Ι. ΑΝΑΡΓΥΡΟΥ ΚΑΙ Α. ΖΟΥΚΗ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ

ΕΛΛΗΝ. ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΔΙΑ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ

ΕΚΔΟΤΑΙ

ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΝΙΖΕΒΕΛΛΟΥ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ι. ΑΝΑΡΓΥΡΟΥ ΚΑΙ Α. ΖΟΥΚΗ
Καθηγητῶν τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ Σχολῇ τῶν Εὐελπίδων

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΟΜΟΝ ΓΣΑ'

ΕΠΙ ΤΕΤΡΑΕΤΙΑΝ 1909 – 1913

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΜΙΧ. ΜΑΝΤΖΕΒΕΛΑΚΗΣ

30-3-19
17274

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΗΝΩΜΕΝΑ ΒΙΒΛΙΟΔΕΤΕΙΑ
28 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ ΚΑΙ ΚΟΡΑΗ 28
1909

17274

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Ἡ ἔννοια τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν πολλῶν ἢ τοῦ πλήθους γεννᾶται εἰς ἡμᾶς ἐκ τῆς παρατηρήσεως πραγμάτων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων, τῶν ὁποίων παραβλέπομεν τὰς διαφοράς.

Μονὰς λέγεται ἓν ἐκ τῶν πολλῶν πραγμάτων ἢ καὶ πολλὰ ὁμοῦ πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὅτι ἀποτελοῦσιν ἓν σύνολον.

Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων, ὡς καὶ αὐτὴ ἡ μονάς. Παραδείγματος χάριν, ὅταν θεωρῶ τοὺς μαθητὰς σχολείου τινός, μονὰς εἶνε ὁ μαθητής, καὶ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τούτων ἀποτελεῖ ἀριθμόν· ὅταν θεωρῶ τὰς διαφόρους λέξεις μιᾶς φράσεως, μονὰς εἶνε ἡ λέξις, καὶ τὸ σύνολον τῶν λέξεων ἀποτελεῖ ἀριθμόν.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν.

2. Ἀριθμὸς ὁρίζων ἓν πλῆθος λέγεται ἴσος πρὸς ἀριθμὸν ὁρίζοντα ἄλλο πλῆθος, ὅταν εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑνὸς πλήθους ἀντιστοιχῇ ἀνὰ μία μονὰς τοῦ ἄλλου καὶ τἀνάπαλιν· π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν μελανοδοχείων μιᾶς τάξεως θὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, ὅταν εἶνε δυνατὸν οἱ μαθηταὶ νὰ ταχθῶσιν οὕτως, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ ἓν μελανοδοχεῖον καὶ ἓν μόνον, τἀνάπαλιν δέ, ἕκαστον μελανοδοχεῖον νὰ χρησιμεύῃ δι' ἕνα μαθητὴν καὶ ἕνα μόνον.

Οἱ μὴ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄνισοι*** καὶ μεγαλύτερος εἶνε ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου μονάδες τινὲς δὲν ἔχουσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον.

3. ***Ἀρίθμησις πλήθους*** λέγεται ἡ ἐργασία, ἥτις ἐκτελεῖται πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁρίζοντος τὸ πλῆθος ἀριθμοῦ. Ἀ ρ ί θ μ ή σ ι ς λέγεται ἐπίσης καὶ ἡ ἐξήγησις τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου κατορθώνομεν μὲ ὀλίγας λέξεις συνδυαζομένας μεταξύ των κατὰ ἁπλουστάτους κανόνας νὰ ἀπαγγέλλωμεν μέγιστον πλῆθος ἀριθμῶν καὶ μὲ ὀλίγα σύμβολα νὰ γράφωμεν πάντα ἀριθμόν.

Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν.

4. Ἡ μονὰς θεωρουμένη ὡς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ***ἕν***· ἂν μετὰ τῆς μονάδος προσληφθῇ καὶ ἄλλη μονάς, παράγεται νέος ἀριθμος, ὅστις ὀνομάζεται ***δύο***· ἂν μετὰ τῶν δύο μονάδων προσληφθῇ καὶ ἄλλη μονάς, παράγεται ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται ***τρία***· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσλαμβάνοντες μίαν μονάδα μετὰ τοῦ ἑκάστοτε σχηματιζομένου ἀριθμοῦ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, ὅστις ἔχει μίαν μονάδα ἐπὶ πλέον ἢ ὁ προηγούμενος ἀριθμός. Τοιουτοτρόπως σχηματίζονται κατὰ σειρὰν καὶ οἱ ἀριθμοὶ ***τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.***

Αἱ μονάδες, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται οἱ ἐννέα οὗτοι πρῶτοι ἀριθμοί, λέγονται ***μονάδες ἁπλαῖ*** ἢ ***μονάδες πρώτης τάξεως.***

5. Ἂν μετὰ τῶν ἐννέα μονάδων προσληφθῇ καὶ ἄλλη μονάς, παράγεται νέος ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται ***δέκα.*** Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θεωρεῖται ὡς νέα μονάς, ἡ ὁποία καλεῖται ***δεκὰς*** ἢ ***μονὰς δευτέρας τάξεως.***

Ὅπως ἐκ τῆς μονάδος ἕν, τοιουτοτρόπως καὶ ἐκ τῆς ***δεκάδος***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παράγονται δι' ἐπαναλήψεως αὐτῆς νέοι ἀριθμοὶ ἀποτελούμενοι ἐκ δύο, τριῶν, τεσσάρων, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτὼ καὶ ἐννέα δεκάδων· οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι μονολεκτικῶς ἐκφράζονται διὰ τῶν λέξεων·

Εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα καὶ ἐνενήκοντα.

6. Ἂν μετὰ τοῦ ἐνενήκοντα (ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐννέα δεκάδας) προσληφθῇ μία ἀκόμη δεκάς, παράγεται νέος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ἑκατόν. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θεωρεῖται πάλιν ὡς νέα μονάς, ἥτις καλεῖται ἑκατοντὰς ἢ μονὰς τρίτης τάξεως, καὶ ἐξ αὐτῆς παράγονται νέοι ἀριθμοὶ ἀποτελούμενοι ἐκ δύο, τριῶν,....., ἐννέα ἑκατοντάδων· οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι κατὰ σειρὰν ἐκφράζονται μονολεκτικῶς διὰ τῶν λέξεων·

Διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια καὶ ἐννεακόσια.

7. Ἂν μετὰ τοῦ ἐννεακόσια (ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐννέα ἑκατοντάδας) προσληφθῇ μία ἀκόμη ἑκατοντάς, παράγεται ὁ ἐκ δέκα ἑκατοντάδων ἀποτελούμενος ἀριθμός, ὅστις ὀνομάζεται χίλια. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος θεωρεῖται πάλιν ὡς νέα μονάς, ἥτις ὀνομάζεται χιλιὰς ἢ μονὰς τετάρτης τάξεως.

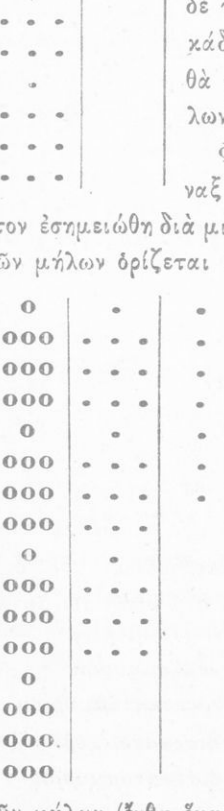
8. Τοιουτοτρόπως προχωροῦμεν καὶ σχηματίζομεν μονάδας διαφόρων τάξεων, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα δεικνύει ὁ ἀκόλουθος πίναξ·

Μονὰς	*πρώτης*	*τάξεως*	*ἢ*	*ἁπλῆ μονάς*
»	*δευτέρας*	»	»	*δεκάς*
»	*τρίτης*	»	»	*ἑκατοντάς*
»	*τετάρτης*	»	»	*χιλιάς*
»	*πέμπτης*	»	»	*δεκὰς χιλιάδος ἢ μυριάς*
»	*ἕκτης*	»	»	*ἑκατοντὰς χιλιάδος*
»	*ἑβδόμης*	»	»	*μονὰς ἑκατομμυρίου*
»	*ὀγδόης*	»	»	*δεκὰς ἑκατομμυρίου*
»	*ἐνάτης*	»	»	*ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου*
»	*δεκάτης*	»	»	*μονὰς δισεκατομμυρίου*
»	*ἑνδεκάτης*	»	»	*δεκὰς δισεκατομμυρίου*
»	*δωδεκάτης*	»	»	*ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίου*

.....

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

9. Μετὰ τὰ λεχθέντα θεωρήσωμεν ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὁρίζοντα τὸ πλῆθος μήλων ἑνὸς σωροῦ· ἐὰν τὰ μῆλα εἶνε ὀλιγώτερα τῶν δέκα, ἀριθμοῦμεν ταῦτα ἓν πρὸς ἓν καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν· ἐὰν τὰ μῆλα εἶνε περισσότερα τῶν δέκα, σχηματίζομεν ὅσας εἶνε δυνατὸν δεκάδας καὶ ἔπειτα ἀριθμοῦμεν, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ μῆλα τὰ ὀλιγώτερα τῶν δέκα, τὰ ὁποῖα θὰ περισσεύσουν (ἂν περισσεύσουν), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰς σχηματισθείσας δεκάδας, καί, ἂν αἱ δεκάδες αὗται εἶνε ὀλιγώτεραι τῶν δέκα, τότε θὰ γνωρίζωμεν νὰ ὀνομάζωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν μήλων.



Φανταζόμενοι π χ. ὅτι ὁ παρακείμενος πίναξ παριστᾷ τὴν διάταξιν τῶν μήλων (ὧν ἕκαστον ἐσημειώθη διὰ μιᾶς τελείας στιγμῆς) ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μήλων ὁρίζεται ὑπὸ ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ *τρεῖς δεκάδας* καὶ *ἑπτὰ μονάδας*. Ἂν ὅμως αἱ σχηματιζόμεναι δεκάδες μήλων εἶνε περισσότεραι τῶν δέκα, λαμβάνομεν ταύτας πάλιν ἀνὰ δέκα, σχηματίζομεν ὅσας εἶνε δυνατὸν ἑκατοντάδας μήλων καὶ οὕτω βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας ταύτας (ἃς ὑποθέτομεν ὀλιγωτέρας τῶν δέκα), ἀπὸ δεκάδας ἐπίσης ὀλιγωτέρας τῶν δέκα (ἂν περισσεύσουν) καὶ ἀπὸ μονάδας οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα, τὰς ὁποίας καὶ προηγουμένως εἴχομεν. Φανταζόμενοι π. χ. ὅτι ὁ παρακείμενος πίναξ παριστᾷ τὴν διάταξιν τῶν μήλων (ἔνθα ἕκαστος τῶν μικρῶν κύκλων παριστᾷ δεκάδας μήλων) ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μήλων ὁρίζει ὁ ἀριθμός, ὅστις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀποτελεῖται ἀπὸ *τέσσαρας ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας.*

Ἂν ὅμως αἱ σχηματιζόμεναι ἑκατοντάδες μήλων εἶνε περισσότεραι τῶν δέκα, πράττομεν ἐπὶ τούτων τὰ αὐτὰ καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου κατ' ἀνάγκην φθάσωμεν εἰς μονάδας ἀνωτέρας τινὸς τάξεως ὀλιγωτέρας τῶν δέκα. Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ μηχανισμὸς τῆς ἀριθμήσεως ἐξηγήθη. Ὁ μηχανισμὸς δὲ οὗτος δεικνύει ὅτι ὁσωνδήποτε πραγμάτων ὁ ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων λαμβανομένων μὲ τὴν ἑξῆς συνθήκην·

1ον *Μία μονὰς οἱασδήποτε τάξεως ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως·*

2ον *Οὐδεμία τάξις περιέχει μονάδας περισσοτέρας τῶν δέκα·*

3ον *Ὅλαι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἔχουν τὰ ἐν τῷ πίνακι τῆς παραγράφου* 8 *ὀνόματα.*

10. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὁ δεικνύων, πόσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καλεῖται *βάσις τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως.* Ἐκ τοῦ ὀνόματος δὲ τῆς βάσεως ὠνομάσθη καὶ τὸ σύστημα *δεκαδικόν.*

11. Ἐκ τῶν λεχθέντων γίνεται ἤδη φανερόν, πῶς μὲ τὰ δοθέντα ὀνόματα εἰς τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς καὶ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων δύναται νὰ ὀνομασθῇ πᾶς ἀριθμός, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶνε οὗτος, διότι ἀρκεῖ νὰ ἀπαγγέλλωνται χωριστὰ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμόν, αἵτινες δὲν ὑπερβαίνουν τὰς ἐννέα. Ἀλλὰ πρὸς σύντομον ἀπαγγελίαν πρέπει νὰ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ ἑξῆς·

α') Οἱ ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων ἀποτελούμενοι ἀριθμοί, π. χ. ὁ ἀπὸ *ἑπτὰ δεκάδας καὶ πέντε μονάδας* ἀριθμός, ἕνεκα τῶν ἐν ἐδαφίῳ 5 ὀνομάτων, ἀπαγγέλλεται συντομώτερον *ἑβδομήκοντα πέντε.* Ἐξαίρεσιν ἀποτελοῦν οἱ ἐκ μιᾶς δεκάδος καὶ μιᾶς ἢ δύο μονάδων σχηματιζόμενοι ἀριθμοί, οἵτινες ἀπαγγέλλονται *ἕνδεκα καὶ δώδεκα,* οὐχὶ δὲ δέκα ἓν καὶ δέκα δύο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β') Οἱ ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων ἀποτελούμενοι ἀριθμοί, π. χ. ὁ ἀπὸ **ἐννέα ἑκατοντάδας, ἑπτὰ δεκάδας** καὶ **δύο μονάδας** ἀποτελούμενος ἀριθμός, ἕνεκα τῶν ἐν τοῖς ἐδαφίοις 5 καὶ 6 ὀνομάτων ἀπαγγέλλεται συντόμως **ἐννεακόσια ἑβδομήκοντα δύο.**

12. Μαθόντες τὴν ἀπαγγελίαν τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ **ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα** εὐκόλως ἀπαγγέλλομεν καὶ τοὺς μεγαλυτέρους τούτου ἀριθμούς. Πρὸς τοῦτο μεταξὺ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων διακρίνομεν τὰς λεγομένας **ἀρχικὰς μονάδας,** τοιαῦται δὲ εἶνε αἱ ἑξῆς·

α') ἡ **ἁπλῆ μονάς,** β') ἡ **χιλιάς** (ἀποτελουμένη ἀπὸ χιλίας μονάδας), γ') **τὸ ἑκατομμύριον** (ἀποτελούμενον ἀπὸ χιλίας χιλιάδας), δ') **τὸ δισεκατομμύριον** (ἀποτελούμενον ἀπὸ χίλια ἑκατομμύρια) κ.ο.κ.

Μὲ τοιαύτην ταξινόμησιν τῶν μονάδων παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τρεῖς πρῶται τάξεις (μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες) ἀποτελοῦν μίαν ὁμάδα ἢ κλάσσιν, τὴν **κλάσσιν τῶν μονάδων**· αἱ μετὰ ταύτην τρεῖς τάξεις (μονάδες χιλιάδος, δεκάδες χιλιάδος, ἑκατοντάδες χιλιάδος) ἀποτελοῦν δευτέραν κλάσσιν, **τὴν κλάσσιν τῶν χιλιάδων,** κ.ο.κ.

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι **χίλιαι μονάδες κλάσσεώς τινος ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας κλάσσεως.** Ἡ διαδοχὴ αὕτη καὶ ἡ ταξινόμησις τῶν μονάδων γίνεται καταληπτὴ διὰ τοῦ ἑξῆς πίνακος·

Τετάρτη κλάσσις **Δισεκατομμύρια**			*Τρίτη κλάσσις* **Ἑκατομμύρια**			*Δευτέρα κλάσσις* **Χιλιάδες**			*Πρώτη κλάσσις* **Μονάδες**		
12η τάξις	11η τάξις	10η τάξις	9η τάξις	8η τάξις	7η τάξις	6η τάξις	5η τάξις	4η τάξις	3η τάξις	2α τάξις	1η τάξις
Ἑκατοντάδες δισεκατομμυρίου	Δεκάδες δισεκατομμυρίου	Μονάδες δισεκατομμυρίου	Ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίου	Δεκάδες ἑκατομμυρίου	Μονάδες ἑκατομμυρίου	Ἑκατοντάδες χιλιάδος	Δεκάδες χιλιάδος	Μονάδες χιλιάδος	Ἑκατοντάδες μονάδος	Δεκάδες μονάδος	Μονάδες ἁπλαῖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τούτου τεθέντος πρὸς ὀνομασίαν π. χ. ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας τῶν δύο πρώτων κλάσσεων, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον ὅλας ὁμοῦ τὰς χιλιάδας (τῶν ὁποίων ἐμάθομεν τὴν ἀπαγγελίαν, διότι δὲν εἶνε αὗται περισσότεραι τῶν χιλίων), ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν τὰς ὀλιγωτέρας τῶν χιλίων ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ. Π. χ. τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ *τρεῖς ἑκατοντάδας χιλιάδος, ἑπτὰ χιλιάδας, τέσσαρας ἑκατοντάδας* καὶ *δύο μονάδας* ἀπαγγέλλομεν· *τριακόσιαι ἑπτὰ* **χιλιάδες** καὶ *τετρακόσιαι δύο* **μονάδες.** Ἐν γένει δηλαδὴ πρὸς ἀπαγγελίαν παντὸς ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ λέγωμεν, πόσας ἀρχικὰς μονάδας τῶν διαφόρων κλάσσεων περιέχει ὁ ἀριθμὸς ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης.

Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

13. Τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς παριστάνομεν κατὰ σειρὰν διὰ τῶν συμβόλων 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Τὰ σύμβολα ταῦτα λέγονται *ψηφία* ἢ *ἀραβικοὶ χαρακτῆρες*, διότι οἱ Ἕλληνες παρέλαβον αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων.

Διὰ νὰ γράψωμεν ἤδη πάντα ἀριθμὸν διὰ τῶν ἀνωτέρω ψηφίων, π. χ. τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς χιλιάδας, δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, γράφομεν· 3 **χιλιάδες** 2 **δεκάδες** 7 **μονάδες**· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοῦτον συντομώτερον ἀποφεύγοντες νὰ θέτωμεν παρὰ τὸ ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων· πρὸς τοῦτο δὲ θέτομεν τὴν ἑξῆς συνθήκην·

Γράφομεν κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων τοιουτοτρόπως, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων (μονάδων πρώτης τάξεως) νὰ κατέχῃ τὴν *πρώτην* θέσιν ἐκ δεξιῶν, τὸ τῶν δεκάδων τὴν *δευτέραν*, τὸ τῶν ἑκατοντάδων τὴν *τρίτην* κ.ο.κ· ἐὰν δὲ ἐλλείπωσι μονάδες τάξεώς τινος κατωτέρας τῶν μονάδων τῆς εἰς τὸν ἀριθμὸν ὑπαρχούσης ἀνωτάτης τάξεως, εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν γράφομεν τὸ σύμβολον 0, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *μηδὲν* ἢ *μη-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δενικόν, διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ προσήκουσα θέσις εἰς τὰ λοιπὰ ψηφία.

Τὰ λοιπὰ ψηφία ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ 0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ἔλλειψιν μονάδος, καλοῦνται *σημαντικὰ ψηφία*.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀνωτέρω ληφθεὶς ἀριθμὸς συντομώτερον γράφεται 3 027 καὶ ἀπαγγέλλεται *τρεῖς χιλιάδες εἴκοσι ἑπτά*.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐκ 5 *ἑκατομμυρίων*, 8 *δεκάδων χιλιάδος*, 7 *χιλιάδων*, 3 *ἑκατοντάδων*, 7 *δεκάδων* καὶ 3 *μονάδων* γράφεται 5 087 373 καὶ ἀπαγγέλλεται *πέντε ἑκατομμύρια, ὀγδοήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες, τριακόσιαι ἑβδομήκοντα τρεῖς μονάδες*.

Ὁμοίως αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ὡς ἑξῆς·

1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν λεχθέντων διακρίνομεν ὅτι ὁ μηχανισμὸς τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν στηρίζεται εἰς τὴν ἑξῆς συνθήκην·

Ἕκαστον ψηφίον γραφόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον.

14. Ὁ δι' ἑνὸς ψηφίου γραφόμενος ἀριθμὸς λέγεται *μονοψήφιος*, ὁ διὰ δύο *διψήφιος*, ὁ διὰ τριῶν *τριψήφιος* καὶ ὁ διὰ πολλῶν *πολυψήφιος*, διὰ τὴν ἀπαγγελίαν δὲ καὶ γραφὴν πολυψηφίων ἀριθμῶν ἔχομεν τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας·

Α'. Πῶς ἀπαγγέλλεται ἀριθμὸς γεγραμμένος διὰ ψηφίων. ;

Ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν καὶ χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα (τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ ἢ ἓν ἢ δύο ἢ τρία ψηφία)· οὕτω χωρίζομεν πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἔπειτα τὰς χιλιάδας, τὰ ἑκατομμύρια κ.τ.λ.· τότε ἀρχίζομεν ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν ἕκαστον τμῆμα, ὡς νὰ ἦτο μόνον, φροντίζομεν δὲ νὰ προσαρτῶμεν ἑκάστοτε τὸ ὄνομα τῆς μονάδος τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος, ἥτις μονὰς εἶνε μία τῶν ἀρχικῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παραδείγματος χάριν τὸν ἀριθμὸν 5170830105, ἀφοῦ χωρίσωμεν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ὡς ἑξῆς·

5 170 830 105,

ἀπαγγέλλομεν 5 *δισεκατομμύρια*, 170 *ἑκατομμύρια*, 830 *χιλιάδες* καὶ 105 *μονάδες*.

Β'. Πῶς γράφεται ἀπαγγελλόμενος ἀριθμός;

Διὰ νὰ γράψωμεν ἀπαγγελλόμενον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀρχικὰς μονάδας διαφόρων κλάσσεων, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτάτης κλάσσεως, ἔπειτα κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν κατωτέρων κλάσσεων μέχρι τῆς κατωτάτης· φροντίζομεν δὲ νὰ ἀναπληρῶμεν διὰ μηδενικῶν τὰς ἐλλειπούσας ἑκατοντάδας ἢ δεκάδας ἢ μονάδας εἰς ἑκάστην τῶν κατωτέρων κλάσσεων.

Π. χ. ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς 9 δισεκατομμύρια καὶ 604 μονάδες γράφεται 9 000 000 604· ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 6 ἑκατομμύρια, 4 χιλιάδες καὶ 25 μονάδες γράφεται 6 004 025.

Πράξεις θεμελιώδεις.

15. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν διαφόρους ἐργασίας ἢ πράξεις· αἱ κυριώτεραι τούτων εἶνε τέσσαρες· *ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς* καὶ *ἡ διαίρεσις*.

Ἀφῃρημένος λέγεται ἀριθμός τις, ὅταν δὲν εἶνε ὡρισμένον τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ· π. χ. 5, 7 κ.τ.λ.

Συγκεκριμένος λέγεται ἀριθμός τις, ὅταν ἀναφέρηται εἰς ὡρισμένον πρᾶγμα· π. χ. 5 μῆλα, 6 πήχεις κ.τ.λ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων.—Μία μονὰς τάξεώς τινος πόσας μονάδος τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ἀποτελεῖ; — Νὰ ἀπαγγελθῶσιν αἱ κλάσσεις τῶν ἀρχικῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μονάδων καὶ αἱ τάξεις τῶν μονάδων ἑκάστης κλάσσεως.—Μία δεκὰς χιλιάδος πόσας ἑκατοντάδας ἁπλᾶς ἀποτελεῖ; — Μία ἑκατοντὰς χιλιάδος πόσας ἑκατοντάδας ἁπλῶν μονάδων ἀποτελεῖ;

2) Ἓν δισεκατομμύριον πόσας μονάδας ἑκατομμυρίου ἀποτελεῖ; — Πόσαι δεκάδες χιλιάδος ἀποτελοῦσι μίαν δεκάδα ἑκατομμυρίου;

3) Πόσα δεκάδραχμα κάμνουν α') 100 δραχμάς, β') 1 000 καὶ γ') 10 000 δραχμάς; —Μὲ πόσα χαρτονομίσματα τῶν 100 δραχμῶν κάμνομεν α') 1 000, β') 10 000 καὶ γ') 100 000 δραχμάς;

4) Νὰ γραφῶσι διὰ ψηφίων οἱ ἀριθμοί· Τριακόσια πέντε.—Δύο χιλιάδες καὶ ὀκτὼ μονάδες.—Τριάκοντα πέντε χιλιάδες καὶ μία μονάς.—Διακόσιαι χιλιάδες καὶ πεντήκοντα τρεῖς μονάδες.—Πεντήκοντα ἑκατομμύρια, ὀκτὼ χιλιάδες καὶ πέντε μονάδες.—Δέκα χιλιάδες καὶ μία μονάδες.—Ἓν ἑκατομμύριον καὶ μία μονάδες.

5) Νὰ γραφῶσι διὰ ψηφίων αἱ ἀρχικαὶ μονάδες τῶν τεσσάρων πρώτων κλάσσεων.

6) Νὰ γραφῇ ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ἐκ 18 ἀρχικῶν μονάδων πρώτης κλάσσεως, 102 τῆς τρίτης καὶ 7 τῆς τετάρτης.

7) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 8 000, 360 064, 2 007 078, 1 001, 2 120 015 003, 1 000 008, 40 030 078.

8) Τίς ὁ μεγαλύτερος καὶ τίς ὁ μικρότερος ἐκ τῶν διψηφίων, τριψηφίων, τετραψηφίων κ.τ.λ. ἀριθμῶν;

9) Πόσας ἐν συνόλῳ δεκάδας περιέχει ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 4 500, 783 859, 105 007;

10) Πόσας ἐν συνόλῳ μονάδας χιλιάδος περιέχει ἕκαστος τῶν προηγουμένων ἀριθμῶν;

11) Νὰ γραφοῦν πάντες οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων των εἶνε 578.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12) Ποίαν τάξιν μονάδων σημαίνει τὸ πρῶτον ἀριστερὸν ψηφίον ἑνὸς διψηφίου, τριψηφίου κ.τ.λ. ἀριθμοῦ;

13) Μὲ πόσα ψηφία γράφεται ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἡ ἀνωτάτη τάξις τῶν μονάδων του εἶνε δεκὰς ἑκατομμυρίου;

14) Εἰς πάντα ἀριθμὸν μία μονὰς οἱουδήποτε ψηφίου του σημαίνει ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ κατόπιν αὐτοῦ ψηφία.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων, π.χ. μήλων, καὶ ὅτι χωρίζομεν τὸ πλῆθος τοῦτο εἰς διάφορα ἄλλα πλήθη, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἀριθμοῦμεν τὰ μῆλα· τότε ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰ διάφορα ταῦτα πλήθη, δυνάμεθα διὰ μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁρίζοντα τὸ ἀρχικῶς ληφθὲν πλῆθος, χωρὶς νὰ ἀριθμήσωμεν τὰ μῆλα τούτου· ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται **πρόσθεσις**.

Ἐντεῦθεν ὁ ὁρισμὸς τῆς πράξεως ταύτης·

Πρόσθεσις εἶνε ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν δίδωνται δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί, σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οἱ δοθέντες εἰς πρόσθεσιν ἀριθμοὶ λέγονται **προσθετέοι**· ὁ ἐξ ὅλων τῶν μονάδων αὐτῶν ἀποτελούμενος ἀριθμὸς λέγεται **κεφάλαιον** ἢ **ἄθροισμα** (τῶν προσθετέων).

Διὰ νὰ σημάνωμεν τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς κατὰ σειρὰν καὶ θέτομεν μεταξὺ ἑκάστου καὶ τοῦ ἑπομένου του τὸ σημεῖον $+$, τὸ ὁποῖον λέγεται σημεῖον τῆς προσθέσεως καὶ ἀπαγγέλλεται **σὺν** ἢ **πλέον** ἢ ἁπλῶς **καί**· π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8, 12 καὶ 30 σημειοῦται

$$8+12+30$$

καὶ ἀπαγγέλλεται 8 σὺν 12 σὺν 30.

17. Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνονται αἱ ἀκόλουθοι περιπτώσεις.

Α΄) Πρόσθεσις δύο μονοψηφίων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην οὐδένα κανόνα ἐκτελέσεως ἔχομεν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀνάγκη ὅμως νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὸν πίνακα προσθέσεως δύο μονοψηφίων· οὕτω π.χ. ταχέως πρέπει νὰ λέγωμεν ὅτι 7 καὶ 4 κάμνουν 11.

Β') Πρόσθεσις μονοψηφίου εἰς τὸν τυχόντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὅτι πρόκειται περὶ τῆς προσθέσεως 46+8 καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παριστῶσι μῆλα· τότε τὸ πρῶτον πλῆθος ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 δεκάδας μήλων καὶ ἀκόμη 6 μῆλα· διὰ νὰ ἑνώσωμεν δὲ ὅλα ταῦτα μετὰ τῶν 8 μήλων τοῦ δευτέρου πλήθους, εἶνε φυσικὸν νὰ θέσωμεν ὁμοῦ τὰ 8 μῆλα μετὰ τῶν 6 μήλων, ὁπότε θὰ ἔχωμεν περισσότερα τῶν 9 μήλων, διότι 8+6 κάμνουν 14, ἤτοι θὰ ἔχωμεν 1 δεκάδα καὶ 4 μονάδας· ἡ 1 δεκὰς λαμβανομένη μετὰ τῶν 4 δεκάδων ἀποτελεῖ 5 δεκάδας, καὶ τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι 46+8 κάμνουν 54.

Γ') Πρόσθεσις πολλῶν μονοψηφίων.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα τὸ ἄθροισμά των καὶ τὸν τρίτον, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων καὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου. Ἔστωσαν παραδείγματος χάριν εἰς πρόσθεσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 8, 7 καὶ 4. Τὸ ἄθροισμα τοῦ 5 καὶ 8 εἶνε 13· τοῦ 13 καὶ 7 εἶνε 20· τοῦ 20 καὶ 4 εἶνε 24· τὸ ζητούμενον ἄρα ἄθροισμα εἶνε 24. Συντόμως ὅμως συνηθίζομεν νὰ λέγωμεν· 5 καὶ 8 δεκατρία καὶ 7 εἴκοσι καὶ 4 εἴκοσι τέσσαρα, γράφομεν δὲ 5 + 8 + 7 + 4 = 24 ἀπαγγέλλοντες 5 σὺν 8 σὺν 7 σὺν 4 ἴσον 24.

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ 8 & \\ 7 & \\ 4 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

Τὸ τεθὲν σημεῖον = καλεῖται *σημεῖον τῆς ἰσότητος* καὶ χρησιμεύει, διὰ νὰ δείξῃ ὅτι ὁ ἀριθμὸς (24), ὅστις εἶνε ἀπὸ τὸ ἓν μέρος, εἶνε ἐξαγόμενον τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος· τοιαύτη παράστασις ὀνομάζεται **ἰσότης**, καὶ τὸ μὲν πρὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου = μέρος λέγεται *πρῶτον μέλος* τῆς ἰσότητος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ *δεύτερον μέλος*.

Δ') Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν ταύτην περίπτωσιν καὶ λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν 4 825, 917 καὶ 7 309. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον τοιουτοτρόπως, ὥστε τὰ ψηφία τὰ παριστῶντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶνε εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ σύρομεν κάτωθεν πάντων ὁριζοντίαν γραμμήν,

4825
917
7302
13044

διὰ νὰ χωρίσωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἀπὸ τοὺς προσθετέους. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 14 τῶν ἁπλῶν μονάδων 2, 7 καὶ 5 τῶν προσθετέων· τὰς 4 μονάδας τοῦ ἀθροίσματος 14 γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ τὴν 1 δεκάδα (τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *κρατουμένην* ἢ ἁπλῶς *κρατούμενον*) κρατοῦμεν, διὰ νὰ προσθέσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων τῶν προσθετέων, λέγοντες· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1 δύο καὶ 2 τέσσαρες δεκάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ψηφία 3, 9 καὶ 8 τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων ἀποτελεῖ 20 ἑκατοντάδας, ἤτοι 2 χιλιάδας, χωρὶς νὰ περισσεύῃ οὐδεμία ἑκατοντάς, διὰ τοῦτο γράφομεν τὸ μηδὲν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὰς δὲ 2 χιλιάδας κρατοῦμεν καὶ προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῶν χιλιάδων καὶ τὸ ἐκ τούτου εὑρισκόμενον ἄθροισμα 13 γράφομεν ὁλόκληρον ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν πρέπουσαν θέσιν, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχουν μονάδες ἀνωτέρας τάξεως εἰς τοὺς προσθετέους. Ταῦτα πράξαντες ἡνώσαμεν πάσας τὰς μονάδας τῶν προσθετέων καὶ εὕρομεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶνε 13 044. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς προσθέσεως·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους οὕτως, ὥστε τὰ ὁμοταγῆ ψηφία των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ σύρομεν κάτωθεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκάστης στήλης, καί, ὅταν τοῦτο εἶνε μικρότερον τοῦ 10, *τὸ γράφομεν κάτωθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὅταν ὅμως περιέχῃ καὶ δεκάδας, τότε τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων του γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, τὸν δὲ ἀριθμὸν τῶν δεκάδων του* (*) *κρατοῦμεν καὶ προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης· τοιουτοτρόπως δὲ προχωροῦμεν μέχρι τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης.*

Παρατήρησις.— Ἐπειδή, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δοθέντας ἀριθμούς, θὰ εὕρωμεν πάντοτε τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει ὡς μονάδας πάσας τὰς μονάδας πάντων τῶν προσθετέων, συνάγομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως·

α') *Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν προσθετέων, τὸ ἄθροισμά των μένει τὸ αὐτό.*

β') *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μερικὰ ἀθροίσματα ἔκ τινων προσθετέων καὶ ἔπειτα νὰ εὕρωμεν τὸ τελικὸν ἄθροισμα.*

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.

18. *Δοκιμὴ* ἢ *βάσανος* ἀριθμητικῆς τινος πράξεως λέγεται δευτέρα πρᾶξις, ἥτις δύναται νὰ εἶνε καὶ διάφορος τῆς πρώτης (χωρὶς νὰ εἶνε δυσκολωτέρα ταύτης), ἔχει δὲ σκοπὸν νὰ ἐλέγξῃ, ἂν ἡ πρώτη πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

(*) Ἀριθμὸς τῶν δεκάδων δοθέντος ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ 378, εἶνε ὁ ἀριθμὸς 37, ὅστις προκύπτει μετὰ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ ψηφίου 8 τῶν ἁπλῶν μονάδων του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως εἶνε δευτέρα πρόσθεσις τῶν ἰδίων προσθετέων λαμβανομένων κατ' ἄλλην τάξιν. Ὅταν τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο πράξεων εἶνε τὰ αὐτά, τότε εἶνε πιθανὸν ὅτι ἡ πρώτη πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἀλλὰ δὲν εἶνε καὶ βέβαιον, διότι δυνατὸν νὰ ἐγένετο τὸ αὐτὸ λάθος καὶ εἰς τὰς δύο πράξεις. Ὅταν ὅμως τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο πράξεων εἶνε διάφορα, τότε εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δύο πράξεων ἢ καὶ εἰς ἀμφοτέρας ἐγένετο λάθος· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀνάγκη νὰ ἐπαναληφθῇ ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως μετὰ προσοχῆς.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

19. ***Εἶχέ τις 15 δραχμὰς καὶ ἠγόρασεν ἓν πρᾶγμα, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε 3 δραχμάς· πόσας δραχμὰς θα ἔχῃ μετὰ τὴν πληρωμήν ;***

Ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας θὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον, λέγεται ***ἀφαίρεσις***· ἐπειδὴ δὲ αἱ μείνασαι εἰς αὐτὸν δραχμαὶ καὶ αἱ πληρωθεῖσαι διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ πράγματος κάμνουν ὁμοῦ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας εἶχε πρὸ τῆς ἀγορᾶς, διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ ὁ ζητούμενος προστιθέμενος πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν 15· ἐντεῦθεν ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως·

Ἀφαίρεσις εἶνε ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν δοθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς τῶν προσθετέων, εὑρίσκεται ὁ ἄλλος.

Τὸ δοθὲν ἄθροισμα (15) τῶν δύο ἀριθμῶν λέγεται **μειωτέος**· ὁ δοθεὶς προσθετέος (3) λέγεται **ἀφαιρετέος**· ὁ εὑρισκόμενος διὰ τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **ὑπόλοιπον** ἢ **διαφορά** (μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου).

Τὴν ἀφαίρεσιν σημειοῦμεν διὰ τοῦ συμβόλου—,τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **πλὴν** ἢ **μεῖον**, καὶ τίθεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου γραφομένου πρώτου τοῦ μειωτέου· οὕτω 15—3 σημαίνει τὴν διαφοράν, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀφαιρέσεως τοῦ 3 ἀπὸ τοῦ 15, ἀναγινώσκεται δὲ 15 πλὴν 3.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶνε ἴσοι, ἡ διαφορά των ποοδήλως εἶνε μηδέν· π.χ. 5—5=0· διότι μόνον τὸ μηδὲν προστιθέμενον εἰς τὸν 5 δίδει τὸν 5.

Ὅταν ὁ μειωτέος εἶνε μικοότερος τοῦ ἀφαιρετέου, ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶνε δυνατή· π. χ. ἡ διαφορὰ 3—5 δὲν ὑπάρχει· διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν 5 θὰ δώσῃ τὸν μικρότεοον ἀριθμὸν 3.

20. Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μονοψήφιος καὶ αὐξανόμενος κατὰ 10 γίνεται μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου· τοιαύτη π. χ. εἶνε ἡ ἀφαίρεσις 16—9· διότι, ἂν εἰς τὸν 9 προστεθῇ ὁ 10, προκύπτει ὁ 19, ὅστις εἶνε μεγαλύτεοος τοῦ μειωτέου 16. Διὰ τοιαύτην περίπτωσιν οὐδεὶς κανὼν ἐκτελέσεως τῆς πράξεως ὑπάρχει, ἀλλὰ τὴν διαφορὰν εὑρίσκομεν ἄνευ δυσκολίας γνωρίζοντες ἀπὸ μνήμης νὰ προσθέτωμεν εἰς τὸν μονοψήφιον ἀφαιρετέον ἕκαστον τῶν μικροτέρων τοῦ 10 ἀριθμῶν, μέχρις ὅτου ἀνακαλύψωμεν ἐκεῖνον, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιοετέον δίδει τὸν μειωτέον· οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι 7 εἶνε ἡ διαφορὰ 16—9· διότι 9+7=16.

21. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν περίπτωσιν καὶ ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 53781—8574.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία τὰ σημαίνοντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ σύρομεν κάτωθεν γραμμὴν ὁριζοντίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ γράψωμεν τὴν ζητουμένην διαφοράν, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν 8574 θὰ δώσῃ τὸν 53781· πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν·

$$\begin{array}{r} 53781 \\ 8574 \\ \hline 45207 \end{array}$$

Ἐπειδὴ 4 εἶνε τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ τοῦτο τὸ τῆς διαφορᾶς ψηφίον θὰ εἶνε τοιοῦτον, ὥστε μετὰ τοῦ 4 νὰ κάμνῃ 11 (καθ' ὅσον δὲν δύναται νὰ δώσῃ ἄθροισμα τὸ ψηφίον 1 τοῦ μειωτέου)· ἀλλὰ τοιοῦτον ψηφίον εἶνε τὸ 7, τὸ ὁποῖον καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμήν. Ἔπειτα ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι κατὰ τὴν πρόσθεσιν λέγομεν «4 *καὶ* 7 *κάμνουν* 11, *γρά-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φομεν δὲ τὸ 1 καὶ κρατοῦμεν 1», διὰ τοῦτο τὸ κρατούμενον 1 πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον 7 τοῦ ἀφαιρετέου, ὁπότε ὁρίζομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς διαφορᾶς ζητοῦντες ποῖον ψηφίον μετὰ τοῦ 8 προστιθέμενον δίδει τὸ ψηφίον 8 τοῦ μειωτέου· τοιοῦτον προδήλως εἶνε τὸ 0, ὅπερ καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τοιουτοτρόπως προχωροῦντες συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἀφαιροῦμεν (§ 19) *ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ὑπεράνω αὐτοῦ ψηφίον τοῦ μειωτέου, ὁσάκις τοῦτο εἶνε δυνατόν· ἄλλως αὐξάνομεν κατὰ 10 τὸ ψηφίον τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν κατόπιν, ὅμως ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου αὐξάνομεν τοῦτο κατὰ 1 πρὶν ἢ τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰς τοιουτοτρόπως εὑρισκομένας μονοψηφίους διαφορὰς γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ οὕτως ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τῆς ζητουμένης διαφορᾶς.*

22. Τὸν μηχανισμὸν τῆς ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀκόλουθον θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως·

Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀμφότεροι αὐξηθοῦν ἢ ἐλαττωθοῦν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Τῷ ὄντι, ἂς γράψωμεν κατὰ σειρὰν τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ μειωτέος, κάτωθεν δὲ τούτων καὶ κατ' ἀντιστοιχίαν ὅσας ἔχει ὁ ἀφαιρετέος.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.	
1, 1, 1, 1, 1, 1.	

Εἶνε φανερὸν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν, πόσαι εἶνε αἱ μονάδες τῆς πρώτης σειρᾶς αἱ μὴ ἔχουσαι τὰς ἀντιστοίχους εἰς τὴν δευτέραν σειράν. Εὐκόλως ἤδη βλέπομεν ὅτι, ἂν ἐξ ἀριστερῶν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων εἰς ἑκατέραν τῶν σειρῶν, ἡ διαφορὰ οὐδόλως βλάπτεται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

23. Τούτου τεθέντος ἂς λάβωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ παράδειγμα τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 8574 ἀπὸ τοῦ 53781.

53 781	Ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν βλέπομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις 4 μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ μιᾶς μονάδος τοῦ μειωτέου δὲν εἶνε δυ-
8 574	νατή, διὰ τοῦτο προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς
45 207	τὴν θέσιν τῶν μονάδων πρώτης τάξεως 10 μονάδας,

προσθέτομεν ἐπίσης ἄλλας τόσας, ἤτοι μίαν δεκάδα, εἰς τὸ ψηφίον 7 τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτως οἱ πρὸς ἀφαίρεσιν ἀριθμοὶ μεταβάλλονται, ἡ διαφορά των ὅμως δὲν βλάπτεται (§ 22). Τοιουτοτρόπως λέγομεν 4 ἀπὸ 11 μένουν 7 καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμήν. Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν 8 (διότι προσετέθη μία δεκὰς εἰς τὸν ἀφαιρετέον) ἀπὸ 8 μένει 0, τὸ ὁποῖον ἐπίσης γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμήν. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον προχωροῦντες διακρίνομεν καὶ πάλιν τὴν ἀλήθειαν τοῦ τεθέντος κανόνος ἐν ἐδαφίῳ 21.

24. Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν εἶνε φανερὰ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ἰδιότητος·

Εἴτε τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ἀπὸ ἄλλον, εἴτε τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, μία καὶ ἡ αὐτὴ προκύπτει διαφορά.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

25. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν βάσανον ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον, καί, ἂν ἡ πρόσθεσις αὕτη γίνῃ ἄνευ λάθους καὶ εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τότε ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 19).

Γενικὴ παρατήρησις εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

26. Ὅταν οἱ διδόμενοι εἰς πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν ἀριθμοὶ εἶνε συγκεκριμένοι, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α') Προστίθενται ἢ ἀφαιροῦνται ἀριθμοὶ παριστάνοντες ἀντικείμενα τοῦ αὐτοῦ εἴδους· π.χ. δύνανται νὰ προστεθοῦν 5 μῆλα καὶ 3 μῆλα ἢ 5 δένδρα καὶ 3 δένδρα. Σημειωτέον ὅμως ὅτι αἱ λέξεις *ἀντικείμενα τοῦ αὐτοῦ εἴδους* δὲν λαμβάνονται πάντοτε ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον ἔννοιαν· δύναταί τις π.χ. νὰ θέσῃ πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα (1)·

Ἠγόρασέ τις 4 ἵππους, 8 βοῦς καὶ 42 πρόβατα· πόσα ἐν ὅλῳ ζῷα ἠγόρασεν ;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου θὰ θεωρήσωμεν τοὺς εἰσερχομένους εἰς αὐτὸ ἀριθμοὺς ὡς ἀφηρημένους (μὴ ὁρίζοντας δηλονότι τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν), θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφηρημένων τούτων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο θὰ εἴπωμεν τέλος ὅτι παριστάνει ζῷα.

β') Προστίθενται ἢ ἀφαιροῦνται ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παριστάνουσι ποσὰ (2) μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα· π.χ. δύνανται νὰ προστεθοῦν μήκη 3 πήχεων καὶ 2 πήχεων, ἢ χρόνοι 3 ἡμερῶν καὶ 2 ἡμερῶν, ἂν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν τοῦ ἑξῆς προβλήματος· «ἠγόρασέ τις μῆκος ὑφάσματος 2 πήχεων καὶ ἐξ αὐτοῦ ἔκοψε τεμάχιον μήκους 7 ῥουπίων διὰ τὴν ἐπένδυσιν ἑνὸς βιβλίου· πόσον μῆκος ἔχει τὸ μεῖναν ὕφασμα ;», τότε διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς·

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος ἑνὸς πήχεως ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ μῆκος 8 ῥουπίων, διὰ τοῦτο τὸ μῆκος 2 πήχεων εἶνε τὸ ἴδιον μὲ τὸ μῆκος 8+8 ἤτοι 16 ῥουπίων· ὥστε θὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι τὸ μεῖναν ὕφασμα ἔχει μῆκος 16—7, ἤτοι 9 ῥουπίων.

---

1) Θὰ καλῶμεν πρόβλημα πᾶν ζήτημα προτεινόμενον εἰς λύσιν, εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ἀριθμούς τινας, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν *δεδομένα τοῦ προβλήματος*, καὶ ζητοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν δι' ἀριθμητικῶν πράξεων, ἐκτελουμένων μεταξὺ τῶν δεδομένων, τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος.

2) Ποσὸν λέγεται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ προσθέτωμεν ἢ νὰ ἀφαιρῶμεν ἀριθμούς, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουν τὸ αὐτὸ ὄνομα.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

15) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ στόματος αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

30+40+70	50+40+10+60	500+300+800+400+700
30+20+80	10+30+60+80	7000+3000+5000+800
70+70+70	70+20+90+10	800+3000+200+1000

16) Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ στόματος τὸ ἄθροισμα δύο διψηφίων ἀριθμῶν. Π.χ. προκειμένου περὶ τοῦ ἀθροίσματος 36+58 θὰ λέγωμεν·

α') 30 καὶ 50 ἴσον 80
β') 6 καὶ 8 ἴσον 14 } ὅθεν 36+58=80+14=94.

17) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ διψηφίου καὶ ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς 9. Π.χ. προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 259+15 θὰ λέγωμεν·

260+14=274

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ εὑρεθῶσιν ἀπὸ στόματος τὰ ἀθροίσματα 79+38, 279+35, 1829+27,.....

18) Ἔμπορος ἐκέρδησε τὴν πρώτην τριμηνίαν τοῦ ἔτους 2857 δραχμάς, τὴν δευτέραν τριμηνίαν 1590, τὴν τρίτην 2018 καὶ τὴν τετάρτην 948· πόσας δραχμὰς ἐκέρδησε καθ' ὅλον τὸ ἔτος τοῦτο;

19) Οἰκογενειάρχης δαπανᾷ κατὰ μῆνα 110 δραχμὰς δι' ἐνοίκιον, 240 διὰ τροφήν, 50 δι' ἐνδύματα καὶ 80 δι' ἔκτακτα ἔξοδα· πόσας δραχμὰς δαπανᾷ κατὰ μῆνα;

20) Παντοπώλης ἠγόρασε τρία εἴδη καφέ·

Ἐκ τοῦ α'	εἴδους	520	ὀκάδας	ἀντὶ δραχμῶν	2080
» » β'	»	1605	»	» »	4815
» » γ'	»	1402	»	» »	3505·

πόσας ὀκάδας καφὲ ἐν ὅλῳ ἠγόρασε καὶ πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

21) Κηπουρὸς θέλει νὰ ποτίσῃ 8 δένδρα κείμενα ἐπ' εὐθείας εἰς ἀπόστασιν 10 μέτρων τὸ ἓν ἀπὸ τοῦ ἄλλου· τὸ φρέαρ, ὅθεν λαμβάνει τὸ ὕδωρ, κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὰ δένδρα εἰς ἀπόστασιν 60 μέτρων ἀπὸ τοῦ πρώτου δένδρου· διὰ τοῦ ὕδατος δέ, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἐκ τοῦ φρέατος, ποτίζει ἑκάστοτε ἓν δένδρον· πόσα μέτρα θὰ διατρέξῃ, διὰ νὰ ποτίσῃ ὅλα τὰ δένδρα καὶ ἐπανέλθῃ ἐκεῖσε, ὅθεν ἀνεχώρησεν, ἤτοι εἰς τὸ φρέαρ;

22) Πόσαι ὧραι εἶνε ἀπὸ τῆς 8ης π. μ. μέχρι τῆς 6ης μ.μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας;

23) Πόσα ἔτη εἶνε ἀπὸ τῆς ἐν Μαραθῶνι μάχης (490 π. Χ.) μέχρις ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως (1453 μ. Χ.);

24) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἀπέθανεν ἐν ἔτει 323 π. Χ. εἰς ἡλικίαν 33 ἐτῶν· πόσα ἔτη εἶνε ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του μέχρι σήμερον;

25) Ἡ Ῥώμη ἐκτίσθη ἐν ἔτει 753 π. Χ.· πόσα ἔτη εἶνε ἀπὸ κτίσεως αὐτῆς μέχρι σήμερον;

26) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1902· πότε θὰ εἶνε 52 ἐτῶν;

27) Μήτηρ ἦτο 22 ἐτῶν, ὅτε ἐγεννήθη τὸ πρῶτον τέκνον της· τοῦτο σήμερον εἶνε 26 ἐτῶν· ποίαν ἡλικίαν ἔχει σήμερον ἡ μήτηρ;

28) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι ἀντὶ 649 δραχμῶν καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 125 δραχμῶν· πόσον τὸ ἐπώλησεν;

29) Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις ὅτι τὸ ἄθροισμα πέντε προσθετέων ἴσων πρὸς τὸν 8 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ὀκτὼ προσθετέων ἴσων πρὸς τὸν 5.

30) Νὰ ληφθῇ ὁ τυχὼν ἀριθμός, π.χ. ὁ 57, καὶ νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὸν ὁ τυχὼν ἀριθμός, π.χ. ὁ 20, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμά των νὰ προστεθῇ πάλιν ὁ 20, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα νὰ προστεθῇ πάλιν ὁ 20 κ.ο.κ., νὰ ἐπαναληφθῇ τοῦτο πολλάκις καὶ νὰ σχηματισθῇ μία σειρὰ ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 57 καὶ ἐφεξῆς εἰς τὴν σειρὰν ταύτην νὰ ἀναγνωρισθῇ ἡ ἑξῆς ἰδιότης· τὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου, τοῦ δευτέρου καὶ προτελευταίου, καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐν γένει δύο ἀριθμῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων, εἶνε πάντα ἴσα μεταξύ των.

31) Εἰς μίαν πόλιν ἦσαν δύο γυμνάσια· εἰς τὰς τέσσαρας τάξεις τοῦ α′ γυμνασίου ἦσαν ἐγγεγραμμένοι 52, 50, 45, 33 μαθηταί, εἰς τὰς ἀντιστοίχους τάξεις τοῦ β′ γυμνασίου ἦσαν 47, 40, 32, 25· ἂν ἀναγκασθοῦν νὰ ἑνώσουν τὰ δύο γυμνάσια εἰς ἓν μόνον, πόσοι θὰ εἶνε οἱ μαθηταὶ τοῦ γυμνασίου τούτου καὶ πόσους μαθητὰς θὰ ἔχῃ ἑκάστη τῶν τάξεων;

32) Οἰκογένειά τις ἀποτελουμένη ἐκ 5 ἀτόμων ἐδαπάνησεν εἰς ἓν ταξίδιον 45 δραχμὰς κατ' ἄτομον· δευτέρα οἰκογένεια ἀποτελουμένη ἀπὸ 7 ἄτομα ἐδαπάνησε 35 δραχμὰς κατ' ἄτομον· Ποία τῶν οἰκογενειῶν ἐδαπάνησε περισσοτέρας δραχμάς;

33) Ἐργάτης ἔλαβε 32 δραχμάς, δεύτερος ἐργάτης ἔλαβε 17 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ πρώτου, τρίτος ἐργάτης ἔλαβε τόσας, ὅσας ἔλαβον ὁμοῦ οἱ δύο πρῶτοι· πόσας δραχμὰς ἔλαβον καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ;

34) Εἴς τινα ἀποθήκην ἦσαν τρία βαρέλια χωρητικότητος 780, 350, 1680 ὀκάδων· εἰς δευτέραν ἀποθήκην ἦσαν τέσσαρα βαρέλια χωρητικότητος 400, 100, 1040, 600 ὀκάδων· εἰς ποίαν μόνην τῶν ἀποθηκῶν δύναται νὰ τοποθετηθῇ οἶνος 2700 ὀκάδων;

35) Προσέθεσέ τις ἀριθμοὺς ἴσους πρὸς τὸν 5612 καὶ εὗρεν ἄθροισμα 22448· τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐκ πόσων προσθετέων εὑρέθη;

36) Ἔμπορος ἔχων 3000 δραχμὰς μετέβη εἰς πανήγυριν, ἔνθα ἐπωλοῦντο ἵπποι πρὸς 370 δραχμὰς ἕκαστος· πόσους τὸ πολὺ ἵππους δύναται νὰ ἀγοράσῃ;

37) Εἰς ποίαν ἰδιότητα στηρίζεται ἡ ἐκτέλεσις τῶν ἀκολούθων ἀφαιρέσεων·

27—9=28—10=18 138—9=139—10=129,....

38) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις·

83+27—12 17— 12+ 5+16

75—20—35 1035—104—57—25

10— 5— 6+ 5 1+2+3+4+5+6+7+8+9—45

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

39) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν 252 δίδει τὸν 540;

40) Ποῖος ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν 548 δίδει τετραψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶνε 7;

41) Ποῖος ἀριθμὸς ἀφαιρούμενος ἀπὸ τὸν 837 δίδει διαφοράν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ ψηφία εἶνε 5; (Ἀπόκρ. 282 ἢ 782 ἢ 832.).

42) Ἔχων τις 5 400 πήχεις ὑφάσματος πωλεῖ ἐξ αὐτοῦ 1 254 πήχεις ἀντὶ 2 508 δραχμῶν· ἔπειτα πωλεῖ 2 500 πήχ. ἀντὶ 5 000 δραχ· πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε καὶ πόσοι πήχεις ἐπερίσσευσαν ἐκ τοῦ ὑφάσματος;

43) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 8 000 δραχμῶν καὶ μετεπώλησεν αὐτὴν ἀντὶ 9 650 δραχμῶν· πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν;

44) Σχολείου ἐκ τριῶν τάξεων ἡ πρώτη τάξις ἔχει 10 μαθητὰς περισσοτέρους ἢ ἡ δευτέρα, ἡ ὁποία ἔχει 8 μαθητὰς ὀλιγωτέρους ἢ ἡ τρίτη, ἥτις ἔχει 17 μαθητάς· πόσοι εἶνε οἱ μαθηταὶ τοῦ σχολείου;

45) Ἀπέθανέ τις ἐφέτος εἰς ἡλικίαν 53 ἐτῶν· πότε ἐγεννήθη;

46) Ἄνθρωπός τις εἰς τὰ 1902 εἶχεν ἡλικίαν 25 ἐτῶν· κατὰ ποῖον ἔτος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 52 ἐτῶν;

47) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν καὶ πρὸς διόρθωσιν αὐτῆς ἐδαπάνησε 3 500 δρχ., ἔπειτα τὴν ἐπώλησεν ἀντὶ 25 000 δραχμῶν καὶ οὕτως ἐκέρδησε 3 000 δραχμάς· πόσον ἠγόρασε τὴν οἰκίαν ταύτην;

48) Ἐκ τινος οἰκίας, τὴν ὁποίαν κατεῖχον 4 ἐνοικιασταί, ὁ ἰδιοκτήτης ἐλάμβανε κατὰ μῆνα 395 δραχμάς· ὁ πρῶτος ἐνοικιαστὴς ἐπλήρωνε 95 δρχ., ὁ δεύτερος 100 καὶ ὁ τρίτος 120· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωνεν ὁ τέταρτος;

49) Ἐκ τινος ἐμπορικοῦ καταστήματος ἠγόρασέ τις μίαν ἐνδυμασίαν ἀντὶ 90 δραχμῶν, ἓν ζεῦγος ὑποδημάτων ἀντὶ 25 δραχμῶν, ἓν ζεῦγος χειροκτίων ἀντὶ 4 δραχμῶν καὶ ἕνα λαιμοδέτην ἀντὶ 3 δραχμῶν· ἐπλήρωσε δὲ ἀπέναντι ὅλων 45 δραχμὰς καὶ μετὰ 15 ἡμέρας ἄλλας 60 δραχμάς· πόσας δραχμὰς χρεωστεῖ ἀκόμη νὰ πληρώσῃ πρὸς ἐξόφλησιν;

50) Ὕφασμα μήκους 125 πήχεων καὶ ἀξίας 285 δρχ. ἐπω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λήθη ὡς ἑξῆς· οἱ 62 πήχεις ἀντὶ 140 δρχ· οἱ 15 πήχεις ἀντὶ 47 δρχ. καὶ οἱ 21 πήχεις ἀντὶ 53 δρχ· πόσοι πήχεις ἔμειναν καὶ πόσον πρέπει νὰ πωληθῶσιν οὗτοι, διὰ νὰ μείνῃ ὁλικὸν κέρδος 80 δραχμῶν;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

27. Ὅταν θέλῃ τις νὰ εὕρῃ, πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 5 πήχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς πωλεῖται 8 δραχμάς, ἀρκεῖ ποοδήλως νὰ προσθέσῃ 5 ἀοιθμοὺς ἴσους ποὸς τὸν 8· θὰ πληρώσῃ δηλονότι δοαχμὰς

$$8+8+8+8+8 \quad \text{ἤτοι } 40\cdot$$

τοιαύτη περίπτωσις ἐπαναλήψεως ἀριθμοῦ τινος πολλάκις ἀπαντᾷ εἰς τὸν καθημερινὸν βίον καὶ διὰ τοιαύτην περίπτωσιν εὑρέθη ἰδιαιτέρα πρᾶξις, ἡ ὁποία λέγεται **πολλαπλασιασμός**. Ἡ πρᾶξις αὕτη γίνεται μὲ δύο μόνον ἀριθμούς, τοιοῦτοι δὲ εἶνε, πρῶτος μὲν ὁ εἷς τῶν ἴσων προσθετέων, δεύτερος δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὸ πλῆθος τῶν ἴσων προσθετέων. Ὁ πρῶτος (ὅστις ἐπαναλαμβάνεται) λέγεται **πολλαπλασιαστέος**· ὁ δεύτερος (ὁ δεικνύων, ποσάκις θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος) λέγεται **πολλαπλασιαστής**· τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως λέγεται **γινόμενον**. Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **παράγοντες** (τοῦ γινομένου).

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ συμβόλου $\times$, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται ἐπὶ καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν δύο παραγόντων κατόπιν τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅστις γράφεται πρῶτος· ἐνίοτε ἀντικαθίσταται τὸ σημεῖον $\times$ διὰ μιᾶς τελείας στιγμῆς· π.χ. 8×5 ἢ $8\cdot5$ σημαίνει ὅτι ὁ 8 θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 καὶ θὰ εἶνε $8\times5=8+8+8+8+8=40$.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς·

28. ***Πολλαπλασιασμὸς εἶνε ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται τὸ***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄθροισμα ἴσων προσθετέων, ὅταν δοθῶσιν ὁ εἷς τῶν ἴσων προσθετέων καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τούτων.

29. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τόσων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων συνάγομεν· α') ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε πάντοτε ἀφῃρημένος ἀριθμός, διότι δεικνύει μόνον, πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος· β') ὁ πολλαπλασιαστέος δύναται νὰ εἶνε εἴτε συγκεκριμένος εἴτε ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ καὶ γ') τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι γίνεται ἐκ τούτου πολλάκις ἐπαναλαμβανομένου· θὰ εἶνε π.χ. 5 δεκάδες $\times$ 3 = 5 δεκάδες + 5 δεκάδες + 5 δεκάδες = 15 δεκάδες. 5 πήχεις $\times$ 3 = 5 πήχεις + 5 πήχεις + 5 πήχεις = 15 πήχεις.

30. *Πολλαπλάσιον* ἀριθμοῦ τινος λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐξ αὐτοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἄλλον· εἰδικῶς λέγεται *διπλάσιον* ἀριθμοῦ τινος τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 2, *τριπλάσιον* δὲ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 3 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Πυθαγόρειος πίναξ.

31. Προσθέτοντες ἑκάστοτε δύο μόνον ἀριθμοὺς εὐκόλως σχηματίζομεν πίνακα πολλαπλασιασμοῦ περιέχοντα τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο, ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 9· κάτωθεν τούτων γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα τῆς προσθέσεως ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς μὲ τὸν ἑαυτόν του· οὕτως ἡ δευτέρα αὕτη σειρὰ θὰ ἔχῃ τὰ διπλάσια τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης· ἔπειτα εἰς τρίτην ὁριζοντίαν γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῶν δύο προηγουμένων σειρῶν (τὰ ὁποῖα προδήλως εἶνε τριπλάσιοι ἀριθμοὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς)· ἔπειτα εἰς τετάρτην σειρὰν γράφομεν τὰ ἐξαγόμενα τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀρι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θμῶν τῆς τρίτης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς, τοιουτοτρόπως δὲ ἐξακολουθοῦμεν, ἕως ὅτου γράψωμεν τὴν θην σειρὰν διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς ὀγδόης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Πίναξ Πυθαγόρειος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, π. χ. τὸ 5×7, ζητοῦμεν τὸν 5 εἰς τὴν α΄

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁριζοντίαν καὶ τὸν 7 εἰς τὴν α' κατακόρυφον στήλην, τότε τὸ γινόμενόν των θὰ εὑρεθῇ ἐκεῖ, ὅπου συναπαντῶνται ἡ ἐκ τοῦ 5 ἀρχομένη στήλη μὲ τὴν ἐκ τοῦ 7 ἀρχομένην κατακόρυφον, ἤτοι εἰς τὸν ἀριθμὸν 35.

Τὰ ἐξαγόμενα τοῦ πίνακος τούτου, ὅστις καλεῖται *Πυθαγόρειος* (διότι λέγεται ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησε τὸν σχηματισμόν του), πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης, διότι θὰ δείξωμεν ὅτι πᾶς πολλαπλασιασμὸς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει γενικάς τινας ἰδιότητας, τὰς ὁποίας εὐκόλως ἀνευρίσκομεν λύοντες τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

Πρόβλημα.

Μία βιβλιοθήκη ἔχει 3 σειρὰς βιβλίων καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει ἀπὸ 8 τόμους· πόσους τόμους βιβλίων ἔχει ἐν συνολῳ ἡ βιβλιοθήκη;

Α' τρόπος λύσεως.

Προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόμων ἑκάστης σειρᾶς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε·

$$8 + 8 + 8 \text{ ἤτοι } 8 \times 3$$

Β' τρόπος λύσεως.

Λαμβάνομεν ἐξ ἑκάστης τῶν τριῶν σειρῶν ἀπὸ ἕνα τόμον, ὁπότε θὰ ἔχωμεν 3 τόμους· τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ δευτέραν φοράν, ἤτοι λαμβάνομεν πάλιν 3 τόμους· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν, ἕως ὅτου κατὰ τὴν ὀγδόην φορὰν ἐξαντληθῶσιν ὅλοι οἱ τό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μοι (δ.ότι ἑκάστη σειρα ἔχει 8 τόμους). Οὕτω βλέπομεν ὅτι ὁ ζητούμενος εἶνε

$$3+3+3+3+3+3+3+3 \text{ ἤτοι } 3\times 8.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο πρέπει νὰ εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον εὑρεθέν, θὰ εἶνε

$$3\times 3 = 3\times 8$$

Ἐντεῦθεν ἡ ἑξῆς ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

Ἰδιότης I.

33. ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἐὰν ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡς πολλαπλασιαστέος.***

Σημείωσις.—Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου (§ 29) ἕπεται ὅτι 0×3 εἶνε τὸ ἄθροισμα $0+0+0$, ἤτο. 0· τὸ γινόμενον ὅμως 3×0 δὲν ὡρίσθη, ὁρίζομεν δὲ τοῦτο μὲ τὴν συνθήκην νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης, θὰ εἶνε δηλονότι $3\times 0 = 0\times 3 = 0$.

Τὸ γινόμενον ἄρα δύο παραγόντων εἶνε μηδέν, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶνε μηδέν.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦντες καὶ διὰ τὸ γινόμενον 3×1 θὰ ἔχωμεν

$$3\times 1 = 1\times 3 = 1+1+1 = 3.$$

Τὸ γινόμενον ἄρα δύο παραγόντων, ὧν ὁ ἕτερος εἶνε ἡ μονὰς 1, ἰσοῦται πρὸς τὸν ἄλλον παράγοντα.

Πρόβλημα.

Πόσα τετράδια πρέπει νὰ ἔχω, διὰ νὰ δώσω εἰς ἕκαστον τῶν 8 μαθητῶν μου α' ἀνὰ 2 τετράδια, β' ἀνὰ 3 καὶ γ' ἀνὰ 4 ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α' τρόπος λύσεως.

Τὴν πρώτην φορὰν χρειάζομαι νὰ ἔχω τετράδια 2×8, τὴν δευτέραν 3×8 καὶ τὴν τρίτην 4×8· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τετραδίων εἶνε

$$2\times8+3\times8+4\times8.$$

Β' τρόπος λύσεως.

Δι' ἕκαστον μαθητὴν χρειάζομαι νὰ ἔχω $2+3+4$ τετράδια, ἤτοι 9· ὥστε διὰ τοὺς 8 μαθητὰς πρέπει νὰ ἔχω ἐν ὅλῳ τετράδια 9×8.

Ἀλλὰ καὶ κατὰ τοὺς δύο τούτους τρόπους λύσεως τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον· θὰ εἶνε ἄρα

$$9\times8=2\times8+3\times8+4\times8.$$

Τὴν ἰσότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(2+3+4)\times8=2\times8+3\times8+4\times8.$$

Ἡ παρένθεσις εἰς τὸ πρῶτον μέλος σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις $2+3+4=9$ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 8, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἐκτελοῦνται πρότερον οἱ πολλαπλασιασμοὶ 2×8, 3×8, 4×8 καὶ ἔπειτα ἡ πρόσθεσις τῶν ἐξαγομένων.

Ἐντεῦθεν ἡ ἑξῆς δευτέρα ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

Ἰδιότης II.

34. ***Ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' αὐτὸν πάντες οἱ προσθετέοι καὶ ἔπειτα προστεθῶσι τὰ γινόμενα.***

ἢ (διὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς τάξεως)·

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ ἔπειτα προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παραδείγματα.

$$(7+3)\times 9 = 7\times 9 + 3\times 9 = 63 + 27 = 90.$$
$$7\times(6+5) = 7\times 6 + 7\times 5 = 42 + 35 = 77.$$

Περιπτώσεις ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

35. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν μηχανισμὸν τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀρχόμεθα ἀπὸ τῶν περιπτώσεων ἐκείνων, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον εὑρίσκομεν ἀμέσως· εἶνε δὲ αὗται αἱ ἑξῆς.

α' Πολλαπλασιασμὸς δύο μονοψηφίων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γνωρίζομεν ἤδη νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὸ γινόμενον.

β' Ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶνε ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶνε σημαντικὸν ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν, καὶ ὁ ἄλλος μονοψήφιος.

Ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον 700×4. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

$700\times 4 = 7$ ἑκατοντάδες $\times 4 = 28$ ἑκατοντάδες $= 2800$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἂν εἰς τὸ γινόμενον 7×4 τῶν σημαντικῶν ψηφίων τῶν παραγόντων προσγράψωμεν τόσα μηδενικά, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ 700.

Παραδείγματα

$300\times 9 = 2700$	$8\times 400 = 3200$
$5000\times 4 = 20000$	$6\times 500 = 3000$
$1000\times 8 = 8000$	$7\times 100 = 700$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἕτερος τῶν παραγόν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των εἶνε ἡ μονας 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, συνάγομεν τάδε·

36. *Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶνε ἡ μονὰς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ γινόμενον ἀμέσως εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν ἄλλον παράγοντα προσγραφῶσι τόσα μηδενικά, ὅσα ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα.*

Γενικῶς·

Ὅταν οἱ δύο παράγοντες εἶνε ἀριθμοὶ ἀποτελούμενοι ἀπὸ ἓν σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν, π.χ. 600×50, τότε εὑρίσκομεν τῶν σημαντικῶν ψηφίων τὸ γινόμενον $6 \times 5 = 30$ καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου προσγράφομεν τὰ τρία μηδενικὰ τῶν παραγόντων· οὕτως εὑρίσκομεν 30 000.

Γενικαὶ περιπτώσεις.

37. Ἐξετάσωμεν ἤδη τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον δὲν εὑρίσκεται ἀμέσως, ἀλλ' ἀπαιτεῖται ἡ ἐκτέλεσις πράξεώς τινος· θὰ διακρίνωμεν δὲ τὰς ἀκολούθους δύο περιπτώσεις.

Α'. Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

38. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν 8067 ἐπὶ 4. Θεωροῦμεν τὸν πολυψήφιον ὡς ἄθροισμα τῶν μερῶν του·

8 χιλιάδες + 6 δεκάδες + 7 μοναδες

καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τεθεῖσαν ἰδιότητα (II) πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 4 καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα·

8 χιλιάδες $\times$ 4, 6 δεκάδες $\times$ 4, 7 μονάδες $\times$ 4,

τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν νὰ ἐκτελῶμεν.

Συντόμως δὲ τὴν πρᾶξιν ἐκτελοῦμεν ὡς ἑξῆς·

8067	Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ
4	πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν πολλαπλασιαστήν· ἔπειτα σύρομεν
32268	γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ λέγομεν· 7 (μονάδες) ἐπὶ 4 ἴσον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

28 (μονάδες)· γράφομεν 4 (μονάδας) ὑπὸ τὴν γραμμήν, τὰς δὲ 20 μονάδας, ὡς 2 δεκάδας, κρατοῦμεν, ἵνα τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 6 δεκάδων ἐπὶ 4 λέγοντες συντόμως 6 ἐπὶ 4 ἴσον 24 καὶ 2 ἴσον 26 (δεκάδες), γράφομεν 6 δεκάδας ὑπὸ τὴν γραμμήν, τὰς δὲ 20 δεκάδας, ὡς 2 ἑκατοντάδας, γράφομεν συγχρόνως πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν 6 δεκάδων, διότι τὸ ζητούμενον γινόμενον δὲν θὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας ἑκατοντάδας, διὰ νὰ προστεθῶσι μὲ αὐτάς, ἀφοῦ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει 0 ἑκατοντάδας (ἠδυνάμεθα ἄλλως νὰ εἴπωμεν 0 ἐπὶ 4 ἴσον 0 καὶ 2 ἴσον 2 ἑκατοντάδες)· τέλος λέγομεν· 8 (χιλιάδες) ἐπὶ 4 ἴσον 32 (χιλιάδες) καὶ ταύτας γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν 2 ἑκατοντάδων. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 32 268.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν κανόνα·

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν· ἐὰν δὲ ἓν μερικὸν γινόμενον περιέχῃ δεκάδας, γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τὰς δὲ δεκάδας του πάσας κρατοῦμεν καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Καλὸν νὰ συνηθίσῃ τις νὰ γράφῃ τὸ γινόμενον ὡς εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

$$9\,587 \times 4 = 38\,348, \qquad 9\,587 \times 6 = 57\,522.$$

Ὁμοίως ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἀλλαγὴν τῆς τάξεως θὰ γράφωμεν·

$$9 \times 70\,342 = 633\,078, \qquad 5 \times 19\,503 = 97\,515.$$

Σημείωσις. — Εὐκόλως ἤδη δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ γινόμενον δύο πολυψηφίων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕτερος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν ψηφίον σημαντικὸν ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν. Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 5000×173. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐπαναλάβωμεν 173 φορὰς τὰς 5 χιλιάδας, ὁπότε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ εὕρωμεν (5×173) χιλιάδας, ἤτοι 865 χιλιάδας=865 000.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

39. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ ἄλλον ἀποτελούμενον ἀπὸ ἓν ψηφίον σημαντικὸν ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον μόνον ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον τοῦ δευτέρου καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον νὰ προσγράψωμεν τὰ μὴ ληφθέντα ὑπ' ὄψιν μηδενικὰ τοῦ δευτέρου.*

Παραδείγματα.

9 587 × 40=383 480.	600× 9 587 = 57 522 000.
38 × 500= 19 000.	500× 1 960 = 980 000.
.....	.....

Β'. Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

40. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 7154×843. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει τὸν ἀριθμὸν 7154 νὰ ἐπαναλάβωμεν 843 φοράς· ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν, ἐὰν τὸν 7154 ἐπαναλάβωμεν πρῶτον 3 φοράς, ἔπειτα 40 φοράς, ἔπειτα ἄλλας 800 φορὰς καὶ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

Ἐκτελοῦντες λοιπὸν τοὺς μερικοὺς τούτους πολλαπλασιασμοὺς ἔχομεν·

7154	7154	7154
3	4(0	8(00
21462	286 160	5723 200

Τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα προσθέτοντες λαμβάνομεν·

21 462 . . . α' μερικὸν γινόμενον
286 160 . . . β' μερικὸν γινόμενον
5 723 200 . . . γ' μερικὸν γινόμενον

6 030 822 . . . ὁλικὸν γινόμενον τοῦ 7154×843.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς συντομίαν τὰς ἀνωτέρω πράξεις διατάσσομεν εἰς ἕνα μόνον πίνακα ὡς ἑξῆς·

7154	πολλαπλασιαστέος
843	πολλαπλασιαστής
21462	α′ μερικὸν γινόμενον (ἐπὶ 3)
28616^{0}	β′ μερικὸν γινόμενον (ἐπὶ 40)
5723^{200}	γ′ μερικὸν γινόμενον (ἐπὶ 800)
6030822	ὁλικὸν γινόμενον τοῦ 7154×843

Τὰ μηδενικὰ τὰ εἰς μικρὸν μέγεθος γεγραμμένα εἰς τὸ τέλος τοῦ β′ καὶ γ′ μερικοῦ γινομένου δύνανται καὶ νὰ παραλειφθῶσιν ἄνευ βλάβης τοῦ ἀποτελέσματος, ἀρκεῖ μόνον νὰ διατηρηθῇ ἡ σχετικὴ θέσις τῶν ἄλλων ψηφίων φυλασσομένων κενῶν τῶν θέσεων τῶν μηδενικῶν.

Ἐκ πάντων τούτων συνάγομεν τὸν κανόνα·

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυψηφίους, γράφομεν τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, ἄγομεν κάτωθεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου νὰ κεῖται κάτωθεν τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, καὶ τέλος προσθέτομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

Σημείωσις α′.—Ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι λήγουν εἰς μηδενικά, ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχον ταῦτα, δεξιὰ δὲ τοῦ γινομένου προσγράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά. Π.χ. πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 4200×36000 πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 42 καὶ 36, εἰς δὲ τὸ γινόμενόν των 1512 προσγράφομεν τὰ παραλειφθέντα πέντε μηδενικὰ τῶν δύο παραγόντων.

42(00
36(000
252
126
151200000

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει.

Σημείωσις β′.—Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλλάσσει, ὅταν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, ἐκλέγομεν ὡς πολλαπλασιαστὴν ἐκεῖνον, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὰ ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα· π.χ. προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5009 καὶ 2154 θὰ ἐκλέξωμεν ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 5009, διότι οὕτω θὰ ἔχωμεν μόνον δύο μερικὰ γινόμενα, ἕνεκα τῶν ὑπαρχόντων εἰς αὐτὸν μηδενικῶν· ἐνῷ, ἂν λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 2154, θὰ ἔχωμεν τέσσαρα μερικὰ γινόμενα.

2154
5009
19386
10770
10789386

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

41. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν πολλαπλασιασμός τις ἐγένετο ἄνευ λάθους, ἐπαναλαμβάνομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν γράφοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστέον, ἂν δὲ καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, εἶνε πιθανόν, ὅτι ὁ πρῶτος πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ἄνευ λάθους. Ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε ἴσοι, τότε ἡ δοκιμὴ καταντᾷ εἰς τὴν ἐπανάληψιν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασμοῦ.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

42. *Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ.*

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *παράγοντες* (τοῦ γινομένου).

Διὰ νὰ σημάνωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων, γράφομεν τοὺς παράγοντας κατὰ σειρὰν καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Π. χ. $3 \times 5 \times 7 \times 2$ σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 3 ἐπὶ 5, τὸ γινόμενόν των 15 ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

7 καὶ τὸ γινόμενόν των 105 ἐπὶ 2· οὕτως εὑρίσκεται ὁ 210, ὅστις λέγεται γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὅταν εἷς τῶν παραγόντων εἶνε ἐπίσης γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, τότε τὸν γράφομεν ἐντὸς παρενθέσεως. Π. χ. $3\times(5\times7\times2)\times4$ σημαίνει, ὅτι μετὰ τὸν λογισμὸν τοῦ γινομένου $5\times7\times2=70$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 3 ἐπὶ 70 καὶ τὸ γινόμενον τούτων 210 ἐπὶ 4.

Ἰδιότητες γινομένου πολλῶν παραγόντων.

43. *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθοῦν οἱ παράγοντες.*

π. χ. $3\times5\times7\times2=7\times3\times5\times2=2\times5\times3\times7=\ldots\ldots=210$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἐλευθερίαν ταύτην περὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐκλέγωμεν τοὺς παράγοντας κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε οἱ πολλαπλασιασμοὶ νὰ γίνωνται ὅσον τὸ δυνατὸν εὐκολώτερον· εἰς τὸ ἀνωτέρω λ. χ. παράδειγμα τὸ γινόμενον 210 εὑρίσκομεν εὐκολώτερον, ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς εἴτε κατὰ τὴν τάξιν 2.5.7.3, εἴτε κατὰ τὴν τάξιν 5.2.3.7.

44. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν, εἴτε εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον καὶ ἔπειτα τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, εἴτε πολλαπλασιάζομεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τοῦ ἐξαγομένου καὶ τῶν λοιπῶν παραγόντων.*

Π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $2\times5\times4$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν 40 (ὅστις εἶνε τὸ ληφθὲν γινόμενον), ἐπὶ 3, ἢ πολλαπλασιάζομεν, ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου, λ. χ. τὸν 5, ἐπὶ 3, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $2\times15\times4$, ἤτοι πάλιν 120.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ταῦτα σημαίνομεν ὡς ἑξῆς·

$$(2\times5\times4)\times3 = 2\times15\times4 = 120.$$

45. ***Εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ συγχωνεύσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας εἰς ἕνα μόνον πολλαπλασιάζοντες αὐτούς· τἀνάπαλιν δυνάμεθα ἕνα παράγοντα νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον·*** π. χ. $2\times3\times5\times4 = 2\times15\times4$.

Ἐφαρμογαί.

α') $800\times5\times24\times20=8\times100\times24\times100=192\times10000=1920000$.
β') $250\times160\times4=25\times4\times16\times100=16\times100\times100=16000$.
γ') $240\times50\times40=24\times5\times4\times1000=24\times20\times1000=480000$.

. . . . . .

Περὶ τῶν δυνάμεων.

46. Ὅπως τὸ ἄθροισμα ἴσων ἀριθμῶν, π. χ. $5+5+5+5$, γράφομεν συντόμως 5×4, οὕτω κατ' ἀνάλογον τρόπον γινόμενον ἴσων παραγόντων, π.χ. $5\times5\times5\times5$, θὰ τὸ γράφωμεν συντόμως 5^4, ἤτοι θὰ γράφωμεν τὸν ἕνα μόνον τῶν ἴσων παραγόντων καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ἀνωτέρω τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων.

47. ***Δύναμις ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.***

Ἰδιαιτέρως λέγεται ***δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον***, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε δύο, ***τρίτη δύναμις ἢ κύβος***, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε τρεῖς, ***τετάρτη δύναμις***, ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε τέσσαρες κ.ο.κ.

Οὕτω $5\times5=5^2=$	25	τετράγωνον ἢ δευτέρα δύναμις τοῦ 5,
$2\times2\times2=2^3=$	8	κύβος ἢ τρίτη δύναμις τοῦ 2.
$4\times4\times4\times4=4^4=$	256	τετάρτη δύναμις τοῦ 4.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ εἷς τῶν ἴσων παραγόντων πάσης δυνάμεως λέγεται **βάσις τῆς δυνάμεως**· ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων (τῆς δυνάμεως) λέγεται **ἐκθέτης τῆς δυνάμεως**. Π.χ. τῆς δυνάμεως 2^5, ἤτοι τοῦ γινομένου $2\times2\times2\times2\times2$, βάσις εἶνε ὁ 2 καὶ ἐκθέτης ὁ 5.

Πᾶσα δύναμις τῆς μονάδος 1 ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα 1.

Τῷ ὄντι, $1^2=1\times1=1$, $1^3=1\times1\times1=1$ κ.ο.κ.

Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶνε ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσος εἶνε ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως.

Τῷ ὄντι, $10^3=10\times10\times10=1000$, $10^2=10\times10=100$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

51) Πόσα μερικὰ γινόμενα θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 2503×304; Ποίας τάξεως μονάδας παριστᾷ ἕκαστον τῶν μερικῶν γινομένων;

52) Νὰ λογισθῶσιν ἀπὸ στόματος τὰ γινόμενα 50×2, 60×3, 700×4, κ.ο.κ.

53) Νὰ λογισθῶσιν ἀπὸ στόματος τὰ γινόμενα διψηφίων ἐπὶ τοὺς μονοψηφίους.

54) Νὰ λογισθῶσιν ἀπὸ στόματος τὰ γινόμενα 250×2, 250×3, ..., 250×9.

55) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἑκατονταπλάσιον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 153, 1050, 30, 29.

56) Νὰ ἐξηγηθῶσιν αἱ ἰσότητες

$$378\times999=378\,000-378=377\,622$$
$$1530\times99=153\,000-1530=151\,470$$
$$999\times75=75\times999=75000-75=74\,925.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἑξῆς συντομία ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ· *Τὸ γινόμενον οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶνε 9, εὑρίσκομεν συντόμως, ἂν πρὸς τὰ δε-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου προσγράψωμεν τόσα μηδενικά, ὅσα εἶνε τὰ 9 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔπειτα ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιρέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

57) Νὰ ἐξηγηθῶσιν αἱ ἑξῆς ἰσότητες·

$$378 \times 599 = 378 \times 600 - 378 = 226\,800 - 378 = 226\,422$$
$$1502 \times 19 = 1502 \times 20 - 1502 = 30040 - 1502 = 28\,538$$
$$3999 \times 23 = 23 \times 3999 = 23 \times 4000 - 23 = 92\,000 - 23 = 91\,977.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ἡ ἑξῆς συντομία ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ· *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία πλὴν τοῦ πρώτου εἶνε 9, εὑρίσκεται, ἂν ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν κατὰ μονάδα μεγαλύτερον ἀριθμὸν (τὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ ἓν σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν) καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ἅπαξ ὁ πολλασιαζόμενος ἀριθμός.*

58) Νὰ ἐξηγηθῶσιν αἱ ἰσότητες

$$3835 \times 997 = 3835000 - 3835 \times 3 = ;$$
$$1297 \times 95 = 129700 - 1297 \times 5 = ;$$
$$73 \times 1003 = 73000 + 73 \times 3 = ;$$

59) Νὰ κατασκευασθῇ πίναξ πολλαπλασιασμοῦ μέχρι τοῦ 12.

60) Νὰ διακριθῶσιν ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ τὸ γινόμενον εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα. «Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζομεν 6 ὀκάδας μήλων· πόσας ὀκάδας μήλων θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 14 τάλληρα ;»

61) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 8 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν οἱ 17 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

62) Ἕκαστος στίχος μιᾶς σελίδος περιέχει 32 γράμματα καὶ ἡ σελὶς περιέχει 35 στίχους· πόσα γράμματα περιέχει ἡ σελίς ;

63) Πόσας δραχμὰς λαμβάνει ὑπάλληλός τις κατ' ἔτος, ὅταν κατὰ μῆνα λαμβάνῃ 350 δραχμάς ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

64) Ὁ εἷς πῆχυς ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 ῥούπια· ἀπὸ πόσα ῥούπια ἀποτελοῦνται 17 πήχεις;

65) Ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια· πόσα δράμια ἔχουν 44 ὀκάδες;

66) Ὁ στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας· πόσας ὀκάδας ἔχουν οἱ 15 στατῆρες;

67) Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως εἶνε 40· ἕκαστος τῶν μαθητῶν πληρώνει δίδακτρα 8 δραχμὰς τὸν μῆνα· πόσας δραχμὰς εἰσπράττει κατὰ μῆνα ὁ διδάσκαλος;

68) Οἰκία τις ἀποφέρει 150 δραχμὰς τὸν μῆνα ἐξ ἐνοικίου· δευτέρα οἰκία ἀποφέρει τὸ διπλάσιον τῆς πρώτης καὶ τρίτη τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων· πόσον εἰσόδημα δίδουν κατὰ μῆνα καὶ αἱ τρεῖς ὁμοῦ οἰκίαι;

Ἀπόκρισις· $[150+150\times2+(150+150\times2)\times2]=150\times9$.

69) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων γινομένου τινὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ γινόμενον θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοῦτον.

Ὁ πολλαπλασιαζόμενος παράγων δύναται νὰ εἶνε ἢ πολλαπλασιαστέος ἢ πολλαπλασιαστής, ἀλλ' ἕνεκα τῆς ἰδιότητος I (§ 33) θεωροῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τινα ἀριθμόν. Π. χ. λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $(8\times3)\times4$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ 8×4. Τῷ ὄντι, τὸ 8×4 εἶνε ἄθροισμα 4 ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν 8· τὸ δὲ $(8\times3)\times4$ εἶνε ἄθροισμα τεσσάρων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 φορὰς τὸν 8· τὸ δεύτερον ἄρα γινόμενον ὡς περιέχον τριπλάσια 8 ἢ τὸ πρῶτον εἶνε τριπλάσιον τοῦ πρώτου γινομένου 8×4.

8	8×3
4	4
8	8,8,8
8	8,8,8
8	8,8,8
8	8,8,8

Νὰ ἐξαχθῇ ἐντεῦθεν ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γινομένου ἐπὶ ἀριθμόν.

70) Ἐκ τῶν γινομένων 5×87 καὶ 500×87, ποῖον τὸ μεγαλύτερον καὶ ποσαπλάσιον τοῦ μικροτέρου εἶνε;

71) Οἰκία τις ἔχει 23 παράθυρα· ἕκαστον παράθυρον ἔχει 4

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑαλοπίνακας· ἕκαστος ὑαλοπίναξ πωλεῖται 2 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν ὅλοι οἱ ὑαλοπίνακες τῆς οἰκίας ;

Α΄. Τρόπος λύσεως.

Ἀξία τῶν ὑαλοπινάκων ἑνὸς παραθύρου .... 2 δρ. $\times$ 4. Ἀξία τῶν ὑαλοπινάκων 23 παραθύρων . . . (2 δρ. $\times$ 4) $\times$ 23, ἤτοι 8 δρχ. $\times$ 23 = 184 δραχ.

Β΄. Τρόπος λύσεως.

Ἀριθμὸς ὅλων τῶν ὑαλοπινάκων .... 4 $\times$ 23. Ἀξία τούτων. . . 2 δρχ. $\times$ (4 $\times$ 23) = 2 δρχ. $\times$ 92 = 184 δρχ.

Τὸ ζητούμενον 184 δραχμαὶ κατὰ μὲν τὸν β΄ τρόπον εὑρέθη διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 2 δραχμῶν ἀμέσως ἐπὶ τὸ γινόμενον 4 $\times$ 23, κατὰ δὲ τὸν α΄ τρόπον εὑρέθη ἀλλεπαλλήλως διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 2 δρχ. ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 23. Ἐντεῦθεν ἡ ἰδιότης·

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν εἴτε πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ δεύτερον καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τρίτον εἴτε πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου.

Εἶνε δηλονότι 2 $\times$ 4 $\times$ 23 = 2 $\times$ (4 $\times$ 23).

72) Τίς ἡ ἀξία 25 τεμαχίων ὑφάσματος, τῶν ὁποίων ἕκαστον ἀποτελεῖται ἐκ 35 πήχεων, ἂν ἡ ἀξία τοῦ πήχεως εἶνε 12 δραχμαί ;

73) Ἠγόρασέ τις 18 δωδεκάδας ὑποκαμίσων πρὸς 8 δραχμὰς ἕκαστον καὶ ἐπώλησε τὰς μὲν 8 δωδεκάδας μὲ κέρδος μιᾶς δραχμῆς καθ' ὑποκάμισον, τὰς δὲ λοιπὰς δωδεκάδας μὲ κέρδος 2 δραχμῶν καθ' ὑποκάμισον· πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ;

74) Ὑπάλληλος λαμβάνων 350 δραχμὰς μηνιαῖον μισθὸν οἰκονομεῖ 3 δραχ. τὴν ἡμέραν· πόσας ἐξοδεύει καὶ πόσας οἰκονομεῖ κατ' ἔτος (1 ἔτος = 365 ἡμέρας) ;

75) Πόσους στρατιώτας ἔχουν 5 συντάγματα, ὅταν τὸ σύν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ταγμα ἔχῃ 3 τάγματα, τὸ τάγμα 4 λόχους καὶ ὁ λόχος 120 στρατιώτας ;

76) Πόσον ἀξίζουν 7 δωδεκάδες μανδηλίων, ὧν ἕκαστον ἀξίζει 35 λεπτά ;

77) Νὰ ἐξηγηθῶσιν αἱ ἰσότητες

$$800\times125\times75=8\times100\times125\times75=75\times1000\times100=7\,500\,000$$

$$25\times24=25\times4\times6=100=600$$

$$150\times42=150\times6\times7=900\times7=6\,300.$$

78) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα καὶ οἱ κύβοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ..., 9,10.

79) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 40, 500, 600 καὶ ἐν γένει παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν σημαντικὸν ψηφίον παρακολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν.

80) Ποιμὴν ἠγόρασεν 180 πρόβατα πρὸς 20 δραχμὰς ἕκαστον. Ἐκ τῶν προβάτων τούτων τὰ δώδεκα ἀπωλέσθησαν, τὰ δὲ λοιπὰ ἐπωλήθησαν πρὸς 25 δραχμὰς ἕκαστον· ὑπῆρξε ζημία ἢ κέρδος;

81) Ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν εἶδον τὴν ἀστραπήν, μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἤκουσα τὴν βροντήν, παρῆλθον 10 δεύτερα λεπτὰ τῆς ὥρας· εἶνε δὲ γνωστόν, ὅτι τὸ μὲν φῶς ἔρχεται σχεδὸν τὴν αὐτὴν στιγμήν, ὁ δὲ ἦχος διατρέχει 340 μέτρα εἰς ἕκαστον δεύτερον λεπτόν· πόσον μακρὰν ἦτο τὸ σύννεφον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγένετο ἡ βροντή ;

82) Βαδίζων τις κάμνει 110 βήματα εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας· πόσα βήματα κάμνει εἰς 1 ὥραν καὶ 25 λεπτὰ τῆς ὥρας ; (1 ὥρ.=60′).

83) Ὁ πατὴρ μιᾶς οἰκογενείας κερδίζει 8 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, ὁ πρῶτος υἱός του 5 καὶ ὁ δεύτερος 3· ἡ οἰκογένεια ἐξοδεύει κατὰ μῆνα πρὸς συντήρησίν της 400 δραχμάς· πόσαι δραχμαὶ μένουν περίσσευμα τὸ ἔτος εἰς τὴν οἰκογένειαν ταύτην ;

84) Γεωργὸς ἐπώλησε 2600 ὀκάδας κριθῆς πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· καὶ 5000 ὀκάδας σίτου πρὸς 45 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐκ τῶν εἰσπραχθέντων ἐπλήρωσεν ἓν χρέος του ἐκ δραχμῶν 845,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(1 δραχ.=100 λεπτά)· πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς τὸν γεωργόν;

85) Δεξαμενὴ περιέχουσα 20 000 ὀκάδας ὕδατος κενοῦται διὰ δύο κρουνῶν· ἐκ τοῦ πρώτου κρουνοῦ καθ' ὥραν ῥέουσιν 190 ὀκάδες, ἐκ τοῦ δευτέρου 200 ὀκάδες· πόσον ὕδωρ θὰ ἐκρεύσῃ καὶ ἐκ τῶν δύο ὁμοῦ κρουνῶν μετὰ 15 ὥρας καὶ πόσον θὰ μείνῃ εἰς τὴν δεξαμενήν;

86) Εἰς μίαν μάχην ἔλαβον μέρος 18 τάγματα, ἕκαστον ἐκ 4 λόχων, τῶν ὁποίων ἕκαστος ἀπετελεῖτο ἐξ 120 στρατιωτῶν· κατὰ μέσον ὅρον ἕκαστος τῶν στρατιωτῶν κατηνάλωσε 50 φυσίγγια· ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν καταναλωθέντων φυσιγγίων;

87) Νὰ ἀναγνωρισθῇ διὰ παραδειγμάτων, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε διαδοχικῶν περιττῶν[1]) ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἐφεξῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου αὐτῶν. π. χ. $1+3+5+7+9=9^2=81$.

88) Νὰ δικαιολογηθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου 3542×94 κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον·

$$\begin{array}{rcr} 3542\times100 & = & 354200 \\ 3542\times\ \ 6 & = & 21252 \\ \hline & & 332948 \end{array}$$

89) Νὰ δικαιολογηθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου 7545×56 κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον·

$$\begin{array}{rcr} 7545\times8 & = & 60360 \\ 7545\times8\times7 & = & 422520 \end{array}$$

90) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶνε 57, ὁ μεγαλύτερος τῶν δύο ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης ταύτης διαφορᾶς· νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε $57^3\times56$.

91) Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τοῦ ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώ-

---

[1]) *Περιττοὶ* (μονοὶ) λέγονται οἱ ἀριθμοί, ὧν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε 1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νων τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅταν τὸ ἄθροισμα τούτων αὐξηθῇ κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἰδίων ἀριθμῶν.

92) Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τοῦ ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων δίδει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πρόβλημα Α')

48. *Διδάσκαλος θέλει νὰ μοιράσῃ 64 τετράδια ἐξ ἴσου εἰς τοὺς 20 μαθητάς του· πόσα τετράδια θὰ δώσῃ εἰς ἕκαστον τῶν μαθητῶν;*

Λύσις.

Ἀπὸ τὰ 64 τετράδια χωρίζει κατ' ἀρχὰς 20 καὶ ἐκ τούτων δίδει ἀπὸ ἓν εἰς ἕκαστον τῶν μαθητῶν· ἀπὸ τὰ μείναντα 44 τετράδια χωρίζει ἔπειτα ἄλλα 20 καὶ πάλιν δίδει ἀπὸ ἓν εἰς ἕκαστον τῶν μαθητῶν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου μείνουν ὀλιγώτερα τῶν 20 τετραδίων. Ἡ ἐργασία αὕτη ἀριθμητικῶς ἐκτελεῖται, ἂν ἀπὸ τὸν 64 ἀφαιρεθῇ ὁ 20, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 44 ἀφαιρεθῇ πάλιν ὁ 20 κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ 20. Εἶνε φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων, αἵτινες δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν, εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τετραδίων. Οὕτως εὑρίσκεται, ὅτι ἕκαστος τῶν μαθητῶν θὰ λάβῃ 3 τετράδια, (διότι 3 ἀφαιρέσεις ἐγένοντο), θὰ περισσεύσουν ὅμως 4 τετράδια, μὴ ἀρκοῦντα νὰ μοιρασθοῦν εἰς τοὺς 20 μαθητάς.

64 τετρ.		
20	»	1 τετρ.
44	»	
20	»	1 »
24	»	
20	»	1 »
4	»	3 »

Πρόβλημα Β')

49. *Διδάσκαλος ἐμοίρασεν ἐξ ἴσου 64 τετράδια εἰς τοὺς μαθητάς του καὶ ἕκαστος τούτων ἔλαβεν 20 τετράδια· πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί;*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις.

Ἂν ἀπὸ τὸν 64 ἀφαιρεθῇ ὁ 20, ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον ἀφαιρεθῇ πάλιν ὁ 20 κ.ο.κ. μέχρις ὅτου μείνῃ ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ 20, ἔπειτα δὲ μετρηθοῦν αἱ ἀλλεπάλληλοι αὗται ἀφαιρέσεις, εἶνε φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁρίζων τὸ πλῆθος τῶν ἀφαιρέσεων τούτων ἐκφράζει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν, ἀφοῦ ἀνὰ 20 τετράδια ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕκαστον τῶν μαθητῶν.

50. Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, καίτοι διάφορα, λύονται μὲ τὴν ἰδίαν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν.

Εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ δοθὲν πλῆθος μονάδων (64 *τετράδια*) ***εἰς δοθέντα ἀριθμὸν*** (20) ***ἴσων μεριδίων, καὶ νὰ εὑρεθῇ, πόσαι μονάδες ἀποτελοῦν ἕκαστον τῶν μεριδίων τούτων.***

Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα ζητεῖται νὰ χωρισθῇ δοθὲν πλῆθος μονάδων (64 τετράδια) εἰς μέρη, ὧν ἕκαστον νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ δοθὲν πλῆθος μονάδων (20 τετράδια) καὶ ἔπειτα νὰ μετρηθῶσι, πόσα εἶνε τὰ χωρισθέντα ταῦτα μέρη.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν εὑρίσκομεν δι' ἀλλεπαλλήλων ἀφαιρέσεων, ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ τὸν εὑρίσκωμεν καὶ διὰ δοκιμαστικῶν πολλαπλασιασμῶν ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ἀπὸ τὸν 64 δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 20 ἀλλεπαλλήλως τρεῖς φορὰς καὶ οὐχὶ τέσσαρας φοράς, διὰ τοῦτο εἶνε δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 64 τὸ ἄθροισμα τριῶν καὶ οὐχὶ τεσσάρων ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν 20· μὲ ἄλλας λέξεις ἀπὸ τὸν 64 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ 20 ἐπὶ 3 καὶ οὐχὶ τὸ γινόμενον τοῦ 20 ἐπὶ 4· ὁ ἀριθμὸς ἄρα 3 ὁ δεικνύων, πόσας φορὰς ἀλλεπαλλήλως ὁ 20 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 64, ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ εἶνε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις μὲ τὸν 20 δίδει γινόμενον μὴ ὑπερβαῖνον τὸν 64· διὰ νὰ εὕρωμεν ἄρα τὸν περὶ οὗ ὁ λόγος μεγαλύτερον ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα, ποσάκις τὸ πλεῖστον ὁ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

20 εἰσέρχεται εἰς τὸν 64, ἐκτελοῦμεν δοκιμαστικοὺς πολλαπλασιασμοὺς τοῦ 20 ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3.

Καὶ ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος καθὼς καὶ ὁ τῶν διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων, εἶνε ἐπίσης ἐπίπονος· ἐπειδὴ ὅμως οἱ δοκιμαστικοὶ πολλαπλασιασμοὶ δὲν ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, δύνανται νὰ περιορισθῶσι κατὰ τὸ πλῆθος, ὡς κατωτέρω θὰ ἴδωμεν.

Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο μεθόδων προκύπτει ἡ τετάρτη τῶν θεμελιωδῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς· ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται **διαίρεσις** καὶ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς·

51. *Διαίρεσις δοθέντος ἀριθμοῦ διά τινος δευτέρου εἶνε ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ δεύτερος τῶν δοθέντων δίδει γινόμενον μὴ ὑπερβαῖνον τὸν πρῶτον.*

Ὁ πρῶτος τῶν δοθέντων λέγεται **διαιρετέος,** ὁ δεύτερος **διαιρέτης,** τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται **πηλίκον**· καὶ ὁ μένων ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον διαιρέτου καὶ πηλίκου, λέγεται **ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ :, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **διὰ** καὶ γράφεται μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, γραφομένου πρώτου τοῦ διαιρετέου· οἷον 18 : 6 σημαίνει, ὅτι ὁ 18 πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ 6.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

52. Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶνε μηδέν, ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία,* ἄλλως λέγεται *ἀτελής.*

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος λέγεται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Μὲ τελείαν διαίρεσιν λύεται καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Δοθέντος τοῦ γινομένου δύο παραγόντων καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος».

Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Παρατήρησις.

53. Τὰ ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν προβλήματα τὰ λυόμενα διὰ διαιρέσεως εἶνε δύο εἰδῶν· α') *προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ μερίσωμεν τὸν διαιρετέον ἀριθμὸν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ διαιρέτου,* καὶ β') *προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶνε ἀνάγκη νὰ μετρήσωμεν, πόσας φορὰς ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην.*

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ πρόβλημα λύεται διὰ διαιρέσεως ἀναγομένης **εἰς μερισμόν**, καί, ἂν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία, καθ' ὅσον ὁ διαιρετέος μερίζεται εἰς 2, 3, 4, κ.τ.λ. ἴσα μέρη, θὰ ὀνομάζωμεν ἕκαστον τῶν ἴσων μεριδίων: **τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον** κ.τ.λ. τοῦ διαιρετέου.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ πρόβλημα λύεται διὰ διαιρέσεως ἀναγομένης **εἰς μέτρησιν.**

Ἐπὶ ἀφηρημένων ἀριθμῶν τὴν διαίρεσιν θεωροῦμεν ἀδιαφόρως εἴτε ὡς μερισμὸν εἴτε ὡς μέτρησιν.

54. Ἐκ τῶν λεχθέντων εὐκόλως συνάγομεν τάδε·

α') *Ὅταν διαιρέτης εἶνε ἡ μονὰς 1, τὸ πηλίκον ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον·* π. χ. 17:1 = 17· διότι ἡ μονὰς 1 εἰσέρχεται 17 φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον 17.

β') *Ὅταν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶνε ἡ μονὰς* 1· π. χ. 17:17 = 1· διότι, ἐὰν μοιράσωμεν 17 πράγματα εἰς 17 ἀνθρώπους, ἕκαστος θὰ λάβῃ ἓν ἐκ τῶν πραγμάτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ') *Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ μὲν πηλίκον εἶνε μηδέν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶνε αὐτὸς ὁ διαιρετέος.*

δ') *Τὸ πηλίκον διαιρέσεως εἶνε μονοψήφιον, ὅταν διὰ τῆς προσγραφῆς ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου·* π. χ. ἡ διαίρεσις 535:67 ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· διότι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ 67, ἤτοι ὁ 670, δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον 535, κατ' ἀκολουθίαν ὁ διαιρέτης 67 εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον ὀλιγωτέρας ἢ 10 φορὰς καὶ τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον.

Α'. Διαίρεσις ἔχουσα πηλίκον μονοψήφιον.

55. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ταχέως καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κανόνος ἐκτελέσεως διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

Διαιρέτης καὶ πηλίκον μονοψήφιος ἀριθμός.

α') Ἔστω ἡ διαίρεσις 58:8, εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιοι ἀριθμοί· διότι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι ὁ 80, δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον 58.

Ὅταν εἶνε γνωστὸς ἀπὸ μνήμης ὁ Πυθαγόρειος πίναξ, ἀμέσως εὑρίσκεται, ὅτι 7 εἶνε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενος ὁ διαιρέτης 8 δίδει γινόμενον μὴ ὑπερβαῖνον τὸν διαιρετέον 58· πηλίκον ἄρα τῆς διαιρέτεως 58:8 εἶνε ὁ 7 καὶ ὑπόλοιπον ὁ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ 8×7 ἀπὸ τοῦ 58 προκύπτων ἀριθμὸς 2.

β') Ἔστω ἡ διαίρεσις 4 937:600, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρέτης εἶνε σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ἀπὸ μηδενικὰ καὶ πηλίκον πάλιν μονοψήφιον· διότι διὰ τῆς προσγραφῆς ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὸν διαιρέτην προκύπτει ἀριθμὸς 6000 μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου 4 937.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 6 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου μόνον εἰς τὰς 49 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου δύνανται νὰ εἰσέρχωνται καὶ εἰσέρχονται 8 φοράς· τὸ πηλίκον ἄρα τῆς διαιρέσεως 4 937:600 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 49:6, εἶνε δηλονότι ὁ ἀριθμὸς 8, ὑπόλοιπον δὲ εἶνε ἡ διαφορά·

$$4\,937 - 600 \times 8 = 4\,937 - 4\,800 = 137.$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ἀπὸ μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, παραλείπομεν ἐπίσης καὶ ἄλλα τόσα ψηφία ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τῶν μενόντων ἀριθμῶν καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν καὶ τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον γίνεται ὡς ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει.

49(37	6(00
48	8
137	

γ') Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος ἐν γένει ἀριθμός· ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις 4937 : 641, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον (§ 54 δ').

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἂν διαιρέτης ἦτο οὐχὶ ὁ 641, ἀλλ' ὁ ἀπὸ 6 ἑκατοντάδας ἀποτελούμενος ἀριθμὸς 600, τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πηλίκον θὰ ἦτο ὁ 8.

Ἀλλ' ὁ δοθεὶς διαιρέτης 641 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 600, διὰ τοῦτο εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον ἢ 8 φοράς (ὅσας καὶ ὁ 600) ἢ ὀλιγωτέρας ἀπὸ 8 φοράς· διὰ νὰ εὕρωμεν ἄρα τὸ πηλίκον, δοκιμάζομεν τὸν 8 καὶ παρατηροῦμεν, ἂν τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ διαιρέτου εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον, τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει, διότι εἶνε·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$641 \times 8 = 5128 > 4937$$ *

τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον εἶνε μικρότερον τοῦ 8· διὰ τοῦτο δοκιμάζομεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὸν 7 καὶ εὑρίσκομεν·

$$641 \times 7 = 4487 < 4937$$

Τὸ πηλίκον ἄρα εἶνε 7, διότι τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ διαιρέτου εἰσέρχεται εἰς τὸν διαιρετέον, οὐχὶ δὲ τὸ ὀκταπλάσιον. Ἀφαιροῦντες ἤδη ἀπὸ τὸν διαιρετέον 4937 τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ διαιρέτου, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 4487, εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 450.

Ἔστω ἐπίσης καὶ τὸ ἑξῆς δεύτερον παράδειγμα τῆς εὑρέσεως τοῦ μονοψηφίου πηλίκου τῆς διαιρέσεως 26357 : 2995.

Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέτης ἦτο ὁ ἀριθμὸς 2 χιλιάδες, θὰ εἰσήρχετο μόνον εἰς τὰς 26 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου καὶ θὰ εἰσήρχετο 13 φοράς.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ 2995 εἶνε μεγαλύτερος τῶν 2 χιλιάδων, θὰ εἰσέρχηται εἰς τὸν διαιρετέον ἢ 13 ἢ ὀλιγωτέρας φοράς, καί, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς εἰσέρχεται, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τὸν 9, παραλείπομεν δὲ τὰς δοκιμὰς τῶν 13, 12, 11, 10, διότι γνωρίζομεν (§ 54 δ'), ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον.

Ἡ δοκιμὴ τοῦ 9 δίδει $2995 \times 9 = 26955 > 26357$· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε μικρότερον τοῦ 9.

Ἡ δοκιμὴ τοῦ 8 δίδει $2995 \times 8 = 23960 < 26357$· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε ὁ 8 καὶ ὑπόλοιπον ἡ διαφορά·

$$26357 - 2995 \times 8 = 26357 - 23960 = 2397.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

56. *Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον, διὰ νὰ τὸ εὕρωμεν, παρατηροῦμεν, ὁποίας μονάδας παριστάνει τὸ πρῶτον ψηφίον*

---

*) Πρὸς παράστασιν τῆς ἀνισότητος δύο ἀριθμῶν γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον > μὲ τὴν κορυφὴν ἐστραμμένην πρὸς τὸν μικρότερον ἀριθμόν· οὕτως ἡ ἀνωτέρω παράστασις σημαίνει ὅτι ὁ 5128 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 4937.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ διαιρέτου καὶ χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει τὰς ὁμοίας μονάδας τὰς περιεχομένας εἰς τὸν διαιρετέον· τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον δοκιμαζομεν (ἂν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἄλλως ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9) πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην ὁλόκληρον καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ ἔχωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἐὰν δὲ δὲν ἀφαιρῆται, δοκιμάζομεν καθ' ὅμοιον τρόπον τοὺς κατὰ 1, 2 κ.τ.λ. μονάδας μικροτέρους ἀριθμούς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ὁπότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον τῆς διαιρέσεως καὶ ἡ μένουσα διαφορὰ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα εἶνε ἡ ἑξῆς·

α' παράδειγμα:	4937	641	4937	641
	5128	8	4487	7
	δὲν ἀφαιρεῖται		450	
β' παράδειγμα:	26357	2995	26357	2995
	26955	9	23960	8
	δὲν ἀφαιρεῖται		2397	

Ἐν τῇ πράξει, χάριν συντομίας, ἀντὶ νὰ γράφωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ὑπὸ τὸν διαιρετέον καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρῶμεν, ἐκτελοῦμεν συγχρόνως τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἑξῆς·

4937	641	26357	2995
450	7	2397	8

Β'. Διαίρεσις ἔχουσα πηλίκον πολυψήφιον.

57. Ἔστω ἡ διαίρεσις 89595 : 284, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον, διότι ὁ διαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ δεκα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλασίου τοῦ διαιρέτου. Τὴν διαίρεσιν ταύτην ἐκτελοῦμεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς.

Αἱ 8 δεκάδες χιλιάδες τοῦ διαιρετέου, ἂν μείνωσι τοιαῦται, δὲν μερίζονται εἰς 284 ἴσα μερίδια, ὁμοίως καὶ αἱ 89 χιλιάδες, ἐνῷ αἱ 895 ἑκατοντάδες ἄνευ τῆς τροπῆς αὐτῶν εἰς μονάδας κατωτέρας τάξεως μερίζονται εἰς 284 ἴσα μέρη ἐκτελουμένης τῆς ἀκολούθου πρώτης μερικῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον·

895	ἑκατοντάδες	284
43	»	3 ἑκατοντάδες

Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον περιέχει 3 ἑκατοντάδας καὶ μένουν ὡς ὑπόλοιπον 43 ἑκατοντάδες, αἱ ὁποῖαι, ἂν μείνουν τοιαῦται, δὲν μερίζονται εἰς 284 ἴσα μέρη· διὰ τοῦτο τρέπομεν ταύτας εἰς 430 δεκάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 9 δεκάδων τοῦ δοθέντος διαιρετέου ἀποτελοῦν 439 δεκάδας, ἃς μερίζομεν ὡς ἑξῆς·

439	δεκάδες	284
155	»	1 δεκάς

Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον περιέχει πλὴν τῶν 3 ἑκατοντάδων καὶ 1 δεκάδα, μένουν δὲ ὡς ὑπόλοιπον 155 δεκάδες, αἱ ὁποῖαι τρεπόμεναι εἰς 1550 μονάδας ἀποτελοῦν μετὰ τῶν 5 μονάδων τοῦ διαιρετέου 89595 ἐν ὅλῳ 1555 μονάδας, τὰς ὁποίας τέλος μερίζομεν ἐκτελοῦντες τὴν ἑξῆς τρίτην μερικὴν διαίρεσιν·

1555	μονάδες	284
135	»	5 μονάδες

Τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον ἐκτὸς τῶν 3 ἑκατοντάδων καὶ τῆς 1 δεκάδος περιέχει ἀκόμη 5 μονάδας, ὑπολείπονται δὲ καὶ 135 μονάδες, αἱ ὁποῖαι δὲν μερίζονται εἰς 284 ἴσα μέρη, οὔτε ἔχομεν κατωτέραν τάξιν μονάδων, ἵνα τὰς τρέψωμεν· αἱ 135 λοιπὸν μονάδες ἀποτελοῦν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης διαιρέσεως, πηλίκον δὲ αὐτῆς εἶνε 3 ἑκ. + 1 δεκ. + 5 μον. = 315.

Χάριν εὐκολίας ἑνοῦμεν εἰς ἕνα μόνον πίνακα ὅλας τὰς ἐκτε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένας μερικὰς διαιρέσεις παρατηροῦντες, ὅτι ἕκαστος μερικὸς διαιρετέος (ἀπὸ τῆς β′ μερικῆς διαιρέσεως καὶ ἐφεξῆς) σχηματίζεται, ἂν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς προηγουμένης μερικῆς διαιρέσεως προσγραφῇ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ δοθέντος διαιρετέου· οὕτως ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

α′ μερικὸς διαιρετέος	895 95	284 διαιρέτης
β′ » »	43 9	315 πηλίκον
γ′ » »	15 55	
	1 35 ὑπόλοιπον.	

Μὲ τὴν αὐτὴν διάταξιν ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 251 836 διὰ τοῦ 821 ἔχομεν·

2518′36	821
55 3	306
55 36	
6 10	

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος 553 εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου 821· διὰ τοῦτο τῆς δευτέρας ταύτης μερικῆς διαιρέσεως τὸ πηλίκον εἶνε 0 καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε αὐτὸς ὁ μερικὸς διαιρετέος 553. Πρὸς συντομίαν δὲν γράφομεν ἐκ νέου τὸ ὑπόλοιπον 553, ἀλλὰ καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 553, ἀφοῦ ὅμως προηγουμένως θέσωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει.

2 518′36	821
55 36	306
6 10	

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν κανόνα·

58. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ὅταν εἶνε πολυψήφιον, χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἀποτελῆται ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον διὰ τοῦ διαιρέτου εἶνε μονοψήφιον· διαιροῦμεν τὸν πρῶτον τοῦτον μερικὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτωθεν τοῦ διαιρέτου· πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πρώτης μερικῆς διαιρέ-***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεως καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ σχηματίζομεν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου· εὑρίσκομεν οὕτω τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου καὶ δεύτερον ὑπόλοιπον, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὁπότε εὑρίσκομεν διὰ τελευταίας διαιρέσεως τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ὅταν τις τῶν μερικῶν διαιρετέων εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον· καταβιβάζομεν ἓν ἀκόμη ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Σημείωσις α΄)— Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, τότε, χάριν συντομίας, δὲν γράφομεν τὰ ἑκάστοτε μένοντα ὑπόλοιπα, ἀλλὰ κατὰ νοῦν σχηματίζομεν τοὺς διαδοχικοὺς διαιρετέους καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς διαιρέσεις, ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα·

$$\begin{array}{r|l} \dot{5}\dot{5}\dot{7}5 & 8 \\ \hline 7 & 696 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} \dot{4}\dot{5}\dot{8}37 & 6 \\ \hline 3 & 7639 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} 789 & 9 \\ \hline 6 & 87 \end{array}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκτελοῦμεν καὶ τὰς ἑξῆς τελείας διαιρέσεις·

$$7405:5 = 1481, \quad 2637:9 = 293, \quad 3824:4 = 956.$$

Σημείωσις β΄)—Ὅταν τὸ πηλίκον ἔχῃ πολλὰ ψηφία καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε πολυψήφιος, τότε πρὸς ἀποφυγὴν τῶν πολλῶν δοκιμῶν σχηματίζομεν ἐκ τῶν προτέρων τὰ ἐννέα πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ διαιρέτου, ὁπότε εὐκόλως διακρίνομεν τὸ πηλίκον ἑκάστης μερικῆς διαιρέσεως. Τὸ αὐτὸ συμφέρει νὰ πράττωμεν, ὅταν ἔχωμεν πρὸς ἐκτέλεσιν πολλὰς διαιρέσεις ἐχούσας τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά.

59. Ἔστω ἡ διαίρεσις 53246:4300. Αἱ 43 ἑκατοντάδες τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαιρέτου εἰσέρχονται μόνον εἰς τὰς 532 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου ἐν ὅλῳ 12 φορὰς καὶ μένουν ὡς ὑπόλοιπον 16 ἑκατοντάδες, αἵτινες μετὰ τῶν 46 μονάδων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦν τὸ ὑπόλοιπον 1646 τῆς δοθείσης διαιρέσεως· ἐντεῦθεν ὁ κανών·

```
532)46 | 43(00
102    |  12
 16    |
 16 46 |
```

Ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά, ἡ διαίρεσις συντομεύεται, ἂν ἀποκοποῦν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἴσον πλῆθος ψηφίων πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, ἔπειτα ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις ἐπὶ τῶν μενόντων ἀριθμῶν, ὁπότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε τὸ ζητούμενον, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πρέπει νὰ προσλάβῃ πρὸς τὰ δεξιά του τὰ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀποκοπέντα ψηφία, διὰ νὰ δώσῃ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

60. Κατὰ ταῦτα ἡ διαίρεσις 74532:100 ἔχει πηλίκον 745 καὶ ὑπόλοιπον 32. Ἐντεῦθεν βλέπομεν μᾶλλον σύντομον τὴν διαίρεσιν, ὅταν διαιρέτης εἶνε ἡ μονὰς συνοδευομένη ὑπὸ μηδενικῶν· διότι τότε, ἂν χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης, τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα θὰ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ ὑπόλοιπον· π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 705:1(00 πηλίκον εἶνε 7 καὶ ὑπόλοιπον 5.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

61. Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἄνευ λάθους, τότε ὁ διαιρετέος πρέπει νὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, ἢ σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιοῦτον. Διὰ τοῦτο, ἵνα δοκιμάσωμεν, ἂν μία διαίρεσις ἐγένετο ὀρθῶς, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ)· καί, ἂν αἱ πράξεις αὗται ἐκτελεσθοῦν ἄνευ λάθους καὶ εὑρεθῇ ὁ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαιρετέος, τότε συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.

62. *Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις $\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$ (α)

Λέγω, ὅτι, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4 καὶ ὁ διαιρετέος 17 καὶ ὁ διαιρέτης 5, τὸ μὲν πηλίκον τῆς νέας διαιρέσεως θὰ εἶνε πάλιν 3, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ εἶνε 2×4. $\begin{array}{r|l} 17 \times 4 & 5 \times 4 \\ \hline 2 \times 4 & 3 \end{array}$ (β)

Διότι ὁ νέος διαιρετέος 17×4 ἀποτελεῖται ἀπὸ 17 τετράδας καὶ ὁ νέος διαιρέτης ἀπὸ 5 τετράδας· ὅπως δὲ αἱ 5 μονάδες εἰσέρχονται 3 φορὰς εἰς τὰς 17 μονάδας καὶ μένουν ὡς ὑπόλοιπον 2 μονάδες κατὰ τὴν διαίρεσιν (α), οὕτω καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν (β) αἱ 5 τετράδες εἰσέρχονται 3 φορὰς εἰς τὰς 17 τετράδας καὶ μένουν ὡς ὑπόλοιπον 2 τετράδες. Εἶνε φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τετράδων θεωρήσωμεν πεντάδας, ἑξάδας κ.τ.λ., πάλιν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως θὰ μείνῃ 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ γίνῃ 2 πεντάδες, ἑξάδες κ.τ.λ. Ἡ τεθεῖσα ἄρα ἰδιότης γενικῶς ἀληθεύει, καὶ ἐκ ταύτης συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς·

α') *Ἂν τελείας διαιρέσεως πολλαπλασιασθῇ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία δίδουσα τὸ αὐτὸ πηλίκον.* Π. χ. ἐπειδὴ εἶνε $175 : 7 = 25$, θὰ εἶνε ἐπίσης $175 \times 4 : 7 \times 4 = 700 : 28 = 25$.

β') *Ἐὰν διαιρεθῇ διαιρετέος καὶ διαιρέτης διά τινος ἀριθμοῦ διαιροῦντος καὶ τοὺς δύο ἀκριβῶς (ἂν ὑπάρχῃ τοιοῦτος), τότε τὸ μὲν πηλίκον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

γ') *Ἂν τελείας διαιρέσεως διαιρεθῇ διαιρετέος καὶ διαιρέτης*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διά τινος ἀριθμοῦ διαιροῦντος ἀμφοτέρους ἀκριβῶς, τότε ἡ διαίρεσις θὰ μείνῃ τελεία καὶ θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ πηλίκον. Π. χ. ἐπειδὴ εἶνε 36 : 12=3, θὰ εἶνε ἐπίσης· 18 : 6=3, 12 : 4=3, 6 : 2=3, 3 : 1=3.

Παραδείγματα { 79 : 10=; 258 : 100=; 3587 : 10 =;
645 : 80=; 2258 : 600=; 3587 : 4000=;

Προβλήματα ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν λυόμενα διὰ διαιρέσεως.

63. Ἐπὶ ἀφηρημένων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις ἀδιαφόρως δύναται νὰ θεωρῆται εἴτε ὡς μέτρησις εἴτε ὡς μερισμός· ἡ ἀδιαφορία ὅμως αὕτη παύει, ὅταν πρόκειται περὶ προβλημάτων ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν, διὰ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἑξῆς.

Α'. Μέτρησις.—Πάσης διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μέτρησιν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ὁμοειδεῖς, ὅταν εἶνε συγκεκριμένοι ἀριθμοί· διότι ζητεῖται ἁπλῶς πόσας φορὰς ὁ εἷς τούτων (ὁ διαιρετέος) περιέχει τὸν ἄλλον (τὸν διαιρέτην). Τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ἀφηρημένος ἀριθμός.

Πρόβλημα.—*Πόσον ἀξίζουν 24 πήχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 3 πήχεις ἀξίζουν 1 δραχμήν ;*

Λύσις.—Ἐπειδὴ δίδομεν ἀνὰ μίαν δραχμὴν δι' ἑκάστην τριάδα πήχεων, διὰ τοῦτο θὰ δώσωμεν διὰ τοὺς 24 πήχεις τοσάκις τὴν 1 δραχμήν, ὅσας φορὰς οἱ 24 πήχεις περιέχουν τοὺς 3 πήχεις· πρὸς λύσιν ἄρα τοῦ προβλήματος πρῶτον ἐκτελοῦμεν μίαν διαίρεσιν ἀναγομένην εἰς μέτρησιν, ἤτοι μετροῦμεν, πόσας φορὰς ὁ διαιρετέος 24 πήχεις περιέχει τὸν ὁμοειδῆ διαιρέτην 3 πήχεις καὶ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸν ἀφηρημένον ἀριθμὸν 8· διότι 24 πήχ.=3 πήχ.×8. Ἔπειτα τὸ ἀφηρημένον πηλίκον 8 τῆς διαιρέσεως ταύτης θεωροῦμεν ὡς συγκεκριμένον ἀριθμὸν παριστάνοντα δραχμάς· διότι εἴπομεν, ὅτι ὅσας φορὰς οἱ 24 πήχεις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

περιέχουν τοὺς 3 πήχεις, τόσας δραχμὰς ἀξίζουν οἱ 24 πήχεις· ἡ λύσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶνε 8 δραχμαί.

Σημειωτέον ὅτι, ἂν ἡ ἀξία τῶν τριῶν πήχεων ἦτο 1 τάλληρον, ἢ 1 εἰκοσάδραχμον κ.λ., τότε τὸ ἀφῃρημένον πηλίκον 8 τῆς μετρήσεως 24 πήχ. : 3 πήχ. διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ ἐθεωρεῖτο, ὅτι παριστάνει τάλληρα ἢ εἰκοσάδραχμα κ.λ.

Β'. Μερισμός.—Πάσης διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μερισμὸν ὁ διαιρετέος εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμὸς καὶ μερίζεται εἰς τόσα ἴσα μέρη (ἢ αὐτὸς ἢ αὐτὸς πλὴν τοῦ ὑπολοίπου), ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τοῦ διαιρέτου, ὅστις διὰ τοῦτο εἰς τὴν διαίρεσιν ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς λαμβάνεται· τὸ δὲ πηλίκον εἶνε προδήλως ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.

Πρόβλημα. — *Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 3 πήχεις ἀξίζουν 24 δραχμάς* ;

Λύσις.—Προδήλως ἡ ἀξία τοῦ πήχεως εἶνε τὸ ἓν τῶν τριῶν ἴσων μεριδίων, εἰς τὰ ὁποῖα μερίζεται ἡ ἀξία 24 δραχμαὶ τῶν 3 πήχεων, ἤτοι εἶνε τὸ τρίτον τῶν 24 δραχμῶν. Πρὸς λύσιν ἄρα τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν ἀναγομένην εἰς μερισμὸν καὶ νὰ λάβωμεν διαιρετέον μὲν τὸν συγκεκριμένον ἀριθμὸν 24 δραχ., διαιρέτην δέ, οὐχὶ τοὺς 3 πήχεις, ἀλλὰ τὸν ἀφῃρημένον ἀριθμὸν 3 τὸν δεικνύοντα εἰς πόσα ἴσα μερίδια θὰ μερισθοῦν αἱ 24 δραχμαί. Τὸ συγκεκριμένον πηλίκον 8 δραχμαὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως.

Σημ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ εἰς τὴν μέτρησιν καὶ εἰς τὸν μερισμὸν εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

93) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις· 5000 : 370, 1111 : 222, 5050505 : 505, 4004004004 : 4004.

94) Τίς ὁ διαιρέτης διαιρέσεως ἐχούσης διαιρετέον 281397, πηλίκον 621 καὶ ὑπόλοιπον 84 ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

95) Τίς ὁ διαιρετέος διαιρέτεως ἐχούσης διαιρέτην καὶ πηλίκον ἴσον πρὸς τὸν 15 καὶ ὑπόλοιπον τὸν 2 ;

96) Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 407 δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 10949 ;

97) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοί, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε 2403 ;

98) Ἀπὸ στόματος νὰ εὑρεθῇ τὸ πέμπτον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν·

100	800	1200	545	540	1500
150	900	1005	535	555	2505
400	600	5005	525	510	3505

99) Ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι τὸ εἰκοσιπενταπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκατονταπλασίου του, ποῖον κανόνα συντομίας πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 25 συνάγομεν ἐργαζόμενοι, καθ' ὃν τρόπον δεικνύουν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα

$$535 \times 25 = 53500 : 4 = 13375$$
$$10730 \times 25 = 1073000 : 4 = 268250;$$

100) Ἐκ τῆς ἰσότητος $1000 = 125 \times 8$ βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 125 εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ χιλιαπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐκ τούτου ποῖον κανόνα συντομίας πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 125 συνάγομεν ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς

$$535 \times 125 = 535000 : 8 = 66875$$
$$270 \times 125 = 270000 : 8 = 33750;$$

101) Τίς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 καὶ τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 814 δίδει τὸν ἀριθμὸν 5 963 364 ;

102) Τίς ἀριθμός, ἂν διαιρεθῇ διὰ 7 καὶ τὸ πηλίκον του ἔπειτα διαιρεθῇ διὰ 17, δίδει τὸν ἀριθμὸν 69666 ;

103) Ἀτμόπλοιον ὁμαλῶς κινούμενον διανύει 11 μίλια εἰς μίαν ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 539 μίλια ;

104) Ἐκ τινος κρήνης ῥέουσι 31200 ὀκάδες ὕδατος εἰς 24 ὥρας· πόσαι ὀκάδες ῥέουσι καθ' ἑκάστην ὥραν ;

105) Πόσας ἑβδομάδας ἀποτελοῦσιν 161 ἡμέραι ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

106) Ἐπληρώθηταν 358 δραχμαὶ εἰς 18 ἀνθρώπους· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

107) Εἰς πόσους μῆνας ἐπληρώθησαν 1920 δραχμαὶ δι' ἐνοίκιον οἰκίας, ἂν τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον εἶνε 240 δραχμαί ;

108) Ἀτμόπλοιον ὁμαλῶς κινούμενον ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς τὴν 9ην ὥρ. μ.μ., διήνυσε δὲ 90 μίλια καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν Σῦρον τὴν 5ην ὥρ. π. μ. τῆς ἀκολούθου ἡμέρας· πόσα μίλια διήνυσε καθ' ὥραν τὸ ἀτμόπλοιον ; (Ἀπ. περισσότερα τῶν 11 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 12 μιλίων).

109) Πόσα ἔτη ἀποτελοῦσι 527 μῆνες ; (43 ἔτη, 11 μῆνας).

110) Ἔχων τις 90 δραχμὰς θέλει νὰ ἀγοράσῃ 12 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 14 δραχμὰς τὸν πῆχυν· πόσας ἑβδομάδας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ συμπληρώσῃ τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν πρὸς ἀγορὰν τοῦ ὑφάσματος, ἂν οἰκονομῇ 7 δραχμὰς καθ' ἑβδομάδα ; (Ἀπ. θὰ ἐργασθῇ 12 ἑβδομάδας καὶ θὰ τῷ περισσεύσουν καὶ 8 δραχμαί).

111) Ἀγοράσας τις κριθὴν πρὸς 25 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν μετεπώλησεν αὐτὴν πρὸς 30 λ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδησε 145 δραχμάς, (ἤτοι 14500 λεπτά)· πόσας ὀκάδας κριθῆς ἐπώλησεν ;

112) Ἴσα πλήθη μονοδράχμων, πενταδράχμων καὶ εἰκοσιπενταδράχμων ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 158 δραχμάς· πόσα εἶνε ἐξ ἑκάστου εἴδους ;

113) Ἔχων τις 4745 δραχμὰς ἐτήσιον εἰσόδημα οἰκονομεῖ καθ' ἑκάστην 3 δραχμάς· πόσας δραχμὰς ἐδαπάνα καθ' ἡμέραν ; (Τὸ ἔτος θεωρεῖται ὅτι εἶνε 365 ἡμέραι). (Ἀπ. 10).

114) Ἔμπορος ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος· διὰ τὸ πρῶτον ἐπλήρωσε, 1016 δρχ., διὰ τὸ δεύτερον τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτο κατὰ 15 πήχεις μικρότερον τοῦ πρώτου, ἐπλήρωσεν 896 δραχμάς· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου. (Ἀπόκρ. 127 πήχ. 112 πήχ.)

115) Πόσαι φιάλαι τῶν 300 δραμίων ἀπαιτοῦνται, διὰ νὰ τεθῇ εἰς αὐτὰς οἶνος 110 ὀκάδων;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

116) Ἐργάτης δι' ἐργασίαν 5 ἡμερῶν ἔλαβεν 20 δραχμάς· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ δι' ἐργασίαν 7 ἡμερῶν;

117) Ἔχει τις εἰς μίαν θήκην 8640 δραχμὰς καὶ εἰς ἄλλην 6800, θέλει δὲ νὰ θέσῃ ἀκόμη 3600 δραχμὰς τοιουτοτρόπως, ὥστε ἀμφότεραι αἱ θῆκαι νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν· πῶς θὰ κάμῃ τοῦτο;

118) Ἔχει τις νὰ κάμῃ μίαν πληρωμὴν 780 δραχμῶν. Πρὸς τοῦτο ἔδωκε 14 πεντάδραχμα καὶ 36 δεκάδραχμα, διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον ἔδωκε χαρτονομίσματα τῶν 25 δραχμῶν· τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν τελευταίων τούτων χαρτονομισμάτων;

119) Ἔμπορος ἠγόρασεν 140 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 9 δραχμὰς τὸν πῆχυν· ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου 20 πήχεις ἐκράτησε δι' ἑαυτόν, τοὺς δὲ λοιποὺς ἐπώλησε καὶ ἐκέρδησεν ἐν ὅλῳ δραχμὰς 80· πόσον ἐπώλει ἕκαστον πῆχυν;

120) Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ εἷς ἔχει 12 πεντάλεπτα καὶ ὁ ἄλλος 9· πόσα τετράδια δύνανται νὰ ἀγοράσουν μὲ ὅλα τὰ λεπτά των, ὅταν τὸ καθὲν τετράδιον πωλῆται 3 πεντάλεπτα;

Α'. λύσις.—Ὁ πρῶτος ἀγοράζει 12:3=4 τετράδια
ὁ δεύτερος » 9:3=3 »

ὥστε καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἀγοράζουν 4+3=7 τετράδια.

Β'. λύσις.—Μὲ τὰ 12+9 πεντάλεπτα ἀγοράζουν τετράδια.

$$(12+9) : 3 = 21 : 3 = 7 \text{ τετράδια.}$$

Ἐκ τῶν δύο λύσεων βλέπομεν ὅτι

$$(12+9):3 = (12:3)+(9:3) = 4+3 = 7.$$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄρα ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν διὰ τούτου τὰ διάφορα μέρη τοῦ ἀθροίσματος (ὑποθέτοντες ταῦτα ἀκριβῶς διαιρούμενα) καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.

121) Ἑκάστη τῶν τριῶν τάξεων ἑνὸς σχολείου ἔχει 36 μαθη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τάς· νὰ μοιρασθῶσιν οἱ μαθηταὶ τοῦ σχολείου εἰς τέσσαρας ὁμάδας ἐχούσας τὸ αὐτὸ πλῆθος μαθητῶν.

Α' λύσις.

Οἱ τοῦ σχολείου μαθηταὶ εἶνε

$$36 \times 3, \text{ ἤτοι } 108\cdot$$

τὸ πλῆθος ἄρα τῶν μαθητῶν ἑκάστης ὁμάδος εἶνε

$$(36 \times 3) : 4, \text{ ἤτοι } 108 : 4 = 27.$$

Β' λύσις.

Τὸ τέταρτον τῶν μαθητῶν ἑκάστης τάξεως εἶνε 36:4, ἤτοι 9· ὥστε τὸ τέταρτον τῶν μαθητῶν τῶν τριῶν ὁμοῦ τάξεων εἶνε $9+9+9$, ἤτοι 9×3· εἶνε δηλονότι

$$(36 \times 3):4 = (36:4) \times 3 = 9 \times 3 = 27.$$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄρα τὸ γινόμενον 36×3 διὰ 4, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν νέον γινόμενον 9×3, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν θέτοντες εἰς τὸ δοθὲν ἀντὶ τοῦ παράγοντος 36 τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 36:4.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκτελοῦμεν καὶ τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις.

$$(13 \times 24) : 8 = 13 \times 3 = 39.$$

$$(7 \times 20 \times 3) : 4 = 7 \times 5 \times 3 = 105.$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών· «*Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ (διαιροῦντος ἀκριβῶς ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων), ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν νέον γινόμενον διαφέρον τοῦ πρώτου μόνον κατὰ τὸν διαιρετὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον ἀντικαθιστῶμεν ὑπὸ τοῦ πηλίκου του. Κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν* $(13 \times 7 \times 4):7 = 13 \times 1 \times 4 = 13 \times 4$· *ἤτοι γινόμενον διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν ἀπαλειφθῇ ὁ παράγων οὗτος.*

122) Νὰ μοιρασθῶσιν 90 τετράδια εἰς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι κάθηνται ἀνὰ 5 εἰς 3 θρανία.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α΄ λύσις.

Χωρίζομεν τὰ τετράδια εἰς τρία ἴσα μέρη (ὅσα δηλονότι εἶνε τὰ θρανία), ὁπότε οἱ μαθηταὶ ἑκάστου θρανίου θὰ μοιράσουν τὰ 90 : 3, ἤτοι τὰ 30 τετρ., καὶ ἕκαστος τῶν 5 μαθητῶν θὰ λάβῃ 30 : 5, ἤτοι 6 τετράδια.

Β΄ λύσις.

Ὅλοι οἱ μαθηταὶ εἶνε 5×3 καὶ ἕκαστος τούτων θὰ λάβῃ

$$90 : (5\times3) = 90 : 15 = 6 \text{ τετράδια.}$$

Πρὸς ἐκτέλεσιν ἄρα τῆς διαιρέσεως 90 : (5×3) ἢ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω κατὰ τὴν δευτέραν λύσιν, ἢ ὡς εἰς τὴν πρώτην, ὡς ἑξῆς·

$$90 : 3 = 30 \text{ καὶ } 30 : 5 = 6$$

Ὁμοίως διὰ τὴν διαίρεσιν 240 : (3×4×5) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

$$240 : 3 = 80,\quad 80 : 4 = 20,\quad 20 : 5 = 4\cdot \text{ θὰ εἶνε ἄρα}$$
$$240 : (3\times4\times5) = 4. \text{ Τῷ ὄντι } 240 : 60 = 4$$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄρα ἀριθμὸν διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων, διαιροῦμεν τὸν δοθέντα διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου παράγοντος κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος. (Τὰς διαιρέσεις πάσας ὑποθέτομεν τελείας).

Σημ. Ὅταν θέλῃ τις νὰ διαιρέσῃ διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἀριθμόν, ὅστις εἶνε ἐπίσης γινόμενον παραγόντων, π.χ.

$$(40\times12\times21) : (5\times4),$$

ἀρκεῖ νὰ διαιρέσῃ δι' ἑκάστου παράγοντος τοῦ διαιρέτου οἱονδήποτε καὶ ἂν θέλῃ παράγοντα τοῦ διαιρετέου, φροντίζων νὰ λάβῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον μόνον μίαν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φορέν. Οὕτως εἰς τὸ δοθὲν παράδειγμα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

$$40 : 5 = 8 \text{ καὶ } 12 : 4 = 3$$

τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον εἶνε $8 \times 3 \times 21$, ἤτοι 504.

123) Δι' ἐργασίαν 6 ἡμερῶν 25 ἐργάται ἐπληρώθησαν 654 δραχμάς· ἕκαστος τῶν 16 ἐργατῶν ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον 4 δραχμάς· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου τῶν λοιπῶν ἐργατῶν.

124) Τρεῖς κώδωνες διαφόρου μεγέθους εἶχον βάρος 2940 ὀκάδων· ὁ μεσαῖος κώδων εἶχε βάρος διπλάσιον τοῦ μικροτέρου καὶ ὁ μεγαλύτερος διπλάσιον τοῦ μεσαίου· νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου.

125) Δύο φίλοι εἶχον ὁ μὲν 567 δραχμάς, ὁ δὲ 951· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δώσῃ ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον, διὰ νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δραχμῶν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ· ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

64. Ἐκαλέσαμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν δι'ἄλλου τὸν διαιρούμενον ἀκριβῶς διὰ τούτου· π.χ. ὁ 35 λέγεται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ 5. Τἀνάπαλιν θὰ λέγωμεν τότε, ὅτι ὁ 5 εἶνε *διαιρέτης* ἢ *παράγων* τοῦ 35.

Λέγεται δηλονότι ἀριθμός τις διαιρέτης ἢ παράγων ἄλλου ἀριθμοῦ, ἂν διαιρῇ τοῦτον ἀκριβῶς.

Ὁ διαιρετὸς ἀριθμὸς δι' ἄλλου εἶνε *πολλαπλάσιον* τούτου· π.χ. ὁ 35 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5· τοῦτο ἐκφράζει ἡ σχέσις

$$35=5\times7=5+5+5+5+5+5+5,$$

ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ 35 ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ 5.

Γενικαὶ ἀρχαὶ διαιρετότητος.

65. *Ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε διαιρέτης δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν, εἶνε διαιρέτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν ὁ 3, ὅστις εἶνε διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 15, 12 καὶ 6, θὰ εἶνε διαιρέτης καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $15+12+6$, ἤτοι τοῦ 33· διότι, ἀφοῦ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ 3, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πολλὰ 3 καὶ θὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι

66. *Ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε διαιρέτης ἄλλου ἀριθμοῦ, εἶνε διαιρέτης καὶ τῶν πολλαπλασίων αὐτοῦ.* Π.χ. ὁ 5, ὅστις εἶνε διαιρέτης τοῦ 35, εἶνε διαιρέτης καὶ τοῦ γινομένου

$$35\times3=35+35+35.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

67. *Ἐὰν ἀριθμός τις εἶνε διαιρέτης δύο ἄλλων, εἶνε διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.* Π.χ. ὁ 5, ὅστις εἶνε διαιρέτης τοῦ 35 καὶ τοῦ 15, εἶνε διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν 35-15, ἤτοι τοῦ 20· διότι 20=5×4.

Γνωρίσματα διαιρετότητος.

68. Πολλάκις εἶνε ὠφέλιμον νὰ γνωρίζωμεν ταχέως, πότε ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διά τινων ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκτελῶμεν τὴν ὅλην διαίρεσιν δι' αὐτῶν· πρὸς τοῦτο θέτομεν κανόνας τινὰς διὰ τοὺς ἑξῆς διαιρέτας·

α') Διὰ 10, 100, 1000, κ.τ.λ.

Εἶνε φανερὸν ὅτι διὰ 10 εἶνε διαιρετὸς ἀριθμός τις, ἂν τελειώνῃ εἰς ἓν τοὐλάχιστον μηδενικόν, δι' 100, ἂν τελειώνῃ εἰς δύο τοὐλάχιστον μηδενικά, κ.ο.κ.

β') Διὰ 2 ἢ 5.

Διὰ 2 ἢ 5 εἶνε διαιρετὸς πᾶς ἀριθμός, ἂν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων του εἶνε διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον διὰ 2 εἶνε διαιρετοὶ πάντες οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8· τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται **ἄρτιοι (ζυγοί)**. Τοὐναντίον πάντες οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε 1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9, δὲν εἶνε διαιρετοὶ διὰ 2 καὶ λέγονται **περιττοί (μονοί)**, ὅταν δὲ διαιρεθῶσι διὰ 2, περισσεύει ὑπόλοιπον 1.

Διὰ τοῦ 5 εἶνε διαιρετοὶ πάντες οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε 0 ἢ 5.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3475 εἶνε διαιρετὸς διὰ 5 καὶ οὐχὶ διὰ 2· ὁ ἀριθμὸς 7450 εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5.

Τὴν ἀλήθειαν τοῦ τεθέντος γνωρίσματος διακρίνομεν ὡς ἑξῆς· Ὁ 10=2×5 εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 καὶ διὰ 5, ὥστε καὶ πᾶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολλαπλάσιον τοῦ 10 (ὡς ἄθροισμα ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλαπ. 10) εἶνε ἐπίσης διαιρετὸν διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 5.

Τούτου τεθέντος θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2578, ὅστις γράφεται καὶ οὕτω·

2570+8.

Ὁ 2570, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 10, εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 καὶ διὰ 5, ὥστε, ἐὰν καὶ ὁ δεύτερος προσθετέος (τὸ ψηφίον δηλονότι 8 τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ ληφθέντος ἀριθμοῦ 2578) διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα 2578 εἶνε ἐπίσης διαιρετὸν (§ 65) διὰ 2 ἢ 5.

γ') Διὰ 4 ἢ 25.

Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὰ δύο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 8312 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, οὐχὶ δὲ διὰ 25, διότι ὁ 12 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 καὶ οὐχὶ διὰ 25· ὁ ἀριθμὸς 8375 εἶνε διαιρετὸς διὰ 25 καὶ οὐχὶ διὰ 4.

* Τὴν ἀλήθειαν τοῦ γνωρίσματος τούτου διακρίνομεν ὡς ἑξῆς· θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8312, ὅστις γράφεται καὶ οὕτω·

8300 + 12.

Ὁ 4 καὶ ὁ 25 διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν 100, θὰ διαιροῦν ἄρα καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 8300· ὥστε, ἂν διαιροῦν καὶ τὸν δεύτερον προσθετέον 12 (τὸν διψήφιον δηλονότι ἀριθμὸν τὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ληφθέντος), θὰ διαιροῦν ἀκριβῶς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 8312.

δ') Διὰ 3 ἢ 9.

Ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων, εἶνε διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.

Ἔστω π. χ. ὁ 5874, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε

5+8+7+4, ἤτοι 24.

Ἐπειδὴ ὁ 24 εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 καὶ οὐχὶ διὰ 9, λέγομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅτι καὶ ὁ ληφθεὶς ἀριθμὸς 5874 εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 καὶ οὐχὶ διὰ 9.

Τὴν ἀλήθειαν τοῦ γνωρίσματος τούτου διακρίνομεν λαμβάνοντες τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα·

Κρεοπώλης ἔχων 5874 δραχμὰς θέλει κατὰ τὸ Πάσχα νὰ ἀγοράσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα ἐρίφια, ὧν ἕκαστον ἐπωλεῖτο ἀντὶ 9 δραχμῶν· πόσαι δραχμαὶ θὰ τῷ περισσεύσουν;

Εἶνε φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 5874 : 9· ἂν δὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶνε μηδέν, τότε ὁ ἀριθμὸς 5874 εἶνε διαιρετὸς διὰ 9. Ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἂς ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς·

Θεωροῦμεν ὅτι τὰς 5874 δραχμὰς ἀποτελοῦν τὰ ἑξῆς χαρτονομίσματα·

	5 χαρτονομίσματα	τῶν	1000	δραχμῶν
	8 »	»	100	»
	7 »	»	10	»
καὶ	4 »	»	1	δραχμῆς.

Ἔπειτα σκεπτόμεθα οὕτως·

Ἀφοῦ μὲ 1 χαρτονόμισμα 1000 δραχ. ἀγοράζει 111 ἐρίφια (ἀξίας 999 δρχ.) καὶ περισσεύει 1 δραχμή, διὰ τοῦτο ἐκ τῶν 5 χιλιοδράχμων θὰ περισσεύσουν **5 δραχμαί.**

Ὁμοίως, ἀφοῦ μὲ 1 ἑκατοντάδραχμον ἀγοράζει 11 ἐρίφια (ἀξίζοντα 99 δρχ.) καὶ ἔχει ὑπόλοιπον 1 δραχμήν, ἕπεται, ὅτι ἐκ τῶν 8 ἑκατονταδράχμων θὰ ἔχῃ **8 δραχμὰς ὑπόλοιπον.**

Ὁμοίως ἐκ τῶν 7 δεκαδράχμων θὰ ἔχῃ **7 δρχ. ὑπόλοιπον.**

Αἱ δραχμαὶ ἄρα αἱ μένουσαι εἰς τὸν κρεοπώλην μὲ τοιοῦτον τρόπον ἀγορᾶς εἶνε δραχμαὶ

$$5+7+8+4, \text{ ἤτοι } 24\cdot$$

Ἐπειδὴ ἤδη αἱ μείναισαι 24 δραχμαὶ δὲν εἶνε πολλαπλάσιόν τοῦ 9, θὰ ἀγοράσῃ μὲν δι' αὐτῶν ἀκόμη 2 ἐρίφια, ἀλλὰ θὰ περισσεύσουν καὶ 6 δραχμαί, μὴ ἀρκοῦσαι διὰ τὴν ἀγορὰν ἀκόμη ἑνὸς ἐριφίου. Ὁ ληφθεὶς ἄρα ἀριθμὸς 5874 δὲν εἶνε διαιρετὸς διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

9, διότι ἀφίνει ὑπόλοιπον 6, τὸ ὁποῖον συγχρόνως εἶνε καὶ ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος 5+7+8+4 τῶν ψηφίων τοῦ 5874 διὰ 9. Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων, καί, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶνε μικρότερον τοῦ 9, αὐτὸ εἶνε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον, ἂν ὅμως εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 9, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε τὸ ζητούμενον.

Παρατήρησις α'.

Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ δὲν εἶνε μονοψήφιος ἀριθμός, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἐφαρμόζομεν τὸν αὐτὸν κανόνα· οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 24 διὰ 9 εἶνε 2+4, ἤτοι 6.

Παρατήρησις β'.

Τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα διὰ τὸ 9 ἐφαρμόζουν καὶ διὰ τὸ 3· σημειωτέον πρὸς τούτοις ὅτι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9 εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ 3, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶνε ἐν γένει ἀληθές. Π.χ. ὁ 12 εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, οὐχὶ ὅμως καὶ δι' 9.

ε') Διὰ 6.

Ἡ ἐπανάληψις ἀρτίου πλήθους ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὸν 3, π.χ. $\underline{3+3}+\underline{3+3}+\underline{3+3}$, προδήλως δίδει ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλὰ 6, ἤτοι ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 6, ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ ἄρτιος, εἶνε διαιρετὸς συγχρόνως καὶ διὰ 2. Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 6, ἐὰν εἶνε διαιρετὸς συγχρόνως καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3. Π. χ. ὁ 348, ὅστις εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3, θὰ εἶνε διαιρετὸς καὶ δι' 6.

Δὲν πρέπει νὰ ὑποθέσῃ τις ὅτι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄλλων εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν· π. χ. ὁ 12 εἶνε διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 4, δὲν εἶνε ὅμως διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου 2×4, ἤτοι διὰ τοῦ 8.

Βάσανος πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως διὰ 9.

69. Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ 9 γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ζητοῦμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ 9 τῶν δύο παραγόντων (68 δ'), *εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ὑπολοίπων καὶ τοῦ γινομένου τούτου ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9, ὅπερ πρέπει νὰ εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ 9 τοῦ ἐξαγομένου τῆς πράξεως.*

70. Ἡ βάσανος διὰ 9 τῆς διαιρέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ζητοῦμεν τὰ 3 ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ 9 τοῦ διαιρέτου, τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πράξεως, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εὑρεθέντων ὑπολοίπων τὸ τρίτον ὑπόλοιπον καὶ τοῦ ἀθροίσματος τούτου εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9, ὅπερ πρέπει νὰ εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ διαιρετέου.

Ἀσκήσεις.

126) Μὲ ποίους ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 καὶ 25 διαιρεῖται ἀκριβῶς ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 564, 1784, 6345, 408, 990 καὶ 218;

127) Εἶνε δυνατὸν μὲ ἀκέραια εἰκοσιπεντάδραχμα νὰ πληρώσωμεν 875 δραχ.;

Ἀριθμοὶ πρῶτοι.

71. *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς μόνον δι' ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος λέγεται πρῶτος·* τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 κ. τ. λ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶς ἀριθμὸς ἔχων καὶ ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος λέγεται σύνθετος· τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 20, ...

Κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν πάντας ἀκριβῶς· π. χ. κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 48, 60 εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6 καὶ 12.

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν πλὴν τῆς μονάδος οὐδένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἔχωσι· τοιοῦτοι π. χ. εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 15 καὶ 8, οἵτινες μόνον τὴν μονάδα ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην, ὁμοίως οἱ 2 καὶ 3 κ.ο.κ.

72. *Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.*

Τοὺς πρώτους παράγοντας, ὧν γινόμενον εἶνε δοθεὶς σύνθετος, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα·

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν σύνθετον ἀριθμὸν εἰς παράγοντας πρώτους, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ μικροτέρου πρώτου διαιρέτου [1]·. *ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ μικροτέρου πρώτου διαιρέτου του κ.ο.κ. προχωροῦμεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶνε πρῶτος ἀριθμός. Σχηματίζομεν τότε ἓν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ πρῶτοι διαιρέται καὶ τὸ τελευταῖον πηλίκον, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Ἐργαζόμενοι οὕτω δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν κατ' ἐπανάληψιν τὸν αὐτὸν πρῶτον διαιρέτην εἰς πολλὰ διαδοχικὰ πηλίκα.

---

1) Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτον, δοκιμάζομεν διαδοχικῶς ὡς διαιρέτας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7, 11 κ.τ.λ· ἂν δὲ εἰς ὅλας τὰς διαιρέσεις μένῃ ὑπόλοιπον, προχωροῦμεν μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς διαίρεσιν ἔχουσαν πηλίκον μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου διαιρέτου, ὁπότε δὲν προβαίνομεν περαιτέρω, καθ' ὅσον ὁ δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν μικρότερον πρῶτον διαιρέτην (ἐκτὸς τῆς μονάδος), εἶνε τότε πρῶτος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παράδειγμα.

Νὰ ἀναλυθῇ ὁ 900 εἰς πρώτους παράγοντας.

Δεξιὰ τοῦ 900 γράφομεν κατακόρυφον γραμμὴν καὶ δεξιὰ τῆς γραμμῆς γράφομεν τὸν μικρότερον πρῶτον διαιρέτην τοῦ 900, ὅστις εἶνε ὁ 2· διαιροῦμεν τὸν 900 διὰ 2 καὶ τὸ πηλίκον 450 γράφομεν ὑπὸ τὸν 900. Ἐπὶ τοῦ πηλίκου 450 ἐργαζόμεθα καθ' ὅμοιον τρόπον· οὕτως ἐξακολουθοῦντες εὑρίσκομεν τέλος πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀριθμὸς πρῶτος, οὕτω δὲ τελειώνει ἡ ἐργασία καὶ γράφομεν

900	2
450	2
225	2
75	3
25	3
5	5

$$900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

Ἐπειδή τινες τῶν παραγόντων εἶνε ἴσοι, γράφομεν συντομώτερον (§ 47) τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ὡς ἑξῆς·

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν·

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$16800 = 2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

73. Δύο ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἔχουν πολλοὺς κοινοὺς διαιρέτας. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 24 καὶ 36 εἶνε διαιρετοὶ διὰ 2, 3, 4, 6, 12· ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν τούτων διαιρετῶν λέγεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* τῶν ἀριθμῶν 24 καὶ 36 καὶ εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. [1]) *δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν με-*

---

1) Ὅταν συντόμως γράφωμεν μ.κ.δ., ἐννοοῦμεν τὴν φράσιν *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.* –

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καί, ἂν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία, τότε αὐτὸς ὁ μικρότερος εἶνε ὁ μ.κ.δ. Ἂν δὲ ἡ διαίρεσις ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, τότε διαιροῦμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸν διαιρέτην, καί, ἂν ἡ δευτέρα αὕτη διαίρεσις εἶνε τελεία, τότε ὁ διαιρέτης αὐτῆς εἶνε ὁ μ.κ.δ. Ἄλλως διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην ταύτης διὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τελείαν διαίρεσιν· τῆς τελείας ταύτης διαιρέσεως ὁ διαιρέτης εἶνε ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογή.

α') Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 4152 καὶ 3708.

	1	8	2	1	5	2
4152	3708	444	156	132	24	12
444	156	132	24	12	0	

Ἐξετελέσθη πρῶτον ἡ διαίρεσις 4152 : 3708, καὶ τὸ μὲν πηλίκον αὐτῆς 1 ἐγράφη ἄνωθεν τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 444 ἐγράφη ὡς συνήθως κάτωθι τοῦ διαιρετέου· ἔπειτα ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις τοῦ διαιρέτου 3708 τῆς πρώτης διαιρέσεως διὰ τοῦ ὑπολοίπου αὐτῆς 444 κ.ο.κ. Ὁ διαιρέτης 12 τῆς τελευταίας τελείας διαιρέσεως 24 : 12 εἶνε ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 4152 καὶ 3708.

β') Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 346 καὶ 308, οἱ ὁποῖοι εἶνε πηλίκα τῶν ἀριθμῶν τοῦ προηγουμένου παραδείγματος διαιρεθέντων διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν 12.

	1	8	2	1	5	2
346	308	37	13	11	2	1
37	13	11	2	1	0	

Ὁ διαιρέτης 1 τῆς τελευταίας διαιρέσεως οὔσης τελείας εἶνε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 346 καὶ 308, οἵτινες διὰ τοῦτο εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (70).

Σημειωτέον ὅτι πάντοτε ἀληθεύει ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

74. *Ἂν διαιρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα των εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουν δηλονότι μ.κ.δ. τὴν μονάδα.*

75. Εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο ἀριθμῶν. Τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, τὸ τριπλάσιον, τὸ τετραπλάσιον κ.ο.κ. εἶνε ἐπίσης κοινὰ πολλαπλάσια τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Δύο ἀριθμοὶ δύνανται ἐπίσης νὰ ἔχουν κοινὰ πολλαπλάσια, τὰ ὁποῖα νὰ εἶνε μικρότερα τοῦ γινομένου των· τῷ ὄντι π. χ. ὁ ἀριθμὸς 12 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6, καὶ εἶνε ὁ 12 μικρότερος τοῦ 4×6, ἤτοι τοῦ 24. Εἶνε χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων δύο ἀριθμῶν ποῖον εἶνε τὸ μικρότερον, καὶ τοῦτο θὰ ὀνομάζωμεν *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὁ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π.[1]) δύο ἀριθμῶν εἶνε ὁ ἑξῆς·

76. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. δύο ἀριθμῶν ζητοῦμεν τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν· ἔπειτα διαιροῦμεν ἕνα τῶν δοθέντων διὰ τοῦ εὑρεθέντος μ.κ.δ. καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἄλλον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Τὸ οὕτως εὑρεθὲν γινόμενον εἶνε τὸ ζητούμενον ε.κ.π.*

Παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε.κ.π. τῶν δύο ἀριθμῶν 45 *καὶ* 20.

Ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 20 εἶνε ὁ 5· τὸ πηλίκον διὰ 5 ἑνὸς τῶν δοθέντων, λ.χ. τοῦ 45, εἶνε ὁ 9· τούτου τὸ γινόμενον

---

1) Ὅταν συντόμως γράφωμεν ε.κ.π., ἐννοοῦμεν τὴν φράσιν *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ 20, ἤτοι $9 \times 20 = 180$, θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 20.

Μ.κ.δ. καὶ ε.κ.π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

77. Μαθόντες τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. καὶ τοῦ ε.κ.π. δύο ἀριθμῶν εὐκόλως εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. ἢ τὸ ε.κ.π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀκολουθοῦντες τοὺς ἑξῆς κανόνας·

α′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. πολλῶν ἀριθμῶν, ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως δύο τούτων καὶ εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν· τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν θέτομεν ἀντὶ τῶν ἐκλεχθέντων καὶ οὕτως ἐλαττοῦμεν κατὰ ἕνα τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων· ἐκ τῶν μεινάντων ἀριθμῶν ἐκλέγομεν πάλιν δύο καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς δύο μόνον ἀριθμούς, ὧν ὁ μ.κ.δ. εἶνε ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. τῶν δοθέντων.

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ε.κ.π. πολλῶν ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἀναφερόμενον εἰς τὸν προηγούμενον κανόνα.

Π. χ. πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 12, 4 καὶ 5 ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 4 διὰ τοῦ ε.κ.π. αὐτῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 12, καὶ τῶν μεινάντων ἀριθμῶν 12 καὶ 5 εὑρίσκομεν τὸ ε.κ.π., ὅπερ εἶνε 60, καὶ οὗτος εἶνε τὸ ε.κ.π. τῶν δοθέντων.

78. Τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. πολλῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν καὶ δι' ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας κατὰ τοὺς ἀκολούθους κανόνας.

α′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. πολλῶν ἀριθμῶν, ἀναλύομεν τούτους εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἐκ τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων λαμβάνοντες ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκ τῶν ὑπαρχόντων εἰς αὐτὸν ἐκθετῶν.

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ε.κ.π. πολλῶν ἀριθμῶν, ἀναλύομεν τούτους εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν ἓν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν διαφόρων πρώτων παραγόντων λαμβάνοντες ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην, ὃν ἔχει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 900, 360 *καὶ* 16800.

$$\begin{cases} 900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \\ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ 16\,800 = 2^5 \times 3 \times 5^2 \times 7 \end{cases}$$

Μ.κ.δ. $= 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60.$

Ε.κ.π. $= 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 32 \times 9 \times 25 \times 7 = 50\,400.$

Ἀσκήσεις.

128) Νὰ ἀναγνωρισθῶσιν, ἂν εἶνε πρῶτοι, οἱ ἑξῆς ἀριθμοί· 403, 1037, 337, 293 (Ἰδὲ ὑποσημείωσιν § 72).

129) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς πρώτους παράγοντας οἱ ἀριθμοὶ 4620 καὶ 16 632.

130) Τίς ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 111 111 καὶ 1 111;

131) Ποῖον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 60, 100;

132) Ἔχων τις 60 σφαίρας ἐπιθυμεῖ μὲ αὐτὰς νὰ παίξουν 50 μαθηταί· πῶς πρέπει νὰ χωρίσῃ τοὺς μαθητὰς εἰς ὁμάδας ἀποτελουμένας ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μαθητῶν, εἰς τρόπον ὥστε ἑκάστη ὁμὰς νὰ λάβῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν σφαιρῶν καὶ αἱ ὁμάδες νὰ εἶνε ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότεραι; (Ἀπόκρ. 10 ὁμάδες ἀπὸ 5 μαθητὰς καὶ ἑκάστη ὁμὰς θὰ ἔχῃ 6 σφαίρας).

133) Ἀνθοπώλης ἔχει 105 λευκὰ ῥόδα καὶ 120 ἐρυθρά· ἐπιθυμεῖ δὲ νὰ κάμῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρας ἀνθοδέσμας, εἰς τρόπον ὥστε ἑκάστη νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος λευκῶν ῥόδων καὶ τὸ αὐτὸ πλῆθος ἐρυθρῶν· πόσας ἀνθοδέσμας θὰ κάμῃ; (Ἀπόκρ. 15

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀνθοδέσμας, ὧν ἑκάστη θὰ ἔχῃ 7 ῥόδα λευκὰ καὶ 8 ἐρυθρά).

134) Μαθητὴς ἔχων ἀρκετὰ δεκάλεπτα θέλει νὰ ἀγοράσῃ τετράδια, ὧν ἕκαστον ἐπωλεῖτο ἀντὶ 8 λεπτῶν· τίς ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τετραδίων, τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ἀγοράσῃ;

135) Ἁμάξης ὁ πρόσθιος τροχὸς ἔχει περιφέρειαν 3 πήχεων μήκους καὶ ὁ ὀπίσθιος 4 πήχεων· ποῖος εἶνε ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὃν θὰ διατρέξῃ ἡ ἅμαξα, ὥστε ἕκαστον ζεῦγος τῶν τροχῶν νὰ ἐκτελέσῃ ἀκέραιον ἀριθμὸν στροφῶν;

136) Ὁ ἀριθμὸς 88 200 εἶνε γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς εἶνε διπλάσιος τοῦ ἄλλου· νὰ ἀναλυθῇ ὁ 88 200 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ ἐκ τούτου νὰ εὑρεθῶσιν οἱ δύο παράγοντες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

137) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων σειρῶν.

2, 4, 8, 32, 3, 9, 27, 6, 12, 24.
3, 5, 7, 8, 18, 20, 35, 42, 50.
5, 12, 8, 10, 21, 28, 30, 15, 60.
16, 12, 9, 8, 25, 15, 24, 54.

138) Δίδεται ὁ ἀριθμὸς 35720· ποῖον σημαντικὸν ψηφίον πρέπει νὰ τεθῇ ἀντὶ τοῦ 0, ἵνα εὑρεθῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4 καὶ δι' 9;

139) Ἐκ τῶν ἐτῶν 1907, 1908, 1909, 1910, 1911 καὶ 1912 ποῖα εἶνε δίσεκτα; (Δίσεκτα εἶνε ὅσα εἶνε διαιρετὰ διὰ 4 καὶ ταῦτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ 366 ἡμέρας, ἔχουν δηλονότι τὸν μῆνα Φεβρουάριον ἀποτελούμενον ἀπὸ 29 ἡμέρας, ἐνῷ εἰς τὰ κοινὰ ἔτη ὁ μὴν οὗτος ἔχει 28 ἡμέρας.)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΟΙΝΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ποσόν.

79. Λέγεται ποσὸν πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· π. χ. τὸ πλῆθος πραγμάτων κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἐχόντων ἴδιον ὄνομα (πλῆθος θρανίων), τὸ βάρος πράγματός τινος, τὸ μῆκος κτλ.

Πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ ἓν ἢ περισσότερα τῶν πραγμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦσιν αὐτό· ἐνῷ πᾶν ἄλλο ποσὸν δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ ποσὸν ὁμοειδὲς πρὸς αὐτό, ὅσον καὶ ἂν θέλωμεν μικρόν.

Τὰ ἐκ πολλῶν κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων πραγμάτων ἀποτελούμενα πλήθη ὀνομάζονται *ἀσυνεχῆ ποσά*, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὰ ἄλλα ποσά, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται *συνεχῆ ποσά*.

80. ***Μονὰς*** εἶνε ποσόν, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει ὡς ὅρος συγκρίσεως πρὸς πάντα τὰ ὁμοειδῆ πρὸς αὐτὴν ποσά. Τῶν ἀσυνεχῶν ποσῶν μονὰς εἶνε κατ' ἀνάγκην ἓν τῶν ἀποτελούντων αὐτὰ πραγμάτων, ἐνίοτε δὲ καὶ συλλογὴ πολλῶν τοιούτων πραγμάτων· τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ ἡ μονὰς εἶνε αὐθαίρετος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μέτρησις ποσοῦ.

81. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἐκ τριῶν τεμαχίων ὑφάσματος τὸ πρῶτον ἔχει π. χ. μῆκος 2 πήχεων, τὸ δεύτερον 3 ὀγδόων τοῦ πήχεως καὶ τὸ τρίτον 5 πήχεων καὶ 7 ὀγδόων, ἐννοοῦμεν, ὅτι συγκρίνομεν τὰ διάφορα ταῦτα μήκη πρός τι ὡρισμένον μῆκος (ἐνταῦθα πρὸς τὸ μῆκος τοῦ πήχεως) καὶ ὅτι εὑρίσκομεν ἐκ πόσων ὁλοκλήρων πήχεων ἀποτελεῖται τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου, ἢ ἐκ πόσων μερῶν τοῦ πήχεως, ἢ ἐκ πόσων ὁλοκλήρων πήχεων καὶ πόσων καὶ ποίων μερῶν αὐτοῦ· τοιαύτην σύγκρισιν ὀνομάζομεν *μέτρησιν* τοῦ ποσοῦ.

Μέτρησις ἄρα ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ εὕρεσις ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει, πῶς τὸ μετρούμενον ποσὸν ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ληφθείσης μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

82. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως ποσοῦ εὑρισκόμενος ἀριθμὸς λέγεται *τιμὴ τοῦ ποσοῦ* ἢ ἀριθμὸς παριστῶν τὸ ποσόν. Ὅταν τὸ μετρούμενον ποσὸν εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος καὶ περιέχῃ αὐτὴν ἅπαξ ἢ πολλάκις, π. χ. 7 φοράς, τότε τὸ ποσὸν ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7. Ὅταν τὸ μετρούμενον ποσὸν εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, τότε μερίζομεν τὴν μονάδα (ἂν αὕτη δύναται νὰ μερισθῇ) εἰς ἀριθμόν τινα ἴσων μερῶν καὶ ζητοῦμεν ἓν τοιοῦτον μέρος ποσάκις λαμβανόμενον ἀποτελεῖ τὸ μετρούμενον ποσόν· ἂν π. χ. ἡ μονὰς ἐμερίσθη εἰς 8 ἴσα μέρη, καὶ τὸ μετρούμενον ποσὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 τοιαῦτα μέρη, θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ μετρούμενον ποσὸν εἶνε τὰ 3 *ὄγδοα τῆς μονάδος*. Τέλος, ὅταν τὸ μετρούμενον ποσὸν εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος, ἀλλὰ ταύτην δὲν περιέχῃ ἀκριβῶς πολλάκις λαμβανομένην, τότε τὸ μετρούμενον ποσὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀριθμόν τινα μονάδων καὶ ἀπὸ ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον μετρεῖται *ἐν γένει* ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη.

Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ διά τινος μονάδος εἶνε εἷς ἀριθμὸς καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τος διακρίνεται εἰς *ἀκέραιον* ἢ *κλασματικόν*, καθ' ὅσον τὸ μετρούμενον ποσὸν εἶνε τὸ σύνολον ἀκεραίων μονάδων ἢ μερῶν τῆς μονάδος.

Κλασματικαὶ μονάδες.

83. Ἐὰν τὸ πρᾶγμα τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἡ ἀκεραία μονὰς 1, μερισθῇ εἰς 2 ἴσα μέρη, ἑκάτερον αὐτῶν ὀνομάζεται *ἥμισυ* ἢ *ἓν δεύτερον* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\frac{1}{2}$. Γενικῶς, ἂν τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἡ μονὰς 1, μερισθῇ εἰς 3, 4, 5, 6 κ.τ.λ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων κατὰ σειρὰν ὀνομάζεται *ἓν τρίτον*, *ἓν τέταρτον*, *ἓν πέμπτον*, *ἓν ἕκτον*, κ.τ.λ. καὶ παρίσταται διὰ τῶν συμβόλων $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ κ.τ.λ.

Ἑκάστοτε δηλονότι γράφεται ἄνωθεν ὁριζοντίας γραμμῆς ἡ μεριζομένη μονὰς 1 καὶ κάτωθεν αὐτῆς ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, εἰς πόσα ἴσα μέρη ἐμερίσθη ἡ ἀκεραία μονὰς 1. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται ὡς τακτικὸν ἀριθμητικὸν ἐπίθετον.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ὧν ἕκαστος ἐκφράζει ἓν τέλειον μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, λέγονται **κλασματικαὶ μονάδες.**

Κλασματικὴ ἄρα μονὰς λέγεται τὸ ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μερίζεται ἡ ἀκεραία μονὰς 1.

84. Ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, εἰς πόσα ἴσα μέρη μερίζεται ἡ ἀκεραία μονάς, ὀνομάζεται *παρονομαστὴς* τῆς κλασματικῆς μονάδος, διότι οὗτος δίδει εἰς αὐτὴν τὸ ὄνομα. Π. χ. $\frac{1}{25}$ εἶνε κλασματικὴ μονὰς ἔχουσα παρονομαστὴν τὸν 25 καὶ ἀπαγγέλλεται *ἓν εἰκοστὸν πέμπτον*, σημαίνει δὲ τὸ ἓν ἐκ τῶν 25 ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται μερισθεῖσα ἡ ἀκεραία μονὰς 1.

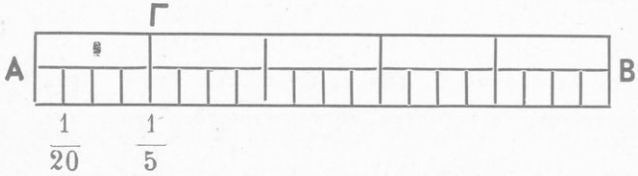
Σύγκρισις κλασματικῶν μονάδων πρὸς ἀλλήλας.

85. Ἂν ὁ παρονομαστὴς τῆς μονάδος $\frac{1}{5}$ πολλαπλασιασθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ 4, θὰ προκύψῃ ἡ μονὰς $\frac{1}{20}$, ἥτις λέγω ὅτι εἶνε τὸ τέταρτον (τετράκις μικροτέρα) τῆς μονάδος $\frac{1}{5}$.

Τῷ ὄντι, θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς 1 παριστάνει τὸ ὅλον μῆκος τοῦ κανόνος ΑΒ. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ κανόνος τούτου εἶνε τὸ



ἓν τῶν πέντε ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μερίζεται ὁλόκληρος ὁ κανών, ἔστω δ: τοῦτο τὸ ΑΓ.

Ἂν ἤδη μερίσωμεν ἕκαστον τῶν 5 πέμπτων τοῦ κανόνος εἰς 4 ἴσα μέρη, τότε βλέπομεν, ὅτι ὁλόκληρος ὁ κανὼν θὰ μερισθῇ εἰς 5×4, ἤτοι 20 ἴσα μέρη, καὶ ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων εἶνε τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ κανόνος· βλέπομεν δηλονότι, ὅτι τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ κανόνος προκύπτει, καὶ ἂν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ χωρισθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη· εἶνε ἄρα τὸ $\frac{1}{20}$ τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{1}{5}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον διακρίνομεν ὅτι τῆς μονάδος $\frac{1}{6}$ τὸ ἥμισυ εἶνε $\frac{1}{12}$, τὸ τρίτον εἶνε $\frac{1}{18}$, τὸ τέταρτον εἶνε $\frac{1}{24}$, κ.ο.κ.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών:

86. ***Ἂν κλασματικῆς μονάδος ὁ παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, 3, 4 κ.τ.λ., ἡ προκύπτουσα μονὰς εἶνε 2, 3, 4, κ.τ.λ. φορὰς μικροτέρα τῆς ληφθείσης.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Αἱ κλασματικαὶ ἄρα μονάδες γίνονται μικρότεραι, ὅταν ὁ παρονομαστὴς των αὐξάνηται· τοὐναντίον δὲ γίνονται μεγαλύτεραι, ὅταν ὁ παρονομαστὴς των ἐλαττοῦται· ἂν δηλονότι ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς μονάδος διαιρεθῇ (ἂν εἶνε διαιρετὸς) διὰ 2, 3, 4 κτλ., προκύπτει κλασματικὴ μονάς, ἥτις εἶνε 2, 3, 4 κτλ. φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ληφθείσης· π. χ. τῆς μονάδος $\frac{1}{12}$ διπλασία εἶνε ἡ $\frac{1}{6}$, τριπλασία ἡ $\frac{1}{4}$ καὶ ἑξαπλασία ἡ $\frac{1}{2}$.

Ἀσκήσεις.

140) Πῶς γράφονται αἱ κλασματικαὶ μονάδες ἓν ἑκατοστόν, ἓν χιλιοστόν, ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατομμυριοστὸν κ.ο.κ. καὶ ποίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας;

141) Ποῖαι μονάδες προκύπτουν, ἂν ληφθῇ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κ.ο.κ. ἑκάστης τῶν μονάδων $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ καὶ $\frac{1}{12}$;

142) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ μονάδες, αἵτινες εἶνε τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον ἑκάστης τῶν μονάδων $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{36}$, καὶ $\frac{1}{60}$.

143) Ποίαν σχέσιν ἔχουν πρὸς ἀλλήλας αἱ μονάδες $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{20000}$, $\frac{1}{200000}$, $\frac{1}{2000000}$; καὶ πῶς αὗται ἀπαγγέλλονται;

Κλασματικοὶ ἀριθμοί. — Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία αὐτῶν.

87. Οἱ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 γινόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *ἀκέραιοι*· οἱ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς οἱασδήποτε τῶν κλασματικῶν μονάδων γινόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ *ἁπλῶς κλάσματα*· π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶνε κλάσμα, συντόμως δὲ γράφεται $\frac{3}{5}$, ἤτοι ἄνωθεν μὲν ὁριζοντίας γραμμῆς γράφεται ὁ ἀριθμὸς 3, ὅστις ἀριθμεῖ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ κλάσματος καὶ λέγεται διὰ τοῦτο *ἀριθμητὴς* τοῦ κλάσματος, κάτωθεν δὲ τῆς γραμμῆς γράφεται ὁ 5, ὅστις δίδει τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, ἀπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται δι' ἐπαναλήψεως τὸ κλάσμα, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται *παρονομαστὴς* τοῦ κλάσματος. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ἀπαγγέλλεται *τρία πέμπτα*· ὁ ἀριθμὸς δηλονότι 3 ἀπαγγέλλεται ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικὸν ἐπίθετον καὶ ὁ παρονομαστὴς 5 ὡς τακτικόν· ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ εἶνε κλάσμα, τὸ ὁποῖον συντόμως γράφεται $\frac{5}{8}$ καὶ ἀπαγγέλλεται *πέντε ὄγδοα*.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ὁμοῦ λέγονται *ὅροι τοῦ κλάσματος*.

88. *Μικτὸς ἀριθμὸς* λέγεται ὁ συγκείμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα· π. χ. μικτοὶ εἶνε οἱ ἀριθμοὶ $3+\frac{5}{7}$, $4+\frac{2}{3}$, $1+\frac{7}{10}$, οἵτινες ἐνίοτε γράφονται συντομώτερον $3\frac{5}{7}$, $4\frac{2}{3}$, $1\frac{7}{10}$.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

89. Ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος δύναται νὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν παρονομαστήν, διότι μετὰ τὴν διαίρεσιν μιᾶς μονάδος εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἐλάβομεν ὅλα τὰ μέρη ταῦτα.

Ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος δύναται ἐπίσης νὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, διότι δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἐδόθη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σαν πολλαὶ μονάδες, καὶ ὅτι ἑκάστη τούτων διῃρέθη εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἔπειτα δὲ ἐκ τῶν μερῶν τούτων ἐλήφθησαν ὁμοῦ τόσα, ὥστε τὸ πλῆθος αὐτῶν νὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μερῶν τῶν ἀποτελούντων μίαν μόνην μονάδα.

Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον α') ὅτι *πᾶν κλάσμα ἔχον καὶ τοὺς δύο ὅρους ἴσους πρὸς ἀλλήλους ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα* 1· π.χ. εἶνε $\frac{7}{7}=1$· β') *πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος* 1· π.χ. εἶνε $\frac{7}{3}>1$ καὶ γ') *πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος* 1· π.χ. εἶνε $\frac{2}{3}<1$.

Ἀσκήσεις.

144) Κατὰ πόσον εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{19}{60}$, $\frac{700}{1000}$, $\frac{999}{1000}$;

145) Κατὰ πόσον ὑπερβαίνει τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{19}{9}$, $\frac{25}{20}$, $\frac{100}{70}$, $\frac{150}{100}$, $\frac{230}{200}$, $\frac{200}{199}$ καὶ $\frac{55}{54}$;

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

90. *Αὐξανομένου μόνου τοῦ ἀριθμητοῦ ἑνὸς κλάσματος ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος αὐξάνεται.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῷ ὄντι τοιουτοτρόπως εἰς τὸ πλῆθος ὁσωνδήποτε ἴσων μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος προστίθενται καὶ ἄλλα ἐκ τῶν μερῶν τούτων· π.χ. εἶνε $\frac{3}{10} < \frac{7}{10}$.

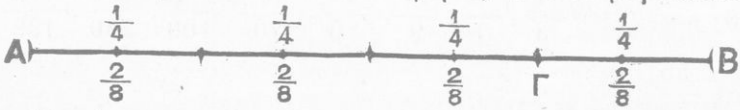
91. ***Αὐξανομένου μόνου τοῦ παρονομαστοῦ ἑνὸς κλάσματος ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος ἐλαττοῦται.***

Τῷ ὄντι, ὅσον μεγαλύτερος εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἓν πρᾶγμα, τόσον μικρότερα γίνονται τὰ μέρη· ὥστε εἶνε π. χ. $\frac{1}{8}$ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{6}$, διὰ τοῦτο καὶ $\frac{5}{8}$ εἶνε κλάσμα μικρότερον τοῦ $\frac{5}{6}$.

92. ***Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν (ἂν εἶνε διαιρετοὶ) διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 2, ὁπότε προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$, τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶνε ἴσον πρὸς τὸ ληφθέν.

Τῷ ὄντι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ παριστάνει τὸ μέγεθος, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, ἂν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα ἑνώσωμεν τὰ 3 τῶν ἴσων μερῶν, ἤτοι τὸ μέγεθος ΑΓ.



Ἂν ἤδη φαντασθῶμεν, ὅτι τῆς αὐτῆς μονάδος ΑΒ ἕκαστον τέταρτον διαιροῦμεν εἰς 2 ἴσα μέρη, τότε ἡ ὅλη μονὰς θὰ χωρισθῇ εἰς $4 \times 2 = 8$ ἴσα μέρη, ἤτοι εἰς ὄγδοα. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τέταρτον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ὄγδοα, ἕπεται ὅτι τὰ 3 τέταρτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ 6 ὄγδοα· τὸ αὐτὸ ἄρα μέρος ΑΓ τῆς ὅλης μονά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δος ΑΒ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι παρίσταται εἴτε ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἴτε ὑπὸ τοῦ $\frac{6}{8}$· θὰ εἶνε ἄρα $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Τἀνάπαλιν ἀπὸ τὸ $\frac{6}{8}$ προκύπτει τὸ ἴσον του $\frac{3}{4}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ $\frac{6}{8}$ διαιρεθῶσι διὰ 2· δυνάμεθα ἄρα νὰ γράφωμεν $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.

Ἁπλοποίησις κλάσματος.

93. Τὰ κλάσματα $\frac{12}{32}$ καὶ $\frac{12:4}{32:4} = \frac{3}{8}$ ἔχουν κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα τὴν αὐτὴν ἀξίαν· ἐν τούτοις λαμβάνομεν εὐκολώτερον τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους ὑφάσματος λέγοντες, ὅτι ἔχει μῆκος $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ἀντὶ $\frac{12}{32}$ τοῦ πήχεως· τὸ κλάσμα ἄρα $\frac{3}{8}$ εἶνε ἁπλούστερον τοῦ κλάσματος $\frac{12}{32}$.

Ἁπλοποίησις κλάσματος εἶνε ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀξίαν ἀλλὰ μικροτέρους ὅρους.

Κανών.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα, διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν (ἂν ἔχωσι τοιοῦτον).

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως, ὡς θὰ ἴδωμεν, εὐκολύνονται αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων.

Παράδειγμα.

Τοῦ κλάσματος $\frac{24}{36}$ οἱ δύο ὅροι ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 6 καὶ 12· ἂν δὲ δι' ἑκάστου τούτων διαιρεθῶ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σι καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος, προκύπτουσι τὰ ἑξῆς ἴσα πρὸς αὐτὸ κλάσματα: $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$.

Τοῦ τελευταίου κλάσματος οἱ ὅροι οὐδένα κοινὸν διαιρέτην ἔχουσι, διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι $\frac{2}{3}$ εἶνε ἡ ἁπλουστάτη μορφὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος $\frac{24}{36}$.

Παρατήρησις.

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 71), δὲν ἁπλοποιεῖται καὶ διὰ τοῦτο λέγεται *ἀνάγωγον*· οὕτως ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν εὑρεθέντων δι' ἁπλοποιήσεως τοῦ κλάσματος $\frac{24}{36}$ ἀνάγωγον εἶνε τὸ $\frac{2}{3}$, ὅπερ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{24}{36}$, ἂν οἱ ὅροι τούτου διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, ἤτοι διὰ 12.

Τὸ τοιοῦτον εἶνε γενικόν, δηλαδή:

Κλάσμα λαμβάνει τὴν ἁπλουστάτην μορφήν, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν. (Παράβ. § 73, ἐφαρμογὴν 6αν).

94. Ὅταν δοθῇ κλάσμα (ἀνάγωγον ἢ μὴ) καὶ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι διαδοχικῶς ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4,..... προκύπτουσι κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς τὰ πολλαπλάσια τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ τὰ ***προκύπτοντα*** πάντα εἶνε ***ἰσοδύναμα*** πρὸς τὸ δοθέν (§ 92)· πᾶν ἄρα κλάσμα δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον ἔχον παρονομαστὴν ἓν οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

95. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν δοθέν τι πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ ἐκείνου, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τ***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πηλίκον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ δοθὲν πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ τρέπεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ παρονομαστὴν τὸν 32 (ὅστις εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 8), ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 4· οὕτω θὰ εἶνε $\frac{5}{8}=\frac{5\times4}{8\times4}=\frac{20}{32}$.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.

96. Ἀριθμὸς ἀκέραιος δύναται νὰ λάβῃ κλάσματος μορφὴν μὲ οἱονδήποτε καὶ ἂν θέλωμεν παρονομαστήν· π. χ. ὁ ἀκέραιος 5 δύναται νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸν 5 μὲ παρονομαστὴν τὸν 8, ἤτοι εἰς ὄγδοα· πρὸς τοῦτο μερίζομεν ἑκάστην τῶν 5 μονάδων εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ οὕτω λαμβάνομεν:

8×5 ὄγδοα, ἤτοι 40 ὄγδοα.

Δυνάμεθα ἄρα νὰ γράφωμεν:

$$5=\frac{8\times5}{8}=\frac{40}{8}$$

καὶ νὰ λέγωμεν ἐν γένει:

Πᾶς ἀκέραιος ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἀριθμητὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου καὶ τοῦ ληφθέντος παρονομαστοῦ.

Π. χ. $3=\frac{3.3}{3}$, ἢ $3=\frac{4.3}{4}$, ἢ $3=\frac{5.3}{5}$ κ. ο. κ.

Παρατήρησις.

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου (§ 95), ἂν εἰσαχθῇ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τὸ σύμβολον $\frac{5}{1}$ μὲ τὴν συνθήκην νὰ παριστᾷ τοῦτο τὸν ἀκέραιον 5. (Τοιοῦτο κλάσμα $\frac{5}{1}$ δὲν δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς τὰ ἄλλα κλάσματα, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς, δὲν δύναται νὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν ἕνα). Μὲ τοιαύτην συνθήκην εὐκολύνομεν τοὺς κανόνας τῶν πράξεων ἄνευ διακρίσεως τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τοὺς κλασματικούς.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα.

97. Ἔστω ὁ μικτὸς $3+\frac{2}{5}$. Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα ὁ ἀκέραιος 3 ἰσοδυναμεῖ μὲ 5×3 πέμπτα· ὁ ληφθεὶς ἄρα μικτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ $5\times3+2$ πέμπτα· ὥστε δυνάμεθα νὰ γράφωμεν :

$$3+\frac{2}{5}=\frac{5\times3+2}{5}=\frac{17}{5}$$

καὶ νὰ λέγωμεν :

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Παραδείγματα.

$7+\frac{9}{10}=\frac{79}{10}$, $1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$, $4+\frac{5}{6}=\frac{29}{6}$, $\frac{3}{8}+2=\frac{19}{8}$, $\frac{5}{7}+4=\frac{33}{7}$.

Τροπὴ κλάσματος μεγαλυτέρου τῆς ἀκεραίας μονάδος εἰς μικτὸν ἀριθμόν.

98. Ὅταν τὸ ἐξαγόμενον λογισμοῦ τινος εἶνε κλάσμα μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1, ἀναλύομεν τοῦτο συνήθως εἰς δύο μέρη,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὧν τὸ ἓν νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄλλο κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος 1. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν κανόνα, καθ' ὃν τοῦτο γίνεται, ἂς λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ καὶ ἂς σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 5 πέμπτα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἂν ἀπὸ τὰ 17 πέμπτα λάβωμεν 5 πέμπτα, σχηματίζομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἂν ἔπειτα ἀπὸ τὰ μείναντα 12 πέμπτα λάβωμεν 5 πέμπτα, σχηματίζομεν πάλιν νέαν ἀκεραίαν μονάδα· οὕτως ἐξακολουθοῦντες σχηματίζομεν τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς τὰ 5 πέμπτα εἰσέρχονται εἰς τὰ 17 πέμπτα. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν ἀκεραίων μονάδων, ἃς περιέχει τὸ $\frac{17}{5}$, ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον 3 τῆς διαιρέσεως 17 : 5· ὥστε τὸ ληφθὲν κλάσμα περιέχει 3 ἀκεραίας μονάδας, ἤτοι 15 πέμπτα, καὶ ἀκόμη περισσεύουν 2 πέμπτα· δυνάμεθα ἄρα νὰ γράφωμεν

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

καὶ νὰ λέγωμεν:

Πᾶν κλάσμα μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1 ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἂν εἰς τοῦτο προστεθῇ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Παρατήρησις.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μόνον πρὸς τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παραδείγματα.

$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{1}{4},\ \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5},\ \frac{122}{5} = 24 + \frac{2}{5},\ \frac{18}{3} = 6,$$

$$\frac{100}{20} = 5,\ \frac{40}{10} = 4,\ \frac{49}{7} = 7.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

99. *Ὁμώνυμα κλάσματα* λέγονται ὅσα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· τοιαῦτα εἶνε τὰ κλάσματα $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$.

Ἑτερώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, ὅταν ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς· τοιαῦτα εἶνε τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{11}{12}$.

Πολλάκις παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ εὑρίσκωμεν ἐκ δοθέντων ἑτερωνύμων κλασμάτων ἄλλα ὁμώνυμα καὶ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀξίαν πρὸς τὰ δοθέντα· τοιαύτη ἐργασία λέγεται *τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα* καὶ περὶ τοιαύτης ἐργασίας ἐνταῦθα ὁ λόγος.

Παράδειγμα.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$$\frac{4}{7}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5},$$

Ἕκαστον τούτων δύναται νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα ἰσοδύναμον ἔχον ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον $7 \times 3 \times 5$ τῶν τριῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶνε καὶ πολλαπλάσιον ἑκάστου αὐτῶν κατὰ τὸν ἐν § 95 κανόνα.

Οὕτω τὸ πρῶτον $\frac{4}{7}$ ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀξίας του ἀποκτᾷ παρονομαστὴν $7 \times 3 \times 5$, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι ἐπὶ τὸ πηλίκον 3×5 τῆς διαιρέσεως $7 \times 53 \times 7 : 7$, ὁπότε γίνεται $\frac{4 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5}$.

Ὁμοίως τὸ δεύτερον ἀποκτᾷ παρονομαστὴν $7 \times 3 \times 5$, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον 7×5 τῆς διαιρέσεως $7 \times 3 \times 5 : 3$, ὁπότε θὰ γίνῃ $\frac{2 \times 7 \times 5}{3 \times 7 \times 5}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τέλος τὸ $\frac{4}{5}$ ἀποκτᾷ παρονομαστὴν $7 \times 3 \times 5$, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 7×3, ὁπότε θὰ γίνῃ $\frac{4 \times 7 \times 3}{5 \times 7 \times 3}$.

Τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα εἶνε ἴσα μὲ τὰ δοθέντα (§ 92), ἔχουσι δὲ παρονομαστὴν τὸν αὐτόν, τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν κλασμάτων. Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς πρῶτος κανών:

α') *Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν ὁσαδήποτε κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου αὐτῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.*

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶνε δύο, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου· π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ τρέπονται κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ καὶ $\frac{4 \times 3}{5 \times 3}$.

Παρατήρησις.

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας, τότε δύνανται νὰ γίνουν ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν κλασμάτων. Ὁ μικρότερος δὲ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἀποκτήσουν τὰ δοθέντα κλάσματα (ἂν ταῦτα εἶνε ἀνάγωγα), εἶνε τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν. Τότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν κανόνα τῆς § 95 συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον δεύτερον κανόνα:

β') *Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν ὁσαδήποτε κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν,* 1) *καθιστῶμεν ταῦτα ἀνάγωγα (ἂν δὲν εἶνε)·* 2) *εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀναγώγων*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τούτων κλασμάτων· 3) διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν ε. κ. π. δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν (γράφοντες συγχρόνως κάτωθεν ἑκάστου κλάσματος τὸ ἑκάστοτε εὑρισκόμενον πηλίκον), καὶ 4) πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Ἐφαρμογαί.

1) *Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κατωτέρω κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ ἔχουσιν ε. κ. π. τὸν* 120.

$$\frac{7}{12},\quad \frac{5}{24},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{2}{5}\quad \text{ε.κ.π.} = 120$$

$$(10)\quad (5)\quad (15)\quad (24)$$

$$\frac{70}{120},\quad \frac{25}{120},\quad \frac{195}{120},\quad \frac{48}{120}.$$

2) *Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:*

$$\frac{7}{6},\quad \frac{11}{15},\quad \frac{17}{30},\quad \frac{3}{2}$$

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 30 τοῦ τρίτου κλάσματος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, διὰ τοῦτο ε. κ. π. πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶνε ὁ 30· τὰ κλάσματα ἄρα τρεπόμενα εἰς *τριακοστὰ* γίνονται:

$$\frac{35}{30},\quad \frac{22}{30},\quad \frac{17}{30},\quad \frac{45}{30},$$

3) *Νὰ τραπῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα:*

$$\frac{4}{6},\quad \frac{16}{24},\quad \frac{20}{30}$$

Ἁπλοποιοῦντες πρῶτον ταῦτα εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς ἰσοδύναμα:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{2}{3}$$

4) *Ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων* $\frac{3}{7}$ *καὶ* $\frac{5}{14}$ *εἶνε τὸ μικρότερον;*

Ἐκ τῶν ἴσων πρὸς αὐτὰ ὁμωνύμων $\frac{6}{14}$ καὶ $\frac{5}{14}$ τὸ δεύτερον εἶνε μικρότερον τοῦ πρώτου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5) *Νὰ γίνουν ὁμώνυμοι οἱ ἀριθμοί·*

$$\frac{3}{5},\quad 5,\quad \frac{7}{10},\quad \frac{3}{4},\quad 2.$$

Οἱ ἀκέραιοι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1· ἐπειδὴ δὲ ε.κ.π. ὅλων τῶν παρονομαστῶν εἶνε ὁ 20, γίνονται $\frac{3\,.\,4}{5\,.\,4},\ \frac{5.20}{20},\ \frac{7.2}{10.2},\ \frac{3\,.\,5}{4\,.\,5},\ \frac{2.20}{20}$.

Ἀσκήσεις.

170) Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ δύο κλάσματα ἑκάστου τῶν ἑξῆς ζευγῶν (ἀπὸ στόματος)· $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{5}{24}$, $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{30}$, $\frac{1}{45}$ καὶ $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$ καὶ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{12}$.

171) Νὰ τραποῦν εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα $\frac{1}{3},\ \frac{7}{21},\ \frac{21}{63},\ \frac{42}{126},\ \frac{105}{315}$.

172) Νὰ τραποῦν εἰς τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα· α′) $\frac{11}{15},\ \frac{7}{60},\ \frac{13}{300}$, β′) $\frac{8}{9},\ \frac{1}{24},\ \frac{7}{180}$. γ′) $\frac{3}{4},\ \frac{8}{9},\ \frac{7}{18},\ \frac{11}{40}$.

173) Νὰ τραπῇ εἰς ἑκατοστὰ εἰκοστὰ τὸ κλάσμα $\frac{30}{84}$.

174) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων $\frac{25}{36}$ καὶ $\frac{2525}{3636}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

175) Νὰ ταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{25}{36}$, $\frac{29}{42}$, $\frac{33}{50}$, $\frac{43}{64}$.

176) Νὰ τραπῇ εἰς εἰκοστὰ τὸ κλάσμα $\frac{9}{15}$.

177) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{15}{27}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι νὰ ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 45.

178) Νὰ τραποῦν τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα καὶ τοιαῦτα, ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου νὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου.

179) Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ εἷς εἶνε 42 ἐτῶν καὶ ὁ ἄλλος 14· τί μέρος τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου εἶνε ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου;

Λύσις.

Ἓν ἔτος τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου εἶνε τὸ $\frac{1}{42}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου· τὰ 14 ἄρα ἔτη τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου εἶνε 14 φορὰς περισσότερον· ἤτοι εἶνε τὰ $\frac{14}{42}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου.

180) Ἐκ δύο ταχυδρόμων ὁ εἷς διέτρεξε 44 χιλιόμετρα εἰς 7 ὥρας καὶ ὁ ἄλλος 27 χιλιόμετρα εἰς 4 ὥρας· ποῖος ἐβάδιζε ταχύτερον;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

100. Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται ἐνταῦθα ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ὑπὸ τὸν ὅρον· πάντοτε ὅτι μὲ τὴν λέξιν μονάδας ἐννοοῦμεν καὶ τὰς ἀκεραίας καὶ τὰς κλασματικάς. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ αὐτῆς διακρίνονται αἱ ἑξῆς περιπτώσεις.

Α΄ Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$ λέγομεν: 7 ὄγδοα + 3 ὄγδοα + 5 ὄγδοα κάμνουν (7+3+5) ὄγδοα· ὥστε εἶνε $\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7+3+5}{8}=\frac{15}{8}$. Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὁμωνύμων κλασμάτων εἶνε κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν ἴδιον καὶ ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Β΄ Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Ὅταν τὰ προσθετέα κλάσματα δὲν γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, τρέπομεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Π. χ.

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{10}+\frac{5}{6}=\frac{12}{30}+\frac{21}{30}+\frac{25}{30}=\frac{58}{30}=\frac{29}{15}=1+\frac{14}{15}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παρατήρησις.

Ὅταν μεταξὺ τῶν προσθετέων εἶνε καὶ ἀκέραιοι, τότε τὸ ἄθροισμα εὑρίσκεται συντομώτερον, ἂν προστεθοῦν χωριστὰ οἱ ἀκέραιοι καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἔπειτα δὲ ἑνωθοῦν τὰ δύο ἀθροίσματα. Π. χ. $3+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+1+\frac{1}{8}=(3+1)+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)=4+\left(\frac{16}{40}+\frac{30}{40}+\frac{5}{40}\right)=4+\frac{51}{40}=4+1+\frac{11}{40}=5+\frac{11}{40}$.

Ἐφαρμογαί.

$\frac{3}{5}+\frac{4}{10}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1,$

$\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}+\frac{7}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4},$

$\frac{3}{8}+4+\frac{1}{2}=4+\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right)=4+\frac{7}{8},$

$\frac{2}{11}+5=\frac{2}{11}+\frac{55}{11}=\frac{57}{11},\qquad 3+\frac{5}{7}=\frac{21}{7}+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}=3+\frac{5}{7}.$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

101. Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους· ἤτοι εἶνε ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν δοθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς τῶν προσθετέων, εὑρίσκεται ὁ ἄλλος. Διακρίνονται δὲ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς αἱ ἑξῆς περιπτώσεις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α΄ Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὴν διαφορὰν $\frac{8}{5} - \frac{2}{5}$, λέγομεν· 8 πέμπτα — 2 πέμπτα = (8—2) πέμπτα = 6 πέμπτα, ἤτοι εἶνε

$$\frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8-2}{5} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα διαφορὰ $\frac{6}{5}$ εἶνε ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον $\frac{2}{5}$ δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον $\frac{8}{5}$. Ὅθεν·

Ἡ διαφορὰ ὁμωνύμων κλασμάτων εἶνε κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς ταῦτα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου.

Β΄ Ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος δὲν γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, τότε τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα·

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{9} = \frac{27}{63} - \frac{14}{63} = \frac{13}{63}.$$

$$1 - \frac{7}{11} = \frac{11}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}.$$

$$5 - \frac{8}{3} = \frac{15}{3} - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}, \quad \frac{17}{4} - 2 = \frac{17}{4} - \frac{8}{4} = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}, \quad \left(3 + \frac{5}{8}\right) - \frac{3}{4} = \frac{29}{8} - \frac{3}{4}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$= \frac{29}{8} - \frac{6}{8} = \frac{23}{8} = 2 + \frac{7}{8}, \qquad \left(3 + \frac{5}{8}\right) - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{29}{8} - \frac{4}{3} = \frac{87}{24} - \frac{32}{24} = \frac{55}{24} = 2 + \frac{7}{24}.$$

Ἀσκήσεις.

181) Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν·

$\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5}$	$3 + \frac{1}{4} + 3 + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{24}$
$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$	$6 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{7}{15}$
$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}$	$2 + \frac{1}{4} + \frac{7}{8} + 3 + \frac{5}{8} + \frac{1}{12}$

182) $\left(11 + \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{8} =;$ $\left(3 + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} =;$ $\left(14 + \frac{5}{6}\right) - \left(12 + \frac{3}{4}\right) =;$ $8\frac{2}{5} - 4\frac{1}{7} =;$

183) $7 - \left(2 + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{8} =;$ $9 - \left(3 + \frac{2}{5} + \frac{7}{8}\right) =;$

184) *Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ κλάσματος μικροτέρου τῆς μονάδος 1 ἀπὸ ἀκεραίου εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ μειωτέου ἀκέραιον προστεθῇ κλάσμα ὁμώνυμον πρὸς τὸ ἀφαιρετέον κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν διαφορὰν τῶν ὅρων τοῦ ἀφαιρετέου.*

Π. χ. $3 - \frac{5}{8} = 2 + \frac{8-5}{8} = 2\frac{3}{8}$, $4 - \frac{1}{6} = 3 + \frac{6-1}{6} = 3\frac{5}{6}$.

185) Νὰ ἐξηγηθῇ ὁ τρόπος τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀκολούθων πράξεων·

$$\left(5 + \frac{3}{4}\right) - \frac{2}{3} = \left(5 + \frac{9}{12}\right) - \frac{8}{12} = 5 + \frac{9-8}{12} = 5\frac{1}{12},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\left(3+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{5}=\left(3+\frac{5}{10}\right)-\frac{6}{10}=\left(2+\frac{15}{10}\right)-\frac{6}{10}=2\ \frac{9}{10},$$

$$\left(8+\frac{1}{3}\right)-5=(8-5)+\frac{1}{3},\ =3\ \frac{1}{3}.$$

186) *Νὰ ἐξηγηθῇ ὁ τρόπος τῆς ἐκτελέσεως τῶν ἀκολούθων πράξεων·*

$$\left(5+\frac{3}{8}\right)-\left(2+\frac{4}{11}\right)=\left(5+\frac{33}{88}\right)-\left(2+\frac{32}{88}\right)=(5-2)+\frac{33-32}{88}=3\ \frac{1}{88}.$$

$$\left(7+\frac{2}{3}\right)-\left(2+\frac{5}{7}\right)=\left(7+\frac{14}{21}\right)-\left(2+\frac{15}{21}\right)=\left(6+\frac{35}{21}\right)-\left(2+\frac{15}{21}\right)=7+\frac{20}{21}.$$

187) *Ἐργάτης ἐξετέλεσε τὴν πρώτην ἡμέραν τὰ* $\frac{2}{5}$ *ἔργου τινός, τὴν δευτέραν τὸ* $\frac{1}{8}$ *αὐτοῦ καὶ τὴν τρίτην τὸ ὑπόλοιπον πλὴν τοῦ* $\frac{1}{10}$ *τοῦ ἔργου· ποῖον μέρος τοῦ ἔργου ἐξετέλεσε τὴν τρίτην ἡμέραν;* ($\frac{1}{6}$ τοῦ ἔργου).

188) *Πατὴρ ἀφῆκε διὰ διαθήκης εἰς τὸ πρῶτον τέκνον τὰ* $\frac{2}{9}$ *τῆς περιουσίας του, εἰς τὸ δεύτερον τὸ* $\frac{1}{5}$, *εἰς τὴν σύζυγόν του ὅσα εἰς τὰ δύο πρῶτα τέκνα του καὶ εἰς τὸ τρίτον τέκνον τὸ ὑπόλοιπον τῆς περιουσίας· ποῖον μέρος τῆς περιουσίας ἔλαβε τὸ τρίτον τέκνον;* ($\frac{7}{45}$ τῆς περιουσίας).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

189) *Ἐκ τινος ὑφάσματος ἐκόπη τὸ* $\frac{1}{4}$, *ἔπειτα ἐκόπη τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἥμισυ· τί μέρος τοῦ ὅλου ὑφάσματος ἔμεινεν ;*

190) *Ἐργάτης τελειώνει εἰς 6 ὥρας ἔργον τι· ἄλλος ἐργάτης τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 4 ὥρας· ἐὰν ἐργάζωνται καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐπὶ μίαν ὥραν, τί μέρος τοῦ ἔργου θὰ τελειώσουν ;*

191) *Ἐκ δύο ῥάβδων ἡ μία ἔχει μῆκος* $\frac{7}{9}$ *τοῦ πήχεως καὶ ἡ ἄλλη* $\frac{3}{4}$ *τοῦ πήχεως· ποία τούτων ἡ ἐπιμηκεστέρα καὶ κατὰ πόσον ὑπερέχει τὴν ἄλλην ;*

192) *Εἶχέ τις 20 δραχμὰς καὶ ἔδωκεν εἴς τινα* $8 + \frac{4}{5}$ *τῆς δραχμῆς· πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν ;*

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ

102. Δυνατὸν νὰ δίδωνται εἰς πρόσθεσιν κλάσματα ἴσα μεταξύ των· εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἁρμόζει ἡ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων· τὸ ἓν τῶν ἴσων κλασμάτων θὰ εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁ ἀριθμὸς ὁ σημαίνων τὸ πλῆθος τῶν ἴσων προσθετέων κλασμάτων εἶνε ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ τὸ ἐξαγόμενον εἶνε τὸ γινόμενον. Ἡ δὲ πρᾶξις λέγεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον· ἤτοι *πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ) ἐπὶ ἀκέραιον σημαίνει τὸν λογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τόσων ἀριθμῶν ἴσων μὲ τὸν πρῶτον, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τοῦ δευτέρου.* Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοιαύτης πράξεως διακρίνονται αἱ ἑξῆς περιπτώσεις.

Α΄ Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

Ἔστω π. χ. ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου $\frac{3}{7} \times 4$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶνε·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{3}{7} \times 4 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3+3+3+3}{7} = \frac{3 \times 4}{7}.$$

Ἐντεῦθεν ὁ ἀκόλουθος πρῶτος κανών·

Κανὼν α΄.

103. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἀφήνομεν ἀμετάβλητον τὸν παρονομαστήν.*

Ἂς λάβωμεν τώρα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $\frac{3}{20} \times 4$· κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶνε·

$$\frac{3}{20} \times 4 = \frac{3 \times 4}{20} = \frac{3 \times 4 : 4}{20 : 4} = \frac{3}{20 : 4}.$$

Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς δεύτερος κανών·

Κανὼν β΄.

104. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον διαιροῦντα ἀκριβῶς τὸν παρονομαστήν, ἀφήνομεν ἀμετάβλητον τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου.*

Τὸ τετραπλάσιον ἄρα τοῦ $\frac{3}{20}$ κατὰ μὲν τὸν πρῶτον κανόνα εἶνε $\frac{12}{20}$, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον κανόνα εἶνε $\frac{3}{5}$. Βλέπομεν δηλονότι, ὅτι κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα τετραπλασιάζεται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ $\frac{3}{20}$, ἐνῷ κατὰ τὸν δεύτερον κανόνα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ $\frac{3}{20}$ μένει τὸ αὐτὸ 3, ἑκάστη ὅμως τῶν μονάδων $\frac{1}{20}$ γίνεται τετράκις μεγαλυτέρα, ἤτοι $\frac{1}{5}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω 6′ κανόνα εἶνε $\frac{7}{20} \times 20 = \frac{7}{1} = 7$.

Ὅθεν·

105. *Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του γίνεται ἀκέραιος ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸν ἀριθμητήν.*

Β′ Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times 4$, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ δύο τρόπους.

Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη· οὕτω

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times 4 = \frac{17}{3} \times 4 = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

Κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον ἐπαναλαμβάνομεν 4 φορὰς χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα· οὕτως ἔχομεν·

$$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times 4 = \left(5 \times 4\right) + \left(\frac{2}{3} \times 4\right) = 20 + \frac{8}{3} =$$

$$20 + 2 + \frac{2}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

106. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστὴν χωριστὰ τὰ δύο μέρη τοῦ μικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.*

Σημείωσις.—Ἐν γένει, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἄθροισμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ ἐκτελοῦμεν τὴν σημαινομένην πρόσθεσιν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολλαπλα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σιαστὴν χωριστὰ ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα· π. χ.

$$\left(8+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\times 4=\frac{120+9+5}{15}\times 4=\frac{134}{15}\times 4$$
$$=\frac{536}{15},$$

ἢ $\left(8+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\times 4=32+\frac{12}{5}+\frac{4}{3}=\frac{480+36+20}{15}$
$=\frac{536}{15}$.

Ἀσκήσεις ἀπὸ στόματος.

193) $\frac{1}{4}\times 3$, $\frac{7}{38}\times 3$, $\frac{5}{61}\times 11$, $\frac{3}{4}\times 5$, $\frac{55}{91}\times 2$, $\frac{1}{4}\times 2$, $\frac{8}{33}\times 3$, $\frac{7}{33}\times 11$.

194) $\frac{2}{3}\times 3$, $\frac{13}{48}\times 6$, $\frac{13}{48}\times 8$, $\frac{13}{48}\times 12$, $\frac{13}{48}\times 24$, $\frac{13}{48}\times 48$, $\frac{13}{48}\times 96$.

195) $\frac{2}{15}\times 21$, $\frac{2}{15}\times 25$, $\frac{5}{21}\times 6$, $\frac{7}{24}\times 9$, $\frac{7}{12}\times 9$, $\frac{7}{12}\times 15$, $\frac{7}{12}\times 24$.

Ἀσκήσεις γραπταί.

196) $\frac{60}{145}\times 110$, $\frac{43}{45}\times 108$, $\frac{43}{45}\times 153$, $\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 4$, $\left(2+\frac{1}{2}\right)\times 5$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

197) $\left(6+\frac{4}{5}\right)\times 12$, $\left(3+\frac{2}{225}\right)\times 450$,

$\left(4+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\times 7$, $\left(3+\frac{1}{4}\right)\times 12$.

198) *Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει* $\frac{3}{4}$ *τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν οἱ* 12 *πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος*;

199) *Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν* $3\frac{7}{8}$ *πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος· πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ* 10 *δραχμάς*;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΔΙ' ΑΚΕΡΑΙΟΥ

107. Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν κλασμάτων εὐκόλως θὰ δείξωμεν ὅτι δοθέντων δύο ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε τρίτος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάζων τὸν ἕνα τῶν δοθέντων δίδει γινόμενον τὸν ἄλλον· τούτου ἕνεκα ὁρίζομεν γενικῶς τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς·

Διαίρεσις εἶνε ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν (διαιρετέου καὶ διαιρέτου) ζητεῖται τρίτος (πηλίκον) τοιοῦτος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτοῦ καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δοθέντων (τοῦ διαιρέτου) νὰ εἶνε ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων (ὁ διαιρετέος).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις·

Α' Διαίρεσις δύο ἀκεραίων.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις

3 : 5

Ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 5 νὰ δίδῃ τὸν 3, μὲ ἄλλας λέξεις ἀριθμός, ὅστις εἶνε τὸ πέμπτον τοῦ 3.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἶνε φανερόν, ὅτι, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ πέμπτον μέρος πλήθους μονάδων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη ἑκάστην τῶν μονάδων καὶ νὰ λάβωμεν ἓν τῶν μερῶν ἐξ ἑκάστης μονάδος. Οὕτω λαμβάνομεν 3 *πέμπτα*· ὥστε εἶνε

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

108. ***Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου δι' ἀκεραίου ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.***

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εἶνε

$$17 : 3 = \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}.$$

Τὸ παράδειγμα τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ λέξις πηλίκον (λαμβανομένη μὲ τὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν εἴχομεν εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου λαμβανομένου ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τοῦδε καὶ εἰς τὸ ἑξῆς. Τὸ τέλειον ἄρα πηλίκον ἀτελοῦς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον προστεθῇ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Β' Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.

Ἔστω π. χ. ἡ διαίρεσις

$$\frac{3}{4} : 2$$

Εἶνε φανερόν, ὅτι πρέπει πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη ἑκάστην τῶν μονάδων.

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}$$

καὶ ἔπειτα νὰ λάβωμεν τὸ ἓν τῶν μερῶν ἐξ ἑκάστης τούτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλὰ τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{1}{4}$ εἶνε $\frac{1}{8}$, ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, ἤτοι $\frac{3}{8}$. Θὰ εἶνε ἄρα

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8} = \frac{3}{4 \times 2}$$

Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς πρῶτος κανών·

109. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν μόνον τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Ἂς λάβωμεν τώρα κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου· π. χ. τὴν διαίρεσιν $\frac{6}{7} : 2$.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἥμισυ τῶν 6 ἑβδόμων εἶνε 3 ἕβδομα· δυνάμεθα ἄρα νὰ γράφωμεν·

$$\frac{6}{7} : 2 = \frac{3}{7} = \frac{6:2}{7}$$

Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς δεύτερος κανών·

110. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου διαιροῦντος ἀκριβῶς τὸν ἀριθμητήν, διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.*

Τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ κλάσματος $\frac{6}{7}$ κατὰ μὲν τὸν πρῶτον κανόνα εἶνε $\frac{6}{14}$, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον κανόνα εἶνε $\frac{3}{7}$· ἤτοι κατὰ τὸν β' κανόνα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ $\frac{6}{7}$ ἐγένετο δὶς μικρότερον, ἐνῷ κατὰ τὸν α' κανόνα τὸ πλῆθος τῶν μονάδων μένει ἀμετάβλητον, ἑκάστη ὅμως τῶν μονάδων ἀπὸ $\frac{1}{7}$ γίνεται $\frac{1}{14}$, ἤτοι γίνεται δὶς μικροτέρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ' Διαίρεσις μικτοῦ δι' ἀκεραίου.

Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, ἂν τραπῇ ὁ μικτὸς εἰς κλάσμα.

Π. χ. $\left(5+\frac{5}{8}\right):4=\frac{45}{8}:4=\frac{45}{32}=1+\frac{13}{32}$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταλήγομεν ἐργαζόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς.

$\left(5+\frac{5}{8}\right):4=(5:4)+\left(\frac{5}{8}:4\right)=\frac{5}{4}+\frac{5}{32}=$

$\frac{40+5}{32}=1+\frac{13}{32}$

Ὁ τρόπος ὅμως οὗτος δὲν εἶνε ἐν γένει ὁ συντομώτερος.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ στόματος).

146) Νὰ τραπῶσιν εἰς μικτοὺς τὰ κλάσματα $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{7}$.

147) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$.

148). Πόσα λείπουν ἀπὸ τὰ 3 πέμπτα τῆς δραχμῆς, διὰ νὰ γίνῃ 1 δραχμή;

149) Πόσα ὄγδοα τοῦ πήχεως κάμνουν 1, 2, 3, 4, 5 καὶ 6 πήχεις;

150) Τρία ξυλάρια, τῶν ὁποίων ἕκαστον εἶχε μῆκος 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως, ἐτέθησαν ἐπ' εὐθείας τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου· πόσον εἶνε τὸ ἀποτελούμενον μῆκος καὶ κατὰ πόσον τοῦτο εἶνε μικρότερον τοῦ πήχεως;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

151) Φιάλη χωρητικότητος μιᾶς ὀκᾶς πληροῦται ὕδατος, ἂν ληφθῇ πεντάκις τὸ ὕδωρ ἑνὸς ποτηρίου· τίς ἡ χωρητικότης τοῦ ποτηρίου καὶ ποῖον μέρος τῆς φιάλης κατέχει τὸ εἰς αὐτὴν ὕδωρ, ἂν ἐκ τῆς φιάλης πλήρους ληφθῶσι δύο τοιαῦτα ποτήρια πλήρη ὕδατος;

152) Θέλει νὰ ἐκτελέσῃ τις ἓν ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας· τὴν πρώτην ἡμέραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου καὶ τὴν δευτέραν τὰ 2 πέμπτα τοῦ ἔργου· πόσον μέρος τοῦ ἔργου μένει νὰ ἐκτελέσῃ τὴν τρίτην ἡμέραν;

153) Πόσας ἡμισείας ὥρας κάμνουν 3 ὧραι; —Πόσα τέταρτα τῆς ὥρας κάμνουν 2 ὧραι καὶ ἓν τέταρτον τῆς ὥρας;

154) Πόσας ὥρας καὶ τέταρτα τῆς ὥρας ἀποτελοῦν 13 ὧραι;

155) Πόσας ὥρας κάμνουν 15 τρίτα τῆς ὥρας;

156) Ἐπλήρωσέ τις 2 δραχμὰς δι' 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος· πόσον ἀξίζουν οἱ 3 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

157) Ἐπλήρωσέ τις διὰ μίαν ἐνδυμασίαν μόνον τὰ 7 ὄγδοα τῆς ἀξίας της καὶ χρεωστεῖ ἀκόμη 9 δραχμάς· τίς ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας;

158) Δώσας τις 8 δραχμὰς ἐπλήρωσε τὰ 2 δέκατα τοῦ χρέους του· ἐκ πόσων δραχμῶν ἦτο τὸ χρέος του;

159) Ἡ χωρητικότης ἑνὸς ποτηρίου εἶνε 1 πέμπτον τῆς ὀκᾶς· διὰ τοιούτου ποτηρίου ἑπτάκις πληρωθέντος ἐπληρώθη μία φιάλη· κατὰ πόσον διαφέρει ἡ χωρητικότης τῆς φιάλης ταύτης ἀπὸ ἄλλην χωροῦσαν 2 ὀκάδας;

160) Ἐδαπάνησα τὰ 4 πέμπτα τῶν χρημάτων μου καὶ ἐπερίσσευσαν 2 δραχμαί· πόσας δραχμὰς εἶχον;

161) Ἐκ τινος τάξεως ἐπροβιβάσθησαν τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν μαθητῶν καὶ ἔμειναν εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν 6 μαθηταί· πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως ταύτης;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

162) Κόπτω ὕφασμα μήκους 6 ὀγδόων εἰς τρία ἴσα μέρη πόσον εἶνε τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου ;

163) Πρόβατον τρώγει καθ' ἑκάστην 3 ὀκάδ. καὶ 1 τέταρτον τῆς ὀκᾶς χόρτου· πόσον τρώγει εἰς 4 ἡμέρας ;

164) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς μανδηλίου χρειάζονται $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἔκ τινος ὑφάσματος· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὴν κατασκευὴν α') 8 μανδηλίων, β') 16 μανδηλίων καὶ γ') μιᾶς δωδεκάδος μανδηλίων ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

165) Ὡρολόγιον προχωρεῖ 2 πρῶτα λεπτὰ καὶ 1 τρίτον τοῦ πρώτου λεπτοῦ καθ' ἡμέραν· πόσον θὰ προχωρήσῃ εἰς 3 ἡμέρας ;

166) Ἠγόρασέ τις πρὸς 5 δραχμὰς τὸν πῆχυν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος μήκους $\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως· πόσον ἐπλήρωσεν ;

167) Ἐργάτης ἔλαβε διὰ τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς ἐργασίας δραχμὰς 15· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ δι' ὅλην τὴν ἐργασίαν ;

168) Ἐπλήρωσα τὰ 3 πέμπτα τῶν χρημάτων μου, διὰ νὰ ἀγοράσω ἓν βιβλίον, καὶ ἐπερίσσευσαν δραχμαὶ 12· πόσας δραχμὰς εἶχον ;

169) Ἠγόρασα ἓν ὡρολόγιον, τὸ ὁποῖον συνεφώνησα νὰ πληρώσω κατὰ δόσεις· τὴν πρώτην φορὰν ἐπλήρωσα τὸ 1 ὄγδοον τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου, τὴν δευτέραν τὰ 5 ὄγδοα τῆς ἀξίας του καὶ τὴν τρίτην ἔδωκα 10 δραχμὰς πρὸς ἐξόφλησιν· ποία εἶνε ἡ ἀξία τοῦ ὡρολογίου ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑ

Ὁρισμὸς γενικὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

111. Ὁ πολλαπλασιαστὴς μέχρι τοῦδε ἦτο κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος ἀριθμός· δ.ότι τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον προσθετέων. Μένει ἤδη νὰ θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλάσμα· θὰ ὁρίσωμεν δὲ τότε τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἑξῆς :

112. *Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ) ἐπὶ κλάσμα σημαίνει διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασμὸν τοῦ εὑρισκομένου πηλίκου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.*

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δηλονότι ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶνε ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον εἶνε πολλαπλασιαστής· ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Π. χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀνωτέρω συνθήκην τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 4 καὶ ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου ἐπὶ 3· οἷον $5 \times \frac{3}{4}$ σημαίνει $\frac{5}{4} \times 3$, ἤτοι $\frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4}$.

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν πολλαπλασιαστὴς εἶνε κλασματική τις μονάς, ἡ πρᾶξις αὕτη καταντᾷ εἰς τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαίρεσιν τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος· π. χ. πολλαπλασιάζω ἐπὶ $\frac{1}{4}$ καὶ διαιρῶ διὰ 4 εἶνε δύο διάφοροι τρόποι ἐκφράσεως τῆς αὐτῆς πράξεως.

Ἐπεξήγησις τῶν λεχθέντων.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν παραδοχὴν τοῦ κλασματικοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τὸν τεθέντα ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂς ζητήσωμεν τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει α δραχμὰς, πόσον ἀξίζουν α′) οἱ 3 πήχεις, β′) τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ γ′) τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;*

Διὰ τὸ πρῶτον ἐρώτημα πρέπει προδήλως νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος (τοῦ ἑνὸς πήχεως), τὰς α δηλονότι δραχμάς, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3.

Διὰ τὸ δεύτερον ἐρώτημα προδήλως πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς α δραχμὰς (τὴν ἀξίαν δηλονότι τοῦ ἑνὸς πήχεως) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 8.

Τέλος διὰ τὸ τρίτον ἐρώτημα πρέπει νὰ συνδυάσωμεν δύο συγχρόνως πράξεις· νὰ διαιρέσωμεν δηλονότι τὴν ἀξίαν α δραχμὰς τοῦ ἑνὸς πήχεως διὰ 8, ὅπότε θὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως, καὶ ταύτην ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης ἀξίας τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως.

Ἐκ τῆς ταυτότητος τῶν τριῶν ἐρωτημάτων τοῦ προβλήματος ἐδόθη τὸ αὐτὸ ὄνομα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν πρᾶξιν, δι' ἧς θὰ λυθῇ

---

*) Διὰ τοῦ γράμματος α παριστῶμεν τὸν τυχόντα ἀριθμόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦτο, καίτοι ἡ πρᾶξις αὕτη μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς μιᾶς εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις, διότι ἄλλοτε μὲν εἶνε ἁπλῆ, (πολλαπλασιασμὸς εἰς τὸ α' ἐρώτημα, διαίρεσις εἰς τὸ β'), ἄλλοτε δὲ διπλῆ (πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις εἰς τὸ γ' ἐρώτημα). Ἀλλ' ἀντὶ νὰ δίδωμεν ἑκάστοτε νέον ὄνομα εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας θὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων, διατηροῦμεν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὸ ὄνομα τῆς πράξεως, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον κατὰ τὸ πρῶτον ἐρώτημα, ἤτοι τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμός, καὶ λέγομεν διὰ τὰ δύο τελευταῖα ἐρωτήματα :

Πολλαπλασιάζομεν τὰς α δραχμὰς ἐπὶ $\frac{1}{8}$, ἀντὶ νὰ λέγωμεν: *διαιροῦμεν τὰς α δραχμὰς διὰ* 8.

Πολλαπλασιάζομεν τὰς α δραχμὰς ἐπὶ $\frac{3}{8}$, ἀντὶ νὰ λέγωμεν: *διαιροῦμεν τὰς α δραχ. διὰ* 8 *καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ* 3.

Πρὸς λύσιν ἄρα τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἄνευ διακρίσεως τῶν τριῶν περιπτώσεων γενικῶς θὰ λέγωμεν :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν οἱουδήποτε ὡρισμένου μήκους τοῦ ὑφάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος τοῦ μήκους του, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε αὕτη, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ μῆκος, τοῦ ὁποίου τὴν ἀξίαν ζητοῦμεν.

113. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν ἀνωτέρω τεθέντα ὁρισμὸν (112) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ζητοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν τοὺς κανόνας ἐκτελέσεως εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

Α'. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

Ἔστω π. χ. ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου $5 \times \frac{3}{4}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (112) ὁ πολλαπλασιασμὸς $5 \times \frac{3}{4}$ σημαί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νει διαίρεσιν τοῦ 5 διὰ 4 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασμὸν τοῦ εὑρισκομένου πηλίκου ἐπὶ 3.

Ἡ πρώτη τῶν πράξεων [§ 108] δίδει ..... $\frac{5}{4}$.

Ἡ δευτέρα τῶν πράξεων [103′ A,] δίδει ..... $\frac{5\times3}{4}$.

Θὰ εἶνε ἄρα .... $5\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{4}$.

114. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄρα ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.*

Β′) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

Ἔστω π. χ. ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν [112] πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ διὰ τοῦ 7 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4.

Ἡ πρώτη τῶν πράξεων [§ 109] δίδει $\frac{3}{5\times7}$

Ἡ δευτέρα τῶν πράξεων [§ 103′ A,] δίδει $\frac{3\times4}{5\times7}$.

Θὰ εἶνε ἄρα $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times4}{5\times7}$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών:

115. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, γράφομεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ') Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν.

Ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶνε μικτοί, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὰ ἤδη γνωστά. Π. χ.

$$3\times\left(8+\frac{2}{5}\right)=3\times\frac{42}{5}=\frac{126}{5}=25\frac{1}{5}.$$

$$\frac{3}{5}\times\left(8+\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{42}{5}=\frac{126}{25}=5\frac{1}{25}.$$

$$\left(8+\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{6}=\frac{58}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{290}{42}=\frac{145}{21}=6\frac{19}{21}.$$

$$\left(5+\frac{2}{5}\right)\times\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{27}{5}\times\frac{10}{3}=\frac{27\times10}{5\times3}=\frac{9\times2}{1\times1}$$
$$=18.$$

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω γινόμενα εὑρίσκομεν ἐργαζόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ 1ον παράδειγμα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαστέον 3 ἐπὶ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· ἤτοι

$$3\times\left(8+\frac{2}{5}\right)=(3\times8)+\left(3\times\frac{2}{5}\right)=24+\frac{6}{5}=$$
$$24+1+\frac{1}{5}=25\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εἰς τὸ 2ον παράδειγμα εὑρίσκομεν:

$$\frac{3}{5}\times\left(8+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\times8\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\right)=$$
$$\frac{24}{5}+\frac{6}{25}=\frac{120+6}{25}=\frac{126}{25}=5\frac{1}{25}.$$

Εἰς τὸ 3ον παράδειγμα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μικτοῦ ἐπὶ $\frac{5}{6}$ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· ἤτοι

$$\left(8+\frac{2}{7}\right)\times\frac{5}{6}=\left(8\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{40}{6}$$

$$+\frac{10}{42}=\frac{20}{3}+\frac{5}{21}=6+\frac{19}{21}.$$

Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα, τὸ ἔχον καὶ τοὺς δύο παράγοντας μικτούς, τὸ γινόμενον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν τῶν δύο μικτῶν τοὺς δύο ἀκεραίους, τὰ δύο κλάσματα, τὸν ἀκέραιον τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ ἄλλου, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ τέσσαρα ταῦτα μερικὰ γινόμενα. Οὕτως ἔχομεν:

$$\left(5+\frac{2}{5}\right)\times\left(3+\frac{1}{3}\right)$$

$$=(5\times3)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)+\left(5\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\times3\right)$$

$$=15+\frac{2}{15}+\frac{5}{3}+\frac{6}{5}$$

$$=15+\frac{2+25+18}{15}=15+\frac{45}{15}=18.$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

116. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζεται, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (§ 42). Ἔστω π.χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς παραγόντων·

$$\frac{6}{7}\times4\times\frac{14}{15}\times\frac{11}{13}$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6\times4}{7}$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6\times4\times14}{7\times15}$, καὶ τέλος τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6\times4\times14\times11}{7\times15\times13}$.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

117. *Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν, σχηματίζομεν ἓν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν ἀκεραίων (ἂν ὑπάρχουν), παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν.*

Καλὸν εἶνε πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν νὰ ἐκτελῶμεν τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους διὰ παντὸς κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἁπλοποιοῦμεν πρῶτον διὰ τοῦ 7, ὅστις εἶνε παράγων τοῦ παρονομαστοῦ καὶ διαιρεῖ ἐπίσης ἀκριβῶς τὸν παράγοντα 14 τοῦ ἀριθμητοῦ, ὁπότε λαμβάνομεν·

$$\frac{6\times4\times2\times11}{15\times13}$$

Τοῦτο πάλιν ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 3, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν παράγοντα 6 τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὸν παράγοντα 15 τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε λαμβάνομεν $\frac{2\times4\times2\times11}{5\times13}$ ἤτοι $\frac{176}{65}$.

Εἶνε ἄρα $\frac{6}{7}\times4\times\frac{14}{15}\times\frac{11}{13}=\frac{176}{65}=2\frac{46}{65}$.

Σημ. 1.—Ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον ὑπάρχουν καὶ μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Σημ. 2.—Ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων εἰς ἓν γινόμενον, τοῦτο δὲν βλάπτεται.

Σημ. 3.—Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς κλάσμα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τος εἶνε ἀθροίσματα ἢ διαφοραὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἁπλοποιήσεις ὡς ἡ ἀνωτέρω δὲν γίνονται, ἐκτὸς ἐὰν πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν ὅρων ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, διὰ τοῦ ὁποίου τότε διαιροῦμεν πάντας, ἄλλως ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν εἰς ἕκαστον τῶν ὅρων, καὶ ζητοῦμεν ἔπειτα, ἂν τὸ προκύπτον κλάσμα δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{12+9+15}{24-6}$ ἁπλοποιεῖται διαιρουμένων ὅλων τῶν ἀριθμῶν διὰ 3 καὶ γίνεται $\frac{4+3+5}{8-2}$ ἤτοι $\frac{12}{6}$, ὅπερ πάλιν ἁπλοποιεῖται καὶ δίδει τὸν ἀκέραιον 2, ὅστις πράγματι εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(12+9+15):(24-6)$.

Ἀσκήσεις.

209) $\frac{22}{44}\times\frac{11}{13}$, $\frac{18}{65}\times\frac{25}{27}$, $\left(5+\frac{5}{12}\right)\times 8$, $4\times\left(9+\frac{7}{8}\right)$.

210) $\left(5+\frac{5}{12}\right)\times\left(3+\frac{3}{5}\right)$, $\left(3+\frac{3}{8}\right)\times\left(7+\frac{2}{3}\right)$, $\left(8+\frac{15}{16}\right)\times\left(6+\frac{2}{11}\right)$.

211) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}\times\left(16+\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{51}$, $1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{6}\times 1\frac{1}{7}$.

212) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{60-24}{18+36-6}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

213) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\left(3+\frac{1}{7}\right)\times\frac{7}{3}\times\frac{12}{11}\times 2=16$.

214) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 4 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

215) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

216) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $1\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{17}{20}$ τῆς δραχμῆς;

217) Ὁ στατὴρ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $10+\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζουν οἱ $3\frac{1}{2}$ στατῆρες;

218) Ἔχων τις ὑπ' ὄψει ὅτι ἕκαστον δράμιον εἶνε $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ εὕρῃ, πόσον θὰ πληρώσῃ διὰ 280 δράμια ἑνὸς πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐπωλεῖτο 6 δραχ. καὶ $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς;

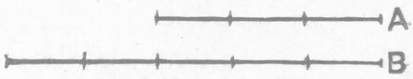
ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΔΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

118. Πρὸ τῆς ἀναζητήσεως τοῦ κανόνος ἐκτελέσεως διαιρέσεως ἐχούσης διαιρέτην κλασματικὸν ἐξηγοῦμεν τὴν ἀκόλουθον ἀναγκαίαν ἰδιότητα.

Ἐὰν ποσόν τι εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ ἄλλου ὁμοειδοῦς, τὸ δεύτερον τοῦτο ποσὸν θὰ εἶνε τὰ $\frac{5}{3}$ τοῦ πρώτου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω λόγου χάριν ἡ ράβδος A, ἥτις εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς B· τότε τὸ ἓν τῶν τριῶν ἴσων μερῶν τῶν ἀποτελούντων τὴν A, ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς A, λαμβανόμενον πεν-



τάκις ἀποτελεῖ τὴν B· ὥστε ἡ B εἶνε τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς A. Καθ' ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι, ἂν τὸ ὕψος δωματίου τινὸς εἶνε τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ ὕψους τῆς θύρας, τἀνάπαλιν, τὸ ὕψος τῆς θύρας εἶνε τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ ὕψους τοῦ δωματίου.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γνωρίζομεν ὅτι ὁ διαιρετέος μιᾶς διαιρέσεως εἶνε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ πηλίκου, τότε τὸ πηλίκον θὰ εἶνε τὰ $\frac{7}{3}$ τοῦ διαιρετέου. Τούτου τεθέντος ἔστω ὅτι πρόκειται περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως $5 : \frac{3}{7}$.

Κατὰ τὸν ἐν ἐδαφίῳ 107 ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, ἂν τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{7}$, θὰ δώσῃ ὡς γινόμενον τὸν διαιρετέον 5. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ $\frac{3}{7}$ σημαίνει (§ 112) ὅτι πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ πηλίκου 3 φοράς, καὶ ἐπειδὴ τότε ἀποτελεῖται ὁ διαιρετέος 5, λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος 5 εἶνε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ πηλίκου· ὥστε, τἀνάπαλιν, τὸ πηλίκον εἶνε τὰ $\frac{7}{3}$ τοῦ διαιρετέου 5· εἶνε δηλονότι τὸ πηλίκον $= 5 \times \frac{7}{3}$. Διὰ τοῦτο γράφομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$5 : \frac{3}{7} = 5 \times \frac{7}{3}.$$

Ἂς λάβωμεν ἐπίσης ὡς παράδειγμα τὴν διαίρεσιν :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$$

Σκεπτόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον λέγομεν :

Ἀφοῦ ὁ διαιρετέος $\frac{5}{8}$ εἶνε καθ' ὁρισμὸν τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ πηλίκου, τἀνάπαλιν, τὸ πηλίκον εἶνε τὰ $\frac{7}{3}$ τοῦ διαιρετέου $\frac{5}{8}$· ἤτοι εἶνε :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{3}.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων παραδειγμάτων διακρίνομεν ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ πηλίκου ἑνὸς ἀριθμοῦ (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ) διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν $\frac{7}{3}$, ὅστις λέγεται *ἀντίστροφος* ἀριθμὸς πρὸς τὸν διαιρέτην $\frac{3}{7}$. Ἐντεῦθεν ὁ κανών :

119. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον πρὸς τὸν διαιρέτην ἀριθμόν.***

Σημ. 1.—Θὰ λέγωμεν δύο ἀριθμοὺς *ἀντιστρόφους* ἀλλήλων, ὅταν τὸ γινόμενόν των εἶνε ἴσον πρὸς τὴν μονάδα 1· π. χ. τοῦ 5 ἀντίστροφος εἶνε ὁ $\frac{1}{5}$· τἀνάπαλιν, τοῦ $\frac{1}{5}$ ἀντίστροφος εἶνε ὁ 5· διότι $\frac{1}{5} \times 5$ ἢ $5 \times \frac{1}{5}$ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα 1.

Σημ. 2.— Οἱ κανόνες τῶν γνωστῶν ἤδη περιπτώσεων εἰς τὴν διαίρεσιν συγκεφαλαιοῦνται εἰς ἕνα μόνον. Τῷ ὄντι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$3 : 7 = \frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{8} : 7 = \frac{3}{8 \times 7} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{7}$$

$$2 : \frac{5}{8} = 2 \times \frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{9} : \frac{2}{3} = \frac{7}{9} \times \frac{3}{2}$$

Εἰς πάσας δηλονότι τὰς περιπτώσεις ἐφαρμόζει ὁ ἀνωτέρω τεθεὶς κανών.

Διαίρεσις διὰ μικτοῦ ἢ ἀθροίσματος ἐν γένει.

120. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτὸς ἢ σεσημειωμένον ἄθροισμα, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται μόνον, ὅταν πρότερον ὁ μικτὸς ἢ τὸ ἄθροισμα τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη.

$$3 : \left(5 + \frac{1}{7}\right) = 3 : \frac{36}{7} = 3 \times \frac{7}{36} = \frac{3 \times 7}{36} = \frac{7}{12}.$$

$$3 : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 : \frac{3}{2} = 3 \times \frac{2}{3} = 2.$$

$$\frac{3}{2} : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 1.$$

$$\left(5 + \frac{1}{7}\right) : \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{36}{7} : \frac{10}{3} = \frac{36}{7} \times \frac{3}{10} =$$

$$\frac{36 \times 3}{7 \times 10} = \frac{18 \times 3}{7 \times 5} = \frac{54}{35} = 1\frac{19}{35}.$$

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

121. Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς πολλάκις χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α′) Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται.

β′) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον. Π. χ.

$$\left(\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}\times 4\times\frac{2}{3}\right):\frac{3}{8}=\frac{5}{9}\times 4\times\frac{2}{3}$$

γ′) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου· Π. χ. $\left(3\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}\right):\frac{5}{8}=3\times\left(\frac{2}{7}:\frac{5}{8}\right)\times\frac{4}{9}=3\times\frac{2\times 8}{7\times 5}\times\frac{4}{9}$.

δ′) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἕκαστον μέρος τοῦ ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.

Π. χ. $\left(3+\frac{5}{8}+\frac{2}{11}\right):\frac{7}{9}=\left(3:\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{5}{8}:\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{11}:\frac{7}{9}\right)=$ κ.τ.λ.

Ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως γίνεται.

Σύνθετα κλάσματα.

122. Ὅπως τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν γράφεται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, οὕτω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς κλάσμα καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν· π. χ. τὰ πηλίκα·

$$3:\frac{5}{8},\quad \frac{2}{5}:3,\quad \frac{3}{4}:\frac{5}{6},\quad \left(2+\frac{1}{3}\right):\left(5-\frac{1}{8}\right)$$

γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{3}{\left(\frac{5}{8}\right)},\quad \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{3},\quad \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)},\quad \frac{2+\frac{1}{3}}{5-\frac{1}{8}}$$

Αἱ τοιαῦται παραστάσεις λέγονται *σύνθετα κλάσματα*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνήθων τῶν ἐχόντων ὅρους ἀκεραίους, τὰ ὁποῖα λέγονται *ἁπλᾶ*. Διὰ νὰ διακρίνωμεν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος, ἐγκλείομεν τούτους ἐν ἀνάγκῃ εἰς παρενθέσεις.

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα ἔχουν πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων.

123. *Πᾶν σύνθετον κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν, ἂν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι του ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν ὑπαρχόντων εἰς τοὺς δύο ὅρους παρονομαστῶν.*

Π.χ. τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτέρω συνθέτων κλασμάτων οἱ ὅροι ἀκεραιοῦνται, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 8, ὁπότε γίνεται $\frac{3\times 8}{5}$.

Ὁμοίως τὸ δεύτερον τρέπεται εἰς ἁπλοῦν, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 5, ὁπότε γίνεται $\frac{2}{3\times 5}$.

Τὸ τρίτον τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων γίνεται ἁπλοῦν, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι του ἐπὶ 12, ὁπότε θὰ γίνῃ $\frac{9}{10}$.

Τὸ τελευταῖον τῶν κλασμάτων, ἂν πολλαπλασιασθῶσι καὶ οἱ δύο ὅροι ἐπὶ 24, γίνεται $\frac{48+8}{120-3}$ ἤτοι $\frac{56}{117}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Σημείωσις.—Ὑπάρχουν ποσὰ (§ 79), τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε μεταβαλλομένης τῆς τιμῆς (§ 82) τοῦ ἑνὸς νὰ μεταβάλληται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου, καὶ εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ἄλλου· τοιαῦτα π. χ. ποσὰ εἶνε τὸ μῆκος ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ· τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ ποσὸν τοῦ ἔργου, ὅπερ ἐκτελοῦν εἰς ὡρισμένον χρόνον κ.ο.κ.

Ἡ ἁπλουστάτη περίπτωσις ποσῶν ἐξαρτωμένων ἀπ' ἀλλήλων εἶνε ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ ποσὰ συμμεταβάλλονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε διπλασιαζομένης ἢ τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς τιμῆς τοῦ ἑνός, νὰ διπλασιάζηται ἢ τριπλασιάζηται κτλ. καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου· καὶ γενικῶς, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιάζηται ἢ διαιρῆται δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, νὰ πολλαπλασιάζηται ἢ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ· τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα ποσά*· π. χ. τὸ μῆκος ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶνε ποσὰ ἀνάλογα, διότι:

ἂν εἰς μῆκος ὑφάσματος		4 πήχ.	ἀντιστοιχῇ ἀξία			14 δρ.
» »	»	4×2	»	»	»	14×2 δρ.
» »	»	4×3	»	»	»	14×3 δρ.
» »	»	4 : 2	»	»	»	14 : 2 δρ.

Παραδείγματα τοιούτων ἀναλόγων ποσῶν εἶνε καὶ τὰ ἑξῆς:

Τὸ βάρος ἐμπορεύματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ.

Τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦσιν εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας καὶ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπό τινος ἐργάτου.

Ὁ χρόνος ὁμαλῆς κινήσεως καὶ τὸ διανυόμενον διάστημα.

Ἡ ταχύτης[1]) ὁμαλῆς κινήσεως καὶ τὸ διανυόμενον διάστημα.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται ἀνάλογα μόνον ποσά· περαιτέρω δέ, εἰς τὰς μεθόδους, θὰ ἐξετάσωμεν γενικώτερον τὴν λύσιν τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ παρουσιαζομένων προβλημάτων.

---

[1]) Ταχύτης εἶνε τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς ἄσκησιν παραθέτομεν πλῆθος προβλημάτων καὶ εἴς τινα τούτων δίδομεν ὁδηγίας πρὸς λύσιν αὐτῶν τε καὶ τῶν ὁμοίων.

219) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει δραχμὰς $3 + \frac{3}{5}$· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις
Εἰς 1 πῆχυν ὑφάσματ. ἀντιστοιχοῦν $3 + \frac{3}{5}$ δραχμαί·
» $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως..... » $\left(3 + \frac{3}{5}\right)$δρ.$\times \frac{7}{8}$.

Διότι τὰ ποσά, πήχεις ὑφάσματος καὶ ἀξία αὐτῶν, εἶναι ἀνάλογα· ἀφοῦ δὲ οἱ πήχεις ἀπὸ 1 ἐγένοντο $\frac{7}{8}$, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ $\frac{7}{8}$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀξία $3 + \frac{3}{5}$δρ. θὰ γίνῃ $\left(3 + \frac{3}{5}\right)$δρχ.$\times \frac{7}{8}$, ἤτοι θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{7}{8}$· ἤτοι θὰ εἶνε·

$$\chi = \left(3 + \frac{3}{5}\right) \text{δρχ.} \times \frac{7}{8} = 3 + \frac{3}{20} \text{ δραχμαί·}$$

ἔνθα διὰ τοῦ γράμματος χ παριστῶμεν τὴν ζητουμένην ἀξίαν.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Ὅταν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ γνωρίζωμεν τὴν εἰς τὴν μονάδα (§ 80) *τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ δευτέρου, διὰ νὰ εὕρωμεν, εἰς νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου* (*γινομένην ἐκ τῆς μονάδος ἐκείνης*) *ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ, πολλαπλασιάζομεν τὴν εἰς τὴν μονάδα ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ δευτέρου ποσοῦ ἐπὶ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου, λαμβάνοντες ταύτην ὡς ἀφῃρημένον ἀριθμόν.*

Σημειωτέον ὅτι τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς 1 πῆχυν ἀντιστοιχοῦν $3 + \frac{3}{5}$ δραχ.

» $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ἀντιστοιχοῦν $\left(3 + \frac{3}{5}\right)$ δρχ. $\times \frac{1}{8}$

» $\frac{7}{8}$ » » » $\left(3 + \frac{3}{5}\right)$ δρχ. $\times \frac{7}{8}$

Τοιαύτη λύσις λέγεται λύσις δι' *ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα*· διότι πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως εὑρέθη πρῶτον ἡ ἀξία τοῦ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως (ἤτοι μιᾶς κλασματικῆς μονάδος) καὶ ἐκ τῆς ἀξίας ταύτης εὑρέθη ἔπειτα ἡ ἀξία τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων, τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ἥτις εἶνε ἑπταπλασία τῆς προηγουμένης.

220) Ὁδοιπόρος ὁμαλῶς βαδίζων διανύει 5 $\frac{3}{4}$ στάδια εἰς 1 ὥραν· πόσα στάδια διανύει εἰς 2 $\frac{1}{2}$ ὥρας;

221) Ὁδοιπόρος ὁμαλῶς βαδίζων διανύει 5 $\frac{3}{4}$ στάδια εἰς 1 ὥραν· πόσα στάδια διανύει εἰς 35 λεπτὰ τῆς ὥρας;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰσέρχονται τὰ ἀνάλογα ποσά, χρόνος ὁδοιπορίας καὶ διανυόμενα στάδια· δίδονται δὲ τὰ εἰς τὴν μονάδα, 1 ὥρ. τοῦ χρόνου, διανυόμενα στάδια 5 $\frac{3}{4}$· ζητοῦνται δὲ εἰς 35 λεπτὰ τῆς ὥρας πόσα στάδια ἀντιστοιχοῦν. Ἀλλ' ἡ νέα αὕτη τιμὴ τοῦ χρόνου δὲν γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα 1 ὥραν· ὥστε διὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα κατὰ τὸν ἐν τῷ προβλήματι (219) τεθέντα κανόνα διὰ πολλαπλασιασμοῦ, πρέπει πρότερον τὰ 35 λεπτὰ τῆς ὥρας νὰ τραποῦν εἰς $\frac{35}{60}$ τῆς ὥρας, (διότι 1 λεπτὸν εἶνε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας), καὶ τούτου γενομένου τὸ πρόβλημα ἐκφωνεῖται ὡς ἑξῆς·

Ὁδοιπόρος διανύει $5\frac{3}{4}$ στάδια εἰς 1 ὥραν· πόσα στάδια διανύει εἰς $\frac{35}{60}$, ἤτοι $\frac{7}{12}$ τῆς ὥρας;

Ὁπότε κατὰ τὸν κανόνα εἶνε ἡ λύσις

$$\left(5+\frac{3}{4}\right) \text{ στάδια} \times \frac{7}{12} = 3\frac{17}{48} \text{ στάδ.α.}$$

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα λύεται ὡς ἑξῆς:

Εἰς 1 ὥραν ἀντιστοιχοῦν $5+\frac{3}{4}$ στάδια·

» 1 λεπτὸν τῆς ὥρας ἀντιστοιχοῦν $\left(5+\frac{3}{4}\right)$ στάδ. $\times \frac{1}{60}$.

» 35 λεπτὰ τῆς ὥρας » $\left(5+\frac{3}{4}\right)$ στάδ. $\times \frac{35}{60}$.

222) Πόσον ἀξίζουν τὰ 250 δράμια πράγματος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει δραχμὰς $3+\frac{1}{2}$;

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι 1 δράμιον $= \frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς, βλέπομεν ὅτι τὰ 250 δράμια εἶνε τὰ $\frac{250}{400}$ τῆς ὀκᾶς, ἤτοι $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς· ὥστε ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶνε:

$$\left(3+\frac{1}{2}\right) \text{δρχ.} \times \frac{5}{8} = 2\frac{3}{16} \text{ δραχμαί.}$$

223) Ὁ στατὴρ πράγματός τινος ἀξίζει δραχμὰς $12+\frac{3}{4}$· πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ 1 ὀκᾶ $= \frac{1}{44}$ τοῦ στατῆρος, αἱ 5 ὀκάδες εἶνε τὰ $\frac{5}{44}$ τοῦ στατῆρος. Ἡ λύσις ἄρα εἶνε

$$\left(12 + \frac{3}{4}\right) \text{ δραχμαὶ } \times \frac{5}{44} = ;$$

224) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει δρχ. $6\frac{1}{4}$· πόσον ἀξίζουν τὰ 7 ῥούπια;

225) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{3}{5}$ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 20, 50, 35, 1, 8, 7, $\frac{2}{3}$, $5 + \frac{2}{3}$, καὶ $\frac{5}{3}$.

226) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 12.

Λύσις.

Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ 12 εἶνε $12 \times \frac{5}{8}$ καὶ τούτου τὰ $\frac{3}{4}$ εἶνε $12 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} =$;

226) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶνε ὁ ἀριθμὸς $\frac{4}{7}$;

Λύσις α') Ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ζητουμένου εἶνε ὁ ἀριθμὸς $\frac{4}{7}$,

τὸ $\frac{1}{3}$ » » » » » $\frac{4}{7 \times 2}$

καὶ τὰ $\frac{3}{3}$ » » » » » $\frac{4 \times 3}{7 \times 2} = \frac{6}{7}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ ζητούμενος ἄρα ἀριθμὸς εἶνε ὁ $\frac{6}{7}$.

Λύσις β') Ὁ ζητούμενος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{2}{3}$ γίνεται $\frac{4}{7}$· εἶνε ἄρα ὁ ζητούμενος τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{4}{7} : \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{7 \times 2} = \frac{6}{7}$.

227) Μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{9}{20}$ τῆς δραχμῆς;

Ἀπόκρ. Μὲ $\frac{9}{20}$ τῶν 100 λεπτῶν, ἤτοι 100 λεπ. $\times \frac{9}{20} =$ 5 λεπ. $\times$ 9 = 45 λεπ.

228) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ $5 + \frac{1}{2}$.

229) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει $3\frac{1}{2}$ δραχ· πόσον ἀξίζουν $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες;

230) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{7}{8}$ εἶνε ὁ 14;

231) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ προστιθέμενα κάμνουν τὸν 6;

232) Τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶνε οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ δραμίων 4, 5, 8, 10, 20, 40, 50, 80, 100, 200, 250, 300 καὶ 330;

233) Ποία εἶνε ἡ ἀξία ἑνὸς δραμίου πράγματός τινος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει δραχμὰς 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 2 καὶ 1;

234) Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματος ἀξίζουν δραχμὰς $3\frac{3}{20}$ πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις $\begin{cases} \text{Εἰς } \frac{7}{8} \text{ τοῦ πήχεως ἀντιστοιχοῦν δραχ. } 3+\frac{3}{20} \\ \text{» } 1 \text{ πῆχυν » } \left(3+\frac{3}{20}\right) \text{ δρ. : } \frac{7}{8} \end{cases}$

Διότι τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὸ πρόβλημα δύο ποσά, πήχεις ὑφάσματος καὶ ἀξία αὐτῶν, εἶνε ἀνάλογα· ἀφοῦ δὲ οἱ πήχεις ἀπὸ $\frac{7}{8}$ ἐγένοντο 1, ἤτοι διηρέθησαν διὰ $\frac{7}{8}$, $\left(\text{διότι } \frac{7}{8} : \frac{7}{8} = 1\right)$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀξία ἀπὸ $3+\frac{3}{20}$ δρχ. θὰ γίνῃ $\left(3+\frac{3}{20}\right) : \frac{7}{8}$, ἤτοι θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{7}{8}$· ὥστε θὰ εἶνε·

$$\chi = \left(3+\frac{3}{20}\right) : \frac{7}{8} = 3+\frac{3}{5} \text{ δρχ.},$$

ἔνθα διὰ χ παριστῶμεν τὸ ζητούμενον. Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Ὅταν γνωρίζωμεν δύο ἀντιστοιχούσας τιμὰς ποσῶν ἀναλόγων, εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ἄλλου ἐκτελοῦντες διαίρεσιν (μερισμὸν) τῆς τιμῆς τούτου διὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς ἐκείνου λαμβανομένης ὡς ἀφῃρημένου ἀριθμοῦ.

Πρὸς λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Εἰς $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως ἀντιστοιχοῦν . . . . $3+\frac{3}{20}$ δρχ.

» $\frac{1}{8}$ » » » . . . . $\left(3+\frac{3}{20}\right)$ δρχ. $\times \frac{1}{7}$

καὶ εἰς 1 πῆχυν » . . . . $\left(3+\frac{3}{20}\right)$ δρχ. $\times \frac{8}{7}$

$= 3+\frac{3}{5}$ δρχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

235) Ὁδοιπόρος ὁμαλῶς βαδίζων διανύει εἰς 35 λεπτὰ τῆς ὥρας $5\frac{17}{48}$ στάδια· πόσα στάδια διανύει εἰς 1 ὥραν;

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς 1 ὥρα, τῆς ὁποίας τὰ ἀντίστοιχα στάδια ζητοῦνται, εἶνε διάφορος τῆς μονάδος τῶν 35 λεπτῶν τῆς ὥρας, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τραπῇ πρότερον ὁ χρόνος τῶν 35′ εἰς $\frac{35}{60}$ τῆς ὥρας, ὁπότε τὸ πρόβλημα ἐκφωνεῖται ὡς ἑξῆς·

Ὁδοιπόρος εἰς $\frac{35}{60}$ τῆς ὥρας διανύει στάδια $5\frac{17}{48}$· πόσα διανύει εἰς 1 ὥραν;

Κατὰ τὸν τεθέντα κανόνα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ λύσις τούτου εἶνε:

$$\chi = \left(3 + \frac{17}{48}\right) \text{στάδ.} : \frac{35}{60} \text{ ἤτοι } 5\frac{3}{4} \text{ στάδια.}$$

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς·

Εἰς 35′ ἀντιστοιχοῦν $3 + \frac{17}{48}$ στάδια

» 1′ » $\left(3 + \frac{17}{48}\right)$ στάδ. $\times \frac{1}{35}$

» 1 ὥρ. » $\left(3 + \frac{17}{48}\right)$ στάδ. $\times \frac{60}{35}$, ἤτοι $5\frac{3}{4}$ στάδια.

236) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ πράγματος, τοῦ ὁποίου 250 δράμια ἀξίζουν δραχμὰς $2 + \frac{3}{16}$;

Ἐπειδὴ 250 δράμια $= \frac{250}{400}$ ὀκᾶς $= \frac{5}{8}$ ὀκάδ., ἡ λύσις εἶνε:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\left(2 + \frac{3}{16}\right)$ δρχ. : $\frac{5}{8} = 3\frac{1}{2}$ δραχ.

237) Ἐργάτης ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ἔργου εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας· πόσον ἔργον θὰ ἐκτελέσῃ εἰς 1 ὥραν;

238) Ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{4}$ ἔργου τινὸς εἰς 8 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας ἐκτελεῖ ὁλόκληρον τὸ ἔργον;

239) Μὲ $5\frac{3}{20}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν ἐξ ἑνὸς πράγματος ὀκάδας $4\frac{1}{2}$· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

240) Μὲ $2\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζομεν $2\frac{1}{2}$ πήχεις ἔκ τινος ὑφάσματος· πόσον ἀξίζει τὸ 1 ῥούπιον τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

241) Οἱ 3 στατῆρες ἑνὸς πράγματος ἠγοράσθησαν ἀντὶ 18 δραχμῶν καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ πράγματος τούτου;

242) Μὲ $2\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει τις 1 ὀκᾶν κρέατος· πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσῃ μὲ 17 δραχμάς;

Κατάταξις { Εἰς $2\frac{1}{2}$ δρχ. ἀντιστοιχεῖ 1 ὀκᾶ κρέατος·
» 17 » ἀντιστοιχοῦν χ ὀκάδες·

ἔνθα διὰ τοῦ χ παρεστάθη τὸ ζητούμενον.

Τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ πρόβλημα ποσά, ὀκάδες κρέατος καὶ ἀντίστοιχος ἀξία αὐτῶν, εἶνε προδήλως ἀνάλογα· ὥστε ἀφοῦ μὲ $2\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει 1 ὀκ. κρέατος, μὲ διπλασίας δρχ. θὰ ἀγοράσῃ διπλασίας ὀκάδας, ἤτοι 2 ὀκάδας, μὲ τριπλασίας δραχ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μὰς 3 ὀκάδας κ.ο.κ. Μὲ 17 ἄρα δραχμὰς θὰ ἀγοράσῃ τόσας ὀκάδας, ὅσος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει, πῶς αἱ 17 γίνονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν $2\frac{1}{2}$ δραχμῶν, ἤτοι τόσας ὀκάδας, ὅσον εἶνε τὸ πηλίκον $\frac{17}{2+\frac{1}{2}}$, ὅπερ εἶνε $6+\frac{4}{5}$· ἡ λύσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶνε $6+\frac{4}{5}$ ὀκάδες κρέατος.

Σημείωσις. — Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς $6+\frac{4}{5}$, ὅστις εἶνε τὸ ἀφῃρημένον πηλίκον $\frac{17}{2+\frac{1}{2}}$, ὅπερ δεικνύει, πῶς αἱ 17 δραχμαὶ γίνονται ἀπὸ τὰς $2\frac{1}{2}$ δραχμάς. Ὁ ἀφῃρημένος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται ***λόγος τῶν 17 δραχμῶν πρὸς τὰς $2\frac{1}{2}$ δραχμάς.***

Λόγος ποσοῦ τινος πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς εἶνε ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς τὸ πρῶτον γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου· καὶ εἶνε ὁ ἀριθμὸς οὗτος τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως (μετρήσεως) τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων τὰ δύο ποσά, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Δυνάμεθα ἄρα νὰ λέγωμεν, ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος α') εὑρίσκομεν τὸν λόγον τῶν 17 δραχμῶν πρὸς τὰς $2\frac{1}{2}$ δραχμὰς καὶ β') τὸν λόγον τοῦτον, ὅστις εἶνε ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $6\frac{4}{5}$, θεωροῦμεν ἔπειτα συγκεκριμένον καὶ σημαίνοντα κατὰ τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματος ὀκάδας κρέατος· κατὰ ταῦτα ἡ λύσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\chi = 1 \text{ ὀκ.} \times \frac{17}{2 + \frac{1}{2}}$$

ἔνθα ὁ ἀφῃρημένος λόγος πολλαπλασιάζει τὴν 1 ὀκ., ἵνα τὸ ἐξαγόμενον σημαίνῃ ὀκάδας.

243) Ἀνταλλάσσει τις $3 + \frac{3}{4}$ ὀκ. βουτύρου μὲ 1 πῆχυν μεταξωτοῦ ὑφάσματος· πόσοι πήχεις τοῦ ὑφάσματος τούτου θὰ ἀνταλλαχθοῦν μὲ $10 + \frac{2}{3}$ ὀκ. βουτύρου;

Κατάταξις
Εἰς $3 + \frac{3}{4}$ ὀκ. ἀντιστοιχεῖ ..... 1 πῆχυς·
» $10 + \frac{2}{3}$ » ἀντιστοιχοῦν ..... χ πήχεις·

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶνε:

$$\chi = 1 \text{ πήχ.} \times \frac{10 + \frac{2}{3}}{3 + \frac{3}{4}} = 2 + \frac{38}{45} \text{ πήχ.}$$

Σημ. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

Ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ τιμὴ ποσοῦ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μονάδα δευτέρου ποσοῦ ἀναλόγου πρὸς τὸ πρῶτον, καὶ ζητῆται, εἰς νέαν τιμὴν τοῦ πρώτου ποσοῦ (γινομένην ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος) ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ, ταύτην εὑρίσκομεν, ἂν λάβωμεν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ πρώτου ποσοῦ πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα θεωρήσωμεν τὸν εὑρεθέντα λόγον ὡς συγκεκριμένον ἀριθμὸν ἀναφερόμενον εἰς τὴν μονάδα 1, ἥτις εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμὴ τοῦ δευτέρου ποσοῦ.

244) Τὰ 300 δράμια σάπωνος ἀξίζουν 1 δραχμήν· πόσον ἀξίζουν αἱ $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ σάπωνος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατάταξις $\begin{cases} 300 \text{ δράμ. ἀντιστοιχοῦν εἰς } 1 \text{ δρχ.} \\ 2\frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \quad » \quad » \quad \chi \end{cases}$

Ἐπειδὴ τὰ 300 δρμ. καὶ αἱ $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες (τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ) δὲν ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα, διὰ τοῦτο ἢ τρέπομεν τὰ 300 δρμ. εἰς $\frac{300}{400}$ τῆς ὀκᾶς, ἤτοι $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἢ τρέπομεν τὰς $2\frac{1}{2}$ ὀκάδας εἰς 1000 δράμια, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν λύσιν τῶν κατωτέρω δύο προβλημάτων:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \text{ ὀκ. ἀντιστοιχοῦν εἰς } 1 \text{ δρχ.} \\ 2\frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \quad » \quad » \quad \chi \text{ δρχ.} \left(\chi = 1 \text{ δρχ.} \times \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 3 \text{ δρ.} \frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 \text{ δράμ. ἀντιστοιχοῦν εἰς } 1 \text{ δρχ.} \\ 1000 \quad » \quad » \quad » \quad \chi \left(\chi = 1 \text{δρχ.} \times \frac{1000}{300} = 3\frac{1}{3} \text{δρχ.}\right). \end{cases}$$

245) Εἰς ἓν γεῦμα 12 ἄτομα ἐδαπάνησαν δραχμὰς $60 + \frac{3}{5}$· πόσαι δραχμαὶ ἀναλογοῦν εἰς ἕκαστον ἄτομον, ἂν ἐξ ἴσου ἐδαπάνησαν πάντες;

246) Εἰς πόσας ἡμέρας ὑφαίνει τις 20 πήχεις, ἂν εἰς μίαν ἡμέραν ὑφαίνῃ $\frac{1}{5}$ τοῦ πήχεως;

247) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἐμπορεύματος ἀξίζουν 42 δρχ.· πόσον ἀξίζει τὸ ἐμπόρευμα;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

248) Ὑφάντρια ὑφαίνει $1+\frac{3}{4}$ πήχεις εἰς 1 ὥραν· πόσον ὑφαίνει εἰς 45 λεπτὰ τῆς ὥρας;

249) Ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 1 ὥραν· α') εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον; καὶ β') εἰς πόσας ὥρας ἐκτελεῖ ὅλον τὸ ἔργον;

250) Κερδήσας τις 240 δραχμὰς ἔχει τὰ $\frac{5}{3}$ τῶν δραχμῶν, τὰς ὁποίας εἶχε· πόσας δραχμὰς εἶχεν;

251) Ἐδαπάνησέ τις τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ τοῦ ἔμειναν 120 δραχμαί· πόσα εἶχεν;

252) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ εἷς τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 15 ὥρας· ὁ ἄλλος τὸ αὐτὸ ἔργον τελειώνει εἰς 12 ὥρας· α') ποῖον μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐργαζόμενοι εἰς 1 ὥραν; καὶ β') εἰς πόσας ὥρας ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τελειώνουν τὸ ὅλον ἔργον;

253) Ἐκ τριῶν κρηνῶν ἡ πρώτη ῥέουσα μόνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 15 ὥρας, ἡ δευτέρα εἰς 20 καὶ ἡ τρίτη εἰς 25 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας ὁμοῦ ῥέουσαι καὶ αἱ τρεῖς γεμίζουν τὴν δεξαμενήν; καὶ ποῖον μέρος αὐτῆς γεμίζουν εἰς 5 ὥρας;

254) Πατὴρ διέταξεν εἰς τὴν διαθήκην του ὁ πρῶτος τῶν υἱῶν του νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{4}{9}$ καὶ ὁ τρίτος τὰς ὑπολοίπους 36000 δραχμάς· πόση ἦτο ἡ περιουσία;

255) Ἐκ δύο κρηνῶν ἡ μία δίδει 300 ὀκ. ὕδατος εἰς 8 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἡ ἄλλη 490 ὀκάδας εἰς 14 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας· πόσον ὕδωρ δίδουν καὶ αἱ δύο εἰς 1 ὥραν;

256) Μεταλλικοῦ κράματος βάρους 300 δραμίων τὸ $\frac{1}{5}$ εἶνε χαλκός, τὰ $\frac{3}{5}$ κασσίτερος καὶ τὸ ὑπόλοιπον μόλυβδος· ποῖον τὸ βάρος τοῦ μολύβδου;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

257) Σιδηρόδρομος διανύει τὸ μεταξὺ δύο τηλεγραφικῶν στύλων διάστημα εἰς 9 δεύτερα λεπτὰ τῆς ὥρας· ποία ἡ ταχύτης καθ' ὥραν τοῦ σιδηροδρόμου, ἂν τὸ μεταξὺ τῶν στύλων διάστημα εἶνε 60 μέτρα;

258) Κρουνὸς γεμίζει δεξαμενὴν εἰς $\frac{3}{2}$ τῆς ὥρας καὶ δεύτερος εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας· τρίτος κρουνὸς κενώνει τὴν δεξαμενὴν πλήρη οὖσαν εἰς 3 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας γεμίζει ἡ δεξαμενὴ κενὴ οὖσα, ἂν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ οἱ τρεῖς κρουνοί;

259) Τίς ἀριθμὸς ἐλαττωθεὶς κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ γίνεται ἴσος πρὸς τὸν 15; ('Απόκρ. 25).

260) Τίς ἀριθμὸς αὐξηθεὶς κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ γίνεται ἴσος πρὸς τὸν $\frac{7}{3}$;

Τύποι πρὸς λύσιν τῶν στοιχειωδῶν προβλημάτων.

124. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν τριῶν στοιχειωδῶν προβλημάτων 219, 234 καὶ 243 εὑρέθησαν οἱ εἰς αὐτὰ ἀναφερόμενοι κανόνες πρὸς λύσιν παντὸς προβλήματος, ὅπερ ἀπαιτεῖ πολλαπλασιασμὸν ἢ μερισμὸν ἢ μέτρησιν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου. Πρὸς σύντομον ὅμως ἔκφρασιν τῶν κανόνων τούτων θὰ λύσωμεν ἐνταῦθα τρία προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα, ἀντὶ νὰ λέγωμεν ἀριθμόν τινα πήχεων, ἢ ἀριθμόν τινα δραχμῶν κ.τ.λ., μεταχειριζόμεθα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ νὰ σημάνωμεν τὰς τιμὰς τῶν ποσῶν, αἵτινες οὕτω δὲν θὰ εἶνε ὡρισμέναι, ἀλλὰ δύνανται νὰ λάβωσιν οἱουσδήποτε καὶ ἂν θέλωμεν προσδιορισμούς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α΄) Τύπος πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει α δραχμάς· πόσον ἀξίζουν οἱ β πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

	πηχ.	δρχ.
Κατάταξις	1	α
	β	χ

Ἐπειδὴ ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει α δραχμάς, οἱ β πήχεις ἀξίζουν β φορὰς περισσότερον, ἤτοι δραχμὰς $\alpha \times \beta$· ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι παντὸς προβλήματος ἔχοντος τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τὴν λύσιν δίδει ὁ τύπος·

$$\chi = \alpha \times \beta.$$

Ὁ τύπος οὗτος δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ κανόνος τοῦ τεθέντος εἰς τὸ πρόβλημα 219.

Β΄) Τύπος μερισμοῦ.

Οἱ α πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν β δραχμάς· πόσον ἀξίζει ὁ 1 πῆχυς τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Κατάταξις	α πήχ.....	β δρ.
	1	χ

Ἐπειδὴ α πήχεις ἀξίζουν β δραχμάς, ὁ 1 πῆχυς θὰ ἀξίζῃ δραχμὰς β διῃρημένας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, ἤτοι δραχμὰς $\frac{\beta}{\alpha}$.

Δυνάμεθα ἄρα νὰ λέγωμεν, ὅτι παντὸς προβλήματος ἔχοντος τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τὴν λύσιν δίδει ὁ γενικὸς τύπος·

$$\chi = \frac{\beta}{\alpha},$$

ὅστις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ εἰς τὸ πρόβλημα 234 ἀναφερομένου κανόνος πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μερισμόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γ') Τύπος μετρήσεως.

Οἱ α πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 1 δραχμήν· πόσας δραχμὰς ἀξίζουν οἱ β πήχεις ;

Κατάταξις
α πήχ. . . . . 1 δρχ.
β . . . . . χ

Ἀφοῦ οἱ α πήχεις ἀξίζουν 1 δραχμήν, διπλάτιοι πήχεις ἀξίζουν 2 δραχμάς, τριπλάσιοι πήχεις ἀξίζουν 3 δρχ. καὶ ἐν γένει β πήχεις ἀξίζουν τόσας δραχμάς, ὅσος εἶνε ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς οἱ β πήχεις γίνονται ἐκ τῶν α πήχεων· ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, συνάγομεν, ὅτι τὴν ζητουμένην ἀξίαν τῶν πήχεων παριστάνει τὸ γινόμενον 1 δρχ. $\times \frac{\beta}{\alpha}$. Δυνάμεθα ἄρα νὰ λέγωμεν, ὅτι παντὸς προβλήματος ἔχοντος τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τὴν λύσιν δίδει ὁ γενικὸς τύπος·

$$\chi = 1 \text{ δρχ.} \times \frac{\beta}{\alpha},$$

ὅστις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ εἰς τὸ πρόβλημα 243 ἀναφερομένου κανόνος πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν λυομένων διὰ μιᾶς διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μέτρησιν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

125. Ἐκ τῶν κλασμάτων ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὴν τὸν τυχόντα ἀκέραιον καὶ παρονομαστὴν 10, ἢ 100, ἢ 1000. κ.τ.λ., λέγονται **δεκαδικὰ κλάσματα ἢ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.**

Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ π. χ. εἶνε οἱ ἑξῆς :

$$\frac{53}{10},\quad \frac{2075}{100},\quad \frac{8}{1000},\quad \frac{1}{10000}$$

Πρὸς διάκρισιν λέγονται **κοινὰ** τὰ ἁπλᾶ κλάσματα, ὧν ὁ παρονομαστὴς εἶνε διάφορος τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν.

Δεκαδικαὶ μονάδες.

126. Αἱ κλασματικαὶ μονάδες

$$\frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{10\,000},\quad \frac{1}{100\,000},\ldots\ldots$$

ἐξ ὧν δι' ἐπαναλήψεως γίνονται τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, λέγονται **δεκαδικαὶ μονάδες** καὶ διαιροῦνται εἰς τάξεις.

Τὴν τάξιν ἑκάστης διακρίνει ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ· π.χ. ἡ μονὰς $\frac{1}{10}$ λέγεται **δεκαδικὴ μονὰς πρώτης τάξεως**, ἡ $\frac{1}{100}$ **δευτέρας τάξεως**, ἡ $\frac{1}{1000}$ **τρίτης τάξεως** κ.ο.κ.

Εἶνε φανερόν, ὅτι **μία δεκαδικὴ μονὰς ἑκάστης τάξεως ἰσοῦται πρὸς 10 μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως**, ἤτοι εἶνε :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100},\quad \frac{1}{100}=\frac{10}{1000},\quad \frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}\ \text{κ. ο. κ.}$$

Σύντομος γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

126. Ἔστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{532018}{10000}$

Εἰξεύρομεν ὅτι

$$\frac{532018}{10000}=53+\frac{2018}{10000}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$2018=2000+10+8$$

θὰ εἶνε

$$\frac{532018}{10000}=53+\frac{2000}{10000}+\frac{10}{10000}+\frac{8}{10000}$$

ἢ ἀκόμη·

$$\frac{532018}{10000}=53+\frac{2}{10}+\frac{1}{1000}+\frac{8}{10000}$$

Πᾶν ἄρα δεκαδικὸν κλάσμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ὅστις δύναται νὰ εἶνε καὶ μηδέν, ὅταν τὸ κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος 1) καὶ δεκαδικῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὰς μὴ ὑπερβαίνοντας τὸ 9.

Τούτου τεθέντος δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὴν γραφὴν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὴν γνωστὴν συνθήκην τῆς γραφῆς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καθ' ἣν ἕκαστον ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, ἤτοι μονάδας δεκάκις μικροτέρας.

Οὕτω τὰ μὲν ψηφία τὰ σημαίνοντα ἀκεραίας μονάδας γράφονται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, τὰ δὲ σημαίνοντα δεκαδικὰς μονάδας γράφονται κατὰ σειρὰν κατόπιν τοῦ ἀκεραίου ὡς ἑξῆς·

Κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων γράφεται τὸ ψη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φίον τῶν δεκάτων, κατόπιν τούτου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν κ.ο.κ.· αἱ ἐλλείπουσαι μονάδες γράφονται καὶ ἐνταῦθα διὰ τοῦ μηδενός· πρὸς διάκρισιν μόνον τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων γράφεται κατόπιν τούτου ὑποδιαστολή, ἥτις χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ κλασματικοῦ.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἀνωτέρω ληφθὲν δεκαδικὸν κλάσμα θὰ γραφῇ συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

$$\frac{532018}{10000} \text{ ἢ } 53 + \frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{8}{10000} = 53{,}2018\cdot$$

ἔνθα ὁ ἀριθμὸς 53 ὁ γεγραμμένος πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς εἶνε ὁ χωρῶν εἰς τὸ κλάσμα ἀκέραιος, τὰ δὲ κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία [1] σημαίνουν κατὰ σειρὰν τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστὰ κ.τ.λ., ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ κλασματικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ 0 σημαίνει τὴν ἔλλειψιν τῶν ἑκατοστῶν.

Ἰδιαιτέρως τὴν ἔλλειψιν ἀκεραίων μονάδων πρέπει νὰ σημάνωμεν διὰ τοῦ 0, εἰς περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ δοθὲν κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος 1. Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφονται καὶ τὰ ἀκόλουθα δεκαδικὰ κλάσματα·

α') $$\frac{57834}{1000} = 57 + \frac{834}{1000} = 57 + \frac{800}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} =$$

$$= 57 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} = 57{,}834.$$

β') $$\frac{502}{1000} = \frac{500}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{2}{1000} = 0{,}502.$$

γ') $$\frac{73}{10000} = \frac{70}{10000} + \frac{3}{10000} = \frac{7}{1000} + \frac{3}{10000} = 0{,}0073.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας :

---

[1]) Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται δεκαδικὰ ψηφία.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κανὼν α΄)

127. *Διὰ νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὴν σύντομον μορφὴν δεκαδικὸν κλάσμα, γράφομεν μόνον τὸν ἀριθμητήν, καὶ ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα εἶνε τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ὅταν δὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ εἶνε ὀλιγώτερα τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ, τότε προσγράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμητοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ἀναγκαιοῦσι, διὰ νὰ μείνῃ ἓν μόνον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.*

Κανὼν β΄)

128. *Διὰ νὰ γράψωμεν τἀνάπαλιν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν δεκαδικὸν γεγραμμένον ὑπὸ τὴν σύντομον μορφήν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἀπαγγελία γεγραμμένου δεκαδικοῦ.

129. Δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον ὑπὸ τὴν σύντομον μορφὴν ἀπαγγέλλομεν συνήθως κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους·

α΄) Ἀπαγγέλλομεν ὡς ἐὰν ἦτο γεγραμμένος ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν· π. χ. τὸν 53,17 ἀπαγγέλλομεν ὅπως τὸ κλάσμα $\frac{5317}{100}$.

β΄) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ τὸ κλασματικὸν μέρος ὀνομάζοντες τοῦτο μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ του ψηφίου· π. χ. τὸν ἀριθμὸν 53,17 ἀπαγγέλλομεν 53 *ἀκέραιαι μονάδες* καὶ 17 *ἑκατοστά*, ὡς μικτὸν δηλονότι ἀριθμόν· διότι $53,17 = 53 + \frac{17}{100}$.

Ὁμοίως τὸν ἀριθμὸν 13,0075 ἀπαγγέλλομεν 13 *ἀκέραιαι μονάδες* καὶ 75 *δέκατα χιλιοστοῦ*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ') Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ἔπειτα ἕκαστον τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας σημαίνει· π. χ. τὸν 54,107 ἀπαγγέλλομεν 54 *ἀκέραιαι μονάδες*, 1 *δέκατον* καὶ 7 *χιλιοστά*· διότι $54,107 = 54 + \frac{1}{10} + \frac{7}{1000}$. Ὁμοίως τὸν 0,0452 ἀπαγγέλλομεν 0 *ἀκέραιος*, 4 *ἑκατοστά*, 5 *χιλιοστὰ* καὶ 2 *δέκατα χιλιοστοῦ*.

δ') Ὅταν ὁ δεκαδικὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, τότε πρὸς εὐκολίαν ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν κατὰ τμήματα (συνήθως τριψήφια), ὀνομάζοντες ἕκαστον τῶν τμημάτων μὲ τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου ψηφίου του· π. χ. τὸν 53,0175034 ἀπαγγέλλομεν 53 *ἀκέραιος*, 17 *χιλιοστά*, 503 *ἑκατομμυριοστὰ* καὶ 4 *δέκατα ἑκατομμυριοστοῦ*.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ.

130. Διὰ νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὴν σύντομον μορφὴν δεκαδικὸν ἀπαγγελλόμενον κατά τινα τῶν ἀνωτέρω τρόπων, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἑκάστοτε ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ὥστε νὰ σημαίνῃ τὰς ἀπαγγελλομένας μονάδας· ἂν λ. χ. ἀπαγγέλλωνται δέκατα, τὸ ἀπαγγελλόμενον τελευταῖον ψηφίον θὰ γραφῇ εἰς τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς θέσιν, ἂν ἑκατοστὰ εἰς τὴν δευτέραν κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

261) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν σύντομον μορφὴν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα

$$\frac{60748}{100},\quad \frac{507003}{100000},\quad \frac{7}{10000},\quad \frac{53}{10000},\quad \frac{373}{10},$$

$$\frac{1001}{10000},\quad \frac{15007}{1000}$$

καὶ νὰ ἀπαγγελθῶσι κατὰ διαφόρους τρόπους.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

262) Τίνες οἱ δύο ὅροι ἑκάστου τῶν κλασμάτων

0,1 3,1415 0,3 0,0049 283,75

263) Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ νὰ γραφοῦν ὡς κοινὰ κλάσματα.

264) Νὰ ἀπαγγελθῶσι κατὰ διαφόρους τρόπους οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ

0,0039· 0,10100101· 0,00001· 58,14002· 0,37012.

265) Νὰ ἐξηγηθῇ ὅτι μία μονὰς οἱασδήποτε δεκαδικῆς τάξεως ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας σημαίνουν τὰ ἑπόμενα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 3,14159 τὸ $\frac{1}{10}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{4159}{100000}$, τὸ $\frac{1}{100}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{159}{100000}$, κ.ο.κ.

266) Νὰ ἐξηγηθῇ ὅτι, ἂν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 3,4863 λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 3,49, κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ 0,01.

267) Μὲ πόσα ἑκατοστὰ ἢ χιλιοστὰ κ.τ.λ. ἰσοδυναμοῦν 0,3.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες.

131. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας·

I. Δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν βλάπτεται, ἂν προσγραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ μετὰ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον, ἢ ἐὰν διαγραφῶσι τοιαῦτα ὑπάρχοντα.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 6,35 καὶ 6,3500 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀξίαν, ἐπειδὴ τὰ δύο μηδενικὰ τοῦ δευτέρου σημαίνουν τὴν ἔλλειψιν χιλιοστῶν καὶ δεκάτων χιλιοστοῦ· ἑπομένως δύνανται νὰ μὴ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψει ἢ νὰ διαγραφῶσιν.

Τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰδιότητος ταύτης διακρίνομεν ἐπίσης γράφοντες καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὡς κλάσματα κοινά· $\frac{635}{100}$ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{63500}{10000}$· ὁπότε βλέπομεν ὅτι ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀξίαν, διότι οἱ τοῦ δευτέρου ὅροι εἶνε ἑκατονταπλάσιοι τῶν ὅρων τοῦ πρώτου.

Σημειωτέον ἤδη ὅτι καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὸς ἀκεραίου δυνάμεθα νὰ γράφωμεν μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία, ἀρκεῖ μόνον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀκεραίου νὰ θέτωμεν ὑποδιαστολήν· οἷον 57 = 57,0 = 57,00.

II. Δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς φέρομεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἐὰν μετὰ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον ἑκάστου προσγράψωμεν μηδενικὰ τόσα, ὥστε πάντες νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὲ ἐκεῖνον, ὅστις ἔχει τὰ περισσότερα.

Π. χ. Οἱ δεκαδικοὶ 5,6 0,82 0,094

τρέπονται εἰς χιλιοστά, ἂν γραφοῦν ὡς ἑξῆς·

5,600 0,820 0,094.

III. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, ἢ δύο, ἢ τρεῖς κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, δηλαδὴ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει παρὰ τὴν μονάδα 1 ὁ πολλαπλασιαστής.

Τἀνάπαλιν, διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν, δύο, τρεῖς κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, δηλαδὴ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει παρὰ τὴν μονάδα ὁ διαιρέτης.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, τότε προηγουμένως προσγράφομεν εἰς αὐτὸν ἱκανὰ μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀκεραίου.

Παραδείγματα.

35,273 × 100 = 3527,3	35,273 : 10 = 3,5273
35,273 × 1000 = 35273	35,273 : 100 = 0,35273
35,273 × 10000 = 352730	35,273 : 1000 = 0,035273
.....	.....

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῷ ὄντι ἑκάστην φοράν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατίθεται μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δεκαπλασιάζεται· διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου δεκαπλασιάζεται, ἤτοι αἱ μονάδες γίνονται δεκάδες, τὰ δέκατα γίνονται ἀκέραιαι μονάδες, τὰ ἑκατοστὰ γίνονται δέκατα κ.ο.κ. Τἀνάπαλιν, ἑκάστην φοράν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὑποδιαστολὴ μετατίθεται μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ δεκαδικὸς διαιρεῖται διὰ 10· διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου γίνεται προδήλως δεκάκις μικροτέρα.

Σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι ἡ διαίρεσις ἀκεραίου ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000, κ.τ.λ. γίνεται, ἂν χωρισθοῦν ἀπὸ τῶν δεξιῶν αὐτοῦ ἕν, δύο, τρία, κ.τ.λ. δεκαδικὰ ψηφία.

Π. χ. $535 : 100 = \frac{535}{100} = 5{,}35$ $\quad 3 : 100 = \frac{3}{100} = 0{,}03$

$535 : 1000 = 0{,}535$ $\quad 3 : 1000 = 0{,}003.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

132. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις διατάσσεται καὶ ἐκτελεῖται, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους· ἤτοι α') γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· β') γράφονται ἢ ὑπονοοῦνται μηδενικὰ ἱκανὰ τὸ πλῆθος μετὰ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν ἀριθμῶν, ὥστε πάντες νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ γ') εἰς τὸ ἐξαγόμενον γράφεται ἡ ὑποδιαστολὴ εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.

Παράδειγμα προσθέσεως.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν·

3,75 8 7,3 1,703 27

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

3,75	3,750
8	8,000
7,3	7,300
1,703	1,703
27	27,000
47,753	47,753

Παραδείγματα ἀφαιρέσεως.

45,03	35,1423	5
4,2591	4,05	3,1415
40,7709	31,0923	1,8585

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πολλαπλασιασμός.

133. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο δεκαδικῶν θὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶνε κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Π. χ.·

$$31{,}4 \times 0{,}51 = \frac{314}{10} \times \frac{51}{100} = \frac{314 \times 51}{10 \times 100} = \frac{16014}{1000} = 16{,}014.$$

Εὑρέθη δηλονότι τὸ γινόμενον 16014 τῶν ἀριθμῶν 314 καὶ 51 (τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἄνευ ὑποδιαστολῶν), καὶ ἀπὸ τούτου ἀπεκόπησαν τρία δεκαδικὰ ψηφία, ἤτοι τόσα, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες. Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

134. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.*

Παραδείγματα.

0,01 13	5,24	2,12
3,14	13	0,0 35
4 52	1572	10 60
11 3	524	63 6
339	68,12	0,74 20
0,0354 82		

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἔπρεπε νὰ χωρίσωμεν ἓξ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ τοῦτο ἐγράψαμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου (τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ πέντε ψηφίων) ἱκανὸν πλῆθος μηδενικῶν, διὰ νὰ περισσεύῃ ἕν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα παρατηροῦμεν, ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατὰ τὸν χωρισμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων μετροῦμεν καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εὑρεθοῦν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμητῶν.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

135. Ἐκ τῶν λεχθέντων γίνεται φανερὸν ὅτι: *Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δεκαδικῶν καὶ ἀκεραίων, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἄνευ τῶν ὑποδιαστολῶν, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου νὰ χωρισθῶσι τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὅλοι ὁμοῦ οἱ παράγοντες.*

Παραδείγματα.

$$0,2 \times 0,003 \times 4,4 = 0,00264$$
$$0,3 \times 0,01 \times 5,77 = 0,01731$$
$$0,4 \times 100 \times 0,003 \times 2 = 0,2400 = 0,24.$$

Διαίρεσις

136. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δεκαδικῶν· π. χ. τοῦ 25,38 διὰ τοῦ 1,9387.

Πρὸς τοῦτο εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ τόσα, ὅσα ἀρκοῦσιν, ἵνα διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων· εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα γράφομεν δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως·

$$25,3800 : 1,9387$$

ἢ τῆς ἕξῆς· $$\frac{253800}{10000} : \frac{19387}{10000}.$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ ἑξῆς·

$$\frac{253800 \times 10000}{10000 \times 19387} \text{ ἢ } \frac{253800}{19387}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ κλάσμα τοῦτο παριστᾷ τὸ τέλειον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 253800 : 19387. Ἡ διαίρεσις ἄρα τῶν δεκαδικῶν ἀνάγεται εἰς διαίρεσιν ακεραίων.

Ὁμοίως εἶνε· $8 : 0,35 = 8,00 : 0,35 = \frac{800}{100} : \frac{35}{100} = \frac{800}{35}$

Ἐντεῦθεν ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ τελείου πηλίκου δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶνε ὁ ἑξῆς·

137. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν, κάμνομεν τούτους νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, προσγράφοντες εἰς τὸν ἔχοντα ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἱκανὸν πλῆθος μηδενικῶν· ἔπειτα ἐξαλείφομεν τὰς ὑποδιαστολὰς καὶ διαιροῦμεν τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου τοὺς προκύπτοντας ἀριθμούς.*

138. Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων, (εἰς τὴν ὁποίαν ἀνάγεται ἡ διαίρεσις δύο δεκαδικῶν) δὲν δίδει πάντοτε ἀκέραιον πηλίκον, ἐκτὸς ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν εὑρίσκεται ὡς τέλειον πηλίκον κλάσμα (μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῆς μονάδος), οὗ ἀριθμητὴς εἶνε ὁ διαιρετέος καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης. Εἰς τοὺς διαφόρους λογισμοὺς προτιμῶμεν νὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἔστω καὶ μετά τινος μικροῦ λάθους, τὸ ὁποῖον δεχόμεθα, ἐφ' ὅσον δὲν ὑπερβαίνει τοῦτο ἀνεκτόν τι ὅριον ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ τὸ ἐξαγόμενον ἐκφράζει. Τὸ ὅριον τοῦτο τοῦ λάθους, ἢ *ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως*, συνήθως ἐκφράζομεν, λέγοντες, πόσα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον· π. χ. λέγοντες ὅτι θὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον διαφέρει τοῦ ἀληθοῦς ὀλιγώτερον *ἑνὸς χιλιοστοῦ*. Ἂς ἴδωμεν ἤδη, κατὰ τίνα τρόπον θὰ τὸ εὑρίσκωμεν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παραδείγματα.

α') *Τῆς διαιρέσεως* 38 : 7 *νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.*

38	7
30	5,428
20	
60	
4	

Τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ 38 εἶνε 5 ηὐξημένον κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου 3.

Τὸ ὑπόλοιπον 3 ἰσοδυναμεῖ πρὸς 30 *δέκατα*· ὅθεν τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν 30 *δεκάτων* εἶνε 4 *δέκατα* (ἅτινα γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀκεραίου μέρους 5 χωρίζοντες αὐτὸ δι' ὑποδιαστολῆς) ηὐξημένα κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου 2 *δέκατα*.

Τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν 2 *δεκάτων* ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν 20 *ἑκατοστῶν*, ὅπερ εἶνε 2 *ἑκατοστά*, (τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν δεκάτων εἰς τὸ πηλίκον), ηὐξημένα κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου 6 *ἑκατοστά*.

Τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν 6 *ἑκατοστῶν*, ἢ ὅπερ ταὐτὸ τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν 60 *χιλιοστῶν* εἶνε 8 *χιλιοστὰ* καὶ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου τῶν 4 *χιλιοστῶν*.

Τὸ τέλειον ἄρα πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶνε 5,428 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ· τὸ πηλίκον ἄρα περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5,428 καὶ 5,429· ἑκάτερος τούτων λέγεται πηλίκον τῆς διαιρέσεως μὲ *προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ*, ὁ μὲν πρῶτος *κατ' ἔλλειψιν*, ὁ δὲ δεύτερος *καθ' ὑπεροχήν*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν δύο τούτων πηλίκων θὰ προτιμηθῇ ἐνταῦθα τὸ καθ' ὑπεροχήν, διότι τοῦτο μᾶλλον πλησιάζει πρὸς τὸ τέλειον πηλίκον 5,428 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ· τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ εἶνε 5,429.

Ἐκ τούτων ἤδη γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι, ὅταν δὲν ἔχωμεν νὰ καταβιβάσωμεν ἄλλα ψηφία ἀπὸ τὸν ἀκέραιον διαιρετέον, θέτομεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον καὶ διαδοχικῶς ἀνὰ ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἑκάστοτε ἓν νέον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Ὁμοίως ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

β') *Τῆς διαιρέσεως* 139,56 : 11 *νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.*

139,56	11
29	12,68
75	
96	
8	

Τὸ $\frac{1}{11}$ τοῦ ἀκεραίου 139 εἶνε 12 ἀκέραιαι μονάδες καὶ $\frac{1}{11}$ τοῦ ὑπολοίπου 7 ἀκεραίων μονάδων.

Ἀλλὰ 7 ἀκέραιαι μονάδες μετὰ τῶν 5 δεκάτων τοῦ διαιρετέου κάμνουν 75 *δέκατα* καὶ τούτων τὸ $\frac{1}{11}$ εἶνε 6 *δέκατα* καὶ $\frac{1}{11}$ τοῦ ὑπολοίπου τῶν 9 *δεκάτων*.

Ὁμοίως τὰ 9 *δέκατα* μετὰ τῶν 6 ἑκατοστῶν τοῦ διαιρετέου κάμνουν 96 *ἑκατοστὰ* καὶ τούτων τὸ $\frac{1}{11}$ εἶνε 8 ἑκατοστὰ καὶ $\frac{1}{11}$ τῶν 8 *ἑκατοστῶν*.

Τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12,68 καὶ 12,69. Ἐκ τούτων θὰ προτιμηθῇ τὸ καθ' ὑπεροχήν, μᾶλλον πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀκριβές, ἤτοι τὸ 12,69.

139,56	11
29	12,6872
75	
96	
80	
30	
8	

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τῆς ἰδίας διαιρέσεως τὸ πηλίκον μὲ ἀνωτέραν προσέγγισιν, λ. χ. μὲ προσέγγισιν 0,0001, τότε ἐξακολουθοῦμεν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον 8 ἑκατοστὰ εἰς 80 χιλιοστά, λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{11}$ τούτων καὶ εὑρίσκομεν νέον ψηφίον τοῦ πηλίκου 7 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 3 χιλιοστά· ταῦτα πάλιν τρέπομεν εἰς 30 δέκατα χιλιοστοῦ, ὧν τὸ $\frac{1}{11}$ εἶνε 2 δέκατα χιλιοστοῦ μεθ' ὑπολοίπου 8. Τὸ ἀκριβὲς ἄρα πηλίκον τῆς ὅλης διαιρέσεως εἶνε 12,6872 καὶ $\frac{8}{11}$ *τοῦ δεκάτου τοῦ χιλιοστοῦ*, ἀντὶ δὲ τούτου λαμβάνομεν τὸ καθ' ὑπεροχὴν πηλίκον 12,6873 ὡς μᾶλλον πλησιέστερον τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου.

Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ἐφ' ὅσον μένει ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ μηδενός, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθῶμεν τὴν διαίρεσιν καταβιβάζοντες πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου ἀνὰ ἓν μηδενικὸν (ἐκ τῶν ὑπονοουμένων δεξιὰ τοῦ διαιρετέου)· καὶ ἂν οὕτως ἐξακολουθοῦντες δὲν εὕρωμεν κανὲν ὑπόλοιπον 0, προχωροῦμεν τὴν διαίρεσιν καὶ προσδιορίζομεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην καὶ ἂν θέλωμεν προσέγγισιν.

γ') *Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως* 3,141 : 0,13 *μὲ προσέγγισιν* 0,001.

314,100	13
54	24,161
21	
80	
20	
7	

Μεταθέτομεν τὰς ὑποδιαστολὰς ἀμφοτέρων δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, διὰ νὰ καταστῇ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· τὸν προκύπτοντα διαιρετέον τρέπομεν εἰς χιλιοστὰ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θὰ εἶνε ἄρα 3,141 : 0,13 = 314,1 : 13 = 24,162 (προσέγ. 0,001).

δ') *Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως* 0,31615 : 0,7 *νὰ εὑρεθῇ μὲ προσέγγισιν* 0,01.

Ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν 3,1615 : 7 τὴν ἔχουσαν διαιρέτην ἀκέραιον. Τὴν διαίρεσιν ταύτην ἐκτελοῦμεν κατὰ τὰ γνωστὰ μέχρι τῶν ἑκατοστῶν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε 0,45 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Κανὼν εὑρέσεως τοῦ κατὰ προσέγγισιν πηλίκου.

139. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν μὲ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος δοθείσης τάξεως, ἐξαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου (ἂν εἶνε δεκαδικός), καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τόσας θέσεις, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου· ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, φροντίζομεν μόνον νὰ θέτωμεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ ψηφίον, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς μερικῆς διαιρέσεως τῆς γινομένης, ὅταν καταβιβασθῇ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου· ἐξακολουθοῦμεν δὲ τὴν πρᾶξιν, ἕως ὅτου γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ζητουμένης τάξεως.*

Διὰ νὰ ἔχωμεν εἰς τὸ πηλίκον ἱκανὸν πλῆθος ψηφίων, προσγράφομεν ἐν ἀνάγκῃ μηδενικὰ μετὰ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

140. Πᾶν κοινὸν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· κατ' ἀκολουθίαν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν μὲ δοθεῖσαν προσέγγισιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα· Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{11}{7}$ διὰ νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἀρκεῖ

11,000	7
40	1,571
50	
10	
3	

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 11:7 μὲ προσέγγισιν 0,001.

Τὸ πηλίκον τοῦτο κατ' ἔλλειψιν εἶνε 1,571 καὶ διαφέρει τοῦ τελείου πηλίκου $\frac{11}{7}$ κατὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι κατὰ $\frac{3}{7000}$.

Δυνάμεθα ἄρα νὰ γράφωμεν:

$$\frac{11}{7} = 1,571 \text{ (προσέγ. } 0,001).$$

Ὁμοίως εἶνε:

$$\frac{15}{4} = 33,75. \qquad \frac{3}{11} = 0,2727 \text{ (προσέγ. } 0,0001).$$

$$\frac{3}{25} = 0,12. \qquad \frac{270}{8} = 33,75.$$

Μέσος ὅρος ἀριθμῶν ἀφηρημένων ἢ συγκεκριμένων ὁμοειδῶν.

141. Μεταξὺ τῶν πολλῶν χρήσεων τῆς διαιρέσεως μία εἶνε καὶ ἐκείνη, καθ' ἣν εὑρίσκεται ***ὁ μέσος ὅρος*** ἢ ***τὸ ἀριθμητικὸν μέσον*** πολλῶν ἀριθμῶν.

Διὰ τοῦ ὀνόματος τούτου ἐννοοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Παράδειγμα.

Ἐκέρδησέ τις τὴν 1ην ἡμέραν δραχ. 8,60, τὴν 2αν 7,45 καὶ τὴν 3ην 4,35: ποῖος εἶνε ὁ μέσος ὅρος τοῦ κέρδους τῶν τριῶν τούτων ἡμερῶν;

Τὸ ὁλικὸν κέρδος τῶν 3 ἡμερῶν εἶνε 8,60 + 7,45 + 4,35 = 20,40 δραχ.· ὥστε τὸ κατὰ μέσον ὅρον κέρδος τῆς μιᾶς ἡμέρας εἶνε 20,40 : 3 = 6,80 δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ λυθῶσι τὰ ἑξῆς προβλήματα·

α') Οἰκογένειά τις ἐδαπάνησε τὸν Μάϊον δραχ. 339,60, τὸν Ἰούνιον 250 καὶ τὸν Ἰούλιον 280,40· τίς ἡ μέση μηνιαία δαπάνη;

β') Ἐργάτης εἰργάσθη τὴν Δευτέραν καὶ ἔλαβε 4 δραχμάς, τὰς δὲ ἄλλας ἡμέρας μέχρι τοῦ Σαββάτου ἐλάμβανεν ἀπὸ 4,80 δραχ.· πόσον ἐλάμβανεν κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;

γ') Ἐργάτης εἰργάσθη 7 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον 4 δραχμῶν, 11 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον 4,50 δραχ. καὶ 10 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον 3,80 δραχ.· Πόσον εἶνε κατὰ μέσον ὅρον τὸ ἡμερομίσθιον αὐτοῦ;

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

268) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

6,825—4,75· 1—0,001· 8,471—1,98· 20,1—19,003· 1,002—0,931· 56,2—1,0015· 0,0025—0,01· 864—0,29.

269) Νὰ πολλαπλασιασθῶσιν·

α') 0,5 ἐπὶ 2,3,5,9,10. β') 0,15 ἐπὶ 3,4,5,6,8,9,11. γ) 0,125 ἐπὶ 2,3,4,8,5,25. δ') 0,5 ἐπὶ 8,14,18,21,25.

270) Νὰ πολλαπλασιασθῶσι·

α') 19,75 ἐπὶ 7,2· β') 692 ἐπὶ 0,305 καὶ γ') 0,0076 ἐπὶ 0,017·

271) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἑκάστη τῶν παραστάσεων·

α') $0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1$.

β') $0,01 \times 0,001 \times 0,1 \times 1,1 \times 10,1$.

γ') $0,1 \times 10,2 \times 0,3 \times 0,5 \times 0,2$.

δ') $0,5 \times 0,5 \times 1,5 \times 5,5 \times 0,5$.

272) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

α') 50 : 4,8,16,32,64· β') 0,1001 : 5,25,125,625· γ') 384,006 : 0,123· δ') 7,808 : 0,128· ε') 1,6 : 0,00004.

273) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς τὰ ἑξῆς κοινὰ κλάσματα·

$\frac{3}{4}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{2}{32}$, $\frac{18}{19}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{111}{125}$, $9\frac{3}{16}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

274) Εὑρεῖν τὰ 0,5 1 δραχμῆς, 8 δραχ., 10 δραχ. καὶ 12 δραχμῶν.

275) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ 0,75 τῆς 1, τῶν 3, τῶν 10 καὶ τῶν 16 δραχμῶν.

276) Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀριθμητικαὶ παραστάσεις:

$$\frac{0,000133}{8,75},\quad \frac{0,064+12,25}{0,9375},\quad \left(\frac{12,5}{0,005}\right)^2,$$

$$\frac{22,4}{0,25}+\frac{250}{0,8}+\frac{1,2}{0,0075}+\frac{1}{1,6}+\frac{0,14}{4\frac{1}{3}},$$

$$0,05\times 4,11\times\frac{3\frac{2}{3}}{4},\quad 15-\frac{3,4}{0,1},\quad \frac{4}{5,2}+\frac{0,3}{0,01}.$$

277) Νὰ δειχθῇ ὅτι $0,25\times\frac{41}{75}\times\frac{3}{82}=0,005$.

278) Δοθέντος ὅτι $58\times 34=1972$, νὰ γραφῶσιν ἀμέσως τὰ ἑξῆς γινόμενα:

$$0,58\times 0,0034 \quad \text{καὶ} \quad 5800\times 0,000034.$$

279) Νὰ ἐξηγηθῶσιν αἱ ἑξῆς ἰσότητες:

$$999\times 4,2467 = 4246,7 - 4,2467.$$
$$0,2783\times 998 = 278,3 - 0,2783\times 2.$$
$$15,727\times 10,02 = 157,27 + 15,727\times 0,02.$$
$$99,99\times 4,267 = 426,7 - 4,266\times 0,01.$$

280) Ποίας συντομίας διαιρέσεως συνάγομεν ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων:

$$245,7 : 25 = 245,7 : \frac{100}{4} = 245,7\times\frac{4}{100} = 2,457\times 4.$$

$$6,738 : 125 = 6,738 : \frac{1000}{8} = 0,006738\times 8.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

281) Πόσον ἀξίζουν 10, 100 καὶ 1000 ὀκάδες πράγματός τινος, οὗ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει δραχμὰς 3,45 ;

282) Πόσον αξίζει ἡ ὀκᾶ πράγματος, οὗ 100 ὀκάδες ἠγοράσθησαν ἀντὶ 75 δραχμῶν ;

283) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 164 δέκατα τῆς δραχμῆς, πόσας τὰ 54 δεκάλεπτα καὶ πόσας τὰ 542 λεπτά ;

284) Πόσα ἀκέραια μέτρα ὑπάρχουν· α') εἰς 3453 δέκατα τοῦ μέτρου· β') εἰς 3453 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου καὶ γ') εἰς 3453 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου ;

285) Πόσον αξίζουν $38\frac{1}{4}$ ὀκάδες σίτου, οὗ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 0,46 δραχμάς ;

286) Πόσας δραχμὰς κάμνουν τὰ 833 πέμπτα τοῦ λεπτοῦ ;

287) Οἰκία τις ἔχει 20 παράθυρα καὶ ἕκαστον παράθυρον ἔχει 8 ὑαλοπίνακας, ὧν ἕκαστος ἀξίζει 0,75 δρχ.· πόσον ἀξίζουν ὅλοι οἱ ὑαλοπίνακες ;

288) Τὰ 100 ὠὰ ἀξίζουν δρχ. 6,50· πόσον ἀξίζουν τὰ 250 ;

289) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει δρχ. 6,40· πόσον ἀξίζουν οἱ $7\frac{3}{8}$ πήχεις ;

290) Πόσας ὀκάδας σίτου ἀγοράζει τις μὲ 60 δραχμάς, ὅταν ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου ἀξίζῃ 0,48 δρχ. ;

291) Ἐπληρώσαμεν 5,40 δρχ. καὶ ἠγοράσαμεν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς κηροῦ· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;

292) Ἀντήλλαξέ τις 20 τουρκικὰς λίρας (πρὸς 25,20 δρχ. ἑκάστην) καὶ ἔλαβεν εἰκοσάφραγκα (πρὸς 21 δρχ. ἕκαστον)· πόσα εἰκοσάφραγκα ἔλαβεν ;

293) Ἠγόρασέ τις 275 πήχ. ὑφάσματος πρὸς 14,50 δρχ. τὸν πῆχυν· μετεπώλησε δὲ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑφάσματος πρὸς 16,56 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 13,75· πόσας δρχ. ἐκέρδησεν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

294) Ἠγόρασέ τις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 60,80 μέτρα πρὸς 20,40 δραχ. τὸ μέτρον· μεταπωλήσας δὲ τοῦτο εἰσέπραξεν δραχμὰς 1800· πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ;

295) Ἐργάτης εἶχε τὸ κακὸν ἐλάττωμα νὰ δαπανᾷ καθ' ἑκάστην 0,45 δραχ. διὰ καπνὸν καὶ 0,15 δι' ἓν μικρὸν ποτήριον ρακῆς· ἐὰν δὲν εἶχε τὸ ἐλάττωμα τοῦτο, πόσας ὀκάδας ἀλεύρου ἠδύνατο νὰ ἀγοράσῃ εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους (365 ἡμέρας) οἰκονομῶν τὰ χρήματα ταῦτα, ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἀλεύρου ἀξίζῃ 0,45 δραχ. ;

296) Οἶνος ἀγορασθεὶς ἀντὶ 105 δραχ. μετεπωλήθη ἀντὶ 150,60 δραχ. καὶ προέκυψε κέρδος 0,20 δραχ. εἰς ἑκάστην ὀκᾶν· πόσαι ἦσαν αἱ ὀκάδες τοῦ οἴνου τούτου ;

297) Ἠγόρασέ τις τεμάχιον λινοῦ πανίου ἐκ μέτρων 42,20 πρὸς 1,25 δραχ. τὸ μέτρον, διὰ νὰ κατασκευάσῃ ὑποκάμισα. Δι' ἕκαστον ὑποκάμισον ἀπαιτοῦνται 3,65 μέτρα πανίου, 15 λεπτὰ διὰ κλωστὴν καὶ κομβία, καὶ 1,25 δραχ. διὰ ῥαπτικά. Πόσον ἀξίζει τὸ ὑποκάμισον καὶ πόσον ἐκέρδισεν καθ' ἡμέραν ἡ ῥάπτρια κατασκευάζουσα 8 ὑποκάμισα εἰς 7 ἡμέρας ;

Ἀπόκρ. Τιμὴ τοῦ ὑποκαμίσου ..... 5 δραχ. 08 περίπου.
Ἡμερήσιον κέρδος ῥαπτρίας.... 1 δραχ. 55 »

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

142. Εἶνε φανερὸν ὅτι εἰς ἀλλαγὴν τῆς μονάδος μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἐπέρχεται ἀλλαγὴ καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τὸ μετρούμενον ποσόν· ἂν λ. χ. ἡ μονὰς τῆς μετρήσεως γίνῃ δίς, τρίς, κ.τ.λ. μικροτέρα τῆς ἀρχικῆς, τότε ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστάνων τὸ ποσὸν γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλύτερος· ἂν τἀνάπαλιν ἡ μονὰς γίνῃ δίς, τρίς, κ.τ.λ. μεγαλυτέρα τῆς ἀρχικῆς, τότε ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστάνων τὸ ποσὸν γίνεται δίς, τρίς, κ.τ.λ. μικρότερος· π. χ. ἡ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Μαραθῶνα ἀπόστασις, ὅταν μετρηθῇ μὲ τὴν μονάδα, ἥτις λέγεται *μέτρον*, ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 40000· ὅταν μετρηθῇ μὲ τὸ *στάδιον*, τὸ ὁποῖον εἶνε χιλιαπλάσιον τοῦ μέτρου, θὰ ἐκφράζηται ὑπὸ τοῦ χιλιάκις μικροτέρου ἀριθμοῦ 40· δυνάμεθα ἄρα ἀδιαφόρως νὰ λέγωμεν, ὅτι εἶνε ἡ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Μαραθῶνα ἀπόστασις εἴτε 40000 μέτρα, εἴτε 40 στάδια.

143. Μολονότι διὰ τὴν μέτρησιν ἑκάστου εἴδους ποσῶν ἀρκεῖ μία μόνη μονὰς μετρήσεως, ἐν τούτοις διὰ νὰ μὴ προκύπτῃ εἰς μέτρησιν ποσοῦ τινος οὔτε ἀριθμὸς ἱκανῶς μέγας, ὅταν τὸ ποσὸν εἶνε κατὰ πολὺ μεγαλύτερον τῆς μονάδος, οὔτε, εἰ δυνατόν, κλασματικὸς ἀριθμός, ὅταν τὸ ποσὸν εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, δὲν ἀρκούμεθα εἰς μίαν μόνην μονάδα μετρήσεως τοῦ ποσοῦ, ἀλλὰ λαμβάνομεν περισσοτέρας μονάδας τῆς μιᾶς, αἵτινες νὰ ἔχωσιν ὡρισμένας σχέσεις πρὸς ἀλλήλας, τοιαύτας δηλονότι, ὥστε ἑκάστη αὐτῶν νὰ εἶνε ὡρισμένον πολλαπλάσιον ἢ ὡρισμένον μέρος ἑκάστης τῶν ἄλλων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοιαῦται μονάδες μετρήσεως λαμβάνουσιν ἰδιαίτερα ὀνόματα· καὶ μία μὲν τούτων θεωρεῖται ὡς *ἀρχική*, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς *δευτερεύουσαι*. Οἱ συγκεκριμένοι τότε ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε ἐξαγόμενα μετρήσεως ποσοῦ διὰ τοιούτων μονάδων, λέγονται *συμμιγεῖς* ἀριθμοί. Ἐντεῦθεν ὁ ἑξῆς ὁρισμός :

144. *Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐξ ἄλλων, ὧν αἱ μονάδες εἶνε πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς ἔχοντα ἴδιον ὄνομα.*

Ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς ὁ γινόμενος ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ συμμιγοῦς καλεῖται *ἁπλοῦς*. τοιοῦτος π. χ. εἶνε ὁ ἀριθμὸς 5 πήχ. ἢ 5 πήχ. $+\frac{3}{8}$, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς 5 πήχ. 3 ῥούπ. εἶνε συμμιγής.

ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

145. Καλεῖται, ἐν γένει, *σύστημα μετρικὸν* τὸ σύνολον τῶν διαφόρων μονάδων μετρήσεως, πρὸς τὰς ὁποίας συγκρίνομεν τὰ ποσά, ὅταν θέλωμεν νὰ τὰ ἐκφράσωμεν δι' ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μονὰς πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς τὸ μετρούμενον ποσόν, διακρίνομεν ταύτας εἰς μονάδας *μήκους*, *ἐπιφανείας*, *ὄγκου ἢ χωρητικότητος*, *βάρους*, *νομισμάτων* καὶ *χρόνου*.

Μονάδες μήκους.

146. 1) Ἡ κυριωτέρα μονὰς μήκους εἶνε τὸ *γαλλικὸν μέτρον* (βασιλικὸς πῆχυς)· ἡ μονὰς αὕτη εἶνε τοιαύτη, ὥστε ἡ περιφέρεια μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40000000 μέτρων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τῆς μονάδος ταύτης θεωρουμένης ὡς ἀρχικῆς ἔχομεν τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις καὶ σύμβολα.

μ.=Μέτρον (ἀρχικὴ μονὰς)=1 μ.
παλ.=Παλάμη (δεκατόμετρον)=0,1 μ.
δακ.=Δάκτυλος (ἑκατοστόμετρον)=0,01 μ.
γραμ.=Γραμμὴ (χιλιοστόμετρον)=0,001 μ.

Δεκάμετρον=Δ. μ.=	10 μ.
Ἑκατόμμετρον=Ε. μ.=	100 μ.
Χιλιόμετρον (στάδιον)=Χ. μ.=	1000 μ.
Μυριάμετρον (σχοινὶς)=Μ. μ.=	10000 μ.

Τὸ ἁπλοῦν τῶν σχέσεων, ἃς πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ μονάδες αὗται, εὐκολύνει τὴν ἔκφρασιν δοθέντος μήκους διά τινος τῶν μονάδων τούτων, ὅταν ἐκφράζηται διὰ μιᾶς τῶν ἄλλων. Π. χ. ἵνα ἀριθμός τις δεκαμέτρων τραπῇ εἰς ἑκατοστόμετρα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1000, διότι προδήλως 1 δεκάμετρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1000 ἑκατοστόμετρα. Οὕτω 35 Δ. μ=35000 παλάμας.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν δοθέντα ἀριθμὸν παλαμῶν (δεκατομέτρων), νὰ τρέψωμεν εἰς δεκάμετρα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ 100· διότι μία παλάμη εἶνε τὸ ἑκατοστὸν τοῦ δεκαμέτρου.

Ἐν γένει διὰ τοιαύτας τροπὰς πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν συμβόλων, δι' ὧν παριστῶμεν τὰς ἀνωτέρω μονάδας :

Μ. μ., Χ. μ., Ε. μ., Δ. μ., μ., παλ., δακ., γραμ.· καὶ τότε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐκ μιᾶς τῶν μονάδων τούτων τρέπομεν εἰς ἀριθμὸν ἄλλης μονάδος, μεταφέροντες τὴν ὑποδιαστολήν του τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ὅσαι εἶνε αἱ θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερά, καθ' ἃς μεταβαίνομεν ἀπὸ τῆς παλαιᾶς μονάδος εἰς τὴν νέαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημ. Τὰ διὰ τῶν ἀνωτέρω μονάδων μετρούμενα μήκη ἐκφράζονται εἴτε ὑπὸ συμμιγῶν ἀριθμῶν, εἴτε ἁπλούστερον ὑπὸ δεκαδικῶν· π. χ. μῆκος 5 Ε. μ., 3 μ., 7 δακ., 2 γραμ., δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὑπὸ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 503 μ., 072· τἀνάπαλιν,

1705 μ., 094 = 1705 μ., 9 δακ., 4 γραμ.
= 1 Χ. μ., 7 Ε. μ., 5 μ., 9 δακ., 4 γραμ.

2) Ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς**, ὅστις χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν μηκῶν εἰς οἰκόπεδα καὶ οἰκοδομάς. Εἶνε δὲ 1 τεκ. πήχ. $= \frac{3}{4}$ μ. = 0,75 μ.· τἀνάπαλιν δὲ 1 μ. $= \frac{4}{3}$ τεκ. πήχ.

3) Ὁ μικρὸς πῆχυς Κων]πόλεως (ἐνδεζὲ) ἢ πῆχυς τοῦ ἐμπορίου, ὅστις διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται ῥούπια.

Εἶνε δὲ 1 πῆχ. (ἐνδεζὲ) = 0,648 μ. καὶ 1 μέτ. $= \frac{1000}{648}$ πήχ.

Ἐκτὸς τούτου εἶνε καὶ ὁ μεγαλύτερος πῆχυς Κων]πόλεως (ἀρσχίν), ὅστις ἔχει μῆκος 0,669 μ. καὶ ἀποτελεῖται ἐπίσης ἀπὸ 8 ῥούπια.

4) Γαλλικὸν ναυτικὸν μίλιον = 1852 μέτρα περίπου.
5) Ἀγγλικὸν ναυτικὸν μίλιον = 1609,33 μ.
6) Γεωγραφικὸν ἢ γερμανικὸν μίλιον = 7442 μ.
7) Λεῦγα = 4000 μ.
8) Ὑάρδα (ἀγγλικὴ) = 0,914 μ. καὶ ἔχει ὑποδιαιρέσεις:

1 ὑάρδα = 3 πόδες
1 ποὺς = 12 δάκτυλοι.

9) Ἡ ὀργυιὰ (παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς μήκους) = 1,949 μ. ὑποδιαιρουμένη ὡς ἑξῆς:

1 ὀργ. = 6 πόδες
1 ποὺς = 12 δάκτυλοι
1 δάκτυλος = 12 γραμμαί.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μονάδες ἐπιφανείας.

147. 1) *Τετραγωνικὸν μέτρον·* τετράγωνον[1] δηλονότι ἔχον πλευρὰν μήκους ἑνὸς μέτρου, μὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις:

Τετραγωνικὴ παλάμη $= \frac{1}{100}$ τετ. μέτ. Εἶνε δηλονότι τὸ τετράγωνον, οὗ πλευρὰ μία παλάμη $\left(\frac{1}{10}\right.$ τοῦ μέτρου$\left.\right)$.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος $= \frac{1}{10000}$ τετ. μέτ. Εἶνε δηλονότι τετράγωνον, οὗ πλευρὰ εἷς δάκτυλος $\left(\frac{1}{100}\right.$ τοῦ μέτρου$\left.\right)$.

Αἱ σχέσεις αὗται τῶν δευτερευουσῶν μονάδων πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα εὐκόλως ἐξηγοῦνται, ἂν δειχθῇ ὅτι: ὅταν εὐθεῖά τις εἶνε δεκαπλασία, ἢ ἑκατονταπλασία μιᾶς ἄλλης, τότε τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶνε 10×10 ἢ 100×100 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ἄλλην.

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶνε:

Τετραγωνικὸν δεκάμετρον (ἄρ) $= 10 \times 10$ ἤτοι 100 τετ. μέτρα.
Τετραγωνικὸν ἑκατόμμετρον (ἑκτάριον) $= 100$ ἄρ $= 10000$ τετ. μέτ.
Τετραγωνικὸν χιλιόμετρ. $= 100$ ἑκτάρια $= 10000$ ἄρ $= 1000000$ τετραγωνικὰ μέτρα.
Τετραγωνικὸν μυριάμετρον $= 10000 \times 10000$ ἤτοι 100000000 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἐπειδὴ αἱ ἀνωτέρω μονάδες εἶνε τετράγωνα, ὧν πλευραὶ εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς μονάδες μήκους,

Μυριάμμετρον, χιλιόμετρον, ἑκατόμμετρον, δεκάμετρον, μέτρον, παλάμη καὶ δάκτυλος, ὧν ἑκάστη εἶνε δεκαπλασία τῆς ἑπομένης,

---

[1] Τετράγωνον εἶνε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν σχηματιζουσῶν ὀρθὰς γωνίας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ τοῦτο τὰ σχηματιζόμενα μὲ τοιαύτας πλευρὰς τετράγωνα ἔχουν πρὸς ἄλληλα τὰς ἑξῆς σχέσεις· πᾶν τετράγωνον εἶνε ἑκατοντάκις μεγαλύτερον τοῦ ἑπομένου καὶ ἑκατοντάκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου· ἕνεκα τούτου οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκφράζοντες ἐπιφανείας μετρηθείσας μὲ τὰς ἀνωτέρω μονάδας γράφονται εἴτε ὡς συμμιγεῖς εἴτε ὡς δεκαδικοί.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 12 τετ. μέτ. 3 τετ. παλ. 15 τετ. δάκ. γράφεται καὶ 12,0315 τετ. μετ. Τἀνάπαλιν, ὁ ἀριθμὸς 207,003 τετ. μέτ. γράφεται 2 τετ. δεκάμ. 7 τετ. μέτ. 30 τετ. δάκ.

2) ***Τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*** λέγεται τὸ τετράγωνον, οὗ πλευρὰ εἷς τεκτονικὸς πῆχυς $\left(\frac{3}{4}\right.$ τοῦ μέτρου$\left.\right)$.

Ὁ τεκτ. τετρ. πῆχυς εἶνε τὰ $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$, ἤτοι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τἀνάπαλιν δὲ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶνε $\frac{16}{9}$ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.

3) ***Βασιλικὸν στρέμμα*** εἶνε ἐπιφάνεια ἀποτελουμένη ἐκ 1000 τετραγωνικῶν μέτρων. (Ἐὰν τὸ στρέμμα νοηθῇ ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος περίπου 31,622 μ.)

4) ***Παλαιὸν στρέμμα***=1,27 βασ. στρέμ.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

148. Μονὰς τῶν ὄγκων λαμβάνεται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἶνε δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων, τὰ ὁποῖα λέγονται ἕδραι αὐτοῦ.

Αἱ ἐν χρήσει μονάδες ὄγκου εἶνε αἱ ἑξῆς:

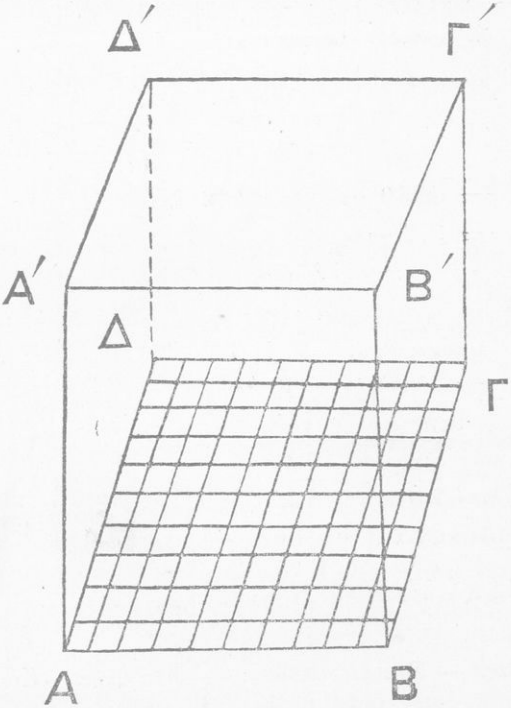
1) ***Κυβικὸν μέτρον*** εἶνε ὁ κύβος, οὗ ὅλαι αἱ ἀκμαὶ (κόψεις) ἔχουν μῆκος ἑνὸς μέτρου· ὑποδιαιρέσεις δὲ αὐτοῦ εἶνε·

Κυβικὴ παλάμη=0,001 κ. μ.

Κυβικὸς δάκτυλος=0,001 κ. π.=0,000001 κ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2) *Λίτρα* εἶνε ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον χωρεῖ 1000 λίτρας. Ἡ χωρητικότης 100 λιτρῶν, τὴν ὁποίαν οἱ Γάλλοι ὀνομάζουν *ἑκατόλλιτρον* (hectolitre), λέ-



γεται παρ' ἡμῖν *κοιλόν*· ἤτοι κοιλὸν=0,1 κ. μ.=100 κ. π.

Ἡ λίτρα χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν καὶ τὸ κοιλὸν πρὸς μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν.

Μονάδες βάρους.

149. 1) Γαλλικαὶ μονάδες.—*Γραμμάριον* (gramme) ἀρχικὴ μονὰς βάρους· ἴση πρὸς τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4,1 βαθμῶν τοῦ ἑκατονταδικοῦ θερομομέτρου.

Χιλιόγραμμον=1000 γραμμάρια εἶνε τὸ βάρος ὕδατος ὡς ἀνωτέρω χωροῦντος εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην.

Τόνος = 1000 χιλιόγραμμα καὶ εἶνε τὸ βάρος ὕδατος χωροῦντος εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

2) Παρ' ἡμῖν ἀρχικὴ μονὰς εἶνε ἡ ὀκᾶ, καὶ δευτερεύουσαι ὁ στατὴρ = 44 ὀκ. καὶ τὸ δράμιον = $\frac{1}{400}$ ὀκᾶς. Εἶνε δέ·

1 ὀκᾶ = 1280 γραμ. = 400 δράμ.

1 δράμ. = 3,2 γραμ.

1 χιλιόγραμμον = 312,5 δράμ.

Εἰς τὸ ἐμπόριον τὸ χιλιόγραμμον λογίζεται ἴσον πρὸς 312 δράμια καὶ ὁ τόνος ἴσος πρὸς 780 ὀκάδας· ἐνῷ ἀκριβῶς 1 τόνος ἀντιστοιχεῖ πρὸς 781 ὀκ. 100 δράμια.

3) Γερμανικὴ μονάς: *Φούντιον* = 500 γραμ.

4) *Ἑνετικὴ λίτρα* = 149 δράμ. = 477 περίπου γραμμάρια.

5) *Ἀγγλικὴ λίτρα* = 142,5 δράμ. = 436 γραμ.

6) Φαρμακευτικαὶ μονάδες.—*Λίτρα φαρμακευτικὴ* =360 γραμ. = 112,5 δράμ. — *Οὐγγία* = $\frac{1}{12}$ λίτρας.— *Δραχμὴ*= $\frac{1}{8}$ οὐγγίας. — *Σκρούπουλον*= $\frac{1}{3}$ δραχμῆς.—*Κόκκος*=$\frac{1}{20}$ σκρουπούλου.

7) Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους μονὰς βάρους εἶνε τὸ *καράτιον*, ὅπερ εἶνε περίπου τὸ πέμπτον τοῦ γραμμαρίου· ὥστε 16 καράτια κάμνουν περίπου 1 δράμιον.

Μονάδες νομισμάτων.

150. 1) Λατινικῆς συμβάσεως. — Κατὰ σύμβασιν νομισματικὴν συναφθεῖσαν ἐν ἔτει 1868 μεταξὺ Γαλλίας, Ἑλλάδος,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἰταλίας, Ἑλβετίας καὶ Βελγίου τὰ κράτη ταῦτα ἔχουσι τὰς ἀκολούθους νομισματικὰς μονάδας, ὧν ἀρχικὴ εἶνε τὸ φράγκον·

Ἀργυρᾶ νομίσματα.

Νόμισμα	5	φράγκων	βάρους	25	γραμμαρίων
»	2	»	»	10	»
»	1	φράγκου	»	5	»
»	$\frac{1}{2}$	»	»	2,5	»
»	$\frac{1}{5}$	»	»	1	»

Τούτων ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,835· ἤτοι ἐκ χιλίων μερῶν τὰ 835 εἶνε καθαρὸς ἄργυρος καὶ τὰ λοιπὰ 165 ἄλλα μέταλλα εὐτελέστερα· ἐξαιρετικῶς τοῦ πενταφράγκου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,900.

Χρυσᾶ νομίσματα.

Νόμισμα	100	φράγκων	βάρους	32,25806	γραμμ.
»	50	»	»	16,12903	»
»	20	»	»	6,45161	»
»	10	»	»	3,22580	»
»	5	»	»	1,61290	»

Τούτων ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,900.

Παρ' ἡμῖν τὸ φράγκον ἐκλήθη δραχμὴ (ἀργυρᾶ), τὸ δὲ ἑκατοστὸν τοῦ φράγκου ἐκλήθη λεπτόν. Χαλκᾶ κέρματα ἔχομεν τὸ μονόλεπτον, δίλεπτον, πεντάλεπτον, (ὀβολός, κοινῶς πεντάρα) καὶ τὸ δεκάλεπτον (διώβολον, κοινῶς δεκάρα). Τοῦ μονολέπτου τὸ βάρος εἶνε ἓν γραμμάριον, τῶν δὲ λοιπῶν κερμάτων τὸ βάρος εἶνε ἀνάλογον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λεπτῶν. Ἔχομεν ἐπίσης νικέλινα κέρματα 20, 10 καὶ 5 λεπτῶν.

2) Ἀγγλικαὶ μονάδες. — Ἀρχικὴ μονὰς ἡ *λίρα στερλίνα*, νό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μισμα χρυσοῦν ἀξίας 25 $\frac{1}{4}$ φράγκ., μὲ ὑποδιαιρέσεις τὰς ἑξῆς :

1 λιρ.=20 σελλίνια
1 σελλίνιον=12 πέννας
1 πέννα = 4 φαρδήνια

Τὸ σελλίνιον εἶνε ἀργυροῦν, ἡ δὲ πέννα καὶ τὸ φαρδήνιον χαλκᾶ.

3) Γερμανικαὶ μονάδες.—Ἀρχικὴ μονὰς *τὸ μάρκον*=1,25 φράγκα. Τὸ μάρκον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 *πφέννιγκ.*

4) Αὐστριακαὶ μονάδες.—Ἀρχικὴ μονὰς τὸ *φιορίνιον*= 2,50 φράγκα. Τὸ φιορίνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 *κρόϊτσερ.*

5) Τουρκικαὶ μονάδες.—Ἀρχικὴ μονὰς τὸ *γρόσιον*=23 λεπτὰ περίπου. Τὸ γρόσιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 40 *παράδες.*

Χρυσᾶ νομίσματα ὑπάρχουν 500 γροσίων (πεντάλιρον), 250 γροσίων, 100 γροσίων (λίρα), 50 γροσίων (ἡμίσεια λίρα) καὶ 25 γροσίων. Ἀργυρᾶ δὲ νομίσματα ἐκ γροσίων 20 (μετζίτιον), 10, 5, 2, 1 καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ γροσίου.

6) Ῥωσσικαὶ μονάδες.—Ἀρχικὴ μονὰς τὸ *ρούβλιον* ἀξίας 4 φράγκων διαιρούμενον εἰς 100 *καπίκια.*

7) Ἀμερικανικαὶ μονάδες.—Ἀρχικὴ μονὰς τὸ *δολλάριον* ἀξίας 5,18 φράγκων.

Μονάδες χρόνου.

151. Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶνε ἡ *ἡμέρα*, ἤτοι τὸ νυχθήμερον, παριστῶσα τὸν παρερχόμενον χρόνον ἀπὸ μεσημβρίας τινὸς μέχρι τῆς ἀμέσως ἑπομένης μεσημβρίας.

Διαιρεῖται ἡ ἡμέρα εἰς 24 ὥρας χωριζομένας εἰς δύο ἴσας περιόδους, ὧν ἑκάστη ἔχει ἀνὰ 12 ὥρας· ἡ μία ἀπὸ μεσημβρίας μέχρι μεσονυκτίου καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ μεσονυκτίου μέχρι μεσημβρίας.

Ἡ ὥρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά : 1 ὥρα=60′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 δεύτερα λεπτά : 1′=60″.

Διὰ τοὺς μεγάλους χρόνους μονὰς λαμβάνεται τὸ **πολιτικὸν ἔτος.**

Τὸ κοινὸν πολιτικὸν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας, τὸ δὲ δίσεκτον ἢ ἐμβόλιμον 366. Δίσεκτα δὲ εἶνε τὰ ἔτη, ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4· π. χ. τὰ ἔτη 1908, 1912, 1916 κ.τ.λ. Ὥστε ἐκ τεσσάρων συνεχῶν ἐτῶν ἓν μόνον εἶνε δίσεκτον· διότι ἐκ τεσσάρων ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν εἷς μόνον εἶνε διαιρετὸς διὰ 4.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, ὧν τὰ ὀνόματα καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶνε :

Ἰανουάριος	ἡμέραι	31	Ἰούλιος	ἡμέραι	31
Φεβρουάριος	»	28 εἰς τὸ κοινὸν ἔτος	Αὔγουστος	»	31
		29 εἰς τὸ δίσεκτον.			
Μάρτιος	»	31	Σεπτέμβριος	»	30
Ἀπρίλιος	»	30	Ὀκτώβριος	»	31
Μάϊος	»	31	Νοέμβριος	»	30
Ἰούνιος	»	30	Δεκέμβριος	»	31.

Χρόνος ἀποτελούμενος ἐξ 100 ἐτῶν καλεῖται **ἑκατονταετηρίς.**

Λογιστικῶς τὸ ἔτος θεωρεῖται ἀποτελούμενον ἀπὸ 360 ἡμέρας καὶ ὁ μὴν ἀπὸ 30 ἡμέρας· ταῦτα δὲ διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν λογισμῶν.

Σημ. α′) Πολλάκις εἶνε χρήσιμον νὰ εὑρίσκωμεν τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος ὡρισμένου ἔτους, μηνὸς καὶ ἡμερομηνίας. Π. χ. ἔστω ὅτι ζητεῖται· ***Τίς ἡ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος τὴν 25 Ἀπριλίου τοῦ ἔτους*** 1908 ;

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀριθμὸς παρελθόντων ἐτῶν	1907
Ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1907 : 4	476
Ἰανουαρίου ἡμέραι 31 — 28	3
Φεβρουαρίου ἡμέραι 29 — 28	1
Μαρτίου ἡμέραι 31 — 28	3
Ἡμερομηνία Ἀπριλίου ἠλαττωμένη κατὰ 1	24
Ἄθροισμα	2414

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὑπόλοιπον διαιρέσεως 2414 : 7 . . . . . 6.

Ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος διὰ 7 ἦτο 1, ἡ ἡμέρα θὰ ἦτο Κυριακή, ἂν 2 Δευτέρα, ἂν 3 Τρίτη, ἂν 4 Τετάρτη, ἂν 5 Πέμπτη κ.ο.κ. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 6, ἡ ζητουμένη ἡμέρα εἶνε Παρασκευή. Ἂν τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα ἦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ 7, ἡ ζητουμένη ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος θὰ ἦτο Σάββατον.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, ἥτις εἶνε ἡ πρώτη τοῦ ἔτους 1908, ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς ἐργασίας·

Ἀριθμὸς παρελθόντων ἐτῶν 1907
Ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1907 : 4 476
Ἡμερομηνία δοθεῖσα ἠλαττωμένη κατὰ 1 0
Ἄθροισμα 2383

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 2383 : 7 εἶνε 3· ὥστε ἡ ζητουμένη ἡμέρα εἶνε Τρίτη.

Σημ. 6′) Ἡ 1η, ἡ 8η, ἡ 15η, ἡ 22α καὶ ἡ 29η ἑκάστου μηνὸς εἶνε ἡ αὐτὴ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος· ἐπειδὴ δὲ αἱ 365 ἡμέραι κοινοῦ ἔτους ἀποτελοῦν 52 ἑβδομάδας καὶ μίαν ἡμέραν ἐπὶ πλέον, διὰ τοῦτο ἡ πρώτη τοῦ ἔτους ἀπὸ ἑκάστου ἔτους εἰς τὸ ἑπόμενον προχωρεῖ κατὰ μίαν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος, ἐνῷ ἀπὸ ἑκάστου δισέκτου ἔτους εἰς τὸ ἑπόμενον προχωρεῖ κατὰ δύο ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν.

152. Πρόβλημα.—*Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μιᾶς τῶν μονάδων του ὁ συμμιγὴς* 23 ὥρ. 50′ 30″.

1ον) Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸν δοθέντα συμμιγῆ εἰς μονάδα τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν δευτέρων λεπτῶν, ἐργαζόμεθα ὡς ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει καὶ εὑρίσκομεν :

$$\begin{array}{r} 23 \text{ ὥρ. } 50' \ 30'' \\ \times 60 \\ \hline 1380' \\ +50' \\ \hline 1430' \\ \times 60 \\ \hline 85800'' \\ +30'' \\ \hline 85830'' \end{array}$$

23 ὥρ. 50′ 30″=85830″.

Ὁ κανών, καθ' ὃν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον, εἶνε ἁπλούστατος.

2ον) Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς διὰ νὰ τραπῇ ἤδη εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τάξεως διαφόρου τῆς κατωτάτης, ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψει αἱ σχέσεις :

$$1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1}{60 \times 60} \text{ ὥρ.} = \frac{1}{60 \times 60 \times 24} \text{ ἡμ.}$$

καὶ νὰ γίνωσιν αἱ ἀκόλουθοι σκέψεις :

α′) Ἀφοῦ 1″ ἰσοῦται πρὸς. ..... $\frac{1'}{60}$,

τὰ 85830″ (ὁ δοθεὶς συμμιγὴς) ἰσοῦται πρὸς $\frac{85830'}{60}$

β′) Ἀφοῦ 1″ ἰσοῦται πρὸς..... $\frac{1}{60 \times 60}$ ὥρ.,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰ 85830″ ἰσοῦνται πρὸς..... $\frac{85830}{60\times60}$ ὥρ.

γ') Ἀφοῦ 1″ ἰσοῦται πρὸς..... $\frac{1}{60\times60\times24}$ ἡμ.,

τὰ 85830″ ἰσοῦνται πρὸς..... $\frac{85830}{60\times60\times24}$ ἡμ.

Ὥστε :

$$24\text{ ὥρ.}50'30''=85830''=\frac{85830'}{60}=\frac{85830}{60\times60}\text{ ὥρ.}=\frac{85830\text{ ἡμ.}}{60\times60\times24}$$

153. *Διὰ νὰ τραπῇ ἄρα συμμιγὴς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τάξεως διαφόρου τῆς εἰς αὐτὸν κατωτάτης, πρῶτον τρέπεται εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως καὶ εἶτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν τίθεται παρονομαστὴς ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πόσαι μονάδες τῆς κατωτάτης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς τάξεως, εἰς τὴν ὁποίαν τρέπεται ὁ συμμιγής.*

Σημείωσις.—Ὅταν συμμιγὴς τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τῆς κατωτάτης εἰς αὐτὸν τάξεως, προκύπτει ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐκτὸς ἐὰν εἰς τὸν συμμιγῆ εἶνε καὶ κλασματικὸν μέρος τῆς κατωτάτης τάξεως, τὸ ὁποῖον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προστιθέμενον δίδει κλασματικὸν ἀριθμόν. Ὅταν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων ἄλλης τάξεως ἀνωτέρας τῆς εἰς αὐτὸν κατωτάτης, τότε προκύπτει πάντοτε κλασματικὸς ἀριθμός, ὅστις εἶνε μικρότερος μὲν τῆς μονάδος, ὅταν σημαίνῃ μονάδας τάξεως ἀνωτέρας τῆς ὑπαρχούσης εἰς τὸν συμμιγῆ ἀνωτάτης, μεγαλύτερος δὲ τῆς μονάδος, ὅταν σημαίνῃ μονάδας ἐκ τῶν εἰς αὐτὸν ὑπαρχόντων ἀριθμῶν τῶν ἐκφραζόντων μονάδας διαφόρους τῆς κατωτάτης τάξεως. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς δύναται τότε νὰ τραπῇ εἰς μικτόν, ὁ ὁποῖος ὅμως ἁπλούστερον εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 23 ὥρ. 50′ 30″ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἕπεται :

$$23\ \text{ὥρ.}\ \Big|\ \begin{array}{l} 50'\ 30'' \\ \underline{\times 60} \\ 3000'' \\ \underline{+30''} \\ 3030'' \end{array} = \frac{3030}{60\times 60}\ \text{ὥρ.} = \frac{101}{60\times 2}\ \text{ὥρ.} = \frac{101}{120}\ \text{ὥρ.}$$

Ὅθεν $23\ \text{ὥρ.}\ 50'\ 30'' = 23\ \text{ὥρ.} + \frac{101}{120}$.

Ὁμοίως ὁ αὐτὸς συμμιγὴς τρέπεται εἰς μικτὸν ἀριθμὸν πρώτων λεπτῶν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l|l} 23\ \text{ὥρ.}\ 50' & 30'' = \frac{30'}{60} = \frac{1'}{2} \\ \underline{\times 60} & \\ 1380' & \\ \underline{+50'} & \\ 1430' & \end{array}$$

Ὅθεν $23\ \text{ὥρ.}\ 50'\ 30'' = 1430' + \frac{1'}{2}$.

Τροπὴ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

154. Πρόβλημα 1ον.—*Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς* 52430″ *εἰς συμμιγῆ.*

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l|l|l} 52430'' & 60'' & \\ \hline 443 & 873' & 60' \\ \hline 230 & 273 & 14\ \text{ὥρ.} \\ 50'' & 33' & \end{array} \qquad 52430'' = 14\ \text{ὥρ.}\ 33'50''.$$

Ἤτοι εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι τὰ 52430″ κάμνουν 873′ καὶ 50″ μετροῦντες ποσάκις τὰ 60″, ἤτοι 1′, χωροῦν εἰς τὰ 52430″.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν ὅτι τὰ σχηματισθέντα 873′ κάμνουν 14

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥρ 33′ μετροῦντες ποσάκις τὰ 60′, ἤτοι 1 ὥρα, χωροῦν εἰς τὰ 873′. Οὕτως εὐκόλως εὑρίσκομεν διὰ διαδοχικῶν διαιρέσεων ὅτι 52430″ = 14 ὥρ. 33′ 50″, ἤτοι εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον συμμιγῆ ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ τελευταίου πηλίκου καὶ πάντων τῶν ὑπολοίπων τῶν προηγουμένων διαιρέσεων.

Πρόβλημα 2ον.—*Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς 75325 δράμια.*

```
753(25 δράμ. | 4(00 δράμ.
  1 25 δράμ.   188 ὀκ. | 44 ὀκ.
                12 ὀκ.   4 στατ.
```

Ὅθεν 75325 δράμια = 4 στ. 12 ὀκ. 125 δράμ.

155. Πρόβλημα.—*Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ τὸ κλάσμα* $\frac{47}{8}$ *τοῦ στατῆρος.*

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου διατάσσομεν τὰς πράξεις ὡς ἑξῆς·

```
  47  στατ. | 8
                5 στατ. 38 ὀκ. 200 δράμ.
   7  στατ.
 ×44
 308  ὀκάδες
  68   »
   4   »
×400
1600  δράμια
   0   »
```

Ἐξάγομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους στατῆρας, οὓς περιέχει τὸ δοθὲν κλάσμα καὶ εὑρίσκομεν· $\frac{47}{8}$ στατ. = 5 στατ. + $\frac{7}{8}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ στατ. τρέπομεν εἰς ὀκάδας καὶ εὑρίσκομεν·

$$44 \text{ ὀκ.} \times \frac{7}{8} = \frac{308}{8} \text{ ὀκ.} = 38 \text{ ὀκ.} + \frac{4}{8}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ δοθὲν ἄρα κλάσμα ἰσοῦται πρὸς 5 στ. 38 ὀκ. $+ \frac{4}{8}$.

Πάλιν τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ ὀκ. τρέπομεν εἰς δράμια καὶ εὑρίσκομεν·

$$400 \text{ δράμ.} \times \frac{4}{8} = \frac{1600}{8} \text{ δράμ.} = 200 \text{ δράμ.}$$

ὥστε εἶνε $\frac{47}{8}$ στατ. = 5 στατ. 38 ὀκ. 200 δράμια.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

156. *Διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ κλασματικὸν ἀριθμὸν παριστάνοντα μονάδας τάξεώς τινος τοῦ συμμιγοῦς οὐχὶ τῆς κατωτάτης, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον παριστάνει μονάδας ὁμοειδεῖς πρὸς τὰς τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως. Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον παριστάνει μονάδας τῆς νέας ταύτης τάξεως, ἐπὶ δὲ τοῦ ὑπολοίπου ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ προηγουμένου, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 ἢ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως.*

157. Ὅταν ὁ δοθεὶς εἶνε μικτός, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα, καὶ ἔπειτα τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπομεν εἰς συμμιγῆ κατὰ τὸν τεθέντα κανόνα, ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ εἰς συμμιγῆ καὶ τοῦτον προσλαμβάνομεν μετὰ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μικτοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

298) Νὰ τραπῶσιν 149 ῥούπια εἰς συμμιγῆ.

299) Νὰ τραπῶσιν 21809 δράμια εἰς συμμιγῆ.

300) Νὰ τραπῶσιν 6 $\frac{3}{8}$ τῆς ἡμέρας εἰς συμμιγῆ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

301) Νὰ τραπῶσι $\frac{3}{7}$ ὑάρδας εἰς συμμιγῆ.

302) Νὰ τραπῶσι $\frac{15}{7}$ στατῆρος εἰς συμμιγῆ.

303) Νὰ τραπῶσι 40 ὑάρδαι εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν μικρῶν πήχεων καὶ ῥουπίων·

40 ὑάρδ. $= 0,9143$ μ. $\times 40 = 36,572$ μ. $=$

$\frac{1000}{648}$ πήχ. $\times 36,572 =$ κ.τ.λ.

304) Νὰ τραπῶσι 3 χιλιόγ. 240 γραμ. εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ὀκάδων καὶ δραμίων.

1 χιλιόγ. $= 312\frac{1}{2}$ δράμ. $= \frac{625}{800}$ ὀκ. $= \frac{25}{32}$ ὀκ.

Ὅθεν 3,240 χιλιόγ. $= \frac{25 \times 3,240}{32} = \frac{81}{32}$ ὀκ. $= 2$ ὀκ. 212 δράμια.

305) Νὰ τραπῇ εἰς χιλιόγραμμα ὁ συμμιγὴς 2 στατ. 14 ὀκ. 300 δράμ.

Ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶνε 41100 δράμια, καὶ ἐπειδὴ

312,5 δράμια ἀποτελοῦν . . . . 1 χιλιόγ.

1 » ἀποτελεῖ . . . . $\frac{1}{312,5}$ χιλιόγ.

41100 » ἀποτελοῦν . . . . $\frac{41100}{312,5}$ χιλιόγ. $= 131,520$ χιλ.

306) Νὰ τραποῦν 410 τετραγ. τεκτονικοὶ πήχεις εἰς τετρ. μέτρα· (410 τετραγ. τεκτ. πήχ. $= 230,625$ τετραγ. μέτρα).

307) Νὰ τραποῦν 216 τ. μ. εἰς τετραγ. τεκτον. πήχεις. (384 τ. τεκτον. πήχ.).

308) *Νὰ γίνῃ κατάταξις τοῦ συμμιγοῦς* 107 ὧρ. 57′ 254″.

Συμμιγὴς λέγεται *κατατεταγμένος*, ὅταν ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχῃ πλῆθος μονάδων μὴ ἀποτελοῦν μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν δὲ τὴν κατάταξιν εἰς συμμιγῆ μὴ κατατεταγμένον, ἀρκεῖ ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς κατωτάτης τάξεως νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὰς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεις τὰς τυχὸν ὑπαρχούσας μονάδας τῶν ἀνωτέρων τούτων τάξεων. Οὕτως εἰς τὸ δοθὲν παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι·

Τὰ 254″ ἀποτελοῦν 4′ 14″. Τὰ 4′ μετὰ τῶν 57′ κάμνουν 61′, ἤτοι 1 ὥρ. καὶ 1′. Ἡ 1 ὥρα μετὰ τῶν 107 ὡρῶν ἀποτελοῦν 108 ὥρας, ἤτοι 4 ἡμέρας καὶ 12 ὥρας· ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς μετὰ τὴν κατάταξιν γίνεται 4 ἡμ. 12 ὥρ. 1′ 14″.

309) Νὰ γίνῃ κατάταξις εἰς τοὺς συμμιγεῖς·

7 στατ. 78 ὀκ. 619 δράμ.
18 πήχ. 49 ῥούπ.
15 ὥρ. 70′ 180″.
16 ὀργ. 10 πόδ. 20 δάκτ. 30 γραμ.

Πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν.

158. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε συμμιγεῖς, (οἱ συμμιγεῖς πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς), γράφομεν αὐτοὺς ὑπ' ἀλλήλους εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ὁμοταγεῖς μονάδες των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως.*

Παραδείγματα.

5 στ.	14 ὀκ.	350 δρμ.		17 ἡμ.	20 ὥρ.		30″
	25 »	150 »		12 ἡμ.	5 ὥρ.	14′	45″
9 στ.	42 »			23 ἡμ.	7 ὥρ.	30′	15″
14 στ.	81 ὀκ.	500 δρμ.		52 ἡμ.	32 ὥρ.	44′	90″
15 στ.	38 ὀκ.	100 δρμ.	Κατάτ.	53 ἡμ.	8 ὥρ.	45′	30″

Ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν.

159. *Νὰ ἀφαιρεθῶσι* 4 ἡμ. 20 ὥρ. 15′ 20″ *ἀπὸ* 7 ἡμ. 14 ὥρ. 30′.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδες νὰ ἀντιστοιχῶσιν :

7 ἡμ.	14 ὥρ.	30′
4 ἡμ.	20 ὥρ.	15′ 20″
2 ἡμ.	18 ὥρ.	14′ 40″

Τὰ 20″ ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ 0″, προσθέτομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν δευτέρων λεπτῶν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι 60″. Ἀπὸ τὰ 60″ ἂν ἀφαιρέσωμεν 20″, μένουν 40″. Ἵνα μὴ ὅμως μεταβληθῇ ἡ διαφορά, ἀφαιροῦμεν ἔπειτα 16′ (ἀντὶ 15′) ἀπὸ 30′ κ.ο.κ.

Ἔστω ἤδη καὶ δεύτερον παράδειγμα, ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ 4 ἡμερῶν τοῦ συμμιγοῦς 18 ὥρ. 40′ 55″.

Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἀντὶ νὰ γράφωμεν τὸν μειωτέον 4 ἡμ., ἀναλύομεν 1 ἡμ. εἰς ὥρας, ἔπειτα 1 ὥρ. εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ 1′ εἰς δεύτερα λεπτά· οὕτως ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς :

3 ἡμ.	23 ὥρ.	59′ 60″
	18 »	40′ 55″
3 ἡμ.	5 ὥρ.	19′ 5″

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

160. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον.—*Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ συμμιγοῦς* 3 ἡμ. 45′ 27″.

Ἐπειδὴ πᾶς συμμιγὴς εἶνε ἄθροισμα τῶν μερῶν του, διὰ τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα :

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν πάντα τὰ μέρη του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον ἐκτελοῦμεν κατάταξιν, ἂν τοιαύτη ἀπαιτῆται.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς εἰς τὸ τεθὲν παράδειγμα :

3 ἡμ.	0 ὧρ.	45′	27″
			8
24 ἡμ.	0 ὧρ.	360′	216″
24 ἡμ.	6 ὧρ.	3′	36″

Πίναξ κατατάξεως

216″	60″	
36″	3′	
	+360′	
	363′	60′
	3′	6 ὧρ.

161. Πρόβλημα.—*Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος 28 δεσμίδων τυπογραφικοῦ χάρτου, ὧν ἑκάστη ἔχει βάρος 2 στ. 27 ὀκ. 230 δρμ.*

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου γίνεται ὡς ἑξῆς :

2 στ.	27 ὀκ.	230 δρμ.
		×28
56 στ.	216 ὀκ.	1840 δρμ.
	54 »	460 »
56 στ.	756 ὀκ.	6440 δρμ.
73 στ.	24 ὀκ.	40 δρμ.

64(40 δρμ.	4(00 δρμ.	
0 40 δρμ.	16 ὀκ.	
	+756 »	
	772 ὀκ.	44 ὀκ.
	332 »	17 στ.
	24 »	+56 »
		73 στ.

162. Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.—Ἐπειδὴ πᾶς συμμιγὴς εἶνε ἄθροισμα τῶν μερῶν του, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν αὐτὸν δι' ἀκεραίου ἐφαρμόζοντες τὸν ἀκόλουθον κανόνα :

Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, ἀρχίζομεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς διὰ τοῦ ἀκεραίου, φροντίζοντες μεθ' ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν νὰ τρέπωμεν τὸ ὑπόλοιπον, (ἂν τοιοῦτο μένῃ) εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ταύτας νὰ προσθέτωμεν μὲ τὰς ὁμοταγεῖς μονάδας τὰς τυχὸν ὑπαρχούσας εἰς τὸν διαιρετέον σχηματίζοντες οὕτω τὸν ἑπόμενον μερικὸν διαιρετέον.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ εὕρεσις τοῦ ἑνὸς εἰκοστοῦ ὀγδόου τοῦ συμμιγοῦς 73 στ. 24 ὀκ. 40 δρμ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

73	στ. 24 ὀκ. 40 δράμ.	28
17	στατ.	2 στ. 27 ὀκ. 230 δράμ.
×44		
68		
68		
748	ὀκάδας	
+24	»	
772	»	
212	»	
16	»	
×400		
6400	δράμια	
+40	»	
6440	»	
84	»	
0		

Σημείωσις.—Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, καλὸν εἶνε νὰ γράφωμεν μόνον τὰ διάφορα μέρη τοῦ πηλίκου καὶ νὰ κρατῶμεν κατὰ νοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων. Π. χ.·

(66 ὧρ. 47′ 24″) : 5 = 13 ὧρ. 21′ 28″ $\frac{4}{5}$.

(23 πήχ. 2 ῥούπ.) : 7 = 3 πήχ. 2 $\frac{4}{7}$ ῥούπ.

(7 ἡμ. 11 ὧρ. 25′ 30″): 2=3 ἡμ. 17 ὧρ. 42′ 45″.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτόν.

163. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω π. χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς (17 πήχ. 6 ρούπ.) $\times \frac{7}{8}$.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶνε ἡ ἑξῆς·

17	πήχ.	6 ρούπ.	
		7	
119	πήχ.	42 ρούπ.	8
39	»		14 πήχ. 12 ρούπ. $+ \frac{2}{8}$
7	»		
×8			15 πήχ. 4 ρούπ. $+ \frac{1}{4}$ (ἐξαγόμ. κατατετ.)
56	ρουπ.		
+42	»		
98	»		
18	»		
2	»		

Σημείωσις.—Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ δεκαδικόν, τρεπομένου πρότερον τοῦ δεκαδικοῦ εἰς κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἁπλοποιῶμεν, ὁσάκις εἶνε δυνατόν, διὰ νὰ συντομεύωνται αἱ πράξεις· π. χ. ἂν πολλαπλασιαστὴς εἶνε ὁ $0,75 = \frac{75}{100}$, συμφέρει νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ ἰσοδύναμον ἁπλούστερον κλάσμα $\frac{3}{4}$.

164. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλασματικὸν καὶ ἐπὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ὡς ἀνωτέρω, ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.*

Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν 22 ὥρ. 25′ ἐπὶ τὸν μικτὸν $4\frac{3}{5}$. Ἡ διάταξις τῆς πράξεως κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον γίνεται ὡς ἑξῆς·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

22 ὧρ. 25′	22 ὧρ. 25′		
×4	×3		
88 ὧρ. 100′	66 ὧρ. 75′	5	
	1 »	13 ὧρ. 27′	ἄθροισμα
	×60	88 ὧρ. 100′	μεριχῶν γιν.
	60′	101 ὧρ. 127′	
	+75′	103 ὧρ. 7′	
	135′		
	35′		
	0		

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.

165. *Ἵνα διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τὸ κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπ' αὐτό.*

Ἵνα διαιρέσωμεν δὲ συμμιγῆ διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ, τρέπομεν πάντοτε τὸν μικτὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν ὡς ἀνωτέρω. Π. χ.·

$$(28 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}) : 8\frac{3}{4} = (28 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}) : \frac{35}{4}$$

$$= (28 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπ.}) \times \frac{4}{35} = 3 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρούπ. } \frac{2}{7}.$$

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε δεκαδικός, θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς κοινὸν κλάσμα.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

166. Ἀριθμόν τινα μονάδων τάξεώς τινος συμμιγοῦς θὰ λέγωμεν ὅτι ἀναλύομεν εἰς ἁπλᾶ μέρη μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὅταν ἀναλύωμεν αὐτὸν εἰς ἄθροισμα ἄλλων ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος εἶνε ἁπλοῦν μέρος τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν εἶνε εἴτε ἁπλοῦν μέρος τῆς ἰδίας μονάδος, εἴτε ἁπλοῦν μέρος ἑνὸς τῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προηγουμένων ἀριθμῶν· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 7 ρούπια ἀναλύεται εἰς 4 ρούπ. + 2 ρούπ. + 1 ρούπ: ἔνθα τὰ 4 ρούπ. εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, τὰ 2 ρούπ. τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 4 ρουπίων, καὶ τὸ 1 ρούπιον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 2 ρουπίων. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκτελεῦμεν καὶ τὰς ἀκολούθους ἀναλύσεις:

5 ρούπ. = 4 ρούπ. + 1 ρούπ.,	3 ρούπ. = 2 ρούπ. + 1 ρούπ.
19 ὦρ. = 12 ὦρ. + 6 ὦρ. + 1 ὦρ.	11 ὦρ. = 6 ὦρ. + 3 ὦρ. + 2 ὦρ.

52′ = 30′ + 15′ + 5′ + 1′ + 1′ ἢ 52′ = 20′ + 20′ + 10′ + 2′.
49″ = 20″ + 20″ + 5″ + 4″ ἢ 49″ = 30″ + 15″ + 3″ + 1″

35 ὀκ. = 22 ὀκ. + 11 ὀκ. + 1 ὀκ. + 1 ὀκ.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τοιαύτας ἀναλύσεις θὰ δείξωμεν ἄλλον τρόπον ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος εἶνε ἁπλούστερος, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος, καὶ καλεῖται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον (35 στ. 39 ὀκ. 325 δρμ.) × 72

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

		35 στ.	39 ὀκ.	325 δρμ.
		×72		
		70 στ.		
		245		
39 ὀκ.	22 ὀκ.	36		
	11 »	18		
	1 »	1	28 ὀκ.	
	5 »	5	140	
325 δρμ.	200 δρμ.	0	36	
	100 »	0	18	
	25 »	0	4	200 δρμ.
		2580 στ.	226 ὀκ.	200 δρμ.
		2585 στ.	6 ὀκ.	200 δρμ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀρχίζομεν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς 35 στ. ἐπὶ 72 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, παραλείπομεν ὅμως τὴν πρόσθεσιν τῶν δύο μερικῶν γινομένων, διότι ταύτην ἐκτελοῦμεν κατόπιν.

Ἔπειτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 39 ὀκ.×72, ἀναλύομεν πρότερον τὰς 39 ὀκ. εἰς 22 ὀκ.+11 ὀκ+1 ὀκ.+5 ὀκ. καὶ εὑρίσκομεν χωριστὰ τὰ γινόμενα :

22 ὀκ.×72, 11 ὀκ.×72, 1 ὀκ.×72, 5 ὀκ.×72

λέγοντες: Ἀφοῦ τὸ γινόμενον 44 ὀκ.×72 εἶνε ἴσον πρὸς 1στ.×72 ἤτοι πρὸς 72 στατ., διὰ τοῦτο τὸ πρῶτον γινόμενον 22ὀκ×72 εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 72 στατήρων, ἤτοι 36 στ., οὓς γράφομεν καταλλήλως κάτωθεν τῶν προηγουμένων γινομένων. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου τῶν ἀνωτέρω γινομένων εὐκόλως πλέον εὑρίσκονται τὰ λοιπά, καθ' ὅσον τὸ δεύτερον 11 ὀκ.×72 εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου (36 στ.) ἤτοι 18 στ., τὸ τρίτον εἶνε τὸ ἑνδέκατον τοῦ δευτέρου, ἤτοι 1 στ. 28 ὀκ. καὶ τὸ τέταρτον, ὡς πενταπλάσιον τοῦ τρίτου, εἶνε 5 στ. 140 ὀκ. Τὰ οὕτως εὑρισκόμενα γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο.

Πρὸς εὕρεσιν τέλος καὶ τοῦ γινομένου 325 δρμ.×72 ἀναλύομεν τὰ 325 δράμια εἰς 200+100+25 καὶ εὑρίσκομεν χωριστὰ τὰ τρία γινόμενα :

200 δρμ.×72, 100 δρμ.×72, 25 δρμ.×72,

ὧν τὸ πρῶτον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ἤδη γινομένου 1 ὀκ.×72, ἤτοι 0 στ. 36 ὀκ., τὸ δεύτερον εἶνε τὸ ἥμισυ τούτου, ἤτοι 18 ὀκ. καὶ τὸ τρίτον εἶνε τὸ τέταρτον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι 4 ὀκ., 200 δρμ.

Πάντα ταῦτα γράφοντες ὑπὸ τὰ προηγούμενα καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὁλικὸν γινόμενον δι' ἁπλῶν μόνον διαιρέσεων καὶ πολλαπλασιασμῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παράδειγμα 2ον.		21	ὥρ.	36′	55″
		×147			
		147	ὥρ.		
		294	»		
36′	30′	73	»	30′	
	6′	14	»	42′	
	(1)′	(2)	»	(27′)	
55″	30″	1	»	13′	30″
	15″	0	»	36′	45″
	10″	0	»	24′	30″
		3175	ὥρ.	145′	105″
		3177	ὥρ.	26′	45″

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τοῦ γινομένου 30″ × 147 ἐλήφθη πρότερον τὸ βοηθητικὸν γινόμενον 1″ × 147, τὸ ὁποῖον ἐκλείσθη εἰς παρενθέσεις, διὰ νὰ μὴ προστεθῇ μετὰ τῶν ἄλλων. Ἂν δὲν ἐλαμβάνετο τὸ βοηθητικὸν γινόμενον θὰ ἦτο ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ τὸ δωδέκατον τοῦ 6′ × 147· διότι 30″ εἶνε τὸ δωδέκατον τῶν 6′.

Λόγος ὁμοειδῶν συμμιγῶν.

167. Πολλάκις κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων ἔχομεν ἀνάγκην νὰ εὑρίσκωμεν, πῶς ἀριθμός τις συμμιγὴς γίνεται ἐξ ἄλλου ὁμοειδοῦς, νὰ εὑρίσκωμεν δηλονότι τὸν λόγον αὐτῶν.

Ἂν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ ἔχουν μετρηθῇ μὲ διαφόρους μονάδας (ἐχούσας γνωστὰς σχέσεις πρὸς ἀλλήλας) καὶ ζητεῖται ὁ λόγος αὐτῶν, ἤτοι ***ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς τὸ πρῶτον ποσὸν γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου***, τότε πρέπει νὰ μετρήσωμεν τὰ δύο ποσὰ μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ κατόπιν νὰ λάβωμεν τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστάνουν τὰ ποσά, καὶ τὸ πηλίκον τοῦτο εἶνε ὁ λόγος τῶν ποσῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται ὁ λόγος βάρους 1 στ. 30 ὀκ. 300 δρμ. πρὸς βάρος 5 ὀκ. 200 δρμ. Τὸν λόγον τοῦτον παριστῶμεν:

$$\frac{1 \text{ στ. } 30 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρμ.}}{5 \text{ ὀκ. } 200 \text{ δρμ.}}$$

καὶ εὑρίσκομεν μετροῦντες πρῶτον ἀμφότερα τὰ βάρη μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα, εἴτε τὸ δράμιον, εἴτε τὴν ὀκᾶν εἴτε οἱανδήποτε ἄλλην μονάδα· τρέπομεν δηλονότι τοὺς συμμιγεῖς εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς ἰδίας μονάδος, ἔπειτα δὲ λαμβάνομεν τὸν λόγον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς δράμια, 29900 διὰ τὸν πρῶτον, 2200 διὰ τὸν δεύτερον, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος εἶνε $\frac{29900}{2200}$ ἢ $\frac{299}{22}$, ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ μεγαλύτερον βάρος ἰσοῦται μὲ 299 φορὰς τὸ εἰκοστὸν δεύτερον μέρος τοῦ μικροτέρου.

Ἡ εὕρεσις τοῦ λόγου συμμιγοῦς πρὸς ἄλλον ὁμοειδῆ εἶνε προφανῶς καὶ μέτρησις (διαίρεσις) τοῦ πρώτου συμμιγοῦς διὰ τοῦ δευτέρου.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών:

168. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου ὁμοειδοῦς, ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τοῦ πρώτου συμμιγοῦς πρὸς τὸν δεύτερον, τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς οἱασδήποτε, ἀλλὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε μονάδος καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν.***

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

310) Ἡ διάρκεια τοῦ ἔαρος εἶνε 92 ἡμ. 20 ὥρ. 25′, ἡ τοῦ θέρους 93 ἡμ. 18′ 23″, ἡ τοῦ φθινοπώρου 89 ἡμ. 17 ὥρ. 57′ καὶ ἡ τοῦ χειμῶνος 89 ἡμ. 1 ὥρ. 5′.

Τίς ἡ διάρκεια τοῦ τροπικοῦ ἔτους;

311) Τὸ τροπικὸν ἔτος διαρκεῖ ἡμέρας 365,242226. Νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκφρασθῇ τὸ δεκαδικον μέρος εἰς ὥρας, πρῶτα λεπτά, δεύτερα λεπτὰ καὶ δεκαδικὰ μέρη τοῦ δευτέρου λεπτοῦ.

312) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 27 ἡμ. 7 ὥρ. 43′ (χρόνος, καθ' ὃν ἡ σελήνη ποιεῖται μίαν ὁλικὴν περιφορὰν περὶ τὴν γῆν, ὁ *σεληνιακὸς* καλούμενος *μὴν*) εἰς δεκαδικὸν λαμβανομένης τῆς ἡμέρας ὡς μονάδος.

313) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ 3 ἡμ. 12 ὡρ. 20′ 30″ ἀπὸ 85,312 ἡμ.

314) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ συμμιγοῦς 3 ταλ. 2 δρχ. 80 λεπ. πρὸς τὸν συμμιγῆ 2 εἰκ. 4 δρχ. $\left(\frac{89}{220}\right)$.

315) Τίς ὁ λόγος τοῦ συμμιγοῦς 3 ὀκ. 200 δρμ. πρὸς τὸ ὁμοειδὲς ποσὸν παριστάνοντα συμμιγῆ 1 χιλιόγ. 250 γραμ.;

1,250 χιλιόγ.=312,5 δρμ.$\times$1,25 καὶ 3 ὀκ. 200 δρμ.= 1400 δρμ.· ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶνε $\frac{1400}{312,5\times1,25}=\frac{448}{125}$.

316) Τίνα λόγον ἔχει μῆκος 7 μ. 3 παλ. πρὸς μῆκος 2 ὀργ. 3 ποδ. 4 δακ.;

2 ὀργ. 3 πόδ. 4 δάκ.$=\frac{184}{72}$ ὀργ.$=1,949$ μ.$\times\frac{184}{72}$.

7 μ. 3 παλ. = 7 μ., 3. Ὁ ζητούμενος ἄρα λόγος εἶνε:

$7,3 : 1,949\times\frac{184}{72}=$ κ.τ.λ.

317) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει δραχμὰς 17,50· πόσον ἀξίζουν 4 πήχ. 6 ῥούπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Τὸ πρόβλημα προδήλως λύεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς δραχμῶν 17,50 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς $4\frac{3}{4}$, ὅστις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δεικνύει, πῶς οἱ 4 πήχ. 6 ῥούπ. γίνονται ἐκ τοῦ 1 πήχεως, ἤτοι ὁ λόγος (5 πήχ. 6 ῥούπ) : 1 πήχ. Τὸ ζητούμενον ἄρα εἶνε :

$$\chi = 17{,}50 \text{ δρχ.} \times \left(4 + \frac{3}{4}\right) = 83{,}125 \text{ δρχ.}$$

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν λύεται ὡς ἑξῆς :

Ἀξία 1 πήχεως				17,50 δρχ.
Ἀξία 4 πήχεων	17,50 δρχ.	× 4	=	70,00 δρχ.
» 4 ῥουπίων	17,50 »	: 2	=	8,75 »
» 2 »	8,75 »	: 2	=	4,375 »
Ὅθεν 4 πήχ. 6 ῥούπ. ἀξίζουν				83,125 δρχ.

318) Ὁ στατὴρ πράγματός τινος ἀξίζει δραχμὰς 12,40· πόσον ἀξίζουν 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εἶνε ἡ ἑξῆς :

Ἀξία 10 στ.	12,40 δρχ.	× 10	=	124,00 δρχ.
» 7 »	12,40 »	× 7	=	86,80 »
» 22 ὀκ.	12,40 »	: 2	=	6,20 »
» 11 »	6,20 »	: 2	=	3,10 »
» 2 »	6,20 »	: 11	=	0,563 »
» 200 δρμ	0,563 »	: 4	=	0,140 »
» 100 »	0,140 »	: 2	=	0,07 »
Ὅθεν 17 στ. 35 ὀκ. 300 δρμ. ἀξίζουν				220,87 δρχ.

319) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει 2 τάλ. 3 δρχ. 60 λεπτά· πόσον ἀξίζουν 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν τιμῶν ποσῶν ἀναλόγων, ἔνθα ἡ ζητουμένη τιμὴ παρεστάθη διὰ χ.

Εἰς 1 ὀκ. . . . ἀντιστοιχοῦν . . . 2 τάλ. 3 δρ. 60 λεπ.
» 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ. » . . . . . χ.

Μὲ τοιαύτην ἀντιστοιχίαν διακρίνομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα λύε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ται διὰ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαστέος θὰ ληφθῇ ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 2 τάλ. 3 δρχ. 60 λεπτ. πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς ὁ συμμιγὴς 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ. γίνεται ἐκ τῆς 1 ὀκᾶς, ἤτοι ὁ λόγος $\frac{\text{3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ.}}{\text{1 ὀκ.}}$, ὁ ἀριθμὸς δηλονότι $150\frac{3}{4}$.

Θὰ εἶνε ἄρα· $\chi = (\text{2 τάλ. 3 δρχ. 60 λεπ.}) \times 150\frac{3}{4} =$;

Ἐν γένει εἰς πᾶν πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχονται δύο ποσὰ ἀνάλογα ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν αὐτῶν·

Τιμαὶ 1ου ποσοῦ		Τιμαὶ 2ου ποσοῦ
Εἰς τιμὴν 1	ἀντιστοιχεῖ τιμὴ	α
» » β	» »	χ,

ὁ ἄγνωστος $\chi = \alpha \times \frac{\beta}{1}$.

Πολλαπλασιαστέος δηλονότι εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμὴ α τοῦ δευτέρου ποσοῦ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμός, ὁ δεικνύων, πῶς ἡ νέα τιμὴ β τοῦ πρώτου ποσοῦ γίνεται ἐκ τῆς παλαιᾶς αὐτοῦ τιμῆς, τῆς μονάδος 1, ἤτοι ὁ λόγος $\frac{\beta}{1}$.

Διὰ τοῦτο ἡ φρᾶσις *πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ* οὐδὲν νόημα ἔχει· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν δύναται νὰ εἶνε συμμιγής, τουτέστι συγκεκριμένος ἀριθμός.

Ὁσάκις λοιπὸν εἰς ἓν πρόβλημα λυόμενον διὰ πολλαπλασιασμοῦ εἰσέρχονται συμμιγεῖς ἀριθμοί, πρέπει νὰ ὑπονοῆται, ὅτι πολλαπλασιαστὴς δὲν εἶνε ὁ συμμιγής, ἀλλ' ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων, πῶς οὗτος γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἐδόθη.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

320) Ἀτμόπλοιόν τι ὁμαλῶς κινούμενον διανύει $13\frac{1}{2}$ μίλια εἰς 1 ὥραν· πόσα μίλια διανύει εἰς 4 ὥρ. 23′ 30″;

$$\chi = 12\frac{1}{2}\ \text{μίλ.} \times \frac{4\ \text{ὥρ.}\ 23'\ 30''}{1\ \text{ὥρ.}} = 54\ \text{μίλ.} + \frac{43}{48}.$$

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν προστιθεμένων τῶν δρόμων 4 ὡρῶν, 20′, 2′, 1′ καὶ 30″.

321) Ὁ στατὴρ πράγματός τινος ἀξίζει 3 εἰκοσ. 2 τάλ. 4 δρχ. 70 λεπ. Πόσον ἀξίζουν 17 στατῆρες τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

322) Τίς ἡ χωρητικότης βαρελίου, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{7}$ περιέχουν 144 ὀκ. 250 δρμ. οἴνου;

323) Μὲ 12 εἰκοσάδραχμα ἠγοράσαμεν 18 στ. 25 ὀκ. 300 δρμ. πράγματός τινος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 εἰκοσάδραχμον;

324) Ὑπηρέτης εἰργάσθη ἐπὶ 8 μῆνας καὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ μηνὸς καὶ ἔλαβεν 26 εἰκοσ. 1 τάλ. Πόσον ἐλάμβανε τὸν μῆνα;

325) Οἱ 3 στ. 20 ὀκ. 200 δρμ. πράγματός τινος ἀξίζουν 1 εἰκοσάδραχμον· πόσον ἀξίζουν 29 στ. 2 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀντιστοιχίαν τιμῶν δύο ποσῶν ἀναλόγων, ἔνθα ἡ ζητουμένη τιμὴ παρεστάθη διὰ χ:

Εἰς 3 στ. 20 ὀκ. 200 δρμ. ἀντιστοιχεῖ ..... 1 εἰκοσ.
» 29 στ. 2 ὀκ. ἀντιστοιχοῦν ..... χ »

Εἶνε φανερὸν ὅτι 29 στ. 2 ὀκ. ἀξίζουν τόσα εἰκοσάδραχμα, ὅσος εἶνε ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς οὗτος γίνεται ἐκ τοῦ ὁμοειδοῦς συμμιγοῦς 3 στ. 20 ὀκ. 200 δρμ., ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν εἰκοσαδράχμων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $\frac{29\ \text{στ.}\ 2\ \text{ὀκ.}}{3\ \text{στ.}\ 20\ \text{ὀκ.}\ 200\ \text{δρμ.}}$, ὅστις εἶνε $\frac{2556}{305}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θὰ εἶνε ἄρα $\chi = 1$ εἰκοσ. $\times \frac{2556}{305} = \frac{2556}{305}$ εἰκοσ. ἤτοι·

$\chi = 8$ εἰκ. 1 τάλ. 2 δρχ. 60 λεπ. περίπου.

Ἐν γένει εἰς πᾶν πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχονται δύο ποσὰ ἀνάλογα ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον ἀντιστοιχίαν τιμῶν,

Εἰς τιμὴν α ἀντιστοιχεῖ τιμὴ 1
» » β » » χ,

ἡ ζητουμένη τιμὴ χ γίνεται ἐκ τῆς μονάδος 1 (γνωστῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου ποσοῦ), ὅπως ἡ δευτέρα τιμὴ β τοῦ ἄλλου ποσοῦ γίνεται ἐκ τῆς πρώτης τιμῆς α αὐτοῦ, ἤτοι τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται, ἂν πρῶτον εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἔπειτα οὗτος θεωρηθῇ, ὅτι παριστάνει μονάδας ὁμοειδεῖς πρὸς τὴν μονάδα 1, ἥτις εἶνε ἡ δεδομένη τιμὴ τοῦ δευτέρου ποσοῦ.

326) Ἀνταλλάσσει τις 5 πήχ. 5 ῥούπ. ὑφάσματος ἀντὶ μιᾶς ὀκᾶς βουτύρου· ἀντὶ πόσων ὀκάδων βουτύρου θὰ ἀνταλλαχθῶσι 17 πήχ. 3 ῥούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Κατάταξις { 5 πήχ. 5 ῥούπ. ..... 1 ὀκᾶ βουτύρου.
17 πήχ. 3 ῥούπ. ..... χ.

$$\chi = 1 \text{ ὀκ.} \times \frac{17 \text{ πήχ. } 3 \text{ ῥούπ.}}{5 \text{ πήχ. } 5 \text{ ῥούπ.}} = 1 \text{ ὀκ.} \times \frac{139}{45} = \frac{139}{45} \text{ ὀκ.}$$

ἤτοι $\chi = 3$ ὀκ. 35 δρμ. $+ \frac{5}{9}$.

327) Κτίζει τις τοῖχον μήκους 5 ποδ. 3 δακ. εἰς 1 ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ τοῖχον μήκους 100 ὀργυιῶν;

$$\chi = \frac{800}{7} \text{ ὥρ.} = 114 \text{ ὥρ. } 17' \ 8'' \ \frac{4}{7}.$$

328) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις 1 πῆχ. 2 ῥούπ. ὑφάσματός τινος· μὲ πόσας δραχμὰς θὰ ἀγοράσῃ 12 πήχ. καὶ 6 ῥούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

329) Ὑφάσματός τινος οἱ 30 πήχ. 6 ῥούπ. ἀξίζουν 3 εἰκοσ. 2 τάλ. 80 λεπ.· πόσον ἀξίζει ὁ 1 πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου;

Τὰ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰσερχόμενα ποσὰ (μῆκος ὑφάσματος καὶ ἀξία αὐτοῦ) εἶνε ποσὰ ἀνάλογα, ἐδόθησαν δὲ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν (30 π. 6 ῥούπ. καὶ 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λεπ.) καὶ ζητεῖται, εἰς τὴν μονάδα (1 πήχ.) τοῦ πρώτου ποία τιμὴ τοῦ δευτέρου ἀντιστοιχεῖ· εἶνε δηλονότι ἡ ἑξῆς ἀντιστοιχία τιμῶν, ἔνθα ἡ ζητουμένη τιμὴ παρεστάθη διὰ χ·

Εἰς 30 πήχ. 6 ῥούπ. ἀντιστοιχοῦν 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λεπ.
» 1 πῆχ. ..... » χ.

Τὸ πρόβλημα ἄρα λύεται διὰ διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μερισμόν· διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ δοθεῖσα τιμὴ 3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λεπ. τοῦ δευτέρου ποσοῦ, διαιρέτης δὲ ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $\frac{123}{4}$, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῆς τιμῆς 30 πήχ. 6 ῥούπ. τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸν διαιρετέον τρεπομένης εἰς πήχεις, εἰς μονάδας δηλονότι, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ τιμὴ 1 μονάδος.

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶνε:

$\chi =$ (3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λεπ.) : $\frac{123}{4}$ ἤτοι $\chi =$ 2 δρχ., 30.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{123}{4}$ δεικνύει, πῶς ἡ τιμὴ 30 πήχ. 6 ῥούπ. γίνεται ἐκ τῆς μονάδος 1 πήχ. εἶνε δηλονότι ὁ λόγος $\frac{30 \text{ πήχ. } 6 \text{ ῥ.}}{1 \text{ πήχ.}}$ ὥστε δυνάμεθα νὰ γράφωμεν: $\chi =$ (3 εἰκ. 2 τάλ. 80 λεπ.) : $\frac{30 \text{ πήχ. } 6 \text{ ῥούπ.}}{1 \text{ πήχ.}}$.

Σημ.—Πᾶν πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχονται δύο ποσὰ ἀνάλογα, ὧν αἱ δεδομέναι τιμαὶ καὶ ἡ ζητουμένη ἔχουν τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν,

Εἰς τιμὴν α ἀντιστοιχεῖ τιμὴ β
» » 1 » » χ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύεται διὰ διαιρέσεως ἀναγομένης εἰς μερισμὸν καὶ ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶνε· $\chi = \beta : \frac{\alpha}{1}$

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ὡς τιμαὶ διαφόρων ποσῶν εἶνε ἑτεροειδεῖς, ἡ φρᾶσις ἄρα *διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς ἑτεροειδοῦς* οὐδὲν νόημα ἔχει, διότι διαιρέτης δὲν εἶνε ὁ συμμιγὴς α, ἀλλ' ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{1}$, ὁ δεικνύων, πῶς ὁ α γίνεται ἐκ τῆς μονάδος 1, ἧς ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ χ ζητεῖται.

Τοὐναντίον διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἑτέρου ὁμοειδοῦς εἴδομεν ὅτι ἔχει νόημα καὶ σημαίνει τὴν εὕρεσιν τοῦ λόγου αὐτῶν.

330) Κινητὸν ὁμαλῶς κινούμενον διανύει 45 $\frac{1}{2}$ μίλια εἰς χρόνον 3 ὥρ. 30′ 20″· πόσον διάστημα διανύει εἰς 1 πρῶτον λεπτόν;

$$\chi = 45 \text{ μίλ. } \frac{1}{2} : \frac{3 \text{ ὥρ. } 30' \, 20''}{1'} = \frac{91}{2} \text{ μίλ.} : 210 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{273}{1262} \text{ μίλ.} = \frac{1852 \times 273}{1262} \text{ μέτ.} = 400 \text{ μέτ., } 631 \text{ περίπου.}$$

331) Πράγματός τινος 3 ὀκ. 200 δρμ. ἀξίζουν δραχμὰς 22,50· πόσον ἀξίζει τὸ χιλιόγραμμον τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

$$\text{Ὁ λόγος } \frac{3 \text{ ὀκ. } 200 \text{ δρμ.}}{1 \text{ χιλιόγ.}} = \frac{3{,}5 \text{ ὀκ.}}{1 \text{ χιλ.}} = \frac{1{,}28 \text{ χιλ.} \times 3{,}5}{1 \text{ χιλ.}}$$

$= 4{,}48$· ἡ ζητουμένη ἄρα τιμὴ εἶνε·

$$\chi = 22{,}50 \text{ δρχ.} : 4{,}48 = 5{,}02 \text{ δρχ. περίπου.}$$

332) Αἱ 5 ὀκ. 200 δρμ. πράγματός τινος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 2 ταλ. 3 δρχ. 60 λεπ.· πόσον ἐπωλήθη ἡ ὀκᾶ; (2 δρχ., 47 περίπου).

333) Τὸ χιλιόγραμμον πράγματός τινος ἠγοράσθη ἀντὶ 2,40 φράγκων· πόσας δραχμὰς χαρτίνους ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ πράγματος τούτου, ἂν ἡ ἀγοραία τιμὴ τοῦ φράγκου εἶνε 1,35 δραχμαί; (4,15 δρχ. περίπου).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

334) Πόσας ὀκάδας ἀγοράζει τις μὲ 2 τάλ. 3 δρχ. ἔκ τινος πράγματος, οὗ ἡ ὀκᾶ ἐπωλεῖτο 5 δρχ. 25 λεπ. ; (περίπου 2 ὀκ. 190 δρμ.).

335) Ἐργάτης ὑφαίνει 5 πήχ. 4 ῥούπ. ὑφάσματος καθ' ἑκάστην καὶ λαμβάνει δρχ. 1,20 δ' ἕκαστον πῆχυν· πόσας δραχμὰς κερδίζει καθ' ἑβδομάδα μὴ ἐργαζόμενος τὴν Κυριακήν ; (39,60).

336) Πόσον ἀξίζουν τὰ 0,35 τοῦ γραμμαρίου πράγματος, οὗ τὸ χιλιόγραμμον ἀξίζει 600 δραχμάς ; (21 λεπτὰ)

337) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 5,70 φράγκα τὸ μέτρον· πόσας χαρτίνας δραχμὰς ἀξίζει ὁ πῆχυς (ἐνδεζέ), ἐὰν τοῦ φράγκου ἡ ἀγοραία τιμὴ εἶνε δραχμαὶ 1,40 ;

338) Ἐπλήρωσέ τις ἓν εἰκοσάφραγκον καὶ ἠγόρασεν ὕφασμα, οὗ τὸ μέτρον ἀξίζει 3,50 φράγκα· πόσους πήχεις (ἐνδεζὲ) ἠγόρασεν ;

339) Εἰς πόσας ὥρας διανύει διάστημα 400 χιλιομέτρων ἁμαξοστοιχία ὁμαλῶς κινουμένη μὲ ταχύτητα 38 χιλιομέτρων καθ' ὥραν ;

340) Ὡρολόγιον προχωρεῖ κατὰ 2′ 15″ τὴν ὥραν· εἰς τὰς 9 ὥρ. 15′ π. μ. ἐδείκνυεν ἀκριβῆ χρόνον· ποίαν ὥραν θὰ δεικνύῃ εἰς τὰς 3 ὥρ. 20′ μ. μ. ;

341) Ἐργάτης εἰργάσθη τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἡμέρας, ἀνεπαύθη 2 ὥρ. 40′ καὶ τὰ 0,8 τοῦ λοιποῦ χρόνου ἐχρειάσθη διὰ νὰ μεταβῇ εἰς τὸ χωρίον του διατρέχων 5000 μέτρα τὴν ὥραν· πόσον δρόμον διέτρεξεν ;

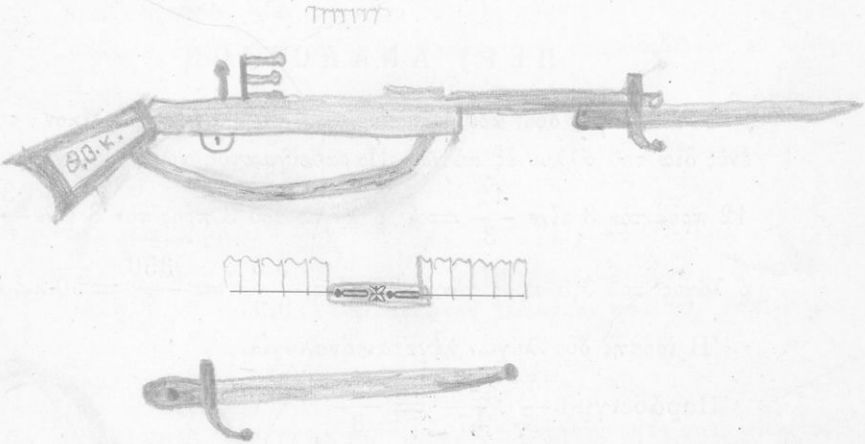
342) Ἁμαξοστοιχία ἐκίνησεν εἰς τὰς 9 ὥρ. 45′ π. μ. μὲ ταχύτητα 50 χιλιομέτρων τὴν ὥραν· εἰς ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ εἰς τὸν πρῶτον σταθμὸν ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως 220 χιλιόμ. ;

343) Δύο ὡρολόγια εἰς τὰς 8 π. μ. ἐδείκνυον τὸν ἀληθῆ χρόνον· τὸ α′. προχωρεῖ 2′ 40″ καθ' ὥραν καὶ τὸ β′. 3′ 12″ καθ' ὥραν· ποίαν διαφορὰν ὡρῶν θὰ ἔχωσι ταῦτα εἰς τὰς 5ὥρ.30′ μ.μ.;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

344) Πεζὸς ἀνεχώρησεν εἰς τὰς 6 ὥρ. 30′ τῆς πρωίας καὶ διήνυε 5000 μέτρα τὴν ὥραν· μετὰ 2 ὥρ. 40′ ἐστάλη ἱππεὺς διανύων 9500 μέτ. τὴν ὥραν, ἵνα φθάσῃ τὸν πεζόν· μετὰ πόσον χρόνον θὰ τὸν φθάσῃ ;

345) Ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἑνὸς ὄρους κατῆλθέ τις εἰς 3 ὥρ. 48′, ἐχρειάσθη δὲ τὰ 0,68 τοῦ χρόνου τούτου διὰ τὴν ἄνοδον· ὑπελόγισεν, ὅτι κάθε 7′ κατὰ τὴν ἄνοδον ἔφθανε εἰς ὕψος 43 μ. μεγαλύτερον· νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὄρους.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

169. Λόγος δύο ἀριθμῶν εἶνε, ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου ἐξ αὐτῶν. Παραδείγματος χάριν ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 3 εἶνε $\frac{12}{3} = 4$· ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 8 εἶνε $\frac{3}{8}$· ὁ λόγος τοῦ 3,5 πρὸς τὸν 0,07 εἶνε $\frac{3,5}{0,07} = \frac{350}{7} = 50$ κ.ο.κ.

Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται *ἀναλογία*.

Παράδειγμα.— $\frac{28}{7} = \frac{32}{8}$

εἶνε ἀναλογία, διότι οἱ δύο οὗτοι λόγοι $\frac{28}{7}$ καὶ $\frac{32}{8}$ εἶνε ἴσοι πρὸς τὸν 4· ἡ ἀναλογία αὕτη ἀπαγγέλλεται:

28 πρὸς 7 ὡς 32 πρὸς 8.

Οἱ ἀριθμοὶ 28 καὶ 8 λέγονται *ἄκροι* (ὅροι τῆς ἀναλογίας), οἱ δὲ ἀριθμοὶ 7 καὶ 32 λέγονται *μέσοι* (ὅροι τῆς ἀναλογίας).

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

170. Ἰδιότης Ι. —*Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων.* Τῷ ὄντι ἔστω ἡ ἀναλογία:

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἂν πολλαπλασιασθοῦν οἱ ἴσοι οὗτοι ἀριθμοὶ ἐπὶ 7×14, προκύπτει

$$5 \times 14 = 10 \times 7. \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ὁμοίως, ἂν παραστήσωμεν διὰ γραμμάτων τοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας, π. χ. τῆς ἀναλογίας

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

θὰ ἔχωμεν: $\alpha \times \delta = \gamma \times \beta.$

Συνέπεια.—Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ εὑρίσκωμεν ἕνα τῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν δοθῶσιν οἱ τρεῖς ἄλλοι.

1ον. *Ὁ ἄγνωστος ὅρος εἶνε εἷς τῶν ἄκρων.* — Παριστῶμεν τοῦτον διὰ χ καὶ ἔστω ἡ ἀναλογία: $\frac{\chi}{7} = \frac{10}{14}.$

Θὰ εἶνε τότε $14.\chi = 10.7$

ἢ $14.\chi = 70.$

Ὁ ἀριθμὸς ἄρα χ εἶνε τὸ δέκατον τέταρτον τοῦ 70, ἤτοι εἶνε:

$$\chi = \frac{70}{14} = 5.$$

Ὁμοίως, ἐὰν χάριν γενικότητος παραστήσωμεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους διὰ γραμμάτων, ἤτοι ἂν λάβωμεν τὴν ἀναλογίαν:

$$\frac{\chi}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

θὰ ἔχωμεν ἕνεκα τῆς τεθείσης ἰδιότητος (I)

$$\delta.\chi = \beta.\gamma,$$

ὅθεν $$\chi = \frac{\beta.\gamma}{\delta}.$$

Ὁ τύπος οὗτος δεικνύει τὸν κανόνα:

171. *Πρὸς λογισμὸν τοῦ ἀγνώστου ἄκρου, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.*

2ον. *Ὁ ἄγνωστος ὅρος εἶνε εἷς τῶν μέσων.* — Ἔστω ἡ ἀνα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λογία : $$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\gamma}{\delta},$$

θὰ εἶνε τότε $$\gamma \cdot \chi = \alpha . \delta,$$

ὅθεν : $$\chi = \frac{\alpha . \delta}{\gamma}.$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών :

172. *Πρὸς λογισμὸν τοῦ ἀγνώστου μέσου εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν γνωστῶν ἄκρων καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.*

Π. χ. τῆς ἀναλογίας $\frac{5}{\chi} = \frac{15}{18}$ θὰ εἶνε $\chi = \frac{5.18}{15} = 6.$

173. Ἰδιότης II. *Ἐὰν τεσσάρων ἀριθμῶν γεγραμμένων κατὰ σειρὰν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τότε οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

4, 2, 24, 12.

Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $4 \times 12 = 48$· τὸ γινόμενον τῶν μέσων $2 \times 24 = 48$. Λέγω ὅτι θὰ ἀποτελῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἀναλογίαν· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος :

$$4 \times 12 = 2 \times 24,$$

ἂν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ γινομένου 12×2, λαμβάνομεν $$\frac{4 \times 12}{12 \times 2} = \frac{2 \times 24}{12 \times 2},$$

ἤτοι τὴν ἀναλογίαν τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν :

$$\frac{4}{2} = \frac{24}{12}.$$

Συνέπεια. — Ἡ ἰδιότης αὕτη, (ἥτις εἶνε ἀντίστροφος τῆς πρώτης), ἐπιτρέπει νὰ ἀντιμεταθέτωμεν τοὺς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας, ἀρκεῖ μόνον τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ μένῃ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

174. Ἐκαλέσαμεν δύο ποσὰ ἀνάλογα, ὅταν συμμεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Πλὴν τῶν οὕτω συμμεταβαλλομένων ποσῶν ἐξετάζονται συνήθως εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὰ καλούμενα *ἀντιστρόφως ἀνάλογα* ἢ ἁπλῶς *ἀντίστροφα* ποσὰ καὶ ταῦτα ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα, ὅταν συμμεταβάλλωνται οὕτως, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν νὰ διαιρῆται τὸ ἄλλο διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ἂν δηλονότι τὸ ἓν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, 3, 4 κ.τ.λ., τὸ ἄλλο θὰ διαιρεθῇ διὰ 2, 3, 4 κ.τ.λ. ἤ, ὅπερ ταὐτό, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τοὺς ἀντιστρόφους ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κ.τ.λ.

Παραδείγματα ἀντιστρόφων ποσῶν ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

α΄) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ὧραι, καθ' ἃς οὗτοι ἐργαζόμενοι τελειώνουσιν ἓν ἔργον, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα· διότι, ἂν π. χ. 4 ἐργάται ἐκτελοῦν ὡρισμένον ἔργον εἰς 18 ὥρας, διπλάσιοι ἐργάται, ἤτοι $4 \times 2 = 8$ ἐργάται, θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον τοῦτο εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ χρόνου, ἤτοι εἰς 18 ὥρ.: $2 = 9$ ὥρας· ὁμοίως τριπλάσιοι ἐργάται, ἤτοι $4 \times 3 = 12$ ἐργάται, θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τὸ τρίτον τοῦ χρόνου, ἤτοι εἰς 6 ὥρας κ.ο.κ. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ συνεργασία τῶν ἐργατῶν οὔτε βλάπτει οὔτε ἁπλοποιεῖ τὸ ἔργον.

β΄) Τὸ πλῆθος τῶν ἴσων μεριδίων ποσοῦ μεριζομένου καὶ τὸ μέγεθος τῶν μεριδίων τούτων.

γ΄) Τὸ πλῆθος καὶ τὸ πλάτος σανίδων ἀπαιτουμένων διὰ τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπίστρωσιν μιᾶς αἰθούσης, ὅταν πᾶσαι αἱ σανίδες εἶνε τοῦ αὐτοῦ μήκους.

δ') Ἡ ταχύτης ὁμαλῶς κινουμένου ἀτμοπλοίου (ἢ οἱουδήποτε κινητοῦ) καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, ἵνα διανυσθῇ ὡρισμένον διάστημα.

Παρατήρησις.—Ἐπὶ ἀναλόγων ποσῶν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἄλλου.

Π. χ. Ἐὰν 5 ὀκ. πράγματός τινος ἀξίζουν 8 δραχμάς,
αἱ 5×2 ὀκ. . . . . » 8×2 »
αἱ 5×3 ὀκ. . . . . » 8×3 » κ.ο.κ.

εἶνε δὲ $\frac{5 \text{ ὀκ.}}{5\times2 \text{ ὀκ.}}=\frac{1}{2}$, ὁμοίως $\frac{8 \text{ δρχ.}}{8\times2 \text{ δρχ.}}=\frac{1}{2}$,

$\frac{5\times2 \text{ ὀκ.}}{5\times3 \text{ ὀκ.}}=\frac{2}{3}$, » $\frac{8\times2 \text{ δρχ.}}{8\times3 \text{ δρχ.}}=\frac{2}{3}$ κ.ο.κ.

Ἐπὶ ἀντιστρόφων ποσῶν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἀναφερομένους εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον παράδειγμα ἀντιστρόφων ποσῶν:

4 ἐργάται ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 18 ὥρας
4×2 » » » » » 18 : 2=9 ὥρας
4×3 » » » » » 18 : 3=6 ὥρας.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι:

$\frac{4 \text{ ἐργ.}}{4\times2 \text{ ἐργ.}}=\frac{1}{2}$, ἐνῷ $\frac{18 \text{ ὥρ.}}{9 \text{ ὥρ.}}=2$,

$\frac{4\times2 \text{ ἐργ.}}{4\times3 \text{ ἐργ.}}=\frac{2}{3}$, ἐνῷ $\frac{9 \text{ ὥρ.}}{6 \text{ ὥρ.}}=\frac{3}{2}$.

Μέθοδος τῶν τριῶν.

175. Ἐκτὸς τῶν στοιχειωδῶν προβλημάτων τῶν λυομένων δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ μιᾶς διαιρέσεως ἀπαντῶσιν εἰς τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀριθμητικὴν καὶ ἄλλα γενικώτερα προβλήματα δυνάμενα νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς δύο ἢ περισσότερα στοιχειώδη· τῶν προβλημάτων τούτων πλεῖστα δύνανται νὰ χωρισθῶσι εἰς διαφόρους κατηγορίας, ἑκάστης τῶν ὁποίων τὰ προβλήματα λύονται κατὰ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ὁ γενικὸς τρόπος τῆς λύσεως προβλημάτων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κατηγορίας λέγεται *μέθοδος*.

176. *Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λύει ἐκεῖνα τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦνται δύο μεταβλητὰ ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα· εἰς τὰ ποσὰ δὲ ταῦτα δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ καὶ ζητεῖται εἰς νέαν τιμὴν τοῦ ἑνός, ποία τιμὴ τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχεῖ;*

Πρόβλημα I.—*Ὑφάσματος οἱ 5 πήχεις ἀξίζουν δραχμὰς 8,40· πόσον ἀξίζουν 9 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν· διότι τὰ δύο ποσά, πήχεις ὑφάσματος καὶ ἀξία αὐτῶν, εἶνε ἀνάλογα, δίδεται δὲ ἓν ζεῦγος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν ποσῶν τούτων·

5 πήχ. ——— 8,40 δρχ.

καὶ ζητεῖται εἰς τὴν νέαν τιμήν, 9 πήχεις, τοῦ ἑτέρου αὐτῶν (τῶν πήχεων) ποία τιμὴ τοῦ ἄλλου (τῶν δραχμῶν) ἀντιστοιχεῖ.

Λύσις δι' ἀναλογίας. —

5 πήχ. ——— 8,40 δρχ.
9 » ——— χ »

$$\frac{5}{9} = \frac{8,40}{\chi}$$

$$\chi = \frac{8,40 \times 9}{5} = 15,12 \text{ δρχ.}$$

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος διατάσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς γράφοντες εἰς ἕνα στίχον τὸ ζεῦγος τῶν δοθεισῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν δύο ποσῶν, εἶτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ἄλλου, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ οὕτως, ὥστε αἱ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ τιμαὶ νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Τούτων γενομένων σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀφοῦ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἕπεται, ὅτι ὁ λόγος $\frac{5}{9}$ τῶν πήχεων εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{8,40}{\chi}$ τῶν δραχμῶν· ἤτοι εἶνε ἡ ἀναλογία·

$$\frac{5}{9} = \frac{8,40}{\chi},$$

τῆς ὁποίας ὁ ἄγνωστος ἄκρος χ εὑρίσκεται κατὰ τὸν κανόνα (171) καὶ εἶνε·

$$\chi \text{ δρχ.} = \frac{8,40 \times 9}{5} = 8,40 \text{ δρχ.} \times \frac{9}{5} \qquad \text{(I)}$$

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.—Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἐὰν οἱ πήχεις ἀπὸ 5 γίνωσιν 1, ἤτοι διαιρεθῶσι διὰ 5 καὶ αἱ δραχμαὶ 8,40 θὰ διαιρεθῶσι διὰ 5 καὶ θὰ γίνωσι

5 πήχ.	———	8,40	δρχ.
1 »	———	$\frac{8,40}{5}$	»
9 »	———	$\frac{8,40 \times 9}{5}$	»
$\chi = \frac{8,40 \times 9}{5} = 15,12$ δρχ.			

$\frac{8,40}{5}$ δρχ. Ἂν ἤδη οἱ πήχεις ἀπὸ 1 γίνωσι 9, ἤτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 9, καὶ αἱ δραχμαὶ $\frac{8,40}{5}$ θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 9 καὶ θὰ γίνωσι $\frac{8,40 \times 9}{5}$ δρχ. Οὕτω καὶ πάλιν εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (I).

Πρόβλημα II.—*Ἀτμόπλοιον ὁμαλῶς κινούμενον μὲ ταχύτητα 8 μιλίων καθ' ὥραν διανύει τὸ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Σῦρον διάστημα εἰς 10 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα ἀτμόπλοιον ἔχον ταχύτητα 12 μιλίων καθ' ὥραν;*

Λύσις δι' ἀναλογίας. — Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ὁ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λόγος $\frac{8}{12}$ τῶν μιλίων εἶνε ἀντίστροφος πρὸς τὸν λόγον

8 μίλ.	———	10 ὥρ.
12 »	———	χ »

$$\frac{12}{8} = \frac{10}{\chi}$$

$$\chi = \frac{10 \times 8}{12} = 6\text{ὥρ.} + \frac{2}{3}$$

$\frac{10}{\chi}$ τῶν ὡρῶν, ὥστε θὰ εἶνε ἡ ἑξῆς ἀναλογία:

$$\frac{12}{8} = \frac{10}{\chi}$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{10 \times 8}{12} \text{ ὥρ.} = 10 \text{ ὥρ.} \times \frac{8}{12} \quad \text{(II).}$$

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.—Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἡ ταχύτης ἀπὸ 8 μίλια γίνῃ 1 μίλιον, ἤτοι διαιρεθῇ διὰ 8, ὁ χρόνος θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8 καὶ θὰ γίνῃ 10 ὥρ.

8 μίλ.	———	10 ὥρ.
1 »	———	10×8 »
12 »	———	$\frac{10 \times 8}{12}$ »

$$\chi = \frac{10 \times 8}{12} \text{ὥρ.} = 6\text{ὥρ.} + \frac{2}{3}$$

×8. Ἂν ἤδη ἡ ταχύτης ἀπὸ 1 μίλιον γίνῃ 12 μίλια, ἤτοι πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 12, ὁ χρόνος 10 ὥρ. ×8 θὰ διαιρεθῇ διὰ 12 καὶ θὰ γίνῃ $\frac{10 \text{ ὥρ.} \times 8}{12}$· θὰ εἶνε δηλονότι καὶ πάλιν

$$\chi = 10 \text{ ὥρ.} \times \frac{8}{12}.$$

Ἐκ τῶν ἐξαγομένων (I) καὶ (II) συνάγομεν τάδε:

Πρὸς λύσιν παντὸς προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν διατάσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς εἰσερχομένους εἰς αὐτό, ὡς εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα ἐλέχθη, φροντίζοντες πρότερον νὰ κάμνωμεν τὰς δύο δεδομένας τιμὰς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν αὐτὴν μονάδα, (ὅταν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀκόλουθον γενικὸν κανόνα.

177. Κανών. — *Τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν χ εὑρίσκομεν, ἂν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδῆ ἀριθμόν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶνε γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ἐὰν διὰ α καὶ β παρασταθῶσιν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν καὶ διὰ τοῦ γ ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἡ ὁποία ὑποτίθεται γινομένη ἐξ ἧς μονάδος καὶ ἡ ἄλλη τιμὴ αὐτοῦ α, θὰ εἶνε ἐπὶ ἀναλόγων μὲν ποσῶν ὁ ἀκόλουθος πίναξ, εἰς ὃν ἐγράφη καὶ ἡ λύσις :

	Τιμαὶ 1ου ποσοῦ	Τιμαὶ 2ου ποσοῦ
Ποσὰ	α	β
ἀνάλογα	γ	$x = \beta \times \frac{\gamma}{\alpha}$,

ἐπὶ ἀντιστρόφων δὲ ποσῶν ὁ ἀκόλουθος πίναξ :

	Τιμαὶ 1ου ποσοῦ	Τιμαὶ 2ου ποσοῦ
Ποσὰ	α	β
ἀντίστροφα	γ	$x = \beta \times \frac{\alpha}{\gamma}$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

346) Ὑφάσματος $3\frac{3}{8}$ πήχεις ἀξίζουν δραχμὰς 8,40· πόσον ἀξίζουν τὰ 9 μέτρα τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Ἐπειδὴ αἱ δύο τιμαὶ $3\frac{3}{8}$ πήχεις καὶ 9 μέτρα δὲν γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, τρέπομεν πρότερον τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς ἄλλους γινομένους ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἔστω π. χ. ἐκ τοῦ 1 μέτρου, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$3\frac{3}{8}$ πήχεις $= 0,648$ μ. $\times 3\frac{3}{8}$· διότι 1 πῆχ. $= 0,648$ μ.

Ἔπειτα διατάσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$0{,}648$ μέτ. $\times\left(3+\frac{3}{8}\right)$ ..... 8,40 δρχ.

9 » ..... $\chi = 8{,}40$ δρχ. $\times \frac{9}{0{,}648\times\left(3+\frac{3}{8}\right)}$,

ἤτοι $\chi = \frac{8{,}40\times 9\times 8}{0{,}648\times 27}$ δρχ. $= 33{,}58$ δρχ.

347) Μὲ 3 δραχμὰς ἀγοράζομεν 5 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

Λύσις.

3 δρχ. —— 5 ὀκ.

$\frac{3}{4}$ » —— χ » $= 5$ ὀκ. $\times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{3} = 5$ ὀκ. $\times \frac{1}{4} = 1$ ὀκ. 100 δρμ.

348) Τὰ 300 δράμια ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν δραχμὰς 6,40· πόσον ἀξίζουν αἱ 5 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

349) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 12 μέτρα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, δίδομεν δραχμὰς 18,40· πόσον θὰ δώσωμεν πρὸς ἀγορὰν 6 πήχεων;

350) Πόσον ἀξίζουν τὰ 35 χιλιόγραμμα πράγματος, τοῦ ὁποίου τὰ 10 χιλιόγραμμα ἀξίζουν δραχμὰς 4,50;

351) Ὑπηρέτης λαμβάνει εἰς 5 μῆνας 210 δραχμὰς μισθόν· πόσας δραχμὰς λαμβάνει εἰς 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας;

352) Πόσοι ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 6 ἡμέρας, ἂν 8 ἐργάται τὸ τελειώνουν εἰς 12 ἡμέρας;

353) Ἐπληρώθησαν δραχμαὶ 16,20 δι' ἀγορὰν 1 στ. 20 ὀκ. ἑνὸς πράγματος· πόσαι δραχμαὶ θὰ πληρωθῶσι δι' ἀγορὰν 30 ὀκ. 200 δραμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Λύσις $\left\{\begin{array}{l} 16{,}20 \text{ δρχ.} —— 64 \text{ ὀκ.} \\ \chi \text{ » —— } 30\frac{1}{2} \text{ »} \end{array}\right\} \chi = 16{,}20 \text{ δρχ.} \times \frac{30\frac{1}{2}}{64} =;$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

354) Κρήνη δίδουσα 40 ὀκάδας ὕδατος καθ' ὥραν πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρας· εἰς πόσον χρόνον πληροῖ τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν ἄλλη κρήνη δίδουσα καθ' ὥραν 68 ὀκάδας ὕδατος;

355) Κρήνη δίδουσα καθ' ὥραν 50 ὀκάδας ὕδατος πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $6\frac{1}{2}$ ὥρας· εἰς πόσον χρόνον πληροῖ τὴν αὐτὴν δεξαμενὴν ἄλλη κρήνη δίδουσα καθ' ὥραν 40 ὀκ. 300 δρμ. ὕδατος;

356) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἐνδυμασίας ἀρκοῦσι 10 πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $\frac{5}{4}$ τοῦ πήχεως· πόσοι πήχεις ἀρκοῦσιν, ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶνε πήχεις $1+\frac{7}{8}$;

357) Ἐργαζόμενός τις 10 ὥρας καθ' ἑκάστην τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 6 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζηται καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ τὸ τελειώσῃ εἰς 5 ἡμέρας;

358) Ἔργον τελειώνει εἰς 48 ἡμέρας ὑπὸ 16 ἐργατῶν· πόσοι ἐργάται τελειώνουν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἀμέσως δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

359) Ὡρισμέναι τροφαὶ ἐπαρκοῦν 3 μῆνας, διὰ νὰ τραφοῦν 45 στρατιῶται· πόσον χρόνον ἐπαρκοῦν αἱ αὐταὶ τροφαὶ δι' 60 στρατιώτας;

360) Νὰ τραπῶσι 20,5 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου Κελσίου εἰς βαθμοὺς Ῥεωμύρου. (Γνωστὸν ὅτι 100 βαθμοὶ Κελσίου ἀντιστοιχοῦσι πρὸς 80 βαθμοὺς Ῥεωμύρου).

361) Ἐὰν 17 ὀκάδες σταφυλῶν χρειάζονται πρὸς παραγωγὴν 10 ὀκάδων οἴνου, πόσαι ὀκάδες σταφυλῶν χρειάζονται πρὸς παραγωγὴν οἴνου 10 βαρελίων, ὧν ἕκαστον χωρεῖ 400 ὀκάδας οἴνου;

362) Ῥάβδος μήκους 1 ὀργ. 5 ποδ. ὀρθὴ ἑστημένη ῥίπτει κατά τινα χρόνου στιγμὴν σκιὰν μήκους 1 ὀργ. 2 ποδ. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος πύργου, ὅστις κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ῥίπτει σκιὰν ἔχουσαν μῆκος 10 ὀργ. 4 ποδ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

363) Φρουρὰ ἐκ 210 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς δι' 144 ἡμέρας. Ἐὰν μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς ἀναγκασθοῦν νὰ τραφῶσιν 200 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ;

364) Φρουρὰ 210 ἀνδρῶν ἔχουσα τροφὰς δι' ὡρισμένον χρόνον λαμβάνει ἡμέραν τινὰ ἐπικουρίαν 60 ἀνδρῶν οὐδεμίαν φερόντων τροφήν· πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν, ἵνα αἱ τροφαὶ ἐπαρκέσουν μέχρι τέλους τοῦ ὡρισμένου χρόνου ;

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

178. Ὁσάκις ἡ τιμὴ ποσοῦ τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν οὐχὶ ἑνὸς ἀλλὰ πλειόνων ἄλλων ποσῶν, τότε λέγοντες ὅτι τὸ ποσὸν ἐκεῖνο εἶνε ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς ἓν τῶν ποσῶν τούτων ὑπονοοῦμεν ὅτι πάντα τὰ λοιπὰ ποσά, ἐκτὸς τῶν συγκρινομένων, μένουσιν ἀμετάβλητα καὶ κατόπιν γίνεται ἡ σύγκρισις τῶν δύο ποτῶν. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς τροφοδοτεῖται φρουρά τις ἀνδρῶν, ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν τροφῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλήθους τῶν στρατιωτῶν, καὶ ἐκ τοῦ σιτηρεσίου, τῆς μερίδος δηλονότι, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἕκαστος στρατιώτης κάθε ἡμέραν. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τροφοδοσίας πρὸς τὸ ποσὸν τῶν τροφῶν, θεωροῦμεν τὸ πλῆθος τῶν στρατιωτῶν καὶ τὸ σιτηρέσιον ἀμετάβλητα, ὁπότε διακρίνομεν ὅτι τὰ συγκρινόμενα ταῦτα ποσὰ εἶνε ἀνάλογα. Ὁμοίως πρὸς σύγκρισιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν τροφοδοσίας πρὸς τὸ πλῆθος τῶν στρατιωτῶν ὑποθέτομεν ἀμετάβλητα τὸ ποσὸν τῶν τροφῶν καὶ τὸ σιτηρέσιον, ὁπότε βλέπομεν ὅτι τὰ συγκρινόμενα ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα· διότι μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τροφῶν καὶ τὸ αὐτὸ σιτηρέσιον διπλάσιοι στρατιῶται τρέφονται τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν κ.τ.λ. Ὁμοίως διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν ἡμερῶν τροφοδοσίας πρὸς τὸ σιτηρέσιον, ἐπειδὴ οἱ αὐτοὶ στρατιῶται μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν τροφῶν, διὰ νὰ τραφῶσι διπλασίας ἡμέρας, λαμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάνουσι τὸ ἥμισυ τοῦ σιτηρεσίου κ.ο.κ., συνάγομεν ὅτι αἱ ἡμέραι τροφοδοσίας καὶ τὸ σιτηρέσιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

179. *Ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν λύει τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ ποσοῦ τινὸς καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς αὐτὸ τιμαὶ ἄλλων ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων πρὸς τὸ πρῶτον, ζητεῖται δὲ εἰς νέας τιμὰς τῶν ποσῶν τούτων ποία τιμὴ τοῦ πρώτου ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ.*

Λέγεται δὲ *σύνθετος* μέθοδος τῶν τριῶν, διότι τὰ δι' αὐτῆς λυόμενα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ πλείονα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἥτις πρὸς διάκρισιν λέγεται καὶ *ἁπλῆ*.

Πρόβλημα.—*Εἰς 15 ἡμέρας 10 ἐργάται τελειώνουν τὰ* $\frac{3}{4}$ *ἑνὸς ἔργου· εἰς πόσας ἡμέρας 12 ἐργάται ὁμοίως ἐργαζόμενοι τελειώνουν τὸ μένον* $\frac{1}{4}$ *τοῦ ἔργου;*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, διότι ἐδόθη ὅτι εἰς τὰς τιμὰς 10 ἐργάται καὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ 15 ἡμέραι ἐργασίας, ζητεῖται δέ, εἰς τὰς νέας τιμὰς 12 ἐργατῶν καὶ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου πόσαι ἡμέραι ἐργασίας ἀντιστοιχοῦν· εἶνε δὲ προδήλως αἱ ἡμέραι ἐργασίας ἀνάλογοι πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἔργου καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν.

Διατάσσομεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἐπὶ δύο σειρῶν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lll} 15 \text{ ἡμέραι} \ldots\ldots 10 \text{ ἐργάται} \ldots\ldots & \frac{3}{4} \text{ τοῦ ἔργου} & \\ \chi \quad \text{»} \quad \ldots\ldots 12 \quad \text{»} \quad \ldots\ldots & \frac{1}{4} \text{ »} \quad \text{»} & \end{array} \qquad (1)$$

ὅπου διὰ τοῦ γράμματος χ παρίσταται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αον) Ἂν μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μετεβάλλετο ἀπὸ 10 εἰς 12, τὸ δὲ ἔργον ἔμενεν ἀμετάβλητον, ἤτοι $\frac{3}{4}$, τότε εὑρίσκεται, πόσαι γίνονται αἱ ἡμέραι, διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου προβλήματος τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Ποσὰ ἀντίστροφα
10 ἐργάται τελειώνουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 15 ἡμέρας
12 » » » » » » » 15 ἡμ. $\times \frac{10}{12}$.

βον) Μαθόντες ὅτι 12 ἐργάται τελειώνουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν οἱ αὐτοὶ ἐργάται (12) εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς δεύτερον πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Ποσὰ ἀνάλογα
12 ἐργάται τελειώνουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 15 ἡμ. $\times \frac{10}{12}$
» » » τὸ $\frac{1}{4}$ » » » 15 ἡμ. $\times \frac{10}{12} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$.

Ἡ λύσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶνε:

$$\chi = 15 \text{ ἡμ.} \times \frac{10}{12} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}.$$

Παραβάλλοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ἀγνώστου πρὸς τοὺς ἀριθμούς, ὡς εἶνε γεγραμμένοι εἰς τὴν διάταξιν (1), συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

180. ***Πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν ἄλλων ποσῶν, φροντίζομεν ὅμως νὰ ἀντιστρέφωμεν προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἂν τὸ ποσόν, πρὸς τὸ ὁποῖον οἱ ὅροι αὐτοῦ ἀναφέρονται, εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ ζητούμενον, νὰ τὸ λαμβάνωμεν δ' ὡς ἔχει, ἂν εἶνε ἀντίστροφον.

Σημειωτέον ὅτι αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ πρέπει νὰ γίνωνται ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἄλλως φροντίζομεν πρότερον νὰ τρέπωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς ἀριθμοὺς γινομένους ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν ἀνωτέρω πρακτικὸν κανόνα.

Μετὰ δὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων κάμνομεν πάσας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις· οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐργαζόμενοι, θὰ ἔχωμεν :

$$\chi = 15 \text{ ἡμ.} \times \frac{10}{12} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 15 \text{ ἡμ.} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{15 \times 5}{6 \times 3} \text{ ἡμ.} = \frac{5 \times 5}{6} \text{ ἡμ.} = 4 \text{ ἡμ.} \frac{1}{6}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ προβλήματος δὲν εἶνε γνωστόν, ἀπὸ πόσας ὥρας ἀποτελεῖται ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα, δὲν δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας, ἵνα εὕρωμεν, πόσας ὥρας θὰ ἐργασθοῦν τὴν πέμπτην ἐργάσιμον ἡμέραν οἱ ἐργάται.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

365) Πλὰξ ἐκ λίθου ἔχει βάρος 40 ὀκ. 200 δρμ., ὅταν τὸ μῆκος αὐτῆς εἶνε 1 μ., 50, τὸ πλάτος 0 μ., 60 καὶ τὸ πάχος 0μ.,03· πόσον πάχος θὰ ἔχῃ ἄλλη πλὰξ ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης, τῆς ὁποίας τὸ βάρος εἶνε 60 ὀκ., τὸ μῆκος 1 μ. καὶ τὸ πλάτος 0μ., 64;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

	βάρος	μῆκος	πλάτος	πάχος
Κατάταξις	$\frac{81}{2}$ ὀκ. . . .	1,5 μ.	0,60 μ.	0,03 μ.
	60 »	1 »	0,64 »	χ

Λύσις: $\chi = 0{,}03\ \mu. \times \frac{60}{\left(\frac{81}{2}\right)} \times \frac{1{,}5}{1} \times \frac{0{,}60}{0{,}64}$

$$= \frac{0{,}03 \times 120 \times 15 \times 60}{81 \times 10 \times 64} = \text{κ.τ.λ.}$$

366) Ὁδοιπόρος βαδίζων 8 ὥρας κάθε ἡμέραν διέτρεξεν εἰς 7 ἡμέρας 210 στάδια· εἰς πόσας ἡμέρας ἄλλος ὁδοιπόρος βαδίζων μὲ τὴν αὐτὴν καὶ ὁ πρῶτος ταχύτητα θὰ διατρέξῃ 400 στάδια βαδίζων 10 ὥρας κάθε ἡμέραν; $\left(10\ \text{ἡμ.}\frac{2}{3},\ \text{ἤτοι}\right.$ $\left.10\ \text{ἡμ. } 6\ \text{ὥρ.}\frac{2}{3}\right)$.

367) Ἐργάται 15 ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐχρειάσθησαν 12 ἡμέρας, διὰ νὰ τελειώσουν 105 μέτρα ἑνὸς ἔργου· εἰς πόσας ἡμέρας 10 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην θὰ τελειώσουν 240 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ἔργου;

368) Σιδηρόδρομος λαμβάνει 24 δραχμὰς πρὸς μεταφορὰν ἐμπορευμάτων βάρους 1 τόνου εἰς ἀπόστασιν 80 χιλιομέτρων· πόσους τόνους πρέπει νὰ μεταφέρῃ εἰς ἀπόστασιν 120 χιλιομέτρων, διὰ νὰ λάβῃ 300 δραχ.;

369) Στοιχειοθέτης ἐργαζόμενος 10 ὥρας καθ' ἡμέραν στοιχειοθετεῖ εἰς 4 ἡμέρας 60 σελίδας ἑνὸς βιβλίου· εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ στοιχειοθετήσῃ 200 σελίδας ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἑκάστην;

370) Δίδομεν 90 δρχ. κάθε ἑβδομάδα εἰς 5 ἐργάτας ἐργαζομένους 8 ὥρας κάθε ἡμέραν· πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν εἰς 14 ἐργάτας ἐργασθέντας $9\frac{1}{2}$ ὥρας κάθε ἡμέραν καὶ ἐπὶ 4 ἡμέρας;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

371) Ἐργάται 20 ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐξετέλεσαν εἰς 6 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς ἔργου· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 7 ἡμέρας;

372) Ὑφάσματος πλάτους 1 πήχ. 5 ρουπ. οἱ 30 πήχ. 3ρούπ· ἀξίζουν 140 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 30,20 μέτρ. ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος ἔχοντος πλάτος 1,40 μέτρ.;

373) Ἠγοράσαμεν δύο τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος· τὸ μὲν πρῶτον ἔχον μῆκος 6 πήχεων καὶ πλάτος $1\frac{1}{2}$ πήχ. ἠγοράσθη ἀντὶ 300 δραχμῶν, τὸ δὲ δεύτερον ἔχον μῆκος 3μ, 726 καὶ πλάτος 1 μ, 458 ἠγοράσθη ἀντὶ 320 φράγκων· ποῖον τῶν δύο τεμαχίων εἶνε τὸ εὐθυνότερον, ἂν ἡ ἀγοραία τιμὴ τοῦ φράγκου εἶνε δραχ. 1,10;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Προβλήματα τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν.

181. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν τιμὴν ἑνὸς ποσοῦ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν 100 ἄλλου ποσοῦ ἀναλόγου πρὸς τὸ πρῶτον, λέγεται *τόσον τοῖς ἑκατόν*. Διὰ τοιούτου ἀριθμοῦ συνήθως λαμβάνομεν τὴν ἔννοιαν τῆς σχέσεως δύο ποσῶν ἀναλόγων· ἂν π. χ. ἐκ τῆς πωλήσεως ἐμπορεύματος ἀξίας 300 δρχ. προέκυψε κέρδος 27 δραχμῶν, εἰς μέρος τοῦ ἐμπορεύματος ἔχον ἀξίαν 100 δραχμῶν ἀναλογεῖ προδήλως τὸ τρίτον τοῦ ὅλου κέρδους, ἤτοι 9 δραχμαί, καὶ τότε λέγομεν ὅτι τὸ κέρδος εἶνε 9 τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος, συντόμως δὲ γράφομεν 9 $^0/_0$.

Παραδείγματα τοιούτων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα εὐκόλως λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἔστωσαν τὰ ἑξῆς·

Πρόβλημα Ι.—Ἠγόρασέ τις ἔπιπλον καὶ τὸ ἐπώλησε 120 δραχμάς, οὕτω δὲ ἐζημιώθη 20 $^0/_0$· ἀντὶ πόσων δραχμῶν τὸ ἠγόρασεν;

Λύσις·

Αἱ 100 δρχ. ἀγορᾶς ἀντιστοιχοῦν πρὸς 100—20 δρχ. πωλήσεως
χ » » » » 120 » »

εἶνε ἄρα $\chi = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{120}{100-20} = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{120}{80} = 150 \text{δρχ.}$

Πρόβλημα ΙΙ.—Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 15 $^0/_0$· πόσον πωλεῖ ἓν ἐπανωφόριον ἀξίας 80 δραχμῶν;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις·

Πρᾶγμα ἀξίας 100 δρχ. τὸ πωλεῖ 100 + 15 δρχ.

» » 80 » » » $\chi = 115$ δρχ. $\times \frac{80}{100} = 92$ δρχ.

Πρόβλημα III. — Ἔμπορος ἠγόρασε ἐμπορεύματα ἀντὶ 12548 δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε πρὸς τούτοις εἰς τὸν παραγγελιοδόχον προμήθειαν[1] $\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας των· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὰ ἐμπορεύματα ταῦτα διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 15 %;

Λύσις. — Ἀγορὰ ..... 12 548 δρχ.

Προμήθεια πρὸς $\frac{1}{2}$ % .... 62,74 »

Πληρωθεῖσαι ἐν ὅλῳ δρχ..... 12 610,74

Κέρδος 15 % { 10 ..... 1 261,074
5 630,537

Ζητουμένη πώλησις 14 502,351

Ἐπεξήγησις. — Εἰς ἐπιβάρυνσιν α % ἐπί τινος ἀξίας πολλαπλασιάζομεν ταύτην ἐπὶ α καὶ γράφομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ γινομένου κάτωθι τοῦ πολλαπλασιαστέου δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

---

1) Ὁ προμηθεύων εἰς τοὺς ἐμπόρους ἐμπορεύματα ἔκ τινος μεγάλου Εὐρωπαϊκοῦ καταστήματος λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν ὡρισμένον ποσὸν δραχμῶν ἐπὶ τῆς ἀξίας 100 δρχ. τοῦ ἐμπορεύματος· ἡ ἀμοιβὴ αὕτη λέγεται *προμήθεια*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

374) Εἰς τὸν ἀγοράζοντα τοῖς μετρητοῖς γίνεται ἔκπτωσις [1] 3,75 $^0/_0$· τίς ἡ ἀξία πράγματος οὕτω πωληθέντος ἀντὶ δραχμῶν 157,86;

375) Ἡ ὁκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει δραχμὰς 1,80· πόσον πρέπει νὰ πωλῆται διὰ νὰ φέρῃ κέρδος 10 $^0/_0$;

376) Αἱ 4 δραχμαὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν τῶν 200 δραχμῶν εἶνε;
Αἱ 500 δραχμαὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν τῶν 3000 δρχ. εἶνε;

377) Πωλῶν τις ἐμπορεύματα ἀξίας 60 δρχ. ἀντὶ 50 δρ. πόσον τοῖς ἑκατὸν ζημιοῦται;

378) Εἰς ἔμπορον ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 12 δραχμάς· πόσον πρέπει νὰ τὸν πωλῇ διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 25 $^0/_0$;

379) Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ὡρολογοποιὸς πωλήσας ἀντὶ 60 δραχμῶν ὡρολόγιον ἀξίας 50 δραχμῶν;

380) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα 363 δραχμῶν καὶ ἐγένετο εἰς τὴν ἀξίαν τούτων ἔκπτωσις 3 $^0/_0$· πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν;

Προβλήματα τόκου (ἁπλοῦ).

182. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἐκεῖνος, ὅστις δανείζει εἰς ἄλλον χρηματικόν τι ποσόν. Τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται *κεφάλαιον*.

Εἰς τοιαύτας συναλλαγὰς ὁρίζεται ὁ τόκος ὡρισμένου κεφαλαίου εἰς ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας

---

[1]) Ἡ ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑνὸς ἐμπορεύματος γινομένη ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου ἐλάττωσις λέγεται *ἔκπτωσις*· τοιαύτην ἔκπτωσιν κάμνει ὁ ἔμπορος, εἴτε ὅταν θέλῃ νὰ ἐκποιήσῃ παλαιὰν προμήθειαν, εἴτε ὅταν εὑρίσκῃ ἀγοραστὴν μεγάλης ποσότητος ἐκ τῶν ἐμπορευμάτων πληρώνοντα ἀμέσως τὴν ἀξίαν των.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ δανειζομένου, ὁ τόκος δὲ οὗτος λέγεται *ἐπιτόκιον*, καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τούτου λογίζεται ὁ τόκος τοῦ ὅλου κεφαλαίου εἰς τὸν χρόνον καθ' ὃν τοκίζεται τὸ κεφάλαιον τοῦτο. Συνήθως ὡς ἐπιτόκιον λαμβάνεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν, γενικῶς 100 μονάδων, εἰς 1 ἔτος· π. χ. ἂν συμφωνηθῇ αἱ 100 δραχμαὶ νὰ φέρουν ὡς τόκον 8 δραχμὰς εἰς 1 ἔτος, τότε τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 8 δραχμαὶ καὶ τὸ δάνειον λέγεται ὅτι ἐγένετο πρὸς 8 %.

Ὁ τόκος εἶνε *ἁπλοῦς*, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένει ἀμετάβλητον καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· ἐὰν ὅμως εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους δὲν λαμβάνῃ ὁ δανείσας τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου, ἀλλ' ἀφίνῃ αὐτὸν νὰ ἑνωθῇ μετὰ τοῦ κεφαλαίου καὶ νὰ δίδῃ καὶ οὗτος τόκον εἰς τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα, τότε λέγομεν ὅτι τὸ δάνειον γίνεται μὲ *σύνθετον τόκον*, ἢ ὅτι τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον *ἀνατοκίζεται*. Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰ προβλήματα τοῦ αὐτοῦ τόκου.

183. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου θεωροῦνται τὰ ἑξῆς τέσσαρα ποτά: α') τὸ κεφάλαιον, β') ὁ χρόνος, καθ' ὃν τὸ κεφάλαιον μένει ἐν δανείῳ, γ') τὸ ἐπιτόκιον καὶ δ') ὁ τόκος.

Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι:

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν ποσῶν, καὶ ὅτι ἀνὰ δύο τὰ ποσὰ κεφάλαιον, χρόνος καὶ ἐπιτόκιον εἶνε ἀντίστροφα.

Ὅταν δοθῶσι τρία τῶν ποσῶν τούτων, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τέταρτον διὰ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν· πρὸς τοῦτο, ἐὰν παραστήσωμεν τὸ κεφάλαιον διὰ Κ, τὸν χρόνον διὰ Χ, τὸ ἐπιτόκιον διὰ Ε καὶ τὸν τόκον διὰ Τ, θὰ ἔχωμεν διὰ πᾶν πρόβλημα τοῦ τόκου τὴν ἑξῆς διάταξιν:

κεφάλαιον	χρόνος	τόκος	
100	1	Ε	
Κ	Χ	Τ	(Π)

Ἂν ἤδη διαδοχικῶς θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστα τὸν τόκον,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸν χρόνον καὶ τὸ κεφάλαιον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα (180)

$$T = \frac{E.\ K.\ X}{100} \qquad (1)$$

$$X = \frac{100.\ T}{K.\ E} \qquad (2)$$

$$K = \frac{100.\ T}{X.\ E} \qquad (3)$$

Τέλος διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ E, ἐκτελοῦμεν ἀντιμετάθεσιν τῶν δύο σειρῶν τοῦ πίνακος (Π) καὶ λαμβάνομεν

$$E = \frac{100.\ T}{K.\ X} \qquad (4)$$

184. Αἱ τέσσαρες ἰσότητες (1) — (4) λέγονται *τύποι*, διότι συμβολικῶς δεικνύουν, ποῖαι πράξεις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν, ὅταν δοθῶσι τρία τῶν ποσῶν K, X, E, T καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τέταρτον· βλέπομεν δέ, *ὅτι ὁ μὲν τόκος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑκατοστὸν τοῦ γινομένου τῶν τριῶν ἄλλων ἀριθμῶν, ἕκαστος δὲ τῶν τριῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ τόκου διαιρεθέντος διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν.*

Πρόβλημα.—Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 1530 δραχμῶν εἰς 200 ἡμέρας πρὸς 8 $^0/_0$;

Εἰς τὸν τύπον (1) θέτομεν $K = 1530$, $E = 8$ καὶ $X = \frac{200}{360}$ (διότι ἡ μονὰς 1 τοῦ πίνακος (Π) ἀναφέρεται εἰς τὸ ἔτος καὶ αἱ 200 ἡμέραι εἶνε τὰ $\frac{200}{360}$ τοῦ ἔτους[1]) καὶ λαμβάνομεν :

---

[1]) Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θεωροῦμεν τὸ ἔτος ἀποτελούμενον ἐκ 360 ἡμερῶν καὶ τὸν μῆνα ἐκ 30 ἡμερῶν· καὶ τοῦτο διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν λογισμῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$T = \frac{1530 \times 8 \times \frac{200}{360}}{100} \text{ δρχ.} = \frac{1530 \times 8 \times 200}{36000} \text{ δρχ.} = \frac{153 \times 8 \times 2}{36}$$

$$\text{δρχ.} = \frac{17 \times 8 \times 2}{4} \text{ δρχ.} = 17 \times 2 \times 2 \text{ δρχ.} = 68 \text{ δρχ.}$$

Ὁ ζητούμενος ἄρα τόκος εἶνε δραχμαὶ 68.

Πρόβλημα.— *Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1530 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 8 % δίδει τόκον 68 δραχμάς;*

Εἰς τὸν τύπον (2), ὅστις ἀναφέρεται εἰς τὸ ἔτος, θέτομεν T=68, K=1530, E=8 καὶ εὑρίσκομεν:

$$X = \frac{100 \times 68}{1530 \times 8} \text{ ἔτη} = \frac{680}{153 \times 8} \text{ ἔτ.} = \frac{85}{153} \text{ ἔτ.} = \frac{85 \times 360}{153} \text{ ἡμ.}$$

$$= \frac{85 \times 40}{17} \text{ ἡμ.} = 5 \times 40 \text{ ἡμ.} = 200 \text{ ἡμέραι.}$$

Πρόβλημα. *Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % κατ' ἔτος φέρει εἰς 200 ἡμέρας 68 δραχμὰς τόκον;*

Εἰς τὸν τύπον (3) θέτοντες T=68, $X = \frac{200}{360}$, E = 8 εὑρίσκομεν:

$$K = \frac{100 \times 68}{\frac{200}{360} \times 8} \text{ δρχ.} = \frac{6800 \times 360}{200 \times 8} \text{ δρχ.} = \frac{68 \times 360}{2 \times 8} \text{ δρχ.}$$

$$= 34 \times 45 \text{ δρχ.} = 1530 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα.— *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 12500 δραχμαὶ φέρουν εἰς 3 μῆνας τόκον 200 δραχμῶν;*

Εἰς τὸν τύπον (4) θέτοντες T=200, K=12500 καὶ $X = \frac{3}{12}$ ἢ $\frac{1}{4}$, (διότι 3 μῆνες εἶνε τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ἔτους) λαμβάνομεν:

$$E = \frac{100 \times 200}{12500 \times \frac{1}{4}} = \frac{800}{125} = \frac{160}{25} = \frac{32}{5} = 6{,}4\ \%.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα νὰ λυθῶσι καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀσκήσεις.

381) *Ὁ ἐτήσιος τόκος κεφαλαίου τινὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

Παρατήρησις I.—Ὅταν τὸ κεφάλαιον εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἑκατοντάδων δραχμῶν, ὁ τόκος εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον· π. χ. ὁ ἐτήσιος τόκος 2400 δρχ. πρὸς 4 $^0/_0$ εἶνε $24 \times 4 = 96$ δρχ.

Παρατήρησις II·—Ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 5 $^0/_0$, ὁ τόκος εἶνε τὸ εἰκοστὸν τοῦ κεφαλαίου, ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ δεκάτου τοῦ κεφαλαίου.

382) *Ὁ τόκος κεφαλαίου εἰς ἀριθμόν τινα μηνῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μηνῶν, ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο διαιρεθῇ διὰ* 1200.

383) Ὁ τόκος κεφαλαίου εἰς ἀριθμόν τινα ἡμερῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον κεφαλαίου, ἐπιτοκίου καὶ ἀριθμοῦ ἡμερῶν, ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο διαιρεθῇ διὰ 36000.

384) Ἀπὸ στόματος νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐτήσιος τόκος 400 δρχ. πρὸς 4,50 $^0/_0$.

385) Ἀπὸ στόματος νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος 6000 δρχ. πρὸς 5 $^0/_0$ εἰς 6 μῆνας.

386) Ἀπὸ στόματος νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος 1, 2, 3, 4 κ.τ.λ. δραχμῶν εἰς 1 μῆνα πρὸς 12 $^0/_0$ καὶ νὰ εὑρεθῇ πρακτικὸς κανὼν τῆς εὑρέσεως τούτου.

387) Ἀπὸ στόματος νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος 800 δραχμῶν εἰς 5 μῆνας πρὸς 6 $^0/_0$.

388) Κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 4,50 $^0/_0$ φέρει ἐτησίως τόκον 54 δρχ.· πόσον εἶνε τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

389) Κεφάλαιον 200 δρχ. φέρει ἐτησίως τόκον 9 δρχ.· ποῖον τὸ ἐπιτόκιον;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

390) Εἰς πόσον χρόνον 4000 δρχ. πρὸς 4,50 % φέρουν 360 δρχ. τόκον;

391) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι πρὸς 4,50 % διπλασιάζεται; ἤτοι ὁ τόκος γίνεται ἴσος πρὸς τὸ κεφάλαιον;

392) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του διὰ 40000 δρχ. ἐπὶ πενταετίαν πρὸς $1\frac{1}{2}$ τοῖς χιλίοις· πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ;

393) Πόσον θὰ γίνουν 738 δρχ., ὅταν αὐξηθῶσι κατὰ τοὺς τόκους των πρὸς 4 % εἰς 9 μῆνας;

Ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 9 μῆνας εἶνε 0,03 δρχ. ὥστε μία δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου γίνεται 1,03 δρχ.

Ἡ λύσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶνε $1,03 \times 738 = 760$ δρ., 14.

Προβλήματα ὑφαιρέσεως.

185. Συνήθως ὁ ἐμπορευόμενος δὲν καταβάλλει ἀμέσως τὴν ἀξίαν τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα κατὰ παραγγελίαν ἔλαβε ἀπό τινος μεγάλου ἐμπορικοῦ καταστήματος, ἀλλὰ δίδει εἰς τὸν πωλητὴν ἀποδεικτικόν τι ἔγγραφον, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐνυπογράφως ὑπόσχεται, ὅτι μετὰ παρέλευσιν 1, ἢ 2, ἢ 3 μηνῶν, ἐνίοτε δὲ καὶ μετὰ παρέλευσιν μεγαλυτέρου χρόνου, θὰ ἐξοφλήσῃ τὴν ἀξίαν τῶν πραγμάτων, ἅτινα ἠγόρασεν.

Τὸ ἀποδεικτικὸν τοῦτο ἔγγραφον λέγεται *γραμμάτιον*.

Ἐὰν ὁ κάτοχος τοιούτου γραμματίου ἔχῃ ἀνάγκην χρημάτων, δύναται νὰ πωλήσῃ αὐτὸ εἴς τινα τραπεζιτικὸν οἶκον, οἱανδήποτε θελήσῃ ἡμέραν πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου δίδει εἰς τὸν πωλοῦντα αὐτὸ οὐχὶ ὅλον τὸ ποσὸν τὸ ἀναγραφόμενον εἰς τὸ γραμμάτιον, ἀλλ' ἠλαττωμένον κατὰ τὸν τόκον αὐτοῦ εἰς χρόνον ἴσον πρὸς τὸν μεσολαβοῦντα μεταξὺ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως καὶ τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου καὶ μὲ ἐπιτόκιον ὁριζόμενον κατὰ προηγουμένην συμφωνίαν τοῦ πωλοῦντος καὶ ἀγοράζοντος τὸ γραμμάτιον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ποσότης, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκπίπτει ἡ ἀξία ἑνὸς γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας λέγεται *ὑφαίρεσις* (σκόντο).

Τὸ ἀνεγεγραμμένον εἰς τὸ γραμμάτιον ποσὸν λέγεται *μέλλουσα ἀξία ἢ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.*

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι τὰ προβλήματα ἐν γένει τῆς ἐμπορικῆς ὑφαιρέσεως (ἐκτὸς ἐλαχίστων ἐξαιρέσεων) εἶνε προβλήματα τόκου, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ λέξις *τόκος* ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς λέξεως *ὑφαίρεσις.*

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

394) Γραμμάτιον 600 δρχ. ἐξαργυροῦται 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 6 $^0/_0$· πόση εἶνε ἡ ὑφαίρεσις;

$$\text{Ὑφαίρεσις} = \frac{600 \times 80 \times 6}{100 \times 360} \text{ δρ.} = 8 \text{ δρχ.} \qquad (\S\ 184)$$

Ὁ ἀγοράζων ἄρα τὸ γραμμάτιον θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν πωλητὴν αὐτοῦ δραχμὰς 600—8, ἤτοι 592 δραχμάς.

395) Ἐπὶ γραμματίου ἐξαργυρωθέντος 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας πρὸς 6 $^0/_0$ ἐγένετο ὑφαίρεσις 8 δραχμῶν· πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

$$\text{Ὀνομαστ. ἀξία} = \frac{100 \times 8 \times 360}{80 \times 6} \text{ δρχ.} = 600 \text{ δραχμαί.} \ (\S 184)$$

396) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 600 δραχμῶν ἐξαργυρωθέντος 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας ἀντὶ δραχμῶν 592;

Ὑφαίρεσις = 600—592 ἤτοι 8 δρχ. (τόκος 600 δρχ.).

$$\text{Ὅθεν} \quad \chi\ ^0/_0 = \frac{100 \times 8 \times 360}{600 \times 80} = 6\ ^0/_0. \qquad (\S\ 184).$$

397) Γραμμάτιον 600 δραχμῶν ἐξηργυρώθη μὲ ὑφαίρεσιν 8

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δραχμῶν πρὸς 6 $^0/_0$· πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως; τῆς προθεσμίας ἐγένετο ἡ ἐξαργύρωσις;

$$\text{Χρόνος προεξοφλήσεως} = \frac{100 \times 8}{600 \times 6} \text{ἔτη} = 80 \text{ ἡμ.} \qquad (\S\ 184).$$

398) Γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 80 ἡμέρας ἐξηργυρώθη σήμερον ἀντὶ δραχμῶν 592 πρὸς 6 $^0/_0$· τίς ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τούτου;

Ἡ ὑφαίρεσις 100 δρχ. διὰ 360 ἡμ. εἶνε.... 6 δρχ.

» » » » » 1 » » .... $\frac{6}{360}$ »

» » » » » 80 » » .... $\frac{6 \times 80}{360}$ »

Διὰ γραμμάτιον ἄρα 100 δραχμῶν ἐξαργυρούμενον 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας πρὸς 6 $^0/_0$ γίνεται κράτησις δραχμῶν $\frac{6 \times 80}{360}$, ἤτοι $\frac{4}{3}$ τῆς δραχμῆς· ὥστε ὁ πωλητὴς τοιούτου γραμματίου θὰ λάβῃ δραχμάς:

$$100 - \frac{4}{3}, \text{ ἤτοι } \frac{296}{3} \text{ δρχ.}$$

Μετὰ τὴν βοηθητικὴν ταύτην ἐργασίαν εὐκόλως λύεται τὸ πρόβλημα διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

Γραμμάτιον ἐξαργυρούμενον ἀντὶ $\frac{296}{3}$ δρ. ἔχει ὀνομ. ἀξίαν 100 δρ.

» » » 592 » » » » $100 \times \frac{592}{\frac{296}{3}}$.

$$\text{Ὅθεν } \chi = \frac{100 \times 592 \times 3}{296} \text{δρχ} = \frac{100 \times 2 \times 3}{1} \text{δρχ.} = 600 \text{ δρ.}$$

399) Γραμμάτιον 900 δραχμῶν ἐξαργυροῦται 40 ἡμέρας πρὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6 % καὶ προμήθειαν [1]) 0,5 %· ποία εἶνε ἡ ὁλικὴ κράτησις;

$$\text{Ὑφαίρεσις} = \frac{900 \times 40 \times 6}{100 \times 360} = 6 \text{ δρχ. Προμήθεια} = \frac{900 \times 0,5}{100}$$

$= 4,50$ δρχ.

Ἡ ὁλικὴ ἄρα κράτησις εἶνε δραχμαὶ $6 + 4,50 = 10,50$ δρχ.

400) Νὰ καταστρωθῇ ὁ λογαριασμὸς τῆς πληρωμῆς δύο γραμματίων ἐξαργυρωθέντων σήμερον πρὸς 5 % καὶ προμήθειαν 0,5 % ὅταν τὸ πρῶτον γραμμάτιον ἐκ 450 δρχ. λήγῃ μετὰ 20 ἡμέρας καὶ τὸ δεύτερον ἐκ 540 δραχμῶν λήγῃ μετὰ 2 μῆνας.

401) Τρία γραμμάτια, τὸ μὲν 2400 δραχμῶν λῆγον τὴν 10ην Ἀπριλίου, τὸ δὲ 1800 δραχμῶν λῆγον τὴν 20ην τοῦ ἰδίου μηνός, τὸ δὲ 1500 δραχμῶν λῆγον τὴν 30ην τοῦ ἰδίου μηνός, πρόκειται νὰ ἀντικατασταθῶσι δι' ἑνὸς μόνον γραμματίου· πότε θὰ λήγῃ τὸ νέον γραμμάτιον;

Ὁ κάτοχος τῶν γραμματίων, ἂν κρατήσῃ τὸ πρῶτον ἐπὶ 10 ἀκόμη ἡμέρας θὰ λάβῃ τόσον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανεν ἐκ δεκαπλασίου κεφαλαίου εἰς 1 ἡμέραν· τὸ κεφάλαιον δὲ τοῦτο θὰ εἶνε ..... 2400×10 δρχ.

Ὁμοίως κρατῶν 1800 δρχ. ἐπὶ 20 ἡμέρας λαμβάνει τόσον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανεν ἐκ κεφαλαίου εἰκοσαπλασίου εἰς 1 ἡμέραν, ἤτοι ἐκ κεφαλαίου ..... 1800×20 δρχ.

Ὁμοίως ὁ τόκος, ὃν κερδίζει ἀπὸ τὰς 1500 δραχμὰς ἐπὶ 30 ἡμέρας ἰσοῦται πρὸς τὸν τόκον μιᾶς ἡμέρας τριακονταπλασίου κεφαλαίου, ἤτοι κεφαλαίου ..... 1500×30 δρχ.

Ὥστε ἐκ τῶν κεφαλαίων $2400 + 1800 + 1500$ κερδίζει τό-

---

[1]) Ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου διαπραγματεύεται συνήθως τὴν πώλησιν αὐτοῦ διὰ μεσίτου πρὸς εὕρεσιν συμφερούσης προσφορᾶς. Ὁ μεσίτης τότε λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν ὡρισμένον ποσοστὸν τοῦ κεφαλαίου τοῦ γραμματίου ἀνεξάρτητον τοῦ χρόνου τῆς λήξεως, ὅπερ λέγεται *προμήθεια*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σας δραχμάς, ὅσας θὰ ἐκέρδιζεν εἰς 1 ἡμέραν ἐκ τῶν κεφαλαίων $2400 \times 10 + 1800 \times 20 + 1500 \times 30$· θὰ τὰς κερδίζῃ ἄρα εἰς τόσας ἡμέρας, ὅσον εἶνε τὸ πηλίκον:

$$\frac{2400 \times 10 + 1800 \times 20 + 1500 \times 30}{2400 + 1800 + 1500}.$$

Ὁ ζητούμενος ἄρα ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῆς λήξεως τοῦ νέου γραμματίου, ὅστις λέγεται χρόνος μέσης λήξεως, εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα:

Πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἑκάστου γραμματίου ἐπὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα χρόνον τῆς λήξεως, προσθέτομεν τὰ εὑρισκόμενα γινόμενα καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀνομαστικῶν ἀξιῶν τῶν γραμματίων.

Τὸ πηλίκον δεικνύει τὸν ζητούμενον χρόνον ἀναφερόμενον εἰς τὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται οἱ χρόνοι τῆς λήξεως τῶν γραμματίων.

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

186. *Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι ἄλλων ἰσοπληθῶν, ὅταν οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ τἀνάπαλιν οἱ δεύτεροι ἐκ τῶν πρώτων, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πάντων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Π. χ. οἱ ἀριθμοί 10, 14, 12, 8,
εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν ..... 5, 7, 6, 4·
διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων διὰ πολλαπλασιασμοῦ πάντων τούτων ἐπὶ 2· τἀνάπαλιν δὲ οἱ δεύτεροι προκύπτουν ἐκ τῶν πρώτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ πάντων τούτων ἐπὶ $\frac{1}{2}$. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἕκαστος τῶν πρώτων ἔχει πρὸς τὸν ἀντιστοιχοῦντα τῶν δευτέρων τὸν αὐτὸν λόγον· ἤτοι εἶνε·

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4}\cdot \text{ καὶ τἀνάπαλιν·}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{6}{12} = \frac{4}{8}.$$

Σημειωτέον ὅτι· ***ὅταν δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι ἄλλων ἰσοπληθῶν ἀριθμῶν, θὰ εἶνε ἀνάλογοι καὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων αὐτῶν.*** Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παραδειγμα οἱ πρῶτοι τῶν ἀριθμῶν 10, 14, 12, 8 εἶνε ἀνάλογοι πριδήλως καὶ τῶν ἀριθμῶν 5×5, 7×5, 6×5, 4×5, (οἵτινες εἶνε τὰ πενταπλάσια τῶν δευτέρων), καὶ ἐν γένει τῶν γενομένων $5.\chi$, $7.\chi$, $6.\chi$, $4.\chi$, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶνε ὁ ἀριθμὸς χ.

Πρόβλημα.—***Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 8.***

Ἐπειδὴ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 4, 6, 8 εἶνε ἀνάλογοι ἐν γένει οἱ ἀριθμοὶ $4.\chi$, $6.\chi$, $8.\chi$, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶνε ὁ ἀριθμὸς χ, διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς ἁρμόζοντας εἰς τὸ πρόβλημα ἀριθμούς, θὰ ζητήσωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὸν χ τοιουτοτρόπως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων $4.\chi+6.\chi+8.\chi$ νὰ ἀποτελῇ τὸν μεριστέον ἀριθμὸν 360, ἤτοι νὰ εἶνε·

$$4.\chi + 6.\chi + 8.\chi = 360$$

$$\text{ἢ}\quad (4 + 6 + 8).\chi = 360.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀγνώστου χ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $4 + 6 + 8$ θὰ εἶνε 360, ὁ ἄγνωστος χ θὰ εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ 360 διὰ $4 + 6 + 8$, ἤτοι θὰ εἶνε·

$$\chi = \frac{360}{4+6+8}.$$

Οἱ ζητούμενοι ἄρα ἀριθμοί, οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα, εἶνε·

$$4 \times \frac{360}{4+6+8},\quad 6 \times \frac{360}{4+6+8},\quad 8\times \frac{360}{4+6+8}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών·

187. ***Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν τελευταίων τούτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεριζομένου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν ἀριθμῶν, πρὸς οὓς ἀναλόγως μερίζεται.

Σημ.—Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ εὑρισκόμενοι εἰς τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων εἶνε ἀνάλογοι ὄχι μόνον πρὸς τοὺς δοθέντας, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐκείνους, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως πάντων τῶν δοθέντων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν πράξεων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν μερισμὸν τοῦ 360 ἀναλόγως τῶν ἁπλουστέρων ἀριθμῶν 2, 3, 4, οὓς εὑρίσκομεν ἐκ τῶν δοθέντων 4, 6, 8 διὰ διαιρέσεως πάντων τούτων διὰ 2. Οὕτω κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν·

$$\alpha' \text{ μερίδιον} = 2\times\frac{360}{2+3+5} = 2\times\frac{360}{9} = 2\times 40 = 80,$$

$$\beta' \quad » \quad = 3\times\frac{360}{2+3+5} = 3\times\frac{360}{9} = 3\times 40 = 120,$$

$$\gamma' \quad » \quad = 4\times\frac{360}{2+3+5} = 4\times\frac{360}{9} = 4\times 40 = 160,$$

Ἄθροισμα μεριδίων..... 360

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν.

188. *Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ὅταν εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων πρὸς αὐτοὺς ἀριθμῶν.*

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 10, 14, 12, 8

εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθ. $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$

διότι οἱ πρῶτοι εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 5, 7, 6, 4

οἵτινες εἶνε ἀντίστροφοι πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δευτέρας σειρᾶς. Τἀνάπαλιν οἱ τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς·

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{8}.$$

Πρόβλημα.—*Νὰ μερισθῇ ὁ 600 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* 2, 3, $\frac{2}{5}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ζητούμενα τρία μερίδια, ἐκτελοῦμεν τὸν μερισμὸν τοῦ 600 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν·

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{2}, \qquad (\alpha)$$

οἱ ὁποῖοι εἶνε ἀντίστροφοι πρὸς τοὺς δοθέντας 2, 3, $\frac{2}{5}$. Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν δὲ τῶν πράξεων ἐκτελοῦμεν τὸν μερισμὸν ἀναλόγως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

3, 2, 15

οἵτινες εἶνε ἑξαπλάσιοι τῶν (α). Οὕτω κατὰ τὸν τεθέντα κανόνα (§ 187) θὰ ἔχωμεν·

$$\begin{array}{lll}
\alpha^{ον}\ \text{μερίδιον}\ldots\ldots & 3\times\dfrac{600}{3+2+15}=3\times\dfrac{600}{20}= & 90 \\
\beta^{ον}\quad\ \text{»}\quad\ldots\ldots & 2\times\dfrac{600}{3+2+15}=2\times\dfrac{600}{20}= & 60 \\
\gamma^{ον}\quad\ \text{»}\quad\ldots\ldots & 15\times\dfrac{600}{3+2+15}=15\times\dfrac{600}{20}= & 450 \\
\text{Ἄθροισμα μεριδίων}\ldots\ldots & & \overline{600.}
\end{array}$$

Τὰ εὑρεθέντα μερίδια 90, 60, 450 εἶνε προδήλως ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, $\frac{2}{5}$, ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$· ἤτοι εἶνε: $\dfrac{90}{\frac{1}{2}}=\dfrac{60}{\frac{1}{3}}=\dfrac{450}{\frac{5}{2}}=180.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Παρατήρησις.—Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας γράψωμεν ὡς ἑξῆς :

$$90\times2=60\times3=450\times\frac{2}{5}$$

παρατηροῦμεν ὅτι :

Ὅταν μερισθῇ ἀριθμός τις εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς, τότε τὸ γινόμενον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον μερίδιον εἶνε τὸ αὐτό.

Προβλήματα ἑταιρίας.

189. *Προβλήματα ἑταιρίας* λέγονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μερισθῇ κέρδος ἢ ζημία μεταξὺ τῶν συνεταίρων ἑταιρίας τινός.

Θὰ δείξωμεν ἐνταῦθα, ὅτι πᾶν πρόβλημα ἑταιρίας εἶνε πρόβλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

Πρόβλημα Α'.—*Τρεῖς ἔμποροι ἀνέλαβον ἐν ἑταιρίᾳ ἐπιχείρησίν τινα, εἰς τὴν ὁποίαν κατέβαλον συγχρόνως ὁ μὲν 2000 δραχμάς, ὁ δὲ 1800, ὁ δὲ 2500· ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης ἐκέρδησαν 1260 δραχμάς· πόσας δραχμὰς ἐκ τοῦ κέρδους τούτου δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἕκαστος ;*

Τὸ κατατεθὲν ὁλικὸν χρηματικὸν ποσὸν εἶνε 2000+1800+2500 δραχμαὶ καὶ ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου προκύπτει κέρδος 1260 δραχμαί. Δυνάμεθα ἄρα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἑκάστη δραχμὴ δίδει κέρδος $\frac{1260}{2000+1800+2500}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὅλων τῶν κεφαλαίων αἱ 2000 δρχ. ἀνήκουν εἰς τὸν πρῶτον συνεταῖρον, οὗτος δικαιοῦται νὰ λάβῃ 2000 φορὰς τὸ ἀνωτέρω κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ ζητούμενα μερίδια ἑκάστου τῶν συνεταίρων εἶνε :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦ $\alpha^{ου}$..... $\frac{1260 \times 2000}{2000+1800+2500} = 400$ δρχ.

Τοῦ $\beta^{ου}$..... $\frac{1260 \times 1800}{2000+1800+2500} = 360$ »

Τοῦ $\gamma^{ου}$..... $\frac{1260 \times 2500}{2000+1800+2500} = 500$ »

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι ποὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀοκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 187), καθ' ὃν μερίζεται τὸ κέρδος 1260 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κατατεθέντων κεφαλαίων ὑπὸ τῶν τριῶν συνεταίρων.

Σημ.—Ὅταν τὰ καταβαλλόμενα κεφάλαια εἶνε ἴσα, ἀλλὰ μένουν διαφόρους χρόνους ἐν τῇ ἑταιρίᾳ, τότε τὸ κέρδος εἶνε δίκαιον νὰ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν χρόνων.

Πρόβλημα Β'.—*Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 8000 δραχμῶν· μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε δεύτερον συνεταῖρον καταβαλόντα 5000 δραχμάς, 3 δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνεται καὶ τρίτος, ὅστις καταβάλλει 10000 δραχμάς. Διαλύσαντες δὲ τὴν ἑταιρίαν 2 ἔτη μετὰ τὴν ἔναρξιν, εὗρον ὅτι τὸ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως καθαρὸν κέρδος ἦτο 1440 δραχμαί· πόσον μέρος τοῦ κέρδους θὰ λαβῇ ἕκαστος;*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τοῦ πρώτου τὸ κεφάλαιον 8000 δραχμαὶ ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 24 μῆνας, τοῦ δευτέρου τὸ κεφάλαιον 5000 ἔμεινε 18 μῆνας καὶ τοῦ τρίτου τὸ κεφάλαιον 10000 ἔμεινε 15 μῆνας. Λέγω δὲ ὅτι τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων εἶνε ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας χρόνους, ἤτοι τῶν γινομένων

$$8000 \times 24, \qquad 5000 \times 18, \qquad 10000 \times 15 \qquad (\alpha)$$

Τῷ ὄντι, ἂν παραστήσωμεν διὰ κ τὸ κέρδος μιᾶς δραχμῆς μενούσης εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 1 μῆνα, τότε τὰ κέρδη, τὰ ὁποῖα δικαιοῦνται νὰ λάβωσιν οἱ τρεῖς ἔμποροι, εἶνε:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦ $\alpha^{ου}$ ..... $x \times 8000 \times 24$
Τοῦ $\beta^{ου}$ ..... $x \times 5000 \times 18$
Τοῦ $\gamma^{ου}$ ..... $x \times 10000 \times 15$·

τὰ κέρδη δὲ ταῦτα εἶνε ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν (α), διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων πάντων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν κ, ὅστις παριστάνει τὸ εἰς 1 δραχμὴν κέρδος μένουσαν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 1 μῆνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἄρα τὰ ζητούμενα μερίδια, μερίζομεν τὸ ὁλικὸν κέρδος (1440 δραχ.) *εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα* (α) *τῶν καταβληθέντων κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας χρόνους.*

Ἐκτελοῦντες δὲ κατὰ τὸν κανόνα (§ 187) τὸν μερισμὸν ἀναλόγως τῶν ἁπλουστέρων ἀριθμῶν

32, 15, 25

τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν διαιροῦντες πάντα τὰ γινόμενα (α) διὰ 6000, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ 640 δρχ., ὁ δεύτερος 300 καὶ ὁ τρίτος 500.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

402) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1317 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $2, \frac{5}{3}, \frac{1}{2}$.

403) Νὰ μερισθῇ ὁ 560 εἰς τέσσαρα μέρη, ὧν τὸ δεύτερον νὰ εἶνε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου μέρους, τὸ τρίτον τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου καὶ τὸ τέταρτον τριπλάσιον τοῦ τρίτου.

404) Πρὸς κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται 16 μέρη νίτρου, 3 ἄνθρακος καὶ 2 θείου· πόσας ὀκάδας θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης ὕλης διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν 100 ὀκάδας πυρίτιδος;

405) Δύο ἁμαξηλάται ἀνέλαβον ἀντὶ 489 δραχμῶν νὰ μεταφέρωσι σῖτον εἰς δύο διάφορα μέρη ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ τόπου τῆς φορτώσεως τὸ μὲν 15 στάδια, τὸ δὲ 11· μετέφερε δὲ ὁ μὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρῶτος 2000 κοιλὰ εἰς τὸ πρῶτον μέρος, ὁ δὲ δεύτερος 3200 κοιλὰ εἰς τὸ δεύτερον μέρος· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἂν ἡ πληρωμὴ εἶνε ἀνάλογος τῶν κοιλῶν, ἅτινα ἕκαστος μετέφερε, καὶ ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων, εἰς τὰς ὁποίας μετεφέρθη ὁ σῖτος;

406) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον 150 δρχ. διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου, εἰς τὸ ὁποῖον εἰργάσθησαν ὁ μὲν 8 ἡμέρας, ὁ δὲ 10, ὁ δὲ 12· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο τὸ αὐτὸ διὰ πάντας;

407) Τρεῖς ἔμποροι ἐν ἑταιρίᾳ κατέθεσαν ἐν ὅλῳ 20,000 δραχμάς· μετὰ 25 μῆνας ἐμοίρασαν τὸ προελθὸν κέρδος καὶ ἔλαβον, ὁ πρῶτος 441 δρχ., ὁ δεύτερος 672 καὶ ὁ τρίτος 987· πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ἑκάστου; (Ἐπειδὴ τὰ καταβληθέντα κεφάλαια εἶνε ἀνάλογα τῶν κερδῶν, εὐκόλως εὑρίσκονται τὰ ζητούμενα).

408) Δύο συνέταιροι κατέθεσαν ὁμοῦ 60000 δραχ.· ἐκ τούτων ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε κέρδος 7200 δρχ. ὁ δὲ δεύτερος 2400 δρχ. ὀλιγωτέρας ἢ ὁ πρῶτος· πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον ἑκάστου;

409) Δύο ποιμένες ἐνοικιάσαντες ἓν λειβάδιον ἀντὶ 800 δρχ. τὸ ἔτος ἔθρεψαν ὁ μὲν πρῶτος 60 πρόβατα ἐπὶ 4 μῆνας, ὁ δὲ δεύτερος 80 πρόβατα ἐπὶ 3 μῆνας· πόσας δρχ. θὰ πληρώσῃ ὁ καθείς;

410) Πλοῖόν τι ἀπωλέσθη, ἦτο δὲ ἠσφαλισμένον ἀντὶ 24000 λιρῶν· τὸ πλοῖον τοῦτο ἀνῆκεν εἰς τρεῖς, ὧν ὁ πρῶτος εἶχε τὸ $\frac{1}{2}$, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος δι' ἀποζημίωσιν ἐκ τῆς ἀσφαλιστικῆς ἑταιρίας;

411) Νὰ μερισθῶσι 50 000 δρχ. εἰς μίαν μητέρα, τὴν θυγατέρα αὐτῆς καὶ τοὺς τρεῖς υἱοὺς τοιουτοτρόπως, ὥστε ἡ μήτηρ νὰ λάβῃ ὅσα ὅλα ὁμοῦ τὰ τέκνα της, ἡ δὲ θυγάτηρ διπλάσια ἑκάστου τῶν υἱῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προβλήματα μίξεως.

190. Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως θὰ ἐξετάσωμεν κυρίως εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: α') ὅταν δίδωνται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, καὶ β') ὅταν δίδωνται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος ἑκάστου τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων, ὅταν ταῦτα εἶνε δύο, καὶ ζητεῖται, πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρου πρὸς σχηματισμὸν μίγματος ὡρισμένου, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς ἔχει ὡρισμένην τιμήν.

Παραδείγματα.

1) *Ἀνέμιξέ τις βούτυρον τριῶν ποιοτήτων· ἤτοι 120 ὀκ. τῶν 6 δρχ. ἡ ὀκᾶ, 150 ὀκ. τῶν 5,60 δρχ. ἡ ὀκᾶ καὶ 100 ὀκ. τῶν 4,50 δρχ. ἡ ὀκᾶ· πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;*

Αἱ	120 ὀκ.	α'. ποιότ.	ἀξίζουν δρχ.	$6 \times 120 =$	720 δρχ.
»	150 »	β'. »	» »	$5,6 \times 150 =$	840 »
»	100 »	γ'. »	» »	$4,5 \times 100 =$	450 »

Ὅθεν 370 ὀκ. τοῦ μίγματος ἀξίζουν ..... 2010 δρχ.

καὶ ἡ 1 ὀκ. » » ἀξίζει ..... $\frac{2010}{370} = 5,43$ δρχ.

Σημείωσις.—Ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος ἑκάστου τῶν ἀναμιγνυομένων πραγμάτων ὑποστῶσι τὴν αὐτὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν, τότε καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος θὰ ὑποστῇ τὴν αὐτὴν μεταβολήν· ἂν π.χ. ἐσχημάτισέ τις μίγμα 100 ὀκ. βουτύρου λαβὼν διάφορα εἴδη βουτύρου καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου τῶν εἰδῶν ὑποτεθῇ ὅτι αὐξάνεται κατὰ 1 δραχμήν, τότε ἡ τῶν 100 ὀκ. τιμὴ τοῦ μίγματος αὐξάνεται κατὰ 100 δραχμάς, ἡ δὲ τιμὴ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ 1 δραχμήν. Τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παρατήρησιν ταύτην χρησιμοποιοῦμεν πρὸς λύσιν τῶν προβλημάτων μίξεως δευτέρου εἴδους, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν.

2) *Ἔχομεν δύο εἴδη ἀργύρου· τοῦ πρώτου εἴδους ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε* 0,800 [1]) *καὶ τοῦ δευτέρου* 0,900 *ἐὰν συγχωνεύσωμεν* 180 *δράμια τοῦ πρώτου μετὰ* 120 *δραμίων τοῦ δευτέρου, ποῖος θὰ εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ προελθόντας μεταλλικοῦ κράματος ;*

180 δρμ. α'. εἴδους περιέχ. $0{,}800 \times 180 = 144$ δρμ. καθ. ἀργ.
120 » β'. » » $0{,}900 \times 120 = 108$ » » »
300 δρμ. τοῦ κράματος περιέχουν..... 252 δρμ. καθ. ἀργ.
καὶ 1 δρμ. » » » ..... $\frac{252}{300}$ δρμ. καθ. ἀργ.

Ὁ βαθμὸς ἄρα καθαρότητος τοῦ κράμ. εἶνε 252 300=0,840.

3) *Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τις οἶνον τῶν* 65 *λεπτῶν ἡ ὀκᾶ μετὰ ὕδατος, διὰ νὰ ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος* 45 *λεπτά ;*

Τὰ 65 λεπτὰ εἶνε ἡ ἀξία..... 1 ὀκᾶς ἀκράτου οἴνου,
τὸ 1 λεπτὸν » » » ..... $\frac{1}{65}$ ὀκ. » »
τὰ 45 λεπτὰ » » » ..... $\frac{45}{65}$ ὀκ. » »

Τὴν 1 ἄρα ὀκᾶν τοῦ κράματος θὰ ἀποτελῶσι·

α') $\frac{45}{65}$ ὀκ. ἀκράτου οἴνου, ὧν ἡ ἀξία εἶνε 45 λεπτά, καὶ

β') $\frac{20}{65}$ ὀκ. ὕδατος, ὅπερ οὐδεμίαν ἀξίαν ἔχει.

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ λαμβανομένου οἴνου πρὸς τὸ ὕδωρ εἶνε 45:20.

4) *Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ συντήξωμεν βούτυρον τῶν*

---

[1]) Βαθμὸς καθαρότητος 0,800 σημαίνει ὅτι εἰς 1000 μέρη τοῦ μετάλλου τὰ 800 εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ 200 εἶνε ἄλλα μέταλλα εὐτελέστερα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6 δρχ. ἡ ὀκᾶ μὲ βούτυρον τῶν 5 δρχ. ἡ ὀκᾶ, διὰ νὰ σχηματίσωμεν βούτυρον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ δραχμὰς 5,40 ;

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὰ ἐν τῇ σημειώσει τοῦ πρώτου παραδείγματος λεχθέντα φανταζόμεθα ὅτι ἡ τιμὴ ἑκατέρου τῶν εἰδῶν ὑποβιβάζεται κατὰ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τῆς κατωτέρας ποιότητος, ἤτοι κατὰ 5 δρχ., ὁπότε καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος θὰ γίνῃ κατὰ 5 δρχ. μικροτέρα· οὕτω θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς ὅμοιον πρὸς τὸ ἀνωτέρω 3ον πρόβλημα·

«Κατὰ ποῖον λόγον θὰ ἀναμιχθῶσι δύο πράγματα, τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου ἀξίζει μίαν δραχμήν, ἤτοι 100 λεπτά, καὶ τοῦ δευτέρου οὐδεμίαν ἔχει ἀξίαν, διὰ νὰ σχηματισθῇ μίγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά ;

Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ αου πρὸς τὸ βον εἶνε 40 : 60 ἢ 2 : 3.

Ἐπαλήθευσις.

2 ὀκ. α'.	ποιότητος	ἀξίζουν	δρχ.	6×2 ἤτοι	12 δρχ.
3 ὀκ. β'.	»	»	»	5×3 »	15
5 ὀκ. μίγματος		»	»	.....	27
καὶ ἡ 1 »	»	»	»	.....	$\frac{27}{5}$=5,40 δρχ.

5) *Ἔχομεν οἶνον δύο ποιοτήτων· τοῦ τῆς αης ποιότητος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτὰ καὶ τῆς βας 50· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου διὰ νὰ σχηματίσωμεν 360 ὀκ. κράματος, οὗ ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά ;*

Ζητοῦμεν πρῶτον, ὡς καὶ εἰς τὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα, κατὰ τίνα λόγον θὰ γίνῃ ἡ ἀνάμιξις καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν ὀκάδων αης πρὸς βαν ποιότητα εἶνε 10 : 20 ἤτοι 1 : 2. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

0996 2 1992

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ 3 ὀκ. κράματος λαμβάνομεν 1 ὀκ. $α^{ου}$ καὶ 2 ὀκ. $β^{ου}$

» 1 ὀκ. » » $\frac{1}{3}$ ὀκ. $α^{ου}$ » $\frac{2}{3}$ ὀκ. $β^{ου}$

» 360 ὀκ. » » $\frac{360}{3}$ ὀκ. $α^{ου}$ » $\frac{720}{3}$ ὀκ. $β^{ου}$

Ἤτοι θὰ λάβωμεν :

Ἐκ τοῦ πρώτου 120 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου 240 ὀκάδας. (Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

412) Ἀνέμιξέ τις 36 ὀκ. οἴνου τῶν 90 λεπτῶν τὴν ὀκ. μετὰ 24 ὀκ. τῶν 80 λεπ. καὶ μετὰ 40 ὀκ. τῶν 1,20 δρχ.· πόσον θὰ πωλῇ τὴν 1 ὀκ. τοῦ κράματος ;

413) Μὲ τὰ ἀνωτέρω δεδομένα νὰ εὑρεθῇ, πόσον θὰ πωλῇ τὴν 1 ὀκ., ἵνα ἔχῃ κέρδος 40 $^0/_0$.

414) Συνεχώνευσέ τις 2,968 γραμ. χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,950 καὶ 1,542 γραμ. βαθ. καθαρ. 0,850 καὶ 3,640 γρμ. βαθ. καθαρ. 0,545· τίς ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος ;

415) Οἰνοπώλης ἔχει 1400 ὀκ. οἴνου πρὸς 60 λεπ. τὴν ὀκᾶν· ἐὰν ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ 100 ὀκ. ὕδατος, ποία θὰ εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος ;

416) Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἴνους τῶν 80 λεπτῶν καὶ τῶν 50 λεπ.· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα ἀποτελεσθῇ μίγμα 860 ὀκ. τῶν 65 λεπτῶν ;

417) Ἔχει τις βούτυρον δύο εἰδῶν τῶν 4,80 δρχ. καὶ τῶν 5,60 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα ἀποτελέσῃ μίγμα 40 ὀκ. τῶν 5 δραχμῶν ;

418) Νὰ ἀναμιχθῶσιν 60 δράμ. χρυσοῦ βαθ. καθαρ. 0,930 μετὰ καθαροῦ χρυσοῦ τόσου, ὥστε τὸ κράμα νὰ ἔχῃ βαθ. καθαρ. 0,950· πόσα δράμια καθαροῦ χρυσοῦ θὰ ληφθῶσι ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

191. Ἐν Ἐδαφίῳ (46) ἐμάθομεν, ὅτι τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτόν, καὶ ἐξηγήσαμεν τὴν σημασίαν τῶν ἐκθετῶν.

Εἶνε δηλονότι : $4^2 = 4 \times 4 = 16$, $40^2 = 40 \times 40 = 1600$,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25},$$

$$(0,6)^2 = 0,6 \times 0,6 = 0,36 \text{ κ.ο.κ.}$$

192. *Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Π. χ. 6 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36, διότι τοῦ 6 τὸ τετράγωνον εἶνε ὁ 36.

Ἡ ἐργασία, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ, λέγεται *ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης*.

Τὸ σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου δεικνύομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, εἶνε τόδε : $\sqrt{}$ Π. χ. τὸ σύμβολον $\sqrt{36}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 36, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα τετράγωνον αὐτὸν τὸν 36, εἶνε δηλονότι $\sqrt{36} = 6$.

193. Ἂν θέλωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 45, θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 7· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 6 εἶνε μικρότερον τοῦ 45, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε μεγαλύτερον τοῦ 45. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν, ὅτι ὁ 6 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 45 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*, μὲ σφάλμα δηλονότι μικρότερον τῆς μονάδος, ἤτοι ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

194. *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου.

195. Ὅταν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 100, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικήν του ῥίζαν ἔχοντες κατὰ νοῦν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . ., 10. π.χ. ἀμέσως λέγομεν, ὅτι $\sqrt{70}$ εἶνε ὁ 8, διότι ὁ 70 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 64 καὶ 81, οἱ ὁποῖοι εἶνε τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 9· ἀφαιροῦντες δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 8, ἤτοι τὸν 64, ἀπὸ τοῦ 70 λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ζητεῖται ἡ $\sqrt{452708}$. Ὁ παρακείμενος πίναξ δεικνύει τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 672, ὅστις εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 452708 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ἐκτελοῦμεν δηλονότι κατὰ σειρὰν τὰς ἑξῆς πράξεις:

$\sqrt{45\|27\|08}$	672	
36	127	1342
92.7	7	2
88 9	889	2684
38 0.8		
26 8 4		
11 2 4		

α') Χωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶνε καὶ μονοψήφιον).

β') Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης· (εἰς τὸ παράδειγμα τὸ πρῶτον τμῆμα εἶνε 45, ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης εἶνε 6, ὅπερ ἐγράφη πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ χωρισθέντος ἀπὸ τοῦ ψηφίου τούτου διὰ κατακορύφου γραμμῆς).

γ') Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου (ἤτοι τὸ $6^2=36$) καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου (9) τὸ δεύτερον τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

δ') Τοῦ σχηματιζομένου οὕτως ἀριθμοῦ (927) χωρίζομεν τὰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἁπλᾶς μονάδας διὰ μιᾶς τελείας στιγμῆς καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας πάσας (92) διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, (ἤτοι διὰ τοῦ 12). Τὸ πηλίκον 7 θὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ῥίζης.

ε') Διὰ νὰ τὸ δοκιμάσωμεν, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου (12) καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν (127) πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον (7), τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ (927), τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας ἐλάβομεν ὡς διαιρετέον. Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατή, δεχόμεθα τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου εὑρεθέντος ψηφίου αὐτῆς (ὡς συμβαίνει εἰς τὸ ἀνωτέρω ληφθὲν παράδειγμα, τῆς ἀφαιρέσεως 927—889 οὔσης δυνατῆς). Ἄλλως δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ.ο.κ., μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀφαίρεσις νὰ εἶνε δυνατή.

ς') Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης (38) καταβιβάζομεν τὸ τοίτον τμῆμα καὶ σχηματίζομεν ἀριθμὸν (3808), τοῦ ὁποίου πάλιν τὰς ἁπλᾶς μονάδας χωρίζομεν διὰ τελείας στιγμῆς, τὰς δὲ δεκάδας πάσας (380) διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ (67), ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον (2) θὰ εἶνε πάλιν ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Διὰ νὰ τὸ δοκιμάσωμεν, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ νέου διαιρέτου (134) καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν (1342) πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, τὸ δὲ γινόμενον (2684), ἂν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας ἐλάβομεν ὡς διαιρετέον, τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου καὶ γράφομεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξακολουθοῦμεν καταβιβάζοντες διαδοχικῶς καὶ τὰ λοιπὰ τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἂν ἔχῃ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοιαῦτα, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα, ὁπότε θὰ εὕρωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Ταῦτα πράξαντες εἰς τὸ ληφθὲν παράδειγμα εὕρομεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 452708 εἶνε ὁ ἀριθμὸς 672 μὲ ὑπόλοιπον 1124· τῷ ὄντι ἂν εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ 672 προσθέσωμεν τὸν 1124, θὰ προκύψῃ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 452708.

Παραδείγματα.

```
√13|69 | 37        √2|25 | 15        √36|18 | 60
 9     |----       1    |----         36    |----
 ----  | 67        ---  | 25          ---   | 12
 46.9  |  7        12.5 |  5          01.8  |
 46 9  |----       125  |----
 ----  | 469       ---  | 125
   0   |           0    |
```

Εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0, ἤτοι ἀκριβῶς εἶνε $\sqrt{1369}=37$, $\sqrt{255}=15$. Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1:12 εἶνε 0, δεχόμεθα ἀμέσως αὐτὸ ὡς ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἥτις δὲν εὑρέθη ἀκριβῶς, διότι ἔμεινεν ὑπόλοιπον 18.

Σημ. Ὅταν εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ τὸν 9, θὰ δοκιμάζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 9 ἀρχόμενοι.

```
Π. χ. √48|21 | 69
        36   |----
        ---  | 129
        122.1|   9
        116 1|----
        ---  | 11 61
          60 |
```

196. Τὸν αὐτὸν κανόνα ἐφαρμόζομεν πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ Εἰς τοιαύτην ὅμως περίπτωσιν, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶνε περιττόν, φροντίζομεν διὰ προσγραφῆς ἑνὸς μηδενικοῦ νὰ γίνῃ ἄρτιον, ἔπειτα ἐν τῇ σειρᾷ τῶν πράξεων, ὅταν καταβιβάσωμεν τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ καὶ εὕρωμεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης, θέτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τούτου ὑποδιαστολὴν καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν πρᾶξιν.

Δυνάμεθα μάλιστα, ὅταν καταβιβάσωμεν πάντα τὰ διψήφια τμήματα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν προσγράφοντες ἀνὰ δύο μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστου ὑπολοίπου. Ὅταν δὲ τελειώσωμεν τὴν πρᾶξιν μὲ τὴν εὕρεσιν τριῶν λ.χ. δεκαδικῶν ψηφίων τῆς ῥίζης, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα εἶνε κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 1000 μὲ προσέγγισιν 0,01, γράφομεν τὸν 1000 ὡς ἑξῆς: 1000,00 00 καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν:

```
√10|00,|00|00 | 31,62
 9            |
 10.0         | 61      626      6322
  6 1         |  1        6         2
  3 90.0      | 61     3756     12644
  3 75 6      |
    14 40.0
     1264 4
     175 6
```

Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ $\sqrt{1000}$ μὲ προσέγγισιν 0,01 εἶνε 31,62.

Ὡς τελευταῖον παράδειγμα ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 0,000580. Χωρίζομεν τοῦτον εἰς τμήματα ὡς ἑξῆς 0,|00|05|80, γράφομεν δύο μηδενικὰ ὡς πρῶτα ψηφία τῆς ῥίζης, ὧν τὸ πρῶτον χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς, καὶ ἀρχόμεθα τῆς πράξεως λαμβάνοντες ὡς πρῶτον τμῆμα τὸ 05, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶνε 2· ὥστε ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶνε 0,02.

Προβλήματα διαφόρων εἰδῶν πρὸς ἄσκησιν.

419) Ἐμπορεύματα ἐπωλήθησαν ἀντὶ 750 δραχμῶν· ἂν ἐπωλοῦντο κατὰ 50 δραχμὰς περισσότερον, τὸ ὁλικὸν κέρδος θὰ ἦτο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

200 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς ὁ ἔμπορος; (25 %).

420) Ἔμπορος ἠγόρασε 12 κυτία γραφίδων ἀντὶ δραχ. 7,20· ἕκαστον κυτίον περιλαμβάνει 12 δωδεκάδας γραφίδων· πόσας γραφίδας θὰ πωλῇ ἀντὶ 5 λεπτῶν, ἵνα τὸ ὅλον κέρδος του εἶνε δρχ. 3,60; (8).

421) Λυχνία εἰς ἑκάστην ὥραν καίει 65 γραμμάρια ἐλαίου, οὗ τὸ χιλιόγραμμον ἀξίζει δρχ. 1,55· ἄλλη λυχνία καίει 50 γραμμάρια ἐλαίου, οὗ τὸ χιλιόγραμμον ἀξίζει δρχ. 1,45· ποία τῶν δύο λυχνιῶν εἶνε οἰκονομικωτέρα καὶ εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ οἰκονομία εἰς ἓν ἔτος (365 ἡμ.), ἂν ἑκάστη λυχνία ἐλειτούργει κατὰ μέσον ὅρον 4 ὥρας καθ' ἑκάστην; 1,15

(Ἡ δευτέρα φέρει ἐτησίαν οἰκονομίαν 3 δρχ., 28).

422) Δύο ἐργάται ἐξετέλεσαν μίαν ἐργασίαν εἰς 18 ἡμέρας καὶ ἐπληρώθησαν δρχ. 189· ἀλλ' ὁ εἷς τούτων ἀπουσίασεν 5 ἡμέρας· ποῖον τὸ μερίδιον ἑκατ. τῶν ἐργατῶν (1ου 109,74, 2ου 79,26).

423) Ἡ ἔκτασις δύο ἀγρῶν εἶνε 2 ἑκτάρια· ὁ εἷς τῶν ἀγρῶν εἶνε μικρότερος τοῦ ἄλλου κατὰ 60 τ. μέτρα· πόσον ἀξίζει ἑκάτερος τῶν ἀγρῶν, ἂν ἕκαστον ἄρ ἀξίζῃ 20 δρ; (1994 δρ. 2066 δρ.)

424) Ἠγόρασέ τις ἀνὰ 5 ὀκάδας ἐκ τριῶν πραγμάτων, ὧν τοῦ μὲν πρώτου ἡ ὀκᾶ ἤξιζε 5,60 δρχ., τοῦ δευτέρου 3,40 καὶ τοῦ τρίτου 2,80· νὰ εὑρεθῇ συντόμως πόσον ἐπλήρωσεν;

425) Ἠναγκάσθη τις νὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμά του ἀντὶ 1026 δραχ. μὲ ζημίαν 6 1/4 %· τίς ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

426) Ἐκ τῶν χρημάτων του ἐδαπάνα τις καθ' ἑκάστην τὰ 4 %· μετὰ 12 ἡμέρας τοῦ ἔμειναν 12 δραχμαί· πόσας εἶχεν;

427) Κεφάλαιον 3320 δρχ. μετὰ τῶν τόκων του εἰς 5 ἔτη ἐγένετο 4191,50 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη;

428) Ἐπώλει τις τὴν ὀκᾶν ἑνὸς πράγματος πρὸς 3,20 δρχ. καὶ ἐκέρδιζε 33 1/3 %. Πόσον ἀξίζουν αἱ 100 ὀκάδ. εἰς αὐτόν;

429) Ἐπώλησέ τις ἀντὶ 8115 δραχ. κῆπον κερδήσας οὕτως 8 $\frac{1}{5}$ %· ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ κήπου;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

430) Ἁμαξηλάτης μετέφερε 1539 κυβ. μέτ. ἀνθράκων εἰς ἀπόστασιν 3,4 χιλιομέτρων· ἐλάμβανεν 20 λεπτὰ διὰ τὴν μεταφορὰν ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀνθράκων εἰς ἀπόστασιν 1 χιλιομέτρου· ἔκαμνε καθ' ἑκάστην 3 δρόμους μεταφέρων εἰς ἕκαστον δρόμον 2 κ.μ., 85· πόσας δραχμὰς ἔλαβε καὶ εἰς πόσας ἡμέρας ἔκαμε τὴν μεταφορὰν ; (1046,52 δρχ., 180 ἡμέρ.)

431) Σάπων νωπὸς πωλεῖται πρὸς 95 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ὅταν ξηρανθῇ χάνει τὰ 0,12 τοῦ βάρους του· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ ξηροῦ σάπωνος ; (1,08 δρχ.)

432) Ὁ σεληνιακὸς μὴν εἶνε ἡμέραι 29,53· νὰ ἐκφρασθῇ ὁ χρόνος οὗτος εἰς ἡμέρας, ὥρας, πρῶτα λεπτὰ καὶ δεύτερα.

433) Ἠγόρασέ τις τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 7 δρχ. τὰ 5 μέτρα, ἐπώλησε δὲ αὐτὸ πρὸς 25 δρχ. τὰ 14 μέτρα καὶ ἐκέρδησεν 27 δραχμάς· ἐκ πόσων μέτρων ἦτο τὸ ὕφασμα ; (70 μέτρα).

434) Πεζοπόρος κάμνει 5 ἑκατομμέτρων δρόμον εἰς 4'· δεύτερος κάμνει 6 ἑκατομ. εἰς 5'. Ποῖος τῶν δύο βαδίζει ταχύτερον καὶ πόσον περισσότερον δρόμον διανύει εἰς μίαν ὀκτάωρον πορείαν ;

435) Νὰ λογισθῶσι τὰ ἔξοδα πρὸς μεταφορὰν ὕδατος ἔκ τινος πηγῆς ἀπεχούσης 4,400 χιλιόμετρα μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα :

1ον) Τὸ μῆκος τῶν σωλήνων εἶνε 2 μ., 50· 2ον) ἕκαστος τῶν σωλήνων ἔχει βάρος 175 χιλιογράμμων· 3ον) ὁ τόνος τῶν σωλήνων ἀξίζει 280 δρχ. 4ον) ἡ ἀξία τῆς τοποθετήσεως τῶν σωλήνων ἀνέρχεται εἰς δρχ. 6,50 κατὰ μέτρον. (114 840 δρχ.)

436) Ἀνέμιξέ τις 17 ὀκάδας οἴνου καλῆς ποιότητος μετὰ 29,8 ὀκ. δευτέρας ποιότητος, ἧς ἡ ὀκᾶ ἤξιζε 0,95 δρχ. Ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἐπωλήθη ἀντὶ δρχ. 1,50, οὕτω δὲ προέκυψε κέρδος 18 δρχ., 09. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ οἴνου αὗς ποιότητος.

Ἀριθμὸς ὀκάδων μίγματος....	17+29,8	= 46, ὀκ. 8
Εἰσπραχθ. δρ. ἐκ τῆς πωλήσεως	1,5×46,8	= 70, δρ. 20
Ἀξία τοῦ μίγματος.....	70,20—18,09	= 52, » 11
Ἀξία τοῦ βου οἴνου.....	0,δρ.95×29,8	= 28, » 31
Ἀξία τοῦ αου οἴνου.....	52,11—28,31	= 23, » 80
Ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ αου οἴνου..	23, δρ. 80 : 17	= 1, » 40

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

437) Ἐπλήρωσέ τις καὶ ἠγόρασε 138 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος· πόσους πήχεις θὰ ἠγόραζεν μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ἐξ ἄλλου ὑφάσματος ἀνωτέρας ποιότητος, ἐὰν 3 πήχεις τούτου ἀξίζουν ὅσον οἱ 5 πήχεις τοῦ ἄλλου ;

438) Ἠγόρασέ τις 275 μέτρα ὑφάσματος πρὸς δρχ. 14,40 τὸ μέτρον· ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ μὲ κέρδος 15 $^0/_0$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 13 δρ., 75 τὸ μέτρον· πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ;

(284 δρχ., 90)

439) Ἔμπορος ἠγόρασε 525 μ, 20 ὑφάσματος πρὸς 10 δρ.,50 τὸ μέτρον· πωλεῖ κατ' ἀρχὰς τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 12 δρ., 10 τὸ μέτρον· πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρον τοῦ ὑπολοίπου, ὥστε τὸ ὁλικὸν κέρδος νὰ εἶνε 1155 δρ., 45 ; (13, 60.)

440) Νὰ δειχθῇ ὅτι : 365 ἡμ., 2564=365 ἡμ. 6 ὥρ. 9′ 13″.

441) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὸ $\frac{3}{8}$ κλάσματα, ὧν οἱ ἀριθμηταὶ εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 6, 51, 33, 39, 48.

442) Ἔμπορος ἠγόρασε παρ' ἄλλου 75 μ., 80 μεταξωτοῦ ὑφάσματος πρὸς 19 δρχ., 75 τὸ μέτρον· διὰ μὲν τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτοῦ ἔδωκε ἐριοῦχον ὕφασμα, οὗ τὸ μέτρον ἤξιζεν 12 δρχ., τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπλήρωσεν εἰς μετρητά· πόσα μέτρα ἐριούχου ὑφάσματος ἔδωκε καὶ πόσας δραχμάς ; (71,28 μέτ.—641,60 δρ.)

443) Τὰ $\frac{8}{15}$ τοῦ μήκους ἑνὸς ὑφάσματος ἀποτελοῦνται ἀπὸ 73 μ., 50 καὶ ἀξίζουν 1029 δρ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ ὅλου ὑφάσματος καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῆται τὸ μέτρον, διὰ νὰ προκύψῃ κέρδος 20 $^0/_0$.

Ἀπόκρ. Ἀξία ὑφάσματος 1929 δρχ., 37· τὸ μέτρον δέον νὰ πωληθῇ 16,80 δρχ.

444) Ἠγόρασέ τις 648 ὀκάδας πράγματός τινος πρὸς 3 δρ.,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

45 τὴν ὀκᾶν πωλεῖ τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 15 $^0/_0$, τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κέρδος 18 $^0/_0$. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ὑπολοίπου, ἵνα ἐφ' ὅλου ἔχῃ κέρδος 204 δραχμῶν; (3,16 δρ.)

445) Ἐκ τινος βαρελίου πλήρους οἴνου ἐξήχθησαν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ οἴνου, ἔπειτα ἐρρίφθησαν ἐν αὐτῷ 35 ὀκάδες οἴνου καὶ οὕτως ὁ οἶνος κατέλαβε τὸ ἥμισυ τοῦ βαρελίου· τίς ἡ χωρητικότης αὐτοῦ; (210 ὀκ.)

446) Ἡ σελήνη στρέφεται περὶ ἑαυτὴν εἰς 27 ἡμ., 7 ὥρ., 43′. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ χρόνος οὗτος εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν λαμβανομένης ὡς μονάδος ἢ τῆς ἡμέρας ἢ τῆς ὥρας.

447) Τροχός τις ἐκτελεῖ 91 στροφὰς εἰς 3″ + $\frac{3}{4}$· πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ εἰς 5 ὥρ. + $\frac{3}{4}$; (502 320 στροφάς).

448) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης πρὸς τὴν τοῦ ἡλίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τῆς σελήνης διάμετρος εἶνε τὰ $\frac{3}{11}$ τῆς διαμέτρου τῆς γῆς, καὶ ὅτι ἡ τοῦ ἡλίου διάμετρος ἰσοῦται πρὸς 110 διαμέτρους τῆς γῆς.

(Ἀπόκ. Ἡ διάμετρος τῆς σελήνης εἶνε $\frac{3}{1210}$ τῆς τοῦ ἡλίου).

449) Ἐκ ποτηρίου πλήρους ὕδατος ἀφῃρέθη τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ὕδατος, ἔμεινε δὲ οὕτω τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ἐξαχθέντος καὶ 16 δράμια· νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ ποτηρίου. (48 δράμια).

450) Ἄνθρωπος πίνει τὸ τρίτον τοῦ οἴνου τοῦ πληροῦντος ἓν ποτήριον· ἀναπληροῖ εἶτα τὸ ποθὲν δι' ὕδατος καὶ πίνει τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου· ἀναπληροῖ εἶτα τὸ ποθὲν δι' ὕδατος καὶ πάλιν πίνει τὸ ἥμισυ· ποῖον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ οἴνου μένει εἰς τὸ ποτήριον; $\left(\frac{1}{6}\right.$ τοῦ ἀρχικοῦ οἴνου$\left.\right)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

451) Ἐπώλησέ τις διαδοχικῶς ἔκ τινος ὑφάσματος $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{1}{4}$ καὶ ἔμειναν 10 μ., 65· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὅλου ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἂν τὸ μέτρον ἀξίζει 10,75 δρχ. (28 μ, 50—3065,374).

452) Δύο ἄνθρωποι εἶχον τὸ αὐτὸ ἐτήσιον εἰσόδημα· ὁ $α^{ος}$) ἐδαπάνα κατ' ἔτος τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν εἰσοδημάτων του· ὁ $β^{ος}$ ἐδαπάνα 800 δρχ. περισσοτέρας ἢ ὁ $α^{ος}$· μετὰ παρέλευσιν τριῶν ἐτῶν ὁ $β^{ος}$ εἶχε χρέος 852 δρχ.· ποῖον εἶνε τὸ εἰσόδημά των; (ἐτήσ. εἰσόδ. 2580 δρχ.)

453) Κινητόν τι διέτρεξεν τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ὅλου δρόμου εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας· εἰς πόσον χρόνον διέτρεξεν ὅλον τὸν δρόμον; (λύσις δι' ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα).

454) Ποσόν τι τοκισθὲν πρὸς 5 % μετὰ παρέλευσιν 1 ἔτ. 2 μ. 12 ἡμ. ἐγένετο μετὰ τῶν τόκων του 27178 δρ., 40· ποῖον εἶνε τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον; (25640 δρ.)

455) Ποῖον κεφάλαιον μετὰ τῶν τόκων του ἐπὶ 3 μῆν. 6 ἡμ. πρὸς 4,5 % ἐγένετο 875 δρχ., 38; (865 δρχ.)

456) Κεφαλαιόν τι τοκισθὲν πρὸς 4,5 % ηὐξήθη κατὰ τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ· πόσον χρόνον ἔμεινεν εἰς τόκον;

Εἰς τὸ τέλος 1 ἔτους κεφάλαιον 1 δρχ. φέρει τόκον 0,045 δρ.
εἰς πόσον χρόνον » » » » $\frac{2}{9}$;

$$\chi \text{ ἔτη} = \frac{2}{9} : 0{,}045 = 4 \text{ ἔτ. } 11 \text{ μ. } 7 \text{ ἡμ.}$$

457) Ἐδάνεισέ τις κεφαλαιόν τι πρὸς ἐπιτόκιον τοιοῦτον, ὥστε μετὰ παρέλευσιν 5 μηνῶν ὁ τόκος ἦτο τὰ $\frac{3}{12}$ τοῦ δανεισθέντος κεφαλαίου· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ ἐτήσιος τόκος εἶνε τὸ πέμπτον τῶν $\frac{3}{12}$ τοῦ κεφαλαίου, ἤτοι τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ κεφαλαίου· τῶν 100 ἄρα δραχ. ὁ ἐτήσιος τόκος εἶνε 5 δρχ. κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 5 $^0/_0$.

458) Ἐδάνεισέ τις 16000 δρχ. πρὸς 6 $^0/_0$· εἰς τὸ τέλος 8 μηνῶν ἀπέσυρεν 6400 δρχ.· πόσον τόκον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ἂν ἀποσύρῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν δανεισθέντων χρημάτων ;

459) Ἠγόρασέ τις κτῆμα, ἐξ οὗ ἀπολαμβάνει κατὰ μέσον ὅρον ἐτησίως 430 δρχ.· τὰ μεσιτικὰ καὶ συμβολαιογραφικὰ ἔξοδα τῆς ἀγορᾶς ἦσαν 10 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ κτήματος· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ κτήματος, ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ χρήματά του ἐτοποθέτησεν οὕτω πρὸς 4 $^0/_0$.

Τὸ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην κεφάλαιον ἀποτελεῖται ἀπὸ τόσας φορὰς τὰς 100 δρχ., ὅσας φορὰς ὁ 4,5 χωρεῖ εἰς τὸν 430· τὸ κεφάλαιον ἄρα τοῦτο εἶνε $100 \times \frac{430}{4,5} = 9555$, δρ. 55· τοῦτο δὲ εἶνε τὰ $\frac{11}{10}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἥτις διὰ τοῦτο εἶνε 8686 δρ., 87.

460) Ἔχει τις εἰς δάνειον δύο κεφάλαια· τὸ $\alpha^{ον}$ πρὸς 4,75 $^0/_0$ φέρει ἐτησίως τόκον 2077 δρ., 65· το $\beta^{ον}$, ὅπερ ὑπερβαίνει τὸ $\alpha^{ον}$ κατὰ 8100 δρχ. εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον πρὸς 5,50 $^0/_0$ φέρει 2851,20 δρχ. τόκον· νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια.

Σημ. Τί περιττεύει εἰς τὴν ἐξαγγελίαν τοῦ προβλήματος ;

461) Ἔδωκέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας του εἰς τὸν ἀνεψιόν του, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου εἰς ἀγαθοεργοὺς σκοπούς. Ἐκ τῶν μεινάντων χρημάτων ἐλάμβανεν ἐτησίως 11386,39 δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 $^0/_0$. Ἐκ πόσων δραχμῶν ἦτο ὅλη ἡ περιουσία του ;

Τὰ μείναντα εἰς αὐτὸν χρήματα ἦσαν τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ὅλης περιουσίας. Ἀλλ' ἐπειδὴ μὲ ἐπιτόκιον 5 $^0/_0$ τὸ κεφάλαιον εἶνε εἰκοσαπλάσιον τοῦ ἐτησίου τόκου, τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἦτο 11386, 39 × 20, ἤτοι 227727 δρ., 80. Τούτου δὲ ὄντος τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς περιουσίας του, ὁλόκληρος ἡ περιουσία του ἦτο 853 979,25 δρχ.

462) Ἐμερίσθησαν 4832 δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν ἀδελφῶν ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν· ὁ $\alpha^{ος}$ εἶχεν ἡλικίαν 20 ἐτῶν, ὁ $\beta^{ος}$ 24 καὶ ὁ $\gamma^{ος}$ 26· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

463) Δύο συνέταιροι ἐμοίρασαν τό κέρδος μιᾶς ἐπιχειρήσεως· ὁ $\alpha^{ος}$ ἔλαβεν 75 234 δρχ. περισσοτέρας ἢ ὁ $\beta^{ος}$· τὸ μερίδιον δὲ τοῦ $\alpha^{ου}$ ἦτο ἑπταπλάσιον τοῦ μεριδίου τοῦ $\beta^{ου}$· νὰ εὑρεθῶσι τὰ μερίδια τούτων. (87 773,12539).

464) Νὰ μερισθῇ ὁ 30 εἰς δύο μέρη, ὧν ὁ λόγος εἶνε $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$.

465) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶνε 6,8· ὁ $\beta^{ος}$ εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ $\alpha^{ου}$ καὶ ὁ $\gamma^{ος}$ τὰ 5 ἕβδομα τοῦ $\beta^{ου}$· τίνες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ;

466) Νὰ διανεμηθῶσιν 9000 δρχ. μεταξὺ ἑνὸς ἀνδρός, 3 γυναικῶν καὶ 5 παιδίων τοιουτοτρόπως, ὥστε ἑκάστη τῶν γυναικῶν νὰ λάβῃ τριπλάσιον μερίδιον ἢ ἓν παιδίον καὶ ὁ ἀνὴρ τὸ διπλάσιον τοῦ μεριδίου μιᾶς γυναικός.

467) Ἔμπορος ἠγόρασε 15 βαρέλια οἴνου ἀντὶ 1200 δραχ.· ἐπλήρωσε πρὸς τούτοις 92 δρ., 50 διὰ φόρον καὶ 20 δρχ., 40 διὰ μεταφοράν· ἕκαστον βαρέλιον περιεῖχε 220 ὀκάδας, ἐξ ὧν ἐγένετο ἀπώλεια 3 $^0/_0$ ἕνεκεν ἐξατμίσεως· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ 285 δρχ. ἐπὶ τοῦ ἐμπορεύματος τούτου ; (50 περίπου λεπτά.)

468) Ἐσχημάτισέ τις κρᾶμα συγχωνεύσας 300 γραμ. ἀργύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,700 μετὰ 500 γρμ. ἄλλου ἀργύρου διαφόρου βαθ. καθ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ δευτέρου τούτου ἀργύρου, δοθέντος ὅτι 400 γραμ. τοῦ προκύπτοντος κράματος περιέχουσιν 309,50 γρ. καθαροῦ ἀργύρου. (0,818.)

Κραμ. 800 γρ. περιέχ. καθαρ. ἄργυρ. 309,50×2=619 γραμ.
$α^{ου}$ 300 » » » » 0,700×300=210 »
$β^{ου}$ 500 » » » » ..... 409 »

Βαθμὸς ἄρα καθαρότητος τοῦ $β^{ου}$ εἶνε 409 : 500 = 0,818.

469) Συγχωνεύσας τις 525 γραμ. ἀργύρου β. κ. 0,946 μετ' ἄλλου ἀργύρου παρήγαγε κρᾶμα 2035 γρ. μὲ β. κ. 0,900· τίς ὁ β. κ. τοῦ δευτέρου ἀργύρου; (0,884)

470) Συνεχώνευσε τις 3 χιλιόγρ. καὶ 750 γραμ. ἀργύρου μέ τινα β. κ. μετὰ 5 χιλιογ. ἀργύρου καθαροῦ· παρήγαγε δὲ κρᾶμα μὲ β. κ. 0,835· τίς ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ πρώτου ληφθέντος ἀργύρου;

471) Κεφάλαιόν τι ἐτοκίσθη ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 5 %. Μετὰ ταῦτα τὸ κεφάλαιον τοῦτο μετὰ τῶν τόκων ἐτοποθετήθη εἰς ἐπιχείρησιν ἥτις ἔδιδε κέρδος 7,50 %· τὸ ἐτήσιον τότε εἰσόδημα εἶνε δραχμαὶ 468· ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον;

(5200 δρ.)

472) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 6 % φέρουσιν ἐτησίως 60 δραχμὰς περισσοτέρας ἢ τὸ ὑπόλοιπον τοκισθὲν πρὸς 4 %· ποῖον εἶνε τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

Ὑποθέσωμεν ἓν κεφάλαιον 700 δραχμῶν· τούτου αἱ 300 δρ. ἐτοκίσθησαν πρὸς 6 % καὶ αἱ 400 πρὸς 4 %, καὶ ἔδωκαν αἱ μὲν πρῶται 18 δρχ. τόκον, αἱ δὲ ἄλλαι 16 δρχ. τόκον.

Ὅσας φορὰς ἡ διαφορὰ 18—16=2 δρ. περιέχεται εἰς τὰς 60 δρ., τόσας φορὰς αἱ 700 δρ. χωροῦσιν εἰς τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

Τὸ κεφάλαιον ἄρα εἶνε 700×30 = 21 000 δρχ.

473) Νὰ εὑρεθῶσιν ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν οἱ λόγοι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α') 54 μέτρων πρὸς 86 μέτρα, β') $6+\frac{2}{3}$ ὀκάδων πρὸς 4 ὀκάδας, γ') 7 χιλιογράμ. πρὸς $8+\frac{1}{4}$ χιλιόγρ. δ') 3 μέτρων 2 παλαμῶν πρὸς 7 μέτ., 8 δακτ. καὶ ε') 8 ὀκάδων πρὸς 16 χιλιόγραμμα.

474) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 4ος ὅρος τῶν ἀναλογιῶν·

$$\frac{6}{15}=\frac{9}{\chi},\quad \frac{13}{21}=\frac{\chi}{8},\quad \frac{12}{\chi}=\frac{17}{31},\quad \frac{\chi}{15}=\frac{19}{20}.$$

475) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας ἑκάστη τῶν ἰσοτήτων·

$$4\times21=7\times12,\qquad 5\times14=35\times2,\qquad 8\times17=34\times4.$$

475) Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶνε $\frac{11}{16}$, ὁ δὲ μεγαλείτερος αὐτῶν εἶνε ὁ 100· τίς ὁ μικρότερος;

476) Ὁ λόγος μεταξὺ τῆς ἡλικίας ἑνὸς ἀνδρὸς πρὸς τὴν τῆς γυναικός του εἶνε $\frac{135}{126}$· ἡ ἡλικία τοῦ ἀνδρὸς εἶνε 45 ἔτη· τίς ἡ ἡλικία τῆς γυναικός;

477) Εὑρεῖν τὸν ἄγνωστον ὅρον ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν·

$$\frac{2,7}{\chi}=\frac{1,5}{9},\ \frac{8,47}{1,28}=\frac{\chi}{14},\ \frac{5\frac{1}{3}}{7}=\frac{3\frac{1}{4}}{\chi}$$

478) Ὑφαίνει τις 4,35 μετ. ὑφάσματος εἰς 7 ὥρας· εἰς πόσον χρόνον ὑφαίνει 12 μέτρα;

479) Κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 4,25 % ἔφερε τόκον τινά· νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ τόκου τούτου πρὸς τὸν τόκον, ὃν θὰ ἔφερε τοκιζόμενον πρὸς $5\frac{1}{4}$ %.

480) Ποῖον κεφάλαιον μετὰ παρέλευσιν 124 ἡμερῶν φέρει τόκον 315 δρχ., δοθέντος ὅτι κεφάλαιον 1568 δρχ. φέρει τὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτὸν τόκον μετὰ παρέλευσιν 86 ἡμερῶν καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ;

481) Κεφάλαιόν τι ἔφερε τόκον 615 δρχ. μετὰ παρέλευσιν 125 ἡμερῶν· ποῖον τόκον θὰ φέρῃ μετὰ παρέλευσιν 243 ἡμερῶν μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ;

482) Μετὰ παρέλευσιν 7 μηνῶν κεφάλαιόν τι ἔφερε τόκον 82 δραχμῶν πρός τι ἐπιτόκιον· μετὰ παρέλευσιν πόσου χρόνου θὰ φέρῃ τόκον 104 δραχμῶν μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ;

483) Ἐχρειάσθησαν 30 κύλινδροι χάρτου, οὗ τὸ μῆκος ἦτο 24 μέτρα πρὸς ἐπίστρωσιν τῶν τοίχων μιᾶς αἰθούσης· πόσοι κύλινδροι χάρτου θὰ χρειασθῶσι δι' ἄλλην αἴθουσαν ἐκ τοίχων διπλασίας ἐκτάσεως, ἂν τὸ μῆκος τοῦ χάρτου ἑκάστου κυλίνδρου εἶνε 36 μέτ., τὸ δὲ πλάτος τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πλάτους τοῦ προηγουμένου χάρτου ;

484) Μὲ 18 χιλιόγραμμα νήματος ἐγένετο ὕφασμα 45 μέτρων μήκους καὶ 85 δακτύλων πλάτους· πόσον βάρος πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ νῆμα, ἵνα κατασκευασθῶσι 39 μέτ. ὑφάσματος πλάτους 1 μέτρου ;

485) Ἐπλήρωσέ τις 148 δρχ. εἰς 3 ἐργάτας δι' ἐργασίαν 45 ἡμερῶν· πόσον θὰ πληρωθῶσι 5 ἐργάται δι' ἐργασίαν 17 ἡμερῶν, ἀλλὰ μὲ ἡμερομίσθιον τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν πρώτων ;

486) Τὰ ἔξοδα οἰκοτροφείου ἐξ 82 μαθητῶν εἰς 15 ἡμέρας ἀνῆλθον εἰς 1250 δρχ.· πόσα θὰ εἶνε τὰ ἔξοδα διὰ τριπλάσιον χρόνον, ἂν προστεθῶσι 12 ἀκόμη μαθηταί ;

487) Ἁμαξοστοιχία ἐχρειάσθη 2 ὥρας $\frac{1}{2}$, ἵνα διανύσῃ δρόμον 108 χιλιομέτρων· πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, (χωρὶς νὰ σταματήσῃ), ἵνα διανύσῃ δρόμον 214 χιλιομέτρων μὲ ταχύτητα τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς προηγουμένης ταχύτητος ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

488) Δύο ἀδελφοὶ εἰργάζοντο ὁμοῦ πρὸς ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἔργου καὶ ἔλαβον 210 δραχμὰς ἐν ὅλῳ· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐργασίας τοῦ νεωτέρου εἶνε τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας τοῦ ἄλλου;

489) Νὰ χωρισθῇ τεμάχιον ὑφάσματος 35 πήχεων εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἓν νὰ ἔχῃ μῆκος τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ μήκους τοῦ ἄλλου.

490) Δύο φίλοι ἠγόρασαν βαρέλιον περιέχον 228 ὀκ. ἐλαίου, ἀλλ' ὁ εἷς ἔδωκε τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων, ἅτινα ἔδωκεν ὁ ἄλλος· πόσαι ὀκάδες ἐλαίου ἀναλογοῦν εἰς ἕκαστον;

491) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 154, ἀλλ' ὁ εἷς εἶνε τὰ $\frac{12}{13}$ τοῦ ἄλλου· τίνες οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί;

492) Νὰ μερισθῇ ὁ 768 εἰς δύο μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $5\frac{1}{2}$ καὶ $6\frac{1}{4}$.

493) Νὰ μερισθῇ ὁ 1000 εἰς δύο μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2,68 καὶ 7,4.

494) Ἔκαμα δύο ταξείδια, διὰ τὰ ὁποῖα ἐδαπάνησα ἐν ὅλῳ δραχμὰς 524· ἀλλὰ τοῦ δευτέρου ταξειδίου ἡ δαπάνη ἦτο μεγαλυτέρα κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δαπάνης τοῦ πρώτου· νὰ εὑρεθῇ ἡ δαπάνη δι' ἕκαστον τῶν ταξειδίων.

495) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἠγόρασαν 48 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 2, δρ. 75 τὸ μέτρον· ἐμοίρασαν δὲ αὐτὸ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$. Πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος τούτων;

496) Τρεῖς ἀποστάσεις εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6. ἡ μικροτέρα τούτων εἶνε 64 στάδια· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

497) Ποῖον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου, ὥστε τοῦτο νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μὲ ἕνα κῆπον ὀρθογώνιον, οὗτινος ἡ μία τῶν διαστάσεων ἦτο 125 μ, 4 καὶ ἡ ἄλλη 86 μ, 5.

($\sqrt{10\,847,10} = 104$, μ. 1).

498) Ἀγρός τις ἔχει ἐμβαδὸν 384 ἄρ. ποῖον θὰ ἦτο τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἔχοντος τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν;

($\sqrt{38400} = 195$, μ. 95).

499) Ἐμοίρασα 784 δραχμὰς εἰς πτωχοὺς καὶ ἕκαστος τούτων ἔλαβε τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦταν οἱ πτωχοί· νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν καὶ αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας ἕκαστος ἔλαβεν.

500) Ἐμοίρασα 3125 δραχμὰς εἰς πτωχοὺς καὶ ἕκαστος τούτων ἔλαβε τόσα πεντάδραχμα, ὅσος ἦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν· νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πτωχῶν καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ ἕκαστος ἔλαβεν.

501) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 525 καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶνε ὁ 20· τίνες οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί;

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι ὁ εἷς τῶν ἀριθμῶν εἶνε εἰκοσαπλάσιος τοῦ ἄλλου εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμούς.

502) Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 25, ἵνα εὑρεθῇ πηλίκον $3\frac{1}{2}$ φορὰς μεγαλύτερον τοῦ 25;

503) Πράγματός τινος 78 ὀκ. ἀξίζουν 72 δρχ. περισσότερον ἢ αἱ 60 ὀκ.· πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ πράγματος τούτου;

504) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκεν ἀνὰ 14700 δρχ. εἰς ἕκαστον τῶν υἱῶν του· ἀλλὰ τοῦ ἑνὸς τούτων ἀποθανόντος ἕκαστος τῶν ἐπιζώντων ἔλαβε 19 600 δρχ.· νὰ εὑρεθῇ ἡ περιουσία τοῦ πατρὸς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν του.

Ἡ αὔξησις τοῦ μεριδίου ἑκάστου τῶν ἐπιζησάντων υἱῶν εἶνε 4900 δραχ.· ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν ἐπιζώντων υἱῶν εἶνε ὁ λόγος 14700:4900=3· ἡ περιουσία τοῦ πατρὸς ἦτο :

$$14700 \times 4 = 58800 \text{ δρχ.}$$

505) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 δωδεκάδας δοχείων πρὸς 7 δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν δωδεκάδα· κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐθραύσθησαν 6 δοχεῖα· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἕκαστον τῶν μεινάντων, διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 19 δραχμῶν;

506) Νὰ μερισθῶσι 525 δρχ. εἰς δύο ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ εἷς νὰ λάβῃ τόσα πεντάδραχμα, ὅσα ὁ ἄλλος δίδραχμα.

507) Μήτηρ ἐμοίρασεν 80 κάσταναι· ὁσάκις ἔδιδε 2 εἰς τὸν πρῶτον υἱόν της, εἰς τὸν δεύτερον ἔδιδε 3 καὶ εἰς τὸν τρίτον 5· πόσα κάστανα ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν υἱῶν της;

508) Πωλῶν τις 30 δρχ. τὴν δωδεκάδα μανδηλίων, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε 200 δρχ. τὰ ἑκατόν, ἐκέρδησεν ἐξ ὅλων 450 δρχ.· τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν μανδηλίων; (900).

509) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον ἀριθμοῦ τινος ἡμερῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, λαμβάνομεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ γινομένου καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ 60, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 6 $^0/_0$, διὰ 72, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 5 $^0/_0$, διὰ 80, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4 $^1/_2$ $^0/_0$, διὰ τοῦ 90, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4 $^0/_0$.

Πρὸς 3 $^0/_0$ ὁ τόκος εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ τόκου πρὸς 6 $^0/_0$.

510) Ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 32 χιλιομ. τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν εἰς τὰς 5 ὥρ. 30′ μ. μ. διευθυνομένη εἰς ἄλλην πόλιν ἀπέχουσαν 512 χιλιόμετρα· ἀφοῦ διήνυσε τὰ $^3/_4$ τοῦ ὅλου δρόμου ὁ μηχανικὸς ηὔξησε τὴν ταχύτητα κατὰ 6 χιλιόμ. τὴν ὥραν· εἰς ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα; (8 ὥρ. 52′ τὴν πρωΐαν).

511) Ὁ Α. καταδιώκει τὸν Β. ὅστις εἶχε διανύσει πρὸ τῆς κινήσεως τοῦ Α. 450 μέτρα· ὁ Α. κάμνει 3 βήματα τῶν 0,70 μ. ὅταν ὁ Β. κάμνῃ 2 τῶν 0,75 μ.· πόσα βήματα θὰ κάμῃ ὁ Α. διὰ νὰ φθάσῃ τὸν Β. καὶ ποῖον εἶνε τὸ μῆκος τοῦ δρόμου;

Ἀπόκ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν βημάτων τοῦ Α. θὰ εἶνε $3 \times 750 = 2250$ καὶ ὁ διανυθεὶς δρόμος ὑπὸ τοῦ Α. εἶνε 0,μ. $7 \times 2250 = 1575$ μέτ.

512) Δύο ταχυδρόμοι δυνάμενοι νὰ διατρέξωσιν ὁδόν τινα, ὁ μὲν εἰς 8 $\frac{1}{2}$ ὥρας, ὁ δὲ εἰς 10 ὥρ. $\frac{1}{4}$, διευθύνονται ὁ εἷς πρὸς τὸν ἕτερον ἀναχωροῦντες τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐκ τῶν δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄκρων τῆς ὁδοῦ· ποῖον μέρος τῆς ὅλης ὁδοῦ θὰ διανύσῃ ἑκάτερος τούτων μέχρι τῆς στιγμῆς τῆς συναντήσεώς των;

(Ὁ αος θὰ διανύσῃ 41 ἴσα μέρη τῆς ὁδοῦ καὶ ὁ βος 34 τῶν μερῶν τούτων, ἤτοι ὁ αος τὰ $\frac{41}{75}$ καὶ ὁ βος τὰ $\frac{34}{75}$ τῆς ὁδοῦ).

513) Δύο ἁμαξοστοιχίαι διανύουσι τὸν αὐτὸν δρόμον, ἡ μὲν εἰς 6 ὥρ. 25′, ἡ δὲ εἰς 7 ὥρας· ἡ πρώτη κάμνει καθ' ὥραν 3 χιλιόμετρα περισσότερα ἢ ἡ δευτέρα· νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιομέτρων, τὰ ὁποῖα ἑκατέρα τούτων διανύει καθ' ὥραν καὶ τὸ μῆκος τοῦ δρόμου.

Ἔχομεν 6 ὥρ. 25′ $= \frac{77}{12}$ ὥρ., 7 ὥρ. $= \frac{84}{12}$ ὥρ.

Εἰς $\frac{1}{12}$ τῆς ὥρας:

ἡ αη διανύει τὸ $\frac{1}{77}$ τοῦ δρόμου, ἡ δὲ βα τὸ $\frac{1}{84}$ τοῦ δρόμου.

Εἰς μίαν ὥραν:

ἡ αη διανύει τὰ $\frac{12}{77}$ τοῦ δρόμου, ἡ δὲ βα τὰ $\frac{12}{84}$ τοῦ δρόμου.

Εἰς μίαν ἄρα ὥραν ἡ αη διανύει περισσότερον ἢ ἡ βα τά:

$\frac{12}{77} - \frac{12}{84}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{77}$ τοῦ δρόμου, ὅπερ εἶνε 3 χιλιόμετρα.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ὅλος ὁ δρόμος εἶνε 3χιλ. $\times 77 = 231$χιλ.

Ἡ αη εἰς μίαν ὥραν 36 χιλ. καὶ ἡ βα 33 χιλιόμ.

514) Ὡρολόγιον εἰς 24 ὥρας προχωρεῖ $8' \frac{1}{2}$· ἂν κανονισθῇ τὴν μεσημβρίαν μιᾶς ἡμέρας, μετὰ πόσον χρόνον θὰ δεικνύῃ τὴν ἀκριβῆ ὥραν;

Τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ μετὰ 84 ἡμέρας καὶ $\frac{12}{17}$ τῶν 24 ὡρῶν.

Ἐπειδὴ δὲ 24 ὥρ. $\times \frac{12}{17} = 16$ ὥρ. $56' \frac{1}{2} = 12$ ὥρ. $+ \left(4 \text{ ὥρ. } 56' \frac{1}{2}\right)$, τὴν στιγμὴν ἐκείνην θὰ εἶνε 4 ὥρ. $56' \frac{1}{2}$ τῆς πρωΐας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

515) Ὡρολόγιον προχωρεῖ εἰς 24 ὥρας κατὰ 6′· ἐκανονίσθη τὴν πρώτην τοῦ μηνὸς κατὰ τὴν μεσημβρίαν· ποία θὰ εἶνε ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τὴν 7ην τοῦ μηνὸς δεικνύῃ 4 ὥρ. 37′ μετὰ μεσημβρίαν; (4 ὥρ.)

516) Κρήνη δίδει εἰς 13 ὥρ. 26′ $\frac{1}{2}$ ὕδωρ 143 ἑκατολλίτρων· πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος θὰ δώσῃ εἰς 28 ἡμ. 17 ὥρ. $\frac{3}{4}$; (Ἀπόκ. 733 κυβ. μέτ. καὶ 8 ἑκατόλιτρα).

517) Ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ εἶνε 84400 μέτρα· τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν, πρώτων λεπτῶν καὶ δευτέρων τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν δύο τούτων πόλεων; (45′ 34″, 56).

518) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 800 φράγκα μὲ 67 χρυσᾶ νομίσματα τῶν 20 φράγκων καὶ τῶν 5 φράγκων· πόσα θὰ δώσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους; (31 τῶν 20 φ. καὶ 36 τῶν 5 φ.)

519) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἀριθμόν τινα χιλιογράμμων ἑνὸς πράγματος· τὰ $\frac{2}{7}$ τῶν χιλιογράμμων τούτων πρὸς 1,15 δρχ. τὸ χιλιόγ. τὰ $\frac{3}{8}$ πρὸς 1,20 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶχε βάρος 4 χιλιογ. 375 γραμ. πρὸς 1,37 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον· πόσας δραχμὰς ἔδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὰ 100 γραμμάοια διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος ἐπὶ ὅλου τοῦ ἐμπορεύματος 17 δρχ., 50;

(Ἀπόκ. Τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος ἦτο 12 χιλιόγ., 894· ἡ ἀξία αὐτῶν ἦτο 16 δρχ., 0311· τὰ 100 γραμμάρια πρέπει νὰ πωλῇ 0, δρ. 26).

520) Ἐργάτης οἰκονομεῖ κατ' ἔτος 265,75 δρχ.· τὰ καθημερινὰ ἔξοδά του κατὰ μέσον ὅρον ἦσαν 2,80 δρχ.· νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἡμερομίσθιόν του, ἐὰν εἰς τὰς 365 ἡμέρας ἀνεπαύθη 62 ἡμέρας. (Ἀπόκ. 4,25 δρχ.)

521) Ἠγόρασέ τις μανδήλια ἀντὶ 250 δραχμῶν πληρώσας 5

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δρχ. τὰ 20 μαιδήλια· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ ἓν διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 65 δραχμάς;

522) Γυνή τις μετεχειρίζετο νῆμα, οὗ τὸ χιλιόγραμμον ἤξιζεν 6 δρχ.· κατεσκεύαζε δὲ μὲ 500 γραμμάρια νήματος 5 ζεύγη περικνημίδων· ἐπώλει τὸ ζεῦγος πρὸς 3 δρχ., 60· πόσας δραχμὰς ἐκέρδιζε τὴν ἡμέραν, ἐὰν εἰς 16 ἡμέρας κατεσκεύαζεν 6 ζεύγη; (0,90 δρχ.).

523) Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ μικρότερος ἔλαβεν ἀριθμόν τινα δραχμῶν, ὁ μεγαλύτερος ἔλαβεν τριπλασίας δραχμάς· μὲ τὰς δραχ. ταύτας ἠγόρασαν 36 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 10 δραχ. τὸν πῆχυν· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος τῶν ἀδελφῶν; (90, 270).

524) Γυνή τις πλέκει περικνημίδας καὶ πωλεῖ ταύτας πρὸς 3,50 δρχ. τὸ ζεῦγος· τὸ νῆμα ἀξίζει 7,50 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον, καὶ 12 ζεύγη ἔχουν βάρος 2 χιλιόγ. 160 γραμμάρια· πόσον κερδίζει εἰς ἕκαστον ζεῦγος καὶ πόσον κερδίζει τὸ ἔτος, ἐὰν πλέκῃ 21 ζεύγη κατὰ μῆνα;

(Τὸ ζεῦγος ἔχει βάρος 180 γραμ.· ἡ ἀξία τοῦ νήματος ἑνὸς ζεύγους εἶνε 1,35 δρχ.· τὸ κέρδος κατὰ ζεῦγος εἶνε 2,15 δρχ.· τὸ ἐτήσιον κέρδος εἶνε 270,90 δρχ.).

525) Θέλει νὰ ἐμβάσῃ τις ταχυδρομικῶς εἰς φίλον του 490 δραχ.· ποῖον ποσὸν θὰ φέρῃ ἡ ταχυδρομικὴ ἐπιταγὴ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν 15 λεπτῶν γραμματοσήμου καὶ 1 % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἐπιταγήν; (485 δρχ.).

526) Ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος 17 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς, ἂν ἐκ τῆς πωλήσεως αἱ εἰσπραχθεῖσαι δραχμαὶ εἶνε 3650,40. (3120).

527) Πατήρ τις ἀποθανών διέταξεν ἡ ἐξ 20000 δραχμῶν περιουσία του νὰ διανεμηθῇ εἰς τὰ τρία τέκνα του οὕτως, ὥστε τὰ μερίδια τοκιζόμενα πρὸς 5 % νὰ γίνωνται μετὰ τῶν τόκων των ἴσα, ὅταν ἕκαστον τέκνον γίνῃ 21 ἐτῶν· αἱ ἡλικίαι τῶν τέκνων εἶνε ἤδη 9 ἔτη, 11 ἔτη καὶ 15 ἔτη· ποῖον μερίδιον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον τέκνον;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦ α^ου τέκνου τὸ μερίδιον τοκιζόμενον πρὸς 5 % ἐπὶ 21-9 ἔτη, ἤτοι ἐπὶ 12 ἔτη, αὐξάνεται κατὰ τὰ $\frac{5 \times 12}{100}$ ἑαυτοῦ, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμόν:

$$1 + \frac{5 \times 12}{100} = \frac{16}{10}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τοῦ β^ου τὸ μερίδιον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{15}{10}$ καὶ τοῦ γ^ου ἐπὶ $\frac{13}{10}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ προκύπτοντα ταῦτα τρία γινόμενα εἶνε ἴσα, ἕπεται ὅτι τὰ ζητούμενα μερίδια εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{16}{10}, \frac{15}{10}, \frac{13}{10}$, ἤτοι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{10}{16}, \frac{10}{15}, \frac{10}{13}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ μερίσωμεν τὰς 20000 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 195, 208, 240.

528) Πόσας ὀκάδας οἴνου, οὗ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 75 λεπτά, καὶ οἴνου, οὗ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 55 λεπτά, πρέπει νὰ συγκεράσωμεν, διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν 350 ὀκάδας κράματος, οὗ ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά;

529) Πόσα δράμια ἀργύρου καθαρότητος 0,900 καὶ ἀργύρου καθαρότητος 0,840 πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν, διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν 80 δράμια ἀργύρου καθαρότητος 0,850;

530) Ἐργάτης τις εἰργάσθη 12 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον δραχμῶν 3,60, 8 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον 4,20 δρ. καὶ 5 ἡμέρας μὲ ἡμερομίσθιον δρ. 3,30· πόσον ἦτο κατὰ μέσον ὅρον τὸ ἡμερομίσθιον αὐτοῦ;

531) Πόσα δράμια χαλκοῦ πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μετὰ 100 δραμ. ἀργύρου καθαρότητος 0,900 καὶ 60 δραμίων ἀργύρου καθαρότητος 0,830 διὰ ν' ἀποτελεσθῇ κρᾶμα ἔχον βαθμὸν καθαρότητος 0,700;

532) Συγχωνεύσαντες 40 δράμια ἀργύρου καθαρότητος 0,850 μετὰ 25 δραμίων ἄλλου εἴδους ἀργύρου ἐλάβομεν κρᾶμα καθα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρότητος 0,800· ποῖος ἦτο ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ δευτέρου εἴδους ἀργύρου ;

533) Ἐδάνεισέ τις 25400 δρχ.· μέρος μὲν πρὸς 5 $^0/_0$, μέρος πρὸς $5^1/_2$ $^0/_0$ καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς 6 $^0/_0$· ἐλάμβανε δὲ ἐτησίως ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν ἴσους τόκους· πόσας δραχμὰς ἐδάνεισε πρὸς 5 $^0/_0$, πόσας πρὸς $5^1/_2$ $^0/_0$ καὶ πόσας πρὸς 6 $^0/_0$;

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα εὐκόλως λύομεν τὸ πρόβλημα.

534) Ἔμπορος ἀναλαμβάνει ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 16000 δρχ.· μετὰ 4 μῆνας προσλαμβάνει καὶ συνέταιρον, ὅστις καταβάλλει 18000 δρχ.· 6 δὲ μῆνας μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνέταιρον καταβάλλοντα 20,000 δρχ. Μετὰ 2 ἔτη καὶ 10 μῆνας ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον ὅτι ἐκέρδησαν ἐξ αὐτῆς 8400 δρχ. Πόσας ἐκ τούτων θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

535) Εἰς γραμμάτιον 1200 δρχ. ἐξοφληθὲν 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἐγένετο ὑφαίρεσις δρχ. 25,20· πρὸς τί ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις ;

536) Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του γραμμάτιον δρχ 414 προεξωφλήθη διὰ δρχ. 400 πρὸς 7 $^0/_0$;

537) Γραμμάτιόν τι ἐξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 1008,50 δρχ.· πόσον ἦτο τὸ ἐν αὐτῷ γεγραμμένον ποσόν ;

538) Ἐτόκισέ τις κεφαλαίου 8000 δραχ. τὰ μὲν $\frac{2}{5}$ πρὸς 6 $^0/_0$, τὰ δὲ λοιπὰ πρὸς 9 $^0/_0$· ἔλαβε δὲ ἐξ ἀμφοτέρων μετὰ χρόνον τινὰ τόκον δρχ. 884· διὰ πόσον χρόνον ἔλαβε τὸν τόκον τοῦτον ; (1 ἔτ. 5 μ.)

539) Τοκίσας τις 6400 δρχ., μέρος πρὸς 6 $^0/_0$, τὸ λοιπὸν δὲ πρὸς 8 $^0/_0$ ἔλαβε διὰ τόκους 14 μηνῶν δρχ. 532· πόσον ἦτο ἑκάτερον τῶν μερῶν ; (2800, 3600).

540) Εἰς πόσον χρόνον οἱ τόκοι κεφαλαίου τοκιζομένου πρὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

10 % ἀποτελοῦσι ποσότητα ἴσην πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ κεφαλαίου;

541) Ἔμπορος μετεχειρίσθη εἰς ἐπιχείρησίν τινα κεφάλαιον δραχ. 6000· ληξάσης δὲ τῆς ἐπιχειρήσεως μετὰ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνας, εὗρεν ὅτι ἐζημιώθη 800 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐζημιώθη;

542) Ἐξ οἰκίας, τὴν ὁποίαν ἠγόρασέ τις ἀντὶ 40000 δραχμῶν, ἔλαβεν ἐν διαστήματι 3 ἐτῶν καθαρὸν εἰσόδημα δρχ. 9600· πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἔφεραν εἰς αὐτὸν τὰ χρήματά του;

543) Εἰς πόσον χρόνον ποιμήν τις θὰ φέρῃ ὡς τόκον βούτυρον 7 ὀκάδων εἰς τὸν δανείσαντα αὐτὸν 15 λίρας (1 λίρα=40 δρχ.) μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ δίδῃ ὡς ἐτήσιον τόκον τῶν 100 δραχμῶν 2 ὀκάδας βουτύρου; (7 μῆνες).

544) Ἐδάνεισέ τις εἰς ποιμένα 15 λίρας (1 λίρ.=40 δρχ.) μὲ τὴν συμφωνίαν αἱ 100 δραχμαὶ νὰ φέρουν εἰς 1 ἔτος ὡς τόκον 2 ὀκάδας βουτύρου· πόσας ὀκάδας βουτύρου πρέπει νὰ φέρῃ ὡς τόκον ὁ ποιμήν, ἂν ἐπιστρέψῃ τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον μετὰ 7 μῆνας; (7 ὀκ.).

545) Πόσας λίρας (1 λίρ.=40 δρχ.) ἐδανείσθη ποιμήν τις, ὁ ὁποῖος μετὰ παρέλευσιν 7 μηνῶν ἔδωκε τόκον 7 ὀκάδας βουτύρου, ἂν ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος εἶνε 2 ὀκάδες βουτύρου; (600 δρχ.=15 λίρ.).

546) Ἀσφαλίσας τις χρηματόδεμα πρὸς $1\frac{1}{2}$ τοῖς χιλίοις ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα δραχμὰς 90· πόσας δραχμὰς περιεῖχε τὸ χρηματόδεμα;

547) Ἠσφάλισέ τις φορτίον πλοίου διὰ δραχμὰς 40000 πρὸς $2\frac{1}{2}$ τοῖς χιλίοις· πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ;

548) Πεφρυγμένου καφὲ 1 ὀκ. 150 δράμια ἐκ πόσου ἀφρύκτου προῆλθον, ἂν ἡ ἐκ τῆς φρύξεως ἐλάττωσις εἶνε 12,50 %;

549) Ἔργον τι εἶνε ἀνάγκη νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 18 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο δὲ ἐμισθώθησαν 10 ἐργάται, οἵτινες ἐργαζόμενοι 7

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥρας τὴν ἡμέραν ἐξετέλεσαν τὸ τρίτον τοῦ ἔργου εἰς 8 ἡμέρας· πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει περισσότερον νὰ ἐργάζωνται, διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ λοιπὸν τοῦ ἔργου εἰς τὰς λοιπὰς ἡμέρας;

550) Τάπης ἔχων μῆκος 8 πήχεων καὶ πλάτος 4 πήχεων ἀξίζει 400 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ἄλλος τάπης τῆς αὐτῆς ποιότητος ἔχων μῆκος $5\,^1/_2$ πήχεων καὶ πλάτος $3\,\frac{7}{8}$;

551) Τὰ 4,240 χιλιόγραμμα πράγματός τινος ἀξίζουν 36 δρχ., 50· πόσον ἀξίζουν 4 ὀκ. 250 δρμ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

552) Ἀτμόπλοιον ἔχον ταχύτητα $8\,^1/_2$ μιλίων καθ' ὥραν διανύει διάστημά τι εἰς 3 ἡμ. 6 ὥρ. 40′· ἕτερον ἀτμόπλοιον ἔχον ταχύτητα 10 μιλίων καθ' ὥραν εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ αὐτὸ διάστημα;

553) Εἰς 6 ὥρ. 30′ κινητόν τι ὁμαλῶς κινούμενον διήνυσε 43,540 στάδια· πόσα στάδια θὰ διανύσῃ εἰς 9 ὥρ. 45′;

554) Ἐκ κρουνοῦ χύνοντος κατὰ πᾶν πρῶτον λεπτὸν 12 ὀκ. 300 δρμ. ὕδατος δεξαμενή τις πληροῦται εἰς 6 ὥρ. 10′ 45″· εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ αὐτὴ δεξαμενὴ ὑπὸ κρουνοῦ χύνοντος 20 ὀκ. 250 δράμ. κατὰ λεπτόν;

555) Εἰς 15′ 25″ ἐκρέουσιν ἐκ κρουνοῦ τινὸς 200 ὀκ. 300 δρμ. ὕδατος· πόσαι ὀκάδες ὕδατος ἐκρέουσιν εἰς 2 ὥρ. 20′ 40″;

556) Στατῆρες 25 καὶ 18 ὀκάδες πόσους τόνους κάμνουσιν;

557) 180 χιλιόγραμμα καὶ 250 γραμμάρια πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουσιν;

558) Νὰ τραπῶσι 240 τετρ. μέτρα εἰς τετρ. τεκτον. πήχεις.

559) Νὰ τραπῶσι 17,570 μέτρα εἰς πήχεις.

560) 240 ὑάρδαι πόσα μέτρα καὶ πόσους πήχεις ἀποτελοῦσιν;

561) Ἐὰν πράγματος ληφθῶσι τὰ 0,128 καὶ τὰ 0,48 καὶ τὰ 0,1596, πόσον μέρος αὐτοῦ λαμβάνεται καὶ πόσον ὑπολείπεται;

562) Ἔμπορος ἐπώλησε 45 πήχεις ὑφάσματος μὲ ὠφέλειαν 1,50 δρχ. τὸν πῆχυν· ἐπώλησε προσέτι 30 πήχεις ἄλλου ὑφάσματος μὲ ζημίαν 35 λεπτῶν τὸν πῆχυν· πόσον κέρδος τοῦ ἔμεινεν ἐκ τῶν πωλήσεων τούτων;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

563) Διὰ 13,45 μέτ. ὑφάσματος ἐπλήρωσέ τις δραχμὰς 45,80· πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

564) Ὁδοιπόρος διέτρεξεν ὁδὸν 60 σταδίων εἰς 13 ὥρας· τὰ μὲν $\frac{2}{3}$ τῆς ὁδοῦ διήνυσε μὲ ταχύτητα 5 σταδίων καθ' ὥραν, τὰ δὲ λοιπὰ μὲ ἄλλην ταχύτητα· τίς ἦτο ἡ ταχύτης αὕτη;

565) Τεμάχιον ὑφάσματος ἐπληρώθη ἀντὶ 468 δραχμῶν· τὸ τρίτον ἐπωλήθη ἔπειτα μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, ἐπὶ δὲ τοῦ ὑπολοίπου προέκυψε ζημία 60 λεπτῶν κατὰ μέτρον· ἡ ὁλικὴ οὕτω ζημία ἦτο δραχμαὶ 28,80· νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ μέτρου.

Λύσις.—Εἰς τὰ 2 τρίτα τοῦ ὑφάσματος ἐγένετο ζημία 28,80 δρχ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μέτρων εἰς τὰ 2 ταῦτα τρίτα ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα πόσας φορὰς 0,60 δρχ. χωροῦν εἰς τὰς 28,80 δρχ.

Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν μέτρων τούτων εἶνε.....288 : 6=48 μ.
Τὸ τρίτον τοῦ τεμαχίου ἔχει μῆκος 24 μ. καὶ τὸ ὅλον.....72 μ.
Ἡ ἀξία ἄρα 1 μέτ. εἶνε..... 468 : 72 = 6,50 δρχ.

566) Τρεῖς ἐργάται εἰργάσθησαν ὁμοῦ καὶ ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον. Ὁ πρῶτος κάμνει 1 μέτ. εἰς 1 ὥραν, ὁ δεύτερος 1 μέτ. εἰς 50′ καὶ ὁ τρίτος 1 μέτ. εἰς 45′· τὸ ἐκτελεσθὲν ἔργον ἦτο 477 μέτρων· νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσας ἐργασίμους δεκαώρους ἡμέρας ἐτελείωσε τὸ ἔργον. $\left(13\frac{1}{2}\right)$.

567) Ἔμπορος ἠγόρασε 31 μ. ὑφάσματος πρὸς 18,75 δρχ. τὸ μέτρον· ἐπώλησε 14 μ. μὲ κέρδος 11 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς· ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου ἐκέρδησεν 29 δρχ.· ποῖον εἶνε τὸ ὁλικὸν κέρδος καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν ἐν ὅλῳ; (Ὁλικὸν κέρδος 57,87 δρχ.—Κέρδος τοῖς ἑκατὸν 9,95 %).

Ἐρωτήματα διάφορα.

Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶνε μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου; — Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν;—

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς ἀτελῆ διαίρεσιν δύο ἀκεραίων δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ πηλίκου; καὶ πότε; — Τὶ σημαίνει ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 20 ἐπὶ $\frac{5}{4}$; — Τί πρέπει νὰ κάμωμεν, ἵνα εὕρωμεν τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ 20; — Εἰς τί χρησιμεύει ἡ ὑποδιαστολὴ εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς; — Ποῖον ὑπόλοιπον μένει εἰς τὴν διαίρεσιν 258:5; — Πῶς αὐξάνεται τὸ κλάσμα $\frac{10}{3}$ κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ διὰ πράξεως γινομένης μόνον εἰς τὸν ἀριθμητήν; — Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῆται ἀκριβῶς διά τινος ἄλλου, διαιροῦνται καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ πρώτου διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου; — Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι χωροῦν εἰς 4 κυβικὰ μέτρα; — Πόσα ἑκτάρια καὶ ἄρ κάμνουν 24705 τετρ. μέτρα; — Τί ἐννοοῦμεν λέγοντες πηλίκον δύο ἀριθμῶν μὲ δοθεῖσαν προσέγγισιν; — Ποίαν μεταβολὴν λαμβάνει κλάσμα, οὗ ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιάζεται ἐπί τινα ἀριθμόν; — Πόσον βάρος ἔχει εἷς κυβικὸς δάκτυλος ὕδατος; — Ἂν εἰς τὸν μεγαλύτερον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν προσθέσωμεν 30 μονάδας, εἰς δὲ τὸν μικρότερον ἄλλας τόσας, τί γίνεται ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν; — Εἶνε διαιρετὸς ὁ 840 διὰ 12 καὶ διὰ ποῖον λόγον; — Τί λέγεται λόγος δύο ἀριθμῶν; — Τί λέγεται ἀναλογία; — Τί λέγεται βαθμὸς καθαρότητος κράματος; — Τίνα ἐπίδρασιν ἔχουν τὰ μηδενικὰ προσγραφόμενα εἰς τὰ δεξιὰ ἀκεραίου καὶ τίνα εἰς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ; — Τί σημαίνει ἡ παράστασις $2^3 \times 3 \times 5^2$; — Πῶς εὑρίσκονται ἀπὸ στόματος τὰ γινόμενα 48×25 καὶ 15×12; — Τίς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 δίδει τὸν ἀριθμὸν 1393; — Πόσον ἀξίζει τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ὅταν τὸ ἑκτάριον ἀξίζῃ 2500 δραχμάς; — Πῶς διαιροῦμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου; — Πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ πλευρὰ κυβικῆς δεξαμενῆς χωρούσης 1000 χιλιόγραμμα ὕδατος; — Τί ἐννοοῦμεν λέγοντες πρώτους παράγοντας ἑνὸς ἀριθμοῦ; — Πῶς οὗτοι εὑρίσκονται; — Ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ χιλιομέτρου καὶ χιλιοστομέτρου; — Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων πηλίκου χωρὶς νὰ ἐκτελῶμεν τὴν διαίρεσιν; κ.τ.λ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Α΄. ΓΕΝΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Χρεώστης λέγεται ὁ ὀφείλων τι.

Πιστωτὴς λέγεται ὁ εἰς ὃν ὀφειλεταί τι, τουτέστιν ὁ ἔχων λαμβάνειν τι.

Χρεώνειν τινὰ σημαίνει: καταχωρεῖν ἐν τῷ λογαριασμῷ του ὅτι οὗτος ὀφείλει τι.

Πιστώνειν τινὰ σημαίνει: καταχωρεῖν ἐν τῷ λογαριασμῷ του ὅτι τῷ ὀφείλεταί τι, τουτέστιν ὅτι οὗτος ἔχει λαμβάνειν τι.

Χρέωσις ἢ δοῦναι. — Θέτουσι τὴν λέξιν ταύτην εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα λογαριασμοῦ τινος, διὰ νὰ δείξωσιν ὅτι τὰ ποσὰ τὰ καταχωρημένα εἰς τὴν σελίδα ταύτην ὀφείλονται ὑπὸ τοῦ προσώπου, δι' ὃ ὁ λογαριασμὸς οὗτος ἠνοίχθη.

Πίστωσις ἢ λαβεῖν. — Θέτουσι τὴν λέξιν ταύτην εἰς τὴν δεξιὰν σελίδα λογαριασμοῦ τινος, διὰ νὰ δείξωσιν ὅτι τὰ ποσὰ τὰ καταχωρημένα εἰς τὴν σελίδα ταύτην ὀφείλονται εἰς τὸ πρόσωπον, δι' ὃ ὁ λογαριασμὸς οὗτος ἠνοίχθη.

Ἡ χρέωσις τοῦ λογαριασμοῦ προσώπου τινὸς σύγκειται ἐξ ὅλων τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα τοῦτο ὀφείλει, ἡ δὲ πίστωσις σύγκειται ἐξ ὅλων τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα τῷ ὀφείλονται.

Τὸ σύνολον τῶν ποσῶν τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως καλεῖται *λογαριασμός*.

Διακανόνισις λογαριασμοῦ λέγεται ἡ εὕρεσις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς χρεώσεως καὶ τῆς πιστώσεως· ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη λέγεται *ὑπόλοιπον* τοῦ λογαριασμοῦ.

Τὸ ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ τινος εἶνε *χρεωστικόν*, ὅταν τὸ σύνολον τῶν χρεώσεων (δοῦναι) ὑπερβαίνῃ τὸ τῶν πιστώσεων (λαβεῖν), ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει λέγεται *πιστωτικόν*. Ὅταν αἱ δύο ἀθροίσεις τῆς τε πιστώσεως καὶ τῆς χρεώσεως εἶνε ἴσαι, λέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γομεν ὅτι ὁ λογαριασμὸς ἐξώφλησεν. Ἔστω λ. χ. ὁ κατωτέρω ἀναφερόμενος λογαριασμὸς ἐπ' ὀνόματι τοῦ Γ. Α.

Δοῦναι				Γεώργιος Α....			Δαβεῖν
1907				1907			
Μαΐου ...	30	Τιμολόγιον	Δρ. 1000 —	Ἰουνίου ..	1	Ἐμβασμά του ..	Δρ. 1200 —
Ἰουνίου ..	20	»	» 1000 —	» ..	30	Μετρητὰ πρὸς ἐξόφλησιν	» 800 —
			Δρ. 2000 —				Δρ. 2000 —

Ὁ λογαριασμὸς οὗτος, ὁ ἐπ' ὀνόματι Γ. Α., παρουσιάζει ὑπόλοιπον δρχ. 800, τὸ ὁποῖον, ὅταν πληρώσῃ, ἐγγράφεται εἰς τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαβεῖν τοῦ λογαριασμοῦ του, ὡς μετρητὰ πρὸς ἐξόφλησιν· οὕτω δὲ γίνεται ἐξόφλησις τοῦ λογαριασμοῦ ἐξισουμένων τῶν δύο ἀθροί-

Δοῦναι	Γ.	Α.	Λαβεῖν
1907			
Μαΐου .... 30 Τιμολόγιον	Δρ. 1000 —	Ἰουνίου .. 1 Ἔμβασμα	Δρ. 1200 —
Ἰουνίου ... 20 »	» 1000 —	» .. 20 Πρὸς ἐξίσωσιν ..	» 800 —
	—		—
	Δρ. 2000 —		Δρ. 2000 —
Ἰουνίου ... 21 Ὑπόλοιπον εἰς νέον...	Δρ. 800 —		

σεων χρεώσεως καὶ πιστώσεως, κάτωθεν τῶν ὁποίων σύρονται δύο γραμμαὶ πρὸς ἔνδειξιν τῆς ἐξοφλήσεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ γνωρίζωμεν, εἰς ποῖον σημεῖον εὑρίσκεται λογαριασμός τις, κλείομεν τοῦτον μεταφέροντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς νέον πρὸς ἐξίσωσιν ἐγγράφοντες αὐτὸ εἰς τὴν ἀσθενεστέραν πλευράν. Οὕτως ὁ ἀνωτέρω λογαριασμὸς τοῦ Γ. Α, δεικνύει ὑπέρβασιν εἰς χρέωσίν του δραχμῶν 800· ἡ ἄθροισις δηλονότι τοῦ Δοῦναι ὑπερτερεῖ τὴν τοῦ Λαβεῖν κατὰ 800 δραχμάς· τὰς δραχμὰς ταύτας ἐγγράφομεν εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ Λαβεῖν μεταφέροντες ταύτας εἰς νέον εἰς τὴν ἀντίθετον πλευράν.

Μεταφορὰ λογαριασμοῦ. Μεταφέρομεν λογαριασμόν, ὅταν μία σελὶς συμπληρωθῇ· πρὸς τοῦτο δὲ ἀθροίζομεν τήν τε χρέωσιν καὶ τὴν πίστωσιν καὶ τὰ ἀθροίσματα τούτων γράφομεν εἰς τὴν τελευταίαν γραμμὴν μὲ τὸ αἰτιολογικὸν «Μεταφέρεται εἰς σελίδα. . .» ἢ «Εἰς μεταφορὰν εἰς σελίδα. . .». Ἔπειτα εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῆς νέας σελίδος γράφομεν «Ἐκ μεταφορᾶς ἐκ σελίδος. . .» ἢ ἁπλῶς «Μεταφορὰ ἐκ σελίδος. . . Δρχ. . .».

Ἐνεργητικὸν ἀποτελεῖ πᾶσα ἀξία ἐκτιμητέα εἰς χρῆμα (ἐμπορεύματα, γραμμάτια, χρεώγραφα κτλ.) καὶ πᾶσα πίστωσις.

Παθητικὸν ἀποτελεῖ πᾶσα ὀφειλὴ τοῦ ἐμπόρου, τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ γραμμάτια καὶ ἀποδοχαί.

Κεφάλαιον ἢ καθαρὸν ἐνεργητικὸν λέγεται τὸ ἐπὶ πλέον τοῦ ἐνεργητικοῦ ἀπὸ τοῦ παθητικοῦ, ἤτοι ἡ διαφορὰ πάντων ἐν γένει τῶν λογαριασμῶν τῶν ἀντιπροσωπευόντων ἀξίας καὶ πρόσωπα (ἀνταποκριτὰς κτλ.), ἥτις ἐξάγεται ἐκ τῶν λογαριασμῶν, οἵτινες συναθροίζονται εἰς ἓν βιβλίον καλούμενον Καθολικόν.

Β΄. ΠΕΡΙ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἐν Ἑλλάδι ἕκαστος ἔμπορος εἶνε ὑποχρεωμένος κατὰ τὸν Νόμον νὰ κρατῇ ἐν τάξει τὰ ἑξῆς βιβλία:

Τὸ ἡμερολόγιον (Journal), **Τὸ βιβλίον τῶν ἀπογραφῶν** (Inventaire) καὶ **τὸ βιβλίον τῆς ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν** (copie de lettres)· ἐπίσης δέον νὰ ταξινομῇ κατὰ χρονολογικὴν σειρὰν καὶ φυλάττῃ ἐντὸς φακέλλων τὰς ἐπιστολάς, ἃς λαμβάνει.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶς ἔμπορος μὴ κρατῶν ἐν τάξει τὰ ἀνωτέρω βιβλία καταδιώκεται ὡς χρεωκόπος ἐν περιπτώσει πτωχεύσεως.

Τὰ ἐν τάξει κρατούμενα βιβλία ἔχουσιν ἀποδεικτικὴν ἰσχὺν προσαγόμενα ἐνώπιον τοῦ δικαστηρίου.

I. Ἡμερολόγιον.

Ἡμερολόγιον καλεῖται τὸ βιβλίον, εἰς ὃ δέον ὁ ἔμπορος νὰ καταχωρῇ καθ' ἑκάστην καὶ κατὰ χρονολογικὴν σειράν, πάσας ἀνεξαιρέτως τὰς πράξεις, ἃς ἐνεργεῖ, μὴ ἐξαιρουμένων οὐδὲ τῶν οἰκιακῶν του ἐξόδων, ἄνευ κενῶν, διαγραφῶν καὶ ξεσμάτων.

Ὁ νόμος δὲν περιγράφει τρόπον συντάξεως τοῦ ἡμερολογίου, καὶ ἑπομένως ἕκαστος ἔμπορος δύναται νὰ συντάσσῃ τοῦτο, καθ' οἱονδήποτε τρόπον κρίνει προσφορώτερον, ἀρκεῖ νὰ ἀκολουθῇ τοὺς ὑπὸ τοῦ Νόμου διαγραφομένους τύπους, αἱ δὲ καταχωρούμεναι πράξεις νὰ εἶνε σαφεῖς.

Τὸ ἡμερολόγιον καθὼς καὶ τὸ βιβλίον τῶν ἀπογραφῶν δέον νὰ ὦσι χαρτοσημασμένα καὶ μονογεγραμμένα παρὰ τοῦ Προέδρου τῶν Πρωτοδικῶν.

II. Βιβλίον ἀπογραφῶν.

Βιβλίον ἀπογραφῶν καλεῖται τὸ βιβλίον, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος καταχωρεῖ λεπτομερῶς τὴν ἀπογραφὴν ὁλοκλήρου ἐν γένει τῆς περιουσίας αὐτοῦ καὶ τὸν ἐτήσιον Ἰσολογισμὸν του· τὴν ἀπογραφὴν ταύτην ὑποχρεοῦται ὑπὸ τοῦ Νόμου ὁ ἔμπορος νὰ συντάσσῃ τοὐλάχιστον ἅπαξ τοῦ ἔτους.

ΤΥΠΟΣ ΑΠΟΓΡΑΦΗΣ

ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΝ

Ἐμπορεύματα	12000,00	δρχ.
Εἰς ταμεῖον	1580,45	
Καταθέσεις εἰς Ἐθνικὴν Τράπεζαν	2600,80	
Πιστώσεις διάφοροι	2200,55	
Γραμμάτια εἰσπρακτέα	950	
Ἐνεργητικὸν ἐν ὅλῳ	19331,80	δρχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΘΗΤΙΚΟΝ

Ὀφειλόμενα εἰς διαφόρους	6000,75	δρχ.
Γραμμάτια πληρωτέα	3900,40	»
Παθητικὸν ἐν ὅλῳ...	9901,15	δρχ.

Ἐνεργητικὸν.....	19331,80	δρχ.
Παθητικὸν	9901,15	»
Ὑπεροχὴ ἐνεργητικοῦ	9430,65	δρχ.

Ὅτι ἀκριβὲς καὶ ἀληθές.

Ἀθῆναι 1 Ἰουνίου 1907.

(Ὑπογραφή).

Αἱ 9430 δρ., 65 παριστῶσι τὴν ἀτομικὴν περιουσίαν τοῦ ἐμπόρου· ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι ἡ κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπογραφὴν τοῦ παρελθόντος ἔτους ὑπεροχὴ τοῦ ἐνεργητικοῦ ὑπὲρ τὸ παθητικὸν ἦτο 3600 δρχ.,50, ἡ διαφορὰ 9430,65—3600,50, ἤτοι αἱ 5830,15 δρ. ἐκφράζουν τὴν αὔξησιν τοῦ κεφαλαίου ἀπὸ τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ προηγουμένη ἀπογραφή.

Τὸ ἐνεργητικὸν τῆς ἀπογραφῆς περιλαμβάνει: 1) τὴν ἀξίαν τῆς διευθετήσεως τοῦ ἐμπορικοῦ καταστήματος, 2) τὰ ἐν τῷ καταστήματι ἐμπορεύματα, ὧν ἡ ἀξία ἐκτιμᾶται ὅσον τὸ δυνατὸν προσεγγίζουσα εἰς τὴν πραγματικήν[1], 3) τὰς ἐν τῷ ταμείῳ εἴτε παρά τινι τραπέζῃ κατατεθείσας δραχμάς, 4) τὰ ὀφειλόμενα ὑπὸ τῶν πελατῶν ποσὰ καὶ ἐν γένει τὰ εἰσπρακτέα γραμμάτια.

Τὸ παθητικὸν τῆς ἀπογραφῆς περιλαμβάνει τὰ ὀφειλόμενα εἰς διαφόρους ποσὰ καὶ ἐν γένει τὰ πληρωτέα γραμμάτια.

III. Βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν.

Ὁ ἔμπορος ὑποχρεοῦται νὰ κρατῇ ἀντίγραφα τῶν σχετιζομένων πρὸς τὸ ἐμπόριον ἐπιστολῶν κατὰ χρονολογικὴν σειρὰν εἰς βιβλίον, ὅπερ κοινῶς καλεῖται *κόπια*· ἡ ἀντιγραφὴ ἑκάστης ἐπιστολῆς γίνεται στιγμιαίως γραφομένης τῆς ἐπιστολῆς δι' εἰδικῆς πρὸς τοῦτο μελάνης.

[1] Ἐκτὸς ἐὰν ὑπέστησαν φθοράν τινα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καθολικόν.—Ἐκτὸς τῶν τριῶν ἀνωτέρω βιβλίων ἔχει ἀνάγκην ὁ ἔμπορος καὶ ἄλλου βιβλίου ἀπαραιτήτου διὰ τὴν ταξινόμησιν τῶν ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ του ἄρθρων[1]· τὸ βιβλίον τοῦτο λέγεται *Καθολικὸν* (Grand livre).

Ὅταν μετὰ τὰς ἐγγραφάς μας κατὰ τὴν ἑξαμηνίαν ἢ καθ' ὅλον τὸ ἔτος θέλωμεν νὰ ἴδωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τούτων κατὰ τὴν λήξασαν περίοδον, προβαίνομεν ὡς ἑξῆς:

Μετὰ τὴν μεταφορὰν πασῶν τῶν ἐγγραφῶν ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου εἰς τὸ Καθολικὸν ἀθροίζομεν ἁπάσας τὰς μερίδας αὐτοῦ, τήν τε Χρέωσιν αὐτῶν καὶ Πίστωσιν, αἵτινες δέον νὰ συμφωνῶσι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν ἄθροισιν τοῦ Ἡμερολογίου, εἶτα δὲ προβαίνομεν εἰς τὴν ἀπογραφήν.

Βοηθητικὰ βιβλία

Ἐπειδὴ ἀποβαίνει σχεδὸν ἀδύνατον νὰ καταχωρῶνται αἱ ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου ἐνεργούμεναι πράξεις ἀμέσως εἰς τὸ Ἡμερολόγιον, εἴτε ἕνεκα τῆς πληθύος των, εἴτε ἕνεκα τῶν ὑπὸ τοῦ Νόμου ἀπαιτουμένων διατυπώσεων, εἴθισται ὅπως αἱ πράξεις αὗται καταχωρῶνται προχείρως εἰς βιβλίον, ὅπερ ἕνεκα τούτου καλεῖται **Πρόχειρον** (Main-courante), ἐξ οὗ δὲ κατόπιν συντάσσεται τὸ Ἡμερολόγιον.

Ἐκτὸς τούτου καὶ ἄλλα βοηθητικὰ βιβλία δύναται νὰ κρατῇ ὁ ἔμπορος, ὅταν θέλῃ νὰ παρακολουθῇ λεπτομερῶς μερίδα τινὰ τοῦ Καθολικοῦ, π. χ. βιβλίον ταμείου, βιβλίον ἀποθήκης κ.τ.λ.

Συμπέρασμα

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι ἡ καταστιχογραφία συνίσταται εἰς τὰ ἑξῆς:

---

1 *Ἄρθρον* καλεῖται ἡ ἐν τῷ ἡμερολογίῳ καταχώρησις πράξεως, δι' ἧς τὰ πρόσωπα, ἅτινα ὀφείλουσι, χρεοῦνται, τὰ δὲ πρόσωπα, ἅτινα ἔχουσι λαμβάνειν, πιστοῦνται. Ἕκαστον ἄρθρον δέον νὰ περιλαμβάνῃ τοὐλάχιστον ἕνα χρεώστην καὶ ἕνα πιστωτὴν τῆς ποσότητος, δι' ἣν γίνεται ἡ ἐγγραφή· τοῦτο δὲ καλεῖται *διπλογραφία*, τουτέστιν ἡ εἰς διπλοῦν ἐγγραφὴ πράξεώς τινος. Γενικὴ ἀρχὴ τῆς διπλογραφίας καὶ θεμελιώδης αὐτῆς νόμος εἶνε: «*Ὁ δίδων πιστοῦται, ὁ δὲ λαμβάνων χρεοῦται*»

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐγγραφὴ τῶν πράξεων ὑπὸ ἐμπόρου ἢ ἐμπορικῆς ἑταιρείας εἰς τὸ Πρόχειρον· μεταφορὰ τῶν πράξεων κατὰ χρονολογικὴν τάξιν ἐκτελέσεως εἰς τὸ Ἡμερολόγιον καὶ ἐκ τούτου μεταφορὰ τούτων εἰς τὸ Καθολικὸν εἰς τὰς οἰκείας μερίδας.

Ἐκ τοῦ Καθολικοῦ ἐξάγεται ἡ διαφορὰ τῶν πράξεων καὶ ἀποσπᾶται ὁ ἰσολογισμός, ὅστις δίδει τὴν κατάστασιν τοῦ ἐμπόρου.

Σημειωτέον ὅτι εἰς τὰς διαφόρους ἐπιχειρήσεις μεταχειρίζονται καὶ ἄλλα ἀκόμη βοηθητικὰ βιβλία, λ. χ. βιβλία γραμματίων εἰσπρακτέων, πληρωτέων, λήξεως γραμματίων, ἀγορῶν καὶ πωλήσεων χρεωγράφων δανείων, προεξοφλήσεων τιμολογίων κλπ. Τὰ ὑπὸ τοῦ Νόμου ὅμως ὁριζόμενα εἰσὶ μόνον τὸ Ἡμερολόγιον, τὸ τῆς Ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν καὶ τὸ τῶν Ἀπογραφῶν. Τὸ Ἡμερολόγιον καὶ τὸ τῶν Ἀπογραφῶν πρέπει νὰ εἶνε χαρτοσημασμένα μὲ 10/λεπτον χαρτόσημον ἀνὰ πᾶν φύλλον μὴ ὑπερβαῖνον τὸ μέγεθος φύλλου χαρτοσήμου καὶ εἰς τὴν τελευταίαν σελίδα νὰ φέρωσι τὴν περὶ τούτου μαρτυρίαν παρατιθεμένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σελίδων τῆς χρονολογίας τῆς μονογραφῆς μετὰ τῆς ὑπογραφῆς τοῦ ἐμποροδίκου ἢ προέδρου πρωτοδικῶν, ἢ εἰρηνοδίκου ἢ τοῦ δημάρχου ἢ ἑνὸς τῶν παρέδρων του. Πρέπει δὲ νὰ ὦσι βιβλιοδετημένα καὶ ἠριθμημένα, πρὸς τούτοις δὲ νὰ μονογραφῶνται καὶ ἐπιθεωρῶνται ἅπαξ τοῦ ἔτους.

Οἱ ἔμποροι ὀφείλουσι νὰ τηρῶσι τὰ βιβλία ταῦτα ἐπὶ 10ετίαν.

Γ' ΠΕΡΙ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ

Ἀπαραίτητοι εἰς ἕκαστον ἔμπορον εἶνε οἱ *γενικοὶ* καλούμενοι λογαριασμοί, τοιοῦτοι δὲ εἶνε οἱ ἑξῆς πέντε·

α') Ὁ λογαριασμὸς Ἐμπορεύματα, ὅστις δέον νὰ χρεοῦται μὲ ἅπαντα τὰ ἀγοραζόμενα ἢ ὁπωσδήποτε εἰσερχόμενα εἰς τὰς ἀποθήκας ἐμπορεύματα, καὶ νὰ πιστοῦται μὲ τὰ πωλούμενα ἢ ὁπωσδήποτε ἐξερχόμενα ἐκ τῶν ἀποθηκῶν ἐμπορεύματα.

β') Ὁ λογαριασμὸς Ταμείου, ὅστις δέον νὰ χρεοῦται μὲ πάσας τὰς εἰσπράξεις καὶ νὰ πιστοῦται μὲ πάσας τὰς πληρωμάς.

γ') Ὁ λογαριασμὸς Γραμματίων εἰσπρακτέων, ὅστις δέον νὰ χρεοῦται μὲ τὰ γραμμάτια, ἅτινα λαμβάνει ὁ ἔμπορος, καὶ νὰ πιστοῦται, ὅταν καὶ ἐφ' ὅσον τὰ γραμμάτια ταῦτα εἰσπράττονται.

δ') Ὁ λογαριασμὸς Γραμματίων πληρωτέων, ὅστις δέον νὰ πιστοῦται μὲ ἅπαντα τὰ γραμμάτια, ἅτινα ἀποδέχεται ὁ ἔμπο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρος δι' οἱανδήποτε αἰτίαν καὶ νὰ χρεοῦται, ὅταν τὰ γραμμάτια ταῦτα ἐξωφληθῶσιν ὁπωσδήποτε παρὰ τοῦ ἐμπόρου.

ε') Ὁ λογαριασμὸς Γενικῶν ἐξόδων, ὅστις δέον νὰ χρεοῦται μὲ ἅπαντα τὰ γενόμενα καὶ νὰ πιστοῦται μὲ τὰ εἰσπραττόμενα ἔξοδα.

Οἱ γενικοὶ λογαριασμοὶ θεωροῦνται ὡς ἀτομικοὶ λογαριασμοὶ τοῦ ἐμπόρου, δι' ὃν ἠνοίχθησαν τὰ βιβλία· ἑπομένως χρεώνειν ἢ πιστώνειν ἕνα τῶν ἀνωτέρω λογαριασμῶν εἶνε τὸ ἴδιον ὡς νὰ χρεώνῃ τις ἢ νὰ πιστώνῃ τὸν ἔμπορον αὐτὸν ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν τοῦ εἰδικοῦ τούτου λογαριασμοῦ.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω πέντε δύνανται νὰ ὑπάρξωσι καὶ ἕτεροι εἰσέτι λογαριασμοὶ ἀναλόγως τῆς φύσεως καὶ τῆς ἐργασίας τοῦ ἐμπόρου καὶ τῶν ἀναγκῶν τοῦ ἐμπορίου του.

Ἁπλογραφικὴ καὶ διπλογραφικὴ μέθοδος.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀρχὴν ὅτι, ὁ λαμβάνων Χρεοῦται καὶ ὁ δίδων Πιστοῦται, ἔχομεν δύο συστήματα ἢ μεθόδους Καταστιχογραφίας, τὴν *Ἁπλογραφικὴν* καὶ *Διπλογραφικήν*.

Διὰ τῆς Ἁπλογραφικῆς ἐγγράφομεν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον τὴν χρέωσιν ἢ τὴν πίστωσιν τοῦ τρίτου, ὅστις λαμβάνει ἢ δίδει ὑπονοουμένης τῆς ἀντιστοίχου πιστώσεως ἢ χρεώσεως τοῦ εἰς ὃν ἀνήκουσι τὰ βιβλία οὕτως, ὥστε καὶ εἰς τὸ Καθολικὸν μεταφέρεται μόνον ἡ χρέωσις ἢ ἡ πίστωσις· ἑκάστη δηλονότι πρᾶξις ἐγγράφεται ἅπαξ ἐν τοῖς βιβλίοις.

Παραδείγματος χάριν πωλοῦμεν εἰς τὸν Α. ἐμπορεύματα ἀξίας δρχ. 500 ἐγγράφομεν εἰς τὸ ἡμερολόγιον·

Δοῦναι ὁ Α... Τιμολόγιόν μας δρχ. 500

καὶ μεταφέρομεν ἀμέσως εἰς τὸ Καθολικὸν εἰς χρέωσιν τοῦ Α...

Δοῦναι **Α.....** **Λαβεῖν**

1907	30	Τιμολόγιον Δρ.	500	Ἰουνίου.	20	Πληρωμὴ Δρ.	500
Μαΐου							

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ὅταν ὁ Α. . . ἐξοφλήσῃ τὸ ποσὸν τοῦ τιμολογίου γράφομεν εἰς τὸ Ἡμερολόγιον:

Λαβεῖν ὁ Α. . . πληρωμή του Δρ. 500

καὶ μεταφέρομεν εἰς τὸ Καθολικὸν εἰς πίστωσίν του (εἰς τὸ λαβεῖν) δρ. 500, ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ τοῦ διπλογραφικοῦ συστήματος ἐγγράφομεν τὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν τοῦ τρίτου, ὅστις λαμβάνει ἢ δίδει, καὶ τὴν πίστωσιν ἢ χρέωσιν τοῦ δώσαντος ἢ λαβόντος καὶ εἰς ὃν ἀνήκουσι τὰ βιβλία. Οὕτως ὥστε ἕκαστον ἄρθρον (ἐγγραφὴ ἢ πρᾶξις) μεταφέρεται δὶς εἰς τὸ Καθολικὸν εἰς τὸ Δοῦναι ἢ Λαβεῖν τοῦ τρίτου καὶ εἰς τὸ Δοῦναι ἢ Λαβεῖν τῆς οἰκείας μερίδος τοῦ εἰς ὃν ἀνήκουσι τὰ βιβλία· ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐγγραφὴ ἔχει ὡς ἑξῆς:

*Δοῦναι ὁ Α. Τιμολόγιον δρ.*500.|*Λαβεῖν ἐμπ/τα πώλησις δρ.*500.

Χρεοῦται ὁ Α. ὡς λαβὼν καὶ πιστοῦται ὁ εἰς ὃν ἀνήκουσι τὰ βιβλία εἰς τὴν μερίδα Ἐμπ/τα, ὡς ἀντιπροσωπεύοντα τὴν δοθεῖσαν ἀξίαν, ὡς δώσαντα.

Α. . . . . . — *Εἰς ἐμπορεύματα*

Τιμολόγιον — *Δρ.* 500

μεταφέρονται ἀμέσως εἰς τὸ Καθολικὸν εἰς τὴν χρέωσιν τοῦ Α. καὶ εἰς τὴν πίστωσιν τῶν Ἐμπορευμάτων.

Δοῦναι — **Α. . . .** — **Λαβεῖν**

1907							
Μαΐου	30	Τιμολόγιον Δρ.	500				

Δοῦναι — **Ἐμπορεύματα** — **Λαβεῖν**

				1907			
				Μαΐου	30	Πώλησις εἰς Α. Δρ.	500

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δεδομένου λοιπὸν ὅτι ἑκάστη ἐγγραφὴ τοῦ Ἡμερολογίου μεταφέρεται δὶς εἰς τὸ Καθολικόν, ἅπαξ εἰς τὴν Χρέωσιν καὶ ἅπαξ εἰς τὴν Πίστωσιν, ἕπεται ὅτι ἡ ὁλικὴ ἄθροισις τῶν Χρεώσεων καὶ Πιστώσεων θὰ εἶνε ἴση καὶ ἡ ἰσότης αὕτη δίδει εἰς τὴν διπλογραφίαν τὸ πλεονέκτημα τῆς ἀκριβείας καὶ τοῦ ἐλέγχου, ὅστις δὲν ὑπάρχει παρὰ τῇ Ἁπλογραφίᾳ, ἥτις ὀλίγον κατ' ὀλίγον τίθεται ἐν ἀχρηστίᾳ ὑποχωροῦσα πρὸ τῶν πλεονεκτημάτων τῆς Διπλογραφίας.

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελ.	18	στίχ.	18	ἀντὶ προστιθέμενος	γράφε	προστιθέμενοι
»	21	»	22	» βάσανος ἀφαιρέσεως	»	βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως
»	31	»	2	» ὁ ζητούμενος εἶνε	»	ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε
»	31	»	6	» 3×3	»	8×3
»	32	»	3	» ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς	»	ὁ ζητούμενος ἄρα ἀριθμὸς
»	45	»	7	» $100 = 600$	»	$100 \times 6 = 600$
»	55	»	τελευταῖος	ἐκτεμεν	»	ἐκτελοῦμεν
»	75	πίναξ παραδείγματος· οἱ ἀριθμοὶ τῆς 6′ στήλης νὰ γραφοῦν κατὰ σειρὰν ὡς ἑξῆς 2 2 3 3 5 5				
»	86	στίχ.	8	ἀντὶ ἀριθμὸς	γράφε	ἀριθμητὴς
»	94	»	20	» $7 \times 53 \times 7:7$	»	$7 \times 3 \times 5:7$
»	103	»	9	» $7 + \frac{20}{21}$	»	$4 + \frac{20}{21}$
»	129	»	9	» ἡ ἀξία $3 + \frac{3}{5}$ δρ.	»	ἡ ἀξία ἀπὸ $3 + \frac{3}{5}$
»	155	»	23	» ὁ βαθμὸς	»	τὸν βαθμὸν
»	193	»	11	» τὸ ὁμοειδὲς. . .	»	τὸν ὁμοειδὲς . . .
»	193	»	20	» δραχμὰς 7,50	»	δραχμὰς 17,50
»	222	»	16	» τοῦ αὐτοῦ τόκου	»	τοῦ ἁπλοῦ τόκου
»	231	»	8	» γενομένων	»	γινομένων
»	239	»	6	» προελθόντας	»	προελθόντος
»	243	»	9	» ἡ ζητεῖται...	»	ζητεῖται...
»	245	»	14	» 255	»	225
»	246	»	23	» 0,000580	»	0,00058
»	247	»	8	» δρ. 1,55	»	δρ. 1,15
»	251	»	4	» 3065,374	»	306 δρ. 374.

Οἱ αὔξοντ. ἀριθμοὶ τῶν προβλημάτων ἔχουν τεθῆ ἐσφαλμένως, ἤτοι ὡς ἑξῆς: 1—145, ἔπειτα 170—199 καὶ ἔπειτα 146—169. Λείπουν δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 200—208.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ν