}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $1,43=\frac{143}{100}$. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«Διὰ νὰ τρέψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, γράφομεν ἀριθμητὴν μὲν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν χωρὶς κόμμα, παρανομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ».

Πράξεις ἐπὶ κλασμάτων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

183. *Πρόβλημα. «Ἠγόρασέ τις 100 ὀκ. μῆλα πρὸς $7\frac{1}{2}$ δρ. τὴν ὀκᾶν· πόσα ἐπλήρωσε;»*

Ὡς γνωστὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $7\frac{1}{2}$ δρ. ἐπὶ 100. Ἀλλὰ πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν τὸ $7\frac{1}{2}$ εἰς δεκαδικὸν 7,5 δρ., ὅτε ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται εὐκολώτερον καὶ ἔχομεν $7,5\times 100=750$ δρ.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 42,85 δραχ. τὸ $7\frac{5}{8}$ δρ. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα, ἢ τοὐναντίον τὸν $\frac{5}{8}$ εἰς δεκαδικόν. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν $\frac{5}{8}=0,625$. Ἑπομένως εἶνε $7\frac{5}{8}=7,625$. Ἄρα ἔχομεν 42,85 δρ. − 7,625 δρ. $=35,225$ δρ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ κλασματικῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἄλλοτε μὲν τρέπομεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἄλλοτε τρέπομεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα, ἢ καὶ διατηροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὅπως ἐδόθησαν. Συνηθέστερον γίνεται τὸ πρῶτον, καὶ ἰδίως ὅταν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους ἔχομεν, τρέπωνται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ. α') $6,18+\frac{3}{4}-1,5$ · β') $\frac{3}{8}:0,142$ · γ') $2\frac{1}{5}+3,1-0,831\times\frac{1}{2}$ · δ') $\frac{4}{25}\times3,12+\frac{5}{2}\times0,14:0,75$.

Συμβολικὴ παράστασις πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων.

184. *Πρόβλημα.* «*Ἓν ποσὸν χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς 4 ἀνθρώπους. Ὁ πρῶτος ἔλαβε $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{8}$, ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ τέταρτος τὸ ὑπόλοιπον· πόσον μέρος τοῦ ποσοῦ ἔλαβεν ὁ τέταρτος;*»

Ἀφοῦ ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἔλαβον ἀντιστοίχως τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου ποσοῦ, καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἔλαβον μαζῆ $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{47}{60}$ τοῦ ποσοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅλον ποσὸν εἶχεν $\frac{60}{60}$ ἔμειναν $\frac{60}{60}-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ τοῦ ποσοῦ, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὁ τελευταῖος. Ὥστε ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰ $\frac{13}{60}$ τοῦ ποσοῦ. Ἂν τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 500 δρχ. ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰ $\frac{13}{60}$ τῶν 500 δρ., ἤτοι $500\times\frac{13}{60}$. Ἂν τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 1200 δραχμαί, ὁ τέταρτος ἔλαβε 1200 δρ. $\times\frac{13}{60}$. Ἂν τὸ ποσὸν ἦτο α δρ., ὁ τέταρτος θὰ ἐλάμβανε α δρ. $\times\frac{13}{60}$. Καθὼς παρατηροῦμεν, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ ὡρισμένον αὐτὸ ποσὸν ἢ τὸν τυχόντα μὲν ἀλλ' ὡρισμένον ἀριθμόν, τὸν παριστάνοντα τὸ ποσόν, μεταχειριζόμεθα τὸ γράμμα α.

Ἐν γένει, *παριστάνομεν διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων* τοῦ *ἀλφαβήτου ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθεται ὅτι εἶνε οἱοιδήποτε μέν, ἀλλ' ὡρισμένοι.* Ὑποθέτομεν ὅτι ἓν γράμμα ἔχει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμήν, δηλαδὴ παριστάνει ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ζητήματος, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπάρχει τὸ γράμμα αὐτό.

185. Κατὰ τ' ἀνωτέρω, ἐὰν α, β, γ παριστάνουν τρεῖς ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε ἢ συγκεκριμένους ἀλλ' ὁμοειδεῖς, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε τὸ $\alpha+\beta+\gamma$, ἢ τὸ $\beta+\alpha+\gamma$, ἢ τὸ $\alpha+\gamma+\beta$ κλπ.

Ἐὰν α, β, εἶνε δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ β εἶνε μικρότερος τοῦ α, ἡ διαφορὰ τούτων παριστάνεται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$. Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ αὐτὴ παρασταθῇ διὰ τοῦ γ, θὰ ἔχωμεν $\alpha-\beta=\gamma$ καὶ θὰ εἶνε $\alpha=\beta+\gamma$. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον, π. χ. τὸν 5, σημαίνει τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$ ἤτοι 5 φορὰς τὸν α, σημειώνομεν δ' αὐτὸ διὰ τοῦ $5\times\alpha$ ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ $5\,\alpha$. Ὥστε ἔχομεν $\alpha.5=5\alpha$. Ὁμοίως $\alpha.7=7\alpha$.

Ἐν γένει, ἐὰν β εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα β προσθετέων ἴσων μὲ α, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha\ldots+\alpha$, ἐν ὅλῳ β φοράς, καὶ ἔχομεν $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν α καὶ β σημειώνεται διὰ τοῦ $\alpha:\beta$, παριστάνεται δέ, ὡς εἶνε γνωστόν, διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Τὸ γινόμενον ἑνὸς κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν λ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{\alpha}{\beta}\times\lambda=\frac{\alpha\times\lambda}{\beta}$. Ὁμοίως ἔχομεν $\lambda\times\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda\times\alpha}{\beta}$.

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$ (κατὰ τὰ ἐν 163, σελ. 116).

Τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ ἀκεραίου λ ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\beta}:\lambda=\frac{\alpha}{\beta\times\lambda}$, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\gamma}.$$

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα γράμματα πρὸς παράστασιν ἀριθμῶν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

Οὕτω ἐὰν ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δρ., ὅπου α παριστάνει ἕνα οἱονδήποτε ὡρισμένον ἀριθμόν, καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ β ὀκάδων, θὰ ἔχωμεν (176, σελὶς 128), ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν $x=\alpha\times\beta$ δρ.

Ἂν τοὐναντίον αἱ α μονάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται β δρ., εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος τούτων, ἂν διαιρέσωμεν τὸ β δρ. : α ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ δρ.

Αἱ τοιαῦται συμβολικαὶ γραφαί, ὡς αἱ ἀνωτέρω, εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχουν γράμματα παριστάνοντα ἀριθμούς, λέγονται καὶ *τύποι*.

186. Διὰ νὰ εὕρωμεν *τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν* ἑνὸς τύπου, δηλαδὴ τον ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον παριστάνει οὗτος, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον παριστάνει ἕκαστον γράμμα αὐτοῦ. Ἂν δὲ δοθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ἀφοῦ πρῶτον γράψωμεν ἀντὶ τῶν γραμμάτων τὴν τιμὴν τούτων, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας μεταξὺ αὐτῶν πράξεις καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν.

Οὕτω π. χ. ὁ τύπος $α+β$ ὅταν εἶνε $α=2$, $β=3$, ἔχει τὴν τιμὴν $2+3=5$· ὅταν $α=1$ καὶ $β=6$, εἶνε $4+6=10$· ὅταν $α=2\frac{1}{2}$ καὶ $β=3\frac{3}{4}$, εἶνε $2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}+3\frac{3}{4}=5+\frac{5}{4}=6\frac{1}{4}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ κάτωθι τύπου.

$α+β-γ$· α΄) ὅταν εἶνε $α=2$, $β=3$, $γ=1$· β΄) $α=5\frac{1}{2}$, $β=3$, $γ=5,3$.

2) Ὁμοίως τῶν α΄) $(α+β).γ$, ὅταν εἶνε $α=4$, $β=5$, $γ=2$..

β΄) $(α+β)+(γ+δ)$, ὅταν $α=4$, $β=1\frac{1}{3}$, $γ=\frac{1}{3}$ $δ=1,5$.

γ) $(α-β).(γ-δ)$ ὅταν εἶνε $α=15$, $β=4$, $γ=3$, $δ=2$.

3) Ὁμοίως τοῦ $(α+β):γ$, ὅταν εἶνε τὸ $α=\frac{3}{8}$, $β=\frac{3}{5}$, $γ=3\frac{1}{2}$,

4) $(α+β):(γ-δ)$, ὅταν εἶνε $α=12$, $β=6$, $γ=8$, $δ=1$.

5) Τοῦ $(α^2+1):(α+1)$ ὅταν τὸ $α=1$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἔχει τις *α* δραχμὰς καὶ λαμβάνει ἀκόμη 5 δραχμάς· πόσας ἔχει ἐν ὅλῳ;

2) Ἔχει τις *α* δραχμὰς καὶ λαμβάνει ἀκόμη τριπλάσιον τούτων· πόσας ἔχει ἐν ὅλῳ;

3) Ἔχει τις *β* δραχμάς, καὶ ἐξ αὐτῶν δίδει α΄) 6 δραχμάς. β΄) $3\frac{3}{4}$ δρ., καὶ τέλος *δ* δρ.· πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

4) Ἔχει τις *α* δρ. καὶ ἐξοδεύει τὸ ἥμισυ αὐτῶν· πόσα τοῦ μένουν; Πόσα τοῦ μένουν ἐὰν ἐξοδεύσῃ τὸ τρίτον; τὸ τέταρτον; τὸ πέμπτον αὐτῶν;

5) Ἂν *α* φανερώνῃ ἕνα ἀριθμὸν ἀκέραιον, πῶς θὰ παρασταθῇ ὁ κατὰ μονάδα μεγαλύτερος αὐτοῦ; πῶς ὁ κατὰ μονάδα μικρότερος τούτου;

6) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς ἐμπορεύματος στοιχίζει *μ* δραχμάς· πόσον στοιχίζουν αἱ 2 ὀκάδες; αἱ *3* ὀκάδες; αἱ 6 ὀκάδες; αἱ *β* ὀκάδες αὐτοῦ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Περὶ μέτρων σταθμῶν καὶ νομισμάτων

Περὶ μετρήσεως ποσῶν.

187. Ἐὰν ἔχωμεν μίαν γραμμὴν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν ἢ τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος, ἢ ἓν χρονικὸν διάστημα κτλ, ἐπειδὴ καθὲν ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται ποσὸν ἢ μέγεθος (1, σελὶς 3). Ἕκαστον τῶν ποσῶν τούτων δὲν ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη αὐτοτελῆ, καὶ τὰ ὁποῖα νὰ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη αὐτοῦ, ἀλλὰ δύναται καθὲν ἐξ αὐτῶν νὰ χωρισθῇ εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα συνέχονται μεταξύ των καὶ ἀποτελοῦν ἓν ὅλον.

Τὰ τοιοῦτα ποσὰ καλοῦνται *συνεχῆ*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλων ποσῶν, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν *πλήθη* ἢ *ἀσυνεχῆ ποσά*.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἓν οἱονδήποτε ποσόν, λαμβάνομεν ἓν ἄλλο ὁμοειδὲς αὐτοῦ καὶ πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὸ δοθέν· δηλαδὴ εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ το δεύτερον εἰς τὸ πρῶτον. Ἡ σύγκρισις αὐτὴ λέγεται *μέτρησις τοῦ ποσοῦ*. Τὸ ὡρισμένον ποσὸν μὲ τὸ ὁποῖον μετροῦμεν ἄλλο (ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὸ) λέγεται *μονὰς μετρήσεως*, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως, λέγεται τιμὴ τοῦ δοθέντος ποσοῦ ἢ ἀριθμὸς παριστάνων τὸ ποσόν.

Μονάδες μήκους, ἐπιφανείας κλπ.

188. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους ἔχομεν ὡς μονάδα τὸ *μέτρον* ἢ τὸν *βασιλικὸν πῆχυν*, τὸ ὁποῖον εἶνε περίπου τὸ ἓν *τεσσαρακοντάκις ἑκατομμυριοστὸν* τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς, δηλαδὴ 40 000 000 τοιαῦτα μέτρα ἀποτελοῦν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

Σχηματίζομεν ἐκ τοῦ μέτρου ἄλλας μονάδας, ὅπως εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἐσχηματίσαμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων. Οὕτω τὸ μῆκος δέκα μέτρων λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ λέγεται *δεκάμετρον*, τὸ μῆκος ἑκατὸν μέτων λέγεται *ἑκατόμετρον*, χιλίων μέτρων *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον*, καὶ δέκα χιλιάδων μέτρων *μυριάμετρον*.

Ὁμοίως σχηματίζομεν ἐκ τοῦ μέτρου ἄλλας μονάδας, ὅπως ἐκ τῆς μονάδος ἐσχηματίσαμεν τὰς δεκαδικὰς μονάδας. Οὕτω λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ δέκατον τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *παλάμη* ἢ *δεκατόμετρον*· τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *δάκτυλος*, κοινῶς πόντος, ἢ *ἑκατοστόμετρον*· τὸ χιλιοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον λέγεται *γραμμὴ* ἢ *χιλιοστόμετρον*.

Ἐὰν καθεμίαν τῶν ἀνωτέρω μονάδων ἐκφράσωμεν εἰς μέτρα, θὰ ἔχωμεν 1 δεκάμετρον = 10 μ., 1 ἑκατόμετρον = 100 μ., 1 χιλιόμετρον = 1000 μ., μυριάμετρον = 10 000 μ., 1 παλάμη = 0,1 μ., 1 δάκτυλος = 0,01 μ., 1 γραμμὴ = 0,001 μ.

Τὸ μέτρον, ἐκ τοῦ ὁποίου σχηματίζομεν τὰς ἄλλας μονάδας, λέγεται *ἀρχικὴ μονάς*.

189. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων μεταχειρίζονται εἰς τὴν οἰκοδομικὴν τὸν *τεκτονικὸν πῆχυν*, ὁ ὁποῖος εἶνε 0,75 μ., ἢ $\frac{3}{4}$ μ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται ὡς μονάδα τὸν μικρὸν πῆχυν Κωνσταντινουπόλεως ἢ ἁπλῶς τὸν *πῆχυν*, ὁ ὁποῖος ἔχει 0,648 μ., ἢ 64 δακτύλους περίπου, διαιρεῖται δὲ εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *ρούπια*.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν μεταχειρίζονται ὡς μονάδα μήκους τὴν *ὑάρδαν*, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 0,914 μ. καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 *πόδας*, καθεὶς δὲ ποὺς 12 δακτύλους (ἴντζας).

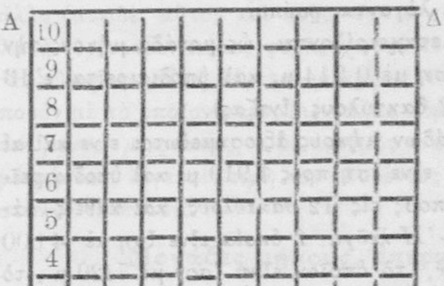
Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων μήκους ἀξιοσημείωτοι εἶνε καὶ αἱ ἑξῆς. Ἡ *ὀργυιὰ* ἡ ὁποία εἶνε ἴση πρὸς 1,919 μ. καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 9 *πόδας*, καθεὶς ποὺς εἰς 12 *δακτύλους*, καὶ καθεὶς δάκτυλος εἰς 12 *γραμμάς*. *Ἡ λεῦγα*, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 4 000 μ. τὸ *γεωγραφικὸν μίλιον*, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ 7420 μ., τὸ δὲ *ναυτικὸν μίλιον* μὲ 2852 μέτρα. *Τὸ Ἀγγλικὸν μίλιον* εἶνε ἴσον μὲ 1760 ὑάρδας ἢ μὲ 1609 μ.

190. ***Μονάδες ἐπιφανείας.*** Διὰ τὴν μέτρησιν ἐπιφανείας λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ 1 μέτρον, λέγεται δὲ *τετραγωνικὸν μέτρον*. Διὰ τὴν μέτρησιν μεγαλυτέρων ἢ μικροτέρων ἐκτάσεων ἐπιφανείας μεταχειριζόμεθα ἐπίσης ἄλλας μονάδας, αἱ ὁποῖαι εἶνε τετράγωνα τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ σχηματίζεται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου καθὼς αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τῶν ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς μονάδος. Οὕτω ἔχομεν ἀκόμη τὰς ἑξῆς μονάδας ἐπιφανείας.

Τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ἔχον πλευρὰν δέκα μέτρα· τὸ *τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον*, ἔχον πλευρὰν 100 μ.· τὸ *τετραγωνικὸν μυριάμετρον*, ἔχον πλευρὰν 10000 μ.· τὴν *τετραγωνικὴν παλάμην* ἔχουσαν πλευρὰν 0,1 μ.· τὸν *τετραγωνικὸν δάκτυλον* καὶ τὴν *τετραγωνικὴν γραμμὴν* ἔχοντα πλευρὰς ἀντιστοίχως 0,01 καὶ 0,001 μ.

Ἐὰν λάβωμεν ἓν τετράγωνον π. χ. τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαιρέσωμεν καθεμίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΑ καὶ ΒΓ εἰς 10 ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων της διαιρέσεως τῆς ΒΑ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ΒΓ παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΑ, τὸ τετράγωνον θὰ χωρισθῇ εἰς 100 ἴσα τετράγωνα. Καθὲν τούτων θὰ ἔχῃ πλευρὰν τὸ δέκατον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ, εἶνε δὲ τὸ ἑκατοστὸν ἐκείνου. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἔχον πλευρὰν δεκαπλασίαν τοῦ ἄλλου εἶνε ἑκατονταπλάσιον αὐτοῦ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον εἶνε ἴσον μὲ 100 τ. μ.· τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον μὲ 10000 τ. μ.· τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον μὲ 1000000 τ. μ.



Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶνε ἴση μὲ 0,01 τ. μ.· ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος μὲ 0,0001 τ. μ. καὶ οὕτω καθεξῆς.

191. Πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειρίζονται συνήθως ἐν Ἑλλάδι ὡς μονάδα τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν μήκους ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως ἢ 0,75 μ., καὶ λέγεται *τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς*, εἶνε δὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶνε ἴσον $\frac{16}{9}$ τοῦ τετραγωνικοῦ τεκτονικοῦ πήχεως.

Τὸ *στρέμμα* εἶνε ἐπιφάνεια 1000 τ. μ., τὸ δὲ παλαιὸν *στρέμμα* 1270 τ. μ.

Πρὸς συντομίαν παριστάνομεν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διὰ τοῦ (μ²), τὸ τετραγ. δεκάμετρον διὰ τοῦ (δμ²), τὸ τετραγ. χιλιόμετρον διὰ τοῦ (χμ²), τὴν τετραγ. παλάμην διὰ τοῦ (π²) καὶ οὕτω καθεξῆς.

192. *Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.* Διὰ τὴν μέτρησιν ὄγκου καὶ τῆς χωρητικότητος λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς 6 ἴσα τετράγωνα, καθὲν τῶν ὁποίων εἶνε ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, καθεμία δὲ κοψὶς αὐτοῦ ἔχει μῆκος 1 μ. Ἡ μονὰς αὕτη λέγεται *κυβικὸν μέτρον* καὶ σημειώνεται διὰ τοῦ (μ³). Ἐξ αὐτοῦ σχηματίζομεν ἄλλας μικροτέρας ἢ μεγαλυτέρας μονάδας, ὅπως καὶ τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Οὕτω ἔχομεν τὴν *κυβικὴν παλάμην* (π³), καὶ τὸν *κυβικὸν δάκτυλον* (εμ³), καὶ εἶνε ἡ μὲν κυβικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ (μ³), ὁ δὲ (εμ³) τὸ $\frac{1}{1\,000\,000}$ τοῦ (μ³).

193. Ὅσον χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην λέγεται *λίτρον* καὶ χρησιμεύει συνήθως ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν. Ἐπειδὴ τὸ (μ³) ἔχει 1 000 κυβικὰς παλάμας, ἕπεται ὅτι τὸ (μ³) χωρεῖ 1000 λίτρα, τὸ δὲ λίτρον εἶνε χιλιοστὸν τῆς χωρητικότητος τοῦ (μ³). Ἡ χωρητικότης 100 λιτρῶν λέγεται *ἑκατόλιτρον*.

194. *Μονάδες βάρους.* Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον, καὶ λέγεται *γραμμάριον* (γρ.) Ἐκτὸς τῆς ἀρχικῆς αὐτῆς μονάδος βάρους ἔχομεν καὶ ἄλλας, καθὼς τὸ *χιλιόγραμμον* ἴσον μὲ 1 000 γραμμάρια· τὸν *τόνον* ἴσον μὲ 1 000 χιλιόγραμμα. Καὶ τὸ μὲν χιλιόγραμμον εἶνε τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4°, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην, ὁ δὲ τόνος εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον καὶ ἰσοῦται μὲ 781 ὀκ. καὶ 100 δρ.

195. Ἐν Ἑλλάδι μεταχειρίζονται ὡς μονάδα βάρους τὴν *ὀκᾶν*, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ 1280 γραμ., διαιρεῖται δὲ εἰς 400 *δράμια*. Τὸ ἓν δράμιον εἶνε ἴσον μὲ 3,2 γραμ., τὸ χιλιόγραμμον ἢ *κιλὸν* μὲ 312,5 δράμια. Βάρος ἴσον μὲ 44 ὀκάδας λέγεται *στατὴρ* (κοινῶς καντάρι).

196. *Μονάδες νομισμάτων.* Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν νομισμάτων διὰ τὴν Γαλλίαν, Ἑλβετίαν καὶ Βέλγιον εἶνε τὸ *φράγκον*, διὰ τὴν Ἰταλίαν ἡ *λίρα* (ἐν Ἑλλάδι *λιρέττα*), καὶ διὰ τὴν Ἑλλάδα ἡ *δραχμή*, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτά*. Ἐκτὸς τῆς δραχμῆς ὑπάρχουν καὶ τὰ ἑξῆς ἀκόμη ἀργυρᾶ νομίσματα.

Τὸ *δίδραχμον* ἴσον μὲ 2 δραχμάς, τὸ *πεντάδραχμον* ἢ τάλληρον ἴσον μὲ 5 δραχμάς, τὸ *πεντηκοντάλεπτον* ἴσον μὲ 50 λεπτά, τὸ *εἰκοσάλεπτον* ἴσον μὲ 20 λεπτά. Χρυσᾶ νομισματα εἶνε *πεντάδραχμον*, *πεντηκοντάδραχμον* καὶ *ἑκατοντάδραχμον*.

Ἐκτὸς τούτων ἔχομεν νικέλινα νομίσματα· πεντάλεπτον δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον· χαλκᾶ, τὸ μονόλεπτον, δίλεπτον, πεντάλεπτον ἢ ὀβολὸν ἢ πεντάραν καὶ τὸ δεκάλεπτον ἢ διώβολον ἢ δεκάραν· ἔχομεν δὲ ἐξ ἀλουμινίου μὲν δεκάλεπτα καὶ πεντηκοντάλεπτα, ἐκ χαλκοῦ καὶ νικελίου δὲ δραχμὰς καὶ δίδραχμα.

197. Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε ἡ *λίρα στερλίνα* νόμισμα χρυσοῦν, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 25,22 φράγκα (περίπου) ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 *σελλίνια*, καθὲν σελλίνιον εἰς 12 *πέννας*, καὶ καθεμία πέννα εἰς 4 *φαρδίνια*. Ἐκ τούτων τὸ σελλίνιον εἶνε ἀργυροῦν, ἡ δὲ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον χαλκᾶ.

198. Εἰς τὴν Ἀμερικὴν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε τὸ *δολλάριον* καὶ εἶνε ἀξίας 5,18 φρ. Χρυσᾶ μὲν νομίσματα ὑπάρχουν 25· 20· 5· 3 καὶ 1 δολλαρίου, ἀργυρᾶ δὲ $1, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}$ τοῦ δολλαρίου. Τὸ δολλάριον ἔχει 100 σέντς.

199. Περὶ τῶν μονάδων ἄλλων χωρῶν ἀναγράφονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα τῶν σελίδων 146 καὶ 147.

200. *Μονάδες χρόνου καὶ περιφερείας κύκλου*. Ἀρχικὴ μονὰς χρόνου εἶνε ἡ *ἡμέρα*, ἤτοι τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ παρερχόμενον ἀπὸ ἑνὸς μεσονυκτίου μέχρι τοῦ ἀμέσως ἑπομένου. Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 *ὥρας*, ἡ ὥρα $60^{λ}$ *(πρῶτα λεπτά)* καὶ $1^{λ}$ εἰς $60^{δ}$ *(δεύτερα λεπτά)*.

Διὰ τὴν μέτρησιν μακρῶν χρονικῶν διαστημάτων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *ἔτος*, τὸ ὁποῖον ἔχει 365 ἡμέρας καὶ τότε λέγεται κοινόν, ἢ 366 ἀνὰ τέσσαρα ἔτη καὶ τότε λέγεται *δίσεκτον*.

Οὕτω *δίσεκτον* εἶνε ἔτος τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 Π. χ. τὰ ἔτη 1920, 1924, 1928 εἶνε *δίσεκτα*.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 *μῆνας*, τῶν ὁποίων ἄλλοι μὲν ἔχουν 30 ἡμέρας καὶ ἄλλοι 31, ὁ δὲ Φεβρουάριος 28 καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 29 ἡμέρας.

Χρονικὸν διάστημα 100 ἐτῶν λέγεται *αἰών*. Ἑ*βδομὰς* εἶνε χρονικὸν διάστημα 7 ἡμερῶν, ἀρχομένη ἀπὸ τῆς Κυριακῆς καὶ λήγουσα τὸ Σάββατον.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου λαμβάνομεν ὡς μονάδα τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἴσον μὲ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μοῖρα*. Ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος 360 μοιρῶν. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* (′) καὶ καθὲν πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα* (″) *λεπτά*. Αἱ μοῖραι σημειώνονται μὲ τὸ σύμβολον (°). Π. χ. 45 μοῖραι σημειώνονται οὕτω 45°.

201. *Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.* Τὰς μονάδας τὰς ὁποίας ἀνωτέρω ἐγνωρίσαμεν δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς δύο κατηγορίας. Ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὑποδιαίρεσιν ὁμοίαν μὲ τὰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως, καὶ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ὁμοίως δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν. Αἱ μονάδες αἱ ὁποῖαι ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸ δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα ἢ *δεκαδικὸν σύστημα μετρήσεως*, κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὸ *δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως*. Τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει τὸ προτέρημα ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν ποσῶν διὰ μονάδων αὐτοῦ δίδουν ἐξαγόμενα ἀριθμοὺς δεκαδικοὺς ἐν γένει, αἱ δ᾽ ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν καὶ γίνονται μετὰ μεγαλυτέρας εὐκολίας. Π. χ. τὸ μῆκος 10 μ., 6 παλ., 3 δ., 7 γρ., γράφεται οὕτω 10,367 μ.

Προβλήματα ἀλλαγῆς μονάδος.

1) Νὰ τραποῦν 13,845 χιλιόγραμμα εἰς γραμμάρια καὶ ὀκάδας.

13845. 10 ὀκ. $326\frac{9}{16}$ δρμ.

2) Ἐπίσης 1,2786 (μ³) εἰς α′) κυβ. παλάμας· β′) κυβ. δακτύλους.

3) Πόσας ἡμέρας ἔχουν α′) 34 ἔτ., ἔχοντα 365 ἡμ. καὶ ἀνὰ 4 ἔτη 366 ; β′) 8,4 μῆνες (ἐὰν καθεὶς ἔχῃ 30 ἡμ.) ; 12 418·252

4) Πόσας ὥρας ἔχουν· α′) 2 μῆνες· β′) 2,5 ἡμέραι ; 1440·60

5) Νὰ τραποῦν 540,5 (πχ²) εἰς (μ²). 304,031.

6) Νὰ τραποῦν 209,5 (245) μ. α′) εἰς μικροὺς πήχεις β′) εἰς ὑάρδας· γ′) ὁμοίως 1,45 χμ. εἰς ὑάρδας 448,302·317,833·1586,43.

(Συνέχεια βλέπε εἰς τὴν σελίδα 148)

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΙ ΟΠΟΙΑΙ

Α΄) μέτρα

1) Δεκαδικόν με-

Κράτη εἰς τὰ ὁποῖα εἶνε ἐν χρήσει	*Μονάδες μήκους*	*Μονάδες ἐπιφανείας*
Γαλλία	μυριάμετρον = 10000 μ.	τετραγ. μυριάμετρον = 100000000 ($μ^2$)
Βέλγιον	χιλιόμετρον = 1000 μ.	» χιλιόμετρον = 1000000 ($μ^2$)
Ἑλβετία		
Γερμανία	ἑκατόμετρον = 100 μ.	τετραγ. ἑκατόμετρον ἢ ἐκτάριον = 10000 ($μ^2$)
Αὐστρία	δεκάμετρον = 10 μ.	ἄριον = 100 ($μ^2$)
Ἰσπανία		τετραγ. μέτρον = 1 ($μ^2$)
Ρουμανία	ἀρχικὴ μονὰς = 1 μ.	τετραγ. παλάμη = 0,01 ($μ^2$)
Βουλγαρία		
Σερβία	δεκατόμετρον = 0,1 μ.	
Τουρκία	ἑκατοστόμετρον = 0,01 μ.	τετραγ. δάκτυλος = 0,0001 ($μ^2$)
Ἑλλὰς	χιλιοστόμετρον = 0,001 μ.	τετρ. γραμμὴ = 0,000001 ($μ^2$)

2) Ἄλλαι

Ἑλλὰς	τεκτονικὸς πῆχυς = 0,75 μ.	τετραγ. τεκτον. πῆχυς = $\frac{9}{16}$ ($μ^2$)
	ἐμπορικὸς πῆχυς = 0,648 μ.	στρέμμα = 1000 ($μ^2$)
	ρούπιον = $\frac{1}{8}$ πήχ.	παλαιὸν στρέμμα = 1270 ($μ^2$)
Ἀγγλία καὶ Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι	ὑάρδα = 0,914 μ.	τετραγωνικὴ ὑάρδα = 0,836 ($μ^2$)
	ποὺς = $\frac{1}{3}$ ὑάρδ.	ἄκρ (διὰ τοὺς ἀγρούς) = 40,5 στρ.
	δάκτυλος = $\frac{1}{12}$ πόδ.	
	Ἀγγλ. μίλιον = 1760 ὑάρδ. = 1609 μ.	τετραγ. ποὺς τετραγ. δάκτυλος
Ρωσσία	πῆχυς ἀρσὶν = 1,711 μ.	τετραγωνικὸς ποὺς
	Ἀγγλ. ποὺς = 0,305 μ.	
	βέρτσιον = 1,500 π. ἀρσὶν	

Β΄) Μονάδες νο-

Κράτη ἔχοντα μονάδας

Ἑλλὰς	δραχμὴ	Ἀγγλία	Γερμανία	Σκανδιναυϊκαὶ χῶραι
Βέλγιον, Γαλλία, Ἑλβετία	φράγκον	λίρα στερλίνα = 25,23 φρ.	μάρκον = 1,25 φρ.	φλωρίνιον = 2,12 φρ.
Ἰταλία	λιρέτα			
Ἰσπανία	πεσσέτα	σελίνιον = $\frac{1}{20}$ λίρ.		
Ρουμανία	λέϊ		πφένιγκ = 0,01 μάρ.	αἶρ = 0,01 φλ.
Βουλγαρία	λέβι			
Σερβία	δηνάριον	πέννα = $\frac{1}{12}$ σελ.		

ΕΙΝΕ ΕΝ ΧΡΗΣΕΙ ΕΙΣ ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΡΗ

καὶ σταθμά.

τρικὸν σύστημα

Μονάδες ὄγκου	Μονάδες χωρητικότητος	Μονάδες βάρους
κυβικὸν χιλιόμ.=1000000000 ($μ^3$) κυβικὸν μέτρον = 1 ($μ^3$) κυβ. δεκατόμετρον=0,001 ($μ^3$) κυβ.ἑκατοστόμετρ.=0,000001($μ^3$) κυβ. χιλιοστόμ.=0,000000001($μ^3$)	ἑκατόλιτρον=100λ. λίτρον χωρητικότης 1 (εμ³)	τόνος=1000 χιλιόγρ. χιλιόγραμμμον γραμμάριον=0,001 τοῦ χιλιογράμμου.
μονάδες		
κυβ. τεκτον. πῆχυς = $\frac{27}{64}$ ($μ^3$)	κιλὸν Κων]πόλεως =35,37 λ.	στατὴρ=44 ὀκ. ὀκᾶ=1280 γραμμ. δράμιον = $\frac{1}{400}$ ὀκ. Ἑν. λίτρα=149 δρμ. χιλιόλιτρον=375 ὀκ. Ἀγγλ.λίτ.=453,6γρ. φαρμακευτικὴ λίτρα =360 γρμ. οὐγγιά=$\frac{1}{16}$ λ. καράτιον = $\frac{1}{5}$ τοῦ γραμμαρίου
κυβικὴ ὑάρδα	κουάρτερ=2,91 ἑκ. μποῦσελ=$\frac{1}{8}$κουάρ. τόνος (διὰ τὰ πλοῖα) =2,83 ($μ^3$)	Ἀγγλ. στατ.=112λ. Ἀγγλ. λ.=453,6 γρ. οὐγγιά=$\frac{1}{16}$ λ.
κυβικὸς πούς	φάθα=2,10 ἑκατόλ.	

μισμάτων καὶ σχέσεις αὐτῶν

τῆς λατινικῆς συμβάσεως

Πορτογαλλία	Αὐστρία	Ρωσσία	Ἡν. Πολιτεῖαι	Τουρκία
μιλρεῖς5,55=φρ ρεῖς=$\frac{1}{100}$μιλ.	κορώνα=1,08 φρ. χέλλερ=0,01κ.	ρούβλιον=2,65 φρ. καπίκιον=0,01 τοῦ ρουβλίου	δολλάρ.5,18φρ. σέντς=0,01δ.	γρόσιον=40παρ. 100 γρ.=1 λίρα λίρα=22,80φρ. γρόσιον=0,01λ. Αἰγ.λίρα=26φρ. μετζίτι=20 γρ.

7) Νὰ τραποῦν 140 ὑάρδαι εἰς μέτρα καὶ ταῦτα εἰς μικροὺς πήχεις. 127,96·197,47.

8) Νὰ τραποῦν α') 35 ὀκ. εἰς γραμμάρια· β') 890 γραμμάρια εἰς δράμια· γ') 30 ὀκ. εἰς χιλιόγραμμα. 44800·278,125·38,4.

9) Νὰ τραποῦν εἰς φράγκα 462,5 λίραι τῆς Ἀγγλίας. 11 668,875.

10) Νὰ τραποῦν 1400 δολλάρια α') εἰς φράγκα· β') εἰς λίρας Ἀγγλίας. γ') εἰς μάρκα. 7 252 φρ.· 287,44 λίρ.· 5 801,6 μάρκ.

11) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 16,40 (2,45) δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ; 10,6272(15,876).

12) Νὰ τραποῦν 5 βασιλικὰ στρέμματα εἰς ($\pi\chi^2$.) $8888\frac{8}{9}$.

13) Πόσον τιμᾶται οἰκόπεδον 2 450 (2 483,45) (μ^2), ἐὰν ὁ ($\pi\chi^2$) τιμᾶται 80 (72,50) δρχ. ; $34\,844{,}44\frac{4}{9}$(320089,11.)

14) Οἰκόπεδον 478 (μ^2) τιμᾶται 34 416 δρχ.· πόσον τιμᾶται ὁ ($\pi\chi^2$) ; 40,5.

15(Νὰ τραποῦν 258 ($\pi\chi^2$) εἰς (μ^2) καὶ 152,65 ὑάρδαι εἰς μέτρα καὶ εἰς τεκτονικοὺς πήχεις. 145,125· 139,2· 186,02.

16) Νὰ τραποῦν 15° (658'') εἰς πρῶτα καὶ δεύτερα (πρῶτα) λεπτά. 900'· 54 000'' $\left(10\frac{29'}{30}\right)$.

Περὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

202. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμετρήσαμεν ἓν ὕφασμα καὶ εὑρήκαμεν ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶνε 12 π. καὶ 6 ρ.· τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 π. 6 ρ. παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν ἐκ τῆς μετρήσεως ἑνὸς χρονικοῦ διαστήματος εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 47 ὥρ. 20λ, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνει τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα. Καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ διαφόρους ἄλλους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε πολλαπλάσιαι ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος. Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 12 π. 6 ρούπια ὑφάσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 12 π. καὶ 6 ρούπια, ἐνῷ τὸ ρούπιον εἶνε ὑποδιαίρεσις τοῦ ἑνὸς πήχεως. Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καλοῦμεν *συμμιγεῖς* ἀριθμούς, τοὺς δὲ ἀκεραίους καὶ κλασματικοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων *ἁπλοῦς ἀριθμούς*.

Ἐν γένει, «*συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουν ἰδιαίτερον ὄνομα καὶ καθεμία εἶνε πολλαπλάσιον ἢ ὑποδιαίρεσις τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς μονάδος*».

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν.

203. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 17 ὥρ. εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, δηλαδὴ εἰς πρῶτα λεπτά. Λέγομεν· ἀφοῦ ἡ ὥρα ἔχει 60^{λ}, αἱ 17 ὧραι ἔχουν $60^{\lambda} \times 17 = 1020^{\lambda}$.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν 6 στατ. εἰς ὀκάδας, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ 1 στατ. ἔχει 44 ὀκ., οἱ 5 στατ. ἔχουν 44 ὀκ. $\times 5 = 220$ ὀκ. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«*διὰ νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεώς του, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ἔχει μία τῶν δοθεισῶν*».

204. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 2 560 λ. καὶ θέλομεν νὰ τὸν τρέψωμεν εἰς δραχμάς. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ 100 λ. κάμνουν 1 δρχ., τὰ 2 560 λ. θὰ κάμουν τόσας δραχμάς, ὅσον χωρεῖ τὰ 100 λ. εἰς τὰ 2 560 λ. ἤτοι ἔχομεν $\frac{2560}{100} = 25{,}60$ δρ.· Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 13 δρ. ἔχουν $\frac{13}{5} = 2{,}6$ τάλληρα.

Ἐν γένει, «*διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἀριθμὸν μονάδων μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀρκεῖ νὰ τὸν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας*».

205. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 25 ὥρ 23^{λ} 30^{δ} εἰς δεύτερα λεπτά.

Κατὰ τἀνωτέρω ἐπειδὴ ἡ ὥρα ἔχει 60^{λ}, αἱ 24 ὧραι ἔχουν $60^{\lambda} \times 24 = 1\,440^{\lambda}$, καὶ 25^{λ}, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν, ἀποτελοῦν ἐν ὅλῳ $1\,465^{\lambda}$. Τώρα τρέπομεν τὰ $1\,465^{\lambda}$ εἰς δεύτερα λεπτά. Ἀφοῦ τὸ $1^{\lambda} = 60^{\delta}$, τὰ $1\,465^{\lambda}$ εἶνε ἴσα μὲ $60^{\delta} \times 1\,465 = 87\,900^{\delta}$. Προσθέτοντες δὲ καὶ τὰ 30^{δ}, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 24 ὧραι 25^{λ} καὶ $30^{\delta} = 87\,930^{\delta}$.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, *«διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του τρέπομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας αὐτῆς, εἰς τὸ ἐξαγόμενον δὲ προσθέτομεν καὶ τὰς δοθείσας μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· τὸ οὕτω προκύπτον ἄθροισμα τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, εἰς δὲ τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς δοθείσας μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· καὶ οὕτω καθεξῆς προχωροῦμεν μέχρι τῶν μονάδων τῆς τελευταίας τάξεως».*

206. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 3 στ. 20 ὀκ. 250 δράμ. εἰς ὀκάδας. Ἐν πρώτοις ἔχομεν ὅτι 1 στ.=44 ὀκ., 3 στ.=132 ὀκ.· προσθέτοντες εἰς αὐτὰς καὶ τὰς 20 ὀκ., αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν, εὑρίσκομεν 152 ὀκ.· τώρα τρέπομεν καὶ τὰ 250 δράμ. εἰς ὀκάδας, καὶ ἔχομεν ὅτι 250 δράμ.$=\frac{250}{400}=0{,}625$ ὀκ. καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι 3 στ. 20 ὀκ. 250 δράμ.=152,625 ὀκ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς ἄλλον ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως διαφόρου τῆς τελευταίας τρέπομεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστάνοντας μονάδας τάξεως μεγαλυτέρας καὶ μικροτέρας τῆς δοθείσης εἰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, καὶ τὰ ἐξαγόμενα προσθέτομεν μὲν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς ὁρισθείσης τάξεως».

Οὕτω ἂν θέλωμεν ὁ συμμιγὴς 2 τάλ. 4 δρ. 50 λ. νὰ τραπῇ εἰς δραχμάς, θὰ ἔχωμεν 3 τάλ.=5 δρ.×3=15 δρ., καὶ 4 δρ.=19 δρ.· τὰ 50 λ.$=\frac{50}{100}$δρ.$=\frac{1}{2}$ δρ. Ἑπομένως εἶνε 3 τάλ., 4 δρ., 60 λ.= $=19\ \frac{1}{2}$ δρ.=19,5 δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Πόσα λεπτὰ ἔχουν α΄) 8,25 δρ.; β΄) 18,47 δρ.;

2) Νὰ τραποῦν εἰς μέτρα· α΄) 25 παλ., β΄) 317 δάκ.· γ΄) 314 γρ.

3) Ὁμοίως εἰς δραχμὰς 825 λ., 1 375 λ.

4) Νὰ τραποῦν εἰς ἔτη α΄) 18 μῆνες· β΄) 180 ἡμ. $1\ \frac{1}{2}$, $\frac{36}{73}$.

5) Νὰ τραποῦν εἰς στατῆρας α΄) 12 στατ. 40 ὀκ. 300 δρμ. β΄) 132,25 ὀκ. γ΄) 145 (14,35) ὀκ. $12\ \frac{163}{176}$, $3\ \frac{1}{176}$. 3,205· 0,325.

6) Πόσα δευτερόλεπτα κάμνουν 4 (2) μῆν., 5 (6) ὥρ. 56^{λ} (54^{λ} 36^{δ}); (ὁ μὴν ὑποτίθεται ὅτι ἔχει 30 ἡμέρας). 10 389 3 60(5 208 876)

7) Νὰ τραποῦν εἰς πήχεις· α') 132 μ. β') 14, 3 μ.· γ') 8 μ. 7 π. 3 δ. 8 γρ. 203,703· 22,678· 13,48.

8) Νὰ τραποῦν εἰς ὀκάδας (στατῆρας) αἱ 3 (5) στατ. 5 (28)ὀκ. 100 (320) δράμια. $137{,}25 \left(5\frac{36}{55}\right)$

9) Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας 7°(28°) 15' (30')18''(27''). 7,255. (28,5075)

10) Πόσας ὥρας ἔχουν 2,5 $\left(3\frac{1}{5}\right)$ μῆνες; 1800 2304

11) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει α') ἓν κοινὸν ἔτος· β') ἓν δίσεκτον ἔτος; 31 536 000$^{\delta}$· 316 222 400 $^{\delta}$

12) Πόσα δράμ. ἔχουν α')3,17 στ.· β') 14,35 ὀκ.; 5 579 200. 5740

13) Νὰ τραποῦν εἰς ἡμέρας α') 7 (9) ἡμ. 18 (12) ὥρ. 36^{λ} (54^{λ}). β') 84 (30,6) ὧραι 7,775 (9, 53 75) 3,5 (1,275).

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.

207. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὰ 7 756^{λ} εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Ἐπειδὴ 60^{λ} κάμνουν 1 ὥραν, τὰ 7 756^{λ} κάμνουν 7756^{λ} : 60^{λ} =129 ὥρ. καὶ μένουν 16^{λ}. Ὥστε 7 756^{λ} =μὲ 129 ὥρας καὶ 16^{λ}. Ἐπειδὴ δὲ αἱ 24 ὧραι ἀποτελοῦν 1 ἡμ.. αἱ 129 ὧραι ἀποτελοῦν 129:24=5 ἡμ. καὶ μένουν 9 ὧραι. Ὥστε αἱ 129 ὧραι=5 ἡμ. 9 ὥρας. Ὅθεν τὰ 7 756^{λ} =5 ἡμ. 9 ὥρας 16^{λ}.

Ὁμοίως σκεπτόμεθα, ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 75 325 δράμια εἰς συμμιγῆ. Εὑρίσκομεν δηλαδὴ πρῶτον, πόσας ὀκάδας κάμνουν τὰ 75 325 δρ., διαιροῦντες τὸν 75 325 διὰ τοῦ 400, τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 44, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσους στατῆρας περιέχουν. Τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ τὰ ὑπόλοιπα δίδουν τὸν ζητούμενον συμμιγῆ.

Συνήθως ἡ σειρὰ τῶν διαιρέσεων διατάσσεται ὡς κάτωθι.

```
 753'2'5' | 400
 3532     |------
  3325    | 188 | 44
   125    |  12 |----
          |     |  4
```

καὶ εὑρίσκομεν ὅτι 75 325 δρμ.=4 στ. 12 ὀκ. 125 δρμ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι· *«διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς τάξεως εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως ἀποτελοῦν μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τὸ προκύπτον πηλίκον παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μονάδας τῆς δοθείσης. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἐπὶ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, καὶ οὕτω προχωροῦμεν μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες νὰ μὴ περιέχουν μονάδας ἀνωτέρας τάξεως. Τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων ἀποτελοῦν τὸν ζητούμενον συμμιγῆ»*.

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

208. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{47}{8}$ στατ. εἰς συμμιγῆ. Διαιροῦντες τὸ 47 διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν πόσους ἀκεραίους στατῆρας περιέχει τὸ δοθὲν κλάσμα. Οὕτω ἔχομεν 8 στατῆρας καὶ $\frac{7}{8}$ στ. Τὸ $\frac{7}{8}$ τρέπομεν εἰς ὀκάδας, πολλαπλασιάζοντες 44 ὀκ. $\times \frac{7}{8}$· ὅτε εὑρίσκομεν $\frac{308}{8}$ ὀκ. $= 38\frac{1}{2}$ ὀκ. Τὸ $\frac{1}{2}$ ὀκ. τρέπομεν εἰς δράμια καὶ οὕτω ἔχομεν ὅτι $\frac{44}{8}$ στ. = 5 στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.

Ὁμοίως τρέπομεν π. χ. εἰς συμμιγῆ τὸν $\frac{13}{5}$ λίρας.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς.

47	8	13	15
7	5 στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.	×20	17σελ. 4πεν.
×44		260	
308		110	
68		5	
4		×12	
×400		60	
1600		0	
0			

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 3,45 ἡμ. εἰς συμμιγῆ. Παρατηροῦμεν ὅτι 3,45 ἡμ.=3 ἡμ. καὶ 0,45 ἡμ. Αἱ 0,45 ἡμ. = 24 ὥρ. × 0,45 = 10,8 ὥρ. ἢ 10 ὥρ. καὶ 0,8 ὥρ. Αἱ 0,8 ὥρ. = 48λ. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἐὰν τὸν δοθέντα δεκαδικὸν ἀριθμὸν γράψωμεν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἐργασθῶμεν καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι· «***διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει μονάδας δοθείσης τάξεως, εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον παριστάνει μονάδας τῆς δοθείσης τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως διὰ πολλαπλασιασμοῦ· τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτω προχωροῦμεν ὁμοίως μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως***».

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς ἀριθμούς· οἱ α΄) 784 παλ.· β΄) 12 347 γρ.

2) Ὁμοίως α΄) 24 867 (μ^2)· β΄) 123 μην.· γ΄) 3867 ἡμ.

Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς οἱ α΄) 3, 124 μ.· β΄) 29,415 πήχ. γ΄) 3, 15 τάλ.· δ΄) 82565^{δ}· ε΄) 1345^{λ}.

4) Ὁμοίως α΄) 2,37 ἔτ.· β΄) $\frac{4}{9}$ λίρ.· γ΄) $\frac{13}{9}$ ἔτ.. δ΄) $\frac{124}{23}$ ἡμ. ε΄) 82, 12 δρ. ϛ΄) 1 223 ἔτη· ζ΄) 38,52 στατ.

Πρόσθεσις συμμιγῶν.

209. Ἐπειδὴ οἱ συμμιγεῖς δύνανται νὰ τραποῦν εἰς ἀκεραίους ἢ εἰς κλασματικούς, αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις δύνανται ν᾽ ἀναχθοῦν εἰς πράξεις ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν.

Οὕτω διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ἢ κλασματικούς, παριστάνοντας μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τούτους, τὸ δὲ ἄθροισμα τρέπομεν, ἂν θέλωμεν, εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Π. χ. τὸ ἄθροισαα 3 ἔτη. 7 μῆν. 18 ἡμ. + 4 ἔτ. 9 μ. 17 ἡμ. = 1 308 ἡμ. + 1 727 ἡμ. = 3 035 ἡμ., ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ἂν τρέψωμεν αὐτὸν εἰς συμμιγῆ, 8 ἔτ., 5 μῆν., 5 ἡμ.

210. Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς, ἂν προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς παριστάνοντας μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτω διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν συμμιγῶν 3 ἔτ. 7 μῆν. 18 ἡμ. καὶ 4 ἔτ. 9 μῆν. 17 ἡμ. γράφομεν αὐτοὺς ὡς εἰς τὴν ἑπομένην σελίδα, καὶ προσθέτομεν ὡς συνήθως κατὰ στήλην,

3 ἔτ.	7 μῆν.	18 ἡμ.
4	9	17
7	16	35
8	5	5

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 7 ἔτ. 16 μῆν. 35 ἡμ. Ἐὰν ἀπὸ καθένα τῶν ἀριθμῶν 35 ἡμ. καὶ 16 μῆνες ἐξάγωμεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἐκείνης τὴν ὁποίαν παριστάνει, καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὰς ἀνωτέρας, εὑρίσκομεν 8 ἔτ. 5 μῆν. 5 ἡμ.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ πρόβλημα :

«***Παιδίον ἐγεννήθη τὴν 8ην Φεβρουαρίου τοῦ 1825 καὶ ἀπέθανε εἰς ἡλικίαν 2 ἐτ. 2 μην. 28 ἡμ., πότε ἀπέθανε ;***»

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ παιδίου ἐπέρασαν 1924 ἔτ., 1 μήν., 7 ἡμ. (ἐπειδὴ ὁ Φεβρουάριος εἶνε δεύτερος μὴν τοῦ ἔτους καὶ δὲν εἶχε περάσει). Μέχρι δὲ τοῦ θανάτου τοῦ παιδίου ἐπέρασαν 1824 ἔτ., 1 μήν., 7 ἡμ. + 2 ἔτη 2 μῆν. 28 ἡμ.· ἤτοι, διὰ νὰ εὕρωμεν πότε ἀπέθανε τὸ παιδίον θὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν

1824 ἔτ.	1 μήν	7 ἡμ.	
2	2	28	ἐξ ἧς εὑρίσκομεν
1826	3	35	
1826	4	5	

ἤτοι ἀπέθανε τὴν 6 Μαΐου τοῦ 1827, ἐπειδὴ εἶχον περάσει τὰ 1926 ἔτ., ὁ τέταρτος μὴν ἀκόμη, δηλαδὴ ὁ Ἀπρίλιος, καὶ αἱ 5 πρῶται ἡμέραι τοῦ Μαΐου.

(Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εἶνε κατὰ προσέγγισιν, διότι ὑπεθέσαμεν ὅτι καθεὶς μὴν ἔχει 30 ἡμέρας).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα α΄) 8 μ., 7 π., 2 δ. + 12 μ., 9 π., 8 δ. +16 μ., 2 π., 2 π., 2 δ.· β΄) 18 δρ. 25 λ. + 8 τάλ. 4 δρχ. 20 λ.

2) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 47 (127 δρ. 26 (5) λ.

καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 6 (28) δρ., 40 (95) λ.· πόσον τὸ ἐπώλησε;
53,75 (156) δρχ.

3) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 8 720 δρ. 9 λ. (4 125 δρ. 16 λ.) μὲ ζημίαν 185 δρ., 16 λ. (325 δρ., 28 λ.)· πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ ἐμπόρευμα; 8 905,25 (4 450,44) δρχ.

4) Ἓν ὡρολόγιον δεικνύει εἰς τὴν Ρώμην 12^{λ} 4^{δ} ὀλιγώτερον ἄλλου εἰς τὴν Βιέννην· ποία εἶνε ἡ ὥρα εἰς τὴν Βιέννην, ἂν εἰς τὴν Ρώμην εἶνε 7 (10) ὥρ. 8^{λ} (9^{λ}) 59^{δ} (29^{δ}) π. (μ.) μ.;
7 (10) ὥρ. 21^{λ} (21^{λ}) 3^{δ} (33^{δ}).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ὁ φιλόσοφος Κάντιος ἐγεννήθη τὴν 22 Ἀπριλίου τοῦ 1724, ἀπέθανεν δὲ εἰς ἡλικίαν 79 ἐτ. 9 μην. 19 ἡμ.· πότε ἀπέθανεν; 11 Φεβρ. 1804

2) Ὁ Α εἶνε ἡλικίας 14 (64) ἐτ. 6 (8) μην. 18 (9) ἡμερ.· ὁ Β 8 (14) ἐτ. 8 (10) μην. 26 (26) ἡμ., πρεσβύτερος· πόσην ἡλικίαν ἔχει ὁ Β; 23 (79) ἔτ. 3 (1) μῆν. 14 (5) ἡμ.

3) Ἔμπορος εἰσπράττει τὴν α΄) ἡμέραν 248 δρ. 26 λ. (118 δρ. 9 λ.)· τὴν β΄) 35 δρ. 16 λ. (18 δ. 35 λ.) περισσότερον ἢ τὴν α΄)· τὴν γ΄) 6 δρ. 24 λ. (19 δ. 43 λ.) περισσότερον τῆς β΄ καὶ τὴν δ΄ 22 δρ. 48 λ. (9 δ. 33 λ.) περισσότερον τῆς γ΄· πόσα εἰσπράττει ἐν ὅλῳ; 1 133 (575) δρ. 48 (60) λ.

Ἀφαίρεσις συμμιγῶν.

211. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς ἀκεραίους ἢ κλασματικούς, παριστάνοντας μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, μετὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν τούτων νὰ τρέψωμεν, ἂν θέλωμεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς συμμιγῆ. Οὕτω διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ 12 στ. 8 ὀκ. 250 δρμ., τὸ 6 στ. 10 ὀκ. 150 δρ., ἔχομεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων 214 650 δρμ. πλὴν 109 750 δρμ.=10 4900 δρμ. Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, τρέποντες αὐτὸν εἰς συμμιγῆ, 5 στ. 42 ὀκ. 100 δράμια.

Ἐν τούτοις δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς, ἀφαιροῦντες χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 4 ἔτ. 3 μῆν. 8 ἡμ. — 2 ἐτ. 1 μὴν 12 ἡμ., γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς κάτωθι καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ στήλας λέγοντες· 12 ἡμέραι ἀπὸ 8 ἡμ. δὲν ἀφαι-

Ὁμοίως ἡ ἀφαίρεσις 135°—85° 35′ 48″ γίνεται ὡς κάτωθι

		38			
4 ἔτ.	3 μῆν.	8 ἡμ.	134°	59′	60″
2	1	12	85°	35′	48″
2	1	26	49°	24′	12″

ροῦνται· προσθέτοδεν 1 μῆνα ἡ 30 ἡμ. εἰς τὰς 8 ἡμ., ὅτε ἔχομεν 38 ἡμ., καὶ ἀφαιροῦντες 12 ἡμ. ἀπὸ 38 ἡμ., εὑρίσκομεν 26 ἡμ.· γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν· 1 μὴν καὶ 1 μὴν ἴσον 2 μ., ἀπὸ 3 μ. ἴσον 1 μήν. γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν στήλην τῶν μηνῶν· 2 ἔτη ἀπὸ 4 ἔτ. = 2 ἔτη. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε ἔτ. 1 μὴν 26 ἡμ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα καὶ νὰ γίνοον αἱ δοκιμαὶ τῶν ἀφαιρέσεων· 12 εἰκοσ. 3 τάλ. 2 δρ. 30 λ.—5 εἰκ 3 τάλ. 4 δρ. 80 λ. 6′) 8 στ. 32 ὀκ. 250 δρμ.—5 στ. 40 ὀκ. 120 δρ.

2) Ὁμοίως α′) 3 ἔτ. 8 μῆν. — 2 ἔτ. 10 μῆν. 6′) 16 ὧραι 25^{λ} 4^{δ} —14 ὥρ. 28^{λ} 49^{δ} . γ′) 12 τάλ. 3 δρ. 75 λ.—10 τάλ. 2 δρ. 84 λ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἀγοράζει τις ἐμπόρευμα ἀντὶ 128 δρ.26λ. (209 δρ. 48 λ.) καὶ τὸ πωλεῖ μὲ ζημίαν 6 δρ. 25 λ. (9 δρ. 35 λ.)· πόσον ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα ; 122 δρ. 1λ. (206 δρ. 13 λ.)

2) Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 788 δρ. 35 λ. (727 δρ. 85 λ.) μὲ κέρδος 22 δρ. 48 λ. (46 δρ. 27 λ.)· πόσον τὸ ἠγόρασε ; 765 δρ. 87 λ. (301 δρ. 58 λ.).

3) Εἷς πόλεμος διήρκεσεν 6 ἔτη. 5 μῆν. 17 ἡμ., ἐτελείωσε δὲ τὴν 15 Φεβρουαρίου τοῦ 1763· πότε ἤρχισεν ; (20 Αὐγ. 1756)

4) Ἀπέθανέ τις εἰς ἡλικίαν 67 ἐτῶν 8 μημ. 3 ἡμ. (43 ἐτ. 6 μην. 24 ἡμ.) τὴν 18ην Αὐγούστου τοῦ 1872 (14 Ἰαν. τοῦ 1901)· πότε ἐγεννήθη ; 15 Δεκ. 1808 (20 Ἰουν.1857)·

5) Ἓν συμβάν, τὸ ὁποῖον ἤρχισε τὴν 8ην Αὐγ. 1871 τὴν 4 ὥρ. 26^{λ} 18^{δ} π. μ. ἐτελείωσε τὴν 25 Δεκεμβρίου 1895 τὴν 6 ὥρ. 25^{λ} 13^{δ} π. μ. πόσον διήρκεσε τὸ γεγονὸς αὐτὸ ;

4 ἔτ. 5 μῆν. 17 ἡμ. 1 ὥρ. 58^{λ} 55^{δ} .

Ὁμὰς τρίτη. 1) Ἀπὸ βαρέλιον περιέχον 385 στ. 32 ὀκ. 200

δρμ. ἀφῃρέσαμεν 30 στ. 6 ὀκ. 100 δρμ., ἔπειτα 12 στ. 43 ὀκ. καὶ 16 στ. 17 ὀκ. 120 δρμ.· πόσος οἶνος ἔμεινεν εἰς τὸ βαρέλιον;

326 στ. 9 ὀκ. 380 δρμ.

2) Ἔχει τις 628 δρ. 25 λ. (1368 δρ. 83 λ.) καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 46 δρ. 18 λ. (9 δρ. 18 λ.), ἔπειτα 16 δρ. 42 λ. (283 δρ. 6 λ.) καὶ τέλος 6 δρ. 18 λ. (19 δρ. 95 λ.)· πόσα τοῦ μένουν;

558 δρ. 47 λ. (1 053 δρ. 34 λ.)

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις μερισμοῦ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιοι.

212. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. ἐπὶ 4. Ἔχομεν 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. ἐπὶ 4=819 ἡμ. $\times$ 4=3 276 ἡμ· τρέποντες δ' αὐτὸν εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν 9 ἔτ. 1 μῆν. 6 ἡμέρας.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμός. Π. χ. 2 ἔτ. 3 μῆν. 9 ἡμ. $\times$1,2=819 ἡμ. $\times$1,2= 282,8 ἡμ. καὶ τρέποντες τοῦτον εἰς σημμιγῆ εὑρίσκομεν 2 ἔτ. 8 μῆν. 22, 8 ἡμ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως, καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ νὰ πολλαλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, τὸ δὲ γινόμενον νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ».

213. Ἐνίοτε εἶνε προτιμότερον νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ὁ συμμιγὴς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Οὕτω π.χ. «*Ἂν τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου εἶνε 8° 27′ 14″ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον μῆκος ἔχουν 5 τοιαῦτα τόξα*», θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 8° 27′ 14″ ἐπὶ 5. Πολλαπλασιάζοντες καθένα τὸν ἀριθμῶν 14″, 27′, 8° ἐπὶ 5 εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως τὰ γινόμενα 70″,135′,40°. Ἐὰν ἀπὸ καθένα τῶν 70″, 135′ ἐξάγωμεν τὰς περιεχομένας μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως αὐτῶν, καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς εἰς τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, εὑρίσκομεν τελικὸν ἐξαγόμενον 42° 16′ 10″.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς κάτωθι:

8°	27′	14″
		5
40°	135′	70″
42°	16′	10″.

214. *Π ρ ό β λ η μ α. «Ἂν 6 ἴσα τόξα ἔχουν μῆκος 6° 35′ 36″, πόσον εἶνε τὸ μῆκος ἑκάστου τόξου;»*

Ἐπειδὴ δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ· ἤτοι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 6° 35′ 36″ διὰ τοῦ 6. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πρῶτον τὸν 6° διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1°. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 35′ διὰ τοῦ 6, ὅτε εὑρίσκομεν πηλίκον 5′ καὶ ὑπόλοιπον 5′· τὰ 5′ τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 60″ ×5=300″· καὶ 36″ τὰ δοθέντα, κάμνουν ἐν ὅλῳ 336″. Διαιροῦντες καὶ τοῦτο διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 55″. Ὥστε τὸ μῆκος ἑκάστου τόξου εἶνε 1° 5′ 56″. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

6°	35″	36″	6
	5		1° 5′ 56″
	× 60″		
	300″		
	+36″		
	336″		
	36		
	0		

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν εἶνε 0, γράφομεν τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ διαιρέτουὑπὸ μορφὴν κλασματικήν. Οὕτω π.χ. «ἂν 2 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν σῖτον βάρους 33 ὀκ. 143 δρμ.» θὰ εὕρωμεν πόσον ἔλαβεν ἕκαστος, ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ μερισμοῦ 33 ὀκ. 147 δρμ.: 2 ἤτοι=16 ὀκ. 273 $\frac{1}{2}$ δράμ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ***«ὅταν εἰς διαίρεσιν μερισμοῦ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος καὶ ὁ διαιρετέος συμμιγὴς ἀριθμὸς διαιροῦμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ὁ διαιρετέος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ὡς ἀνωτέρω».***

215. Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶνε μερισμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἐνίοτε τρέπομεν τὸν διαιρετέον συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, παριστάνοντα μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως καὶ τοῦτον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρετέου, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τρέπομεν, ἂν θέλωμεν, εἰς συμμιγῆ. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $25^{\circ}\ 27'\ 44'' : 0,8$ τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου $91\,664''$ διὰ τοῦ δεκαδικοῦ 0,8 καὶ εὑρίσκομεν $91\,664'' : 0,8 = 114580''$. Ἐὰν τὸ πηλίκον τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν $31^{\circ}\ 48'\ 5''$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν 29 μ. 4 π. 7δ. : 421=29 47 δ. : 421=7δ.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις μερισμοῦ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε κλάσμα.

216. *Πρόβλημα. «Τὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 5 στ. 38 ὀκ. 250 δρμ. Πόσον εἶνε τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ;»*

Πρὸς λύσιν τούτου πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ 5 στ. 38 ὀκ. 250 δρμ., καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 5 στ. 38 ὀκ. καὶ 250 δρμ. διὰ 4, καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἐὰν πρῶτον πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ ἐπὶ 3, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 4. Οὕτω ἔχομεν ὅτι 5 στ., 38 ὀκ. 250 δρμ. $\times \frac{3}{4}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{5 \text{ στ. } 38 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρμ.} \times 3}{4}$. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν γινόμενον 17 στ. 27 ὀκ. 350 δρμ., ἂν δὲ τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 4 στατ. 17 ὀκ. $387\frac{1}{2}$δρμ.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, ἢ ἐπὶ δεκαδικόν, τρέπομεν τοῦτον εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ οὕτω πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα· ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ τέλος προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα.

217. *Πρόβλημα. «Τὰ $\frac{5}{9}$ ἑνὸς τόξου ἔχουν μῆκος $18^{\circ}\ 45'\ 20''$· πόσον εἶνε τὸ μῆκος τοῦ τόξου;»*

Ἐπειδὴ δίδεται ἡ τιμὴ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ διὰ διαιρέσεως (μερισμοῦ). Ἤτοι θὰ διαιρέσωμεν τὸν συμμιγῆ 18° 45′ 20′′ διὰ τοῦ $\frac{5}{9}$. Πρὸς τοῦτο ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ νέον κλάσμα. Δηλαδὴ ἔχομεν 18° 45′ 20′′ $:\frac{5}{9}$ εἶνε ἴσον μὲ 18° 45′ 20′′ $\times\frac{9}{5}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου εἶνε 33° 45′ 36′′.

218. Ἐὰν ὁ διαιρέτης μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως (μερισμοῦ) εἶνε μικτὸς ἀριθμὸς ἢ δεκαδικός,, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἀκολούθως διαιροῦμεν τὸν συμμιγῆ διὰ τοῦ κλάσματος αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι: 17 ὀκ. 150 δρ. : $2\frac{3}{5}$ εἶνε ἴσον μὲ 17 ὀκ. 150 δρμ. : $\frac{13}{5}$ = 17 ὀκ. 150 δρμ. $\times\frac{5}{13}$, καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 6 ὀκάδας $273\frac{1}{13}$ δρμ. Ὁμοίως ἔχομεν 5 π. 4 ρ. : 0,8=5π. 4 ρ. : $\frac{8}{10}$ = 5 π. 4 ρ. $\times$ $\frac{10}{8}$ = 6 π. 7 ρ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον: 3 (64) τάλ. 4 (4) δρ., 25 (25) λ. $\times$ 17 (3,44). 327,25 (1 115,42) δρ.

2) Ὁμοίως τὸ 1 (8) ἔτ. 4 (7) μῆν. 6 (24) ἡμ. $\times$ 17 (29). 22 (250) ἔτ. 11 (10) μ. 12 (6) ἡμ.

3) Ἐργάτης λαμβάνει τὴν ἡμέραν 5 δρ. 45 λ.: πόσα θὰ λάβῃ εἰς 8,5 ἡμ. ; 46 δρ. 32,5 λ.

4) Ἐὰν κεφάλαιον δίδῃ ἐτήσιον τόκον 13 τάλ. 3 δρ. 85 λ., πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 4,75 ἔτη ; 327 δρ. 3,75 λ.

5) Ἁτμάμαξα διανύει 40 (80) χμ. 325(26) μ. εἰς $8\frac{1}{4}\left(4\frac{2}{5}\right)$ ὥρ.· πόσον διανύει εἰς 1 ὥραν ; 4 χμ. 887,87..μ. (18 χμ. 187,72..μ).

6) Θέλει τις νὰ μοιράσῃ ἓν ποσὸν μεταξὺ 85 προσώπων, ὥστε νὰ λάβῃ καθὲν 5 δρ. 80 λ., ἀλλ' ἐλλείπουν πρὸς τοῦτο 8 δρ. 35 λ.· πόσον εἶνε τὸ ποσόν ; 484,65 δρ.

7) Ἔμπορος ἀγοράζει 3,753 (48,250 χιλ. ἐμπορεύματος ἀντὶ 332 (407) δρ. 28 (23) λ., πωλεῖ δὲ αὐτὸ ἀντὶ 383 (393) δρ. 40 (72) λ. πόσον ἐκέρδισεν εἰς καθὲν χιλιόγραμμον ; 13,621.. (0,28 ζημία).

8) Ἀτμάμαξα διανύει 118 (181) χιλιομ. 701 (917) μ. εἰς $1\frac{3}{8}$ $\left(4\frac{1}{2}\right)$ ὥρ.· πόσον διανύει εἰς 1 ὥρ.;

84 (41) χμ. 328 (826) μ.

9) Αἱ 3 όκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 20 δρ. 70 λ.· πόσον τιμᾶται ἡ 1 (3,5) ὀκ. 6,9 (24,15) δρ.

10) Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 3, 4, 6, 7.

11) Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 5,8,9.

Πολλαπλασιασμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

219. *Πρόβλημα.* «*Ἂν ἓν τόπιον ὑφάσματος ἔχῃ μῆκος 35 ὀργ. 4 πόδ. καὶ 10 δακτ., πόσον μῆκος ἔχουν 548 τοιαῦτα τόπια;*»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 35 ὀργ. 4 π. 10 δ ἐπὶ 548. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν ἀριθμῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 548, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα, ἐργαζόμεθα δὲ καὶ ὡς ἑξῆς

1) Πολλαπλασιάζομεν τὰς 35 ὀργ. ἐπὶ 548 καὶ εὑρίσκομεν 19 180 ὀργ.

2) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 4 πόδας ἐπὶ 548, λέγομεν ὅτι ἐπειδὴ 4 π. = 3 π. + 1 π., ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 3 π. καὶ τὸν 1 π. ἐπὶ 548, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Ἀλλ' ἐπειδὴ 1 ὀργ. ἐπὶ 548, δίδει 548 ὀργ., οἱ 3 πόδ. οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ὀργυιᾶς, θὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 548 ὀργ., ἤτοι 274 ὀργ., ὁ δὲ 1 ποὺς θὰ δώσῃ τὸ τρίτον τῶν 274 ὀργ., ἤτοι 274 ὀργ. : 3=91 ὀργ. 2 π.

3) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς 10 δακ. ἐπὶ 548, παρατηροῦμεν ὅτι, οἱ 10 δ =6 δ.+3 δ.+1 δ. καὶ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα τῶν προσθετέων αὐτῶν ἐπὶ 548. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ 1 ποὺς ἐπὶ 548 ἔδωκε γινόμενον 91 ὀργ. καὶ 2 π., οἱ 6 δ. οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ 1 π., θὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 91 ὀργ. καὶ 2 π.· ἤτοι 91 ὀργ. 2 π. : 2=45 ὀργ. καὶ 4 πόδ. Οἱ 3 δ, οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 6 δακτ. θὰ δώσουν τὸ ἥμισυ τῶν 45 ὀργ. καὶ 4 π.· ἤτοι 45 ὀργ. 4 π. : 2=22 ὀργ. 5 π. Τέλος ὁ 1 δ., ὁ ὁποῖος εἶνε τὸ τρίτον τῶν 3 δ., θὰ δώσῃ τὸ τρίτον τῶν 22 ὀργ. καὶ 5 ποδ.· ἤτοι 22 ὀργ. 5 π. : 3=7 ὀργ. 3 π. 8 δ.

Ὥστε εὑρήκαμεν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα,

		δργ.		
35 δργ. × 548	. . . .	*=19180*		
4 ποδ. × 548=	*3 π.×548 . . =*	*274*	*π.*	
	1 π.×548 . . =	*91*	*2*	
10 δακ. × 548=	*6 δ.×548 . . =*	*45*	*4*	
	3 δ.×548 . . =	*22*	*5*	
	1 δ.×548 . . =	*7*	*3*	*8δ.*

καὶ προσθέτοντες αὐτὰ εὑρίσκομεν 19619 δργ. 14π. 8δ.
ἢ 19621 δργ. 2π. 8δ.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς εὑρέσεως τοῦ γινομένου λέγεται *πολλαπλασιασμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν*, ἐπειδὴ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀναλύεται εἰς μέρη ἁπλᾶ, τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κλπ. τῆς μιᾶς μονάδος, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ τιμή. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμόζεται ἰδίως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

1) 15 δργ. 4 π. 8 δ. 10 γρ. ×64. (Ἀπ. 1010 δργ. 3π. 1δ. 4γρ.),
2) 25 τάλ. 3 δρ. 60 λ. ×148. (Ἀπ. 3 806 τάλ. 2 δρ. 80λ).
3) 32 στ. 28 ὀκ. 150 δρμ. ×623. (Ἀπ. 20 347 στ. 33ὀκ. 250 δρμ).

Πολλαπλασιασμὸς ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁρίζεται ὑπὸ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.

220. *Πρόβλημα. 1) «Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 2 τάλ. 3 δρ. 60 λ.· πόσον τιμῶνται 3 στατ. 18 ὀκ. 300 δρμ. αὐτοῦ;*

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 3 στ. 18 ὀκ. καὶ 300 δρμ. Παρατηροῦμεν ὅτι 3 στ. $= 44$ ὀκ. $\times 3 = 132$ ὀκ., καὶ 18 ὀκ. αἱ δοθεῖσαι, κάμνουν ἐν ὅλῳ 150 ὀκ. Ἐξ ἄλλου τὰ 300 δρμ. $=\frac{3}{4}$ ὀκ. Ἐπομένως ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν $150\frac{3}{4}$ ὀκ., καὶ διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 2 τάλ. 3 δρ. 60 λ. ἐπὶ

$150\frac{3}{4}$. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς γνωρίζομεν, εὑρίσκομεν ὅτι οἱ 3 στ. 18 ὀκ. καὶ 300 δρμ. τιμῶνται 2050,20 δρ.

«*Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους αὐτῆς, λύονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν ἄλλον δοθέντα συμμιγῆ, ἂν τρέψωμεν αὐτὸν εἰς ἀριθμόν, παριστάνοντα μονάδας τῆς τάξεως, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἔχει δοθῆ*».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἀγοράζει τις 13 ὀκ. 350 δρ. ἐμπορεύματος πρὸς 1 τάλ. 1 δρ. 20 λ. τὴν ὀκᾶν· πόσα θὰ πληρώσῃ ; 86,025

2) Ἁτμάμαξα διανύει καθ' ὥραν 40 (80) χμ. 325 (26) μ.· πόσα θὰ διανύσῃ εἰς 8 (4) ὥρ. 15λ (15λ καὶ 24δ) ; 332 (340) χμ. 621, 25 (614,003) μ.

3) Ἓν κεφάλαιον δίδει τόκον κατ' ἔτος 228 (125) δρ. 4 (36) λ.· πόσον θὰ δώσῃ εἰς 13 (12) ἔτ. 9 (6) μῆν. ; 3 135,55 (1 657)

4) Ἂν μία ὀκᾶ βουτύρου ἀνταλλάσσεται μὲ 4 ὀκ. 100 δρ. σάπωνος, μὲ πόσας ὀκάδας σάπωνος ἀνταλλάσσονται 10 ὀκ. 300 δρ. βουτύρου ; 45 ὀκ. 275 δρμ.

5) Ἐδιδέ τις 1 ὀκ. καφὲ καὶ ἐλάμβανε 2 ὀκ. 200 δρμ. ζαχάρεως. Ἐὰν ἔδιδεν 20 (40) ὀκ. 350 (200) δρ. καφέ, πόσας ὀκάδας ζαχάρεως θὰ ἐλάμβανε ; 52 (101) ὀκ. 75 (100) δρμ.

6) Συνθέσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω 1, 2, 4, 5 καὶ λύσατε αὐτά.

Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν.

221. *Πρόβλημα.* «*Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 12 δρ. 40 λ.· πόσον τιμῶνται 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρμ. αὐτοῦ ;*»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸν 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρ. εἰς στατῆρας καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 12 δρ. 40 λ. ἐπὶ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς τροπῆς. Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς. Πρὸς τοῦτο λέγομεν.

Ἡ ἀξία 10 στ.	εἶνε 12 δρ. 40 λ. × 10 =	124 δρ.	
» » 7 στ.	» 12 » 40 λ. × 7 =	86,80	
» » 22 δκ. $= \frac{1}{2}$ στ.	» 12 » 40 λ. : 2 =	6,20	
» » 11 δκ.	» 6 » 20 λ. : 2 =	3,10	
» » 2 δκ.	» 6 » 20 λ. : 11 =	0,56	περίπου
» » 200 δρμ.	» 56 λ. : 4 =	0,14	
» » 100 δρμ.	» 14 λ. : 2 =	0,07	
		δραχ. λ.	
ἤτοι ἐν ὅλῳ		220,87	περίπου

Διαίρεσις ὅταν ὁ διαιρέτης ὁρίζεται ὑπὸ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.

α΄) Διαίρεσις μερισμοῦ.

222. Π ρ ό β λ η μ α. 1) *«Οἱ 30 πήχ. καὶ 6 ρ. ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λ.· πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς αὐτοῦ ;»*.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 30 πήχ. καὶ τῶν 6 ρ. Ἀλλὰ τὰ 6 ρ. $= \frac{6}{8}$ π. $= \frac{3}{4}$ π. Ὥστε δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 30 $\frac{3}{4}$ π. καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ 1 πήχ. Πρὸς λύσιν αὐτοῦ θὰ διαιρέσωμεν τὰ 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λ. διὰ τοῦ 30 $\frac{3}{4}$. Ἤτοι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν μέρισμοῦ 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λ.: 30 $\frac{3}{4}$, τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦντες εὑρίσκομεν 2 δρ. καὶ 30 λ. περίπου.

«Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ λύονται διὰ διαιρέσεως μερισμοῦ, ἐπειδὴ δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέπομεν τὸν συμμιγῆ, ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὸν διαιρέτην, εἰς ἀριθμὸν παριστάνοντα μονάδας τῆς τάξεως τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος ἢ δι' ἀκεραίου».

β΄) Διαίρεσις μετρήσεως.

223. Π ρ ό β λ η μ α. 1) *«Εἷς πεζὸς διὰ νὰ διανύσῃ 1 χλμ. χρειάζεται $20^{λ}$ καὶ $45^{δ}$· πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρ. $30^{λ}$;»*

Ἀφοῦ εἰς 20^{λ} 45^{δ} διανύει 1 χιλ. εἰς 4 ὥρ. 30^{λ} θὰ διανύσῃ τόσα χιλιόμετρα, ὅσας φορὰς ἀφαιρεῖται τὸ 20^{λ} 40^{δ} ἀπὸ τὸν 4 ὥρ. 30^{λ}, ἢ ὅσον χωρεῖ τὸ 20^{λ} καὶ 45^{δ} εἰς τὸ 4 ὥρας 30^{λ}. Τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τῆς μετρήσεως 16200 : 1 245, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $13\frac{3}{249}$ χλ.

Πρόβλημα 2) «*Οἱ 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρμ. ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 1 εἰκοσ.· πόσον τιμῶνται 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. αὐτοῦ;*

Λέγομεν ὁμοίως, ἀφοῦ διὰ 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρμ. δίδομεν 1 εἰκ., διὰ τὸν 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. θὰ δώσωμεν τόσα εἰκ., ὅσον χωρεῖ ὁ 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. εἰς τὸν 2 στ. 2 ὀκ. 200 δρ. Τρέπομεε καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς δράμια καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 21750 : 36200. Ἤτοι $=\frac{2175}{3620}=\frac{435}{724}$. Ὥστε ὁ 1 στ. 10 ὀκ. 150 δρμ. τιμῶνται $\frac{435}{724}$ εἰκ., ἢ τρέποντες τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς συμμιγῆ, εὑρίσκομεν 12 δρ. $1\frac{3}{181}$ λ.

«*Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ λύονται διὰ διαιρέσεως μετρήσεως, ἐπειδὴ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος, ἡ τιμὴ ἄλλων ὁμοειδῶν μονάδων καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο συμμιγεῖς εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς (συνήθως κατωτέρας) τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχον καὶ οὕτω ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκεραίους ἀριθμούς*».

224. Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα διαιρέσεως μετρήσεως εἰς τὰ ὁποῖα ὁ διαιρέτης ὁρίζεται ὑπὸ ἀκεραίου, ἢ κλάσματος ἢ μικτοῦ ἢ καὶ δεκαδικοῦ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ἀτμόπλοιον διανύει 120 μιλ. εἰς 2 ἡμερονύκτια 8 ὥρ. 54^{λ}. πόσα μίλ. διανύει εἰς 1 ὥρ. κατὰ μέσον ὅρον;

$2\frac{26}{227}$ μίλ.

2) Ὡρολόγιον μένει ὀπίσω 1 ὥρ. (18^{λ}) καὶ 30^{λ} (20^{δ}) εἰς διάστημα τριῶν ἡμερονυκτίων (8 ὥρ. 25^{λ})· πόσον μένει ὀπίσω εἰς 1 ὥραν;

1^{λ} 15^{δ} $\left(2^{\lambda}\ 10^{\delta}\ \frac{70}{101}\right)$

3) Ὁδοιπόρος ἐβάδισε 200 ὀργ. καὶ 3 π. εἰς 3 ὥρ. $40^λ$ $30^δ$· πόσον ἐβάδισεν εἰς μίαν ὥραν κατὰ μέσον ὅρον;

54 ὀργ. 3 π. 4δ. $1\frac{47}{49}$ γρ.

4) Ἀτμάμαξα διανύει 118 χμ. 701 μ. εἰς 1 ὥρ. $22^λ$ $30^δ$· πόσον διανύει εἰς 1 ὥρ.; 86 χμ 328 μ.

5) Οἱ 5 στ. 35 (5) ὀκ. 250 (200) δρμ. πράγματος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 291 (2) τάλ. 3 (3) δρ. 50 (60) λ.· πόσον ἐπωλήθη ἡ 1 ὀκᾶ; 5,70 (2 47..) δρ.

6) Κινητὸν διατρέχει εἰς 3 ὥρ. $18^λ$ $32^δ$ διάστημα 23 χμ. 824 μ.· εἰς πόσον χρόνον διατρέχει 1 μ.; 0,5 δ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) ἡ ὀκᾶ πράγματος τιμᾶται 5 δρ. 25 λ.· πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 2 τάλ. 3 δρ.; 2 ὀκ. 190 $\frac{10}{21}$ δρμ.

2) Ἁμαξοστοιχία διανύει 38 μχ. εἰς 1 ὥρ.· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 400 χμ.; 10 ὥρ.$31^λ$ 34 $\frac{14^δ}{19}$

3) Ἡ ὀκᾶ πράγματος τιμᾶται 3 δρ. 80 λ.· πόσας ὀκάδας θ' ἀγοράσωμεν μὲ 12 δρ. 60 λ.; 3 ὀκ. $126\frac{6}{19}$ δρμ.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Μὲ 1 τάλ. ἀγοράζει τις 5 ὀκ. 350 δράμια πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 3 δρ.; 3 ὀκ. 210 δρμ.

2) Μὲ 1 δρ. ἀγοράζει τις 1 π. 2 ρ. ὑφάσματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 10 δρ. καὶ 20 λ.; 12 π. 6 ρ.

3) Ἐὰν οἰκονομῇ τις καθ' ἡμέραν 1 δρ. 25 λ., εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 75 δρ.; 60 ἡμ.

4) Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα μετρήσεως μὲ διαιρέτην κλάσμα, μικτόν, δεκαδικόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

Περὶ μεθόδων.

Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

225. Ἐὰν συγκρίνωμεν ἓν ποσὸν ἢ ἓν μέγεθος πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς αὐτοῦ, τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καλοῦμεν *λόγον* τοῦ πρώτου μεγέθους πρὸς τὸ δεύτερον. Π. χ., ἐὰν ἓν οἰκόπεδον συγκριθῇ πρὸς τὸν τεκτονικὸν τετραγ. πῆχυν καὶ εὑρεθῇ 355 τ. τεκ. π., ὁ ἀριθμὸς 355 παριστάνει τὸν λόγον τῆς ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος οἰκοπέδου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετρ. τεκτ. πήχεως. Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως συγκριθῇ πρὸς τὸς πληθυσμὸν ἄλλης καὶ εὑρεθῇ ὅτι, ἡ πρώτη ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς δευτέρας, τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ λέγεται λόγος τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πρώτης πρὸς τὸν τῆς δευτέρας. Ὥστε,

«λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου».

226. Καλοῦμεν *λόγον δύο ἀριθμῶν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου*. Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν παριστάνεται διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ παριστάνεται διὰ κλάσματος καὶ ἔχει τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ. Οὕτω ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 3 εἶνε ἴσος μὲ $\frac{12}{3}=4$· ὁ λόγος τοῦ 5,2 μ. πρὸς τὸν 7,48 μ. ἰσοῦται μὲ $\frac{5,2}{7,48}=\frac{520}{748}$.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ ἑνὸς λόγου λέγονται *ὅροι* αὐτοῦ, ὁ μὲν πρῶτος *ἡγούμενος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἑπόμενος*. Οὕτω τοῦ λόγου $\frac{2}{3}$ ὁ 2 εἶνε ὁ ἡγούμενος καὶ ὁ 3 ὁ ἑπόμενος.

227. *Ἀντίστροφοι* λέγονται δύο λόγοι (ἢ δύο ἀριθμοὶ) ἂν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Π. χ. οἱ $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{3}$ εἶνε ἀντίστροφοι, καθὼς καὶ οἱ 4 καὶ $\frac{1}{4}$, οἱ 7 καὶ $\frac{1}{7}$ οἱ 13,5 καὶ $\frac{1}{13,5}$.

228. *Ἰδιότης τοῦ λόγου (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν, π. χ. τοῦ μήκους δύο ὑφασμάτων. Καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω, θὰ μετρήσωμεν τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἔγινεν ἡ μέτρησις τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου καὶ εὑρέθη ὁ λόγος των ἴσος μὲ 4. Ἂν τώρα μετρήσωμεν καθὲν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, π. χ. διὰ τοῦ 1 μ., καὶ εὕρωμεν ὅτι τὸ δεύτερον ἔχει μῆκος 3 μ., τὸ πρῶτον ὡς τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου θὰ ἔχῃ μῆκος $3\times4=12$ μ. Ὥστε τὰ δύο ὑφάσματα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (1 μ.), θὰ παριστάνωνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 12 (τὸ πρῶτον) καὶ 3 (τὸ δεύτερον). Ἀλλὰ καὶ ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸ 3 εἶνε ὁ 4, ἤτοι εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο δοθέντων μεγεθῶν. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι,

«ὁ λόγος δύο (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παριστανόντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν ταῦτα μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος».

Κατὰ ταῦτα, ἂν οἱ πληθυσμοὶ δύο πόλεων, ἔστω τῶν Α καὶ Β, εἶνε 8 000 καὶ 12 000, ὁ λόγος τοῦ πληθυσμοῦ αὐτῶν εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{8000}{12000}=\frac{2}{3}$.

Περὶ ἀναλογιῶν.

229. Καλοῦμεν *ἀναλογίαν τὴν ἰσότητα δύο λόγων*. Π. χ. ἡ ἰσότης $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$ λέγεται *ἀναλογία*. Διότι οἱ λόγοι $\frac{12}{3}$ καὶ $\frac{20}{5}$ εἶνε ἴσοι μὲ 4, γράφεται δὲ καὶ οὕτω $12:3=20:5$, καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς: 12 πρὸς 3 ἴσον μὲ 20 πρὸς 5, ἢ καὶ $\frac{12}{3}$ ἴσον μὲ $\frac{20}{5}$.

Οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν λέγονται *ὅροι* αὐτῆς καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τρίτος λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ ἄλλοι *ἑπόμενοι*· ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται *ἄκροι*, ὁ δεύτερος καὶ τρίτος *μέσοι* ὅροι τῆς ἀναλογίας. Τῆς ἀναλογίας $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$ οἱ 4 καὶ 10 εἶνε ἄκροι, οἱ δὲ 5 καὶ 8 μέσοι.

230. *Ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν.* Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ 9, τοὺς δὲ τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3, λαμβάνομεν $\frac{2\times9}{3\times9}=\frac{6\times3}{9\times3}$. Ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα ἔχουν παρονομαστὰς ἴσους, θὰ ἔχουν καὶ ἀριθμητὰς ἴσους· δηλαδὴ θὰ εἶνε $2\times9=6\times3$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι, *«εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων».*

Οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ἔχομεν $2\times6=3\times4=12$.

231. *Εὕρεσις ἑνὸς τῶν ὅρων ἀναλογίας ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων.* Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν τεσσάρων ὅρων τῆς ἀναλογίας ὅταν, δοθοῦν οἱ τρεῖς ἄλλοι. Πράγματι, ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ πρῶτος ὅρος, ὅταν οἱ ἄλλοι εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ 5, 3, 7. Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἄγνωστον διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{x}{5}=\frac{3}{7}$, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα θὰ εἶνε, $7\times x=5\times3$. Διαιροῦντες δὲ τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 7, εὑρίσκομεν ὅτι

$$x=\frac{5\times3}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν ζητῆται εἷς τῶν μέσων ὅρων, δίδωνται δ᾽ οἱ τρεῖς ἄλλοι, π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{2}{x}=\frac{3}{5}$ καὶ ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἔχομεν $3\times x=2\times5$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=\frac{2\times5}{3}=3\frac{1}{3}$.

Ἤτοι, *«διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα μὲν τῶν ἄκρων ὅρων ἀναλογίας διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, δι᾽ ἕνα δὲ μέσον διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων διὰ τοῦ δοθέντος μέσου».*

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x ἐκ τῶν ἀναλογιῶν

α') $45 : 68=90 : x$· β') $6 : 4=x : 7$· γ') $x : 4=9 : 7$.

δ') $1,6 : 3=x : 2,6$· ε') $3,6 : x=8 : 1,8$· ϛ') $3\frac{1}{4} : 6=x : 9$.

ζ') $x : 1\frac{1}{2}=\frac{15}{7} : 1\frac{1}{4}$. η') $1,9 : x=2,3 : 2$· θ') $x : 6=0,6 : 1,5$.

2) Ποῖος εἶνε ὁ ἀντίστροφος λόγος τοῦ $\frac{7}{9}$; τοῦ $\frac{2}{3}$; τοῦ 3,5;

Περὶ ἐξαρτήσεως τῶν ποσῶν.

232. Καθὼς γνωρίζομεν, ὅσω περισσοτέρας ὀκάδας ἑνὸς ἐμπορεύματος ἀγοράζομεν, τόσω περισσότερα χρήματα πληρώνομεν· τὸ βάρος λοιπὸν καὶ ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ βάρους νὰ φέρῃ τὴν αὔξησιν τῆς τιμῆς, καὶ τοὐναντίον, ἡ ἐλάττωσις τοῦ βάρους νὰ ἐπιφέρῃ τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς αὐτοῦ. Τοιαῦτα ποσὰ ἀπαντῶνται συχνά. Οὕτω, ἐὰν αὐξηθῇ τὸ εἰσόδημα ἐκ μιᾶς οἰκίας, αὐξάνεται καὶ ὁ φόρος τὸν ὁποῖον πληρώνομεν δι᾽ αὐτήν. Ἐὰν αὐξήσωμεν τοὺς ἐργάτας, οἱ ὁποῖοι ἐργάζονται εἰς ἓν ἔργον, θὰ αὐξηθῇ καὶ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον αὐτοὶ ἐκτελοῦν.

Ὅσω περισσοτέρους ἐργάτας λαμβάνει τις διὰ τὴν ἀνοικοδόμησιν μιᾶς οἰκίας, εἰς τόσω ὀλιγώτερον χρόνον θὰ γίνῃ ἡ ἀνοικοδόμησις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας αὐτοῦ εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπιφέρει τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ἄλλου. Ἐπίσης τοιαῦτα ποσὰ ὑπάρχουν ἀρκετά· π. χ. αὐξάνει τις τὸ μῆκος τοῦ βήματός του, ἐλαττοῦται τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων, τὰ ὁποῖα χρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ὡρισμένην ἀπόστασιν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μετροῦμεν τὴν θερμοκρασίαν ἑνὸς ἀσθενοῦς ἀπὸ ὥρας εἰς ὥραν, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἄλλοτε αὐξάνεται καὶ ἄλλοτε ἐλαττοῦται. Τότε ὁ χρόνος καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ χρόνου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἄλλοτε μὲν τὴν αὔξησιν ἄλλοτε δὲ τὴν ἐλάττωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀσθενοῦς, καθ᾽ ὅσον αὕτη ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο τοῦ χρόνου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

1) ὑπάρχουν ποσὰ τοιαῦτα, ὥστε ὅταν τὸ ἓν μεταβάλλεται καὶ τὸ ἄλλο παθαίνει μεταβολήν τινα· ἐπίσης καὶ ἄλλα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν συμβαίνει τοῦτο. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ ποσὰ ἐξαρτῶνται τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, εἰς δὲ τὴν δευτέραν, ὅτι εἶνε ἀνεξάρτητα τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο.

2) Ἓν ποσόν, ἔστω τὸ Α, δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἓν ἄλλο ἔστω τὸ Β, κατὰ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς δύο τρόπων. α΄) Δύναται, ὅταν αὐξάνεται τὸ Β, ν᾽ αὐξάνεται καὶ τὸ Α· β΄) ὅταν αὐξάνεται τὸ Β, νὰ ἐλαττοῦται τὸ Α.

Ἓν ποσὸν δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλα ποσὰ περισσότερα τοῦ ἑνός. Οὕτω τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνει ἓν ἐργοστάσιον εἰς τοὺς ἐργάτας αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, κατὰ τὰς ὁποίας αὐτοὶ ἐργάζονται, καὶ ἀπὸ τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον ἐργάζονται καθ᾽ ἡμέραν οἱ ἐργάται.

Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε παραδείγματα διὰ καθὲν τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν τῆς ἐξαρτήσεως τῶν ποσῶν.

2) Ἐκ τῶν δύο ποσῶν Α καὶ Β, ὅταν τὸ Α αὐξάνεται, αὐξάνεται καὶ τὸ Β. α΄) τί παθαίνει τὸ Β ὅταν τὸ Α ἐλαττοῦται. β΄) τί παθαίνει τὸ Α, ὅταν τὸ Β αὐξάνεται;

3) Ἐκ δύο ποσῶν Α καὶ Β ὅταν αὐξάνεται τὸ Α, ἐλαττοῦται τὸ Β. α΄) τί παθαίνει τὸ Β, ἐὰν ἐλαττοῦται τὸ Α; β΄) τί παθαίνει τὸ Α, ἐὰν αὐξάνεται τὸ Β; τί ἐὰν ἐλαττοῦται τὸ Β;

Περὶ τῶν ἀναλόγων καὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν.

233. Ἐὰν 2 ὀκ. ἐμπορεύματος στοιχίζουν 5 δρ., αἱ 4, 6, 8 ὀκάδες θὰ στοιχίζουν ἀντιστοίχως 10, 15, 20 δραχμάς. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ ἐμπορεύματος αὐξάνεται οὕτως, ὥστε εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον ἀριθμὸν ὀκάδων ἀντιστοιχεῖ διπλάσιος, τριπλάσιος ἀριθμὸς δραχμῶν.

Εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον, χρόνον τῆς ἐργασίας ἀντιστοιχεῖ διπλασία, τριπλασία ἀμοιβὴ καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ καλοῦμεν *κατ᾽ εὐθεῖαν ἀνάλογα* ἢ *ἁπλῶς ἀνάλογα*.

Ἐν γένει, «***δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς διαιρεῖται καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν***».

234. Ἰδιότης τῶν ἀναλόγων ποσῶν.

«***Ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου***».

Πράγματι, ἐὰν 3 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 14 δρ., αἱ διπλάσιαι ὀκάδες δηλαδὴ αἱ 6 ὀκ., θὰ τιμῶνται 28 δρ. ὁ δὲ λόγος τῶν δύο τιμῶν 3 ὀκ. καὶ 6 ὀκ. εἶνε $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Ἐπίσης ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ εἶνε $\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$.

Ἤτοι οἱ δύο λόγοι εἶνε ἴσοι. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι, $\frac{3}{6}=\frac{14}{28}$. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι, «***ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἓν ζεῦγος τιμῶν τοῦ ἑνὸς μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ζεύγους τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν***».

235. Ἐὰν 5 ἐργ. τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμ., διπλάσιοι, τριπλάσιοι... ἐργάται, ἐργαζόμενοι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, θὰ τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 6· 4.... ἡμέρας. Ὥστε ἐὰν αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ἐλαττοῦται ὁ χρόνος καθ᾽ ὃν περατοῦται τὸ ἔργον, καὶ μάλιστα εἰς 2, 3,.. φορὰς περισσοτέρους ἐργάτας ἀντιστοιχεῖ 2, 3,.. φορὰς ὀλιγώτερος χρόνος. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ ἁπλῶς ἀντίστροφα.

Ἐν γένει, «*δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἢ ἁπλῶς ἀντίστροφα, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, διαιρεῖται τὸ ἄλλο μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιάζεται τὸ ἄλλο ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

236. Ἰδιότης τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν.

«*Ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου*».

Πράγματι, ἐὰν ἐξοδεύῃ τις 8 δρ. καθ' ἡμέραν, καὶ περνᾷ μὲ ἓν χρηματικὸν ποσὸν 30 ἡμ., ἐξοδεύων 16 δρ. καθ' ἡμέραν, θὰ περάσῃ 15 ἡμ. Ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν 8 δρ. καὶ 16 δρ. εἶνε $\frac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς εἶνε $\frac{30}{15}=2$, ὁ ὁποῖος εἶνε ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{2}$. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι $\frac{16}{8}=\frac{30}{15}$.

Ἤτοι, «*ἐὰν ἔχωμεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς καὶ ὁ ἀντίστροφος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν*».

Διὰ νὰ διακρίνωμεν ἂν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ καὶ μή, συγκρίνομεν αὐτά, καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

1) 6 ἐργάται κερδίζουν 15 δρ. Λέγομεν, ἀφοῦ 6 ἐργάται κερδίζουν 15 δρ., οἱ διπλάσιοι, τριπλάσιοι,... ἐργάται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας κερδίζουν διπλασίας, τριπλασίας,... δραχμάς. Ἑπομένως τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.

2) 10 ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ νὰ περάσουν 18 ἡμέρας. Λέγομεν· ἀφοῦ οἱ 10 ἄνθρωποι περνοῦν μὲ τὰς τροφὰς τὰς ὁποίας ἔχουν 18 ἡμ., οἱ διπλάσιοι, τριπλάσιοι,.. ἄνθρωποι μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ περάσουν τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον,.. τῶν ἡμερῶν. Ἑπομένως τὰ ποσὰ εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Περὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

237. *Πρόβλημα. 1) «Ἐὰν 8 ὀκ. μῆλα στοιχίζουν 60 δρχ.· πόσον στοιχίζουν αἱ 20 ὀκ. μῆλα ;»*

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς. Κάμνομεν τὴν καλουμένην κατάταξιν αὐτοῦ ὡς κάτωθι, παριστάνοντες διὰ τοῦ x τὸν ἄγνωστον ἀριθμόν,

8 ὀκ. μῆλα	60 δρχ.
20	x

καὶ ἀκολούθως λέγομεν

αἱ 8 ὀκ. μῆλα στοιχίζουν 60 δρ.

ἡ 1 ὀκ. μῆλα στοιχίζει 60 δρ. : $8 = \frac{60}{8}$ δρ.

αἱ 28 ὀκ. στοιχίζουν $\frac{60}{8} \times 20 = 150$ δρ.

Τὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ὡς ἑξῆς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ τῶν μήλων καὶ δρχ. εἶνε ἀνάλογα. Διότι, διὰ διπλασίας κλπ. ὀκάδας μήλων πληρώνομεν διπλάσιον κλπ. ἀριθμὸν δραχμῶν. Ἐπομένως ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν μήλων εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν δραχμῶν, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{20} = \frac{60}{x}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ὅτι $x = \frac{60 \times 20}{8}$ δρ. $= 150$ δρ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσά, μήλων καὶ δραχμῶν, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάλογα· δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τούτων 8 ὀκ. καὶ 60 δρ., ἄλλη τιμὴ 20 ὀκ. τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, τὴν ὁποίαν παρεστήσαμεν διά τοῦ x. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου x εὑρίσκεται συντόμως ὡς ἑξῆς.

«*Πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ x ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί (εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος) ἀντεστραμμένον*».

238. *Πρόβλημα.* 2) «*Ἐὰν 16 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμέρας, εἰς πόσας ἡμέρας 14 ἐργάται τῆς αὐτῆς ἱκανότητος θὰ ἐκτελέσουν τὸ αὐτὸ ἔργον ;*»

Κάμνομεν τὴν κατάταξιν αὐτοῦ, παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x,

16 ἐργ.	28 ἡμ.
14 »	x

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, τὰ δύο ποσὰ τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἡμερῶν εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Διότι, διπλάσιοι κλπ ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ κλπ. τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν. Ἑπομένως ὁ λόγος τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ $\frac{16}{14}$ θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν ἡμερῶν, ἤτοι μὲ τὸν $\frac{x}{20}$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{16}{14}=\frac{x}{28}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{16\times28}{14}=32$ ἡμ. Ὥστε οἱ 14 ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς 32 ἡμέρας.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ οἱ 16 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 28 ἡμ., ὁ 1 ἐργ. θὰ τὸ τελειώσῃ εἰς 16 φορὰς περισσοτέρας ἡμέρας, ἤτοι εἰς 28×16 ἡμ· καὶ οἱ 14 ἐργ. εἰς 14 φορὰς ὀλιγωτέρας τοῦ ἑνός, δηλαδὴ εἰς $\frac{28\times16}{14}=32$ ἡμ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο διαφέρει ἀπὸ τὸ προηγούμενον μόνον κατὰ τὸ ὅτι, τὰ δύο ποσὰ αὐτοῦ εἶνε ἀντίστροφα. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς λύσεως τούτου $\frac{16\times28}{14}$, ἤτοι ἡ ἄγνωστος τιμὴ τοῦ x, εὑρίσκεται συντόμως ὡς ἑξῆς.

«*Πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ x ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν (εἰς τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος)*».

239. Ὁ γενικὸς τρόπος τῆς λύσεως προβλημάτων ἑνὸς εἴδους λέγεται *μέθοδος*. Ἐπειδὴ εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον, διὰ τοῦτο λέγονται προβλήματα τῆς *μεθόδου τῶν τριῶν*.

Ἤτοι, «*μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον λύονται τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ἄλλου*».

240. Ἐὰν συγκρίνωμεν τοὺς δύο προηγουμένους κανόνας διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου x, συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

1) «Παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x. *2) Γράφομεν τὰς δοθείσας ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ποσῶν ἐπ' εὐ-*

θείας γραμμῆς καὶ ὑποκάτω αὐτῶν τὰς ὁμοειδεῖς των. 3) Σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ὑπ' αὐτὴν γράφομεν ὅτι, ὁ x *ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶνε ἀντίστροφα».*

Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα. 3) «Αἱ $2\frac{3}{4}$ *ὀκ. ἑνὸς ἐμπορεύματος τιμῶνται* $9\frac{1}{2}$ *δρ.· πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ* $12\frac{2}{3}$ *δρ. ;»*

Γράφομεν $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ ὀκ. τιμῶνται $9\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$ δρ.

$$x \qquad\qquad 12\frac{2}{3}=\frac{38}{3}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ τῶν ὀκάδων καὶ τῶν δραχμῶν εἶνε ἀνάλογα. Διότι, διπλασιαζομένων κλπ τῶν ὀκάδων, διπλασιάζονται κλπ. καὶ αἱ δραχμαί. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x=\frac{11}{4}$ὀκ. $\times$ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν $\frac{19}{2}$ καὶ $\frac{38}{3}$ ἀντεστραμμένον· ἤτοι ἐπὶ $\frac{\frac{38}{3}}{\frac{19}{2}}$ ἢ ἐπὶ τὸ $\frac{38}{3}\times\frac{2}{19}=\frac{4}{3}$. Δηλαδὴ

x = εἶνε $\frac{11}{4}$ ὀκ. $\times\frac{4}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$ ὀκ.

Ὥστε μὲ $12\frac{2}{3}$ δρ. θὰ ἀγοράσωμεν $3\frac{2}{3}$ ὀκ.

Πρόβλημα. 4) «Ὅταν τὸ πλάτος ὑφάσματος εἶνε 7 ρούπια, ἀπαιτοῦνται 5 π. 4 ρ. διὰ τὴν κατασκευὴν φορέματος· πόσοι πήχεις ἀπαιτοῦνται, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 1 π. 2 ρ.;»

Κάμνομεν τὴν κατάταξιν, ἀφοῦ τρέψωμεν τοὺς 5 π. καὶ 4ρ εἰς ρούπια = 44 ρ, καὶ τὸν 1 π. 2 ρ. εἰς ρούπια = 10 ρ. Οὕτω ἔχομεν 7 ρ. πλάτος 44 ρ. μῆκος

10 ρ. x

Τὰ ποσὰ τοῦ πλάτους καὶ μήκους εἶνε ἀντίστροφα, διότι ὅταν τὸ πλάτος εἶνε διπλάσιον κλπ. ἀπαιτεῖται ὕφασμα ἡμίσεως κλπ. μήκους. Ἑπομένως ἔχομεν $x=44$ ρ. $\times$ τὸ κλάσμα τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἐπὶ $\frac{7}{10}$. Ἤτοι ἔχομεν $x=44$ ρ. $\times\frac{7}{10}=$

$\frac{22\times7}{5}$ ρ. $=\frac{154}{5}$ ρ. $=30\frac{4}{5}$ ρούπια $=3$ π. $6\frac{4}{5}$ ρ. Ὥστε ἂν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 1π. 2ρ. ἀπαιτοῦνται 3 π. $6\frac{4}{5}$ρ. διὰ τὸ φόρεμα.

241. *Παρατηρήσεις*. 1) Τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τιμὰς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ πρέπει νὰ τρέπωμεν εἰς ἄλλους ὁμοειδεῖς οἱ ὁποῖοι νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν αὐτὴν μονάδα, ἐὰν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο εἰς τοὺς δοθέντας. Οὕτω π χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω τελευταῖον πρόβλημα ἐτρέψαμεν τοὺς πήχεις καὶ τὰ ρούπια εἰς ρούπια.

2) Παρατηρητέον ὅτι, ὁ κανὼν τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν δὲν ἰσχύει καὶ διὰ τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ποσὰ μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε ὅταν αὐξάνεται τὸ ἓν αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο, χωρὶς νὰ εἶνε καὶ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα τὰ ποσά.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. (Ἐμπόρευμα καὶ ἀξία) 1) 15 (45) ὀκ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 18 (63,9) δρ.· πόσον τιμῶνται 27 (425) ὀκ.; 32,4· (603,7).

2) Τὰ 2,4 (7,2) μ. ὑφάσματος τιμῶνται 16,5 (23, 4) δρ.· πόσον τιμῶνται 4,8 (2, 4) αὐτοῦ ; 33 (7,8).

3) Αἱ 3,5 λίτραι οἴνου τιμῶνται 28 δρ.· πόσον τιμῶνται 15 5 λίτραι αὐτοῦ ; 124.

4) 16 (28) ὀκ. μῆλα τιμῶνται 84 (140) δρ.· πόσα μῆλα ἀγοράζομεν μέ 63 (250) δρ ; 12 (50).

5) *Ὁμὰς δευτέρα*. (Ἐργάται καὶ χρόνος ἐργασίας· χρόνος ἐργασίας καὶ ἀμοιβή· ἐργάται καὶ ἀμοιβή). 1) Ἐὰν 30 (18) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 8,75 (10,5) ἡμ., πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται τὸ τελειώνουν εἰς 3,5 (13,5) ἡμέρας ; 75 (14).

2) Ἐὰν 12 (30) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 7,5 (1,5) ἡμ., εἰς πόσας ἡμ. θὰ τὸ τελειώσουν 27 (13) τοιοῦτοι ἐργάται ; 8 ἡμ. 8 ὥρ. (3 ἡμ. 18 ὥρ).

3) 16 (18) ἐργάται κερδίζουν εἰς ἕνα ὡρισμένον χρόνον 505,2 (220,5) δρ.· πόσον κερδίζουν 12 (22) ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ; 378,7 (269,40).

4) Ἐργάτης κερδίζει εἰς 12,5 (7) ἑβδομάδας 3125 (1976,8) δρχ.· πόσα κερδίζει εἰς 14 (8,5) ἑβδομάδα, ; 3500 (2400,40).

5) Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω

Ὁμὰς τρίτη. (Ἀριθμὸς ἴσων μερῶν καὶ μέγεθός των).

1) Ἐὰν 18 (27) ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ $4\frac{1}{3}\left(2\frac{2}{33}\right)$ μῆνας· πόσον χρόνον θὰ ἐπαρκέσουν αἱ τροφαὶ διὰ 10 (24) ἀνθρώπους; 7 μ. 24 ἡμ. (3).

2) Ἐὰν 12 (18) ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ 4 μην. 5 ἡμ. (1μ. 26 ἡμ.), πόσοι ἄνθρωποι θὰ περάσουν μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς 6,25 μην. (16) ἡμ.; 8 (93)

3) Διὰ νὰ διανύσῃ τις ὡρισμένην ἀπόστασιν χρειάζεται 286 (243) βήματα μήκους 0,84 (8,0) μ.· πόσα βήματα θὰ κάμῃ, ἐὰν καθὲν βῆμα αὐτοῦ ἔχει μῆκος 0,77 (0,9) μ.; 312 (216)

Ὁμὰς τετάρτη. (Διάφορα). 1) Ἐὰν 10 (14) ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 (9) ὥρας καθ' ἡμέραν τελειώνουν ἓν ἔργον, πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (7) ὥρας καθ' ἡμέραν, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον; 16 (18).

2) Ἐὰν ἐργάτης εἰς $2\frac{1}{3}\left(2\frac{2}{3}\right)$μῆνας κερδίζῃ 1 591,8 (180) δρχ., εἰς πόσον χρόνον θὰ κερδίσῃ 1 023,3 (2 925); 1,5 μ. (43 μ. 10 ἡμ.).

3) Μοιράζων τις ἓν ποσὸν χρημάτων εἰς 32 (48) πρόσωπα, δίδει εἰς καθὲν 36 (20 δρ: πόσον θὰ δώσῃ εἰς καθέν, ἂν τὸ αὐτὸ ποσὸν μοιράσῃ εἰς 28 (60) πρόσωπα; $41\frac{1}{7}$ (16)

4) 5 (7) σωλῆνες πληροῦν δεξαμενὴν εἰς $\frac{9}{10}\left(1\frac{2}{15}\right)$ ὥρ: εἰς πόσον χρόνον θὰ τὴν πληρώσουν 9 (17) τοιοῦτοι σωλῆνες; 30^{λ} (28^{λ})

5) 20 (36) ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον, ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρας καθ' ἡμέραν· πόσον πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 18 (32) ἐργάται διὰ νὰ τὸ τελειώσουν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον; 10 ὥρ. (9)

6) Ἂν 14 (9) ἐργάται κερδίζουν εἴς τινα χρόνον 36,4 (39,24) δρχ., πόσοι ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θὰ κερδίσουν 39 (196,20) δραχ.; 15 (45).

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

242. *Πρόβλημα. 1) «Ἐργάτης ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ' ἡμέραν ὑφαίνει 80 μ. ὑφάσματος εἰς 25 ημ.· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 120 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος εἰς 30 ημ.;»*

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος κάμνομεν τὴν κατάταξιν αὐτοῦ παριστῶντες τὸν ἄγνωστον διὰ τοῦ x, καὶ γράφομεν

80 μ.	25 ἡμ.	6 ὥρ.
120	30	x

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ἡμέραι εἶνε 25 καὶ διὰ τὰ 120 μέτρα καὶ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ 120 μ. εἰς 25 ἡμέρας (ὅπως καὶ πρίν), θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

80 μ.	6 ὥρ.
120	x

εἰς τὸ ὁποῖον παρελείφθη ἡ τιμὴ 25 τοῦ δευτέρου ποσοῦ, ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ὅτι ἔμεινεν ἀμετάβλητος. Τὰ ποσὰ τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος καὶ τῶν ὡρῶν εἶνε ἀνάλογα, διότι διπλάσιον κλπ. μῆκος θὰ ὑφάνῃ, ἂν ἐργάζεται διπλασίας κλπ. ὥρας. Ἑπομένως ἔχομεν $x = 6 \times \frac{120}{80}$.

Ἀλλὰ θέλει νὰ ὑφάνῃ τὰ 120 μ. εἰς 30 ἡμ., καὶ ζητοῦμεν πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν. Διὰ τοῦτο θὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν

120 μ.	25 ἡμ.	$6 \times \frac{120}{80}$ ὥρ.
»	30	x

Τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ ὡρῶν εἶνε ἀντίστροφα· διότι εἰς διπλασίας κλπ. ἡμέρας διὰ νὰ ὑφάνῃ τὸ αὐτὸ ὕφασμα θὰ ἐργάζεται τὸ ἥμισυ κλπ. τῶν ὡρῶν. Ἑπομένως ἔχομεν $x = 6 \times \frac{120}{80} \times \frac{25}{30} = 9 \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{5}{2} = 7\ \frac{1}{2}$ ὥρ.

Ὥστε $7\ \frac{1}{2}$ ὥρ. τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζεται ὁ ἐργάτης, διὰ νὰ ὑφάνῃ 120 μ. εἰς 30 ἡμέρας.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ, 6 ὧραι, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθείσας τιμάς, 80 μ. καὶ 25 ἡμ., δύο ἄλλων ποσῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶνε ἀνάλογον καὶ τὸ δεύτερον ἀντίστροφον πρὸς τοῦτο, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἄλλας δοθείσας τιμὰς 120 μ. καὶ 30 ἡμ. τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Ἐν γένει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ περισσοτέρων τῶν δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἄλλας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν, λέγονται προβλήματα *τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν*, ἐπειδὴ ἡ λύσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ ὁποία λέγεται καὶ *ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς συνθέτου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν σύντομον κανόνα πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, παρατηροῦμεν ὅτι· πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐξαγομένου $6 \times \frac{120}{80} \times \frac{25}{30}$ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ x ἀριθμὸν 6 ὥρ. ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα τοῦ $\frac{80}{120}$ καὶ ἐπὶ τὸ $\frac{25}{35}$ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (ἐν τῇ κατατάξει τοῦ προβλήματος), ἐκ τῶν ὁποίων ποσῶν τὸ μὲν πρῶτον εἶνε ἀνάλογον, τὸ δὲ δεύτερον ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν εἰς τὴν λύσιν καὶ παντὸς προβλήματος τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, λυομένου ὡς ἀνωτέρω. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ λύσωμεν (συντόμως) πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν· 1) γράφομεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν ποσῶν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς· 2) παριστάνομεν διὰ τοῦ x *τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν ποσῶν, καὶ γράφομεν ὑποκάτω τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς τὴν νέαν τιμὴν καθενός· 3) ὑποκάτω σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν, καὶ γράφομεν ὅτι· ὁ* x *ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ καθὲν τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ καθενὸς ποσοῦ ὅπως ἔχει μέν, ἂν τὸ ποσὸν εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ τοῦ ἀγνώστου, ἀντεστραμμένον δέ, ἂν εἶνε ἀνάλογον».*

Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Π ρ ό β λ η μ α 2) «16 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας 14 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον ;»

Κάμνομεν τὴν κατάταξιν τούτου γράφοντες,

16 ἐργ.	9 ὥρ.	28 ἡμ.
14 »	8 »	x

Λέγομεν τώρα· ὁ x ἰσοῦται μὲ 28 ἡμ. ×, συγκρίνομεν τὰ ποσὰ τῶν ἐργατῶν καὶ ὡρῶν· 16 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἡμέραν τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 28 ἡμ.· διπλάσιοι ἐργάται κλπ. ἐργαζόμενοι τὰς αὐτὰς ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ κλπ. τῶν ἡμερῶν. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα Ὥστε ἔχομεν $x = 28$ ἡμ. $\times \frac{16}{14} \times$, συγκρίνομεν τὰ ἄλλα ποσὰ λέγοντες· 9 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι οἱ 16 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 28 ἡμέρας, διπλασίας ὥρας ἐργαζόμενοι οἱ αὐτοὶ ἐργάται, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν. Τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$x = 28 \text{ ἡμ.} \times \frac{16}{14} \times \frac{9}{8} = 36 \text{ ἡμ.}$$

Ὥστε εἰς 36 ἡμέρας 18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουν τὸ ἔργον.

Πρόβλημα 3) «10 ἐργάται τελειώνουν τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 15 ἡμ.· εἰς πόσας ἡμέρας 12 ἐργάται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐργαζόμενοι, θὰ τελειώσουν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου ;»

Κάμνομεν τὴν κατάταξιν γράφοντες

10 ἐργ.	$\frac{3}{4}$ ἔργου	15 ἡμ.
12	$\frac{1}{4}$	x

Συγκρίνοντες τὰ ποσὰ εὑρίσκομεν ὅτι, ἐργάται μὲν καὶ ἡμέραι εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἔργον δὲ καὶ ἡμέραι ἀνάλογα. Ἑπομένως ἔχομεν

$$x = 15 \times \frac{10}{12} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 15 \times \frac{10}{12} \times \frac{1}{3} = 5 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{1} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

ἡμέρας.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσα λαμβάνει 1 ἐργάτης εἰς 1 ἡμ., ἐὰν 7 (8) τοιοῦτοι ἐργάται εἰς 7 (6) ἡμ. λαμβάνουν 1 562,4 (22800) δραχ. ; 24,80 (47,5).

2) 18 (28) ἐργάται κερδίζουν εἰς 5 (22) ἡμ. 2 340 (16 016)

δρχ.· πόσον κερδίζουν 27 (16) ἐργάται εἰς 6 (18) ἡμ.;
4 212 (7 488)

3) 5 (13) ἐργάται κερδίζουν εἰς 7 (9) ἡμ. 847 (292,5) δρ.· εἰς πόσας ἡμ. 11 (17) ἐργάται θὰ κερδίσουν 2 129,6 (3 400) δρ.;
8 (80)

4) 8 (7) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (9) ὥρ. καθ' ἡμέραν λαμβάνουν διὰ 12 (12) ἡμ. 1 920 (990) δρ.· πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (10) ὥρ. τὴν ἡμέραν, θὰ λάβουν 4 284 (3 575) δρ. διὰ 14 (13) ἡμ.;
17 (21)

5) 13 (15) ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρ. τὴν ἡμέραν λαμβάνουν 3 088 (4 416) δρ. εἰς 12 (16) ἡμ.· πόσας δραχ. θὰ λάβουν 16 (18) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (9) ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐπὶ 19 (17) ἡμ.;
6 688 (6 334,20).

6) Ἐὰν 25 (22) ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 (10) ὥρ. τὴν ἡμέραν σκάπτουν τάφρον μήκους 120 (825) μ. εἰς 12 (15) ἡμ., εἰς πόσας ἡμέρας 36 (18) ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 (8) ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ σκάψουν τάφρον μήκους 240 (432) μ.;
15 (12).

7) Συνθέσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 2, 3, 4 καὶ λύσατε αὐτά.

8) Λύσατε τὰ προβλήματα 4, 5, 6 διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) 8 (17) ἐργάται σκάπτουν εἰς 5,4 (8) ἡμ. ἔδαφος 99,36 (134,4) (μ³)· πόσα κυβικὰ μέτρα θὰ σκάψουν 9 (12) ἐργάται εἰς 6 (9) ἡμ.;
124,2 (106,729...).

2) Τάφρος μήκους (15,27) μ., πλάτους 2 (1,5) μ. καὶ βάθους 0,75 (0,8) μ. στοιχίζει 337,5 (518,4) δρ.· πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τάφρος πλάτους 2,25 (2) μ. καὶ βάθους 0,8 (0,75) μ., ἡ ὁποία στοιχίζει 675 (528) δρ.;
25 (22).

3) 16 (19) ἐργάται ὑφαίνουν 51 (114) μ. ὑφάσματος εἰς 17 (6) ἡμ. ἐργαζόμενοι 9 (8) ὥρ. καθ' ἡμέραν· πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 (9) ὥρ. καθ' ἡμέραν θὰ ὑφάνουν 57 (189) μ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος εἰς 18 (7) ἡμ.;
19 (24).

4) Ἐὰν ἑνὸς βιβλίου καθεμία σελὶς ἔχῃ 40 (44) στίχους, καὶ καθεὶς στίχος 63 (72) γράμματα τὸ βιβλίον ἀποτελεῖται ἀπὸ 15 (20) τυπογραφικὰ φύλλα. Ἀπὸ πόσα τυπογραφικὰ φύλλα θ' ἀποτελῆται τὸ αὐτὸ βιβλίον, ἐὰν καθεμία σελὶς ἔχῃ 45 (48) στίχους, καὶ καθεὶς στίχος 60 (55) γράμματα;
14 (24).

Προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστῶν.

243. Εἰς τὸν κοινὸν βίον ἀκούομεν συνήθως τὴν φράσιν «*ὁ ἔμπορος πωλεῖ τὸ ἐμπόρευμα αὐτοῦ μὲ κέρδος 8 τοῖς ἑκατὸν*» π. χ. Δι' αὐτοῦ ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὰς ἑκατὸν δραχμὰς ὅπου τοῦ στοιχίζει τὸ ἐμπόρευμα κερδίζει 8 δρ. κατὰ τὴν πώλησιν αὐτοῦ. Ἑπομένως ἐξ ἐκείνου τὸ ὁποῖον στοιχίζει 50 δρ., 25 δρ.. 200 δρ,... κερδίζει αὐτὸς 4 δρ., 2 δρ., 16 δρ,.. Πρόκειται δηλαδὴ περὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων (τιμῆς ἀγορᾶς καὶ κέρδους, καὶ μάλιστα δίδεται τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὴν ἀγορᾶς 100 δρ.

Ἐν γένει, μεταχειριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν «*τόσον τοῖς ἑκατὸν*» καὶ τὴν σημειώνομεν διὰ τοῦ %, ὅταν πρόκειται περὶ ἀναλόγων ποσῶν καὶ δίδεται πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς 100 τοῦ ἄλλου. Κατ' ἀναλογίαν μεταχειριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν «*τόσον ἐπὶ τοῖς χιλίοις*» καὶ τὴν σημειώνομεν οὕτω ‰, ἐὰν εἰς ἀνάλογα ποσὰ δίδεται πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς 1000 τοῦ ἄλλου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερὰ καὶ ἡ σημασία τῶν ἑξῆς ἐκφράσεων.

1) Ἓν ἐμπόρευμα θὰ πωληθῇ μὲ ζημίαν 5 % π. χ. 2) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ηὐξήθη κατὰ 5 %. Ποσόν τι ηὐξήθη κατὰ 10% ἑνὸς ἄλλου. 4) Ὁ φόρος ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος ἀνέρχεται εἰς 5%. 5) Μία οἰκία δίδει 5% εἰσόδημα. 6) Ἡ θνησιμότης εἶναι 1‰.

7) Συνεβιβάσθη τις μὲ 70%, σημαίνει ὅτι ἐπλήρωσεν οὗτος ἀντὶ 100 (δραχμῶν, ὀκάδων. . .) μόνον 70.

8) Ἔμπορος κάμνει ἔκπτωσιν 5%, σημαίνει ὅτι ὁ ἔμπορος δίδει εἰς τὸν ἀγοραστὴν ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρ. ἀντὶ 95 δραχμῶν.

9) Τὰ ἔξοδα ἐμπορεύματος ἀνέρχονται εἰς 5%, σημαίνει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος 100 δρ. αὐξάνεται ἕνεκα ἐξόδων κατὰ 5 δρ.

10) Τὸ ἀπόβαρον εἶνε 3 %, σημαίνει ὅτι εἰς 100 ὀκ. μικτὸν βάρος τὸ ἀπόβαρον εἶνε 3 ὀκ.

11) Ὅταν λέγωμεν ὅτι, τὸ οἰνόπνευμα εἶνε καθαρότητος 80°, ἐννοοῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶνε καθαρόν, ἀλλ' ὅτι εἰς 100 μέρη αὐτοῦ μόνον τὰ 80 εἶνε καθαρὸν οἰνόπνευμα.

12) Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου, χρυσοῦ,.. εἶνε 850

χιλιοστὰ π. χ. σημαίνει ὅτι, ἐκ χιλίων χιλιοστῶν αὐτοῦ μόνον τὰ 850 χιλιοστὰ εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, χρυσός...

Ἐὰν δοθῇ τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις καὶ εὕρωμεν τὸ πόσον (κέρδος, ζημία π. χ.) ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθὲν ποσόν, τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο λέγεται συνήθως *ποσοστόν*, τὸ δὲ ποσὸν εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ποσοστὸν θὰ καλοῦμεν *κυρίαν τιμήν*.

Πρόβλημα. 1) *«Πόσον κερδίζει εἷς ἔμπορος ἐκ τῆς πωλήσεως ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα τοῦ στοιχίζουν 365 δρ., καὶ τὰ πωλεῖ μὲ κέρδος 8 %;»*

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς σημασίας τοῦ τόσον τῆς ἑκατόν. Πράγματι ἔχομεν

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς δίδει 8 δρ. κέρδος
365 x

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = 8 \text{ δρ.} \times \frac{365}{100} = 29{,}20$ δρ.

Πρόβλημα. 2) «Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἑνὸς ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον πωληθὲν μὲ κέρδος 5 % ἔδωκε κέρδος 41,1 δραχ.;»

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς.

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς 5 δρ. κέρδος
x 41,1

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἔχομεν

$$x = 100 \times \frac{41{,}1}{5} = 822 \text{ δραχμάς.}$$

Πρόβλημα. 3) «Ἓν ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 453,6 δρ. μὲ κέρδος 5 %· πόσον ἐστοίχιζε τὸ ἐμπόρευμα;»

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρ. πωλεῖται 105 δρ., ἀφοῦ τὸ κέρδος εἶνε 5 %. Ἑπομένως ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

100 δρ. ἀξίας ἀγορᾶς 105 δρ. ἀξία καὶ κέρδος
x 453,6

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα ἔχομεν ὅτι

$$x = 100 \text{ δρ.} \times \frac{453{,}6}{105} = 432 \text{ δραχμαί.}$$

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον.

Ὁ τόκος λέγεται *ἁπλοῦς* μέν, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, *σύνθετος* δέ, ὅταν ὁ τόκος καθενὸς ἔτους δίδῃ τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη, ὥστε εἰς τὸ τέλος καθενὸς ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὸν ἁπλοῦν τόκον.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά: τὸ *κεφάλαιον*, *ὁ τόκος*, *τὸ ἐπιτόκιον*, καὶ *ὁ χρόνος*. Διὰ τὴν γενικότητα θὰ παριστάνωμεν τὰ ποσὰ αὐτὰ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν γραμμάτων Κ,Τ,Ε,Χ. Εἰς καθὲν πρόβλημα τόκου δίδονται συνήθως τρία ἐκ τῶν ποσῶν τούτων, καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶνε *ὁ τόκος*, ἢ *τὸ κεφάλαιον*, ἢ *ὁ χρόνος*, ἢ *τὸ ἐπιτόκιον*, ἕπεται ὅτι τὰ προβλήματα τόκου εἶνε *τεσσάρων εἰδῶν*.

Διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν, ἂν τὰ ποσὰ Κ,Τ,Ε,Χ ἀνὰ δύο συγκρινόμενα εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

245. *Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς καθὲν τῶν τριῶν ἄλλων ποσῶν* Κ,Ε,Χ. Πράγματι, ἐὰν ἓν *κεφάλαιον* δίδῃ τόκον τινά, τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον (ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον)... κεφάλαιον θὰ δώσῃ διπλάσιον τριπλάσιον (ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον)... τόκον. Ὁμοίως, ἂν ἓν κεφάλαιον εἰς *χρόνον* τινά, π. χ. εἰς 3 ἔτη, δίδῃ ἕνα ὡρισμένον *τόκον*, τὸ αὐτὸ κεφάλαιον θὰ δώσῃ εἰς διπλάσιον ἢ τριπλάσιον.. χρόνον τὸν διπλάσιον, τριπλάσιον.. τόκον. Ἐπίσης ἐὰν διπλασιάσωμεν, τριπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν διὰ δύο· τρία)... *τὸ ἐπιτόκιον*, διπλασιάζεται τριπλασιάζεται (διαιρεῖται διὰ δύο, τρία).., καὶ *ὁ τόκος*, τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων.

246. *Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα*. Διότι, ἐὰν ἓν κεφάλαιον, π. χ. 1000 δρ., εἰς 2 ἔτη δίδῃ τόκον τινὰ πρὸς ἓν ἐπιτόκιον, διπλάσιον, τριπλάσιον (ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον)... κεφάλαιον, δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸ ἥμισυ, τὸ ἓν τρίτον (ἢ τὸ διπλάσιον, τὸ τριπλάσιον)... τοῦ χρόνου.

247. *Τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ἀντίστροφα*. Διότι ἂν ἓν κεφάλαιον πρὸς ἐπιτόκιόν τι 5 π. χ. δίδῃ τόκον τινά, τὸ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. κεφάλαιον θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον πρὸς τὸ ἥμισυ τὸ τρίτον κλπ. ἐπιτόκιον. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἔχομεν ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἕπεται ὅτι ταῦτα λύονται κατὰ τὴν ἁπλῆν ἢ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Διὰ τὴν ἄσκησιν περὶ τὴν σχέσιν τῶν ποσῶν τοῦ κεφαλαίου, τόκου, ἐπιτοκίου καὶ χρόνου παραθέτομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Κεφάλαιον 252,25 δρχ. ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας δίδει 8.25 δρ τόκον· πόσον τόκον δίδει κεφάλαιον 201.8 δρ. ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας; 5,6.

2) Ἓν κεφάλαιον φέρει εἰς 2,5 (2,75) ἔτη τόκον 8 325 (6 417) δρ.· πόσον τόκον θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ κεφάλαιον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας εἰς 4,5 (4,25) ἔτη; 14 985 (9 917,18)

3) Κεφάλαιον 328 (526) δρ. δίδει ἕνα ὡρισμένον τόκον εἰς 4 ἔτ. 6 μ. (6 ἔτ. 8 μ.)· εἰς πόσον χρόνον 369 (2 630) δρ ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον; 4 ἔτ. (1 ἔτ 4 μ.)

4) Κεφάλαιον 3280 (5340) δρ. δίδει τόκον τινὰ εἰς 7 ἔτ. 6 μῆν. (8 ἔτ. 4 μ.)· ποῖον κεφάλαιον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θὰ δώσῃ εἰς 6 ἔτ (14 ἔτ 10 μ.) τὸν αὐτὸν τόκον; 4 100 (3000).

5) Κεφάλαιον 6 714 (9 327) δρ. δίδει πρὸς 3 (3,5)% τόκον τινά· πρὸς πόσον % ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας κεφάλαιον 5 035,5 (4 352,6) δρ. δίδει τὸν αὐτὸν τόκον; 4 (7,14).

6) Κεφάλαιον δίδει τόκον τινὰ πρὸς 3,5 (3)% εἰς 4,5 (5) ἔτη· πρὸς πόσον % ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας εἰς 9 (6) ἔτη δίδει τὸν αὐτὸν τόκον; 1 ἔτ. 9 μῆν. (2 ἔτ. 6 μῆν.)

Εὕρεσις τοῦ τόκου.

248. *Πρόβλημα 1*) «*Πόσον τόκον φέρουν αἱ 3524 δρ. εἰς 7 ἔτη πρὸς 5%;*»

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ ἔκφρασις «πρὸς 5%» σημαίνει ὅτι τὸ κεφάλαιον 100 δρ. εἰς 1 ἔτος δίδει τόκον 5 δρ., ἕπεται ὅτι ἔχομεν,

100 δρ. κεφάλ.	εἰς 1 ἔτ.	5 δρ. τόκον
3524	7	x »

Ἐπειδὴ καὶ ὡς γνωρίζομεν ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον ἔχομεν ὅτι,

$$x = 5 \times \frac{3524 \times 7}{100 \times 1} = 1233{,}40 \text{ δραχμάς.}$$

Π ρ ό β λ η μ α. 2) *«Πόσον τόκον φέρουν 3250 δρ. πρὸς 3 %/₀ εἰς 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας ;»*

Ἐν πρώτοις τρέπομεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 2 ἔτ 6 μῆν. εἰς ἔτη, ὅτε ἔχομεν 2 ἔτ 6 μῆν.=2,5 ἔτη. Ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα, καθὼς τὸ ἀνωτέρω, καὶ ἔχομεν

100 δρ. κεφάλ.	εἰς 1 ἔτ.	3 δρ.	τόκον
3250 δρ.	» 2,5	x	»

καὶ $x = 3 \times \frac{3250}{100} \times \frac{2{,}5}{1} = 3 \times \frac{3250}{100} \times \frac{5}{2} = 243{,}75$ δρ. Ὥστε ὁ τόκος τῶν 3240 δρ. εἰς 2 ἔτ. 6 μ. πρὸς 5%/₀ εἶνε 243,75 δρ.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι,

τὸ ἐξαγόμενον $\frac{5 \times 3524 \times 7}{100}$ τοῦ πρώτου προβλήματος εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $3524 \times 5 \times 7$, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δευτέρου προβλήματος

$$\frac{3250 \times 3 \times 2{,}5}{100}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100».

249. Ἐάν, χάριν γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὸ K,E,T,X πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, τόκου καὶ χρόνου (εἰς ἔτη), θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$T = \frac{K \times E \times X}{100} \qquad (1)$$

εἰς τὸν ὁποῖον θ᾽ ἀντικαθιστῶμεν τὰ K,E,X, διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν αὐτῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. ***«Πόσον τόκον δίδουν 2255 δρ. πρὸς 4 %/₀ εἰς 7 μῆνας ;»***

Ἐπειδὴ 7 μῆν. $= \frac{7}{12}$ ἔτη, θὰ ἔχωμεν $K = 2\,255, E = 4, X = \frac{7}{12}$.

Ἑπομένως εἶνε $T = \frac{2\,255 \times 4}{100} \times \frac{7}{12} = 52{,}60$ δρ.

Ἐὰν ὁ χρόνος εἶνε ἢ τραπῇ εἰς μῆνας, παραστήσωμεν δ' αὐτοὺς διὰ τοῦ M, ἐπειδὴ ὁ 1 μὴν εἶνε τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους, οἱ M μῆνες θὰ εἶνε $\frac{M}{12}$ τοῦ ἔτους. Ἄρα ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) γίνεται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ X θέσωμεν τὸ $\frac{M}{12}$, $T = \frac{K \times E \times M}{1200}$.

Ἐὰν ὁ χρόνος εἶνε ἢ τραπῇ εἰς ἡμέρας, παραστήσωμεν δ' αὐτὰ διὰ τοῦ H, ἐπειδὴ ἡ ἡμέρα εἶνε τὸ $\frac{1}{360}$ τοῦ ἔτους (τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας), αἱ H ἡμέραι εἶνε $\frac{H}{360}$ ἔτη. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἀντὶ τοῦ X τὸ $\frac{M}{360}$, λαμβάνομεν $T = \frac{K \times E \times H}{36\,000}$. Διαιροῦντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου διὰ τοῦ ἐπιτοκίου E, λαμβάνομεν

$$T = \frac{K \times H}{\frac{36000}{E}} \text{ ἢ } T = \frac{K \times H}{\Delta},$$

ἐὰν διὰ τοῦ Δ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον $\frac{36\,000}{E}$.

250. Τὸ γινόμενον $K \times H$, τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας, λέγεται *τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου*, τὸ Δ, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 36 000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου καλεῖται *σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου*.

Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου διὰ τῶν τοκαρίθμων.

«*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου δι' ἕνα ἀριθμὸν ἡμερῶν, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἐπιτοκίου*».

Οὕτω, ἂν ζητοῦμεν τὸν τόκον 4 800 δρ. εἰς 2 μ. καὶ 15 ἡμέρας πρὸς 8%, ἐπειδὴ εἶνε 2 μ καὶ 15 ἡμ. $=75$ ἡμ., ἔχομεν

$$T = \frac{4\,800 \times 75}{4500} = 80 \text{ δραχμαί.}$$

διότι ὁ σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου εἶνε ἐδῶ 36 000 : 8 = 4 500.

Καλὸν εἶνε νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τοὺς σταθεροὺς διαιρέτας μερικῶν ἐπιτοκίων. Διὰ τοῦτο παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα σταθερῶν διαιρετῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν ἐπιτόκια.

Ἐπιτόκια		*σταθεροὶ διαιρέται*
3	*(36 000: 3)*	*12000*
4	*(36 000: 4)*	*9000*
4,5	*(36 000: 4,5)*	*8000*
5		*7200*
6		*6000*
7		*5143*
7,5		*4800*
8		*4500*
9		*4000*
10		*3600*

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 200· 500· 600· 2000· 7125· 234· 534· 6824 δρ. πρὸς 3% εἰς 5 ἔτη.

30· 75· 90· 300· 1068,75· 35,7· 80,1 1025,8.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος τῶν 4 848 δρ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 2%, 2,5%· 3,5%· 4,5% 484,6· 606· 484,4· 109,08.

3) Πόσον τόκον φέρουν 4820 δρ. πρὸς 4% εἰς 2· 2,25· 3· 4,75· 5· 6 ἔτη; 385,6· 433,8· 578,4· 915,8· 964· 1156,8.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὁλικὸς τόκος 4 800 (5 000) δρ. εἰς 75 (90) ἡμ., 5 600 (3 000) δρ. εἰς 45 (70) ἡμ.· 8 400 δρ. εἰς 35 ἡμ. πρὸς 8 (9)% (διὰ τῶν τοκαρίθμων). 201,33· (165).

5) Πόσον τόκον φέρουν 482,75 (5331) δρ. πρὸς 4% εἰς 2 ἔτ. 4 μ. (1 ἔτ. 2 μ.) (διὰ τῶν τοκαρίθμων).

45,06 προσέγγισις ἑκατοστοῦ. (248,78).

6) Πόσον τόκον φέρουν 31 440 δρ. πρὸς 3,75% εἰς 2 ἔτ. 5 μῆνας 12 ἡμέρας; 2888,55.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐὰν ἀφήσῃ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον 3 824 (768,4) δρ. ἐπὶ 3 (2) ἔτη πρὸς 4,25 (3,75)%· πόσα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος; 4 311,56 (826,03).

2) Ἐδάνεισέ τις 564,8 (7 611) δρ. πρὸς 3,75 (4)%· πόσα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 2 (4) ἔτη (καὶ 7 μῆνας); 607,16 (9 006,35).

3) Ὠφειλέ τις νὰ πληρώσῃ πρὸ 4 (2) ἐτ. 2 (8) μην. 121,7 (123.1) δρ.· πόσα θὰ πληρώσῃ σήμερον ἐὰν τοῦ λογαριασθῇ καὶ τόκος πρὸς 2,4 (3,75)%; 133,87 (135,41)

4) Πόσος εἶνε ὁ τόκος 2144 (8 600) δρ. πρὸς 3,75 (4,5) % ἀπὸ 1 (2) Μαΐου (Μαρτίου) μέχρι 15 (25) Ἰουνίου (Ἀπριλίου) τοῦ αὐτοῦ ἔτους; 10,05 (58,05).

5) Ὀφείλει τις νὰ πληρώσῃ σήμερον 7 128 (7 116) δρ., καὶ συμφωνεῖ νὰ πληρώσῃ μετὰ 5,75 ἔτη (4 ἔτ. 8 μ.) μὲ τόκον πρὸς 4,5 %· πόσα θὰ πληρώσῃ; 8 972,37 (8 610,36).

Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου.

251. *Πρόβλημα 1) «Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4% ἐπὶ 6 ἔτη φέρει τόκον 204 δρ.;»*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λέγοντες,

100 δρ. κεφάλ. εἰς	1 ἔτ.	4 δρ. τόκον
x	6	204

Ἐπειδὴ τὸ μὲν κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τὸ δὲ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος ἀνάλογα θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$x = \frac{100 \times 204}{4 \times 6}$$

Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν τόκον, ἤτοι τὸν 204 δρ., ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον.

Ὅθεν, *«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη)»*.

Ἐκτελοῦντες τὰς ἁπλοποιήσεις καὶ τὰς πράξεις εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν x=850 δρ.

Ἐάν, χάριν γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὰ Κ, Ε, Χ, Τ πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, χρόνου καὶ τόκου, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$K = \frac{T \times 100}{E \times X}$$

εἰς τὸν ὁποῖον θ' ἀντικαθιστῶμεν τὰ Τ, Ε, Χ διὰ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον.

Ἐφαρμογή. «*Πόσον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ 3 ἔτη 6 μῆν. πρὸς 5 % ἔδωκε τόκον 357 δρ.;*»

Ἐπειδὴ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες = 3,5 ἔτη, θὰ ἔχωμεν Τ=357, Ε=5, Χ=3,5. Ἑπομένως $K=\frac{357\times100}{5\times3,5}=\frac{35700}{17,5}=\frac{35700\times2}{35}$ =2040 δρ.

252. *Πρόβλημα 2).* «*Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 800 δρ. τοκισθὲν πρὸς 5 % φέρει τόκον 120 δρ.;*»

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο λύομεν ὡς ἑξῆς διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Κεφάλαιον	100 δρ.	εἰς	1 ἔτ.	φέρει τόκον	5 δρ.
	800	»	x	»	120

Ἐπειδὴ ὁ μὲν χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιον εἶνε ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ δὲ τόκος καὶ ὁ χρόνος ἀνάλογα, ἔχομεν ὅτι

$$x=\frac{1\times100\times120}{800\times5}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 120 δρ., ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν τόκον, ἐπὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ 800, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ κεφάλαιον, ἐπὶ τὸν 5, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἐπιτόκιον. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων προβλημάτων ἔχομεν ὅτι,

«*διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν δι τοῦ ἀκεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον*».

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς ἁπλοποιήσεις καὶ τὰς πράξεις εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον, εὑρίσκομεν x=3 ἔτη.

Ἐὰν μεταχειρισθῶμεν τὰ Κ, Ε, Χ, Τ πρὸς παράστασιν τοῦ κεφαλαίου, ἐπιτοκίου, χρόνου καὶ τόκου, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$X=\frac{T\times100}{K\times E}$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ Τ, Κ, Ε διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη).

Ἐφαρμογή. «*Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δρ. τοκισθὲν πρὸς 4 % ἔδωκε τόκον 36 δρ.;*»

Ἔχομεν

Κ=900, Ε=4, Τ=36. Ἑπομένως εἶνε $X=\frac{36\times100}{900\times4}=\frac{36}{36}=1$ἔτ.

253. *Πρόβλημα 3). «**Κεφάλαιον 455 δρ. φέρει εἰς 3 ἔτη τόκον 54,6 δρ.. πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη;**»*

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, τὸ λύομεν δὲ κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λέγοντες,

κεφάλαιον	455 δρ.	εἰς 3 ἔτη	φέρει τόκον	54,6 δρ.
»	100 »	» 1	»	x

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον θὰ ἔχωμεν, $x = \frac{54,6 \times 100 \times 1}{455}$

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱονδήποτε πρόβλημα ὅμοιον πρὸς αὐτό, καθὼς δὲ εὐκόλως παρατηροῦμεν,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς (ἔτη)».

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον $E = \frac{T \times 100}{K \times X}$

εἰς τὸν ὁποῖον ἀντικαθιστῶντες τὰς δοθείσας τιμὰς ἀντὶ τῶν Τ, Κ, Χ εὑρίσκομεν τὸ ἐπιτόκιον 4 δρ.

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν x=4 δρ. Ὥστε τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 4 δρ.

*Ἐφαρμογή. «**Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη κεφάλαιον 75 δρ. ἐπὶ 4 ἔτη καὶ ἔδωκε τόκον 12 δρ.;**»*

Ἐδῶ ἔχομεν Τ = 12, Κ = 75, Χ = 4. Ἑπομένως $E = \frac{12 \times 100}{75 \times 4} = \frac{1200}{300} = 4$. Ἄρα τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 4 δρ.

254. *Παρατήρησις.* Οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες κανόνες διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου δύνανται νὰ συμπτυχθοῦν εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα δεδόμενα, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100· διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (τοῦ χρόνου ἐκφραζομένου εἰς ἔτη)».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5%₀ ἔδωκε τόκον 375 δρ. εἰς 3· 3,5· 3,75· 4· 4,25· 5 ἔτη;

2380· 2040· 1904· 1785· 1680· 1428.

Ποῖον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 2,75 (4,5) % ἐπὶ 5 ἔτ. 8 μ. (3 ἔτ. 8 μ.) δίδει τόκον 1365,1 (5,61) δρ.; 8760 (34).

Πόσον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 5,5 (4,2) % ἐπὶ 2 (3) ἔτ. 3 (6) μῆν. 10 (20) ἡμ. δίδει τόκον 7667 (728) δρ.; 61200 (4875).

4) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 6 μῆν. 9 ἡμ. (1 ἔτ. 1,5 μῆν.) πρὸς 7,5 (4)%, δίδει τόκον 598,5 (384,3) δρ.; 15200(8540).

5) Ἐξοδεύει τις 12,5 (13,5) δρ. καθ' ἡμέραν, τὰ ὁποῖα εἶνε ὁ τόκος τῶν χρημάτων του τοκισμένων πρὸς 4,5 (3,5) %· πόσον εἶνε τὸ κεφάλαιόν του; 100 000 (136 285,71).

6) Ποῖον κεφάλαιον φέρει εἰς 5 (5) ἔτη πρὸς 4,5 (5,6) % τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 4812 (8417) δρ. πρὸς 5 (4) % εἰς 6 (7) ἔτη; 6416 (8416,85).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δρ. πρὸς 4 % τοκιζόμενον φέρει τόκον 36· 45· 57· 72· 87· 94,5 δρ.;

1 ἔτ.· 1 ἔτ. 3 μ.· 1 ἔτ. 6 μ.· 1 ἔτ. 7 μ.· 2 ἔτ.· 2 ἔτ. 5 μ.. 2 ἔτ. 7 μ. 15 ἡμ.

2) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 6414 (7416) δρ. πρὸς 4,5 (3,5)% διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 481,05 (735,42) δρ.;

1 (2) ἔτ. 8 (10) μην.

3) Κεφάλαιον 4228 (8634) δρ. τοκισθὲν πρὸς 3,5 (4,5) % ἔγινε μὲ τὸν τόκον του 4775,75 (10317, 63) δρ.· ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτοκίσθη; 3 (4) ἔτ. 8 (4) μην., 12 ἡμ.

4) Πόσον χρόνον κεφάλαιον 1 δραχ. μένον τοκισμένον πρὸς 3%, 4%, 5%, (γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του) διπλάσιον; Πότε θὰ συμβῇ τοῦτο, ἂν τὸ κεφάλαιον εἶνε οἱονδήποτε;

33 ἔτη 4 μην.· 25 ἔτη.

5) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 4250 (1808,8) δρ. φέρει πρὸς 6 (5) % τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 3825 (5814) δρ. πρὸς 5 (4) % εἰς 4 ἔτη (2 ἔτ. 4 μ.); 3 μην. 18 ἡμ. (6 ἔτ.).

Ὁμὰς τρίτη. 1) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 180 δρ. φέρει εἰς 3 ἔτη τόκον 10,8· 16.2· 18,9· 20,25· 21.6· 24,39· 22,68 δρ. 2· 33,5· 3,75 4,51· 42 δρ.

2) Λαμβάνει τις ἀπὸ κεφάλαιον 3 808 (7 242) δρ. τοκισθὲν ἐπὶ 3,5 (4 ἔτ. 4 μ.) ἔτη τόκον 699,72 (1 412,19) δρ. πρὸς πόσον τοῖς % ἐτοκίσθη; 5,25 (4,5).

3) Κεφάλαιον 7 845 (6 145) δρ. ηὐξήθη εἰς 1 (1) ἔτ. 5 (8) μῆν. 18 (12) ἡμ. καὶ ἔγινεν 8 305,24 (6 771,19) δρ: πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη; 4 (6).

4) Πρὸς τόσον τοῖς % πρέπει νὰ τοκισθῇ 1 δρ., ὥστε μετὰ τῶν τόκων της εἰς 10· 15· 50 ἔτη νὰ διπλασιασθῇ;

10 ἔτη· 6 ἔτ. 8 μ. 5 (καὶ οἱονδήποτε κεφάλαιον)

5) Πρὸς πόσον τοῖς %, κεφάλαιον 4 780 (15 396) δρ. εἰς 2,5 (5) ἔτη φέρει τόκον 3 824 (6 415) δρ. πρὸς 5 (3) % εἰς 3 (6) ἔτη; 4,8 (1,5).

6) Ἔχει τις δύο κεφάλαια· τὸ ἓν 9 856 δρ., καὶ τὸ ἄλλο 7 864 δρ. Τὸ α΄ εἶνε τοκισμένον πρὸς 5%. Πρὸς πόσον τοῖς %, πρέπει νὰ τοκίσῃ τὸ β΄, διὰ νὰ ἔχῃ ἐν ὅλῳ ἐτήσιον τόκον 807,36 δρ., 4

255. *Π ρ ό β λ η μ α. «Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5%, ἐπὶ 3 ἔτη γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 604,9 δρ.;»*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο (καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ) δίδεται τὸ ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου, τὸ ἐπιτόκιον, καὶ ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ τὸ κεφάλαιον.

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουν τόκον 5 δρ., εἰς 3 ἔτη φέρουν 15 δρ. Ἑπομένως γίνονται μὲ τὸν τόκον αὐτῶν εἰς τρία ἔτη, 115 δρ. Οὕτω λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λέγοντες,

100 δρ. κεφ. γίνονται 115 δρ. μὲ τὸν τόκον αὐτῶν
x 604,9

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι $x = 100 \times \frac{604,9}{115} = 526$ δραχ.
Ὥστε τὸ κεφάλαιον ἦτο 526 δραχμαί.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ὀφείλει τις νὰ πληρώσῃ μετὰ 3 (8) ἔτη 416,30 (32 045,32) δρ., συμφωνεῖ δὲ νὰ πληρώσῃ σήμερον· πόσον θὰ πληρώσῃ, ἂν ὁ τόκος λογαριάζεται πρὸς 5 (3) %; 362 (25 843).

2) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 2 (4) μῆν. πρὸς 4 (5)°/₀ γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 730,84 (329,40) δρ. ; 726 (324).

Περὶ ὑφαιρέσεως.

256. *Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἓν χρέος, ὅταν τὸ χρέος αὐτὸ πληρώνεται πρὸ τῆς διορίας αὐτοῦ.

Οὕτω, ἐὰν χρέος 416,30 δρ. πληρωθῇ 3 ἔτη πρὸ τῆς διορίας αὐτοῦ ἀντὶ 326 δραχμῶν, ἡ διαφορὰ 416,30—326=90,30 δρ. λέγεται ὑφαίρεσις.

Ὁ δανείζων χρήματα λαμβάνει συνήθως ἀπὸ τὸν δανειζόμενον ἓν ἔγγραφον διὰ τοῦ ὁποίου ἐνυπογράφως ὑπόσχεται ὁ δανειζόμενος, ὅτι θέλει πληρώσει κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τοῦ δανείου τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐδανείσθη ἢ καὶ ηὐξημένον κατὰ τὸν τόκον του πρὸς τὸ συμφωνηθὲν ἐπιτόκιον. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ λέγεται *γραμμάτιον* ἢ *συναλλαγματικὴ* *, τὸ εἰς αὐτὸ ἀναφερόμενον ποσὸν *ὀνομαστικὴ* ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ δὲ ἐποχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν θέλει πληρωθῇ ἡ ἀξία αὐτὴ *λῆξις* τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θελήσῃ νὰ τὸ πωλήσῃ πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου πληρώνεται πρὸ τῆς διορίας της, ἐλαττώνεται αὕτη κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν.

Ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τὴν ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν πωλεῖται ἓν γραμμάτιον πρὸ τῆς λήξεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ καλεῖται *χρόνος τῆς προεξοφλήσεως* τοῦ γραμματίου, τὸ δὲ ποσὸν ἀντὶ τοῦ ὁποίου προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον *παροῦσα ἀξία* τοῦ γραμματίου. *Ἡ παροῦσα ἀξία διαφέρει τῆς ὀνομαστικῆς κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν.*

Ἔχομεν δύο εἰδῶν ὑφαίρεσιν τὴν *ἐξωτερικὴν* καὶ τὴν *ἐσωτερικήν*.

Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

257. « *Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἢ ἁπλῶς ὑφαίρεσις εἶνε ὁ* **τόκος**

---

* Ἡ συναλλαγματικὴ εἶνε ἔγγραφον διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανείζων διατάσσει τὸν εἰς ἄλλην ἢ εἰς αὐτὴν πόλιν διαμένοντα χρεώστην αὐτοῦ, νὰ πληρώσῃ εἰς ἐποχὴν ὡρισμένην, καὶ εἰς διαταγὴν ὡρισμένου προσώπου, τὸ σημειούμενον εἰς αὐτὴν ποσόν.

Τὰ ἔγγραφα αὐτὰ συντάσσονται ἐπὶ χαρτοσήμου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ Νόμου.

τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον».

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως παρεμβαίνουν τὰ ἑξῆς τέσσαρα ποσά· *ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὁ χρόνος*, καὶ *ἡ ὑφαίρεσις*, τὰ δὲ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἓν ἀπὸ αὐτά, ὅταν δοθοῦν τὰ ἄλλα τρία, δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰ τέσσαρα προβλήματα τοῦ τόκου. Ἑπομένως, «*τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν διαφέρουν καθόλου ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, εἰμὴ μόνον καθότι, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὁ δὲ τόκος ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*».

258. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, καὶ ἡ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πρόβλημα. ***«Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου τὸ ὁποῖον ἐξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 %, ἀντὶ 3699,50 δρ;»***

Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 100 δρ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 % φέρουν τόκον 2 δρ. Ἑπομένως ὀνομαστικὴ ἀξία 100 δρ. θὰ ἔχῃ παροῦσαν 98 δρ. διὰ τὴν προεξόφλησιν 3 μην. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 8 %.

Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

100 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχουν 98 δρ. παροῦσαν
x 3699,50

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x = \frac{100 \times 3699{,}50}{98} = 3775$ δρχ. περίπου.

Ὥστε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶνε 3775 δρ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικήν, ὅτε προκύπτει 75,50 δρ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ὀφείλει τις νὰ πληρώσῃ μετὰ 2 (3) μῆν. χρέος 730,86 (1640) δ.· πόσα θὰ πληρώσῃ σήμερον, ἐὰν γίνῃ ἔκπτωσις 4 (10) %;

2) Χρέος 108,78 (522,69) δρ. εἶνε πληρωτέον μετὰ 1 μῆν.

10 ἡμ.· πόση θὰ εἶνε ἡ ὑφαίρεσις, καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ ὁ ὀφειλέτης, ἐὰν ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του σήμερον πρὸς 6,5 (8,5) %; ὑφαίρ. περίπου 0,97 (4,94).

3) Συμφώνως πρὸς διαθήκην ἔχει τις νὰ λάβῃ μετὰ 8 (6) ἔτη ποσὸν 32 045,32 (23 399,75) δρ.· πόσα θὰ λάβῃ σήμερον ἐὰν τοῦ γίνῃ ἔκπτωσις 3 (4,5) %; περίπου 7690,87 (6 317,93) ὑφαιρ.

4) Ποίαν ἀξίαν ἔχει σήμερον χρέος 781,61 (119,38) δρ. πληρωτέον μετὰ 3 μῆν. 18 (20) ἡμ., ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις γίνῃ πρὸς 4,5 (6,5) %; περίπου 771,06 (218,59)

5) Πόση εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου ἐξοφληθέντος 4 μῆν. (24 ἡμ.) πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 (6) % ἀντὶ 834,2 (3 386,6) δρ.; 860 (3,400).

Ὁμὰς δευτέρα. (Προβλήματα κοινῆς λήξεως γραμματίων). 1) Γραμμάτιον 2450 δρ. λῆγον μετὰ 65 ἡμ., δεύτερον 3 200 δρ. λῆγον μετὰ 80 ἡμ., καὶ ἄλλο 2 745 δρ. λῆγον μετὰ 3 μῆν., ἀντικαθίστανται δι' ἑνὸς 8 400 δρ.· ποία εἶνε ἡ λῆξις τούτου, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 %;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν καθενὸς τῶν γραμματίων, καὶ προσθέτομεν αὐτά, τὸ δὲ ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ 8 400. Ἡ διαφορὰ αὕτη παριστάνει τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου 8400 δρ. πρὸς 8 % εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον, ἐκ τούτων δ' εὑρίσκομεν αὐτόν.

2) Γραμμάτιον 1800 δρ. λήγει μετὰ 40 ἡμ., β' 1240 δρ. μετὰ 63 ἡμ., καὶ γ' 2 500 δρ. μετὰ 115 ἡμ. Ἂν ἀντικατασταθοῦν δι' ἑνὸς γραμματίου, λήγοντος μετὰ 3 μῆνας, ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4 %;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν δοθέντων γραμματίων καὶ τὸ ἄθροισμά των δίδει τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ κοινοῦ γραμματίου. Ἀκολούθως λέγομεν 100 δρ. ὀνομαστικὴ ἀξία ἔχει παροῦσαν 99 δρ. κλπ. Διότι αἱ 100 εἰς 3 μ. πρὸς 4 % δίδουν 1 δρ. τόκον.

Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

259. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος θὰ περάσῃ ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Πρόβλημα. «***Γραμμάτιον 416,30 δρ. προεξοφλεῖται 3 ἔτη πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 5 %. πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;***»

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τὸ ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τοῦ γραμματίου εἶνε ἴσον μὲ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τούτου. Ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἔχομεν νὰ λύσωμεν πρόβλημα ὅμοιον μὲ τὸ πρόβλημα 255 τῆς σελ. 195.

Διὰ τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δρ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 5%, ὅτε ἔχομεν 15 δρ. Ἀκολούθως παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἴχομεν γραμμάτιον 115 δρ, καὶ προεξοφλεῖτο 3 ἔτη πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 5%, θὰ εἴχομεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 15 δρ. Ὥστε ἔχομεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν,

115 δρ.	ὀνομ.	ἀξία	ἔχει	15 δρ.	ἐσωτ.	ὑφ.
416,30	»	»	»	x	»	»

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι $x=15\times\frac{416,30}{115}=54,30$ δρ.

Ἤτοι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε 54,30 δρ.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς παρούσης ἀξίας δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὅμοιον πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, παρατηροῦντες ὅτι, 115 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχουν 100 δρ. παροῦσαν· ἢ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, ὅτε προκύπτει 362 δρ.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως παρεμβαίνουν τὰ ἑξῆς 4 ποσά· ἡ *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου, *ὁ χρόνος*, *τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις*, ζητεῖται δὲ ἓν ἐκ τούτων, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα. Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων προβλημάτων τὸ ἓν ἐλύσαμεν ἀνωτέρω, τὰ δὲ λοιπὰ τρία δὲν διαφέρουν καθόλου τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου, εἰ μὴ μόνον καθότι, ὡς κεφάλαιον θὰ λαμβάνεται ἡ παροῦσα ἀξία, καὶ ὡς τόκος ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Γραμμάτιον 1200 (1640) δρ. προεξοφλεῖται 3 (3) μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του 8 (10)%· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἡ παροῦσα ἀξία του. 23,53· 1176,47 (40· 1600)

2) Τοῦ αὐτοῦ γραμματίου νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων

εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπιτόκιον εἰς τὸν δοθέντα χρόνον.

3) Ὅταν ἑνὸς γραμματίου εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν καὶ γνωρίζομεν τὸν χρόνον καὶ τὸ ἐπιτόκιον, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν τὴν ~~ἐσωτερικὴν~~ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν;

Λύσις. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἰσοῦται μὲ τὴν ἐσωτερικὴν προστιθεμένου καὶ τοῦ τόκου της.

4) Ποία τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε μεγαλυτέρα καὶ διατί;

5) Νὰ λυθοῦν τὰ προβλήματα πρὸς λύσιν τῆς σελίδος 197—198 δι' ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

6) Συνθέσατε δύο προβλήματα ὑφαιρέσεως καὶ λύσατε αὐτὰ δι' ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς.

Προβλήματα μίξεως.

260. Εἰς τὰ προβλήματα μίξεως, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῶν μονάδων τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων, αἱ ἀναμιγνυόμεναι ποσότητες, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, ὑπάγονται καὶ τὰ ὅμοια πρὸς ἐκεῖνα, καλούμενα προβλήματα μεταλλικῶν κραμάτων. Εἰς ταῦτα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος πολυτίμου τινὸς μετάλλου, π. χ. ἀργύρου ἢ χρυσοῦ μὲ ἄλλο μέταλλον, ὅταν δίδωνται οἱ βαθμοὶ καθαρότητος καὶ αἱ ποσότητες τῶν συγχωνευομένων μετάλλων. Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἑξῆς:

Πρόβλημα. ***«Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς συγχωνεύσεως 150 δραμίων ἀργύρου, ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,950 καὶ ἄλλου 50 δραμίων καθαρότητος 0,750;»***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, εὑρίσκομεν πόσον καθαρὸν ἄργυρον περιέχει ἕκαστον τῶν συγχωνευομένων μετάλλων. Οὕτω, ἐπειδὴ ἡ καθαρότης τοῦ πρώτου ἀργύρου εἶνε 0,950, ἤτοι, ἐπειδὴ ἕκαστον δράμιον αὐτοῦ ἔχει 0,950 καθαρὸν ἄργυρον, τὰ 150 δρμ. θὰ ἔχουν $0{,}950 \times 150 = 142{,}50$ δρμ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ καθαρότης τοῦ ἄλλου ἀργύρου εἶνε 0,750, τὰ 50 δράμια θὰ ἔχουν καθαρὸν ἄργυρον $0{,}750 \times 50 = 37{,}50$ δρμ. Ἐπομένως, τὸ κρᾶμα ἐκ τῶν $150 + 50 = 200$ δραμίων ἔχει καθαρὸν ἄργυρον $142{,}50 + 37{,}50 = 180$ δράμια. Ἕκαστον δὲ δράμιον τῶν 200 τοῦ κράματος θὰ ἔχῃ καθαρὸν ἄργυρον 180 : 200=0,900. Ὥστε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος θὰ εἶνε 0,900.

261. Εἰς τὸ αὐτὸ εἶδος τῶν προβλημάτων τῆς μίξεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑνὸς τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων, ὅταν δίδωνται κατάλληλοι τιμαὶ τῶν μονάδων τῶν ἄλλων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Ἔστω τοιοῦτον πρόβλημα τὸ ἑξῆς.

Πρόβλημα. ***«Διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα οἴνου ἀξίας 8 δρ. κατ' ὀκᾶν, ἀναμιγνύομεν 12 ὀκ. οἴνου τῶν 7,5 δρ., 16,5 ὀκ. οἴνου τῶν 6 δρ., καὶ 32 ὀκ. τῶν 9,5 δρ. πρὸς δὲ 9 ὀκ. ἀγνώστου ἀξίας· πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ τελευταίου οἴνου» ;***

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ὁλοκλήρου τοῦ κράματας 12 ὀκ. + 16,5 ὀκ. + 32 ὀκ. + 9 ὀκ. =69,5 ὀκ. πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ἤτοι 8 δρ. × 69,50= 556 δρ. Ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν ἀφαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν τριῶν πρώτων δοθέντων εἰδῶν τοῦ οἴνου, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν

7,5 δρ. × 12 = 90 δρ.
6 δρ. × 16,5 = 99 δρ.
9,5 δρ. × 32 =304 δρ.

Ἐν ὅλῳ 493 δρ., καὶ 556—493=63 δρ.

Ἐπειδὴ τὸ 63 δρ. παριστάνει τὴν τιμὴν τῶν 9 ὀκ. τοῦ οἴνου, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τούτου θὰ εἶνε 63 δρ.: 9=7 δρ.

Ἀσκήσεις

1) Οἰνοπώλης ἀνέμιξε 450 (100) ὀκ. οἴνου τῶν 4,9 (8) δρ. κατ' ὀκᾶν, 250 (200) ὀκ. τῶν 6 (7,5) δρ., καὶ 12 (500) ὀκ. οἰνοπνεύματος τῶν 15 (7,2) δρ. Πόσον θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ κράματος καὶ πόσον ἂν κερδίζῃ 2 (1,125) δρ. κατ' ὀκᾶν ;

5,45.· 7,45· (7,375· 8,5).

2) Ἀνέμιξέ τις 1 500 (2 400) δρ. ὀκ. οἴνου τῶν 9 (6) δρ., 450 (1 800) ὀκ. τῶν 6,5 (4) δρ., καὶ 250 (300) ὀκ. ὕδατος (πρὸς 0 τὴν ὀκᾶν). Ποία εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ κράματος, καὶ τίς μὲ κέρδος 12⁰/₀ ; (Τὴν εὑρεθησομένην τιμὴν τοῦ κράματος θὰ αὐξήσωμεν κατὰ 12⁰/₀ αὐτῆς εἰς τὴν β' περίπτωσιν).

7,456 περίπου· 8,25 (4,8· 5,376).

3) Συνεχωνεύθησαν 230 (250) γραμ. ἀργύρου καθαρότητος

0,845 (0,830) μὲ 140 (180) γραμ. καθαρότητος 0,9 (0,9) καὶ 75 (320) γρ. καθαρότητος $\frac{5}{6}$ (0,875). Ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος; 0,875... (0,866).

4) Συνεχωνεύθησαν 15 γραμ. ἀργύρου καθαρότητος 0,900 μὲ 23 γραμ. ἄλλου ἀργύρου. Ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ τελευταίου, ἂν ὁ τοῦ κράματος εἶνε 0,827; 0,779.

5) Ἐπώλησέ τις ποσὸν οἴνου τριῶν ποιοτήτων· ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τῆς α' ποιότητος ἦτο 11,5 δρ., τῆς β' 12,8 δρ., καὶ τῆς γ' 13 δρ. Ἐκ τῆς β' ἐπώλησε τριπλασίαν ποσότητα τῆς α', ἐκ δὲ τῆς γ' ὅσον ἐκ τῆς α' καὶ τῆς β' ὁμοῦ· ποία εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ κράματος; 12,74

6) Διατυπώσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ 1,2,3.

262. Ἄλλο εἶδος προβλημάτων μίξεως εἶνε ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον δίδονται αἱ τιμαὶ καθεμιᾶς μονάδος δύο πραγμάτων, καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ καθέν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένον, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν, κειμένην μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν μονάδων τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα πρόκειται ν' ἀναμίξωμεν.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων, ἔστω τὸ

Πρόβλημα 1) ***«Οἰνοπώλης εἶχεν οἶνον τὸν ὁποῖον ἐπώλει 4,5 δρ. καὶ ἄλλον 8 δρ. τὴν ὀκᾶν· ἤθελε νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 1600 ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ 6 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα. Πόσον θὰ ἐλάμβανε ἀπὸ καθὲν εἶδος;»***

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι μία ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 4,5 δρ., τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 6 δρ.· ὥστε ἀπὸ καθεμίαν ὀκᾶν τοῦ α' θὰ κερδίζῃ ὁ οἰνοπώλης 6 δρ. — 4,5 δρ. = 1,5 δρ. Ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνεται ἀπὸ καθεμίαν τοῦ β' εἴδους 2 δρ. Διότι, χωριστὰ ἐπωλεῖτο 8 δρ. καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα 6 δρ. Λοιπὸν μία ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους δίδει κέρδος 1,5 δρ.· 1 ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους ζημίαν 2 δρ. Ἄρα, ἂν μὲν βάλῃ ἐκ τοῦ α' εἴδους 2 ὀκ., θὰ κερδίσῃ 1,5×2 δρ., ἂν δὲ ἐκ τοῦ β' εἴδους βάλῃ 1,5 ὀκ. θὰ χάσῃ 2×1,5 δρ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι, οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ 2 ὀκ. ἐκ τοῦ α' εἴδους καὶ 1,5 ὀκ. ἐκ τοῦ β'. Ὥστε ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 3,5 ὀκ.

ἔπρεπε νὰ λάβῃ 2 ὀκ. ἐκ τοῦ α′ καὶ 1,5 ἐκ τοῦ β′. Ἐπειδὴ δὲ θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 1600 ὀκ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ α′ λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς 3,5 ὀκ. μῖγμα θέτει 2 ὀκ. ἐκ τοῦ α′
» 1600 » x »

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι ὁ $x=2\times\frac{1600}{3,5}=914\frac{2}{7}$ ὀκ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκάδας θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ β′ εἴδους, ἐργαζόμεθα ὁμοίως λύοντες τὸ πρόβλημα,

εἰς 3,5 ὀκ. μῖγμα θέτει 1,5 ὀκ. τοῦ β′
» 1600 » x »

ὅτε εὑρίσκομεν $x=1,5\times\frac{1600}{3,5}=685\frac{5}{7}$ ὀκ.

Ἢ καὶ ἄλλως· ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 1600 ὀκ. τοῦ μίγματος τὰς $914\frac{2}{7}$ ὀκ., τὰς ὁποίας θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ α′ εἴδους.

Πρόβλημα 2) «***Ἔχομεν ἄργυρον καθαρότητος 0,935 καὶ ἄλλον καθαρότητος 0,880· πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ καθένα τούτων διὰ νὰ σχηματίσωμεν 5 δράμια ἀργύρου καθαρότητος 0,900;***»

Πρὸς λύσιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, καθεμία μὲν μονὰς τοῦ πρώτου εἴδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀργύρου περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ βαθμὸν καθαρότητος 0,900· καθεμία δὲ μονὰς τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὥστε ἀπὸ καθεμίαν μονάδα τοῦ α′ εἴδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς μονάδος, ἀπὸ καθεμίαν δὲ τοῦ β′ εἴδους λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς μονάδος.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α′ εἴδους, θὰ περισσεύῃ ἄργυρος $0,035\times20$ δράμια, ἐὰν δὲ βάλωμεν 35 δράμια ἐκ τοῦ β′ εἴδους, θὰ λείψῃ ἄργυρος $0,020\times35$ δράμια. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $0,35\times20=0,20\times35$, ἕπεται ὅτι, ἂν βάλωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α′ καὶ 35 δράμια ἐκ τοῦ β′ εἴδους, ὅσος ἄργυρος περισσεύει ἐκ τοῦ α′, τόσος λείπει ἐκ τοῦ β′. Ἑπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον οὔτε ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου ἀργύρου θὰ ἔχῃ.

Ἂν λοιπὸν ἠθέλομεν νὰ κάμωμεν κρᾶμα 55 δραμίων, ἔπρεπε νὰ βάλωμεν 20 δράμια ἐκ τοῦ α' εἴδους καὶ 35 δράμια ἐκ τοῦ β'. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον θὰ βάλωμεν ἐκ τοῦ α' εἴδους, διὰ νὰ κάμωμεν κρᾶμα 4 δρμ., λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς 55 δρμ. κρᾶμα θέτομεν 20 δρμ. α' εἴδους
» 5 » x

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=20\times\frac{5}{55}=1\frac{9}{11}$ δρμ.

Ἐκ τοῦ β' εἴδους θὰ βάλωμεν $5-1\frac{9}{11}=3\frac{2}{11}$ δρμ.

263. Εἰς τὸ εἶδος τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ὑπάγονται καὶ ἄλλα προβλήματα καθὼς τὸ κατωτέρω.

Πρόβλημα 3) «*Ἔμπορος ἤθελε ν' ἀναμίξῃ 180 ὀκ. ἐλαίου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 32 δρ. μὲ ἔλαιον ἄλλης ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 37 δρ.· πόσας ἔπρεπε νὰ λάβῃ ἐκ τῆς β' ποιότητος διὰ νὰ ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 35 δρ.;*»

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι
ἀπὸ 1 ὀκ. τοῦ α' εἴδους ἐκέρδιζε 3 δρ.
ἀπὸ 1 ὀκ. τοῦ β' εἴδους ἔχανε 2 δρ.

Ἄρα, ἂν ἐλάμβανεν ἐκ τοῦ α' εἴδους 2 ὀκ. θὰ ἐκέρδιζε 3×2 δρ.· ἂν ἐλάμβανεν ἐκ τοῦ β' εἴδους 3 ὀκ. θὰ ἔχανε 2×3 δρ.· ἤτοι οὔτε θὰ ἐκέρδιζεν οὔτε θὰ ἔχανε. Ὥστε, ἂν ἐκ τοῦ α' εἴδους ἔθετεν 2 ὀκ., ἔπρεπε νὰ ἔθετε 3 ὀκ. ἐκ τοῦ β' εἴδους. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκ. ἔπρεπε νὰ θέσῃ ἐκ τῆς δευτέρας ποιότητος, λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Εἰς 2 ὀκ. α' εἴδους θέτομεν 3 ὀκ. τοῦ β'
» 180 » » x »

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=3\times\frac{180}{2}=270$ ὀκ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Οἰνοπώλης ἔχει οἶνον τῶν 8 (12,5) δραχ. καὶ τῶν 4,5 (10,2) δρ. τὴν ὀκᾶν, καὶ θέλει νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν κρᾶμα 2800 (840,75) ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 5,4 (11,5) δρ.· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ βάλῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος; α' 720 (475) ὀκ. $82\frac{14}{23}$ δρμ.

2) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θὰ ἀναμίξωμεν σῖτον (ἔλαιον) ἀξίας

3.5 (37) δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ ἄλλον (180 ὀκ.) ἀξίας 24 (32) δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα 3 (35) δρ. τὴν ὀκᾶν;

Εἰς 6 ὀκ. τοῦ α΄ θὰ βάλωμεν 5 τοῦ β΄ (270).

3) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν οἶνον τῶν 8 (9,5) δρ. τὴν ὀκᾶν μὲ ὕδωρ (ἄλλο τῶν 8 δρ.) διὰ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος 5 (8,4) δρ.;

Ἀνὰ 5 ὀκ. οἴνου, θὰ θέτωμεν 3 ὀκ. ὕδατος (εἰς 4 τοῦ α΄ 11 τοῦ β΄)

4) Πόσον χαλκὸν (ὕδωρ) πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μὲ 5 δρμ. (40 γρμ.) ἀργύρου (οἰνοπνεύματος) καθαρότητος 0,900 (90), ὥστε νὰ λάβωμεν κρᾶμα καθαρότητος 0,850 (75);

$\frac{5}{17}$ (8).

5) Ἔμπορος εἶχε δύο ποιότητας ζαχάρεως· τῆς μὲν α΄ ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 15 δρ., τῆς δὲ β΄ 13 δρ. καὶ ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα ἐξ αὐτῶν 2 500 ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ ἐπώλει πρὸς 14,8 δρ. τὴν ὀκᾶν, καὶ νὰ ἐκέρδιζε 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας ἔπρεπε νὰ βάλῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ 14,8 δρ. ἔχει κέρδος 10 %, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος ἄνευ κέρδους, λέγοντες αἱ 100 δρ. γίνονται 110· πόσαι δρ. γίνονται 14,8; Οὕτω εὑρίσκομεν $13\frac{5}{11}$ δρχ. καὶ ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς τὸ πρόβλημα 1) τῆς σελίδος 202)

Ἐκ τοῦ α΄ $568\frac{2}{11}$.

6) Συνθέσατε πρόβλημα ὡς τὸ προηγούμενον καὶ ἄλλο διαφέρον μόνον κατὰ τὸ ὅτι νὰ πωλῆται ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος μὲ ζημίαν 5 % π. χ. καὶ λύσατε αὐτά.

Προβλήματα μερισμοῦ.

264. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀνάλογοι* ἄλλων ἰσοπληθῶν, ἐὰν καθεὶς τῶν πρώτων προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου τῶν δευτέρων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 2· 6· 8· 10 εἶνε ἀνάλογοι τῶν 1· 3· 4· 5· διότι προκύπτουν ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ καθενὸς τῶν 1· 3· 4· 5 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

Ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μιᾶς σειρᾶς, διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς τῆς ἄλλης, δύναται νὰ εἶνε οἱοσδήποτε. Διὰ τοῦτο ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1· 3· 4· 5 γίνονται ἐκ τῶν 2· 6· 8· 10, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $\frac{1}{2}$, εἶνε καὶ αὐτοὶ ἀνάλογοι τῶν πρώτων.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν ὅτι, οἱ λόγοι τῶν ἀριθμῶν τῆς μιᾶς σειρᾶς πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους τῆς ἄλλης εἶνε ἴσοι· ἤτοι ἔχομεν τὴν ἰσότητα τῶν λόγων

$$\frac{2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5} \text{ καὶ } \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}.$$

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντιστρόφως** *ἀνάλογοι* ἄλλων ἰσοπληθῶν, ἐὰν εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 10· 14· 12 εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}$, διότι εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων τούτων, δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν 5· 7· 6. Πράγματι, ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς 5· 7· 6 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τοὺς 10· 14. 12.

265. «*Μερισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 1800, εἰς μέρη εὐθέως ἀνάλογα ἢ ἁπλῶς ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 2· 3· 5 σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη ὁ 1800 ὅσοι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς*».

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 2· 3· 5 ἦτο ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 2+3+5, ἤτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2· 3· 5. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος, τριπλάσιος (ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον),..., τοῦ 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, τριπλάσια, (ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον,...) τῶν 2· 3· 5. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, καθὲν μέρος εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸν μεριστέον ἀριθμόν. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς, πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρώτου μέρους.

Ὅταν ἔχωμεν 10 μεριστέον εἶνε 2 τὸ πρῶτον μέρος,
» » 1800 » x

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=2\times\frac{1800}{10}=360.$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ δύο ἄλλα μέρη κατὰ σειρὰν εἶνε $\frac{1\,800\times 3}{10}=540$, $\frac{1\,800\times 5}{10}=900$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

«διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων

***ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ καθένα τῶν δοθέντων, καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν»*.**

266. Οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν δύνανται νὰ πολλαπλασιασθοῦν ἢ νὰ διαιρεθοῦν ὅλοι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς νὰ μεταβληθοῦν τὰ μέρη. Διότι, ἂν π. χ. πρόκειται νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 360 ἀναλόγως τῶν 2· 3· 5, τὰ μέρη θὰ εἶνε $360 \times \frac{2}{10}$, $360 \times \frac{3}{10}$, $360 \times \frac{5}{10}$, ὅπου τὸ 10 εὑρέθη ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν 2· 3· 5. Ἂν ἀντὶ τῶν 2· 3· 5 λάβωμεν π.χ. τοὺς ἑξαπλασίους αὐτῶν 2×6· 3×6· 5×6, τὰ μέρη θὰ εἶνε $360 \times \frac{2\times6}{10\times5}$, $360\times\frac{3\times6}{10\times6}$, $360 \times \frac{5\times6}{10\times6}$. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν 2×6· 3×6· 5×6 θὰ εἶνε 10×6. Ἀλλὰ τὰ μέρη εἶνε τὰ αὐτὰ αὐτὰ ὡς καὶ πρίν, ἐπειδὴ $\frac{2\times6}{10\times6}=\frac{2}{10}$, $\frac{3\times6}{10\times6}=\frac{3}{10}$, $\frac{5\times6}{10\times6}=\frac{5}{10}$. Ὁμοίως ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2·3·5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ, τοῦ αὐτοῦ δι' ὅλους, δὲν μεταβάλλει τὰ μέρη.

Διὰ τοῦτο, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων κλασματικῶν ἀριθμῶν, π.χ. τὸν 420 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{4}$ τρέπομεν πρῶτον τοὺς κλασματικοὺς εἰς ὁμωνύμους, καὶ ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν ὅλους τούτους ἐπὶ τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν, οὕτω δὲ μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οὕτω ἀντὶ τῶν $\frac{2}{3}$, 5, $\frac{1}{4}$ εὑρίσκομεν τοὺς $\frac{8}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{3}{12}$ καὶ ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμητὰς 8·60·3. Ἐὰν τὸ μεριστέον 420 μερίσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μέρη θὰ εἶνε ἴσα μὲ $420 \times \frac{8}{71}$, $420 \times \frac{60}{71}$, $420 \times \frac{3}{71}$.

267. *«Μερισμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 600 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 2, 3, $\frac{2}{5}$, σημαίνει νὰ μερισθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους ἀριθμοὺς τῶν δοθέντων»*.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ 600, πρέπει νὰ μερίσωμεν αὐτὸν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}$, οἱ ὁποῖοι εἶνε ἀντίστροφοι τῶν δοθέντων $2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{5}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ μερίδια τρέπομεν τὰ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{15}{6}$, καὶ μερίζομεν τὸν 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $3 \cdot 2 \cdot 15$, ὅτε εὑρίκομεν

$$600 \times \frac{3}{20}, \quad 600 \times \frac{2}{20}, \quad 600 \times \frac{15}{20}$$

ἢ 90 60 450.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ μερισθῇ α΄) ὁ ἀριθμὸς 18 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3· 6· 9. β΄) ὁ 640,8 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 4· 5. 9. γ΄) ὁ 76 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3· 4· 12.

2) Νὰ μερισθῇ ὁ 520 (36) εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\right)$ καὶ $\left(\frac{5}{6}\right)$ Ὁ α΄ $280\left(8\frac{16}{25}\right)$.

3) Ὁμοίως α΄) ὁ 90 εἰς ἀνάλογα τῶν $2, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}$. Ὁ α΄ 45.

β΄) ὁ 95 (96) εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν 3 (2), 6 (4), 9 (15).

Ὁ α΄ $51\frac{9}{11}\left(58\frac{38}{49}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ μερισθῇ ὁ 560 (40) εἰς τέσσαρα (τρία) μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ β΄ νὰ εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ (3πλάσιον) τοῦ α΄, τὸ γ΄ νὰ εἶνε τὸ ἥμισυ (2πλάσιον) τοῦ β΄ καὶ τὸ δ΄ τριπλάσιον τοῦ γ΄. Τὸ α΄ 200 (4).

2) Νὰ μερισθοῦν 100 δρ. εἰς 4 ἐργάτας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α΄ εἰργάσθη 4 ἡμ., ὁ β΄ 3 ἡμ. 8 ὥρ., ὁ γ΄ 2 ἡμ. 8 ὥρ., καὶ ὁ δ΄ 18 ὥρ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ καθεὶς ἐξ αὐτῶν, ἂν ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα λογίζεται μὲ 10 ὥρας. (Τρέψατε τὸν χρόνον ἐργασίας εἰς ὥρας). Ὁ α΄ 32 25.

3) Πρὸς κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται 16 μέρη

νίτρου, 3 ἄνθρακος καὶ 2 θείου. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβωμεν ἀπὸ καθὲν εἶδος, διὰ τὴν κατασκευὴν 84 ὀκ. πυρίτιδος; (640 νίτρ).

4) Δύο ἁμαξηλάται ἀνέλαβον ἀντὶ 2 445 δρ. νὰ μετακομίσουν σῖτον εἰς δύο μέρη, ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ κοινοῦ τόπου τῆς ἀναχωρήσεως τὸ μὲν 75 χμ., τὸ δὲ 55 χμ. Ὁ μὲν μετέφερε 2 000 ὀκ. εἰς τὸ πρῶτον, ὁ δὲ 3200 ὀκ. εἰς τὸ δεύτερον μέρος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθείς, ἂν ἡ πληρωμὴ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ὀκάδων, τὰς ὁποίας καθεὶς μετέφερε καὶ ἀναλόγως τῶν ἀποστάσεων εἰς τὰς ὁποίας μετεφέρθη ὁ σῖτος;

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πρῶτος ἁμαξηλάτης θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ τώρα, ἂν μετέφερε 2000 × 75 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου, ὁ δεύτερος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ τώρα, ἐὰν μετέφερε 3200 × 55 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. Ἑπομένως, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2 445 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2000 × 75, καὶ 3200 × 55.

Προβλήματα ἑταιρείας.

268. *Προβλήματα ἑταιρείας* λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πρόβλημα 1) «*Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρείαν δι' ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α' 2000 δρ., ὁ β' 4000 δρ., καὶ ὁ γ' 3000 δρ. Ἂν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 1260 δρ. πόσας θὰ λάβῃ ὁ καθείς;*»

Εἶνε φανερὸν ὅτι τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων πρέπει νὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰς χρηματικὰς καταβολὰς αὐτῶν. Διότι ὁ καταθέτων διπλάσιον (τὸ ἥμισυ), τριπλάσιον (τὸ τρίτον).. θὰ λάβῃ διπλάσιον (τὸ ἥμισυ).. κέρδος. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον καθενὸς πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 1260 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταβολῶν 2000 δρ., 4000 δρ., 3000 δρ.

Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν τὰ μερίδια,

$$1260 \times \frac{2000}{9000},\quad 1260 \times \frac{4000}{9000},\quad 1260 \times \frac{3000}{9000} \text{ δραχμάς.}$$

ἢ 280 δρ., 560 δρ., 420 δραχμάς.

Πρόβλημα 2). ***Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 4000 δρ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν· μετὰ 10 δὲ μῆνας καὶ τρί-***

τον ὁ ὁποῖος κατέβαλε τὸ αὐτὸ κεφάλαιον· 20 μῆνας μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδισαν 3800 δρ.· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ;»

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο αἱ μὲν καταβολαὶ εἶνε αἱ αὐταί, ἐπειδὴ καθεὶς τῶν συνεταίρων κατέβαλε 4000 δραχμάς, ἀλλ' οἱ χρόνοι κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν αἱ καταβολαὶ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εἶνε διάφοροι. Διότι τοῦ μὲν α´ τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 20 μῆν., τοῦ β´ 14 μῆν., τοῦ δὲ γ´ 4 μῆνας.

Τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων θὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν χρονικῶν διαστημάτων, κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἑπομένως διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν 3800 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 20, 14, 4. Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μερίδια θὰ εἶνε $3800 \times \frac{20}{38}$, $3800 \times \frac{14}{38}$, $3800 \times \frac{4}{38}$

Πρόβλημα 3), «Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 4000 δρ.· μετὰ 1 ἔτος προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 7000 δρ., 8 μῆνες δὲ μετὰ τοῦτον καὶ τρίτον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 6000 δρ.· 3 ἔτη μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν 14 960 δρ.· πόσον θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ;»

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο διαφέρουν τὰ κεφάλαια τῶν συναιτέρων καὶ οἱ χρόνοι διὰ τοὺς ὁποίους ταῦτα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Διότι ὁ α´ κατέβαλε 4000 δρ. διὰ 56 μῆνας, ἐπειδὴ τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν 4000 δρ. ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως μέχρι τέλους αὐτῆς, ὁ β´ κατέβαλεν 7000 δρ. διὰ 44 μῆν., ἐπειδὴ προσῆλθεν ἓν ἔτος βραδύτερον τοῦ α´· ὁ δὲ γ´ κατέβαλε 6000 δρ. διὰ 36 μῆνας.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, δεχόμεθα ὅτι, ἂν ὁ α´ κατέθετε 4000×56 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, ὁ β´ 7000×44 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, καὶ ὁ γ´ 6000×36 δραχμὰς δι' ἕνα μῆνα, θὰ ἐλάμβανε καθεὶς ἐξ αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον τώρα θὰ λάβῃ. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον καθενός, ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὰς 14960 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4000×56, 7000×44, 6000×36, ἢ τῶν 224 000·308 000· 216 000. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν μερισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μερίδια εἶνε 4 480, 6 160, 4 320

Ἑπομένως ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 4 480 δρ., ὁ δεύτερος 6 160 δρ. καὶ ὁ τρίτος 4 320 δραχμάς.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Διέταξέ τις διὰ διαθήκης νὰ μερισθῇ ἡ ἐκ δρχ. 75 000 περιουσία του εἰς τοὺς ἀνεψιούς του ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των. Πόσα θὰ λάβῃ καθείς, ἂν αἱ ἡλικίαι των εἶνε κατὰ σειρὰν 8 ἐτῶν, 12 ἐτ. 13 ἐτ. καὶ 17 ἐτῶν; Ὁ α΄ 12 000

2) Τρεῖς ἔμποροι κατέβαλον δι᾽ ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν ἀντιστοίχως 6000 (3564,5) δρ., 7480 (412,78) δρ. 5200 (813,9) δρ., καὶ ἐκέρδισαν 4582 (1053,37) δρ· πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς; 1471,74 (441,41).

3) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν συγχρόνως 2000 (4000) δρ., 3000 (6000) δρ., 4000 (5000) δρ. ἀντιστοίχως. Ἐζημιώθησαν (ἐκέρδισαν) 1500 (τὰ 0,4 τῶν κατατεθέντων). Πόσα ἐζημιώθη (ἐκέρδισεν) ὁ καθείς; Ὁ α΄ 833,33 (1600).

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Δύο συνέταιροι κατέβαλαν ὁ α΄ 2000 (1000) δρ., ὁ β΄ 5000 (3000) δρ. καὶ μετὰ 8 μῆνας (20 ἡμ.) προσέλαβον γ΄, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 3000 (5000) δρ., μετὰ 6 (2) δὲ μῆν. δ΄, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 2000 (6000) δρ. Μετὰ πάροδον 4 (7) μηνῶν (ἀπ᾽ ἀρχῆς) ἐκέρδισαν 4000 (5140) δρ.· πόσον θὰ λάβῃ καθείς; Ὁ α΄ $878{,}04\frac{36}{41}$ (420)

2) Πατὴρ διέταξε διὰ διαθήκης νὰ μερισθῇ ἡ ἐκ 12000 (7800) δρ. περιουσία του εἰς τοὺς 3 υἱούς του ὡς ἑξῆς· Ὁ β΄ νὰ λάβῃ διπλάσια $\left(\text{τὰ}\ \frac{5}{6}\right)$ τοῦ α΄, καὶ ὁ γ΄ ὅσον οἱ δύο ἄλλοι ὁμοῦ (ὁ α΄ καὶ 0,5 τοῦ β΄)· ζητεῖται τὸ μερίδιον καθενός Ὁ α΄ 2000 (2400).

3) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν ἓν λειβάδιον ἀντὶ 800 (700) δρ. Ὁ α΄ ἔθρεφεν ἐκεῖ 60 (100) πρόβατα ἐπὶ 4 μῆν. (50 ἡμ.), ὁ β΄ 80 (300) πρόβατα ἐπὶ 3 (1) μῆνας· πόσον θὰ πληρώσῃ ὁ καθείς; Ὁ α΄ 400 (250).

4) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 5000 δρ. Μετὰ 16 μῆν. προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 3000. Δύο ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισεν 4800 δρ.· πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ὁ καθείς; Ὁ α΄ 3520,41...

Ὁμὰς τρίτη. 1) Νὰ μερισθῇ κέρδος 10 000 δρ. μεταξὺ τῶν συνεταίρων, ἐκ τῶν ὁποίων κατέβαλον ὁ α΄ 3000 δρ. διὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆν., ὁ β΄ 5000 δρ. διὰ 2 ἔτ. καὶ 1 μῆν., ὁ γ΄ 4000 διὰ 1 ἔτος καὶ 1 μῆνα. Ὁ α΄ 3379, 79...

2) Νὰ μοιρασθοῦν 1580 δρ. εἰς τέσσαρα μερίδια, ὥστε τὸ β′ νὰ εἶνε 0,75 τοῦ α′, τὸ γ′ τὰ 0,25 τοῦ β′, καὶ τὸ δ′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ γ′. Τὸ α′ 7660,06...

Περὶ τῶν προβλημάτων μέσου ὅρου.

269. Εἰς τὴν σελίδα 52 εἴδομεν πῶς εὑρίσκομεν τὴν μέσην τιμὴν διαφόρων πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον καλοῦμεν *μέσον ὅρον ἢ ἀριθμητικὸν μέσον* διαφόρων ὁμοειδῶν ποσῶν (ἢ ἀριθμῶν) τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τούτων. Οὕτω ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 15· 18· 22 εἶνε

$$\frac{15\times 18+22}{3}=\frac{55}{3}$$

Ὁ μέσος ὅρος τῶν 18 δρ., 2 ταλ., 12 δρ., 8 δρ. εἶνε

$$\frac{18 \text{ δρ.} + 10 \text{ δρ.} + 12 \text{ δρ.} + 8 \text{ δρ.}}{4} = 12 \text{ δραχμαί.}$$

Τῶν μέσων ὅρων γίνεται χρῆσις εἰς διαφόρους περιστάσεις καὶ ἰδίως, ὅταν ζητοῦμεν τὴν μέσην ἡμερησίαν, ἢ μηνιαίαν ἢ ἐτησίαν εἴσπραξιν ἑνὸς ἐμπορικοῦ καταστήματος, ἑνὸς ταμείου, ἐν γένει, τὴν μέσην θερμοκρασίαν τοῦ ἡμερονυκτίου, ἢ τοῦ ἔτους, τῶν μέσων ὅρων τῶν μηνιαίων ἐξόδων μιᾶς οἰκογενείας κλπ. Ἰδίως ὅμως τῶν μέσων ὅρων γίνεται χρῆσις εἰς τὰς μετρήσεις, εἰς τὰς ὁποίας συμβαίνουν ἀναπόφευκτα λάθη. Διὰ τοῦτο μετροῦμεν πολλάκις τὸ περὶ τοῦ ὁποίου πρόκειται ποσόν, καὶ λαμβάνομεν ὡς τιμὴν αὐτοῦ μᾶλλον πιθανὴν τὸν μέσον ὅρων τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν τούτου.

Ἀσκήσεις.

1) Ἓν κτῆμα ἔφερε τὸ α′ ἔτος εἰσόδημα 2 600 (600) δραχμάς· τὸ β′ 6 800 (475) δρ. καὶ τὸ γ′ 2 000 (554) δραχμάς ποῖος εἶνε ὁ μέσος ὅρος τοῦ εἰσοδήματός του κατὰ τὴν τριετίαν ταύτην; 380 (543).

2) Μία οἰκογένεια ἐδαπάνησε τὸν Ἰανουάριον 4 502,5 δρ., τὸν Φεβρουάριον 3 200,5 δρ., τὸν Μάρτιον 3 807,5 δρ., τὸν δὲ Ἀπρίλιον 4 654 δρ.· ποία εἶνε ἡ μέση τιμὴ τῆς δαπάνης κατὰ τοὺς τέσσαρας τούτους μῆνας; 4041.

3) Μία ὑπηρέτρια ἐλάμβανε κατὰ μῆνα 300 δρ., δύο ἐνδυμασίας κατ' ἔτος ἀξίας 1300 δρ., καὶ διάφορα δῶρα ἀξίας 950 δρ.

πόσος ἦτο ὁ μηνιαῖος μισθός της κατὰ μέσον ὅρον ; 487,5.

4) Οἰκόπεδον, μετρηθὲν δύο φοράς, εὑρέθη, ἔχον ἔκτασιν 537 (μ^2) καὶ 539,25 (μ^2)· πόσον εἶνε κατὰ μέσον ὅρον ; 538,125 (μ^2).

5) Ἐργάτης ἔλαβε τὴν Δευτέραν 40 δρ., τὰς δὲ ἄλλας ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος μέχρι τοῦ Σαββάτου 45 δρ. καθ' ἑκάστην· πόσον ἐλάμβανε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν ; 44,16.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

270. Ἔστω ὅτι δίδεται εἷς ἀριθμός, π. χ. ὁ 25, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἄλλος, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5, διότι εἶνε $5^2=5\times5=25$. Ὁ 5 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 25. Ὁμοίως τοῦ 16 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶνε ὁ 4, διότι ἔχομεν $4^2=4\times4=16$.

Ἐν γένει, ***καλοῦμεν τετραγωνικὴν ῥίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα, τὴν δὲ εὕρεσιν καλοῦμεν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.***

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 9 σημειώνεται ὡς ἑξῆς, $\sqrt{9}$, ἤτοι $\sqrt{9}=3$, καλεῖται δὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ *ῥιζικόν*, καὶ ὁ ὑπ' αὐτὸ γραμμένος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, λέγεται *ὑπόρριζος ποσότης*.

Ἀσκήσεις. Νὰ σημειωθῇ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τῶν ἀριθμῶν 0· 1· 4· 9· 25· 36· 49· 64· 81· 100· 10 000.

271. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 24. Εὐκόλως παρατηροῦμεν, ὅτι αὐτὴ εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ 4, διότι $4^2=16$, ἀλλὰ μικροτέρα τοῦ 5 ἐπειδὴ $5^2=25$. Ἑπομένως ἡ $\sqrt{24}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 4 καὶ 5. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν ὡς τετρ. ῥίζαν τοῦ 24 τὸν μικρότερον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων αὐτὴ περιέχεται, ἤτοι τὸ 4, καλεῖται δὲ τότε ὁ 4 τετρ. ῥίζα τοῦ 24 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Ἐν γένει, ***καλοῦμεν τετρ. ῥίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα.***

Οὕτω τοῦ 56 ἡ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 7. Διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε $7^2=49$, καὶ χωρεῖ εἰς τὰ 56, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ 8 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 57. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 18,5 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, διότι ὁ $4^2=16$ χωρεῖ εἰς τὸν 18,5 ἐνῷ τὸ $5^2=25$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 18,5.

272 *Πρακτικὸς κανὼν πρὸς εὕρεσιν τετρ. ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.* Ἂν δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ρίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶνε ἀριθμὸς μονοψήφιος, εὑρίσκομεν δ' αὐτὸν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης, διότι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐνθυμούμεθα τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\sqrt{49}=7, \qquad \sqrt{64}=8$$

Ἀσκήσεις. Εὕρετε τὴν τετρ. ρίζαν τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, καὶ σημειώσατε ποῖαι ἐξ αὐτῶν εἶνε κατὰ προσέγγισιν μονάδος· 38· 42· 56· 64· 92· 98· 17· 34· 38· 5· $47\frac{3}{4}$, 93· 75.

273. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ἔχοντος περισσότερα τῶν δύο ψηφίων, ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

1) Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ (τὸ πρῶτον τμῆμα πρὸς τἀριστερὰ δύναται νὰ εἶνε καὶ μονοψήφιον).

2) Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ πρώτου τμήματος ἐξ ἀριστερῶν καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης.

3) Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης ἀπὸ τὸ τμῆμα ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρέθη καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται εἷς ἀριθμός. Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀπομένοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ρίζης.

4) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον. Ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν σχηματισθέντα ἀριθμόν, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ

γινόμενον ν' ἀφαιρῆται. Τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, σχηματίζεται εἰς νέος ἀριθμός.

5) Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ρίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ διαιρέτου· πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

6) Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου καταβιβασθοῦν πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶνε τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ρίζης.

Ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε μηδέν, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς λέγεται *τέλειον τετράγωνον*, καὶ ἡ τετρ. ρίζα αὐτοῦ εὑρέθη ἀκριβῶς, εἰ δὲ μή, εὑρέθη *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*.

Παραδείγματα. 1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 454 276. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς,

√ 45'42'76'	674	
36	127	1344
94'2	×7	× 4
88 9	889	537 6
537'6		
537 6		
0		

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἡ $\sqrt{454\,276}=674$.

274. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν, ὑψοῦμεν τὸν 674 εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 41 920 εἶνε 204, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 304.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμήν, ὑψοῦμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν εἰς τὸ τετράγωνον, εἰς τὸ γινόμενον αὐτὸ προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

275. Ἂν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετρ. ρίζης διαίρεσίς τις δίδῃ πηλίκον 0, γράφομεν εἰς τὴν ρίζαν ὡς ψηφίον 0, καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν.

Τετραγ. ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος.

276. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 20. Αὐτὴ περιέχεται, ὡς εἶνε γνωστόν, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον τῆς ρίζης, δοκιμάζομεν ἂν τοῦτο εἶνε τὸ 5. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 4,5 καὶ βλέπομεν ὅτι εἶνε $(4,5)^2=20,25$· δηλαδὴ μεγαλύτερον τοῦ 20. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ 4,4 εἶνε $(4,4)^2=19,36$· ἤτοι μικρότερον τοῦ 20. Ἐπομένως ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 20 περιέρχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4,4 καὶ 4,5. Δι᾽ ὁμοίων δοκιμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 20.

Ὁ ἀριθμὸς 4,4 λέγεται τετρ. ρίζα τοῦ 20 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, ὁ δὲ μεγαλύτερος δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ἔχων δύο δεκαδικὰ ψηφία, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέρχεται εἰς 20, λέγεται *τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.*

Ἐν γένει ***καλεῖται τετρ. ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001 κλπ. ὁ μεγαλύτερος δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἕν, ἢ δύο ἢ τρία κλπ. δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.***

277. Πρὸς εὕρεσιν τῆς τετρ. ρίζης ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κτλ. ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα,

«***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ., πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τεράγωνον τοῦ 10, ἢ τοῦ 100 κλπ., ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τὴν δὲ ρίζαν αὐτοῦ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10 ἢ τοῦ 100 κλπ.***»

Ἐφαρμογή. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10 000, ἤτοι ἐπὶ 100 000 000, καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200 000 000 ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 14 142. Αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10 000 καὶ οὕτω ἔχομεν ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν 0,0001 εἶνε 1,4142.

278. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), καὶ αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος. Ἂν ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ., τρέπομεν συνήθως τὸν κλασματικὸν εἰς δεκαδικόν, καὶ ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ τούτου ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Οὕτω, ἂν ζητῆται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{12}{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 τρέπομεν τὸν $\frac{12}{7}$ εἰς δεκαδικόν, ὅτε εὑρίσκομεν 1,714285· τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 1 000, καὶ τοῦ γινομένου 1 714 285 εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε προκύπτει 1 309· αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1 000, καὶ οὕτω ἔχομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη ρίζα εἶνε 1,309.

Ἡ τετρ. ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εὑρίσκεται, ἂν εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον οἱ 125· 368· 1 473 καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἐξαγομένων.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν 15 127· 170 669· 339 889· 121 104· 122· 413 583· 348.

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ

α΄) $\sqrt{1\,263\,587}$, β΄) $\sqrt{4\,601\,175}$, γ΄) $\sqrt{9\,872\,264}$.

(Ἐξαγόμ. 1124 ὑπόλ. 211· 2145 ὑπ. 150· 3142 ὑπ. 100).

4) Ὁμοίως αἱ

$\sqrt{1044^2+1392^2}$, $\sqrt{12595^2-10077^2}$, $\sqrt{1102\cdot 4+576081}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,01 τῶν 5· 10· 27· 1543.

2) Ὁμοίως τῶν 278,89· 13,9876· 108,17.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος (ἢ 0,01 ἢ 0,001) τῶν ἀριθμῶν 1 543,26· 853,9· 143,23.

Διάφορα προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἔμπορος ἠγόρασεν 155 πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 8 960 δρ.· ἀντὶ πόσων δρ. πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίσῃ 4 %; 60,11.

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 265 ὀκ. καρύδια πρὸς 12,5 δρ. τὴν ὀκᾶν, μετὰ 7 δὲ μῆνας μετεπώλησεν αὐτὰ πρὸς 14 δρ. τὴν ὀκᾶν· πρὸς πόσον τοῖς % ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ τὰ χρήματά του, διὰ νὰ λάβῃ εἰς 7 μῆνας τὸ αὐτὸ κέρδος; 20,57.

3) Μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν 17 βαθμοὶ Ρεωμήρου; 21,25.

4) Μὲ πόσας ὀκ. ἰσοδυναμοῦν 30 χιλιόγραμμα; 23 ὀκ. 125 δρμ.

5) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ καθὲν ἐκ δύο εἰδῶν οἴνου, τῶν ὁποίων ὁ μὲν τιμᾶται 4 δρ. κατ' ὀκᾶν, ὁ δὲ 10 δρχ. διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα ἀξίας 5 δρ. κατ' ὀκᾶν; (Εἰς 5 τοῦ α' 1 τοῦ β').

6) Διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ κρᾶμα ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος $\frac{5}{6}$ ἐξ ἀργύρου, ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος $\frac{11}{12}$ καὶ ἐξ ἄλλου τοιούτου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος $\frac{3}{4}$, πόσον μέρος πρέπει νὰ ληφθῇ ἀπὸ καθὲν τούτων; Ἴσα μέρη.

7) Ἕν ποσὸν τοκισθὲν ἐπὶ 6 (4) ἔτ. 9 (5) μῆν. πρὸς 4,5 (4) °/₀ ἔγινε 4985,54 (8535,45) δρ.· πόσον ἦτο τὸ ποσόν; 3 824 (7 254).

8) Ἔμπορος ὀφείλει νὰ πληρώσῃ δι' ἀξίαν ἐπορευμάτων 316,57 δρ., μετὰ 1 μῆνα καὶ 12 ἡμ. Ἐπειδὴ ὅμως θέλει νὰ πληρώσῃ τοῖς μετρητοῖς, τοῦ γίνεται ἔκπτωσις 4 °/₀· πόση εἶνε ἡ ἔκπτωσις καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ; 1,48· 315,09.

9) Μία οἰκία ἀξίζει 58 120 δρ. καὶ δίδει εἰσόδημα 2,5 °/₀· πόσον εἶνε τὸ μηνιαῖον εἰσόδημά της; 121,08.

10) Ἔμπορος ἀγοράσας ἐμπορεύματα ἀντὶ 3 824,6 (3 481,2) δραχ. παρατηρεῖ ὅτι εἶνε ἠναγκασμένος νὰ πωλήσῃ αὐτὰ μὲ ζημίαν 15 °/₀. α') πόση εἶνε ἡ ζημία του; β') ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπώλησε τὰ ἐμπορεύματα; ζ. 573,69 (174,06).

11) Εἷς ἀσφαλίζει τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 12 500 δραχ. πρὸς 1,4 °/₀₀· πόσον πληρώνει δι' ἀσφάλιστρα; 17,50

12) Πόσον α') καθαρὸν οἰνόπνευμα β') ὕδωρ περιέχεται εἰς 65,2 (350) λίτρας οἰνοπνεύματος, εἰς τὸ ὁποῖον μόνον 85 (70) °/₀ εἶνε καθαρόν; α' 55,42· (245).

13) Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ περιέχει 21 °/₀ ὀξυγόνον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον αὐτοῦ εἶνε ἄζωτον· πόσον ὀξυγόνον καὶ πόσον ἄζωτον περιέχεται εἰς 2518 (1000) ($μ^3$) ἀέρος; Ὀξυγ. 528,78 (210).

14) Ἐκ χρέους 1864 δραχ. ἔγινεν ἔκπτωσις 3,5 °/₀· πόσα ἐπληρώθησαν; Ἔκπτωσις 65,24.

15) Κτῆμα ἐπωλήθη ἀντὶ 325 640 δρ. μὲ προμήθειαν $1\frac{1}{4}$ °/₀.

πόσα ἐπληρώθησαν διὰ προμήθειαν; 2820,5.

16) Ἐκ τοῦ σταθμοῦ ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία, διατρέχουσα 20 χμ. τὴν ὥραν. Μετὰ 9 ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σταθμοῦ ἄλλη, διατρέχουσα 25 χμ. τὴν ὥραν· μετὰ πόσον χρόνον ἡ δευτέρα θὰ εἶνε ὀπίσω τῆς πρώτης 1 χμ.;

17) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον $\dfrac{13\frac{1}{5}+6\frac{7}{10}-\frac{7}{8}}{\left(\dfrac{6}{6\frac{3}{10}-\frac{3}{4}}\right)}$ 17,598125.

18) Τὸ $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ τῶν χρημάτων μου διαιρούμενον διὰ τοῦ 8 (9) δίδει τὸ πηλίκον 20 (100) δρ.· πόσα χρήματα ἔχω; 480(4500)

19) Ποῖον χρηματικὸν ποσὸν αὐξανόμενον κατὰ τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)$ αὐτοῦ καὶ κατὰ $\frac{1}{3}$ (2) δρ. γίνεται 5 (72) δραχμαί; 3,5 (50).

20) Ποῖον ποσὸν αὐξανόμενον κατὰ 0,2 (0,75) αὐτοῦ, καὶ ἐλαττούμενον κατὰ 0,2 (1) γίνεται 10 (20); 8,5 (12).

21) Ὑπάλληλος ἀποταμιεύει τὰ 0,2 (0,3) τοῦ μισθοῦ του. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ μισθός του κατὰ τὰ 0,2 (9,4) αὐτοῦ, ποῖον μέρος τοῦ νέου μισθοῦ θὰ ἀποταμιεύῃ, ὥστε τὸ ἀποταμίευμα νὰ εἶνε ὁποῖον ἦτο πρὸ τῆς αὐξήσεως; $\frac{1}{6}\left(\frac{3}{14}\right)$

22) Δύο λυχνίαι πετρελαίου ἔκαυσαν ἡ μὲν 1 ὀκ. καὶ 350 δρμ. πετρελαίου εἰς 9 ὥρ. καὶ 3΄, ἡ δὲ 1 ὀκ. καὶ 20 δρμ. εἰς 6 ὥρ.· ποία ἐκ τῶν δύο εἶνε οἰκονομικωτέρα; Διατί;

23) Ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος ἀποτελουμένου ἐκ 15 (25) μερῶν χρυσοῦ καὶ 5 (16) χαλκοῦ; 9,75 (0,625).

24) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμίξωμεν οἶνον τῶν 3,6 (4,5) δρ. μὲ ὕδωρ, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ τιμᾶται 2,8 (4) δρ.; Εἰς 7 (8) οἴνου 2 (1) ὕδωρ.

25) Νὰ μερισθοῦν 100 (455) δραχμαὶ εἰς τρεῖς ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ τὰ 0,75 (0,5) τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τὰ 0,8 (0,25) τοῦ πρώτου. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

Ὁ α΄ 31 $\frac{43}{47}$(140).

26) Ἔμπορος πτωχεύσας, ἀφήνει ἐνεργητικὸν μὲν 10 000

δρ., παθητικὸν δὲ τὸ ἑξῆς. Εἰς τὸν Α ὀφείλει 25 000 δρ. εἰς τὸν Β 12 450 δρ. καὶ εἰς τὸν Γ 1 000 δρ.· τὰ ἔξοδα τῆς ἐκκαθαρίσεως εἶνε 6,5 % ἐπὶ τοῦ ἐνεργητικοῦ του. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθεὶς τῶν Α, Β, Γ; Ὁ α' 6079,32..

27) Εἷς πληρώνει σήμερον διὰ γραμμάτιον, λῆγον μετὰ 2 μῆν. 20 ἡμ. (24 ἡμ.) καὶ ἀξίας 860 (3 400) δρ. μόνον 842,8 (33 886,4) δρ. Πόσον τοῖς % ἔγινεν ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις; 9(6)

28) Γραμμάτιον 1 8000 (480) δρ. εἶνε πληρωτέον μετά τινα χρόνον. Ἐπειδὴ ὅμως πληρώνεται τοῖς μετρητοῖς, γίνεται ἐξωτ. ὑφαίρεσις 32,5 (18) δρ., ἡ ὁποία λογαριάζεται πρὸς 6,5 (9) %· πότε λήγει τὸ γραμμάτιον; 3 μ. 10 ἡμ. (5 μ.).

29) Κατὰ τὴν ἀγορὰν μιᾶς οἰκίας ὁ ἀγοραστὴς προσφέρει ἢ 64 228 δρ. πληρωτέας ἀμέσως ἢ 36137,6 δρ. πληρωτέας μετὰ 3 ἔτ. καὶ 30 374,4 δρ. μετὰ 4 ἔτη· ποία ἐκ τῶν δύο προσφορῶν εἶνε προτιμοτέρα, ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις (ἐξωτ.) λογίζεται πρὸς 5%; Ἡ α'.

30) Τοκίζει τις ἓν ποσὸν πρὸς 3,75%. Μετὰ 4 ἔτη 5 μ. ἀποσύρει τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον του καὶ τοκίζει τὸ ὅλον ποσὸν πρὸς 4,5 % καὶ ἔχει οὕτω ἐτήσιον εἰσόδημα 1 250 δρ.· ποῖον εἶνε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον; 23830,8.

31) Κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 15 μῆνας αὐξάνεται κατὰ τὰ 0,0625 αὐτοῦ. Ποῖον εἶνε τὸ ἐπιτόκιον; 5.

32) Τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα 40 000 δρ. εἶνε κατὰ 1 600 δρ. μικρότερον τοῦ τῶν 60 000 δρ. τοκισμένου πρὸς 6 %. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη τὸ α' κεφάλαιον. 5.

33) Γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 3 μῆν. καὶ 10 ἡμ. ἐξοφλεῖται ἀντὶ 612 δρ. τοῖς μετρητοῖς· πόση εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἡ ὑφαίρεσις λογαριάζεται πρὸς 5%; 621,01

34) Εἷς ἀναμιγνύει 3 χιλιόγρ. (40 γρ.) χρυσοῦ καθαρότητος 0,94 (0,9) καὶ 2 χιλιόγρ. (8 δρ. χαλκοῦ) ἄλλου χρυσοῦ καθαρότητος (0,9)· ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος; 0,924. (0,75).

35) Εἷς ἀναμιγνύει 2 (13) χιλιόγρ. ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,94 (0,9) καὶ 3 (2) χιλ. χαλκοῦ· πόσον ἄργυρον περιέχει τὸ μῖγμα καὶ ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητός του;

1,88· 0,376 (0,75).

36) Τὸ καθαρὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶνε 607,5 (779, 28) χιλιόγρ., τὸ δὲ ἀπόβαρον (μικτὸν) 17,5 (816) χιλιόγρ.· πό-

σον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ ἀπόδαρον; 2,8 (4,5)

37) Εἷς ἀγοράζει 25 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 200 δρ. τὸν πῆχυν καὶ πωλεῖ τοὺς 16,75 πήχεις πρὸς 240 δρ. τὸν πῆχυν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 260 δρ. τὸν πῆχυν· πόσον τοῖς %, ἐκέρδισεν; 21,65.

38) Εἰς 458 ὀκ. οἰνοπνεύματος περιέχονται 27.45 ὀκ. ὕδατος· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα; 94,00..

39) Εἷς πωλεῖ 17 μ. ὑφάσματος πρὸς 11 $\frac{11}{17}$ δρ. τὸ μέτρον· πόσον % ζημιώνεται, ἐὰν ἠγόρασεν αὐτὸ ἀντὶ 225 δρ.; 12,44..

40) Ἀντὶ 437,5 (842,8) δρ. ἐπληρώθησαν (80 ἡμέρας ἐνωρίτερον) μόνον 402, 7 (825,6) δρ.· πόσον % εἶνε ἡ ἔκπτωσις; 7,95..(9,18..).

41) Ἀγοράζει τις 45 χιλιόγρ. ἐμπορεύματος πρὸς 13 δρ. τὸ χιλιόγραμμον καὶ πωλεῖ αὐτὸ ἀντὶ 545,22 δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν ζημιώνεται; 6,8.

42) Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 328,25 δρ., πωλεῖ δὲ αὐτὸ ἀντὶ 341.38 δρ.· πόσον ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας του; 5.

43) Εἷς πωλεῖ ἐμπόρευμα κερδίζων 333,66 δρ., ἀντὶ 6400,2 δρ.· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶνε τὸ κέρδος του; 5,5.

44) 12 σωλῆνες πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 6 ὥρ. καὶ 25λ. πόσοι τοιοῦτοι σωλῆνες θὰ πληρώσουν τὴν δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρ. καὶ 42λ.; 10.

45) Ἐὰν ἓν ποσὸν μοιρασθῇ μεταξὺ 30 προσώπων, λαμβάνει καθὲν 90 δρ.· εἰς πόσα πρόσωπα θὰ μοιραθῇ τὸ αὐτὸ ποσόν, διὰ νὰ λάβῃ καθὲν 75 δρ.;

46) Διὰ νὰ διανύσῃ τῆς ὡρισμένην ἀπόστασιν κάμνει 154 βήματα μήκους 4,75 μ. καθέν· πόσον πρέπει νὰ εἶνε τὸ μῆκος καθενὸς βήματος, ἐὰν θέλῃ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν μὲ 165 βήματα; 0,7 μ.

47) Ἓν ἐμπόρευμα στοιχίζει 655 δρ.· τὰ ἔξοδα ἦσαν 2%· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 10% ἐπὶ τῆς ὅλης δαπάνης; 734,19.

48) Ἁμαξοστοιχία διατρέχουσα 56 χμ. τὴν ὥραν, διανύει μίαν ἀπόστασιν εἰς 1 ὥραν καὶ 15λ., ἐὰν διατρέχῃ 42 χμ. τὴν ὥραν, εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν; 1 ὥρ. 40λ.

49) 24 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9,5 ὥρ. καθ' ἡμέραν, τελειώνουν ἓν ἔργον. Ἐὰν προστεθοῦν 14 ἐργάται (τοιοῦτοι) πόσον πρέ-

πει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον; 6 ὥρας.

50) Τροχὸς κάμνει 3 648 στροφὰς εἰς 1 ὥραν καὶ 16λ. Πόσας στροφὰς κάμνει εἰς 1 ὥρ. καὶ 25λ; 4080

51) Ἐὰν μοιράσω μῆκος εἰς 35 ἴσα μέρη, καθὲν μέρος θὰ ἔχῃ μῆκος 0,18 μ.· εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νὰ διαιρέσω τὸ αὐτὸ μῆκος, διὰ νὰ εἶνε καθὲν τούτων 25,5 δάκτ.; 12

52) Λυχνία καίει καθ' ἡμέραν ἐπὶ 4,05 ὥρας καὶ περνᾷ τις μὲ ὡρισμένον ποσὸν ἐλαίου 16 ἡμ.· πόσον χρόνον θὰ καίῃ καθ' ἡμέραν ἡ λυχνία, ἐὰν μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐλαίου περνᾷ 16,2 ἡμ.; 4 ὥρ.

53) Ἄμαξα εἰς 6 ὥρ. 35^{λ} καὶ 45^{δ} διατρέχει διάστημα 120 χμ.· πόσα διατρέχει εἰς μίαν ὥραν; 18,193.. χμ.

54) Ἓν ὡρολόγιον εἰς 5 (10) ὥρας καὶ 20^{λ} (30^{λ}) προχωρεῖ 2^{λ} 8^{δ} ἐμπρός· πόσον προχωρεῖ εἰς μίαν ὥραν; $\frac{3^{\lambda}}{8}\left(\frac{16^{\lambda}}{21}\right)$

55) Μία κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρ. 20^{λ} καὶ 45^{δ}· πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ πληρώσῃ εἰς μίαν ὥραν; $\frac{240}{803}$.

56) Μὲ 5 λίρας 3 σελ. 8 πέν. ἀγοράζει τις 3 ὀκ. καὶ 200 δρμ. μετάξης· πόσην μέταξαν ἀγοράζει μὲ μίαν λίραν; 27 $\frac{39}{311}$ δρμ.

57) Ἂν ἡ ὀκᾶ μετάξης τιμᾶται 5 τάλ. καὶ 3 δρ., πόσον τιμῶνται 8 ὀκ. 250 δρμ. τῆς μετάξης ταύτης; 241,5 δρ.

58) Ἂν ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 2,70 δρ., πόσον τιμῶνται 8 πήχεις καὶ 6 ρούπια τοῦ ὑφάσματος; 23,625 δρ.

57) Νὰ τραποῦν 5 ἡμ. 3 ὥρ 50^{λ} 45^{δ} εἰς ὥρας, ἂν ἡ ἡμέρα λογαριάζεται πρὸς 12 ὥρας; 63 $\frac{203}{240}$ ὥρ.

60) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{7}{12}$ πήχ. 1 π. 5 $\frac{5}{7}$ ρ.

61) Ἂν 65 ὀκ. πράγματος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 32,60 δρ., πόσον ἐπωλήθη ἡ ὀκᾶ; 50 $\frac{2}{13}$ λ.

62) Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 5 (3,5) ὥρας· ἄλλη κρήνη δύναται νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 4 (7,25) ὥρας· εἰς πόσας ὥρας αἱ δύο κρῆναι, συγχρόνως ρέουσαι, θὰ πληρώσουν αὐτήν; 2 $\frac{2}{9}\left(2\,\frac{31}{86}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Στοιχεῖα Λογιστικῆς καὶ Καταστιχογραφίας.

Σκοπὸς τῆς Λογιστικῆς.

279. Ἐὰν εἷς ἔμπορος, ἢ ἐμπορικόν, βιομηχανικόν, τραπεζιτικὸν κατάστημα, θέλῃ νὰ γνωρίζῃ καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα καὶ τὴν ἐν γένει κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται αἱ ἐμπορικαὶ αὐτοῦ ἐπιχειρήσεις δηλαδὴ τί αὐτὸς ἐμπορικῶς κατέχει, τί τοῦ ἐλλείπει, τί ἐπὶ πλέον ἔχει; τί ὀφείλει εἰς ἄλλους μετὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται εἰς ἐμπορικὰς σχέσεις καὶ τί ἄλλοι ὀφείλουν εἰς αὐτόν), πρέπει νὰ κρατῇ λεπτομερῶς πᾶσαν ἐμπορικήν του πρᾶξιν καὶ νὰ καταγράφῃ εἰς τὰ βιβλία του μετά τινος μεθοδικότητος; Τὸ μάθημα, τὸ ὁποῖον διδάσκει, πῶς δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν μεθοδικῶς τὰς ἐμπορικὰς ἐργασίας ἑνὸς ἐμπορικοῦ οἴκου ἐν γένει, ὥστε νὰ δυνάμεθα εὐκόλως, νὰ εὑρίσκωμεν καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν, λέγεται *Λογιστική*.

Λογιστικὴ ἁπλογραφικὴ καὶ διπλογραφική.

280. Ὁ λαμβάνων παρ' ἄλλου ἓν χρηματικὸν ποσὸν ἢ ἓν ἐμπόρευμα ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἐπιστρέψῃ τὰ χρήματα, ἢ τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος μετά τινα χρόνον εἰς τὸν πρῶτον, λέγεται *χρεώστης*.

Ὁ δίδων τι χωρὶς νὰ λάβῃ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, ἀλλὰ δικαιούμενος νὰ λάβῃ αὐτήν, λέγεται *πιστωτής*. Οὕτω ἐὰν ὁ Γεώργιος ἐδάνεισε 500 δρ. εἰς τὸν Ἰωάννην, ὁ μὲν Γεώργιος εἶνε ὁ πιστωτής, ὁ δὲ Ἰωάννης ὁ χρεώστης.

Ὁμοίως, ἂν ἀγοράσωμεν ἓν ἐμπόρευμα ἀξίας 5 0 δρ. παρὰ τοῦ Ν ἐπὶ πιστώσει, ὁ μὲν Ν εἶνε πιστωτής, ἡμεῖς δὲ χρεώστης.

Ἐὰν δώσω εἰς τὸν Α 1000 δρ. ἐπὶ πιστώσει, καὶ ἐγγράψω τὴν πρᾶξιν αὐτὴν εἰς τὰ βιβλία της λογιστικῆς εἰς τρόπον, ὥστε νὰ διακρίνεται ὅτι ὁ Α εἶνε χρεώστης τῶν 1000 δρ., λέγω ὅτι ἐχρέωσα τὸν Α μὲ 1000 δραχμάς.

Ἐὰν λάβω παρ' ἑνὸς ἓν εμπόρευμα 1000 δρ. ἐπὶ πιστώσει, π. χ. παρὰ τοῦ Α, καὶ ἐγγράψω εἰς τὰ βιβλία τὴν πρᾶξιν αὐτήν, ὥστε νὰ φαίνεται ὅτι ὁ Α εἶνε πιστωτὴς τῶν 1000 δρ., λέγω ὅτι ἐπίστωσα τὸν Α μὲ 1000 δραχμάς.

281. Ὑπάρχουν δύο συστήματα Λογιστικῆς. 1) *ἡ ἁπλογραφικὴ ἢ ἁπλογραφία, καὶ 2) ἡ διπλογραφικὴ ἢ διπλογραφία.*

Εἰς μὲν τὴν ἁπλογραφίαν εἰς καθεμίαν ἐμπορικὴν πρᾶξιν κάμνομεν μίαν μόνην ἐγγραφὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν πρᾶξιν ποσοῦ, δηλαδὴ τὴν χρέωσιν, ἢ τὴν πίστωσιν αὐτοῦ· εἰς δὲ τὴν διπλογραφίαν τοὐναντίον κάμνομεν δύο ἐγγραφὰς τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, μίαν διὰ τὴν χρέωσιν καὶ ἄλλην διὰ τὴν πίστωσιν αὐτοῦ.

Οὕτω π. χ., ἐὰν δώσω εἰς τὸν Α ἐπὶ πιστώσει 1000 δρ., κατὰ τὴν ἁπλογραφίαν, ἐγγράφω τὴν πρᾶξιν αὐτὴν εἰς τὰ βιβλία μου, χρεώνων τὸν Α μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ.· ἐνῶ κατὰ τὴν διπλογραφίαν πρέπει νὰ χρεώσω τὸν Α μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ., καὶ νὰ πιστώσω τὸν ἑαυτόν μου μὲ τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρ., διότι ἔδωκα αὐτάς.

Ἡ ἁπλογραφία εἶνε πολὺ ἁπλῆ καὶ εὔκολος, ἀλλ' ἀτελής. Διότι δὲν εἶνε τοιαύτη, ὥστε νὰ δύναται νὰ παρέχῃ πάντοτε λεπτομερεῖς πληροφορίας περὶ τῆς ἐν γένει ἐμπορικῆς καταστάσεως τοῦ ἐμπόρου, οὐδὲ παρέχει πλήρη ἔλεγχον τῶν ἐγγραφῶν, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία. Τοὐναντίον, ἡ διπλογραφία εἶνε συστηματικὴ καὶ τελειοτέρα, παρέχουσα λεπτομερεῖς πληροφορίας περὶ τῆς ἐν γένει καταστάσεως τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως καὶ πλήρη ἔλεγχον τῶν ἐγγραφῶν, αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὰ λογιστικὰ βιβλία.

Διὰ ταῦτα ἡ μὲν ἁπλογραφία ἐφαρμόζεται εἰς μερικὰς ἐμπορικὰς ἐπιχειρήσεις, ἐνῶ ἡ διπλογραφία εἰς τὰς μεγάλας καὶ τὰς καλῶς ὀργανωμένας.

Λογαριασμός, χρέωσις, πίστωσις.

282. Πᾶς ἔμπορος κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν αὐτοῦ ἐπιχειρήσεων ἔρχεται εἰς ἐμπορικὰς οἰκονομικὰς σχέσεις μετὰ διαφόρων προσώπων, ἢ ἐμπορικῶν καταστημάτων, ἐνεργῶν μὲ καθένα τούτων ἐμπορικὰς δοσοληψίας ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας. Ἐὰν λοιπὸν θέλῃ νὰ εὑρίσκῃ εὐκόλως τὴν ἐμπορικὴν αὐτοῦ θέσιν ἀπέναντι καθενὸς τούτων, πρέπει νὰ κρατῇ ἀκριβῆ καὶ ὅσω τὸ δυνατὸν λεπτομερῆ σημείωσιν τῶν δοσοληψιῶν εἰς τὰ καλούμενα λογιστικὰ βιβλία. Συνήθως ἐγγράφει πᾶσαν ἐμπορικὴν πρᾶξιν, ἀφορῶσαν τὸ αὐτὸ πρόσωπον ἢ ἐμπορικὸν κατάστημα εἰς μίαν σελίδα ἑνὸς τῶν λογιστικῶν βιβλίων, διὰ νὰ δύναται τὸ ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῶν ἐγγραφῶν αὐτῶν νὰ εὑρίσκῃ τὴν κατάστασιν αὐτοῦ πρὸς τὸ ἐν λόγῳ πρόσωπον. Ἡ τοιαύτη σημείωσις τῶν ἐμπορικῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν πρόσωπόν τι ἢ κατάστημα ὡρισμένον, λέγεται *λογαριασμὸς* ἢ *μερὶς* τοῦ θεωρουμένου προσώπου εἰς τὰ βιβλία τοῦ ἐμπόρου (βλέπε σελίδα 226).

Αἱ ἀφορῶσαι τὸ αὐτὸ πρόσωπον ἐμπορικαὶ πράξεις ἐγγράφονται εἰς τὸν λογαριασμὸν αὐτοῦ ὄχι ὅλως τυχαίως καὶ ἁπλῶς μόνον ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην, καθὼς αὐταὶ ἔγιναν, ἀλλὰ μεθοδικώτερόν πως, ὡς ἑξῆς. Χρησιμοποιεῖται συνήθως μία σελὶς βιβλίου, διῃρημένη εἰς δύο μέρη· εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος ἐγγράφονται πᾶσαι αἱ πράξεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμὸς αὐτό, ἔλαβε παρ' ἡμῶν ἀμέσως ἢ ἐμμέσως (δηλαδὴ παρ' ἄλλου διὰ λογαριασμὸν ἡμῶν) ἓν πρᾶγμα ἐπὶ πιστώσει. Καθεμία τῶν πράξεων ἐκτίθεται συντόμως ἀλλὰ σαφῶς, γράφεται δὲ ἡ χρονολογία κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγινε καὶ τὸ ποσὸν τῆς συμφωνηθείσης ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος, καὶ μὲ τὸ ὁποῖον χρεώνομεν τὸ πρόσωπον, τὸ παριστανόμενον ἀπὸ τὸν λογαριασμόν. Εἰς τὸ δεξιὸν μέρος ἐγγράφονται πᾶσαι αἱ πράξεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ πρόσωπον τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἀμέσως ἢ ἐμμέσως ἓν πρᾶγμα. Καθεμία τῶν πράξεων τούτων ἐκτίθεται ὡς καὶ εἰς ἀριστερὸν μέρος.

283. Τὸ πρὸς τἀριστερὰ μέρος ἑνὸς λογαριασμοῦ λέγεται *χρέωσις*, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ *πίστωσις*. Ὁ λόγος τῆς ὀνομασίας αὐτῆς τῶν δύο μερῶν εἶνε ὁ ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ πρόσωπον τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, λαμβάνων πρᾶγμά τι παρ' ἡμῶν, λαμβάνει αὐτὸ ὄχι δωρεάν, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἀντίτιμον αὐτοῦ, αὐτὰ δὲ τὰ ποσὰ γράφομεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος, ἕπεται ὅτι τὸ ἀριστερὸν μέρος, παριστάνει τὸ χρέος τοῦ ἐν λόγῳ προσώπου πρὸς ἡμᾶς, καὶ καλεῖται *χρέωσις* αὐτοῦ. Ἐπίσης τὸ δεξιὸν μέρος παριστάνει τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα μᾶς ἔδωκεν τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ λογαριασμός· ἄρα περιέχει τοῦτο κατάλογον τῶν χρεῶν ἡμῶν, ἢ τῶν ἀπαιτήσεων αὐτοῦ παρ' ἡμῶν, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται *πίστωσις* αὐτοῦ.

284. Τὸ ἀριστερὸν μέρος ἑνὸς λογαριασμοῦ λέγεται καὶ *Δοῦναι*, τὸ δὲ δεξιὸν καὶ *Λαβεῖν*. Διότι τὸ μὲν παριστάνει τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα χρεωστεῖ ἢ ὀφείλει νὰ μᾶς δώσῃ τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ὁ λογαριασμός, τὸ δὲ δεξιὸν ὅ,τι δικαιοῦται νὰ λάβῃ αὐτὸ ἀπὸ ἡμᾶς. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ δύο ὅροι *Δοῦναι* καὶ *χρέωσις* εἶνε συνώνυμοι, καθὼς καὶ οἱ *Λαβεῖν* καὶ *πίστωσις*.

285. Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο ποσῶν τοῦ Δοῦναι ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ Λαβεῖν, τὸ πλεονάζον εἰς τὸ Δοῦναι ποσὸν καλεῖται *χρεωστικὸν ὑπόλοιπον*, ἐπειδὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν χρέωσιν. Ὁμοίως τὸ πλεονάζων ποσὸν τοῦ Λαβεῖν καλεῖται *πιστωτικὸν ὑπόλοιπον*, ἐπειδὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν πίστωσιν. Εἷς λογαριασμὸς λέγεται *χρεώστης* μέν, ὅταν ἔχῃ *χρεωστικὸν* ὑπόλοιπον, *πιστωτὴς* δέ, ὅταν ἔχῃ *πιστωτικὸν* ὑπόλοιπον.

Τύπος λογαριασμοῦ.

Δοῦναι ἢ χρέωσις					*Λαβεῖν ἢ πίστωσις*				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	(α)					(α)			

Ἡ στήλη 1 χρησιμεύει διὰ νὰ γράφομεν τὸν μῆνα κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ ἐμπορικὴ πρᾶξις· ἡ 2 χρησιμεύει διὰ τὴν ἡμέραν τοῦ μηνός· ἡ 3 διὰ τὴν λεπτομέρειαν τῆς πράξεως. ἡ 4 καὶ ἡ 5 διὰ τὰς δραχμὰς καὶ τὰ λεπτὰ τοῦ ποσοῦ. Εἰς τὴν θέσιν (α) γράφεται τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ πρᾶξις.

286. *Χρεώνομεν* ἕνα λογαριασμὸν σημαίνει, ὅτι ἐγγράφομεν εἰς τὴν χρέωσιν αὐτοῦ ἓν ποσόν· *πιστώνομεν* δὲ ἕνα λογαριασμὸν σηγαίνει, ὅτι ἐγγράφομεν ἓν ποσὸν εἰς τὴν πίστωσιν αὐτοῦ.

Παραδείγματα. Πρὸ ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστω ὅτι ἐνηργήσαμεν τὰς κάτωθι ἐμπορικὰς πράξεις μετά τινος προσώπου, ἔστω τοῦ Νικολάου.

1) 1913 Ὀκτωβρίου 10. Ἐπωλήσαμεν εἰς τὸν Νικολάου ἐπὶ πιστώσει ἐμπόρευμα ἀξίας . . . . δρ. 250

2) Ὀκτωβρίου 20. Ἐλάβομεν παρὰ τοῦ Νικολάου εἰς μετρητὰ . . . . δρ. 200

3) 1914 Φεβρουαρίου 5, Καταθέσαμεν παρὰ τῷ Νικολάου διὰ τοῦ Ἰωάννου διὰ λογαριασμόν μας γραμμάτιον εἰς βάρος τοῦ Ἰωάννου λῆγον τὴν 5 Μαΐου δρ. 1500

Προκειμένου νὰ ἐγγράψωμεν τὰς πράξεις αὐτὰς εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦ Νικολάου, εὑρίσκομεν πρῶτον ποῖαι τῶν πράξεων αὐτῶν πρέπει νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὴν χρέωσιν, καὶ ποῖαι εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ τοῦ Νικολάου.

Ἡ πρᾶξις 1) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν χρέωσιν· διότι ὁ Νικολάου ὀφείλει νὰ μᾶς πληρώσῃ τὰς 250 δρ. διὰ τὰ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐπωλήσαμεν ἐπὶ πιστώσει. Ἡ πρᾶξις 2) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ. Ἡ 3) θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν χρέωσιν, διότι ὁ Νικολάου ἔλαβε παρὰ τοῦ Ἰωάννου γραμμάτιον 1500.

Κατὰ ταῦτα καὶ συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω τύπον λογαριασμοῦ, ὁ λογαριασμὸς τοῦ Νικολάου θὰ εἶνε ὡς κατωτέρω.

Εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦτον τοῦ Νικολάου τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως. Διὰ τοῦτο ὁ λογαριασμὸς αὐτός, ἤτοι τοῦ Νικολάου, εἶνε χρεώστης μας τοῦ ἐπὶ πλέον ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὰς 1750 δρ. τῆς χρεώσεως ἀφαιρέσωμεν τὰς 200 δρ. τῆς πιστώσεως, ἤτοι τοῦ ποσοῦ τῶν 1550 δραχμῶν. Τὸ ποσὸν αὐτὸ εἶνε τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον τοῦ Νικολάου.

Δοῦναι		*Νικολάου (ὁδὸς...)*				*Λαβεῖν*	
1913			Δρ. Λ.	1913			Δρ. Λ.
8)βρίου	10	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	250.—	8)βρίου	20	Μετρητάς	200.—
1914							
Φεβρουαρ.	5	Καταθέσεις μας παρ' αὐτῷ διὰ τοῦ Ἰωάννου	1500.—				
		Ἐν ὅλῳ	1750.				200.—

Ἀσκήσεις.

1) Εἰς καθεμίαν τῶν κάτωθι ἐμπορικῶν πράξεων νὰ εὑρεθῇ ποῖος εἶνε ὁ χρεώστης καὶ ὁ πιστωτής, καὶ ἐπομένως ποίας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ κάμῃ καθεὶς τῶν ἐνδιαφερομένων.

α΄) Τὴν 2αν Ὀκτωβρίου 1915 ἠγόρασα
ἀπὸ Πυρρῆν καὶ Σίαν 20 βαρέλια ἐλαίου
ὀκ. 3240 πρὸς 1,15 δρ. τὴν ὀκᾶν . . . . . Δρ. 3726

β΄) Ἐμέτρησα εἰς Πυρρῆν καὶ Σίαν πρὸς
ἐξόφλησιν τῆς ἀξίας 20 βαρελίων ἐλαίου. . » 3726

γ΄) Ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 40 κιβώτια
σάπωνος ἐκ 3548 ὀκ. πρὸς 98 λ. τὴν ὀκᾶν . » 3477,05
Ἐμέτρησα ἔναντι. . . . . » 1477,05
Ὑπόλοιπον » 2000.

δ΄) Τὴν 4ην τοῦ ἰδίου ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 35 κιβώτια σάπωνος ἐκ 3080 ὀκάδων πρὸς 97 λ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς . . . . δρ. 5987,60

ε΄) Τὴν 9ην ἰδίου ἐμέτρησα εἰς Δ. Ξένον πρὸς ἐξόφλησιν τῆς ἀξίας τῶν 40 κιβωτίων σάπωνος τῆς 2ας τρέχοντος δρ. 2000.

ϛ΄) Τὴν 27ην Ὀκτωβρίου ἠγόρασα ἀπὸ Δ. Ξένον 30 κιβώτια σάσωνος ἐκ 2620 ὀκ. πρὸς 85 λ. τὴν ὀκᾶν . δρ. 2227.

Πρὸς πληρωμὴν αὐτῶν τοῦ παρεχώρησαν γραμμάτιον ὡς ἑξῆς :

ἀξία γραμματίου	1714,50	
μεῖον τόκος προεξοφλήσεως	9,10 =	1705,40
καὶ μετρητὰ πρὸς ἐξόφλησιν		521,60
	Ἐν ὅλῳ	2227.

ζ') Ὁ ἐν Πειραιεῖ Γ. Βούρβουλης ἐπλήρωσε τὴν 15 Ἰουλίου εἰς τὸν Γιάπαππαν τῆς αὐτῆς πόλεως κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐν Σύρῳ Ταμβακίδου. . . . δρ. 1000.

2) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων ποῖαι ἐξ ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν τὸν Δ. Ξένον θὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ του ;

3) Σχηματίσατε ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων τὸν λογαριασμὸν τοῦ Δ. Ξένου κατὰ τὸ παράδειγμα τοῦ λογαριασμοῦ τοῦ Νικολάου.

Ἄνοιγμα, κλείσιμον καὶ μεταφορὰ λογαριασμοῦ.

287. Ὅταν εἷς ἔμπορος ἐνεργῇ μετά τινος προσώπου ἐμπορικὰς πράξεις, διαθέτει μίαν σελίδα ἑνὸς βιβλίου (τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς λογαριασμοὺς μετὰ τῶν συναλλασσομένων μετ' αὐτοῦ), καὶ εἰς αὐτὴν ἐγγράφει τὰς πράξεις τὰς ἀφορώσας τὸ περὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρόσωπον. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται *ἄνοιγμα λογαριασμοῦ*, γίνεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν μὲ παχέα καὶ καλλιγραφικὰ γράμματα τὸ ὀνοματεπώνυμον τοῦ προσώπου, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ὁ λογαριασμός, τὸν ὁποῖον ἀνοίγωμεν. Ὑποκάτω τοῦ ὀνόματος, ἢ δεξιὰ αὐτοῦ, ἐν παρενθέσει, γράφομεν διὰ μικροτέρων γραμμάτων τὴν διεύθυνσίν του. Ἐπίσης γράφομεν τὰς λέξεις «*Δοῦναι*» καὶ «*Λαβεῖν*» ἑκατέρωθεν τοῦ ὀνοματεπωνύμου καὶ εἰς τὰς γωνίας τῆς σελίδος (συνήθως αἱ λέξεις Δοῦναι, Λαβεῖν εἶνε ἐκ τῶν προτέρων τυπωμέναι εἰς καθεμίαν σελίδα τοῦ βιβλίου).

288. Καλεῖται *κλείσιμον* λογαριασμοῦ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ εἶνε δὲ τοῦτο χρεωστικὸν ἢ πιστωτικὸν ἢ καὶ μηδέν, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τὰ ὁποῖα εἶνε γραμμένα εἰς τὴν χρέωσιν εἶνε μεγαλύτερον, μικρότερον ἢ ἴσον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως.

Διὰ τὸ κλείσιμον τοῦ λογαριασμοῦ προσθέτομεν ἰδιαιτέρως ὅλα τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεώς του, καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν εἰς αὐτὸν καὶ ὑπὸ τὰ ἄλλα ποσά· τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὰ ποσὰ τῆς πιστώσεώς του· Ἐὰν τὰ δύο ποσὰ τῶν ἀθροισμάτων εἶνε ἴσα, λέγομεν ὅτι ὁ λογαριασμὸς αὐτὸς εἶνε *ἐξωφλημένος*, ἂν δὲ ἄνισα θὰ ἐξισώσωμεν αὐτόν, δηλαδὴ θὰ κάμωμεν τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεώς του ἴσα, ὡς ἑξῆς,

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο ἀθροισμάτων, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν, μεγαλύτερον εἶνε τὸ τῆς χρεώσεως, καὶ ἑπομένως μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν των προκύπτει χρεωστικὸν ὑπόλοιπον. Πιστώνομεν τότε αὐτὸν μὲ τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον, γράφοντες εἰς τὴν περίληψιν τὰς λέξεις «*πρὸς ἐξίσωσιν*». Ἀκολούθως προσθέτομεν τὸ ποσὸν αὐτὸ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς πιστώσεως καὶ εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως εἶνε ἴσα· ἤτοι ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶνε ἐξισωμένος. Μετὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ λογαριασμοῦ γράφομεν ὑποκάτω καθενὸς τῶν ἴσων τούτων ἀθροισμάτων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μικρὰν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι ὁ λογαριαμὸς ἔκλεισε, καὶ ὅτι δὲν πρέπει τὰ ποσὰ αὐτὰ νὰ συγχωνευθοῦν βραδύτερον μὲ ἄλλα, τὰ ὁποῖα τυχὸν νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμήν

Οὕτω π. χ. διὰ νὰ κλείσωμεν τὸν κάτωθι λογαριασμὸν τοῦ Ι. Πετρίδου, προσθέτομεν τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεώς του 350,80· 1000·200 ἰδιαιτέρως ἐπὶ προχείρου φύλλου χάρτου, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 1550,80, τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτωθεν τῶν ἄλλων ποσῶν, ἐνῷ εἰς τὴν οἰκείαν στήλην τῆς περιλήψεως γράφομεν τὰς λέξεις «*ἐν ὅλῳ*». Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὰ ποσὰ τῆς πιστώσεως, καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 1250. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ 1550,80 τὸ 1250 εὑρίσκομεν τὸ χρεωστικὸν ὑπόλοιπον 300,80. Διὰ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν λογαριασμὸν καὶ ἑπομένως νὰ κλείσωμεν αὐτόν, πιστώνομεν αὐτὸν μὲ τὸ ποσὸν τῶν 300,80 δρ. ἀκολούθως προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὸ προηγούμενον ἄθροισμα τῆς πιστώσεως 1550,80, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα τῆς χρεώσεως.

Δοῦναι ***Ι. Πετρίδης (ἐν Πειραεῖ ὁδὸς...)*** ***Λαβεῖν***

1916			Δρχ.	Λ.	1916			Δρχ.	Λ.
Μχρτ.	7	Ἀξίαν ἐμπο-			Μχρτ.	26	Μετρητάς	250	—
		ρευμάτων	350	80	Μαΐου	2	»	1000	—
Ἀπρ.	12	Γραμμάτιον	1000	—			Ἐν ὅλῳ	1250	—
»	15	Ἀξίαν ἐμπο-					Πρὸς ἐξίσωσιν	300	80
		ρευμάτων	200	—					
		Ἐν ὅλῳ	1550	80				1550	
Ἰουν.	1	Ὑπόλ. ὡς ἄνω	300	80					

Ἐὰν τὸ νέον ἄθροισμα τῆς πιστώσεως εὑρίσκεται κατωτέρω τοῦ πρώτου γράφομεν ἐκ νέου τὸ πρῶτον εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ δεύτερον. Μετὰ ταῦτα σύρωμεν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμὴν ὑποκάτω τοῦ καθενὸς τῶν τελικῶν ἀθροισμάτων 1550,80 καὶ οὕτω ὁ λογαριασμὸς θεωρεῖται *ἐξισωμένος* καὶ κλεισμένος.

Ὁμοίως κλείεται εἰς λογαριασμός, ἐὰν ἔχῃ πιστωτικὸν ὑπόλοιπον· δηλαδὴ προσθέτομεν τοῦτο εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως, καὶ ἐξισοῦμεν πάλιν τὸν λογαριασμόν.

Μετὰ τὸ κλείσιμον ἑνὸς λογαριασμοῦ τὸ ὑπόλοιπον ἐγγράφεται μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμὴν καὶ εἰς τὸ μέρος τῶν χρεώσεων μέν, ἐὰν εἶνε χρεωστικόν, εἰς τὸ μέρος τῶν πιστώσεων δέ, ἂν εἶνε πιστωτικόν. Εἰς τὴν στήλην τῆς αἰτιολογίας γράφομεν ἐδῶ τὰς λέξεις «*Ὑπόλοιπον ὡς ἄνω*». Ὁ σκοπὸς τῆς ἐγγραφῆς αὐτῆς εἶνε νὰ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ κλεισθέντος λογαριασμοῦ κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ νέου τοιούτου, καὶ πρὸς τῆς ἐγγραφῆς τῶν νέων ἐμπορικῶν πράξεων εἰς τὸ μέρος τῶν χρεώσεων καὶ τῶν πιστώσεων.

Τὸ κλείσιμον τοῦ λογαριασμοῦ γίνεται συνήθως περιοδικῶς εἰς τὸ τέλος καθενὸς ἔτους, ἑξαμηνίας ἢ τριμηνίας. Δύναται ὅμως εἰς πᾶσαν ἐποχὴν νὰ γίνῃ κλείσιμον ἑνὸς λογαριασμοῦ· ἐὰν ὑπάρχουν λόγοι συντρέχοντες εἰς τοῦτο.

Ἐὰν ἡ χρέωσις καὶ ἡ πίστωσις ἑνὸς λογαριασμοῦ ἔχουν ἴσα ἀθροίσματα, λέγομεν ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶνε *ἐξισωμένος* ἀφ᾽ ἑαυτοῦ, ἢ *ἐξωφλημένος*.

289. Ὅταν αἱ ἐγγραφαὶ τῶν χρεώσεων, ἢ πιστώσεων, ἢ μόνον ἡ μία ἐξ αὐτῶν καταλάβῃ ὁλόκληρον τὸν χῶρον τὸν προσδιορισμένον δι᾽ αὐτὰς εἰς τὸ *Δοῦναι* ἢ εἰς τὸ *Λαβεῖν* τοῦ λογαριασμοῦ, ὥστε νὰ μὴ μένῃ πλέον χῶρος διὰ μίαν νέαν ἐγγραφήν, σχηματίζομεν τὴν συνέχειαν τοῦ λογαριασμοῦ τούτου εἰς ἄλλην σελίδα τοῦ βιβλίου ὡς ἑξῆς.

1) Προσθέτομεν ὅλα τὰ ποσὰ τῆς χρεώσεως, καθὼς καὶ πιστώσεως τοῦ λογαριασμοῦ. Καθὲν τῶν ἀθροισμάτων αὐτῶν γράφομεν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ ἀντιστοίχου χώρου τοῦ λογαριασμοῦ, σημειοῦντες πρὸ καθενὸς τούτων καὶ εἰς τὴν στήλην τῆς περιλήψεως τὰς λέξεις «*Εἰς μεταφοράν*».

2) Ἂν ὁ χῶρος τοῦ Δοῦναι ἢ τοῦ Λαβεῖν δὲν εἶνε πλήρης, ἀφήνομεν τὸν ἐλεύθερον χῶρον, ἀκυροῦντες αὐτὸν διὰ τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀπολήγει εἰς τὸ ἄκρον τοῦ χώρου αὐτοῦ.

3) Ἀνοίγομεν εἰς ἄλλην σελίδα τοῦ βιβλίου, ἡ ὁποία εἶνε ἐλευθέρα, νέον λογαριασμόν, φέροντα τὸ ὄνομα τοῦ προηγουμέ-

νου. Εἰς τοῦτον ἐγγράφομεν ἀντιστοίχως εἰς τὸν χῶρον τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως τὰ δύο ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν εἰς τὸν προηγούμενον λογαριασμόν. Πρὸ καθενὸς τῶν ποσῶν τούτων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῆς περιλήψεως τὰς λέξεις «*Ἐκ μεταφορᾶς*». Πᾶσαν ἄλλην χρέωσιν ἢ πίστωσιν τοῦ λογαριασμοῦ ἐγράφομεν τώρα ὡς συνήθως, ὑπὸ τὴν γενομένην ἤδη ἐγγραφὴν καθεμιᾶς τῶν μεταφορῶν. Τὸ σύνολον τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας λέγεται *μεταφορὰ λογαριασμοῦ*. Ἐνίοτε ἡ μεταφορὰ ἑνὸς λογαριασμοῦ γίνεται μετὰ τὸ κλείσιμον αὐτοῦ, δηλαδὴ ἀφοῦ κλείσωμεν τὸν λογαριασμόν, μεταφέρομεν εἰς τὸν νέον λογαριασμόν, τὸν ὁποῖον ἀνοίγομεν, ὄχι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα τῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως τοῦ μεταφερομένου, ἀλλὰ μόνον τὸ ποσὸν τῆς ἐξισώσεως αὐτοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀντὶ εἰς τὸν παλαιὸν λογαριασμὸν νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ μεταφερομένου ποσοῦ τὰς λέξεις «*πρὸς ἐξίσωσιν*» γράφομεν «*Ὑπόλοιπον εἰς νέον*», εἰς δὲ τὸν νέον λογαριασμὸν γράφομεν «*Ὑπόλοιπον ἐκ μεταφορᾶς*».

Δοῦναι ***Ν. Ἀντωνίου (Ὁδὸς...) σελὶς 17*** ***Λαβεῖν***

1916			Δρχ	Λ.	1916			Δρχ.	Λ.
Μαρτ.	4	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	4000	50	Μαρτ.	8	Μετρητάς	250	—
»	8	Μετρητάς	500	—	»	20		500	—
»	15	Ἀξίαν ἐμπορ.	219	50					
»	30	Εἰς μεταφορὰν (σελ. 25)	4720		»	30	Εἰς μεταφορὰν (σελ. 25)	750	—

Παράδειγμα. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστω ὁ ἀνωτέρω λογαριασμὸς τοῦ Ν. Ἀντωνίου τῆς σελίδος 17 τοῦ βιβλίου μας, τὸν ὁποῖον μεταφέρομεν εἰς τὴν σελίδα 25 τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὡς κατωτέρω. Καθὼς βλέπομεν εἰς τὸν νέον λογαριασμὸν ἐγγράφομεν εἰς μὲν τὴν χρέωσιν πρῶτον τὸ ποσὸν τῶν 4720 δραχμῶν ἐκ μεταφορᾶς τοῦ παλαιοῦ τῆς σελίδος 17, εἰς δὲ τὴν πίστωσιν τὸ ποσὸν τῶν 750 δρχ. ἐκ μεταφορᾶς τῆς αὐτῆς σελίδος 17 καὶ ἀκολούθως ἐργαζόμεθα εἰς νέον λογαριασμὸν ὡς συνήθως.

Δοῦναι ***Ν. Ἀντωνίου (Ὁδὸς...) σελὶς 25*** ***Λαβεῖν***

1916			Δρχ.	Λ.	1916			Δρχ.	Λ.
Μαρτ.	30	Ἐκ μεταφορ. (σελ. 17)	4720	—	Μαρτ.	30	Ἐκ μεταφορ. (σελ. 17)	750	—
Ἀπρ.	10	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	150	—	Ἀπρ.	15	Μετρητάς	300	—
»	13	Ἀξίαν ἐμπορευμάτων	630	—	»	20	Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν μας	500	—

Ἀσκήσεις

1) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν τὸν Δ. Ξένον (σελ. 227, *Ἀσκήσεις*) σχηματίσατε τὸν λογαριασμὸν αὐτοῦ καὶ περατώσατε αὐτόν.

2) Σχηματίσατε τὸν λογαριασμὸν Πυρρῆ καὶ Σία ἐκ τῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι ἀπαβλέπουν αὐτοὺς (σελ. 227, *Ἀσκήσεις*) καὶ μεταφέρετε αὐτὸν εἰς νέον α΄) χωρὶς νὰ κλεισθῇ β΄) ἀφοῦ προηγουμένως κλείσετε αὐτόν.

3) *Συγκέντρωσις λογαριασμῶν*. Διὰ διαφόρους ἀνάγκας τῆς Λογιστικῆς δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ συγκεντρώσωμεν πολλοὺς λογαριασμοὺς εἰς ἕνα.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τοὺς κάτωθι λογαριασμοὺς Α, Β, Γ μὲ διάφορα ποσὰ εἰς χρέωσιν καὶ πίστωσιν αὐτῶν.

Α		Β		Γ	
1500	650	800	1200	1850	2100

ἤτοι αἱ μὲν χρεώσεις των εἶνε ἀντιστοίχως 1500 δρ., 800 δρ., 1850 δρ., αἱ δὲ πιστώσεις αὐτῶν 650 δρ., 1200 δρ. Δυνάμεθα νὰ συγκεντρώσωμεν τοὺς τρεῖς αὐτοὺς λογαριασμοὺς εἰς ἕνα, ἔστω εἰς τὸν Δ. Ἤτοι τὰς τρεῖς χρεώσεις εἰς μίαν μόνην, ὡς καὶ τὰς τρεῖς πιστώσεις εἰς μίαν, ὡς κάτωθι φαίνεται.

	Δ	
Α.	1500	650
Β.	700	1200
Γ.	1850	2100
	4050	3950

Διὰ τῆς συγκεντρώσεως αὐτῆς τὰ διάφορα ποσά, τὰ διεσπαρμένα εἰς διαφόρους λογαριασμούς, συγκεντροῦνται εἰς ἕνα μόνον λογαριασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ποσὸν τῆς γενικῆς χρεώσεως καὶ πιστώσεως μένει ἀμετάβλητον.

4) Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν μεταξὺ τῶν Σπ. Βαρβιτσιώτου (ἐν Ἀθήναις) καὶ Ν. Μέρμηγκα (ἐν Πειραιεῖ) νὰ συνταχθοῦν α΄) ὁ λογαριασμὸς τοῦ πρώτου εἰς τὰ βιβλία τοῦ δευτέρου· β΄) ὁ λογαριασμὸς τοῦ δευτέρου εἰς τὰ βιβλία τοῦ πρώτου· γ΄) νὰ κλεισθοῦν καὶ οἱ δύο λογαριασμοὶ αὐτοὶ τὴν 30ὴν Ἀπριλίου καὶ νὰ μεταφερθοῦν εἰς νέους τοιούτους.

1916 Ἰανουαρίου 1. Ὁ Ν. Μέρμηγγας ἐδικαιοῦτο νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ Σπ. Βαρβιτσιώτου ὑπόλοιπον ἐκ προηγουμένου λογαριασμοῦ δρ. 2800,40.

1916 Ἰανουαρίου 4. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἔλαβε παρὰ τοῦ Ν.

Μέρμηγκα ἐμπορεύματα ἀξίας 140,80
1916 Ἰανουαρίου 10. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἀπέστειλεν εἰς τὸν Ν. Μέρμηγκαν γραμμάτιον λῆγον τῇ 1 Σεπτεμβρίου δρ. 500.
1916 Φεβρουαρίου 6. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 450.
1916 Μαρτίου 7. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 670,20.
1916 Μαρτίου 26. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἐπλήρωσεν εἰς Ν. Μέρμηγκαν μετρητὰς δρ. 500.
1919 Ἀπριλίου 3. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἐπλήρωσεν εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν συναλλαγματικὴν εἰς βάρος τοῦ Ν. Μέρμηγκα δρ. 250.
1916 Ἀπριλίου 12. Ὁ Ν. Μέρμηγκας ἀπέστειλεν εἰς Σπ. Βαρβιτσιώτην ἐμπορεύματα ἀξίας δρ. 680,20.
1916 Ἀπριλίου 21. Ὁ Σπ. Βαρβιτσιώτης ἀπέστειλεν εἰς Ν. Μέρμηγκαν γραμμάτιον εἰς βάρος ἑαυτοῦ δρ. 530.

Ἐνεργητικόν, Παθητικόν, Κεφάλαιον.

290. Πᾶς ἔμπορος δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς μίαν τῶν ἑξῆς κατηγοριῶν· 1) ἐπαρκεῖ διὰ τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων πρὸς διεξαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν αὐτοῦ ἐπιχειρήσεων· 2) ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων ἀναγκάζεται νὰ προστρέξῃ καὶ εἰς ξένα τοιαῦτα κατὰ τὴν ἀρχὴν ἢ κατὰ τὴν περίοδον τῶν ἐπιχειρήσεών του· 3) διεξάγει τὰς ἐπιχειρήσεις του διὰ ξένων μόνον κεφαλαίων.

Κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διαχειρίζεται ἀποτελεῖται ἀπὸ μετρητὰ χρήματα, γραμμάτια, ἀκίνητα, ἐμπορεύματα ἐν γένει, ἔπιπλα ἐργαλεῖα κλπ.

Ἐνεργητικὸν ἑνὸς ἐμπόρου καλεῖται τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα αὐτὸς κατέχει ὡς μετρητά, ἐμπορεύματα, ἔπιπλα, συναλλαγματικὰς κλπ. καθὼς καὶ τὰ χρεωστικὰ ὑπόλοιπα τῶν εἰς τὰ βιβλία του λογαριασμῶν ἄλλων.

291. *Παθητικὸν* ἑνὸς ἐμπόρου καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα αὐτὸς ὀφείλει εἰς ἄλλους ὑπὸ οἱανδήποτε μορφήν.

292. *Κεφάλαιον* ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχὴν καλεῖται ἡ διαφορὰ τοῦ Ἐνεργητικοῦ του κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Παθητικοῦ του.

Κατὰ ταῦτα, τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχὴν παριστάνει τὴν καθαρὰν περιουσίαν του, ἡ ὁποία κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν εἶνε διατεθειμένη εἰς τὰς ἐμπορικάς του ἐπιχειρήσεις.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐπαρκῇ διὰ τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων καὶ οὐδὲν ὀφείλει εἰς τρίτους, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων ἔχῃ προστρέξει καὶ εἰς ξένα τοιαῦτα, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρος μόνον τοῦ ἐνεργητικοῦ του, τοῦ ἄλλου ὀφειλομένου εἰς ἄλλους. Ὅταν δὲ διεξάγῃ τὰς ἐπιχειρήσεις του διὰ ξένων μόνον κεφαλαίων, ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του ὀφείλει εἰς ἄλλους καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει κεφάλαιον.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ Ἐνεργητικὸν καὶ παθητικόν, καταστρώνομεν αὐτὰ εἰς πίνακα, διῃρημένον εἰς δύο μέρη κατὰ τὸν τύπον τοῦ λογαριασμοῦ. Τὸ μὲν ἐνεργητικὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν χρέωσιν, τὸ δὲ Παθητικὸν πρὸς τὴν πίστωσιν, ὡς κάτωθι φαίνεται.

Ἐνεργητικὸν	Δρχ.	Λ.	*Παθητικὸν*	Δρχ.	Λ.
Μετρητὰ	1000		Πιστωτικὰ		
Ἐμπορεύματα	6000	—	ὑπόλοιπα λογαριασμῶν	6000	—
Ἀκίνητα	20000	—	Κεφάλαιον	28000	—
Χρεωστικὰ					
ὑπόλ. λογαριασμῶν	7000	—			
Ἐν ὅλῳ	34000		Ἐν ὅλῳ	34000	—

Αἱ 34000 δρ. (ἀριστερὰ) παριστάνουν τὸ Ἐνεργητικόν, ἀποτελούμενον ἀπὸ διαφόρους ἀξίας καὶ ποσὰ ὀφειλόμενα ὑπὸ τρίτων, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον διαχειριζόμεθα. Αἱ 6000 δρ. παριστάνουν τὸ Παθητικὸν ἤτοι ὅσα ποσὰ ὀφείλομεν εἰς διάφορα πρόσωπα. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ἐνεργητικοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ Παθητικόν, θέλομεν εὕρει τὸ καθαρὸν Κεφάλαιον· ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν 34000—6000 εὑρίσκομεν κεφάλαιον ἐκ δραχμῶν 28000.

Διὰ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, θεωρούμενον ὡς λογαριασμόν, γράφομεν εἰς τὸ μέρος τοῦ Παθητικοῦ τὸ Κεφάλαιον τῶν 28000 δρχ., ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ τελικὸν ἄθροισμα γράφομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ Ἐνεργητικοῦ, ὡς καὶ εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα φαίνεται.

Ἐὰν οὐδὲν Παθητικὸν ἔχωμεν, ἀλλὰ μόνον Ἐνεργητικόν, τότε αὐτὸ εἶνε καὶ τὸ Κεφάλαιον, τὴν δὲ θέσιν τοῦ Παθητικοῦ λαμβάνει τὸ Κεφάλαιον. Ἐὰν συμβαίνῃ τοὐναντίον, τότε τὸ Κεφάλαιον λαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ Ἐνεργητικοῦ. Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε ἴσον πρὸς τὸ Παθητικόν, οὐδὲν Κεφάλαιον μένει ὑπὲρ τοῦ ἐμπόρου. Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε μικρότερον τοῦ Παθητικοῦ, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος εἶνε χρεώστης τῆς διαφορᾶς τοῦ Ἐνεργητικοῦ ἀπὸ τοῦ Παθητικοῦ.

Π. χ. ἐὰν τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1915 ἡ κατάστασις τοῦ Νικ. Δαρίδα ἦτο ὡς ἑξῆς:

Ἐνεργητικὸν	δρ.	10852,80
Παθητικὸν	»	15800

συνάγομεν ὅτι ἦτο χρεώστης τῆς διαφορᾶς 15 800—10 852,80=4947,20 δρχ.

Κέρδη, Ζημίαι.

293. Ἔστω ὅτι κατὰ τὸ τέλος μὲν τοῦ ἔτους 1914 τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἀνήρχετο εἰς 30 850 δραχ. εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ 1915 ἀνήρχετο εἰς 42 500 δρχ., ηὐξήθη δηλ. τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ ἐν διαστήματι ἑνὸς ἔτους κατὰ τὴν διαφορὰν 42 500—30 850=11 650 δραχμάς. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν δραχμῶν λέγεται *κέρδος* τοῦ ἐμπόρου τούτου κατὰ τὸ ἔτος 1915.

Ἐν γένει, καλοῦμεν *κέρδος* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν αὔξησιν τοῦ Κεφαλαίου τοῦ ἐμπόρου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος μέχρι τέλους αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιαύτη.

294. Τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἦτο κατὰ τὴν 30ὴν Ἰουνίου 1915 δραχμαὶ 25 700, κατὰ δὲ τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1816 ἦτο 20 000 δρχ., δηλαδὴ κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἑξαμηνίας ἠλαττώθη τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ κατὰ 5 700 δραχμὰς ἡ διαφορὰ αὕτη λέγεται *ζημία* τοῦ ἐν λόγῳ ἐμπόρου κατὰ τὴν ἑξαμηνίαν ταύτην.

Ἐν γένει, καλοῦμεν *ζημίαν* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν ἐλάττωσιν, τὴν ὁποίαν παθαίνει τὸ Κεφάλαιον αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τέλους τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑνὸς χρονικοῦ ὡρισμένου διαστήματος τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου εἶνε τὸ αὐτό, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος δὲν ἔχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν.

Ἀπογραφή, Ἰσολογισμός.

295. *Ἀπογραφὴ* καλεῖται πίναξ περιέχων λεπτομερῶς ἀναγεγραμμένα κατ' εἶδος, ποσότητα καὶ ἀξίαν τὰ μέρη τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ παθητικοῦ.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τῆς Ἀπογραφῆς εἶνε ἀνάγκη νὰ γίνῃ ἀκριβὴς καὶ λεπτομερὴς καταγραφή· 1) πάντων τῶν ὑπαρχόντων ἐμπορευμάτων· 2) τῶν ὑπαρχόντων ἐπίπλων· 3) τῶν μετρητῶν χρημάτων εἰς τὸ ταμεῖον· 4) τῶν ὑπαρχόντων πρὸς εἴσπραξιν γραμματίων· 5) τῶν χρεωστικῶν ὑπολοίπων τῶν λογαριασμῶν, χὴν αὐτὴν εἶνε διατεθειμένη εἰς τὰς ἐμπορικάς του ἐπιχειρήσεις.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐπαρκῇ διὰ τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων καὶ οὐδὲν ὀφείλει εἰς τρίτους, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του.

Ὅταν ὁ ἔμπορος ἐκτὸς τῶν ἰδικῶν του κεφαλαίων ἔχῃ προστρέξει καὶ εἰς ξένα τοιαῦτα, τὸ κεφάλαιόν του ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρος μόνον τοῦ ἐνεργητικοῦ του, τοῦ ἄλλου ὀφειλομένου εἰς ἄλλους. Ὅταν δὲ διεξάγῃ τὰς ἐπιχειρήσεις του διὰ ξένων μόνον κεφαλαίων, ὁλόκληρον τὸ Ἐνεργητικόν του ὀφείλει εἰς ἄλλους καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει κεφάλαιον.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ Ἐνεργητικὸν καὶ παθητικόν, καταστρώνομεν αὐτὰ εἰς πίνακα, διῃρημένον εἰς δύο μέρη κατὰ τὸν τύπον τοῦ λογαριασμοῦ. Τὸ μὲν ἐνεργητικὸν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν χρέωσιν, τὸ δὲ Παθητικὸν πρὸς τὴν πίστωσιν, ὡς κάτωθι φαίνεται.

Ἐνεργητικὸν	Δρχ.	Λ.	*Παθητικὸν*	Δρχ.	Λ.
Μετρητά	1000		Πιστωτικά		
Ἐμπορεύματα	6000	—	ὑπόλοιπα λογαρ)σμῶν	6000	—
Ἀκίνητα	20000	—	Κεφάλαιον	28000	—
Χρεωστικά					
ὑπόλ. λογαριασμῶν	7000	—			
Ἐν ὅλῳ	34000		Ἐν ὅλῳ	34000	—

Αἱ 34000 δρ. (ἀριστερὰ) παριστάνουν τὸ Ἐνεργητικόν, ἀποτελούμενον ἀπὸ διαφόρους ἀξίας καὶ ποσὰ ὀφειλόμενα ὑπὸ τρίτων, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον διαχειριζόμεθα. Αἱ 6000 δρ. παριστάνουν τὸ Παθητικόν ἤτοι ὅσα ποσὰ ὀφείλομεν εἰς διάφορα πρόσωπα. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ἐνεργητικοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ Παθητικόν, θέλομεν εὕρει τὸ καθαρὸν Κεφάλαιον· ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν 34000—6000 εὑρίσκομεν κεφάλαιον ἐκ δραχμῶν 28000.

Διὰ νὰ ἐξισώσωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, θεωρούμενον ὡς λογαριασμόν, γράφομεν εἰς τὸ μέρος τοῦ Παθητικοῦ τὸ Κεφάλαιον τῶν 28000 δρχ., ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ τελικὸν ἄθροισμα γράφομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μετὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ Ἐνεργητικοῦ, ὡς καὶ εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα φαίνεται.

Ἐὰν οὐδὲν Παθητικὸν ἔχωμεν, ἀλλὰ μόνον Ἐνεργητικόν, τότε αὐτὸ εἶνε καὶ τὸ Κεφάλαιον, τὴν δὲ θέσιν τοῦ Παθητικοῦ λαμβάνει τὸ Κεφάλαιον. Ἐὰν συμβαίνῃ τοὐναντίον, τότε τὸ Κεφάλαιον λαμβάνει τὴν θέσιν τοῦ Ἐνεργητικοῦ. Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε ἴσον πρὸς τὸ Παθητικόν, οὐδὲν Κεφάλαιον μένει ὑπὲρ τοῦ ἐμπόρου. Ἐὰν τὸ Ἐνεργητικὸν εἶνε μικρότερον τοῦ Παθητικοῦ, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος εἶνε χρεώστης τῆς διαφορᾶς τοῦ Ἐνεργητικοῦ ἀπὸ τοῦ Παθητικοῦ.

Π. χ. ἐὰν τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1915 ἡ κατάστασις τοῦ Νικ. Δαρίδα ἦτο ὡς ἑξῆς:

Ἐνεργητικὸν δρ. 10852,80
Παθητικὸν » 15800

συνάγομεν ὅτι ἦτο χρεώστης τῆς διαφορᾶς 15 800—10 852,80= 4947 20 δρχ.

Κέρδη, Ζημίαι.

293. Ἔστω ὅτι κατὰ τὸ τέλος μὲν τοῦ ἔτους 1914 τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἀνήρχετο εἰς 30 850 δραχ. εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ 1915 ἀνήρχετο εἰς 42 500 δρχ., ηὐξήθη δηλ. τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ ἐν διαστήματι ἑνὸς ἔτους κατὰ τὴν διαφορὰν 42 500—30 850=11 650 δραχμάς. Τὸ ποσὸν αὐτὸ τῶν δραχμῶν λέγεται *κέρδος* τοῦ ἐμπόρου τούτου κατὰ τὸ ἔτος 1915.

Ἐν γένει, καλοῦμεν *κέρδος* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν αὔξησιν τοῦ Κεφαλαίου τοῦ ἐμπόρου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος μέχρι τέλους αὐτοῦ, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιαύτη.

294. Τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου ἦτο κατὰ τὴν 30ὴν Ἰουνίου 1915 δραχμαὶ 25 700, κατὰ δὲ τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1816 ἦτο 20 000 δρχ., δηλαδὴ κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἑξαμηνίας ἠλαττώθη τὸ Κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου αὐτοῦ κατὰ 5 700 δραχμὰς ἡ διαφορὰ αὕτη λέγεται *ζημία* τοῦ ἐν λόγῳ ἐμπόρου κατὰ τὴν ἑξαμηνίαν ταύτην.

Ἐν γένει, καλοῦμεν *ζημίαν* ἑνὸς ἐμπόρου εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα τὴν ἐλάττωσιν, τὴν ὁποίαν παθαίνει τὸ Κεφάλαιον αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τέλους τοῦ χρονικοῦ τούτου διαστήματος.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑνὸς χρονικοῦ ὡρισμένου διαστήματος τὸ Κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου εἶνε τὸ αὐτό, λέγομεν ὅτι ὁ ἔμπορος δὲν ἔχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν.

Ἀπογραφή, Ἰσολογισμός.

295. *Ἀπογραφὴ* καλεῖται πίναξ περιέχων λεπτομερῶς ἀναγεγραμμένα κατ' εἶδος, ποσότητα καὶ ἀξίαν τὰ μέρη τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ παθητικοῦ.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τῆς Ἀπογραφῆς εἶνε ἀνάγκη νὰ γίνῃ ἀκριβὴς καὶ λεπτομερὴς καταγραφή· 1) πάντων τῶν ὑπαρχόντων ἐμπορευμάτων· 2) τῶν ὑπαρχόντων ἐπίπλων· 3) τῶν μετρητῶν χρημάτων εἰς τὸ ταμεῖον· 4) τῶν ὑπαρχόντων πρὸς εἴσπραξιν γραμματίων· 5) τῶν χρεωστικῶν ὑπολοίπων τῶν λογαριασμῶν, ἐπίσης τῶν πιστωτικῶν ὑπολοίπων καὶ τῶν πληρωτέων γραμματίων.

Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐργασίας αὐτῆς καταρτίζομεν ἀκολούθως τὸν πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰ μέρη τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ τοῦ Παθητικοῦ.

Ὡς εἶνε γνωστόν, ἡ διαφορὰ τοῦ Παθητικοῦ ἀπὸ τοῦ Ἐνεργητικοῦ δίδει τὸ Κεφάλαιον. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ λέγωμεν *Ἀπογραφὴν* τὴν ὅλην ἐργασίαν, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸ κεφάλαιον ἑνὸς ἐμπόρου κατά τινα ἐποχήν.

Ὅτι ἡ ἀπογραφὴ ἔχει σπουδαίαν σημασίαν διὰ πάντα ἔμπορον εἶνε φανερόν. Διότι δι' αὐτῆς γνωρίζει ὁ ἔμπορος ὄχι μόνον τὸ Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον αὐτὸς ἔχει κατά τινα ἐποχήν, ἀλλὰ καὶ τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον τοῦτο ἀποτελεῖται. Ἐξ ἄλλου διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν Ἀπογραφῶν μεταξὺ αὐτῶν εὑρίσκει ὁ ἔμπορος ἂν ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ παρεμπῖπτον μεταξὺ τῶν Ἀπογραφῶν. Διὰ τοῦτο ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ Νόμου, ἵνα ὁ ἔμπορος συντάσσῃ Ἀπογραφήν· 1) κατὰ τὴν ἵδρυσιν τοῦ ἐμπορικοῦ αὐτοῦ καταστήματος· 2) κατὰ τὸ τέλος καθενὸς ἔτους, ἢ ἑξαμηνίας· 3) εἰς ἄλλας ἐκτάκτους περιστάσεις· π. χ. ἐν περιπτώσει θανάτου τοῦ ἐμπόρου, πτωχεύσεως αὐτοῦ, διαλύσεως ἢ διαδοχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως κλπ

296. Ἐπειδὴ ἡ ἀπογραφὴ καταλαμβάνει συνήθως πολλὰς σελίδας, διότι εἶνε λεπτομερής, διὰ τοῦτο συντάσσεται μεθοδικὴ περίληψις αὐτῆς, ἡ ὁποία καλεῖται *Ἰσολογισμός*.

Ὁ Ἰσολογισμὸς εἶνε πίναξ, ἀποτελούμενος ἐκ δύο μερῶν. Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος φέρει τὸν τίτλον «*Ἐνεργητικόν*», εἰς δὲ τὸν δεξιὸν τὸν τίτλον «*Παθητικόν*». Εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέρος ἐγγράφομεν ἐν περιλήψει πᾶν ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸ Ἐνεργητικόν, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πᾶν ὅ,τι ἀνήκει εἰς τὸ Παθητικόν.

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Ἰσολογισμοῦ, προσθέτοντες εἰς τὸ Παθητικὸν αὐτοῦ τὴν διαφορὰν τοῦ Ἐνεργητικοῦ καὶ Παθητικοῦ, ἤτοι τὸ Κεφάλαιον· ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ποσὰ τῶν δύο μερῶν τοῦ Ἰσολογισμοῦ χωριστὰ καθενός, καὶ γράφομεν τὰ ἴσα ἀθροίσματα εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, σύρομεν δ' ὑποκάτω διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν.

Παράδειγμα. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς Ἀπογραφῆς ἔχει ὡς ἑξῆς:

Εὑρέθησαν ἐμπορεύματα ἀπώλητα	Δρ. 4000.
Ἡ σημερινὴ ἀξία τῶν ἐπίπλων εἶνε ἠλαττωμένη τῆς παλαιᾶς των ἀξίας, ἕνεκα τῆς φθορᾶς τὴν ὁποίαν ἔπαθον κατὰ 5 %. Ἤτοι	Δρ. 2375.
Εἰς τὸ χαρτοφυλάκιον ὑπάρχει ἓν γραμμάτιον ἀποδοχῆς Κ. Θεοδώρου, λῆγον τὴν 15 Ἰανουαρίου	Δρ. 270.
Εἰς τὸ ταμεῖον ὑπάρχουν μετρητὰ	Δρ. 5400.

Ἐκ τοῦ βιβλίου λογαριασμῶν ἔχομεν τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα

Χρεῶσται

Δ. Μαρκίδης	Δρ.	100
Π. Μανοῦσος	»	720
Κ. Θανόπουλος	»	2060
Δ. Πετρίδης	»	100

Πιστωταὶ

Κ. Γεωργιάδης	Δρ.	950
Μ. Λάμπρος	»	2500
Ὑπάρχει ἓν γραμμάτιον εἰς βάρος μας ἐν κυκλοφορίᾳ	»	600

Ἐκ τῶν ἄνω στοιχείων συντάσσομεν τὴν Ἀπογραφήν, ἀναγράφοντες εἰς ἰδιαίτερον μέρος τὰς εἰς τὸ Ἐνεργητικὸν ἀνηκούσας ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων καὶ εἰς ἄλλο τὰς εἰς τὸ Παθητικὸν ἀλλὰ μετὰ τῆς αὐτῆς λεπτομερείας, ὡς ἄνω.

Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἀπογραφῆς καὶ ὑποκάτω αὐτῆς κάμνομεν τὴν περίληψίν της, ἤτοι τὸν Ἰσολογισμόν, τὸν ὁποῖον καὶ ἐξισοῦμεν καθὼς φαίνεται καὶ εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

ΑΠΟΓΡΑΦΗ ΤΗΣ 31 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1915

Α΄. Ἐνεργητικὸν

	Δρ.	Λ.
Ἐμπορεύματα εὑρεθέντα ἀπώλητα	4000	—
Ἀξία ἐπίπλων σημερινή, ἠλαττωμένη τῆς παλαιᾶς τοιαύτης ἕνεκα φθορᾶς κατὰ 5%$_0$	2375	—
Γραμμάτιον ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ ἀποδοχῆς Κ. Θεωδώρου, λῆγον τῃ 15 Ἰανουαρίου	270	—
Μετρητὰ ἐν τῷ ταμείῳ	5400	—
Χρεῶσται		
Δ. Μαρκίδης	100	—
Π. Μανοῦσος	720	—
Κ. Θανόπουλος	2060	—
Δ. Πετρίδης	100	—
Ἐν ὅλῳ	150.5	

Β΄ Παθητικὸν

	Δρ.	Λ.
Πιστωταὶ		
Κ. Γεωργιάδης	950	—
Μ. Λάμπρος	2500	—
Γραμμάτιον εἰς βάρος μας ἐν κυκλοφορίᾳ	600	—
	4050	—
Κεφάλαιον σημερινὸν	10975	—
Ἐν ὅλῳ	15025	—

Ἰσολογισμός.

Ἐνεργητικὸν	Δρ.	Λ.	*Παθητικὸν*	Δρ.	Λ.
Ἐμπορεύματα	4000	—	Γραμμάτια πληρωτέα	600	—
Ἔπιπλα	2375	—	Πιστωταὶ	3450	—
Μετρητὰ	5400	—	Κεφάλαιον	10975	—
Γραμμάτια εἰσπρακτέα	270	—			
Χρεῶσται	2980	—			
	15025	—		15025	—

Ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς συντάσσονται κατ᾽ ἀρχὰς προχείρως ἐπὶ προχείρου χάρτου καὶ ἀκολούθως μεθοδικῶς, καθὼς ἀνωτέρω γράφονται δὲ εἰς εἰδικὸν βιβλίον, τὸ ὁποῖον καλεῖται «*βιβλίον Ἀπογραφῶν*»

Πᾶς ἔμπορος ὀφείλει νὰ γράψῃ ὑπεράνω τῆς Ἀπογραφῆς ἢ κάτω τοῦ Ἰσολογισμοῦ, τὴν χρονολογίαν κατὰ τὴν ὁποίαν ταῦτα ἔγιναν, νὰ βεβαιώνῃ δ' ὅτι ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς συνετάχθησαν ἐπὶ τῇ βάσει καὶ συμφώνως πρὸς τὰ λογιστικὰ αὐτοῦ βιβλία, θέτων προσέτι τὴν ὑπογραφήν του εἰς τὸ τέλος.

Λογιστικὰ βιβλία.

297. Καλοῦνται *λογιστικὰ βιβλία* ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἔμπορος ἐγγράφει μεθοδικῶς τὰς διαφόρους ἐμπορικὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἐνεργεῖ καθ' ἡμέραν, καὶ διὰ τῶν ὁποίων δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίσῃ τὴν οἰκονομικήν του κατάστασιν.

Τὰ λογιστικὰ βιβλία χρησιμεύουν ἀκόμη, διὰ ν' ἀποδεικνύῃ ὁ ἔμπορος τὰς ὑπ' αὐτοῦ ἐνεργουμένας δικαίας ἐμπορικὰς πράξεις. Διὰ ταῦτα ὑποχρεοῦται ὁ ἔμπορος ὑπὸ τοῦ Νόμου, ὄχι μόνον νὰ τηρῇ τοιαῦτα βιβλία, ἀλλὰ καὶ νὰ τηρῇ καθ' ὡρισμένας διατυπώσεις· πρὸς δὲ τάσσεται συνέπεια τῆς μὴ τηρήσεως των κατὰ τὰς διατυπώσεις ταύτας. 1) ὅτι δὲν δύναται νὰ κάμῃ χρῆσιν τοῦ πλεονεκτήματος τοῦ ν' ἀποδεικνύῃ δι' αὐτῶν τὰς δικαιοπραξίας του, ἐὰν τοῦ παρουσιαθῇ ἀνάγκη· 2) ὅτι δύναται νὰ κηρυχθῇ ἔνοχος δολίας χρεωκοπίας καὶ ἐν περιπτώσει κατὰ τὴν ὁποίαν τοῦ συμβῇ τοιαύτη ὄχι δολία ἴσως.

Τὰ ὑπὸ τοῦ Νόμου ὑποχρεωτικὰ βιβλία εἶνε τὰ ἑξῆς τρία· τὸ *Ἡμερολόγιον*, τὸ βιβλίον τῶν *Ἀπογραφῶν*, τὸ τῆς *Ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν*. Ἐκτὸς τούτων τηροῦν οἱ ἔμποροι καὶ ἄλλα βιβλία προαιρετικῶς, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς καὶ ὁ τύπος ποικίλει ἀναλόγως τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ τῶν ἀναγκῶν τῆς λογιστικῆς. Τοιαῦτα εἶνε π.χ. τὸ «*Πρόχειρον*», τὸ «*Καθολικὸν*» τὸ «*Ταμεῖον*» καὶ ἄλλα.

Τὰ ὑποχρεωτικὰ βιβλία πρέπει νὰ τηροῦνται κατὰ τὰς ἑξῆς νομίμους διατάξεις· 1) πρέπει πρὸ τῆς χρήσεώς των νὰ εἶνε βιβλιοδετημένα, ἠριθμημένα καὶ μονογραφημένα ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας Ἀρχῆς (τοῦ προέδρου τῶν Πρωτοδικῶν, ἢ τοῦ εἰρηνοδίκου)· 2) πρέπει νὰ τηροῦνται εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν· 3) αἱ διάφοροι πράξεις νὰ ἐγγράφωνται εἰς αὐτὰ κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἄνευ κενῶν διαστημάτων, διορθώσεων, παρεγγραφῶν, προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως φύλλων· 4) ἐὰν συμβῇ λάθος τι, τοῦτο διορθώνεται διὰ νέας ἐγγραφῆς καταλλήλου, γινομένης κατὰ τὴν ἡμέραν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνακαλύπτεται τοῦτο· 5) πρέπει νὰ εἶνε νομίμως χαρτοσημασμένα. Μόνον τὸ βιβλίον τῆς ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν δὲν ὑπόκειται εἰς τὰς διατυπώσεις αὐτάς, ἐπειδὴ δύναται νὰ ἐξελεγχθῇ διὰ τῶν ἀνταλλασσομένων ἐπιστολῶν.

Πρόχειρον.

298. *Πρόχειρον* καλεῖται τὸ βιβλίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος σημειώνει προχείρως τὰς εἰς τὸ κατάστημά του καθ' ἡμέραν διεξαγομένας πράξεις κατὰ τὴν χρονολογικὴν σειρὰν κατὰ τὴν ὁποίαν γίνονται. Τὸ βιβλίον τοῦτο τηρεῖται κατὰ θέλησιν, ἀρκεῖ νὰ ἐξιστορῆται εἰς αὐτὸ σαφῶς καθεμία πρᾶξις. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ τύπος αὐτοῦ ποικίλει εἰς τοὺς διαφόρους οἴκους. Ἐν τούτοις εἰς πάντα τύπον Προχείρου, σχεδὸν πάντοτε, καθεμία ἐγγραφομένη πρᾶξις συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἐγένετο, καὶ φέρει ἕνα αὔξοντα ἀριθμὸν πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἄλλων τοιούτων. Ὁ μᾶλλον ἐν χρήσει τύπος προχείρου εἶνε ὁ κάτωθι.

Τῇ 1ῃ Ὀκτωβρίου 1915.

1) Κατέθεσα κεφάλαιον εἰς μετρητὰ 20000.

——— τῇ αὐτῇ ———

2) Ἠγόρασα διάφορα ἔπιπλα, ὡς φαίνεται λεπτομερῶς εἰς τὸν σχετικὸν λογαριασμὸν ὑπ' ἀριθ. 1 . . . . Δρ. 2450

——— τῇ αὐτῇ ———

3) Ἠγόρασα διάφορα εἴδη γραφικῆς ὕλης Δρ. 124

——— τῇ 2ᾳ ἰδίου ———

4) Ἠγόρασα ἀπὸ Πυρρῆν καὶ Σίαν 20 βαρέλια ἐλαίου 3240 ὀκ. πρὸς 1,15 τὴν ὀκᾶν . . . . Δρ. 3726

——— τῇ αὐτῇ ———

. . . .

Εἰς μεγάλους ἐμπορικοὺς οἴκους τὸ Πρόχειρον ἀναπληροῦται συνήθως ὑπὸ διαφόρων προχείρων βιβλίων, καθὲν τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ἰδιαίτερον τμῆμα ἐργασίας. Οὕτω πρόχειρα βιβλία εἰς πλεῖστα τῶν ἐπιχειρήσεων εἶνε τὰ ἑξῆς π. χ.

Βιβλίον ταμείου διὰ τὰς εἰσπράξεις καὶ τὰς πληρωμάς.

Βιβλίον ἀγορῶν διὰ τὰς ἀγορὰς ἐμπορευμάτων.

Βιβλίον πωλήσεων διὰ τὰς πωλήσεις ἐμπορευμάτων.

Βιβλίον γραμματίων εἰσπρακτέων καὶ πληρωτέων, διὰ τὰ λαμβανόμενα καὶ διδόμενα γραμμάτια.

Βιβλίον ἐξόδων διὰ τὰ διάφορα ἔξοδα.

Βιβλίον διαφόρων πράξεων διὰ τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι εἰς κανὲν τῶν ἀνωτέρω βιβλίων δὲν δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν.

Ἡμερολόγιον.

299. Τὸ *Ἡμερολόγιον* εἶναι οὐσιωδέστερον βιβλίον ἐξ ὅλων ὅσα ἔχει ὁ ἔμπορος. Εἰς αὐτὸ ἐγγράφονται καθ' ἡμέραν πᾶσαι αἱ πράξεις τοῦ ἐμπόρου, ἀγοραί, πωλήσεις, εἰσπράξεις, πληρωμαὶ κλπ , ὡς καὶ αἱ κατὰ μῆνα οἰκιακαί του δαπάναι.

Τὸ Ἡμερολόγιον συγκεντρώνει ὅλας, ἐν γένει, τὰς πράξεις τοῦ ἐμπόρου, τὰς ἐγγραφείσας εἰς τὰ πρόχειρα βιβλία καὶ εἰς ὁποιασδήποτε ἄλλας σημειώσεις, ἢ ἔγγραφα μεταφερομένας δὲ εἰς αὐτὸ ἡσύχως καὶ ἐπισταμένως.

Αἱ πράξεις αὗται διατυποῦνται εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ὑποδεικνύουν σαφῶς καὶ διὰ παχέων γραμμάτων τὸ πρόσωπον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ἡ πρᾶξις, καὶ τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ χρεωθῇ, ἢ νὰ πιστωθῇ. Ἂν π. χ. πωλήσωμεν τὴν 25 8]βρίου εἰς τὸν Πέτρον ἐμπορεύματα ἀξίας 200 δραχμῶν, θὰ σημειώσωμεν τοῦτο εἰς τὸ πρόχειρον καὶ θὰ μεταφέρωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον ὡς ἑξῆς·

———————————25 8]βρίου———————————

Εἰς τὸν Πέτρον πώλησιν ἐμπορευμάτων (λεπτομερῶς εἶδος, ποσόν, τιμήν . . . .) Δρ. 200

Ἂν εἰσπράξωμεν ἀπὸ τὸν Ἰωάννην τὴν αὐτὴν ἡμέραν 150 δραχμάς, θὰ σημειώσωμεν τοῦτο εἰς τὸ Πρόχειρον, καὶ θὰ μεταφέρωμεν τὴν πρᾶξιν ταύτην εἰς τὸ Ἡμερολόγιον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· ἤτοι

———————————— τῇ αὐτῇ ————————————

Ἀπὸ Ἰωάννην μετρητὰς Δρ. 150.

Μεθοδικώτερον ὅμως μεταφέρονται αἱ πράξεις ἐκ τοῦ Προχείρου εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, ἐὰν εἰς ὡρισμένην στήλην εἰς αὐτὸ γράφωμεν αὔξοντα ἀριθμὸν τῆς πράξεως, ὡς εἰς τὸ Πρόχειρον διὰ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς, πρὸς δὲ εἰς ἄλλην στήλην τὴν σελίδα τοῦ Καθολικοῦ, ἢ τοῦ Ταμείου, εἰς τὴν ὁποίαν μεταφέρεται ἀκολούθως ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου. Τὴν τοιαύτην διάταξιν παρέχει τὸ κατωτέρω εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑπομένης σελίδος ὑπόδειγμα Ἡμερολογίου.

Σελὶς 1. *Ἡμερολόγιον*

1	Καθ. 3	2 Ὀκτωβρίου 1915. Εἰς Κ. Γεωργιάδην ἀξίαν τιμολ. (Δοῦναι)	1600	
		» » » ἐμέτρησεν ἀμέσως (Λαβεῖν) 4 ἰδίου.	1000	
2	Καθ. 4	Ἀπὸ Δ. Μαρκίδην (Λαβεῖν) ἀξίαν ἐμπορευμάτων κατὰ τὸ τιμολόγιον 4	250	
3	Καθ. 2 Ταμ. 7	Ἐθνικὴ Τράπεζα διὰ κατάθεσίν μας σημερινὴν (Δοῦναι)	500	
4	Ταμ. 7	Λιανικὴ πώλησις σημερινὴ 4 ἰδίου	600	
5	Καθ.17	Δ. Παυλίδης (Λαβεῖν) διὰ σημερινήν του πληρωμὴν 4 ἰδίου	150	
6	Καθ.15	Ἀπὸ Κ Θεοδώρου (Λαβεῖν) διὰ γραμμάτιόν του εἰς βάρος του Τῇ αὐτῇ	360	
7	Ταμ. 7	Πώλησις σημερινὴ	450	

Σελὶς 12 *Ἡμερολόγιον*

			Δοῦναι			Λαβεῖν	
			Δρ.	Λ.	Δρ. Λ.	Δ.	Λ.
		Ἐκ μεταφορᾶς			12.600—	4842	50
		—— 3 Νοεμβρίου ——					
57	Καθ. 3	Κ. Γεωργιάδης ἀξίαν ἐμπορευμάτων	1540	80			
		—— τῇ αὐτῇ ——				400	—
58	Ταμ. 3	Πώλησις λιανικὴ σημερινὴ	450				
		—— τῇ αὐτῇ ——					
59	Καθ. 3 Ταμ. 3	Κ. Γεωργιάδης μετρητὰ				1000	—
		—— τῇ αὐτῇ ——					
60	Καθ. 2 Ταμ. 7	Ἐθνικὴ Τράπεζα δι᾽ ὅσα ἀπεσύραμεν σήμερον				10000	—

Ἡ μετάβασις ἀπὸ μιᾶς σελίδος εἰς τὴν ἄλλην εἰς τὸ Ἡμερολόγιον γίνεται ὡς ἑξῆς.

Εἰς τὸ τέλος τῆς στήλης τῶν δραχμῶν καὶ λεπτῶν γράφομεν τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὴν σελίδα γραμμένων ποσῶν καὶ πρὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτου τὰς λέξεις «*Εἰς μεταφοράν*»· εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἑπομένης σελίδος γράφομεν εἰς τὰς οἰκείας στήλας τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τῆς προηγουμένης καὶ πρὸ αὐτοῦ τὰς λέξεις «*Ἐκ μεταφορᾶς*», ἀκολούθως δ᾽ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐγγραφὴν εἰς τὴν σελίδα αὐτὴν ὡς συνήθως.

Αἱ λέξεις «*Δοῦναι*» καὶ «*Λαβεῖν*», αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται εἰς τὰς πράξεις τοῦ Ἡμερολογίου, φανερώνουν ὅτι ὁ λογαριασμὸς τοῦ ἀναφερομένου προσώπου θὰ χρεωθῇ ἢ θὰ πιστωθῇ μὲ τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν τῆς πράξεως, ἐὰν αὐτὴ φέρῃ τὸ «*Δοῦναι*» ἢ τὸ «*Λαβεῖν*». Αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι οὐδεμίαν τῶν λέξεων αὐτῶν φέρουν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, δὲν ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς προσωπικοῦ λογαριασμοῦ εἰς τὸ Καθολικόν.

Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς εἰς καθεμίαν πρᾶξιν ἀναγραφῆς τῆς λέξεως «*Δοῦναι*» ἢ «*Λαβεῖν*» εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, ἐὰν αὐταὶ ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς λογαριασμοῦ, διατίθεται ἐνίοτε εἰδικὴ στήλη διὰ τὴν ἀναγραφὴν τῶν ποσῶν τῶν πράξεων, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὸ λαβεῖν, εἰς ἄλλην δὲ στήλην ἀναγράφονται τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀπαιτοῦν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἑνὸς προσωπικοῦ λογαριασμοῦ. Κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἶνε διατεταγμένον τὸ δεύτερον εἰς τὴν σελίδα 241 ὑπόδειγμα Ἡμερολογίου.

Καθολικόν.

300. *Καθολικὸν* καλεῖται τὸ βιβλίον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος ἀνοίγει τοὺς λογαριασμοὺς τῶν διαφόρων προσώπων, μετὰ τῶν ὁποίων συναλάσσεται ἐμπορικῶς.

Εἰς τὸ καθολικὸν ἐγγράφονται αἱ διάφοροι πράξεις ὄχι κατὰ χρονολογικὴν σειράν, καθὼς εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, ἀλλὰ κατὰ λογαριασμούς, δηλαδὴ τὰ διάφορα ποσὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων μεταφέρονται ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὰς ἀντιστοίχους μερίδας (Χρέωσις· Πίστωσις) τῶν εἰς τὸ Καθολικὸν λογαριασμῶν.

Διὰ τὴν εὔκολον εὕρεσιν τῶν λογαριασμῶν εἰς τὸ Καθολικὸν γίνεται συνήθως χρῆσις βιβλιαρίου, τὸ ὁποῖον καλεῖται «*Εὑρετήριον*» καὶ περιέχει κατ' ἀλφαβητικὴν τάξιν τὰ ὀνόματα τῶν τιτλούχων τῶν διαφόρων λογαριασμῶν καὶ καθὲν μετὰ τῆς σελίδος, τὴν ὁποίαν κατέχει εἰς τὸ Καθολικόν. Αἱ σελίδες αὐταὶ εὑρίσκονται καὶ εἰς τὴν στήλην τῆς παραπομπῆς εἰς τὸ Ἡμερολόγιον.

Διὰ τὴν ταχεῖαν εὕρεσιν τῆς εἰς τὸ Ἡμερολόγιον πράξεως ἐκ τῆς ὁποίας προέρχεται ἡ εἴς τινα λογαριασμὸν τοῦ Καθολικοῦ συντόμως ἀναγραφομένη, ἀναγράφεται εἰς ἰδιαιτέραν στήλην τοῦ Καθολικοῦ ὁ αὔξων ἀριθμὸς τῆς πράξεως (ἢ ἄλλοτε ἡ σελὶς τοῦ Ἡμερολογίου) εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε γραμμένη ἡ πρᾶξις εἰς τὸ Ἡμερολόγιον.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικοὺς λογαριασμοὺς τοῦ Καθολικοῦ εἰς τοὺς ὁποίους ἔχουν μεταφερθῇ τὰ ποσὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (σελ. 241).

Σελὶς 3

Δοῦναι ***Κ. Γεωργιάδης*** ***Λαβεῖν***

1915	αὔξ.	Ἀξία ἐμπο-	Δρ.	Λ.	1915	αὔξ.	Μετρητάς	Δρ.	Λ.
8/βρ. 2	ἀριθ.	ρευμάτων	1600	—	8/βρ. 2	ἀριθ. 1		1000	—

Δοῦναι ***Δ. Παυλίδης*** ***Λαβεῖν***

1915	αὔξ.		Δρ.	Λ.	1915	Αὔξ.	Διὰ πληρω	Δρ.	Λ.
	ἀριθ. 1				8]βρ.12	ἀριθ. 5	μὴν του	150	—

Σελὶς 2

Δοῦναι		*Ἐθνικὴ Τράπεζα*					*Λαβεῖν*		
1915	αὔξ.	Διὰ κατάθε-	Δρ.	Λ.		Αὔξ.		Δρ.	Λ
8/βρ. 10	ἀριθ. 3	σίν μας	500	-		ἀριθ.			

Ἀσκήσεις.

Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων νὰ σχηματισθοῦν α΄) τὸ Ἡμερολόγιον β΄) οἱ προσωπικοὶ λογαριασμοὶ ἐκ τῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι θὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον.

1) 8/βρίου 1. Κατέθεσα κεφάλαιον εἰς μετρητὰ δρ. 10 000
2) Τῇ αὐτῇ. Ἠγόρασα διάφορα ἔπιπλα τοῦ καταστήματος τοῖς μετρητοῖς. » 2 500
3) 8/βρίου 2. Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ Κ. Γεωργιάδην διάφορα ἐμπορεύματα ὡς τὸ ὑπ᾽ ἀριθ. 1 τιμολόγιον του. » 1 600
4) 8/βρίου 4. Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς Δ. Μαρκίδην διάφορα ἐμπορεύματα. » 250
5) 8/βρίου 5. Ἐπλήρωσα διὰ γραφικὴν ὕλην. » 20
6) 8/βρίου 7. Ἐπλήρωσα δι᾽ ἐνοίκιον καταστήματος. » 200
7) 8/βρίου 10 Εἰσέπραξα ἀπὸ Μαρκίδην ἔναντι λογαριασμοῦ του. » 150
8) 8/βρίου 11. Ἀπεδέχθην δύο συναλλαγματικὰς εἰς διαταγὴν τοῦ Κ. Γεωργιάδου ὡς ἑξῆς:
Συναλλαγματικὴ λήξεως 30 Ν/βρίου δρ. 1000
Συναλλαγματικὴ λήξεως 5 Ἰανουαρ. δρ 600
Ἐν ὅλῳ » 1 600
9) 8/βρίου 12. Ἠγόρασα ἀπὸ Μ. Λάμπρον διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει ὡς τὸ ὑπ᾽ ἀριθ 1 τιμολόγιόν του. » 330
10) 8/βρίου 18. Ἐπώλησα εἰς διαφόρους διάφορα ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς. » 120
11) 8/βρίου 21. Ἔλαβον ἀπὸ τὸν Δ. Μαρκίδην συναλλαγματικὴν εἰς διαταγήν μου, λήγουσαν τῇ 7 Δ/βρίου. » 200
12) 8/βρίου 24. Ἐπώλησα εἰς Π. Μανοῦσον διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει. » 340
13) 8/βρίου 31. Ἐπλήρωσα τοὺς μισθοὺς τῶν ὑπαλλήλων μου διὰ τὸν μῆνα 8/βριον. » 180
14) Ν/βρίου 3. Ἐπώλησα εἰς Κ. Θεοδώρου διάφορα ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει. » 260
15) Ν/βρίου 7. Ἔλαβον ἀπὸ Π. Μανοῦσον μετρητὰς ἔναντι λογαριασμοῦ του. » 100
16) Ν/βρίου 12. Ἐμέτρησα εἰς Μ. Λάμπρον ἀπέ-

	ναντι λογαριασμοῦ του.	» 500
17)	Ν/βρίου 20. Ἔλαβον ἐκ τοῦ ταμείου διὰ προσωπικὰ ἔξοδα.	» 200
18)	Ν/βρίου 27. Ἐπώλησα εἰς διαφόρους ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοις.	» 140
19)	Ν/βρίου 30. Ἔλαβον παρὰ τοῦ Κ. Θεοδώρου συναλλαγματικὴν εἰς διαταγήν μου, λήγουσαν τῇ 5 Ἰανουαρίου.	» 260
20)	Δ/βρίου 1. Ἐπλήρωσα τὴν λήξασασαν συναλλαγματικὴν εἰς διαταγὴν τοῦ Κ. Γεωργιάδου	» 1000
21)	Δ/βρίου 2. Ἐπλήρωσα τοὺς μισθοὺς τῶν ὑπαλλήλων τοῦ μηνὸς Ν/βρίου.	» 200
22)	Δ/βρίου 3 Ἐπλήρωσα διὰ γραφικὴν ὕλην.	» 10

Ταμεῖον.

301. *Ταμεῖον* καλεῖται τὸ βιβλίον εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος ἐγγράφει μεθοδικῶς ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ καθ' ἡμέραν εἰσερχόμενα εἰς τὸ κατάστημά του χρηματικὰ ποσά, ἤτοι τὰς εἰσπράξεις του, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ καθ' ἡμέραν ἐξερχόμενα χρηματικὰ ποσά, ἤτοι τὰς πληρωμάς του.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ βιβλίου αὐτοῦ δύναται ὁ ἔμπορος νὰ γνωρίζῃ καθ' οἱονδήποτε στιγμὴν τὰ εἰς τὸ χρηματοκιβώτιόν του εὑρισκόμενα μετρητά.

Ἡ τήρησις τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου εἶνε ὁμοία μὲ τὴν τοῦ Καθολικοῦ. Αἱ εἰσπράξεις σημειοῦνται εἰς τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος, ἤτοι εἰς τὸ λαβεῖν. Διὰ καθὲν εἰσπραττόμενον ποσὸν σημειοῦται ἡ ἡμερομηνία εἰς τὴν ἐπὶ τούτῳ στήλην, κατόπιν σαφὴς καὶ σύντομος αἰτιολογικὴ ἔκθεσις, ἀναφέρουσα τὸν μετρήσαντα τὸ ποσὸν καὶ τὸν λόγον τῆς εἰσπράξεως ταύτης. Εἰς ἰδιαιτέραν στήλην γράφεται ὁ αὔξων ἀριθμὸς καθεμιᾶς πράξεως, εἰλημμένης ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (ἢ ἡ σελὶς τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε ἀναγεγραμμένη ἡ πρᾶξις).

Κατωτέρω παραθέτομεν ὑπόδειγμα Ταμείου εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς προηγουμένης παραγράφου πράξεων.

Εἰς τὴν στήλην τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν πράξεων, εἰλημμένους ἐξ αὐτῶν τῶν πράξεων ὡς ἐδόθησαν, ἀλλὰ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου, μετὰ τὴν εἰς αὐτὸ ἐγγραφὴν τῶν πράξεων τούτων.

Τὸ κλείσιμον καὶ ἡ μεταφορὰ εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Ταμείου γίνεται ἀκριβῶς καθὼς φαίνεται καὶ τὸν εἰς κατωτέρω πίνακα.

Ὡς πρόχειρον τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου θεωρεῖται ἄλλο βιβλίον τὸ ὁποῖον καλεῖται «*βιβλίον Ἐξόδων*». Εἰς τοῦτο γράφονται προχείρως τὰ διάφορα μικρὰ ἔξοδα τοῦ καταστήματος, ἤτοι γραφικῆς ὕλης, γραμματοσήμων κλπ., τηροῦν δὲ τὸ βιβλίον τοῦτο διὰ νὰ μὴ φέρουν εἰς τὸ Ταμεῖον τὰ μικρὰ ταῦτα ποσὰ τμηματι-

Εἰσπράξεις *Ταμεῖον* *Πληρωμαί*

1909		Αὔξ. ἀριθ.		Δρ.	Λ.	1909		Αὔξ. ἀριθ.		Δρ.	Λ.
8/βρ.	1	1	Κατάθεσις κεφαλαίου	10000	—	8/βρ.	1	2	Δι' ἀγορὰν ἐπίπλων	500	—
»	10	7	Ἀπὸ Δ. Μαρκίδην	150	—	»	5	5	Διὰ γραφ. ὕλην	20	—
»	18	10	Πώλησις τοῖς μετρητοῖς	120	—	»	7	6	Δι' ἐνοίκιον καταστήματος	200	—
Ν/βρ.	7	15	Ἀπὸ Π. Μανοῦσον	100	—	»	31	13	Διὰ μισθοὺς ὑπαλλήλων	180	—
»	27	18	Πώλησις τοῖς μετρητοῖς	140	—	Ν/βρ.	12	16	Εἰς Μ. Λάμπρον	500	—
						»	20	17	Ἔξοδά μου προσωπικά	200	—
						Δ/βρ.	1	20	Πληρωμὴ γραμματίου	1000	—
						»	2	21	Μισθοὶ ὑπαλλήλων	180	—
						»	3	22	Γραφικὴ ὕλη	60	—
									Ὑπόλοιπον εἰς νέον	5670	—
1910			Ἐν ὅλῳ	10510	—				Ἐν ὅλῳ	10510	—
Ἰαν.	1		Ὑπόλοιπον ὡς ἔναντι	5670	—						

κῶς. Ὁσάκις λοιπὸν πληρώνει ὁ ταμίας τοῦ καταστήματος τοιαῦτα ἔξοδα, δὲν ἐγγράφει αὐτὰ εἰς πίστωσιν τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου, ἀλλὰ σημειώνει αὐτὰ μόνον εἰς τὸ βιβλίον ἐξόδων, καθ' ἑβδομάδα δὲ ἢ κατὰ μῆνα φέρει τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν ἐξόδων εἰς τὴν πίστωσιν τοῦ Ταμείου. Διὰ τοῦτο τὸ βιβλίον τοῦτο εἶνε βοηθητικὸν τοῦ Ταμείου.

Ἀσκήσεις

1) Σχηματίσατε τὸ Ταμεῖον ἐκ τῶν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον (σελ. 241), ἀναγεγραμμένων πράξεων.

1) Ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου σας διὰ τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς σελ. 241 *Ἀσκήσεις*, φέρατε τὴν πρέπουσαν μεταβολὴν τοῦ αὔξοντος ἀριθμοῦ εἰσπράξεων καὶ πληρωμῶν τοῦ Ταμείου.

Βιβλίον Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν.

302. Τὸ βιβλίον ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν ἐπιβάλλεται, καθὼς εἴπομεν, ὑπὸ τοῦ Νόμου καὶ χρησιμεύει διὰ νὰ ἐγγράφωμεν εἰς αὐτὰ τὰς διαφόρους Ἀπογραφὰς καὶ τοὺς Ἰσολογισμούς.

Περὶ τοῦ τρόπου τῆς τηρήσεως τοῦ βιβλίου αὐτοῦ εἴδομεν εἰς τὴν σελ. 235—38.

Ἀσκήσεις. Ἐκ τοῦ βιβλίου Καθολικοῦ, τὸ ὁποῖον κατηρτίσατε διὰ τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς τὴν σελ. 241 Ἀσκήσεις καὶ ἐκ τοῦ Ταμείου τῶν αὐτῶν πράξεων νὰ συνταχθῇ ἡ Ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς εἰς τὸ βιβλίον τῶν Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν κατὰ τὸ ὑπόδειγμα τῆς σελ. 237—8.

Βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν.

303. Εἰς τὸ βιβλίον τῆς ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν, τὸ ὁποῖον ἐπιβάλλεται ὑπὸ τοῦ Νόμου, κρατεῖται ἀντίγραφον τῶν ἐπιστολῶν καὶ τῆς ἐν γένει ἀλληλογραφίας τοῦ ἐμπόρου μετὰ τῶν τρίτων, μετὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται εἰς ἐμπορικὰς σχέσεις. Πρὸς τοῦτο γράφεται συνήθως ἡ πρὸς ἀντιγραφὴν ἐπιστολὴ δι' εἰδικῆς μελάνης διὰ γραφίδος ἢ διὰ γραφομηχανῆς, καὶ λαμβάνεται ἀντίγραφον εἰς τὸ βιβλίον διὰ τῆς βοηθείας εἰδικοῦ πιεστηρίου.

Ἀσκήσεις.

Ἐκ τῶν κάτωθι πράξεων ἑνὸς καταστήματος, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ἀναγεγραμμέναι εἰς τὸ πρόχειρον, νὰ καταρτισθῇ α') τὸ ἡμερολόγιον τοῦ καταστήματος· β') τὸ Καθολικόν· γ') τὸ Ταμεῖον· δ') ἡ ἀπογραφὴ καὶ ὁ Ἰσολογισμὸς αὐτοῦ τὴν 31 Μαρτίου τοῦ 1914.

1 Ἰανουαρίου 1914

1) Κατέθεσα ἐπὶ σκοπῷ ἐμπορίου Δρ. 50000.—

2 Ἰανουαρίου

2) Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς εἴδη ἐπίπλων (βλέπε πρόχειρον ἐπίπλων) ἀντὶ » 500.—

3 Ἰανουαρίου

3) Ἠγόρασα τοῖς μετρητοῖς εἴδη γραφικῆς ὕλης (βλέπε πρόχειρον ἐπίπλων) ἀντὶ » 62.—

5 Ἰανουαρίου

4) Ἠγόρασα ἐπὶ πιστώσει ἀπὸ τὸν Π. Παυλίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 400 δρ. καθὲν » 8000.—

10 Ἰανουαρίου

5) Ἠγόρασα ἀπὸ Π. Παυλίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 500 δρ. καθὲν τοῖς μετρητοῖς » 5000.—

15 Ἰανουαρίου

6) Ἠγόρασα ἀπὸ Π. Παυλίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 1000 δρ. καθέν, καὶ ἐπλήρωσα τὴν ἀξίαν των διὰ γραμματίου λήγοντος τῇ 12 Ἰουλίου » 10000—

20 Ἰανουαρίου

7) Ἐμέτρησα εἰς Π. Παυλίδην πρὸς ἐξόφλησιν τῶν ἀγορασθέντων μαλλίων τῇ 5 τρέχοντος » 8000.—

28 Ἰανουαρίου

8) Ἐπλήρωσα διὰ ἐνοίκιον γραφείου καὶ ἀποθήκης ἀπὸ 1ης Ἰανουαρίου μέχρι 31ης Μαρτίου πρὸς 150 δρ. μηνιαίως δρ. 450.—

29 Ἰανουαρίου

9) Ἐπλήρωσα διὰ ταχυδρομικὰ τοῦ τρέχοντος μηνὸς » 450.—

30 Ἰανουαρίου

10) Ἔλαβον ἐκ τοῦ ταμείου δι' ἔξοδα μου (προσωπικὰ) τοῦ Ἰανουαρίου » 300.—

31 Ἰανουαρίου

11) Ἐπλήρωσα διὰ μισθοὺς τῶν ὑπαλλήλων » 300.—

5 Φεβρουαρίου

12) Ἠγόρασα παρὰ τῶν κάτωθι τὰ ἑπόμενα ἐπὶ πιστώσει: α΄) παρὰ τοῦ Α. Ἀγαθοκλέους 10.000 ὀκ. ἀλεύρων πρὸς 50 λεπτὰ τὴν ὀκ. δρ. 5000· β΄) παρὰ τοῦ Δ. Δημητριάδου 2000 ὀκ. ζαχάρεως πρὸς 1,75 δρ. τὴν ὀκ. δρ. 3500. Ἐν ὅλῳ. » 8500.—

10 Φεβρουαρίου

13) Ἐπώλησα ἐπὶ πιστώσει εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 5 δέματα μαλλίων πρὸς 1100 δρ. καθὲν » 5500.—

15 Φεβρουαρίου

14) Ἐπώλησα εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 20 δέματα μαλλίων πρὸς 450 δρ. καθὲν » 9000 —

20 Φεβρουαρίου

15) Εἰσέπραξα ἀπὸ Τ. Εὐαγγελίδην ἔναντι τοῦ λογαριασμοῦ του » 5000.—

25 Φεβρουαρίου

16) Ἐπώλησα εἰς Τ. Εὐαγγελίδην 10 δέματα μαλλίων πρὸς 1125 δρ. καθέν, καὶ ἔλαβον τὴν ἀξίαν αὐτῶν διὰ γραμματίου εἰς διαταγήν μου λῆγον τῇ 6 Αὐγούστου » 11250.—

28 Φεβρουαρίου

17) Ἐπλήρωσα δι' ἔξοδα λήξαντος μηνὸς (βλέπε πρόχειρον ταμείου) » 613,50

1 Μαρτίου

18) Ἐπώλησα εἰς ἑπομένους τὰ κάτωθι.

1) Εἰς Ι. Ιωαννίδην 30000 ὀκ. σίτου πρὸς 50 λ. τὴν ὀκᾶν, πληρωτέας τῆς ἀξίας του ὡς ἑξῆς.

α΄) τοῖς μετρητοῖς ἐντὸς 10 ἡμερῶν δρ.	10 000
β΄) διὰ γραμματίου	5 000
Ἦτοι δρ.	15000

2) Εἰς Ζαχαρίαν Νεόφυτον 5000 ὀκ. ἀλεύρου πρὸς 65 λ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς δρ. 3250

Ἦτοι ἐν ὅλῳ » 18250.—

10 Μαρτίου

10) Ἔλαβον παρὰ τοῦ Ι. Ἰωανίδου πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ τοῦ πωληθέντος σίτου τὴν 1ην τρέχοντος

α΄) εἰς μετρητὰ δρ. 10 000

β΄) γραμμάτιον εἰς διαταγήν μας τῇ 10 Ιουλίου » 5 000 Ἐν ὅλῳ » 15000.—

14 Μαρτίου

20) Εἰσέπραξα παρὰ τοῦ Τ. Εὐαγγελίδου » 9000 —

18 Μαρτίου

21) Ἠγόρασα παρὰ τοῦ Φ. Ἠλιοπούλου τὴν 28ην Φεβρ. 30 000 ὀκ. σίτου πρὸς 45 λ. τὴν ὀκᾶν, ἐπλήρωσα δὲ τὴν ἀξίαν των τοῖς μετρητοῖς. Τὴν πρᾶξιν ταύτην δὲν ἀνέγραψα τῇ 28 Φεβρουαρίου κατὰ λάθος. » 16000.—

31 Μαρτίου

32) Ἐπλήρωσα δι' ἔξοδα τοῦ μηνὸς Μαρτίου (βλέπε πρόχειρον Ταμείου). » 610.90

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Περὶ γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν Σελ. 3— 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Θεμελιώδεις πράξεις τῶν ἀριθμῶν » 12— 60

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Περὶ διαιρετότητος καὶ περὶ πρώτων ἀριθμῶν » 61— 72

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν » 73— 91

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν » 92—139

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περὶ μέτρων σταθμῶν καὶ νομισμάτων » 140—148

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν » 148—146

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Περὶ μεθόδων » 167—112

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Περὶ τετραγωνικῆς ρίζης » 213—217

Διάφορα προβλήματα πρὸς λύσιν » 217—222

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Στοιχεῖα Λογιστικῆς Καταστιχογραφίας » 223—257