ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩ, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ, ΣΧΟΛΕΙΩ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ Κ.Τ.Λ.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ,,
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
38—ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ—38
1949

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ Τῼ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚῼ ΣΧΟΛΕΙῼ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ Κ.Τ.Λ.

ΙΔΚ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
38—ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ—38
1949

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΤΥΠΟΙΣ: Α. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ ΛΕΚΚΑ 23—ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ—

Περὶ ἀνυσμάτων.

1. Ἀφοῦ τὸ ἄνυσμα AB κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οχ ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (AB)=(AO)+(OB), ἤτοι (AB)=−(OA)+(OB)=(OB)−(OA).

2. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἀνύσματος AB, χ ἡ τετμημένη αὐτοῦ καὶ χ_1, χ_2 αἱ τετμημέναι ἀντιστοίχως τῶν ἄκρων A καὶ B, ἔχομεν (AM)=(MB). Ἀλλὰ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι (AM)=$\chi-\chi_1$ καὶ (MB)=$\chi_2-\chi$. Ὥστε εἶναι $\chi-\chi_1=\chi_2-\chi$, ἤτοι $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$.

3. Τὰ ζητούμενα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστὰ εὐκόλως.

4. Εἶναι (−3,5), (−3,−5) καὶ (3,−5).

Τόξα καὶ γωνίαι.

5. Εἶναι $\frac{180}{\pi}$ μοιρῶν ἢ 57° 17′44,8″ περίπου.

6. Τὸ τόξον 1 βαθμοῦ εἶναι $\frac{360}{400}$ μοιρῶν, ἤτοι 54′.

7. Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{200}$ εὑρίσκομεν $45^0=\frac{45\pi}{180}$ ἀκτ.$=\frac{\pi}{4}$ ἀκτ., $60^0=\frac{60\pi}{180}$ ἀκτ.$=\frac{\pi}{3}$ ἀκτ., $150^0=\frac{150\pi}{180}$ ἀκτ.$=\frac{5\pi}{6}$ ἀκτ., $330^0=\frac{330\pi}{180}$ ἀκτ. $=\frac{11\pi}{6}$ ἀκτ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν : $45^0=\frac{45.200}{180}$ β.=50 β., $60^0=\frac{60.200}{180}$ β.$=\frac{200}{3}$ β., $150^0=\frac{150.200}{180}$ β.$=\frac{500}{3}$ β., $330^0=\frac{330.200}{180}$ β. $=\frac{1100}{3}$ β.

8. Εἶναι $20^0=\frac{20\pi}{180}=\frac{\pi}{9}$ ἀκ., $138^0 45'=\frac{138\frac{3}{4}\pi}{180}=\frac{37\pi}{48}$ ἀκ.

$$30^0=\frac{30\pi}{180}=\frac{\pi}{6}\text{ ἀκ., } 225^0 40'=\frac{225\frac{2}{3}\pi}{180}=\frac{677\pi}{540}\text{ ἀκ.,}$$

$$-60^0=-\frac{60\pi}{180}=-\frac{\pi}{3}\text{ ἀκ., } -150^0=-\frac{150\pi}{180}=-\frac{5\pi}{6}\text{ ἀκ.}$$

9. Εἶναι $37^0\ 32'\ 25''=37\frac{389}{720}\pi : 180$ ἀκ., $175^0\ 35'\ 45''=175\frac{1073}{1800}\pi : 180$ ἀκ.

10. Εἶναι $\frac{\pi}{4}$ ἀκ.$=\frac{180.\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{180^0}{4}=45^0$

$$\frac{5\pi}{6}\text{ ἀκ.}=\frac{180.\frac{5\pi}{6}}{\pi}=150^0,\ \frac{11\pi}{6}\text{ ἀκ.}=\frac{180.\frac{11\pi}{6}}{\pi}=330^0.$$

11. Εἶναι $\frac{2\pi}{3}$ ἀκ.$=\frac{180.2}{3}=120^{\circ}$.

$\frac{2\pi}{5}$ ἀκ.$=\frac{180.2}{5}=72^{\circ}$, $\frac{7\pi}{8}$ ἀκ.$=\frac{180.7}{8}=157^{\circ}\ 20'$.

12. Εἶναι $\frac{2\pi}{3}$ ἀκ.$=\frac{200.\ \frac{2\pi}{3}}{\pi}=133$ β. $33'\ 33''$ περίπου

$\frac{2\pi}{5}$ ἀκ.$=\frac{200.2}{5}=80$ β., $\frac{7\pi}{8}$ ἀκ.$=\frac{200.7}{8}=175$ β.

13. Ἡ γωνία $\frac{5\pi}{12}$ ἀκτινίων ἰσοῦται πρὸς 75°· ὥστε ἡ τρίτη γωνία ἰσοῦται πρὸς $180^{\circ}-(75^{\circ}+48^{\circ}\ 37')$. Ἐξ ἄλλου ἡ γωνία $48^{\circ}\ 37'$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{2917\pi}{10800}$ ἀκτίνια, ὥστε ἡ τρίτη γωνία ἰσοῦται πρὸς $\pi-\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2917\pi}{10800}\right)$ ἀκτίνια.

14. Εἶναι μοιρῶν $\frac{180.3,927}{5\pi}=\frac{36.3,927}{\pi}$ καὶ βαθμῶν $\frac{40.3,927}{\pi}$.

Σχέσεις μεταξὺ ἡμιτόνου, συνημιτόνου καὶ ἐφαπτομένης παντὸς τόξου.

15. Ἔστωσαν δύο τόξα ΑΜ, Α΄Μ΄ τοῦ αὐτοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο, τὰ ὁποῖα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον· ὥστε καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΜ καὶ Α΄ΟΜ΄ παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· εἶναι ἑπομένως ἴσαι· ἂν δὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ εἶναι τὸ (ΟΡ)=(ΠΜ) καὶ τοῦ Α΄Μ΄ εἶναι τὸ (ΟΡ΄)=(Π΄Μ΄), τὰ ἡμίτονα ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι τὰ τρίγωνα ΟΠΜ καὶ ΟΠ΄Μ΄ εἶναι ἴσα· ὥστε καὶ ΠΜ=Π΄Μ΄· ὅθεν οἱ λόγοι $\frac{ΠΜ}{ΟΑ}$ καὶ $\frac{Π'Μ'}{ΟΑ'}$ εἶναι ἴσοι κατ' ἀπόλυτον τιμήν, εἶναι δὲ καὶ κατὰ σημεῖον· διότι, ἂν τὰ ΟΒ καὶ τὰ ΠΜ εἶναι ὁμόρροπα (ἢ ἀντίρροπα) θὰ εἶναι καὶ τὰ ΟΒ΄ καὶ Π΄Μ΄ ὁμόρροπα (ἢ ἀντίρροπα).

16. Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι, ἤτοι εἶναι εφα.σφα=1· ἀλλὰ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιαζόμενοι καὶ δίδοντες γινόμενον θετικὸν εἶναι ἀμφότεροι ἢ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

17. $(ημα+συνα)^2=ημ^2α+συν^2α+2ημ\,α\,συν\,α=1+2ημα\,συν\,α$.

18. $συν^2α(1+εφ^2α)=συν^2α\left(1+\frac{ημ^2α}{συν^2α}\right)=συν^2α+ημ\,α^2=1$.

19. Ἔχομεν $ημ^2α-συν^2α=1-συν^2α-συν^2α=1-2συν^2α$· ὁμοίως ἔχομεν $ημ^2α-συν^2α=ημ^2α-(1-ημ^2α)=2ημ^2α-1$.

20. Ἔχομεν $συν^2α-ημ^2α=συν^2α-(1-συν^2α)=2συν^2α-1$ καὶ $συν^2α-ημ^2α=1-ημ^2α-ημ^2α=1-2ημ^2α$.

21. Εἶναι $συν^4α-ημ^4α=(συν^2α+ημ^2α)(συν^2α-ημ^2α)=συν^2α-ημ^2α$.

22. Ἔχομεν $ημ^2α\ συν^2β-συν^2α\ ημ^2β=ημ^2α\ (1-ημ^2β)-(1-ημ^2α)ημ^2β=ημ^2α-ημ^2α\ ημ^2β-ημ^2β+ημ^2α.ημ^2β=ημ^2α-ημ^2β$.

23. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta)-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\eta\mu^2\beta=$ $=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)=$ $=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1$.

24. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}$, τὸ πρῶτον μέλος γράφεται $\frac{1-\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}}{1+\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}}$· ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ σφα προκύπτει $\frac{\sigma\varphi\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha+1}$.

25. Εἶναι $1-2\eta\mu^2\alpha=1-\frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha-2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

26. Τὸ πρῶτον μέλος γράφεται $\frac{1+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}}=\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

27. $(1+\varepsilon\varphi\,\alpha)(\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha=$ $=\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=(\eta\mu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu\,\alpha)^2$.

28. $\varepsilon\varphi\,\alpha\left(1-\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}\right)+\sigma\varphi\alpha\left(1-\frac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}\right)=\varepsilon\varphi\,\alpha-\frac{1}{\varepsilon\varphi\,\alpha}+\sigma\varphi\,\alpha-$ $\frac{1}{\sigma\varphi\,\alpha}=\varepsilon\varphi\,\alpha-\sigma\varphi\,\alpha+\sigma\varphi\,\alpha-\varepsilon\varphi\,\alpha=0$.

Μεταβολαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας.

29. Εἶναι $\eta\mu(-90^\circ)=-1$, $\eta\mu(-180^\circ)=0$, $\eta\mu(-270^\circ)=1$, $\eta\mu(-360^\circ)=0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(-90^\circ)=0$, $\sigma\upsilon\nu(-180^\circ)=-1$, $\sigma\upsilon\nu(-270^\circ)=0$, $\sigma\upsilon\nu(-360^\circ)=1$.

30. Αἱ ζητούμεναι μεταβολαὶ συνάγονται εὐκόλως καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως· φαίνονται δὲ αὗται ἐκ τοῦ κάτωθι πίνακος.

τόξον α	0°	ἐλατ. −90°,	ἐλατ. −180°,	ἐλατ. −270°,	ἐλατ. −360°
ημ α	0	ἐλατ. −1	αὐξ. 0	αὐξ. 1	ἐλατ. 0
συν α	1	ἐλατ. 0	ἐλατ. −1	αὐξ. 0	αὐξ. 1

Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου λαμβάνονται εὐκόλως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.

31. Εἶναι $\varepsilon\varphi(-90^\circ)=\frac{-\infty}{+\infty}$, $\varepsilon\varphi(-180^\circ)=0$

$\varepsilon\varphi(-270^\circ)=\frac{-\infty}{+\infty}$, $\varepsilon\varphi(-360^\circ)=0$

καὶ $\sigma\varphi(-90^\circ)=0$, $\sigma\varphi(-180^\circ)=\frac{+\infty}{-\infty}$,

$\sigma\varphi(-270^\circ)=0$, $\sigma\varphi(-360^\circ)=\frac{+\infty}{-\infty}$.

32. Αἱ μεταβολαὶ δίδονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα, ἐξ οὗ κατασκευάζονται καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις αὐτῶν.

τόξον α	0°		90°		180°		270°		360°
εφ α	0	ἐλατ.	$\frac{-\infty}{+\infty}$	ἐλατ.	0	ἐλατ.	$\frac{-\infty}{+\infty}$	ἐλατ.	0
σφ α	$-\infty$	αὐξ.	0	αὐξ.	$\frac{+\infty}{-\infty}$	αὐξ.	0	αὐξ.	$+\infty$

33. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ΟΒ λαμβάνομεν ἄνυσμα ΟΚ μήκους $\frac{3}{5}$ καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν χορδὴν Μ΄Μ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Α΄Α. Τὰ τόξα τῆς κοινῆς ἀρχῆς ΑΜ καὶ ΑΜ΄ ἔχουν ἡμίτονον $\frac{3}{5}$.

Ὁμοίως λαμβάνομεν ἄνυσμα ΟΚ΄ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἔχον μῆκος $-\frac{3}{7}$ (τὸ Κ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ΄) καὶ ἐκ τοῦ Κ΄ φέρομεν παράλληλον χορδήν, τὴν Μ΄΄Μ΄΄΄, πρὸς τὸν ἄξονα Α΄Α. Τὰ τόξα ΑΜ΄΄ καὶ ΑΜ΄΄΄ τῆς κοινῆς ἀρχῆς Α ἔχουν ἡμίτονον $-\frac{3}{7}$.

34. Ἤδη λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἀνύσματα ΟΛ καὶ ΟΛ΄ ἔχοντα μήκη ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{2}{3}$ καὶ $-\frac{3}{4}$ (τὸ Λ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ τὸ Λ΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄) καὶ κατόπιν ἐκ τῶν σημείων Λ καὶ Λ΄ φέρομεν χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα Β΄Β, τὰς Μ΄ΛΜ καὶ Μ΄΄΄Λ΄Μ΄΄. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ΄ ἔχουν συνημίτονον $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ ΑΜ΄΄καὶ ΑΜ΄΄΄ ἔχουν συνημίτονον $-\frac{3}{4}$.

35. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ἄνυσμα ΑΕ ἔχον μῆκος 2 (τὸ Ε θὰ κεῖται ἄνωθεν τοῦ Α) καὶ ἄνυσμα ΑΕ΄ ἔχον μῆκος —3 (τὸ Ε΄ θὰ κεῖται κάτωθεν τοῦ Α) καὶ κατόπιν φέρομεν ἐκ τοῦ Ε τὴν εὐθεῖαν ΕΟ, ἥτις προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ καὶ ἐκ τοῦ Ε΄ τὴν εὐθεῖαν Ε΄Ο τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Μ΄΄΄ καὶ Μ΄΄. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ΄ ἔχουν ἐφαπτομένην 2 καὶ τὰ ΑΜ΄΄ καὶ ΑΜ΄΄΄ ἔχουν ἐφαπτομένην —3.

36. Ἤδη λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἀνύσματα ΒΣ καὶ ΒΣ΄ ἔχοντα μήκη ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ —1 καὶ ἐκ τῶν Σ καὶ Σ΄ φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΣΟ καὶ Σ΄Ο, αἵτινες τέμνουν τὴν περιφέρειαν, ἡ μὲν πρώτη εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰ Μ΄΄ καὶ Μ΄΄΄. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ΄ ἔχουν συνεφαπτομένην 1 καὶ τὰ τόξα ΑΜ΄΄ καὶ ΑΜ΄΄΄ ἔχουν συνεφαπτομένην —1.

Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου δοθέντος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.

37. Ἐπειδὴ τὸ τόξον περατοῦται εἰς τὸ α' τεταρτημόριον, ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ εἶναι θετικοί. Ἑπομένως ἔχομεν

$$συνα = \sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8},$$

$$εφα = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55} \text{ καὶ } σφα = \frac{\sqrt{55}}{3}.$$

38. Ἀφοῦ τὸ τόξον α περατοῦται εἰς τὸ β' τεταρτημόριον θὰ ἔχῃ συν., εφ., καὶ σφ. ἀρνητικά. Εἶναι λοιπὸν

$$συνα = -\sqrt{1-\left(\frac{12}{17}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{144}{289}} = -\sqrt{\frac{145}{289}}, \text{ ἤτοι } συνα = -\frac{\sqrt{145}}{17}.$$

Εἶναι ἄρα $εφα = -\frac{\frac{12}{17}}{\frac{\sqrt{145}}{17}} = -\frac{12}{\sqrt{145}} = -\frac{12\sqrt{145}}{145}$ καὶ $σφα = -\frac{\sqrt{145}}{12}$.

39. Εἶναι $ημα = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, $εφα = -\frac{3}{4}$, καὶ $σφα = -\frac{4}{3}$.

40. Ἀφοῦ τὸ τόξον α περατοῦται εἰς τὸ γ' τεταρτημόριον θὰ εἶναι ἡ σφα θετικὴ καὶ ἴση πρὸς $\frac{11}{9}$, τὰ δὲ ημα καὶ συνα ἀρνητικά· θὰ εἶναι δὲ

$$ημα = -\frac{\frac{9}{11}}{\sqrt{1+\frac{81}{121}}} = -\frac{\frac{9}{11}}{\sqrt{\frac{202}{121}}} = -\frac{\frac{9}{11}}{\frac{\sqrt{202}}{11}} = -\frac{9}{\sqrt{202}} \text{ ἢ}$$

$$ημα = -\frac{9\sqrt{202}}{202} \text{ καὶ } συνα = -\frac{1}{\frac{\sqrt{202}}{11}} = -\frac{11}{\sqrt{202}} \text{ ἢ } συνα = -\frac{11\sqrt{202}}{202},$$

41. Εἶναι $σφα = -\frac{4}{3}$, $ημα = -\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5}$ καὶ συνα=

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

42. Εἶναι $σφα = -1$, $συνα = \frac{1}{-\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $ημα = \frac{-1}{-\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

43. Εἶναι $ημα = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $εφα = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $σφα = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

44. Εἶναι $ημα = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $εφα = -\sqrt{3}$, $σφα = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

45. Εἶναι $συνα = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$, $εφα = -\frac{3}{4}$ καὶ $σφα = -\frac{4}{3}$.

46. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων α καὶ β εἶναι θετικοί· ὥστε: $συνα = \sqrt{1-\frac{9}{25}} - \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, $ημβ = \sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1600}{1681}} = \sqrt{\frac{16}{1681}} =$ $= \frac{9}{41}$. Εἶναι ἑπομένως $ημα.συνβ + ημβ.συνα = \frac{3}{4}.\frac{40}{41} + \frac{9}{41}.\frac{4}{5} = \frac{156}{205}$.

47. Ἔχομεν $ημα = \pm\sqrt{1-\frac{49}{625}} = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} = \pm\frac{24}{25}$ καὶ $ημβ = \pm\frac{9}{41}$.

Ἤδη ἀφοῦ τὸ συνα καὶ συνβ εἶναι θετικὰ εἶναι δυνατὸν νὰ περατοῦνται τὰ τόξα α καὶ β :

1) Ἀμφότερα εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον· θὰ εἶναι δὲ τότε $συνα.συνβ - ημα.ημβ =$ $= \frac{7}{25}.\frac{40}{41} - \frac{24}{25}.\frac{9}{41} = \frac{280-216}{1025} = \frac{64}{1025}$.

2) Ἀμφότερα εἰς τὸ δ′ τεταρτημόριον· θὰ εἶναι δὲ τότε $συνα.συνβ - ημα.ημβ =$ $= \frac{7}{25}.\frac{40}{41} - \left[\left(-\frac{24}{25}\right).\left(-\frac{9}{41}\right)\right] = \frac{7}{25}.\frac{40}{41} - \frac{24}{25}.\frac{9}{41} = \frac{64}{1025}$.

3) Τὸ α νὰ λήγῃ εἰς τὸ α′ καὶ τὸ β εἰς τὸ δ′ τετρατημόριον· θὰ ἔχωμεν δὲ τότε $συνα.συνβ - ημα.ημβ = \frac{7}{25}.\frac{40}{41} - \left[\frac{24}{25}.\left(-\frac{9}{41}\right)\right] = \frac{7}{25}.\frac{40}{41} + \frac{24}{25}.$ $.\frac{9}{41} = \frac{280+216}{1025} = \frac{496}{1025}$.

4) Τὸ α νὰ λήγῃ εἰς τὸ δ′ καὶ τὸ β εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον· ὥστε $συνα.συνβ - ημα.ημβ = \frac{7}{25}.\frac{40}{41} - \left[\left(-\frac{24}{25}\right).\frac{9}{41}\right] = \frac{496}{1025}$.

48. Εἶναι $ημα = \pm\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \pm\frac{3}{5}$, $συνα = \pm\frac{1}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{4}{5}$,

ἐπειδὴ ὅμως ἡ εφα εἶναι θετικὴ τὸ τόξον α θὰ περατοῦται εἰς τὸ α′ ἢ εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον ἤτοι τὸ ημα καὶ συνα θὰ εἶναι ἀμφότερα ἢ θετικὰ ἢ ἀρνητικά· ὥστε διὰ τὴν πρώτην καὶ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν

$$2ημα.συνα = 2.\frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 2.\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$συν^2α - ημ^2α = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{1-συνα}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\sqrt{\frac{1-συνα}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

49. Εὑρίσκομεν $ημβ=\pm\dfrac{\frac{11}{60}}{\sqrt{1+\frac{121}{3600}}}=\pm\dfrac{\frac{11}{60}}{\sqrt{\frac{3721}{3600}}}=\pm\dfrac{\frac{11}{60}}{\frac{61}{60}}$, ἤτοι $ημβ=$ $=\pm\dfrac{11}{61}$ καὶ $συνβ=\pm\dfrac{1}{\frac{61}{60}}=\pm\dfrac{60}{61}$· ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὁμοίας περιπτώσεις μὲ τὰς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εὑρίσκομεν, ὅτι $2ημβσυνβ=2.\dfrac{11}{61}.\dfrac{60}{61}=\dfrac{1320}{3721}$, $2ημβσυνβ=2.\left(-\dfrac{11}{61}\right).\left(-\dfrac{60}{61}\right)=\dfrac{1320}{3711}$, $συν^2β-ημ^2β=\left(\pm\dfrac{60}{61}\right)^2-\left(\pm\dfrac{11}{61}\right)^2=$ $=\dfrac{3600-121}{3721}=\dfrac{3479}{3721}$, $\sqrt{\dfrac{1+συνβ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{60}{61}}{2}}=\sqrt{\dfrac{121}{122}}=\dfrac{11}{\sqrt{122}}=\dfrac{11\sqrt{122}}{122}$.

$\sqrt{\dfrac{1+συνβ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{60}{61}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{122}}=\dfrac{\sqrt{122}}{122}$.

50. Ἐδῶ θὰ εἶναι τὰ ημα, συνα, ημβ, συνβ θετικά, ὥστε: $ημα=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=$ $=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{3}{5}$, $συνα=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$, $ημβ=\dfrac{\frac{60}{11}}{\sqrt{1+\frac{3600}{121}}}=\dfrac{\frac{60}{11}}{\frac{61}{11}}=\dfrac{60}{61}$ καὶ $συνβ=$ $=\dfrac{1}{\frac{61}{11}}=\dfrac{11}{61}$.

Ἑπομένως εἶναι: $ημασυνβ-ημβσυνα=\dfrac{3}{5}.\dfrac{11}{61}-\dfrac{60}{61}.\dfrac{4}{5}=-\dfrac{207}{305}$

$συνασυνβ+ημαημβ=\dfrac{4}{5}.\dfrac{11}{61}+\dfrac{3}{5}.\dfrac{60}{61}=\dfrac{224}{305}$.

51. Ἔχομεν $ημ^2α+συν^2α=1$ καὶ $\dfrac{συνα}{ημα}=σφα$ ἢ $συνα=ημασφα$· ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ συνα εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $ημ^2α+ημ^2ασφ^2α=1$, ἐξ ἧς $ημ^2α(1+σφ^2α)=1$· ὅθεν $ημ^2α=\dfrac{1}{1+σφ^2α}$ καὶ $ημα=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+σφ^2α}}$. Ἐπίσης εἶναι $συνα=ημασφα=\dfrac{σφα}{\pm\sqrt{1+σφ^2α}}$.

52. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$ημα=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{14}{9}\right)^2}}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{196}{81}}}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\frac{277}{81}}}=\pm\dfrac{9}{\sqrt{277}}=\pm\dfrac{9\sqrt{277}}{277}$.

$συνα=\pm\dfrac{\frac{14}{9}}{\frac{\sqrt{277}}{9}}=\pm\dfrac{14}{\sqrt{227}}=\pm\dfrac{14\sqrt{277}}{277}$, $εφα=\dfrac{9}{14}$.

53. Ἐδῶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων α, β εἶναι θετικοί.

Εἶναι δὲ ημα $= \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}} = \dfrac{1}{\frac{17}{15}} = \dfrac{15}{17}$ καὶ συνα $= \dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \dfrac{8}{17}$,

ημβ $= \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}} = \dfrac{1}{\frac{13}{5}} = \dfrac{5}{13}$ καὶ συνβ $= \dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}} = \dfrac{12}{13}$.

Ὥστε: ημασυνβ+ημβσυνα $= \dfrac{15}{17} \cdot \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{8}{17} = \dfrac{220}{221}$,

συνασυνβ−ημαημβ $= \dfrac{8}{17} \cdot \dfrac{12}{13} - \dfrac{15}{17} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{21}{221}$.

54.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ημα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
συνα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
εφα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
σφα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm\infty$	0	∞

55. Εἶναι ημ²30+ημ²45°+ημ²60° $= \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} +$ $+ \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ καὶ ημ30°συν60°+συν30°ημ60° $= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot$ $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.

56. Εὑρίσκομεν: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1+\sqrt{3})$.

57. Εὑρίσκομεν $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3} + 1 + 3 = 4\dfrac{1}{3}$.

58. Τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 18° εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τῶν 36°, ἡ δὲ χορδὴ αὕτη εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἥτις, ὡς ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος 1 διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. τοῦτο δὲ εἶναι $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, ὅθεν ημ18° $= \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ καὶ ἐπομένως συν18° $=$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1+5-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{16-1-5+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$εφ\ 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}:\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{5}.1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ καὶ $σφ\ 18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$.

59. Τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τῶν 75⁰ ἥτις χορδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου, εἶναι δὲ αὕτη $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$· ὅθεν $ημ\ 36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ καὶ ἑπομένως

$$συν\ 36^0=\sqrt{1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{16-10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$εφ\ 36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ \text{καὶ}\ σφ\ 36^0=\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

Ἁπλαῖ σχέσεις δύο τόξων κλπ.

60. Εἶναι 1) $ημ\ 120^0=ημ\ 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν\ 120^0=-συν\ 60^0=-\frac{1}{2}$,

$εφ\ 120^0=-εφ\ 60^0=-\sqrt{3}$ καὶ $σφ120^0=-σφ60^0=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $ημ135^0=ημ45^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135^0=-συν45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$εφ135^0=-εφ45^0=-1$ καὶ $σφ135^0=-σφ45^0=-1$.

3) $ημ150^0=ημ30^0=\frac{1}{2}$, $συν150^0=-συν30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$εφ\ 150^0=-εφ\ 30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $σφ\ 150^0=-σφ\ 30^0=-\sqrt{3}$.

61. Εἶναι 1ον) $ημ210^0=-ημ30^0=-\frac{1}{2}$, $συν210^0=-συν30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $εφ210^0=εφ\ 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $σφ210^0=σφ30^0=\sqrt{3}$.

2ον) $ημ\ 225^0=-ημ\ 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν\ 225^0=-συν\ 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$εφ225^0=εφ45^0=1$ καὶ $σφ225^0=σφ45^0=1$.

3ον) $ημ\ 240^0=-ημ\ 60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν\ 240^0=-συν\ 60^0=-\frac{1}{2}$, $εφ\ 240^0=εφ60^0=\sqrt{3}$ καὶ $σφ240^0=σφ60^0=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4ον) ημ $300^0 = -$ημ $60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, συν $300^0 =$ συν $60^0 = \frac{1}{2}$, εφ$300^0 =$ $= -$εφ$60^0 = -\sqrt{3}$ καὶ σφ$300^0 = -$σφ$60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5ον) ημ $315^0 = -$ημ $45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, συν $315^0 =$ συν $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ$315^0 = -$εφ$45^0$ $= -1$ καὶ σφ$315^0 = -$σφ$45^0 = -1$.

6ον) ημ $330^0 = -$ημ $30^0 = -\frac{1}{2}$, συν $330^0 =$ συν $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, εφ$330^0 = -$εφ$30^0$ $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ σφ $330^0 = -$σφ $30^0 = -\sqrt{3}$.

62. Εἶναι 1ον) ημ$(-30^0) = -$ημ $30^0 = -\frac{1}{2}$, συν$(-30^0) =$ συν $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ εφ $(-30^0) = -$εφ $30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ σφ $(-30^0) = -$σφ $30^0 = -\sqrt{3}$.

2ον) ημ$(-45^0) = -$ημ$45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, συν$(-45^0) =$ συν$45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ$(-45^0) =$ $= -$εφ$45^0 = -1$, καὶ σφ$(-45^0) = -$σφ$45^0 = -1$.

3ον) ημ$(-60^0) = -$ημ$60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, συν $(-60^0) =$ συν $60^0 = \frac{1}{2}$, εφ$(-60^0) =$ $= -$εφ $60^0 = -\sqrt{3}$ καὶ σφ $(-60^0) = -$σφ $60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

63. Εἶναι 1ον) ημ$(-150^0) = -$ημ $150^0 = -$ημ $30^0 = -\frac{1}{2}$, συν$(-150^0) =$ $=$ συν $150^0 = -$συν $30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, εφ$(-150^0) = -$εφ $150^0 =$ εφ $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ σφ$(-150^0) = -$σφ $150^0 =$ σφ $30^0 = \sqrt{3}$.

2ον) ημ $(-240^0) = -$ημ $240^0 =$ ημ $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συν $(-240^0) =$ συν $240^0 =$ $-$ συν $60^0 = -\frac{1}{2}$, εφ$(-240^0) = -$εφ $240^0 = -$εφ $60^0 = -\sqrt{3}$, καὶ σφ$(-240^0) =$ $-$ σφ $60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3ον) ημ$(315^0) = -$ημ$315^0 =$ ημ$45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, συν$(-315^0) =$ συν $315^0 =$ συν $45^0 =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ$(-315^0) = -$εφ$315^0 =$ εφ$45^0 = 1$ καὶ σφ$(-315^0) = -$σφ$315^0 =$ σφ$45^0 = 1$.

64. Εἶναι 1ον) ημ $72^0 =$ συν $18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, συν $72^0 =$ ημ $18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

$$\varepsilon\varphi\ 72^\circ=\sigma\varphi\ 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \text{ καὶ } \sigma\varphi 72^\circ=\varepsilon\varphi 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

2ον) $\eta\mu\ 54^\circ=\sigma\upsilon\nu\ 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sigma\upsilon\nu\ 54^\circ=\eta\mu\ 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\varepsilon\varphi\ 54^\circ=$

$$=\sigma\varphi\ 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \text{ καὶ } \sigma\varphi\ 54^\circ=\varepsilon\varphi\ 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$ (βλέπε καὶ ἄσκ.59)

3ον) $\eta\mu(-72^\circ)=-\eta\mu\ 72^\circ=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\sigma\upsilon\nu(-72^\circ)=\sigma\upsilon\nu\ 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\varepsilon\varphi(-72^\circ)=-\varepsilon\varphi\ 72^\circ=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1},\ \sigma\varphi(-72^\circ)=-\sigma\varphi\ 72^\circ=-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

4ον) $\eta\mu\ (-54^\circ)=-\eta\mu\ 54^\circ=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sigma\upsilon\nu(-54^\circ)=\sigma\upsilon\nu\ 54^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$$\varepsilon\varphi(-54^\circ)=-\varepsilon\varphi 54^\circ=-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\ \sigma\varphi(-54^\circ)=-\varepsilon\varphi\ 54^\circ=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

65. Αἱ γωνίαι Α καὶ (Β+Γ) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς καὶ αἱ Β καὶ (Γ+Α) καὶ αἱ Γ καὶ (Α+Β)· εἶναι ἄρα ημΑ=ημ(Β+Γ), συνΒ=−συν(Γ+Α) καὶ εφΓ=−εφ(Α+Β).

66. Αἱ γωνίαι $\frac{\Gamma}{2}$ καὶ $\frac{B+\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικαί, ὡς καὶ αἱ $\frac{B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma+A}{2}$ καὶ αἱ $\frac{\Gamma}{2}$ καὶ $\frac{A+B}{2}$· εἶναι ἄρα $\eta\mu\ \frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\ \frac{B+\Gamma}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=$ $=\eta\mu\ \frac{\Gamma+A}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\ \frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\ \frac{A+B}{2}$.

67. Εἶναι ημ120°=ημ60°, συν330°=συν30°=ημ60°, συν(−300°)=συν300° =συν60°, ημ(−330°)=−ημ330°=ημ30°=συν60°· ὥστε εἶναι ημ120°.συν330°+ +συν(−300°).ημ(−300°)=ημ²60°+συν²60°=1.

68. Εἶναι συν210°=−συν30°, ημ150°=ημ30°, ημ330°=−ημ30°, συν150° =−συν30°· ὥστε εἶναι συν210°.ημ150°−ημ330°.συν150°=−ημ30°.συν30°− $-[(-\eta\mu 30^\circ).(-\sigma\upsilon\nu\ 30^\circ)]=-2\eta\mu 30^\circ\ \sigma\upsilon\nu\ 30^\circ=-2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. Εἶναι ημ150°=ημ30°, συν240°=−συν60°, συν300°=συν60°, ημ210°= =−ημ30°. Ὥστε εἶναι ημ150°· συν240°−συν300°· ημ210°=−ημ30°· συν60°+ +ημ30°συν60=0.

70. Εἶναι σφ120°=−σφ60°=−εφ30°, εφ210°=εφ30°, εφ240°=εφ60°, εφ300°=−εφ60°. Ὥστε εἶναι σφ120°+εφ210°+εφ240°+εφ330°=−εφ30°+ +εφ30°+εφ60°−εφ60°=0.

71. Εἶναι $\varepsilon\varphi 225^\circ = \varepsilon\varphi 45^\circ$, $\sigma\varphi 135^\circ = -\sigma\varphi 45^\circ$, $\varepsilon\varphi 315^\circ = -\varepsilon\varphi 45^\circ$, $\sigma\varphi 225^\circ = \sigma\varphi 45^\circ$. Ὥστε εἶναι $\varepsilon\varphi 225^\circ . \sigma\varphi 135^\circ - \varepsilon\varphi 315^\circ \sigma\varphi 225^\circ = -\varepsilon\varphi 45^\circ . \sigma\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ . \sigma\varphi 45^\circ = 0$.

72. 1) $\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

3) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

73. 1) Ἐπειδὴ $\eta\mu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 160^\circ = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, εἶναι $\eta\mu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 20^\circ$· ἀλλ' $\eta\mu 20^\circ > \sigma\upsilon\nu 20^\circ$· ὥστε $\eta\mu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ > 0$.

2) Ἐπειδὴ $\eta\mu 128^\circ = \eta\mu 52^\circ$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 128^\circ = -\sigma\upsilon\nu 52^\circ$, εἶναι $\eta\mu 128^\circ + \sigma\upsilon\nu 128^\circ = \eta\mu 52^\circ - \sigma\upsilon\nu 52^\circ$· ἀλλ' $\eta\mu 52^\circ < \sigma\upsilon\nu 52^\circ$· ὥστε τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα εἶναι ἀρνητικόν.

3) Εἶναι $\eta\mu(-310^\circ) = \eta\mu 50^\circ$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(-310^\circ) = \sigma\upsilon\nu 50^\circ$ ὥστε εἶναι $\eta\mu(-310^\circ) + \sigma\upsilon\nu(-310^\circ) = \eta\mu 50^\circ + \sigma\upsilon\nu 50^\circ$· ἄρα τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα εἶναι θετικόν.

74. 1) Εἶναι $\eta\mu 220^\circ - \sigma\upsilon\nu 220^\circ = -\eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ$· καὶ $\eta\mu 40^\circ > \sigma\upsilon\nu 40^\circ$· ὥστε ἡ δοθεῖσα διαφορὰ εἶναι ἀρνητική·

2) Εἶναι $\eta\mu 115^\circ - \sigma\upsilon\nu 115^\circ = \eta\mu 65^\circ + \sigma\upsilon\nu 65^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\eta\mu 65^\circ > 0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 65^\circ > 0$, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα διαφορὰ εἶναι θετική.

3) Εἶναι $\eta\mu(-100^\circ) - \sigma\upsilon\nu(-100^\circ) = -\eta\mu 100^\circ - \sigma\upsilon\nu 100^\circ = -\eta\mu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 80^\circ$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 80^\circ > \eta\mu 80^\circ$. ὥστε ἡ δοθεῖσα διαφορὰ εἶναι θετική.

75. Εἶναι $\eta\mu(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu(180^\circ + \alpha) = -\eta\mu\alpha$, καὶ $\eta\mu(270^\circ - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$· ὥσται εἶναι $\eta\mu\alpha + \eta\mu(90^\circ - \alpha) + \eta\mu(180^\circ + \alpha) + \eta\mu(270^\circ - \alpha) = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$.

76. Ἐπειδὴ εἶναι $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \alpha) = -\eta\mu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \alpha) = \eta\mu\alpha$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(270^\circ + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha = 0$.

77. Ἐπειδὴ $\eta\mu(270^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu(270^\circ - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$, καὶ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu(270^\circ + \alpha) - \eta\mu(270^\circ - \alpha) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$.

78. Εἶναι $\varepsilon\varphi(180^\circ + \alpha) = \varepsilon\varphi\alpha$, $\varepsilon\varphi(90^\circ + \alpha) = -\sigma\varphi\alpha$, $\varepsilon\varphi(360^\circ - \alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha$· ὥστε εἶναι $\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi(180^\circ + \alpha) + \varepsilon\varphi(90^\circ + \alpha) + \varepsilon\varphi(360^\circ - \alpha) = \sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 0$.

79. Εἶναι $\dfrac{\varepsilon\varphi\, \chi}{-\sigma\varphi\, \chi} = \dfrac{\eta\mu\, \chi}{\sigma\upsilon\nu\, \chi} : -\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, \chi}{\eta\mu\, \chi} = -\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = -\dfrac{\eta\mu^2\chi}{1 - \eta\mu^2\chi}$.

80. α') Τὸ ημα εἶναι θετικόν· ἄρα τὸ πέρας τοῦ τόξου α θὰ κεῖται εἰς τὸ α' ἢ β' τεταρτημόριον· ἀλλ' $\eta\mu\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \eta\mu 45^\circ$, ὥστε τὰ ζητούμενα τόξα εἶναι 45° καὶ $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

β') Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ τόξα μὲ ημ. $\frac{1}{2}$ εἶναι 30° καὶ 150°.

81. α') Τὸ συνα εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα τὸ πέρας τοῦ τόξου α θὰ κεῖται εἰς τὸ β′ ἢ γ′ τεταρτημόριον· καὶ ἐπειδὴ συν $\alpha=-\frac{1}{2}=-$ συν $60^0=$ $=$συν$(180^0-60^0)=$συν(180^0+60^0), τὰ ζητούμενα τόξα εἶναι 120^0 ἢ 240^0.

β′) Τὸ πέρας τοῦ τόξου θὰ κεῖται εἰς τὸ α′ ἢ δ′ τεταρτημόριον· καὶ ἐπειδὴ εἶναι συν $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}=$συν$30^0=$συν$(360^0-30^0)$, τὰ ζητούμενα τόξα εἶναι 30^0 καὶ 330^0.

82. 1ον) Ἐπειδὴ εφ$45^0=1$, ἕπεται ὅτι ἐφαπτομένην -1 ἔχουν τὰ τόξα 135^0 καὶ 315^0 (§ 37, α′ καὶ γ′).

2ον) Εἶναι εφ $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=$εφ$30^0=$εφ$(180^0+30^0)$ (§ 37, β′). Ὥστε τὰ ζητούμενα τόξα εἶναι 30^0 καὶ 210^0.

83. 1ον) Ἐπειδὴ σφ $30^0=\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι $-\sqrt{3}=$ σφ$(180^0-30^0)=$ $=$σφ(360^0-30^0). Τὰ ζητούμενα λοιπὸν τόξα εἶναι 150^0 καὶ 330^0.

2ον) Εἶναι σφ$60^0=\frac{1}{\sqrt{3}}=$σφ240^0. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν τόξα εἶναι 60^0 καὶ 240^0.

84. Εἶναι συν$135^0=-$συν$45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἐὰν δὲ εἶναι εφ $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε εφ$(180^0-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ εφ$(360^0-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἔχομεν δὲ ημ$(180^0-\alpha)=$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+\frac{2}{4}}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{ημ}(360^0-\alpha) \text{ καὶ } \text{συν}(180^0-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}=\text{συν}(360^0-\alpha).$$

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς δύο τόξων.

85. Εἶναι συν $\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ καὶ ημ$\beta=\sqrt{1-\frac{81}{1681}}=\sqrt{\frac{1600}{1681}}$ $=\frac{40}{41}$. Ὥστε ημ$(\alpha+\beta)=$ημ α συν β$+$ημβ συν $\alpha=\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{41}+\frac{4}{5}\cdot\frac{40}{41}=\frac{187}{205}$ καὶ συν$(\alpha-\beta)=$συν α συν β$+$ημ α ημ$\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{41}+\frac{3}{5}\cdot\frac{40}{41}=\frac{156}{205}$.

86. Εἶναι ημ$(\alpha-\beta)=$ημ α συνβ$-$ημβ συν α καὶ συν$(\alpha+\beta)=$συνα.συνβ$-$ημ α. ημβ καὶ συν $\alpha=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\sqrt{\frac{64}{289}}=\frac{8}{17}$ καὶ ημ $\beta=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=$

$=\frac{5}{13}$ · ὥστε ημ(α−β) $=\frac{15}{17}\cdot\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{17}=\frac{180-40}{221}=\frac{140}{221}$ καὶ

συν(α+β) $=\frac{8}{17}\cdot\frac{12}{13}-\frac{15}{17}\cdot\frac{5}{13}=\frac{96-75}{221}=\frac{21}{221}$.

87. Εἶναι συν(60°−α)=συν60°.συν α+ημ60°.ημ α, ημ(60°+α)=ημ60°.συνα +ημ α.συν 60° καὶ συν α $=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$ · ὥστε συν(60°−α) $=\frac{1}{2}\cdot$ $\frac{12}{13}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$ καὶ ημ(60°+α) $=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$.

88. Εἶναι ημ75°=ημ(45°+30°)=ημ45°.συν30°+συν45°.ημ30° $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ καὶ συν75°=συν45°.συν30°−ημ45°.ημ30° $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ $\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. Ὥστε εφ75° $=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=$ $=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$ καὶ σφ75° $=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$.

89. Εἶναι ημ15°=ημ(60°−45°)=ημ60°.συν45°−ημ45°.συν60° $=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, συν15°=συν60°.συν45°+ημ.60°ημ45° $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, εφ 15° $=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}=$ $=2-\sqrt{3}$ καὶ σφ15° $=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$.

90. Ἔχομεν συν(α+β).συνβ+ημ(α+β).ημβ=συν[(α+β)−β]=συν α.

91. Εἶναι ημ(α+β).ημ(α−β)=(ημ α συνβ+ημ β.συν α).(ημ α.συν β−ημ β. συν α) = ημ²α.συν²β−ημ²β.συν²α = ημ²α(1−ημ²β)−ημ²β(1−ημ²α) = ημ²α − −ημ²α.ημ²β−ημ²β+ημ²αημ²β=ημ²α−ημ²β.

92. Εἶναι συν(α+β).συν(α−β)=(συν α.συνβ−ημ α . ημβ) . (συν α.συνβ + +ημ α.ημβ)= συν²α.συν²β − ημ²α.ημ²β = συν²α(1−ημ²β) − (1−συν²α)ημ²β= = συν²α−ημ²β.συν²α−ημ²β+ημ²β.συν²α=συν²α−ημ²β=συν²α−(1−συν²β) = = συν²α+συν²β−1.

93. Εἶναι ημ(45°−α)=ημ45°.συν α−ημ α.συν45° $=\frac{\sqrt{2}}{2}$(συν α−ημ α) καὶ

συν(45°+α)=συν45°.συν α−ημ 45°.ημ α $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (συν α−ημ α).

94. Εἶναι ημ(45°+α) $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ συν α $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ημ α $=\frac{\text{ημ α+συν α}}{\sqrt{2}}$.

95. Εἶναι ημ(45°+α+45°−α)=ημ90°=1.

96. Έχομεν $\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha).\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\beta)-\eta\mu(45^\circ-\alpha).\eta\mu(45^\circ-\beta)=\sigma\upsilon\nu[(45^\circ-\alpha)+(45^\circ-\beta)]=\sigma\upsilon\nu[90^\circ-(\alpha+\beta)]$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τόξα $90^\circ-(\alpha+\beta)$ καὶ $(\alpha+\beta)$ εἶναι συμπληρωματικά, εἶναι $\sigma\upsilon\nu[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\eta\mu(\alpha+\beta)$.

97. Έχομεν $\eta\mu(45^\circ+\alpha)(\sigma\upsilon\nu45^\circ-\beta)+\sigma\upsilon\nu(45^\circ+\alpha)\eta\mu(45^\circ-\beta)=\eta\mu[(45^\circ+\alpha)+(45^\circ-\beta)]=\eta\mu[90^\circ+(\alpha-\beta)]$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τόξα $90^\circ+(\alpha-\beta)$ καὶ $(\alpha-\beta)$ διαφέρουν κατὰ 90°, εἶναι $\eta\mu[90^\circ+(\alpha-\beta)]=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$.

98. 2) Εἶναι $\eta\mu60^\circ.\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu60^\circ.\,\eta\mu\,\alpha-\eta\mu60^\circ.\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\sigma\upsilon\nu60^\circ.\,\eta\mu\,\alpha=$
$=2\sigma\upsilon\nu60^\circ.\eta\mu\,\alpha=2.\frac{1}{2}.\,\eta\mu\,\alpha=\eta\mu\,\alpha.$

2) $\sigma\upsilon\nu30^\circ.\sigma\upsilon\nu\,\alpha-\eta\mu30^\circ.\eta\mu\,\alpha-\sigma\upsilon\nu30^\circ.\sigma\upsilon\nu\,\alpha-\eta\mu30^\circ.\eta\mu\alpha=-2\eta\mu30^\circ.\eta\mu\alpha=-\eta\mu\alpha.$

99. Εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta}=\dfrac{\frac{1}{70}-\frac{1}{99}}{1+\frac{1}{70}.\frac{1}{99}}=\dfrac{99-70}{70.99+1}=\dfrac{29}{6931}$

100. Εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}=\dfrac{3+2}{3.2-1}=\dfrac{5}{5}=$
$=1=\varepsilon\varphi45^\circ=\varepsilon\varphi225^\circ$· ἐπειδὴ ὅμως τὰ α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, ἕκαστον τούτων εἶναι $<90^\circ$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμά των εἶναι $<180^\circ$. ὥστε τὸ ζητούμενον τόξον εἶναι 45°.

101. Εἶναι $\eta\mu\,\beta=\sqrt{1-\left(\frac{12}{37}\right)^2}=\sqrt{\frac{2225}{1369}}=\frac{35}{37}$ ἐπειδὴ $\beta<280^\circ$
ὥστε $\varepsilon\varphi\,\beta=-\frac{35}{12}$ καὶ $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{-\frac{3}{4}+\frac{35}{12}}{2+\frac{3}{4}.\frac{35}{12}}=\dfrac{104}{153}.$

102. Εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta).\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}.\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta}=$

$$=\frac{(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta).(\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta)}{(1-\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta).(1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha.\varepsilon\varphi^2\beta}.$$

103. 1) Εἶναι $\varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi45^\circ+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi45^\circ.\varepsilon\varphi\,\alpha}=\dfrac{1+\varepsilon\varphi\,\alpha}{1-\varepsilon\varphi\,\alpha}.$

2) $\varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)=\varepsilon\varphi(\alpha+45^\circ)=\dfrac{1+\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}}{1-\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}}=\dfrac{\sigma\varphi\,\alpha+1}{\sigma\varphi\,\alpha-1}=-\dfrac{1+\sigma\varphi\,\alpha}{1-\sigma\varphi\,\alpha}$

104. Εἶναι $\eta\mu\Gamma.\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\Gamma.\eta\mu A=\eta\mu(A+\Gamma)=\eta\mu B$, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $(A+\Gamma)$ καὶ B εἶναι παραπληρωματικαί. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον εἶναι $\sigma\upsilon\nu B.\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu B.\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu A$.

105. 1) Εἶναι $\eta\mu\,\frac{B}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}.\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}=\eta\mu\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)$·
ἀλλὰ $\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)+\frac{A}{2}=90^\circ$· ὅθεν $\eta\mu\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}.$

2) Εἶναι $συν\frac{A}{2}.συν\frac{B}{2}-ημ\frac{A}{2}.ημ\frac{B}{2}=συν\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=ημ\frac{Γ}{2}.$

106. Εἶναι $συν20^0=ημ70^0$ καὶ $συν75^0=ημ15^0$· ὅθεν $συν70^0.συν15^0+συν20^0.συν75^0=συν70^0.συν15^0+ημ70^0.ημ15^0=συν(70^0-15^0)=συν55^0$.

107. Εἶναι $σφ(α+β)=\frac{συν(α+β)}{ημ(α+β)}=\frac{συν\,α\,.\,συν\,β-ημ\,α\,.\,ημ\,β}{ημ\,α\,.\,συν\,β+ημ\,β\,.\,συν\,α}$· διαιροῦντες δὲ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτου διὰ τοῦ ημ α . ημ β εὑρίσκομεν

$$σφ(α+β)=\frac{\frac{συνα.συνβ}{ημα.ημβ}-\frac{ημα.ημβ}{ημα.ημβ}}{\frac{ημα.συνβ}{ημα.ημβ}+\frac{ημβ.συνα}{ημα.ημβ}}=\frac{σφα\,.\,σφβ-1}{σφ\,β+σφ\,α}$$

108. Ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $σφ(α-β)=\frac{σφα.σφβ+1}{σφβ-σφα}$.

109. Ἐκ τῶν τύπων τῶν ἀσκήσεων 107 καὶ 108 εὑρίσκομεν

$$σφ(α+β)=\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}=\frac{15-8}{12+10}=\frac{7}{22}\quad καὶ$$

$$σφ(α-β)=\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}=\frac{15+8}{10-12}=-\frac{23}{2}.$$

110. Εἶναι $εφα+εφβ=\frac{ημα}{συνα}+\frac{ημβ}{συνβ}=\frac{ημα.συνβ+ημβ.συνα}{συνα.συνβ}=\frac{ημ(α+β)}{συνα.συνβ}$

111. Ὁμοίως εἶναι $\frac{συνα}{ημα}+\frac{συνβ}{ημβ}=\frac{ημβ.συνα+ημα.συνβ}{ημα.ημβ}=\frac{ημ(α+β)}{ημα.ημβ}$.

112. Ὁμοίως εἶναι $εφα+σφβ=\frac{ημα}{συνα}+\frac{συνβ}{ημβ}=\frac{ημαημβ+συνασυνβ}{συνα.ημβ}=$

$=\frac{συν(α-β)}{συνα.ημβ}$.

113. Ὁμοίως εἶναι $\frac{συνα}{ημα}-\frac{ημβ}{συνβ}=\frac{συνα.συνβ-ημα.ημβ}{ημα.συνβ}=\frac{συν(α+β)}{ημα.συνβ}$.

114. Εἶναι $1+εφα.εφβ=1+\frac{ημα.ημβ}{συνα.συνβ}=\frac{συνα.συνβ+ημα.ημβ}{συνα.συνβ}=\frac{συν(α-β)}{συνα.συνβ}$.

115. Γράφομεν $εφ(α+β+γ)=εφ[(α+β)+γ]=\frac{εφ(α+β)+εφγ}{1-εφ(α+β).εφγ}=$

$$=\frac{\frac{εφα+εφβ}{1-εφα.εφβ}+εφγ}{1-\frac{εφα+εφβ}{1-εφα.εφβ}εφγ}=\frac{εφα+εφβ+εφγ-εφα.εφβ.εφγ}{1-εφα.εφβ-εφα.εφγ-εφβ.εφγ}.$$

116. 1ον) $ημα=\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ καὶ $ημ2α=\pm2.\frac{\sqrt{7}}{4}.\frac{3}{4}=\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, 2ον) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{49}{121}} = \pm\sqrt{\frac{72}{121}} = \pm\frac{6\sqrt{2}}{11}$ καὶ $\eta\mu 2\alpha = \pm 2 \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{11} = \pm\frac{84\sqrt{2}}{121}$.

117. 1) Εἶναι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1-2\eta\mu^2\alpha = 1-2 \cdot \frac{16}{25} = 1-\frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$ καὶ

2) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{225}{289} - 1 = \frac{161}{289}$.

118. 1ον) Εἶναι $\eta\mu 60^0 = 2\eta\mu 30^0 . \sigma\upsilon\nu 30^0 = 2 . \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 60^0 =$ $= 1-2\eta\mu^2 30^0 = 1-2 . \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ κτλ., 2ον) $\eta\mu 90^0 = 2\eta\mu 45^0 . \sigma\upsilon\nu 45^0 = 2 . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $= 2 . \frac{2}{4} = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^0 = 2\sigma\upsilon\nu^2 45^0 - 1 = 2 . \frac{2}{4} - 1 = 0$ κτλ.

119. Εἶναι $\eta\mu 36^0 = 2\eta\mu 18^0 . \sigma\upsilon\nu 18^0 = 2 . \frac{\sqrt{5}-1}{4} . \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\sigma\upsilon\nu 36^0 = 2\sigma\upsilon\nu^2 18^0 - 1 = 2 . \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ κτλ.

120. Εἶναι $2\eta\mu 40^0 . \eta\mu 50^0 = 2\eta\mu 40^0 . \sigma\upsilon\nu 40^0 = \eta\mu(2.40^0) = \eta\mu 80^0$, $\sigma\upsilon\nu^2 20^0 - \sigma\upsilon\nu^2 70^0 = \sigma\upsilon\nu^2 20^0 - \eta\mu^2 20^0 = \sigma\upsilon\nu(2.20^0) = \sigma\upsilon\nu 40^0$.

121. Εἶναι 1) $2\eta\mu\frac{5\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5\chi}{2} = \eta\mu\left(2 . \frac{5\chi}{2}\right) = \eta\mu 5\chi$.

2) $\sigma\upsilon\nu^2\frac{8\chi}{3} - \eta\mu^2\frac{8\chi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(2 . \frac{8\chi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{16\chi}{3}$.

122. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{45^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\eta\mu\left(\frac{45^0}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{45^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ κτλ.

123. Εἶναι $\frac{90^0}{4} = \frac{45^0}{2}$. Ἔχομεν λοιπὸν

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^0}{8}\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$ καὶ κατόπιν

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^0}{16}\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\eta\mu\left(\frac{90^0}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

$$\eta\mu\left(\frac{90^0}{16}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \quad \varkappa\tau\lambda.$$

124. Εἶναι $\eta\mu\,\frac{30^0}{2}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 30^0}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=$

$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$$\eta\mu\left(\frac{30^0}{4}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\eta\mu\left(\frac{30^0}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}.$$

125. Εἰς τὸν τύπον $\eta\mu\,\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$, ἐὰν θέσωμεν 2α ἀντὶ α εὑρίσκομεν

$$\eta\mu 2\alpha=\frac{2\,\varepsilon\varphi\,\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{16}{63}}{1+\left(\frac{16}{63}\right)^2}=\frac{\frac{32}{63}}{1+\frac{256}{3969}}=\frac{32.63}{3969+256}=\frac{2016}{4225}.$$

126. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu\,\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}{1+\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{1-\frac{81}{256}}{1+\frac{81}{256}}=\frac{256-81}{256+81}=\frac{175}{337}.$$

127. Εἶναι $2\eta\mu(45^0-\alpha).\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)=\eta\mu[2(45^0-\alpha)]=\eta\mu(90^0-2\alpha)=\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$

128. Εἶναι $2\sigma\upsilon\nu^2(45^0-\alpha)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sigma\upsilon\nu\,\alpha+\eta\mu\,\alpha)^2=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+$ $+2\eta\mu\,\alpha.\sigma\upsilon\nu\,\alpha=1+2\eta\mu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha$· ὥστε ἔχομεν $2\sigma\upsilon\nu^2(45^0-\alpha)-1=1+2\eta\mu\,\alpha.\sigma\upsilon\nu\,\alpha$ $-1=2\eta\mu\,\alpha.\sigma\upsilon\nu\,\alpha=\eta\mu 2\alpha.$

129. Εἶναι $\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\,\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha$ καὶ $1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+$

$+\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$· ὥστε $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\dfrac{2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\epsilon\varphi\alpha.$

130. Εἶναι $1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha=$ $=2\eta\mu^2\alpha$· ἄρα εἶναι $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\dfrac{2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu^2\alpha}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi\alpha.$

131. Εἶναι $\epsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\alpha=\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\dfrac{\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{-2(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)}{2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}$ $=\dfrac{-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha}=-2\sigma\varphi 2\alpha.$

132. Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\sigma\varphi\alpha.\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$· ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha=\beta$, ἔχομεν $\sigma\varphi(\alpha+\alpha)=\sigma\varphi 2\alpha=\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}.$

133. Ἔχομεν $\eta\mu 3\alpha=\eta\mu(\alpha+2\alpha)=\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha.\eta\mu 2\alpha=\eta\mu\alpha(1-2\eta\mu^2\alpha)+$ $+\sigma\upsilon\nu\alpha.2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\alpha(1-2\eta\mu^2\alpha)+2\eta\mu\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)=\eta\mu\alpha-2\eta\mu^3\alpha+2\eta\mu\alpha-$ $-2\eta\mu^3\alpha=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha.$

134. Ὁμοίως ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu 3\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+2\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\eta\mu\alpha.\eta\mu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha$ $.(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)-\eta\mu\alpha.\,2\eta\mu\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha.\,(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)-2\sigma\upsilon\nu\alpha.\,(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=$ $=2\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu^3\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha.$

135. Ἔχομεν $\epsilon\varphi 3\alpha=\epsilon\varphi(\alpha+2\alpha)=\dfrac{\epsilon\varphi\alpha+\epsilon\varphi 2\alpha}{1-\epsilon\varphi\alpha.\epsilon\varphi 2\alpha}=\dfrac{\epsilon\varphi\alpha+\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}}{1-\epsilon\varphi\alpha.\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}}=$ $=\dfrac{\epsilon\varphi\alpha(1-\epsilon\varphi^2\alpha)+2\epsilon\varphi\alpha}{(1-\epsilon\varphi^2\alpha)-2\epsilon\varphi^2\alpha}=\dfrac{\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi\alpha^3+2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha-2\epsilon\varphi^2\alpha}=\dfrac{3\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi^3\alpha}{1-3\epsilon\varphi^2\alpha}.$

136. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha$, διότι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=$ $=(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)^2=4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1$. Ἐπίσης εἶναι $\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$· ὥστε ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-\eta\mu^2\alpha=4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-3\sigma\upsilon\nu^2\alpha=$ $=\sigma\upsilon\nu\alpha(4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu 3\alpha.$

137. Εἶναι $\epsilon\varphi^2 2\alpha-\epsilon\varphi^2\alpha=(\epsilon\varphi 2\alpha+\epsilon\varphi\alpha)(\epsilon\varphi 2\alpha-\epsilon\varphi\alpha)=$

$$=\left(\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}+\epsilon\varphi\alpha\right)\left(\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}-\epsilon\varphi\alpha\right)=\frac{3\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi^3\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}.\,\frac{\epsilon\varphi\alpha+\epsilon\varphi^3\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}.$$

Ὁμοίως εἶναι $1-\epsilon\varphi^2 2\alpha\epsilon\varphi^2\alpha=(1+\epsilon\varphi 2\alpha.\epsilon\varphi\alpha)(1-\epsilon\varphi 2\alpha.\epsilon\varphi\alpha)=$

$$=\left(1+\frac{2\epsilon\varphi^2\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}\right)\left(1-\frac{2\epsilon\varphi^2\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}\right)=\frac{1+\epsilon\varphi^2\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}.\,\frac{1-3\epsilon\varphi^2\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}.$$

Ὥστε τὸ α΄ μέλος τῆς δοθείσης σχέσεως ἰσοῦται μέ

$$\frac{(3\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi^3\alpha)(\epsilon\varphi\alpha+\epsilon\varphi^3\alpha)}{(1+\epsilon\varphi^2\alpha)(1-3\epsilon\varphi^2\alpha)}=\frac{(3\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi^3\alpha).\epsilon\varphi\alpha.(1+\epsilon\varphi^2\alpha)}{(1+\epsilon\varphi^2\alpha)(1-3\epsilon\varphi^2\alpha)}=$$

$$=\frac{3\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi^3\alpha}{1-3\epsilon\varphi^2\alpha}.\,\epsilon\varphi\alpha=\epsilon\varphi 3\alpha.\epsilon\varphi\alpha.$$

Μετασχηματισμὸς ἀθροισμάτων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα.

138. 1) $2\eta\mu 35^\circ.\sigma\upsilon\nu 25^\circ=\eta\mu(35^\circ+25^\circ)+\eta\mu(35^\circ-25^\circ)=\eta\mu 60^\circ+\eta\mu 10^\circ$ (§50)

2) $2\sigma\upsilon\nu 85^\circ.\sigma\upsilon\nu 35^\circ=\sigma\upsilon\nu(85^\circ+35^\circ)+\sigma\upsilon\nu(85^\circ-35^\circ)=\sigma\upsilon\nu 120^\circ+\sigma\upsilon\nu 50^\circ$

3) $2\sigma\upsilon\nu 40^\circ.\eta\mu 50^\circ = \eta\mu(40^\circ+50^\circ) - \eta\mu(40^\circ-50^\circ) = \eta\mu 90^\circ - \eta\mu(-10^\circ) =$
$= \eta\mu 90^\circ + \eta\mu 10^\circ$.

4) $2\eta\mu 68^\circ.\eta\mu 22^\circ = \sigma\upsilon\nu(68^\circ-22^\circ) - \sigma\upsilon\nu(68^\circ+22^\circ) = \sigma\upsilon\nu 46^\circ - \sigma\upsilon\nu 90^\circ$.

139. 1) $\eta\mu 12^\circ.\sigma\upsilon\nu 18^\circ = \dfrac{\eta\mu(12^\circ+18^\circ)+\eta\mu(12^\circ-18^\circ)}{2} = \dfrac{\eta\mu 30^\circ - \eta\mu 6^\circ}{2}$

2) $\sigma\upsilon\nu 70^\circ.\eta\mu 20^\circ = \dfrac{\eta\mu(70^\circ+20^\circ) - \eta\mu(70^\circ-20^\circ)}{2} = \dfrac{\eta\mu 90^\circ - \eta\mu 50^\circ}{2}$

3) $\sigma\upsilon\nu 22^\circ 45'.\sigma\upsilon\nu 97^\circ 15' = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(22^\circ 45'+97^\circ 15') + \sigma\upsilon\nu(22^\circ 45'-97^\circ 15')}{2} =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu(-74^\circ 30')}{2} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 74^\circ 30'}{2}$

4) $\eta\mu 78^\circ 40'.\eta\mu 71^\circ 20' = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(78^\circ 40'-71^\circ 20') - \sigma\upsilon\nu(78^\circ 40'+71^\circ 20')}{2} =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu 7^\circ 20' - \sigma\upsilon\nu 150^\circ}{2}$.

140. Εἶναι $2\sigma\upsilon\nu 50^\circ.\eta\mu 10^\circ = \eta\mu 60^\circ - \eta\mu 40^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu 40^\circ$, $2\eta\mu 5^\circ.\sigma\upsilon\nu 35^\circ =$
$= \eta\mu 40^\circ + \eta\mu(-30^\circ) = \eta\mu 40^\circ - \dfrac{1}{2}$. ὥστε εἶναι $2\sigma\upsilon\nu 50^\circ.\eta\mu 10^\circ + 2\eta\mu 5^\circ.\sigma\upsilon\nu 35^\circ =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

141. Εἶναι $2\eta\mu 40^\circ.\sigma\upsilon\nu 20^\circ + 2\eta\mu 50^\circ.\eta\mu 20^\circ = \eta\mu 60^\circ + \eta\mu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \eta\mu 20^\circ + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu 20^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

142. Εἶναι $2\eta\mu 52^\circ 30'.\eta\mu 37^\circ 30' = \sigma\upsilon\nu 15^\circ - \sigma\upsilon\nu 90^\circ = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (ἄσκ. 124).

143. Εἶναι $2\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2} = \eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{A-B}{2}\right) + \eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}-\dfrac{A-B}{2}\right) =$

$= \eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}\right) + \eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}-\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)$.

Ἀλλὰ $\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}\right) + B = 90^\circ$ $\Big($διότι $\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}+B = \dfrac{\Gamma}{2} +$
$+ \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{\Gamma+A+B}{2} = \dfrac{180^\circ}{2}\Big)$· ὥστε $\eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu B$· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ $\eta\mu\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{B}{2}-\dfrac{A}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu A$. ὅ.ἔ.δ.

144. Εἶναι $\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}.\eta\mu\dfrac{7\alpha}{2} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2}$ καὶ

$\eta\mu\dfrac{3\alpha}{2}.\eta\mu\dfrac{11\alpha}{2} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 7\alpha}{2}$. Ὥστε τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ $\frac{συν3α-συν7α}{2}=\frac{2ημ\frac{10α}{2}\cdot ημ\frac{4α}{2}}{2}=ημ2α.ημ5α$

145. Εἶναι $\frac{συν(45^0+α-45^0+α)-συν(45^0+α+45^0-α)}{2}=\frac{1}{2}συν2α\cdot$

146. 1) $ημ30^0+ημ20^0=2ημ\frac{30^0+20^0}{2}.\ συν\frac{30^0-20^0}{2}=2ημ25^0.συν5^0$

2) $ημ45^0-ημ25^0=2ημ\frac{45^0-25^0}{2}.\ συν\frac{45^0+25^0}{2}=2ημ10^0.συν35^0$

3) $συν64^0+συν24^0=2συν\frac{64^0+24^0}{2}.\ συν\frac{64^0-24^0}{2}=συν44^0.συν20^0$

4) $συν45^0-συν105^0=2ημ\frac{105^0+45^0}{2}.\ ημ\frac{105^0-45^0}{2}=2ημ75^0.ημ30^0.$

147. Εἶναι $συν66^0+συν21^0=2συν\frac{66^0+21^0}{2}.\ συν\frac{66^0-21^0}{2}=2συν43^030'.$ $.συν22^030'$, $συν82^030'+συν6^030'=2συν\frac{82^030'+9^030'}{2}.\ συν\frac{82^030'-9^030'}{2}=$ $=συν46^0.συν36^030'.$

148. Ἔχομεν $ημ75^0+ημ15^0=2ημ\frac{75^0+15^0}{2}.\ συν\frac{75^0-15^0}{2}=$

$$=2ημ45^0.συν30^0=2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

149. Ἔχομεν $\frac{ημ75^0-ημ15^0}{συν75^0+συν15^0}=\frac{2συν\frac{75^0+15^0}{2}.ημ\frac{75^0-15^0}{2}}{2συν\frac{75^0+15^0}{2}.συν\frac{75^0-15^0}{2}}=$

$$=\frac{2συν45^0.ημ30^0}{2συν45^0.συν30^0}=εφ30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

150. Ἐπειδὴ $συν0^0=1$ καὶ $ημ90^0=1$, ἔχομεν $1-συνα=συν0^0-συνα=$ $=2ημ\frac{α}{2}.ημ\frac{α}{2}=2ημ^2\frac{α}{2}$, $1+ημα=ημ90^0+ημα=2ημ\frac{90^0+α}{2}.\ συν\frac{90^0-α}{2}=$ $=2ημ\left(45^0+\frac{α}{2}\right).\ συν\left(45^0-\frac{α}{2}\right)$· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τόξα $45^0+\frac{α}{2}$ καὶ $45^0-\frac{α}{2}$ εἶναι συμπληρωματικά, ἔχομεν τελικῶς $1+ημα=2ημ^2\left(45^0+\frac{α}{2}\right)=2συν^2\left(45^0-\frac{α}{2}\right)$.

Ὁμοίως εἶναι $1-ημα=ημ90^0-ημα=2ημ\frac{90^0-α}{2}.\ συν\frac{90^0+α}{2}=2ημ\left(45^0-\frac{α}{2}\right).$ $.\ συν\left(45^0-\frac{α}{2}\right)=2ημ^2\left(45^0-\frac{α}{2}\right)=2συν^2\left(45^0+\frac{α}{2}\right).$

151. Εἶναι $\frac{ημ5α-ημ3α}{συν5α+συν3α}=\frac{2συν\frac{1}{2}(5α+3α).ημ\frac{1}{2}(5α-3α)}{2συν\frac{1}{2}(5α+3α)συν\frac{1}{2}(5α-3α)}=\frac{ημα}{συνα}=εφα$

152. Εἶναι $συν3α+συν5α=συν5α+συν3α$ (ἄσκ. 151).

153. Ἔχομεν $\frac{ημα+ημ2α}{συνα-συν2α}=\frac{2ημ\frac{3α}{2}.συν\left(-\frac{α}{2}\right)}{2ημ\frac{3α}{2}.ημ\frac{α}{2}}=\frac{2ημ\frac{3α}{2}.συν\frac{α}{2}}{2ημ\frac{3α}{2}.ημ\frac{α}{2}}=σφ\frac{α}{2}.$

154. Ἔχομεν $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\beta - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\beta + \eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\frac{2\alpha+2\beta}{2}\,\eta\mu\frac{2\alpha-2\beta}{2}}{2\eta\mu\frac{2\beta+2\alpha}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{2\beta-2\alpha}{2}} =$

$= \frac{2\eta\mu(\alpha+\beta).\eta\mu(\alpha-\beta)}{2\eta\mu(\beta+\alpha).\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)} = \frac{2\eta\mu(\alpha+\beta).\eta\mu(\alpha-\beta)}{2\eta\mu(\alpha+\beta).\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \varepsilon\varphi(\alpha-\beta).$

155. Εἶναι $\eta\mu 50^0 - \eta\mu 70^0 = 2\eta\mu\,\frac{50^0-70^0}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{50^0+70^0}{2} = 2\eta\mu(-10^0).$

$.\sigma\upsilon\nu 60^0 = -2\eta\mu 10^0.\ \frac{1}{2} = -\eta\mu 10^0$· ὥστε $\eta\mu 50^0 - \eta\mu 70^0 + \eta\mu 10^0 = -\eta\mu 10^0 + \eta\mu 10^0 = 0.$

156. Εἶναι $\eta\mu 10^0 + \eta\mu 50^0 = 2\eta\mu 30^0 \sigma\upsilon\nu(-20^0) = 2.\frac{1}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu 20^0 = \sigma\upsilon\nu 20^0 = \eta\mu 70^0$

καὶ $\eta\mu 20^0 + \eta\mu 40^0 = 2\eta\mu 30^0.\sigma\upsilon\nu(-10^0) = 2.\frac{1}{2}.\ \sigma\upsilon\nu 10^0 = \sigma\upsilon\nu 10^0 = \eta\mu 80^0.$

157. 1) $\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha = 2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = 2\eta\mu 2\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ὥστε $\eta\mu\alpha + 2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha =$
$= 2\eta\mu 2\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu 2\alpha\ (1+\sigma\upsilon\nu\alpha) = 2\eta\mu 2\alpha.2\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\alpha}{2}, 4\eta\mu 2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\alpha}{2}$

2) $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ὥστε $\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$
$.\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha) = 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\ \frac{\alpha}{2}.$

158. Εἶναι 1) $\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 7\chi + 2\sigma\upsilon\nu 5\chi = 2\sigma\upsilon\nu 5\chi.\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu 5\chi = 2\sigma\upsilon\nu 5\chi.$
$.(1+\sigma\upsilon\nu 2\chi) = 4\sigma\upsilon\nu 5\chi.\sigma\upsilon\nu^2\chi.$

2) $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 5\chi + 2\sigma\upsilon\nu 3\chi = 2\sigma\upsilon\nu 3\chi.\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu 3\chi = 2\sigma\upsilon\nu 3\chi(1+\sigma\upsilon\nu 2\chi) =$
$= 4\sigma\upsilon\nu 3\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μὲ $\frac{4\sigma\upsilon\nu 5\chi.\ \sigma\upsilon\nu^2\chi}{4\sigma\upsilon\nu 3\chi.\ \sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{\sigma\upsilon\nu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 3\chi}.$

159. 1) $\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\beta.\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha.\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu(\beta-\alpha)}{\eta\mu\beta.\eta\mu\alpha}.$

2) $\varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha.\eta\mu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha.\eta\mu\beta}$

$= \frac{-(\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha.\eta\mu\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha.\eta\mu\beta} = -\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha.\eta\mu\beta}.$

3) $1-\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi 45^0 - \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu 45^0}{\sigma\upsilon\nu 45^0} - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu 45^0\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 45^0\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 45^0.\sigma\upsilon\nu\alpha} =$

$= \frac{\eta\mu(45^0-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 45^0.\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^0-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$

160. Θέτοντες $\beta = 90^0 - \beta'$ ἔχομεν 1) $\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu(90^0-\beta') =$
$= \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta' = 2\eta\mu\ \frac{\alpha+\beta'}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha-\beta'}{2}.$

2) $\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu(90^0-\beta') = \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta' = 2\eta\mu\ \frac{\alpha-\beta'}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta'}{2}.$

161. Εἶναι $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}.\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}} = \sigma\varphi\ \frac{\alpha+\beta}{2}.\sigma\varphi\ \frac{\alpha-\beta}{2}.$

162. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} - \varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} =$

$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$. Ἀλλ' εἶναι $\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

Ὥστε $\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\alpha . \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

163. Εἶναι $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\eta\mu\gamma = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$ καὶ

$\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$, διότι $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$. Ὥστε $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma =$

$= 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} + \eta\mu\frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$· ἀλλ' εἶναι πάλιν $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} =$

$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}$· ὥστε $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$.

164. Ὁμοίως εἶναι $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} = \eta\mu\frac{\gamma}{2}$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\gamma = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\gamma}{2}$· ὥστε $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} . \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} +$

$+ 1 - 2\eta\mu^2\frac{\gamma}{2} - 1 = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\eta\mu^2\frac{\gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \eta\mu\frac{\gamma}{2}\right)$·

ἀλλ' εἶναι πάλιν $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \eta\mu\frac{\gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2} . \eta\mu\frac{\beta}{2}$.

Ὥστε τελικῶς εἶναι $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma - 1 = 4\eta\mu\frac{\alpha}{2} . \eta\mu\frac{\beta}{2} . \eta\mu\frac{\gamma}{2}$.

165. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2} . \eta\mu\frac{B}{2} . \eta\mu\frac{60^\circ}{2}$ (ἄσ. 164).

Ὥστε $2(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B) = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}$.

166. Εἶναι $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B = 2\eta\mu\frac{2A+2B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2A-2B}{2} =$

$= 2\eta\mu(A+B) . \sigma\upsilon\nu(A-B)$ καὶ $\eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu\Gamma . \sigma\upsilon\nu\Gamma$·

ἀλλὰ $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\Gamma = -\sigma\upsilon\nu(A+B)$. Ὥστε

$\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu(A+B) . \sigma\upsilon\nu(A-B) + 2\eta\mu\Gamma . \sigma\upsilon\nu\Gamma =$

$= 2\eta\mu\Gamma . \sigma\upsilon\nu(A-B) - 2\eta\mu\Gamma . \sigma\upsilon\nu(A+B) = 2\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)]$·

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B) = 2\eta\mu A . \eta\mu B$,

ἔπεται ὅτι $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A . \eta\mu B . \eta\mu\Gamma$.

Λογάριθμοι.

167. Λογ. ημ(29° 14΄) = $\bar{1}$,68875 — διαφορὰ 22

διὰ 32΄΄ προστίθεται $\frac{32}{60} \cdot 22 =$ 12

ὅθεν λογ. ημ.(29° 14΄ 32΄΄) = $\bar{1}$,68887

168. Λογ. συν(16° 27΄) = $\bar{1}$,98185 — διαφορὰ 4

διὰ 47΄΄ ἀφαιροῦνται $\frac{47}{60} \cdot 4 =$ 3 ὅθεν λογ. συν(16° 27΄ 47″)=$\overline{1}$,98182

169. Λογ. ημ(57° 45΄)=$\overline{1}$,92723 διαφορὰ 8

διὰ 28″ προστίθενται $\frac{28}{60}$. 8 = 4

ὅθεν λογ ημ(57° 45΄ 28″)=$\overline{1}$,92727

170. Λογ συν(65° 24΄)=$\overline{1}$,61939 διαφορὰ 28

διὰ 37° ἀφαιροῦνται $\frac{37}{60}$ .28 = 17

ὅθεν λογ. συν(65° 24΄ 37″)=$\overline{1}$,61922

171. Λογ εφ(22° 37″)=$\overline{1}$,61972 διαφορὰ 36

διὰ 22″ προστίθενται $\frac{22}{60}$ ·36 = 13

ὅθεν λογ. εφ(22° 37΄ 22″)=$\overline{1}$,61985

172. Λογ. σφ. 17° =0,51466 διαφορὰ 45

διὰ 45″ ἀφαιροῦνται $\frac{45}{60}$ · 45= 34

ὅθεν λογ. σφ(17° 45″) =0,51432

173. Λογ. εφ(61° 2΄) =0,25684 διαφορὰ 30

διὰ 48″ προστίθενται $\frac{48}{60}$ · 30 = 24

ὅθεν λογ. εφ(61° 2΄ 48″)=0,25708

174. Λογ. σφ(58° 42΄)=$\overline{1}$,78391 διαφορὰ 28

διὰ 35″ ἀφαιροῦνται $\frac{35}{60}$ · 28= 16

ὅθεν λογ. σφ(58° 42΄ 35″)=$\overline{1}$,78375

175. Εἶναι $\overline{1}$,41722=λογ ημ(15° 9΄), $\overline{1}$,41768=λογ ημ(15° 10΄) ἀλλ' ὁ δοθεὶς λογάριθμος 1,41745 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω λογαρίθμων, οἵτινες διαφέρουν κατὰ 46· ἑπομένως, ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ ημ15° 9΄ αὐξηθῇ κατὰ 46 μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως, τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ 60″. ἂν δὲ ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ $\overline{1}$,41745—$\overline{1}$,41722=23, τὸ τόξον θὰ αὐξηθῇ κατὰ 60″.$\frac{23}{46}$=30″· ἑπομένως εἶναι α=15° 9΄ 30″.

176. Εἶναι $\overline{1}$,25858=λογσυν(79° 33΄) καὶ $\overline{1}$,25790=λογσυν(79° 34΄). Ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι 68, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ δοθέντος $\overline{1}$,25807 ἀπὸ τοῦ $\overline{1}$,25858 εἶναι 51· ὥστε τὸ τόξον 79° 33΄ πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 60″. $\frac{51}{68}$, ἤτοι κατὰ 45″, ἵνα γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ α· εἶναι λοιπὸν α=79° 33΄ 45″.

177. Εἶναι 0,31342=λογεφ(64° 5΄) καὶ 0,31374=λογεφ(64° 6΄). Ἑπομένως, ἂν ὁ λογάριθμος 0,31342 αὐξηθῇ κατὰ 32, τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον 64° 5΄ αὐξάνεται κατὰ 60″· ἄρα, ἂν ὁ αὐτὸς λογάριθμος 0,31342 αὐξηθῇ κατὰ 0,31370—0,31342, ἤτοι κατὰ 28, θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ 60″ . $\frac{28}{32}$, ἤτοι κατὰ 52,5″· εἶναι λοιπὸν α=64° 5΄ 52,5″.

178. Εἶναι $\overline{1},05553$=λογ σφ(83° 31′) καὶ $\overline{1},05441$=λογ σφ(83° 32′).

Ὥστε, ἂν ὁ λογάριθμος $\overline{1},05553$ ἐλαττωθῇ κατὰ 112, τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον 83° 31′ πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ 60″· ἄρα, ἂν ὁ πρῶτος λογάριθμος ἐλαττωθῇ κατὰ $\overline{1},05553-\overline{1},05490=63$, θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60'' \cdot \frac{63}{112}$, ἤτοι κατὰ 34″ περίπου· ἔχομεν λοιπὸν α=83° 31′ 34″.

179. Ἔχομεν λογημα=λογ $\left(\frac{3}{8}\right)$=λογ3—λογ8 ἢ

λογημ α=0,47712—0 90309 = —0,42597=$\overline{1}$,57403 καὶ α=22° 1′ 27″.

180. Ἔχομεν λογ συν α=λογ $\left(\frac{5}{9}\right)$=λογ5—λογ9 ἢ

λογ συν α=0,69897—0,95424=—0,25527=$\overline{1}$,74473 καὶ α=56° 15′ 3″.

181. Ἔχομεν λογ εφ α=λογ $\left(2\frac{1}{4}\right)$=λογ$\left(\frac{9}{4}\right)$=λογ9—λογ4 ἢ

λογ εφ α=0,95424—0,60206=0,35218· ἑπομένως εἶναι α=66° 2′ 14″.

182. Εἶναι λογ σφ α=λογ 0,875=$\overline{1}$,94201· ἄρα εἶναι α=48° 48′ 50″.

183. Θέτομεν α=180°+β, ὁπότε β=α—180°, ημβ=ημ(α—180°) = $=\frac{7}{15}$· καὶ λογ ημβ=λογ7—λογ15=$\overline{1}$,66904.

Ὅθεν β=27° 49′ 5″ καὶ α=180°+27° 49′ 5″=207° 49′ 5″.

184. Ἐὰν α+β=180° θὰ εἶναι σφβ=σφ(180°—α)=3, λογ σφβ=λογ3= =0,47712 καὶ β=18° 26′ 6″· ὥστε α=161° 33′ 54″.

185. 1) λογβ=λογ89,25+λογ ημ18° 50′=1,95061 +$\overline{1}$,50896 = 1,45957. ἄρα β=28,812.

2) λογβ=λογ5147,8+λογ εφ42° 37′ 20′=3,71162+$\overline{1}$,96361=3,67553· ὅθεν β=4737,3.

3) λογ γ=λογ112,35+λογ συν 35° 25′ 30″=2,05058+$\overline{1}$,91110=1,96168· ὅθεν γ=91,554.

4) λογ γ=λογ 6009,6+λογ σφ 29° 37′ 20″=3,77884+0,24520=4,02404· ὅθεν γ=10569,3.

186. Εἶναι 1) λογ α=λογ58+λογ ημ49°+λογσυν27°45′=1,76343+$\overline{1}$,87778 +$\overline{1}$,94694=1,58815· ὅθεν α=38,739.

2) λογβ=λογ419+λογ ημ65° 20′+λογ ημ39° 22′ 40″=2,62221+$\overline{1}$,96844+ +$\overline{1}$,80239=2,38304· ὅθεν β=241,57.

3) λογ γ=λογ708+λογ συν51° 18′+λογ σφ19°32′35″=2,85003+$\overline{1}$,79605+ +0,44982=3,09590· ὅθεν γ=1247,09.

187. Ἔχομεν 1)λογΕ=λογ317,5+λογ429+λογ ημ33°27′—λογ2=2,50174+ +2,63246+$\overline{1}$,74132—0,30103=4,57449· ὅθεν Ε=37540

2) λογχ=λογ4753+λογ ημ45° 40′+λογ συν 19° 9′—λογ 91,8=3,67697 + +$\overline{1}$,85448+$\overline{1}$,97528—1,96284=1,54389· ὅθεν χ=34,986.

188. Εἶναι λογψ=(λογ31,2 + λογ ημ73° 10′ 30″) — (λογ ημ 46° 54′ + +λογημ30°28′)= (1,49415+$\overline{1}$,98100)—($\overline{1}$,86342+$\overline{1}$,70504)=1,90669·ὅθενψ=80,666.

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα.

189. Αἱ γωνίαι ἢ τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον $\frac{\sqrt{3}}{2}$ εἶναι $60^\circ, 120^\circ$, $-300^\circ, -240^\circ$. Διὰ τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν παρατηροῦμεν, ὅτι $\eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2} =$ $= -\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(-60^\circ)$· ὥστε $\chi = -60^\circ$ κτλ.

190. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$· ὥστε εἶναι $\chi = \pm 30^\circ$ ἢ $\pm 330^\circ$· ὁμοίως ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu 135^\circ$· ὥστε $\chi = \pm 135^\circ$ ἢ $\pm 225^\circ$.

191. Εἶναι $\varepsilon\varphi\chi = -1 = \varepsilon\varphi 135^\circ$· ὥστε $\chi = 135^\circ$ ἢ 315° ἢ $\chi = -45^\circ$ ἢ -225°. Ἐπίσης ἔχομεν $\sigma\varphi\chi = 1 = \sigma\varphi 45^\circ$· ὥστε $\chi = 45^\circ$ ἢ 225° ἢ $\chi = -135^\circ$ ἢ -315°.

192. Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi^2\chi = \frac{1}{3}$ λαμβάνομεν ἢ $\varepsilon\varphi\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ὁπότε $\chi = 30^\circ$ ἢ 210 ἢ $\varepsilon\varphi\chi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ὁπότε $\chi = 150^\circ, 330^\circ$ ἢ -30°.

Ἐκ δὲ τῆς $\sigma\varphi^2\chi = 3$ λαμβάνομεν ἢ $\sigma\varphi\chi = \sqrt{3}$, ὁπότε $\chi = 30^\circ$ ἢ 210°, ἢ $\sigma\varphi\chi = -\sqrt{3}$, ὁπότε $\chi = -30^\circ, 150^\circ, 330^\circ$.

193. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως γράφεται

$$2\eta\mu\frac{\chi+5\chi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\chi-5\chi}{2} = 2\eta\mu 3\chi . \sigma\upsilon\nu 2\chi\cdot$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι $2\eta\mu 3\chi . \sigma\upsilon\nu 2\chi - \eta\mu 3\chi = 0$, ἤτοι $\eta\mu 3\chi(2\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1) = 0$ ὁπότε θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu 3\chi = 0$ ἢ $2\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1 = 0$· ἀλλ' ἐκ τῆς $\eta\mu 3\chi = 0$ λαμβάνομεν ἢ $3\chi = 0$, δηλαδὴ $\chi = 0$, ἢ $3\chi = 180^\circ$ ἢ 360°, δηλαδὴ ἢ $\chi = 60^\circ$ ἢ $\chi = 120^\circ$· ἐκ δὲ τῆς $2\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1 = 0$ λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \frac{1}{2}$· ὥστε εἶναι ἢ $2\chi = \pm 60^\circ$, ἤτοι $\chi =$ $= \pm 30^\circ$, ἢ $2\chi = 300^\circ$, ἤτοι $\chi = 150^\circ$.

194. Μετατρέποντες τὸ ἄθροισμα τῶν συνημιτόνων τοῦ πρώτου μέλους εἰς γινόμενον λαμβάνομεν $2\sigma\upsilon\nu 2\chi . \sigma\upsilon\nu\chi = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi$, ἢ $\sigma\upsilon\nu 2\chi . \sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$, ἢ $\sigma\upsilon\nu 2\chi(\sigma\upsilon\nu\chi - 1) = 0$· ὁπότε θὰ εἶναι ἢ $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$· ἀλλ' ἐκ τῆς $\sigma\upsilon\nu 2\chi$ $= 0$ λαμβάνομεν ἢ $2\chi = 90^\circ$ δηλαδὴ $\chi = 45^\circ$ ἢ $2\chi = 270^\circ$, ἤτοι $\chi = 135^\circ$· ἐκ δὲ τῆς $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ λαμβάνομεν $\chi = 0$ ἢ 360°·

195. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu\chi + 2\eta\mu\chi . \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu^2\chi = 0$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi . \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + 2\eta\mu\chi) = 0$.

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, ὁπότε $\chi = 90^\circ$ ἢ 270°, ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi +$ $+ 2\eta\mu\chi = 0$ ἤτοι $\sigma\varphi\chi = -2$· ἢ $\sigma\varphi(180^\circ - \chi) = 2$ καὶ $\lambda o\gamma\sigma\varphi(180^\circ - \chi) = 0{,}30103$· ὥστε $180^\circ - \chi = 26^\circ\ 33'\ 54''$ καὶ $\chi = 153^\circ\ 26'\ 6''$ ἢ $\chi = 333^\circ\ 26'\ 6''$.

196. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi . \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu 2\chi(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1) = 0$. ὥστε εἶναι ἢ $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$, ὁπότε $2\chi = 90^\circ$ ἢ 270°, ἤτοι $\chi = 45^\circ$ ἢ 135°, ἢ $2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$, δηλαδὴ $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$, ἤτοι $\chi = 120^\circ$ ἢ 240°.

197. Ἔχομεν $ημχ=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$, ἤτοι $ημχ=2$ ἢ $ημχ=1$. Ἀλλ' ἡ πρώτη λύσις ἀπορρίπτεται, ἐκ δὲ τῆς $ημχ=1$ λαμβάνομεν $χ=90^\circ$ ἢ -270°.

198. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ημχ· ἔχομεν λοιπὸν

$$ημχ=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}, \quad \text{ἤτοι} \quad ημχ=3 \quad \text{ἢ} \quad ημχ=-\frac{1}{2}.$$

καὶ ἐκ τῆς παραδεκτῆς λύσεως $ημχ=-\frac{1}{2}$ λαμβάνομεν $χ=210^\circ$ ἢ -30°.

199. Ὁμοίως ὡς ἄνω λαμβάνομεν

$$συνχ=\frac{(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{(2+\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}}}{4}=\frac{(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{4}=$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})\pm(2-\sqrt{3})}{4}$$, ἤτοι ἢ $συνχ=1$ ὁπότε $χ=0^\circ$ ἢ 360° ἢ $συνχ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ὁπότε $χ=\pm30^\circ$ ἢ $χ=\pm330^\circ$.

200. Ἔχομεν $3συνχ=2ημ^2χ$ ἤ, ἐπειδὴ $ημ^2χ=1-συν^2χ$, $3συνχ=2(1-συν^2χ)$ ἢ $2συν^2χ+3συνχ-2=0$· ἢ ἐὰν $συνχ=ψ$, εἶναι $2ψ^2+3ψ-2=0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $ψ=-2$ ἢ $\frac{1}{2}$· ἤδη ἐκ τῆς παραδεκτῆς λύσεως $συνχ=\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν $χ=\pm60^\circ$ ἢ $\pm300^\circ$.

201. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, γράφεται $2-2συν^2χ+\sqrt{3}\,συνχ+1=0$ ἢ $2συν^2χ-\sqrt{3}\cdot συνχ-3=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $συνχ=\sqrt{3}$ ἢ $συνχ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$· ἐκ δὲ τῆς $συνχ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ εὑρίσκομεν $χ=\pm150^\circ$ ἢ $\pm210^\circ$.

202. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ἐὰν θέσωμεν $συν^2χ=1-ημ^2χ$, γράφεται $4-4ημ^2χ-4ημχ-1=0$ ἢ $4ημ^2χ+ημχ-3=0$· ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $ημχ=-\frac{3}{2}$ ἢ $\frac{1}{2}$· ἐκ δὲ τῆς $ημχ=\frac{1}{2}$, λαμβάνομεν $χ=30^\circ$ ἢ 150°.

203. Αὕτη γράφεται $2ημχ-\frac{ημχ}{συνχ}=0$ ἢ $ημχ\left(2-\frac{1}{συνχ}\right)=0$· ὥστε ἢ $ημχ=0$, ὁπότε $χ=0$ ἢ 180° ἢ 360° ἢ $2-\frac{1}{συνχ}=0$ ἤτοι $συνχ=\frac{1}{2}$ ὁπότε $χ=\pm60^\circ$ ἢ $\pm300^\circ$.

204. Ἔχομεν $συνχ=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12}$· ὥστε ἢ $συνχ=\frac{1}{2}$ ὁπότε $χ=\pm60^\circ$ ἢ $\pm330^\circ$, ἢ $συνχ=\frac{1}{3}$ ἤτοι $λογσυνχ=-λογ3=-0{,}47712=\overline{1},52288$· ὅθεν $χ=\pm70^\circ\ 31'\ 43''$ ἢ $\pm289^\circ\ 28'\ 17''$.

205. Αὕτη γράφεται $2\sqrt{3}\,(1-ημ^2χ)-ημχ=0$ ἢ $2\sqrt{3}\,ημ^2χ+ημχ-2\sqrt{3}=0$· εὑρίσκομεν δὲ τὴν παραδεκτὴν λύσιν $ημχ=\frac{\sqrt{3}}{2}=ημ60^\circ$.

206. Ἔχομεν $2ημχ(3ημχ-4ημ^3χ)-4ημ^2χ.συν^2χ=0$ ἢ $6ημ^2χ-8ημ^4χ-$ $-4ημ^2χ+4ημ^4χ=0$ ἢ $ημ^2χ-4ημ^4χ=0$, ἤτοι $ημ^2χ(1-4ημ^2χ)=0$.

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν ἢ $ημχ=0$, ὁπότε $χ=0^c$, 180^0, 360^0, ἢ $1-4ημ^2χ=0$, δηλαδὴ $ημχ=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ὁπότε $χ=\pm 45^0$ ἢ $\pm 135^0$ ἢ 225^0.

207. Λύοντες ταύτην κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ἢ $εφχ=-1$ ἢ $εφχ=2$· αὕτη δὲ λύεται διὰ τῶν λογαρίθμων εὐκολώτατα.

208. Ἔχομεν $εφ\frac{χ}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=-1$ ἢ $\frac{1}{3}$ · ἀλλ' ἐκ τῆς $εφ\frac{χ}{2}=-1$ λαμβάνομεν $\frac{χ}{2}=135^0$ ἢ 315^0 ἢ -45^0 ἤτοι $χ=270^0$ ἢ -90^0, ἐκ δὲ τῆς $εφ\frac{χ}{2}=\frac{1}{3}$ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν $λογ\, εφ\frac{χ}{2}=-λογ3=$ $-0,47712=\overline{1},52288$·

ὅθεν $\frac{χ}{2}=18^0\ 26'\ 6''$ ἢ $198^0\ 26'\ 6''$ ἤτοι $χ=36^0\ 52'\ 12''$.

209. Λύοντες ταύτην κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $εφχ=1=εφ45^0$, ὁπότε εἶναι $χ=45^0$ ἢ 225^0 κτλ., ἢ $εφχ=\sqrt{3}=εφ60^0$, ὁπότε εἶναι $χ=60^0$ ἢ 240^0 κτλ.

210. Αὕτη γράφεται $\sqrt{3}\,εφχ+\sqrt{3}\,.\frac{1}{εφχ}-2=0$ ἢ $\sqrt{3}\,.\,εφ^2χ-2εφχ+$ $+\sqrt{3}=0$· ὅθεν εἶναι $εφχ=\frac{2\pm\sqrt{4+4.\sqrt{3}.\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2.\sqrt{3}}=\frac{2\pm 4}{2\sqrt{3}}$.

ἤτοι ἢ $εφχ=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, ὁπότε $χ=60^0$ ἢ 240^0

ἢ $εφχ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ὁπότε $χ=150^0$, 330^0, -30^0.

211. Αὕτη γράφεται $εφ^2χ+\frac{1}{εφ^2χ}=2$ ἢ $εφ^4χ-2εφ^2χ+1=0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $εφ^2χ=1$, ἤτοι $εφχ=\pm 1$· ὥστε $χ=45^0$, 225^0, 135^0, 315^0 κτλ.

212. Αὕτη γράφεται $\frac{2εφχ}{1-εφ^2χ}.εφχ=1$ ἢ $\frac{2εφ^2χ}{1-εφ^2χ}=1$ ἢ $2εφ^2χ=1-$ $εφ^2χ$, ἤτοι $εφ^2χ=\frac{1}{3}$ καὶ $εφχ=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ.

213. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης δι' α καὶ ἔχομεν $ημχ+\frac{β}{α}.\,συνχ=\frac{γ}{α}$· θέτομεν ἤδη $\frac{β}{α}=εφω$ καὶ ἔχομεν $ημχ+εφω.συνχ=\frac{γ}{α}$ ἢ $ημχ+\frac{ημ\,ω}{συν\,ω}.\,συνχ=\frac{γ}{α}$ ἢ $ημχ.συν\,ω+ημω.συνχ=\frac{γσυν\,ω}{α}$, καὶ τέλος $ημ(χ+ω)$ $=\frac{γσυν\,ω}{α}$ · ἐκ τῆς ω ἤδη, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $εφω=$ $=\frac{β}{α}$, εὑρίσκομεν τὸ συν ω, καὶ κατόπιν τὸ χ ἐκ τῆς $ημ(χ+ω)=\frac{γσυν\,ω}{α}$.

214. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\beta}{\alpha}.\eta\mu\chi = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}\cdot\eta\mu\chi = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi.\sigma\upsilon\nu\,\omega - \eta\mu\chi.\eta\mu\,\omega = \frac{\gamma\sigma\upsilon\nu\,\omega}{\alpha}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\chi+\omega) = \frac{\gamma\sigma\upsilon\nu\,\omega}{\alpha}$ κτλ. ὡς ἄνω.

215. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{2}{5}\cdot\eta\mu\chi = \frac{2}{5}\cdot$ ἢ ἐὰν $\epsilon\varphi\omega = \frac{2}{5} = \frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\chi - \frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\eta\mu\chi = \frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi.\sigma\upsilon\nu\,\omega - \eta\mu\chi.\eta\mu\,\omega = \eta\mu\,\omega$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\chi+\omega) = \eta\mu\,\omega$· ἤτοι $\chi+\omega+\omega = 90^\circ$ ἢ $\chi+2\omega = 90^\circ$· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\epsilon\varphi\,\omega = \frac{2}{5}$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ ω εἶναι $21^\circ\ 48'$ ἕπεται, ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ χ εἶναι $46^\circ\ 24'$ κτλ.

216. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}.\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ἐπειδὴ δὲ τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον, ὅπερ ἔχει ἐφαπτομένην $\frac{1}{\sqrt{3}}$ εἶναι 30°, ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu(\chi-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$\sigma\upsilon\nu\,30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ἢ } \sigma\upsilon\nu(\chi-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \text{ ἢ } \chi = 75^\circ \text{ κτλ.}$$

217. Αὕτη γράφεται $\eta\mu\chi + (2+\sqrt{3}).\sigma\upsilon\nu\chi = 1$, ἀλλὰ (ἄσκ. 124)

$$\sigma\varphi 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3}).(2+\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = 2+\sqrt{3}\cdot$$

ὅθεν θέτοντες ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει $\sigma\varphi 15^\circ$ ἀντὶ $2+\sqrt{3}$ ἔχομεν $\eta\mu\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu\,15^\circ}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\chi-15^\circ) = \eta\mu 15^\circ$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\chi-15^\circ) = \sigma\upsilon\nu 75^\circ$· ὅθεν $\chi - 15^\circ = 75^\circ$ ἢ $\chi - 15^\circ = -75^\circ$ ἢ $\chi - 15^\circ = 285^\circ$, ἐξ ὧν $\chi = 90^\circ$ ἢ -60° ἢ 300°.

218. Ἐνταῦθα δέον νὰ θέσωμεν $\epsilon\varphi\omega = 1 = \epsilon\varphi 45^\circ$· ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\eta\mu\chi.\sigma\upsilon\nu 45^\circ + \eta\mu 45^\circ.\sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ἢ } \eta\mu(\chi+45^\circ) = 1$$

καὶ $\chi + 45^\circ = 90^\circ$ καὶ $\chi = 45^\circ$ κτλ.

219. Ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu\chi = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2}}$ λαμβάνομεν $\eta\mu^2\chi = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2}$. ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $1 + \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} = 3\eta\mu\chi.\sigma\upsilon\nu\chi$ ἢ $2+1-\sigma\upsilon\nu 2\chi = 3.2\eta\mu\chi.\sigma\upsilon\nu\chi$ ἢ $3 = \sigma\upsilon\nu 2\chi + 3\eta\mu 2\chi$· θέτοντες δὲ ἤδη $\epsilon\varphi\omega = 3$ λαμβάνομεν $3 = \sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}\cdot\eta\mu 2\chi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(2\chi-\omega) = 3.\sigma\upsilon\nu\omega$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(2\chi-\omega) = \eta\mu\omega$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(2\chi-\omega) = \sigma\upsilon\nu(90^\circ-\omega)$. Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\ \epsilon\varphi\ \omega = \lambda o\gamma 3 = 0,47712$ ἤτοι $\chi = 71^\circ\ 33'\ 54''$, ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu(2\chi - 71^\circ\ 33'\ 54'') = \sigma\upsilon\nu 18^\circ\ 26'\ 6''$.

Ὅθεν $2\chi - 71^\circ\ 33'\ 54'' = 18^\circ\ 26'\ 6''$, ἤτοι $\chi = 45^\circ$

ἢ $2\chi - 71^\circ\ 33'\ 54'' = -18^\circ\ 26'\ 6''$, ἤτοι $\chi = 26^\circ\ 33'\ 54''$

ἢ $2\chi - 71^\circ\ 33'\ 54'' = 341^\circ\ 33'\ 54''$, ἤτοι $\chi = 206^\circ\ 33'\ 54''$

ἢ $2\chi - 71^\circ\ 33'\ 54'' = -341^\circ\ 33'\ 54''$, ἤτοι $\chi = -135^\circ$.

220. Εἶναι $ημ(χ-ψ)=\frac{1}{2}=ημ30^\circ$ καὶ $συν(χ+ψ)=\frac{1}{2}=συν60^\circ$· ἔχομεν λοιπὸν $χ-ψ=30^\circ$ καὶ $χ+ψ=60^\circ$ ἢ $χ-ψ=150^\circ$ καὶ $χ+ψ=300^\circ$.

Λύοντες τὰ συστήματα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

221. Εἶναι $συν(2χ+3ψ)=\frac{1}{2}=συν60^\circ$, $συν(3χ+2ψ)=\frac{\sqrt{3}}{2}=συν30^\circ$·

$$\text{ὥστε } 2χ+3ψ=60^\circ \text{ ἢ } 2χ+3ψ=300^\circ \text{ κτλ.}$$
$$\text{καὶ } 3χ+2ψ=30^\circ \text{ ἢ } 2χ+3ψ=330^\circ \text{ κτλ.}$$

Κατόπιν λύομεν τὰ συστήματα ταῦτα.

222. Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν δοθεισῶν γράφεται

$2ημ\frac{χ+ψ}{2}.συν\frac{χ-ψ}{2}=β$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $συν\frac{χ-ψ}{2}=\frac{β}{2ημ\frac{α}{2}}$

καὶ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ $\frac{χ-ψ}{2}$ · ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν τὸ $\frac{χ+ψ}{2}$, εὑρίσκομεν εὐκολώτατα τὰ χ καὶ ψ.

223. Εὑρίσκομεν $χ=45^\circ$ καὶ $ψ=30^\circ$ κτλ. (§ 61,2).

224. Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\frac{ημχ-ημψ}{ημχ+ημψ}=\frac{2-1}{2+1}, \quad \frac{2ημ\frac{χ-ψ}{2}.συν\frac{χ+ψ}{2}}{2ημ\frac{χ+ψ}{2}.συν\frac{χ-ψ}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{εφ\frac{χ-ψ}{2}}{εφ\frac{χ+ψ}{2}}=\frac{1}{3}, \quad \frac{εφ\,30^\circ}{εφ\frac{χ+ψ}{2}}=\frac{1}{3}, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$εφ\frac{χ+ψ}{2}=3εφ30^\circ \text{ ἢ } εφ\frac{χ+ψ}{2}=3.\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ ἤτοι } εφ\frac{χ+ψ}{2}=\sqrt{3}\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{3}=εφ60^\circ$ ἢ $εφ240^\circ$, ἔχομεν $\frac{χ+ψ}{2}=60^\circ$,

ἤτοι $χ+ψ=120^\circ$, ἢ $\frac{χ+ψ}{2}=240^\circ$, ἤτοι $χ+ψ=480^\circ$

Λύοντες ἤδη τὰ συστήματα $\begin{matrix} χ-ψ=60^\circ \\ χ+ψ=120^\circ \end{matrix}$ $\begin{matrix} χ-ψ=60^\circ \\ χ+ψ=480^\circ \end{matrix}$ εὑρίσκομεν

$$χ=90^\circ,\ ψ=30^\circ \text{ ἢ } χ=270^\circ,\ ψ=210^\circ.$$

225. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται $\frac{ημ(χ+ψ)}{συνχ.συνψ}=1$, ἤτοι $συνχ.συνψ=ημ45^\circ$ ἢ $συνχ.συνψ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $2συνχ.συνψ=\sqrt{2}$· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως γράφεται $συν(χ+ψ)+συν(χ-ψ)$· ὥστε ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$συν45^\circ+συν(χ-ψ)=\sqrt{2} \text{ ἢ } συν(χ-ψ)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ἢ } συν(χ-ψ)=συν45^\circ, \text{ ὅθεν } χ-ψ=45^\circ \text{ ἢ } χ-ψ=-45^\circ\cdot$$
$$\text{ἢ } χ-ψ=315^\circ \text{ ἢ } χ-ψ=-315^\circ.$$

Ἔχομεν λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα

$$\begin{array}{cccc} \chi+\psi=45^0 & \chi+\psi=45^0 & \chi+\psi=45^0 & \chi+\psi=45^0 \\ \chi-\psi=45^0 & \chi-\psi=-45^0 & \chi-\psi=315^0 & \chi-\psi=-315^0 \\ \hline \chi=45^0 & \chi=0^0 & \chi=180^0 & \chi=-135^0 \\ \psi=0^0 & \psi=45^0 & \psi=-135^0 & \psi=180^0 \end{array}$$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου

226. α΄) Ἔστω $Γ<90^0$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΔ, ἔχομεν $ΓΕ=ΓΔσυνΓ$, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, λαμβάνομεν $ΓΔ=βσυνΓ$· ὥστε εἶναι $ΓΕ=βσυν^2Γ$.

β΄) Ἔστω $Γ>90^0$· τότε εἶναι $ΓΕ=ΓΔσυν(180^0-Γ)=ΓΔ.(-συνΓ)$ καὶ $ΓΔ=βσυν(180^0-Γ)=β(-συνΓ)$· ἑπομένως εἶναι $ΓΕ=βσυν^2Γ$.

227. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν $ΑΓ=2ρημω$, ὡς καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΒ ἔχομεν $ΓΔ=ΓΒημ\,ω$· ἀλλὰ πάλιν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $ΓΒ=2ρσυνω$· ὥστε εἶναι $ΓΔ=2ρημω.συνω$ καὶ $ΑΓ+ΓΔ=2ρημω+2ρημω.συνω=2ρημω(1+συν\,ω)$.

228. Ἐπειδὴ εἶναι $ημ2Γ=2ημΓ.συνΓ=2συνΒημΒ$ καὶ $ημ2Β=2ημΒσυνΒ$ τὸ α΄ μέλος γράφεται $β^2ημ2Γ+γ^2ημ2Β=2β^2ημΒσυνΒ+2γ^2ημΒ.συνΒ=2ημΒ.συνΒ(β^2+γ^2)=2α^2ημΒ.συνΒ$· ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $β=αημΒ$ καὶ $γ=ασυνΒ$, ἕπεται ὅτι εἶναι $βγ=α^2ημΒ.συνΒ$· ὥστε εἶναι καὶ $2α^2ημΒ.συνΒ=2βγ$.

229. 1) Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $β=αημΒ$ καὶ $γ=ασυνΒ$· ὥστε εἶναι $\frac{β}{α+γ}=\frac{α\,ημΒ}{α+α\,συν\,Β}=\frac{α\,ημΒ}{α(1+συνΒ)}$· ἀλλὰ πάλιν εἶναι $ημΒ=2ημ\frac{Β}{2}\cdot συν\frac{Β}{2}$

καὶ $συν\frac{Β}{2}=\sqrt{\frac{1+συνΒ}{2}}$ ἢ $1+συνΒ=2συν^2\frac{Β}{2}$· ὥστε ἔχομεν

$$\frac{β}{α+γ}=\frac{2α\,ημ\frac{Β}{2}συν\frac{Β}{2}}{2ασυν^2\frac{Β}{2}} \quad ἢ \quad \frac{β}{α+γ}=εφ\frac{Β}{2}.$$

2) Εἶναι $2βγ=2α^2ημΒ.συνΒ=α^2ημ2Β$ καὶ $γ^2-β^2=α^2συν^2Β-α^2ημ^2Β=α^2(συν^2Β-ημ^2Β)=α^2συν2Β$· ὥστε $\frac{2βγ}{γ^2-β^2}=\frac{ημ2Β}{συν2Β}=εφ2Β$.

230. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι $γ=α\,συνΒ$ καὶ $β=α\,ημΒ$· ὅθεν $γ^2=α^2συν^2Β$ καὶ $β^2=α^2ημ^2Β$· καὶ $γ^2-β^2=α^2(συν^2Β-ημ^2Β)$ ἢ $\frac{γ^2-β^2}{α^2}=συν^2Β-ημ^2Β$ ἢ $\frac{γ^2-β^2}{α^2}=συν2Β$.

231. Εἶναι $β=αημΒ$, $γ=αημΓ$, ἄρα καὶ $β-γ=α(ημΒ-ημΓ)$· ἀλλ' εἶναι πάλιν $ημΒ-ημΓ=2ημ\frac{Β-Γ}{2}.συν\frac{Β+Γ}{2}$· ἐπειδὴ δὲ $Β+Γ=90^0$, ἕπεται

$$ημΒ-ημΓ=2ημ\frac{Β-Γ}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,ημ\frac{Β-Γ}{2}\text{· ὥστε ἔχομεν}$$

$$\beta-\gamma=\alpha.\sqrt{2}\ \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\ \ \text{ἄρα}\ \eta\mu\ \frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha\sqrt{2}}.$$

232. Ἐὰν αἱ πρῶται ἰσότητες τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως προστεθοῦν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\beta+\gamma=\alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)$ ἢ $\beta+\gamma=\alpha.2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$ συν $\frac{B-\Gamma}{2}$ $=\alpha\ 2.\frac{\sqrt{2}}{2}$. συν $\frac{B-\Gamma}{2}$, ὥστε συν $\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$.

233. 1) Ἔχομεν $\beta=\alpha\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$ καὶ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$. Ὥστε εἶναι $\beta\gamma=\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$ καὶ $2\beta\gamma=2\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ καὶ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{2\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\alpha^2}$ ἢ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=$ $=2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$ ἢ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=\eta\mu B.\eta\mu\Gamma+\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$· ἀλλ' αἱ γωνίαι B καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί· ἑπομένως εἶναι $\eta\mu B.\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\Gamma.\sigma\upsilon\nu B$· καὶ $\eta\mu B\eta\mu\Gamma+\eta\mu B.$ $.\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu B.\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B.\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$· ἄρα συν$(B-\Gamma)=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}$.

2) Ἐπειδὴ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἄσκησιν 230.

234. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$$\frac{2\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{2\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\alpha^2(\eta\mu^2 B-\eta\mu^2\Gamma)}=\frac{2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu^2 B-\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-\sigma\upsilon\nu^2 B}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}.$$

235. Εἶναι (ΑΒ) ημ $\frac{A}{2}$. ημ $\frac{B}{2}=(\Gamma\Delta)$ ημ $\frac{\Gamma}{2}$. ημ $\frac{\Delta}{2}$, διότι, ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι Ο, αἱ ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ,Δ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἐὰν δὲ Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἡ ΟΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐκ τῶν ὀρθογωνίων λοιπὸν τριγώνων ΟΑΕ καὶ ΟΒΕ ἔχομεν $(AE)=\rho.\sigma\varphi\ \frac{A}{2}(\rho=OE)$ καὶ $(EB)=\rho.\sigma\varphi\frac{B}{2}$·

$$\text{ἄρα}\quad (AE)+(EB)=\rho\left(\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}\right)$$

ἢ $(AB)=\rho\ .\ \dfrac{\eta\mu\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\eta\mu\frac{A}{2}\ .\ \eta\mu\frac{B}{2}}$ καὶ (ΑΒ) ημ $\frac{A}{2}$. ημ $\frac{B}{2}=\rho$ ημ $\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$

ὁμοίως, ἐὰν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΔΓ, εὑρίσκομεν (ΔΓ) ημ $\frac{\Gamma}{2}$. ημ $\frac{\Delta}{2}=\rho$ ημ $\left(\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}\right)$ · ἀλλ' ἐπειδὴ $A+B+\Gamma+\Delta=4$ ὀρθαὶ

εἶναι $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}=2$ ὀρθαί· ἑπομένως εἶναι

$\eta\mu\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}\right)$· ἄρα εἶναι καὶ

$$(AB)\eta\mu\ \frac{A}{2}\ .\ \eta\mu\ \frac{B}{2}=(\Gamma\Delta)\ \eta\mu\ \frac{\Gamma}{2}\ .\ \eta\mu\ \frac{\Delta}{2}.$$

236. Λαμβάνομεν $\frac{\eta\mu^2\Gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\eta\mu^2 B}{\varepsilon\varphi B}$, ἤτοι $\eta\mu\Gamma.\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu B.\sigma\upsilon\nu B$, ἤτοι $\eta\mu 2\Gamma=$

256. Ἡ ζητουμένη προβολὴ χ ἰσοῦται μὲ 35συν42° 20′· εἶναι δὲ λογχ=λογ35+λογσυν42° 20′=1,54407+$\overline{1}$,86879=1,41285· ὥστε χ=25,874.

257. Τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ 3,75εφ65° 30′. Εἶναι δὲ

λογχ=0,57403+0,34130=0,91533 καὶ χ=8,2286.

258. Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ δύο δοθεῖσαι δυνάμεις· αἱ δὲ ζητούμεναι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου τὰς προσκειμένας εἰς τὴν ὑποτείνουσαν· ὥστε εἶναι

α′) εφB= $\frac{9}{27}$ καὶ λογεφB=0,95424—1,43126=$\overline{1}$,52288 καὶ B=18° 26′ 6″

β′) Γ=71° 33′ 54″ καὶ γ′) α= $\frac{9}{\text{ημ } 18^\circ\ 26'\ 6''}$ καὶ

247. Ἔστω ἡ χορδὴ AB καὶ η ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου O ἡ OΓ· θὰ εἶναι ἑπομένως (AΓ)=86,927 καὶ (OΓ)=100 καὶ εφAOΓ= $\frac{(\text{AΓ})}{(\text{OΓ})}$

ἢ λογ εφ AOΓ=λογ 86,927—λογ 100 ἢ λογ εφ AOΓ=1,93916—2=$\overline{1}$,93916. ὅθεν AOΓ=41° καὶ τὸ ζητούμενον τόξον εἶναι 41°.2=82°.

248. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABΔ εὑρίσκομεν

$$(\text{BΔ})=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{576}=24 \text{ καὶ ημB}=\frac{7}{25}$$

ἢ λογ ημB=λογ7—λογ25=0,84510—1,39794=$\overline{1}$,44716

καὶ B=16° 15′ 37″.

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AΔΓ, εἰς ὃ ΔΓ=10 μ., εὑρίσκομεν

$$(\text{AΓ})=\sqrt{100+49}=\sqrt{149},\ \text{εφΓ}=\frac{7}{10} \text{ καὶ λογ εφΓ}=\overline{1},84510$$

ἄρα Γ=34° 59′ 31″· τέλος εὑρίσκομεν A=180°—(B+Γ).

249. Ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου οὗ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης διαγωνίου, ἤτοι 36 μ. καὶ οὗ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι τὰ ἡμίσυ τῶν γωνιῶν τοῦ ῥόμβου. Εὑρίσκομεν λοιπόν, ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ θεωρηθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ $\sqrt{39^2-36^2}=15$ μ. καὶ ἑπομένως ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι 30 μ. Αἱ γωνίαι ἤδη τοῦ θεωρουμένου τριγώνου εὑρίσκονται εὐκόλως.

250. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABΓ οὗ ἡ βάσις BΓ (ἢ α) εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς β ἢ τῆς γ. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν AΔ κάθετον ἐπὶ τὴν BΓ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΔ, οὗ ἡ BΔ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς γ· ὥστε

$$\text{εφ}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\gamma-\frac{\gamma}{4}}{\gamma+\frac{\gamma}{4}}}=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot \text{ καὶ λογ εφ}\frac{B}{2}=\frac{\text{λογ}3-\text{λογ}5}{2}=\overline{1},88908.$$

$$\beta-\gamma=\alpha.\sqrt{2}\ \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot \quad \text{ἄρα}\ \eta\mu\ \frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha\sqrt{2}}.$$

232. Ἐὰν αἱ πρῶται ἰσότητες τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως προστεθοῦν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\beta+\gamma=\alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)$ ἢ $\beta+\gamma=\alpha.2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$ συν $\frac{B-\Gamma}{2}$ $=\alpha\ 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.$ συν $\frac{B-\Gamma}{2}$, ὥστε συν $\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$.

233. 1) Ἔχομεν $\beta=\alpha\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$ καὶ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$. Ὥστε εἶναι $\beta\gamma=\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$ καὶ $2\beta\gamma=2\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ καὶ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=\frac{2\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\alpha^2}$ ἢ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=$ $=2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$ ἢ $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}=\eta\mu B.\eta\mu\Gamma+\eta\mu B.\eta\mu\Gamma$· ἀλλ' αἱ γωνίαι B καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί· ἑπομένως εἶναι $\eta\mu B.\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\Gamma.\sigma\upsilon\nu B$· καὶ $\eta\mu B\eta\mu\Gamma+\eta\mu B.$

$\gamma=\frac{}{\eta\mu 65^0}$ [illegible] $2\beta\gamma$

Χρησιμοποιοῦντες τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν.

253. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{50}{125}\ \text{ἢ}\ \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{2}{5}=0{,}4\ \text{καὶ}\ \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\overline{1},60206\ ,$$

$$\text{καὶ}\ \frac{\Gamma}{2}=21^0\ 48'\ 5''\ \text{καὶ}\ \Gamma=43^0\ 36\ \ 10''\ \text{καὶ}\ B=90^0-\Gamma.$$

Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν

$\gamma=\beta\varepsilon\varphi\Gamma=125\varepsilon\varphi 43^0\ 36'\ 10''$ καὶ $\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma 125+\lambda o\gamma\varepsilon\varphi 43^0\ 36'\ 10''$

ἢ $\lambda o\gamma\gamma=2{,}09691+\overline{1},97881=2{,}07572$· ὅθεν $\gamma=119{,}05$·

ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{125}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{125}{\sigma\upsilon\nu\ 43^0\ 36'\ 10''}$

καὶ $\lambda o\gamma\ \alpha=2{,}09691-\overline{1},85982=2{,}23709$· ὅθεν $\alpha=172{,}62$.

254. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας καὶ ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ ἐφαπτόμεναι, ἡ ΑΟ, ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ, εἶναι 46 μ., ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑΟ εὑρίσκομεν $\eta\mu BAO=\frac{30}{46}$ ἢ $\eta\mu BAO=\frac{15}{23}$ καὶ

$\lambda o\gamma\ \eta\mu BAO=\lambda o\gamma 15-\lambda o\gamma 23=1{,}17609-1{,}36173$ ἢ $\lambda o\gamma\ \eta\mu\ BAO=\overline{1},81436$ καὶ $BAO=40^0\ 42'\ 20''$· ἄρα $B A\Gamma=81^0\ 24'\ 40''$.

255. Ἐὰν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΓ εἶναι ἡ ΟΔ καὶ κάθετος ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΔ ἡ ΑΔ, ἡ ΟΔ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΟ· εἶναι δὲ $O\Delta=\frac{2}{3}$. $.OA$ ἢ $\frac{O\Delta}{OA}=\frac{2}{3}$· ἐπειδὴ δὲ $\frac{(O\Delta)}{(OA)}=\sigma\upsilon\nu AO\Delta$, ἕπεται καὶ $\sigma\upsilon\nu AO\Delta=\frac{2}{3}$ καὶ

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu AO\Delta=\lambda o\gamma 2-\lambda o\gamma 3=0{,}30103-0{,}47712$ ἢ $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu AO\Delta=\overline{1},83391$ καὶ

$AO\Delta=46^0\ 1'\ 4''$· ὥστε $AO\Gamma=92^0\ 9'\ 8''$.

256. Ἡ ζητουμένη προβολὴ χ ἰσοῦται μὲ $35\sigma\upsilon\nu 42^{\circ}\ 20'$· εἶναι δὲ $\lambda o\gamma \chi = \lambda o\gamma 35 + \lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu 42^{0}\ 20' = 1{,}54407 + \overline{1},86879 = 1{,}41285$· ὥστε $\chi = 25{,}874$.

257. Τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ $3{,}75\varepsilon\varphi 65^{\circ}\ 30'$. Εἶναι δὲ

$$\lambda o\gamma \chi = 0{,}57403 + 0{,}34130 = 0{,}91533 \text{ καὶ } \chi = 8{,}2286.$$

258. Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ δύο δοθεῖσαι δυνάμεις· αἱ δὲ ζητούμεναι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου τὰς προσκειμένας εἰς τὴν ὑποτείνουσαν· ὥστε εἶναι

α') $\varepsilon\varphi B = \dfrac{9}{27}$ καὶ $\lambda o\gamma \varepsilon\varphi B = 0{,}95424 - 1{,}43126 = \overline{1},52288$ καὶ $B = 18^{\circ}\ 26'\ 6''$

β') $\Gamma = 71^{\circ}\ 33'\ 54''$ καὶ γ') $\alpha = \dfrac{9}{\eta\mu\, 18^{\circ}\ 26'\ 6''}$ καὶ

$$\lambda o\gamma\ \alpha = 0{,}95424 - \overline{1},50000 = 1{,}45424 \text{· ὥστε } \alpha = 28{,}46.$$

259. Αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι ἰσοῦνται μὲ τὰς καθέτους πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 125 μ. καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι $28^{\circ}\ 24'$· ὥστε εἶναι $\beta = 125\eta\mu 28^{\circ}\ 24'$ καὶ $\gamma = 125\sigma\upsilon\nu 28^{\circ}\ 24'$. Εἶναι δὲ $\lambda o\gamma\beta = 2{,}09691 + \overline{1},67726 = 1{,}77417$ καὶ $\beta = 59{,}453$. Ὁμοίως $\lambda o\gamma\gamma = 2{,}09691 + \overline{1},94431$ καὶ $\gamma = 109{,}979$.

260. Εἶναι $\upsilon = 75\varepsilon\varphi 35^{\circ}40'$, $\lambda o\gamma\ \upsilon = 1{,}87506 + \overline{1},85594 = 1{,}73100$ καὶ $\upsilon = 53{,}827$.

261. Εἶναι $\upsilon = \dfrac{4}{\varepsilon\varphi 22^{\circ}30''}$, $\lambda o\gamma \upsilon = 0{,}60206 - \overline{1},61722 = 0{,}98484$ καὶ $\upsilon = 9{,}656$.

262. Εἶναι $\alpha = \dfrac{1000}{\varepsilon\varphi 24^{\circ}16'}$ καὶ $\lambda o\gamma\ \alpha = 3 - \overline{1},65400 = 3{,}34600$ καὶ $\alpha = 2218{,}2$

263. Τὸ ἀεροπλάνον ὑποτίθεται ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ τῆς εὐθείας τῶν δύο παρατηρητῶν, ἐὰν δὲ α καὶ β εἶναι τὰ δύο τμήματα εἰς ἃ διαιρεῖ τὸ ὕψος υ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παρατηρητῶν, εἶναι

$$\alpha = \upsilon\sigma\varphi 45^{\circ},\ \delta = \upsilon\sigma\varphi 60^{\circ} \text{ καὶ } \alpha + \beta = \upsilon(\sigma\varphi 45^{\circ} + \sigma\varphi 60^{\circ})$$

$$\text{ἤτοι } 1000 = \upsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ἢ } 1000 = \upsilon\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{ἔχομεν λοιπὸν } \upsilon = \frac{1000.\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{1000.\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)} = \frac{1000.(3-\sqrt{3})}{2}$$

δηλαδὴ $\upsilon = 500(3 - 1{,}732) = 634$ μέτρα.

264. Ἔστω ΑΒ τὸ ὕψος τοῦ βράχου, Γ ἡ πρώτη θέσις τοῦ παρατηρητοῦ καὶ Δ ἡ δευτέρα θέσις αὐτοῦ. Ὥστε εἶναι $(\Delta\Gamma) = 100$ μέτρα, $B\Gamma A = 45^{\circ}$ καὶ $B\Delta A = 60^{\circ}$. Ἤδη ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ λαμβάνομεν $(A\Gamma) = (AB).\sigma\varphi 45^{\circ}$,

καὶ $(A\Delta) = (AB)\sigma\varphi 60^{\circ}$· ὥστε $(A\Gamma - A\Delta) = (AB)(\sigma\varphi 45^{\circ} - \sigma\varphi 60^{\circ})$

$$\text{ἤτοι}\quad 100=(AB)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad \text{ἢ}\quad 100=(AB)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{ἑπομένως εἶναι}\ (AB)=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{100\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}=50(3+\sqrt{3}),$$

δηλαδὴ $(AB)=50(3+1,732)=50.4,732=236,6$ μέτρα.

Σημ. Ἡ ἄσκησις 263 δύναται νὰ λυθῇ ὡς ἡ ἄσκησις 264 ὁπότε τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου θὰ εἶναι 2366 μέτρα.

265. Ἔστω ΑΒ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ὑπὸ γωνίαν 30°, ΓΔ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ὑπὸ γωνίαν 60°, Ε ἡ πρώτη θέσις τοῦ παρατηρητοῦ καὶ Ζ ἡ δευτέρα θέσις αὐτοῦ, ἀπὸ τῆς ὁποίας βλέπει τὰ δύο δένδρα ὑπὸ τὴν γωνίαν τῶν 45°. Τότε ἔχομεν $(EA)=(AB)\sigma\varphi 30^\circ$, $(ZA)=(AB).\sigma\varphi 45^\circ$ καὶ συνεπῶς

$$(EA)-(ZA)=(AB)(\sigma\varphi 30^\circ-\sigma\varphi 45^\circ)\quad \text{ἤτοι}\quad 60=(AB)(\sqrt{3}-1)$$

$$\text{ἢ}\quad (AB)=\frac{60}{\sqrt{3}-1}=\frac{60(\sqrt{3}+1)}{2}=30(1,732+1)=81,96\ \mu.$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $(Z\Gamma)=\Gamma\Delta\sigma\varphi 45^\circ$, $(E\Gamma)=(\Gamma\Delta)\sigma\varphi 60^\circ$

$$\text{ὥστε}\ (EZ)=(\Gamma\Delta)(\sigma\varphi 45^\circ-\sigma\varphi 60^\circ),\ \text{δηλαδὴ}\ 60=(\Gamma\Delta)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{ἢ}\quad (\Gamma\Delta)=\frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{60\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}=30(3+\sqrt{3})=141,96\ \mu.$$

Ἤδη ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο δένδρων, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ $AZ+Z\Gamma$, εὑρίσκεται, ὅτι εἶναι ἴση μὲ $AB+\Gamma\Delta$, ἤτοι μὲ $81,96+141,96=223,92$ μ.

266. Ἐὰν $B=64^\circ 20'\ 40''$ ἔχομεν 1) $\Gamma=90^\circ-B$, 2) $\beta=\dfrac{915,12\ \mu}{\sigma\upsilon\nu\ 64^\circ\ 20'\ 40''}$

3) $\gamma=\dfrac{915,12}{\eta\mu\ 64^\circ\ 20'\ 40''}$ καὶ 4) $\alpha=\dfrac{915,12}{\eta\mu B.\ \sigma\upsilon\nu B}$.

267. Ἐὰν $\nu=896,08$ μ. καὶ $\mu=616,29$ μ ἔχομεν 1) $\varepsilon\varphi B=\sqrt{\dfrac{896,08}{616,29}}$

2) $\Gamma=90^\circ-B$, 3) $\beta=(896,08+616,29)\eta\mu B$, καὶ 4) $\gamma=(896,08+616,29)\sigma\upsilon\nu B$.

268. Εἶναι δηλαδὴ $\sigma=673,12$ μ. καὶ $\beta-\gamma=412,373$ μ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἄσκ. 231) ὅτι $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha.\sqrt{2}}$ ἢ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{412,373}{673,12\ .\ \sqrt{2}}$

$$\text{καὶ}\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=\lambda o\gamma\ 412,373-\left(\lambda o\gamma\ 673,12+\frac{\lambda o\gamma 2}{2}\right)=$$

$=2,61529-(2,82809+0,15051)$, ἤτοι $\lambda o\gamma\ \eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\overline{1},63669$· ἄρα εἶναι $\dfrac{B-\Gamma}{2}=$ $=25^\circ\ 40'\ 15''$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\dfrac{B+\Gamma}{2}=45^\circ$ εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων, $B=70^\circ\ 45'\ 15''$ καὶ $\Gamma=19^\circ\ 19'\ 45''$ καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν $\beta=1270,3$ μ. καὶ $\gamma=445,59$ μ.

269. Εἶναι δηλαδὴ $\alpha=627,5$ καὶ $\beta+\gamma=878,5$ μ. Ἀλλὰ (ἄσκ. 232) $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{878,5}{627,5.\sqrt{2}}$· εὑρίσκοντες δὲ διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν γωνίαν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\frac{B+\Gamma}{2}=45^0$, εὑρίσκομεν (ἄσκ. 268) τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

270. Δίδεται $\frac{\beta\gamma}{2}=30$, $B=67^0\ 22'\ 48''$, ἄρα καὶ $\Gamma=22^0\ 37'\ 12''$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἄσκ. 233) ὅτι $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\frac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\ 44^0\ 45'\ 36''=\frac{120}{\alpha^2}$ ἢ $\alpha^2=\frac{120}{\sigma\upsilon\nu\ 44^0 45' 36''}$· ὥστε ἡ ὑποτείνουσα α εὑρίσκεται ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς σχέσεως· κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

271. Δίδεται $\beta+\Gamma=119$ καὶ $B=64^0\ 40'$· ἄρα καὶ $\Gamma=25^0\ 59'\ 20''$. Ἀλλ' ἔχομεν $\beta=\alpha\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$·

ὥστε καὶ $\beta+\gamma=\alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)$ ἢ $\beta+\gamma=2\alpha\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}$ ἢ

$$\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2\ \eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}}\quad \text{ἢ}\quad \alpha=\frac{119}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0\ 1'\ 20''}.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν α καὶ κατόπιν τὰς β καὶ γ.

272. Εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=120$, $B=22^0\ 37'\ 22''$ καὶ $\Gamma=67^0\ 22'\ 38''$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $\beta=\alpha\eta\mu B$ καὶ $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$· ὥστε ἡ $\alpha+\beta+\gamma=120$ γίνεται $\alpha+\alpha\eta\mu B+\alpha\eta\mu\Gamma=120$ ἢ $\alpha(1+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=120$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\eta\mu A=1$, ἔχομεν $\alpha(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=120$· ἀλλὰ πάλιν (ἄσκ. 163) εἶναι $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}=4.\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}$.

ὥστε εἶναι

$$\alpha=\frac{120}{2\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}}\quad \text{ἢ}\quad \alpha=\frac{60}{\sqrt{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}.\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}}.$$

εὑρίσκοντες δὲ ἤδη ἐκ ταύτης τὴν α, εὑρίσκομεν κατόπιν τὰς β καὶ γ.

273. Εἶναι $\beta-\gamma=47$, $\Gamma=32^0\ 46'\ 45''$, $B=57^0\ 13'\ 15''$. Ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu\,\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$ (ἄσκ. 231), εὑρίσκομεν τὴν α καὶ εἶτα τὰς β καὶ γ.

274. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου, τότε ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι $360^0:12=30^0$· ἐὰν δὲ ΟΓ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ δωδεκαγώνου, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΓ εἶναι (ΑΓ) = 10 μ., γωνΑΟΓ =15°· ὥστε εἶναι

$$(ΑΟ) = \frac{(ΑΓ)}{ημ(ΑΟΓ)} \quad ἢ \quad (ΑΟ) = \frac{10}{ημ15^0}.$$

ἡ δὲ ΟΓ δηλ. ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι

$$(ΟΓ)=(ΑΓ)σφΑΟΓ \quad ἢ \quad (ΟΓ)=10.σφ15^0.$$

275. Ἀφοῦ γνωρίζομεν τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΟΓ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ, τὸ ὁποῖον δωδεκαπλασιάζομεν. Εἶναι δηλαδὴ

$$(ΑΟΒ) = \frac{(ΑΒ).(ΟΓ)}{2} \quad ἢ \quad (ΑΟΒ) = \frac{20.10.σφ15^0}{2}$$

$$καὶ \quad 12(ΑΟΒ)=12.10.10σφ15^0.$$

276. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς δύο προηγουμένας ἀσκήσεις, εὑρίσκομεν

$$(ΑΓ)=(ΟΓ)εφΓΟΑ \quad ἢ \quad (ΑΓ)=10εφ15^0 \cdot \quad ἄρα \quad (ΑΒ)=20εφ15^0$$

καὶ ἡ ζητουμένη περίμετρος εἶναι $12.20εφ15^0$.

277. Ὁμοίως ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἄνω ἀσκήσεις εὑρίσκομεν

$$(ΑΓ)=(ΑΟ)ημ\,ΑΟΓ \quad ἢ \quad (ΑΓ)=ημ15^0 \cdot \quad ἄρα \quad (ΑΒ)=2ημ15^0$$

καὶ ἡ ζητουμένη περίμετρος εἶναι $12.2.ημ15^0$.

278. Ἔστω ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἔχομεν τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΑΔ=ΒΔεφΒ ἢ $εφΒ = \frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ καὶ ΑΔ=βημΓ· ἀλλὰ ΒΔ= =ΒΓ−ΔΓ ἢ ΒΔ=α−βσυνΓ· ὥστε $εφΒ = \frac{βημΓ}{α-βσυνΓ}$.

279. Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{α}{ημ\,Α} = \frac{β}{ημ\,Β} = \frac{γ}{ημ\,Γ}$ λαμβάνομεν

$$β = \frac{αημΒ}{ημΑ} \quad καὶ \quad γ = \frac{αημΓ}{ημΑ} \quad ἢ \quad β^2 = \frac{α^2ημ^2Β}{ημ^2Α} \quad καὶ \quad γ^2 = \frac{α^2ημ^2Γ}{ημ^2Α}.$$

$$Ὅθεν \quad β^2-γ^2=α^2\left(\frac{ημ^2Β-ημ^2Γ}{ημ^2Α}\right) \quad ἢ \quad \frac{β^2-γ^2}{α^2} = \frac{ημ^2Β-ημ^2Γ}{ημ^2Α}.$$

$$ἢ \quad \frac{β^2-γ^2}{α^2} = \frac{ημ(Β-Γ)ημ(Β+Γ)}{ημ^2(Β+Γ)} \quad ἢ \quad \frac{ημ(Β-Γ)}{ημ(Β+Γ)} = \frac{β^2-γ^2}{α^2}.$$

280. Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{α}{ημ\,Α} = \frac{β}{ημ\,Β} = \frac{γ}{ημΓ}$ λαμβάνομεν

$$\frac{α}{ημ\,Α} = \frac{β+γ}{ημΒ+ημΓ} \quad ἢ \quad \frac{α}{β+γ} = \frac{ημΑ}{ημΒ+ημΓ}.$$

ἀλλ' εἶναι $ημΑ=2ημ\frac{Α}{2}.συν\frac{Α}{2}$ καὶ $ημΒ+ημΓ=2ημ\left(\frac{Β+Γ}{2}\right).συν\left(\frac{Β-Γ}{2}\right)$

$$\text{ἤτοι εἶναι } \frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{2\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right).\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}$$

ἀλλὰ $\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)+\frac{A}{2}=90^\circ$, ὥστε ἔχομεν $\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$,

ἐπίσης εἶναι $\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)+\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)=90^\circ$

ἤτοι εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)$.

$$\text{ἔχομεν ἄρα } \frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{2\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}.$$

281. Λαμβάνομεν ὡς ἄνω $\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}$.

ἀλλ' εἶναι $\eta\mu B-\eta\mu\Gamma=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right).\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$.

$$\text{ἔχομεν λοιπὸν } \frac{\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{2\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right).\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}.$$

ἐπειδὴ δὲ $\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)+\frac{A}{2}=90^\circ$ καὶ $\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)+\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)=90^\circ$,

ἔπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\frac{A}{2}$ καὶ $\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)$.

$$\text{ἔχομεν λοιπὸν } \frac{\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{2\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}.$$

282. Εἶναι (§ 72) $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$, ἤτοι $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$ ἤτοι $\gamma\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}$ · ὥστε $\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\,\sigma\upsilon\nu B=$ $=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}-\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}$ · ἀφοῦ λοιπὸν $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\sigma\upsilon\nu B=$ $=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}$, ἔπεται $\frac{1}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\alpha}{\beta^2-\gamma^2}$.

283. Γνωρίζομεν ὅτι : $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

$\gamma^2+\alpha^2-\beta^2=2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$

$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$

καὶ διὰ τῆς προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma).$$

284. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$ καὶ $\varepsilon\varphi\Gamma=\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, ἤτοι εἶναι $\dfrac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=$

$=\dfrac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}$· ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως $\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ λαμβάνομεν $\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$.

ὥστε εἶναι $\dfrac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\dfrac{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma\sigma\upsilon\nu B}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν 282 εὕρομεν, ὅτι εἶναι $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$ καὶ $\gamma\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}$, ἕπεται, ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}:\frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{2\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}.$$

285. Εἶναι $\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}=\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\dfrac{\tau-\gamma}{\varrho}\left(\text{διότι } \varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\dfrac{\varrho}{\tau-\gamma}\right)$. Ὁμοίως εἶναι $\varepsilon\varphi\dfrac{B+\Gamma}{2}=\dfrac{\tau-\alpha}{\varrho}$ καὶ $\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma+A}{2}=\dfrac{\tau-\beta}{\varrho}$. Ὥστε εἶναι

$$(\alpha-\beta)\,.\,\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=(\alpha-\beta)\,.\,\frac{\tau-\gamma}{\varrho}=\frac{\alpha\tau-\alpha\gamma-\beta\tau+\beta\gamma}{\varrho}$$

$$(\beta-\gamma)\,.\,\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}=(\beta-\gamma)\,.\,\frac{\tau-\alpha}{\varrho}=\frac{\beta\tau-\alpha\beta-\gamma\tau+\alpha\gamma}{\varrho}$$

$$(\gamma-\alpha)\,.\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma+A}{2}=(\gamma-\alpha)\,.\,\frac{\tau-\beta}{\varrho}=\frac{\gamma\tau-\beta\gamma-\alpha\tau+\alpha\beta}{\varrho}.$$

Ἤδη προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη.

286. Ἐπειδὴ $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, ἕπεται ὅτι

$\dfrac{\beta-\alpha}{\eta\mu B-\eta\mu A}=\dfrac{\gamma-\beta}{\eta\mu\Gamma-\eta\mu B}$· ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη $\alpha+\gamma=2\beta$, ἤτοι $\beta-\alpha=\gamma-\beta$, ἕπεται ἐπίσης ὅτι $\eta\mu B-\eta\mu A=\eta\mu\Gamma-\eta\mu B$. Ὥστε εἶναι

$$2\eta\mu\frac{B-A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{B+A}{2}=2\eta\mu\frac{\Gamma-B}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+B}{2}.$$

$$\text{ἢ}\quad \eta\mu\frac{B-A}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma-B}{2}\,.\,\eta\mu\frac{A}{2}$$

$$\text{ἢ}\quad \left(\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-\eta\mu\frac{A}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\right).\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=\left(\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}-\eta\mu\frac{B}{2}.\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\right).\,\eta\mu\frac{A}{2}$$

$$\text{ἢ } \eta\mu\frac{A}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu\frac{B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= \eta\mu\frac{B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.\eta\mu\frac{A}{2} - \eta\mu\frac{\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{A}{2}.$$

Διαιροῦντες ἤδη τὰ δύο μέλη διὰ ημ $\frac{A}{2}.\eta\mu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν

$$\sigma\varphi\frac{B}{2} - \sigma\varphi\frac{A}{2} = \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} - \sigma\varphi\frac{B}{2}, \text{ δηλαδὴ } \sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\varphi\frac{B}{2}.$$

Σημείωσις. Τὴν δοθεῖσαν σχέσιν ἀποδεικνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ εἶναι $\sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = 2\sigma\varphi\frac{B}{2}$ πρέπει νὰ εἶναι

$$\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} + \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}} = 2\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}}, \text{ ἤτοι}$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$, πρέπει νὰ εἶναι $(\tau-\alpha)+(\tau-\gamma)=2(\tau-\beta)$, δηλαδὴ $2\tau-(\alpha+\gamma)=2\tau-2\beta$, ἤτοι $\alpha+\gamma=2\beta$. Ἀλλ' ἀφοῦ ἐδόθη ὅτι $\alpha+\gamma=2\beta$, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\varphi\frac{B}{2}$.

287. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων, εἰς ἃς διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τῆς διχοτόμου. Ὥστε:

$$\frac{1}{2}\mu\beta\eta\mu\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\mu\gamma\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A, \text{ ἢ } \mu(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2} = \beta\gamma\eta\mu A.$$

288. Εἶναι $\tau=21$, $\tau-\alpha=8$, $\tau-\beta=7$, $\tau-\gamma=6$· ἄρα

$$\text{ἔχομεν } \eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{7.6}{13.15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\eta\mu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}} = \sqrt{\frac{8.6}{13.15}} = \sqrt{\frac{16}{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65},$$

$$\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{8.7}{13.14}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

289. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{21.8}{14.15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}} = \sqrt{\frac{21.7}{13.15}} = \sqrt{\frac{49}{13.5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65},$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{21.6}{13.15}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

290. Εἶναι $\tau=9$, $\tau-\alpha=1$, $\tau-\beta=3$, $\tau-\gamma=5$ καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{9}{24}}=\frac{3}{2\sqrt{6}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{9.5}{8.6}}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

291. Εἶναι $\tau=70$, $\tau-\alpha=45$, $\tau-\beta=18$, $\tau-\gamma=7$, ὥστε

$$\text{ἔχομεν } \varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{18.7}{70.45}}=\frac{1}{5},$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{7.45}{70.18}}=\frac{1}{2},\quad \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{45.18}{70.7}}=\frac{9}{7}.$$

292. Εἶναι $\tau=984$, $\tau-\alpha=697$, $\tau-\beta=168$, $\tau-\gamma=119$·

$$\text{ὥστε λαμβάνομεν } \varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{168.119}{984.697}}=\sqrt{\frac{24.7.7.17}{24.41.41.17}}=\frac{7}{41},$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{697.119}{984.168}}=\sqrt{\frac{17.41.7.17}{24.41.24.7}}=\frac{17}{24},$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{697.168}{984.119}}=\sqrt{\frac{17.41.24.7}{24.41.7.17}}=1.$$

293. Ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι $\frac{4}{3}$· ὥστε εἶναι $\eta\mu 36^\circ=\frac{4}{3}\eta\mu\psi$, ἤτοι

$\eta\mu\psi=\frac{3}{4}\eta\mu 36^\circ$ καὶ $\lambda o\gamma\eta\mu\psi=\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma\eta\mu 36^\circ-\lambda o\gamma 4$, $\lambda o\gamma\eta\mu\psi=0{,}47712+$

$+\overline{1}{,}76922-0{,}60206=\overline{1}{,}64428$· ὥστε $\psi=26^\circ\ 9'\ 26''$.

294. α') Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $\eta\mu\chi=\frac{4}{3}\eta\mu\psi$ καὶ

$\eta\mu\chi=\frac{3}{2}\eta\mu\psi'$, ἤτοι $\frac{4}{3}\eta\mu\psi=\frac{3}{2}\eta\mu\psi'$ καὶ $\frac{\eta\mu\psi}{\eta\mu\psi'}=\frac{9}{8}$.

β') $\frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu\psi'}=\frac{9}{8}$ ἢ $\eta\mu\psi'=\frac{8}{9}\eta\mu 40^\circ$ καὶ $\lambda o\gamma\eta\mu\psi'=\lambda o\gamma 8+\lambda o\gamma\eta\mu 40^\circ-$

$-\lambda o\gamma 9=0{,}90309+\overline{1}{,}80807-0{,}95424=\overline{1}{,}75792$ καὶ $\psi=34^\circ\ 56'\ 16''$.

295. Ἔχομεν $\frac{\eta\mu 40^\circ}{\eta\mu\psi}=\frac{3}{2}$· ὥστε $\eta\mu\psi=\frac{2\eta\mu 40^\circ}{3}$, $\lambda o\gamma\eta\mu\psi=0{,}30103+$

$+\overline{1}{,}80807-0{,}47712=\overline{1}{,}63198$ καὶ $\psi=25^\circ\ 22'\ 27''$. Ἡ διαθλωμένη λοιπὸν ἀκτὶς μετὰ μὲν τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος σχηματίζει γωνίαν $40^\circ-$ $-25^\circ\ 22'\ 27''=14^\circ\ 37'\ 33''$, μετὰ δὲ τῆς καθέτου εἰς τὸ Β σχηματίζει γωνίαν (διαθλάσεως) $25^\circ\ 22'\ 27''$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία τῶν προεκτάσεων τῶν καθέτων εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ εἶναι $360^\circ-(180^\circ+36^\circ)=144^\circ$, ἕπεται ὅτι ἡ διαθλωμένη ἀκτὶς ΒΓ προσπίπτει εἰς τὸ Γ ὑπὸ γωνίαν $180^0-(144^0+$ $+25^0\ 22'\ 27'')=10^0\ 37'\ 33''$. Ὥστε ἔχομεν $\frac{\eta\mu 10^0\ 37'\ 33''}{\eta\mu\psi'}=\frac{2}{3}$, ἤτοι

$\eta\mu\psi'=\frac{3\eta\mu 10^0\ 37'\ 33''}{2}$ καὶ λογ $\eta\mu\psi'=0,47712+\overline{1},26575-0,30103=\overline{1},44184$

καὶ $\psi'=16^0\ 3'\ 25''$. Ἡ ἐξερχομένη λοιπὸν ἀκτὶς ΓΔ σχηματίζει μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ Γ γωνίαν $16^0\ 3'\ 25''$· ὥστε ἡ προέκτασις τῆς ΓΔ σχηματίζει μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν $16^0\ 3'\ 25''-10^0\ 37'\ 33''=5^0\ 25'\ 52''$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία τῆς ἐκτροπῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $14^0\ 37'\ 33''+5^0\ 25'\ 52''=20^0\ 3'\ 25''$.

296. Ἐὰν ἡ μία γωνία εἶναι χ^0, ἡ ἄλλη εἶναι $2\chi^0$ καὶ ἡ τρίτη $3\chi^0$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\chi^0+2\chi^0+3\chi^0=180^0$ ἢ $6\chi^0=180^0$ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι 30^0, 60^0, 90^0.

Ἔχομεν ἄρα $\frac{\alpha}{\eta\mu 90^0}=\frac{\beta}{\eta\mu 60^0}=\frac{\gamma}{\eta\mu 30^0}$ ἢ $\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\gamma}{\frac{1}{2}}$.

Ἤτοι αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν

$$1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} \text{ ἢ τῶν } 2,\ \sqrt{3},\ 1.$$

297. Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ $A=112^0\ 30'$ καὶ $B=22^0\ 30'$· τότε εἶναι $\Gamma=45^0$· ἐὰν δὲ υ εἶναι τὸ ὕψος ΓΔ ἔχομεν

$$\upsilon=\beta\eta\mu A=\frac{\gamma\eta\mu B\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\gamma\eta\mu 22^0\ 30'\ .\ \eta\mu 112^0\ 30'}{\eta\mu 45^0}$$

$$\text{ἢ}\quad \upsilon=\frac{\gamma\eta\mu 22^0\ 30'\ \eta\mu 67^0\ 30'}{2\eta\mu 22^0\ 30'\ .\ \sigma\upsilon\nu 22^0\ 30'}=\frac{\gamma\eta\mu 67^0\ 30'}{2\sigma\upsilon\nu 22^0\ 30'}\ \text{ ἢ }\ \upsilon=\frac{\gamma}{2}$$

ἐπειδὴ $\eta\mu 67^0\ 30'=\sigma\upsilon\nu 22^0\ 30'$.

298. Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ** καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ· τότε ἔχομεν

$$B\Delta=\gamma\sigma\upsilon\nu B \text{ καὶ } \Delta\Gamma=\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \text{ καὶ } B\Delta+\Delta\Gamma=\gamma\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\text{ἤτοι}\quad \alpha=\gamma\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Ἐὰν ἡ ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν

$$B\Delta=\gamma\sigma\upsilon\nu B \text{ καὶ } \Gamma\Delta=\beta\sigma\upsilon\nu(180^0-\Gamma)=-\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot$$

ἄρα καὶ $B\Delta-\Gamma\Delta=\gamma\sigma\upsilon\nu B-(-\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)$, ἤτοι $\alpha=\gamma\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι σχέσεις.

299. Εἶναι $E=(A\Delta B)+(A\Delta\Gamma)$· ἀλλὰ $(A\Delta B)=\frac{(B\Delta).(A\Delta)}{2}\eta\mu\,\omega$

(ἐπειδὴ γων. $A\Delta B+\omega=180^0$) καὶ $(A\Delta\Gamma)=\frac{(\Delta\Gamma).(A\Delta)}{2}\eta\mu\,\omega$·

ὥστε $E = \frac{(B\Delta)(A\Delta)}{2}$ ημ $\omega + \frac{(\Delta\Gamma)(A\Delta)}{2}$ ημ $\omega = \alpha\ \frac{(A\Delta)}{2}$ ημ ω ἤ $(A\Delta) = \frac{2E}{\alpha ημ\omega}$.

300. Γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι $E = \frac{1}{2}$ αβημΓ· ἀλλ' εἶναι

$\frac{\alpha}{ημA} = 2P$ καὶ $\frac{\beta}{ημB} = 2P$ ἤ $\alpha = 2P ημA$ καὶ $\beta = 2P ημB$·

ὥστε ἔχομεν $E = \frac{1}{2}.2P ημA.2P ημB.ημ\Gamma$ ἤ $E = 2P^2 ημA.ημB.ημ\Gamma$.

301. Γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4P}$ ἤ $P = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ καὶ $\varrho = \frac{E}{\tau}$.

ὥστε εἶναι $4P.\varrho.συν\frac{A}{2}.συν\frac{B}{2}.συν\frac{\Gamma}{2} = 4.\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}.\frac{E}{\tau}.$

$$.\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}.\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}.\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\tau}.\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha).\tau(\tau-\beta).\tau(\tau-\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}} =$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{\tau}.\frac{\tau}{\alpha\beta\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = E.$$

302. Εἶναι $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma}$.

ἀλλ' ἔχομεν $2\tau = \frac{2E}{\varrho}$ καὶ $\alpha\beta\gamma = 4E.P$·

ὥστε εἶναι $\frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2E}{\varrho} : 4EP$ ἤ $\frac{2\tau}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2P\varrho}$·

ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι εἶναι $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{2P\varrho}$.

303. Ἐὰν O_1 τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου ἔναντι τῆς γωνίας A, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $ABO_1\Gamma$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΓBO_1 ἤ τῶν τριγώνων ABO_1, $A\Gamma O_1$·

ὥστε εἶναι $E + \frac{1}{2}\varrho_1\alpha = \frac{1}{2}\varrho_1.\gamma + \frac{1}{2}\varrho_1.\beta$, ἤτοι $E = \varrho_1\left(\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right)$

ἤ $E = \varrho_1.\left(\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2} - \alpha\right) = \varrho_1(\tau-\alpha)$· ἄρα $\varrho_1 = \frac{E}{\tau-\alpha}$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι $\varrho_2 = \frac{E}{\tau-\beta}$ καὶ $\varrho_3 = \frac{E}{\tau-\gamma}$.

304. Εἶναι $\varrho.\varrho_1 = \frac{E}{\tau}.\frac{E}{\tau-\alpha}$ καὶ $\varrho_2.\varrho_3 = \frac{E}{\tau-\beta}.\frac{E}{\tau-\gamma}$.

Ὥστε εἶναι $\frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_2\varrho_3} = \frac{E^2}{\tau(\tau-\alpha)}.\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{E^2} = \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)} = εφ^2\frac{A}{2}$.

305. Εἶναι $\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = \frac{E}{\tau}.\frac{E}{\tau-\alpha}.\frac{E}{\tau-\beta}.\frac{E}{\tau-\gamma} = \frac{E^4}{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$

$= \frac{E^4}{E^2} = E^2$.

Ἐπίλυσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

306. Ἔχομεν Β+Γ=113°5′ καὶ ἑπομένως εἶναι Α=180°−113°5′=66°55′.

Εὕρεσις τῆς β

$\beta = \dfrac{\alpha \eta\mu B}{\eta\mu A}$

λογβ=λογα+λογημΒ−λογημΑ
λογα=2,16137
λογημΒ=$\bar{1}$,98426

ἄθροισμα=2,14563
λογημΑ=$\bar{1}$,96376

λογβ=2,18187
καὶ β=152,01

Εὕρεσις τῆς γ

$\gamma = \dfrac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$

λογγ=λογα+λογημΓ−λογημΑ
λογα=2,16137
λογημΓ=$\bar{1}$,79335

ἄθροισμα=1,95472
λογημΑ=$\bar{1}$,96376

λογγ=1,99096
καὶ γ=97,94 μ.

307. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν
Α=180°−(76° 43′+85° 20′)=17° 57′ καὶ
λογβ=λογ475,65+λογημ76° 43′−λογημ17° 57′
λογγ=λογ475,65+λογημ85° 20′−λογημ17° 57′ κτλ.

308. Ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστά, ἐὰν εἶναι α=12,5, Β=18° καὶ Γ=98°12′ Α=180°−(Β+Γ) ἢ Α=180°−116° 12′=63° 48′.

Εὕρεσις τῆς β
λογβ=λογα+λογημΒ−λογημΑ
λογ12,5=1,09691
λογημ18°=$\bar{1}$,48998

ἄθροισμα=0,58689
λογημ63° 48′=$\bar{1}$,95292

λογβ=0,63397
καὶ β=4,305

Εὕρεσις τῆς γ
λογγ=λογα+λογημΓ−λογημΑ
λογ12,5=1,09691
λογημ98° 12 ἢ
λογημ81° 48′=$\bar{1}$,99554

ἄθροισμα=1,09245
λογημ63° 48′=$\bar{1}$,95292

λογγ=1,13953
γ=13,789

309. Ἐὰν α=892 μ., β=104 μ. καὶ Γ=45° ἔχομεν α+β=996 μ., α−β=788μ. καὶ Γ=22° 30′. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \cdot \sigma\varphi \dfrac{\Gamma}{2}$ καὶ

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi \dfrac{A-B}{2} = \lambda o\gamma(\alpha-\beta) + \lambda o\gamma\sigma\varphi \dfrac{\Gamma}{2} - \lambda o\gamma(\alpha+\beta)$ εὑρίσκομεν

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi \dfrac{A-B}{2} = \lambda o\gamma 788 + \lambda o\gamma\sigma\varphi 22^\circ 30' - \lambda o\gamma 996 = 2,89653 + 0,38278 - 2,99829 =$

$= 0,28105$ · ὅθεν $\dfrac{A-B}{2} = 62^\circ 21' 58''$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{A+B}{2}=\frac{180^0-\Gamma}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2}=67^0\ 30'$ εὑρίσκομεν

$$\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}=A=129^0\ 51'\ 58'' \text{ καὶ } \frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=B=5^0\ 8'\ 2''$$

Διὰ τὴν γ ἔχομεν, $\gamma=\alpha\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ καὶ

$$\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma-\lambda o\gamma\eta\mu A=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma-\lambda o\gamma\eta\mu(180^0-A)=$$
$$=2{,}95036+\overline{1}{,}84949-\overline{1}{,}88510=2{,}91475 \text{ καὶ } \gamma=821{,}77$$

310. Ἔστω $A=120^0$ καὶ ὅτι $\beta=2\gamma$· ἔχομεν τότε $\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}$.

. $\sigma\varphi\frac{A}{2}$ ἢ $\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{2\gamma-\gamma}{2\gamma+\gamma}\cdot\sigma\varphi 60^0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$ ἢ $\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$ καὶ

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\lambda o\gamma\sqrt{3}-\lambda o\gamma 9$. Λογ $\sqrt{3}=0{,}23856$, $\lambda o\gamma 9=0{,}95424$ καὶ

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\overline{1}{,}28432 \text{ καὶ } \frac{B-\Gamma}{2}=10^0\ 53'\ 36''$$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2}=30^0$, ἕπεται $B=40^0\ 53'\ 36''$ καὶ $\Gamma=19^0\ 6'\ 24''$.

311. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$· ὅθεν $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=$

$=\lambda o\gamma(242{,}5-143{,}3)+\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{54^0\ 36'}{2}-\lambda o\gamma(242{,}5+143{,}3)$ ἢ $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=$

$=\lambda o\gamma 99{,}2+\lambda o\gamma\sigma\varphi 27^0\ 18'-\lambda o\gamma 385{,}8$ ἢ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)=1{,}99651+0{,}28723-$

$-2{,}58636=\overline{1}{,}69738$· ἄρα $\frac{A-B}{2}=26^0\ 28'\ 52'',1$· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2} \text{ ἢ } \frac{A+B}{2}=62^0\ 42'\text{· ὅθεν ἔχομεν}$$

$$\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=A=89^0\ 10'\ 52'' \text{ καὶ } \frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=B=36^0\ 13'\ 8''.$$

Κατόπιν ἐκ τοῦ τύπου $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma 242{,}5+$ $+\lambda o\gamma\eta\mu 54^0\ 36'-\lambda o\gamma\eta\mu 89^0\ 10'\ 53''$ καὶ ἐκ τοῦ λογγ εὑρίσκομεν τὴν γ.

312. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\frac{1}{2}(B-\Gamma)=$ $=\lambda o\gamma(130-63)+\lambda o\gamma\sigma\varphi 21^0\ 7'\ 45''-\lambda o\gamma(130+63)$· εὑρίσκοντες δὲ ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ γνωρίζοντες ὅτι $\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-21^0\ 7'\ 45''$ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω, λαμβάνομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ· κατόπιν εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν α.

313. Ἐπειδὴ $Β<90^0$ καὶ $α>β$ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἐκ τοῦ τύπου δὲ $ημΑ=\frac{αημΒ}{β}$ εὑρίσκομεν λογημΑ = λογ5374,5+ +λογημ15° 11′—λογ1586 ἢ λογημΑ=3,73034+$\overline{1}$,41815—3,20030=$\overline{1}$,94819· ὅθεν Α=62° 34′ καὶ Α=117° 26′· ὅθεν καὶ Γ=180°—(62°34′+15°11′)=102°15′ καὶ Γ=180°—(117° 26′+15° 11′)=47° 23′.

314. Ἐνταῦθα ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν, ἐπειδὴ $α>β$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β

$$ημΒ=\frac{βημΑ}{α} \text{ καὶ } λογημΒ=λογβ+λογημΑ-λογα$$

λογ894,3=2,95148
λογημ118° 42′ ἢ
λογημ61° 18°=$\overline{1}$,94307

ἄθροισμα=2,89455
λογ1542,7=3,18828

λογημΒ=$\overline{1}$,70627 καὶ Β=30° 33′ 34″
ὥστε Α+Β=118° 42′+30° 33′ 44″=149° 15′ 44″ καὶ
ἑπομένως Γ=30° 44′ 16″.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$γ=\frac{αημΓ}{ημΑ}$ καὶ λογγ=λογα+λογημΓ—λογημΑ=3,18828+$\overline{1}$,70852—$\overline{1}$,94307 = =2,95373 καὶ γ=898,94.

315. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $α<β$ καὶ $Α<90^0$· ὥστε τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β

$ημΒ=\frac{βημΑ}{α}$ καὶ λογημΒ = λογβ + λογημΑ—λογα = 1,39794 + $\overline{1}$,73901— — 1,20412=$\overline{1}$,93283 καὶ Β=58° 56′ 53″ ἢ 180°—58° 56′ 53″=121° 3′ 7″.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

1η Λύσις	2α Λύσις
Β=58° 56′ 53″	Β=121° 3′ 7″
Α=33° 15′	Α=30° 15′
Α+Β=92° 11′ 53″	Α+Β=154° 18′ 7″
ὅθεν Γ=87° 48′ 7″	ὅθεν Γ=25° 41′ 53″

316. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι $\eta\mu B=\dfrac{78.\frac{2}{3}}{45}=\dfrac{52}{45}$.

317. Ἡ ζητουμένη μικροτέρα γωνία εἶναι ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς. Ἐὰν ἑπομένως θέσωμεν $\alpha=56$, $\beta=65$, $\gamma=33$, ζητεῖται ἡ γωνία Γ· ἔχομεν ἄρα $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$. ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\tau=77$, $\tau-\alpha=21$, $\tau-\beta=12$ καὶ $\tau-\gamma=44$, ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{21.12}{77.44}}=\sqrt{\dfrac{3.3}{11.11}}=\dfrac{3}{11}$ καὶ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\lambda o\gamma 3-\lambda o\gamma 11=0{,}47712-1{,}04139$ ἢ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\overline{1},43573$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}=15^\circ\ 15'\ 18''$· ὅθεν $\Gamma=30^\circ\ 30'\ 36''$.

318. Εἶναι, ἐὰν $\alpha=15$, $\beta=12$, $\gamma=20$, $\tau=23{,}5$, $\tau-\alpha=8{,}5$, $\tau-\beta=11{,}5$, $\tau-\gamma=3{,}5$ καὶ $\lambda o\gamma\tau=1{,}37107$, $\lambda o\gamma(\tau-\beta)=1{,}06070$, $\lambda o\gamma(\tau-\alpha)=0{,}92942$, $\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=0{,}54407$· ὥστε διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας Α λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}\quad \text{καὶ}$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{[\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]-[\lambda o\gamma\tau+\lambda o\gamma(\tau-\alpha)]}{2}\quad \text{ἢ}$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{(1{,}06070+0{,}54407)-(1{,}37107+0{,}92942)}{2}\quad \text{ἢ}$$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\overline{1},65214$· ὅθεν $\frac{A}{2}=24^\circ\ 10'\ 30''$ καὶ $A=48^\circ\ 21'$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\overline{1},52086$· ὅθεν $\frac{B}{2}=18^\circ\ 21'\ 18''$ καὶ $B=36^\circ\ 42'\ 36''$ ὡς καὶ $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=0{,}03749$· ὅθεν $\frac{\Gamma}{2}=47^\circ\ 28'\ 12''$ καὶ $\Gamma=94^\circ\ 56'\ 24''$. Διὰ τὰς ἀκτίνας ϱ καὶ Ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου ἔχομεν $\varrho=\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$ καὶ $P=\dfrac{\alpha}{2\eta\mu A}$. Διὰ δὲ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τὰ ϱ καὶ Ρ.

319. Ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἔναντι τῆς πλευρᾶς $\sqrt{217}$· ἔχομεν λοιπὸν $217=8^2+9^2-2\,.\,8\,.\,9\,.\,\sigma\upsilon\nu\chi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi=\dfrac{8^2+9^2-217}{2.8.9}=-\dfrac{1}{2}$, ἀλλὰ $\sigma\upsilon\nu 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$, ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι 120°.

320. Εἶναι $\tau=1{,}762$, $\tau-\alpha=0{,}039$, $\tau-\beta=0{,}777$, $\tau-\gamma=0{,}946$ καὶ $\lambda o\gamma\tau=0{,}24601$, $\lambda o\gamma(\tau-\alpha)=\overline{2}{,}59106$, $\lambda o\gamma(\tau-\beta)=\overline{1}{,}89042$, $\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=\overline{1}{,}97589$.

Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta).(\tau-\gamma)}{\tau.(\tau-\alpha)}}$ εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-\lambda o\gamma\tau-\lambda o\gamma(\tau-\alpha)] \quad \text{ἢ}$$

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \frac{A}{2}=[(\overline{1},89042+\overline{1},97589)-(0,24601+\overline{2},59106)] \quad \text{ἢ}$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\ \frac{A}{2}=\frac{1}{2}\ (\overline{1},86631-\overline{2},83707)=0,51462\cdot \text{ ὅθεν}$$

$$\frac{A}{2}=72^0\ 59'\ 55'' \text{ καὶ } A=145^0\ 59'\ 50''.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi\ \frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha).(\tau-\gamma)}{\tau.(\tau-\beta)}}$ καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅτι $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \frac{B}{2}=\overline{1}{,}21526$ καὶ $\frac{B}{2}=9^0\ 19'\ 20''$ καὶ $B=$ $=18^0\ 38'\ 41''$· ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \frac{\Gamma}{2}=\overline{1},12979 \text{ καὶ } \frac{\Gamma}{2}=7^0\ 40'\ 44'' \text{ καὶ } \Gamma=15^0\ 21'\ 29''.$$

321. Ἔστω, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι $9\chi^0$, $13\chi^0$, $14\chi^0$· ἔχομεν δὲ τότε $9\chi^0+13\chi^0+14\chi^0=180^0$ ἢ $36\chi^0=180^0$ καὶ $\chi^0=5^0$· ὥστε αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι 45^0, 65^0, 70^0· ἐὰν δὲ ἡ α εἶναι ἡ ἔναντι τῆς γωνίας 70^0, τότε ἔχομεν

$$\beta=\frac{150\eta\mu 65^0}{\eta\mu 70^0} \text{ καὶ } \gamma=\frac{150.\eta\mu 45^0}{\eta\mu 70^0}$$

$$\text{καὶ } \lambda o\gamma\beta=\lambda o\gamma 150+\lambda o\gamma\ \eta\mu 65^0-\lambda o\gamma\ \eta\mu 70^0=$$
$$=2,17609+\overline{1},95728-\overline{1},97299=2,16038 \text{ καὶ } \beta=144,67$$

Ὁμοίως ἔχομεν $\lambda o\gamma\gamma=\lambda o\gamma 150+\lambda o\gamma\ \eta\mu 45^0-\lambda o\gamma\ \eta\mu 70^0=$
$$=2,17609+\overline{1},84949-\overline{1},97299=2,05259 \text{ καὶ } \gamma=113,87.$$

322. Εἶναι $\tau=984$, $\tau-\alpha=697$, $\tau-\beta=168$ καὶ $\tau-\gamma=119$

$$\text{καὶ } E=\sqrt{984.697.168.119}=\sqrt{41.24.17.41.7.24.7.17}=$$
$$=\sqrt{41^2.24^2.17^2.7^2}=41.24.17.7.$$

323. Εἶναι $E=\frac{840.895}{2}.\eta\mu 87^0$ ἢ $E=420.895.\eta\mu 87^0$

$$\text{καὶ } \lambda o\gamma E=\lambda o\gamma 420+\lambda o\gamma 895+\lambda o\gamma\eta\mu 87^0=$$
$$=2,62325+2,95182+\overline{1},99940=5,57447 \text{ καὶ } E=375381,73 \text{ τ.μ.}$$

324. Ἔχομεν $\varrho = \frac{E}{\tau}$, ὅπου ἐνταῦθα εἶναι

$$E = 15489 \quad \text{καὶ} \quad \tau = \frac{18455}{2} = 9227{,}5\cdot$$

ἤτοι ἔχομεν $\varrho = \frac{15489}{9227{,}5}$ καὶ $\lambda o\gamma\varrho = \lambda o\gamma 15489 - \lambda o\gamma 9227{,}5 =$

$$= 4{,}19002 - 3{,}95509 = 0{,}22493 \quad \text{καὶ} \quad \varrho = 1{,}678$$

325. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ὃ εἶναι $\alpha = 20$ μ., $A = 126^\circ\ 52'$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma = 42\cdot$ τότε εἶναι $\beta + \gamma = 22\cdot$ ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{θὰ εἶναι καὶ} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta+\gamma}{2\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{20}{\eta\mu 126^\circ 52'} = \frac{22}{2\eta\mu 26^\circ\ 34'\ .\ \sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}}\,.$$

$$\text{ὅθεν} \quad \sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{11\eta\mu 126^\circ\ 52'}{20\eta\mu 26^\circ\ 34'} = \frac{11\eta\mu 53^\circ 8'}{20\eta\mu 26^\circ\ 34'} =$$

$$= \frac{11.2\eta\mu 26^\circ\ 34'\ .\ \sigma\upsilon\nu 26^\circ\ 34'}{20\eta\mu 26^\circ\ 34'} = 1{,}1\sigma\upsilon\nu 26^\circ\ 34'\cdot$$

ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}\cdot$ ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\frac{B+\Gamma}{2} = 26^\circ\ 34'$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

326. Ἐὰν $A = 35^\circ\ 17'\ 15''$, καὶ $B = 62^\circ\ 43'\ 30''$ ἔχομεν

$$\Gamma = 180^\circ - (A+B) = 81^\circ\ 59'\ 15'', \quad \alpha = \frac{120\eta\mu 17^\circ\ 38'\ 37{,}5''}{\sigma\upsilon\nu 31^\circ\ 21'\ 45''\ .\ \sigma\upsilon\nu 40^\circ\ 59'\ 37{,}5''},$$

$$\beta = \frac{120\eta\mu 31^\circ\ 21'\ 45''}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ 59' 37{,}5''\ .\ \sigma\upsilon\nu 17^\circ 38' 37{,}5''}, \qquad \gamma = \frac{120\eta\mu 40^\circ\ 59'\ 37{,}5''}{\sigma\upsilon\nu 17^\circ\ 38'\ 37{,}5''\ .\ \sigma\upsilon\nu 31^\circ\ 21'\ 45'}$$

$$E = \tau^2 \varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}\ .\ \varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}\ .\ \varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}\,.$$

327. Γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι $E = \frac{1}{2}\,\beta\gamma\eta\mu A\cdot$ ἄρα εἶναι $\gamma = \frac{2E}{\beta\eta\mu A}$.

Εὑρεθείσης τῆς γ, εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά, τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

328. Δίδονται $A = 60^\circ$, $E = 10\sqrt{3}$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma = 20$. Ἀλλ' εἶναι $E = \frac{1}{2}\,\beta\gamma\eta\mu A$, ἤτοι $10\sqrt{3} = \frac{1}{2}\,\beta\gamma\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ $\beta\gamma = 40\cdot$ ἐξ ἄλλου δὲ γνωρίζομεν ὅτι

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ ἢ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$ ἢ
$\alpha^2=(\beta+\gamma)^2-3\beta\gamma$· ἐπειδὴ δὲ $\beta+\gamma=20-\alpha$, καὶ $\beta\gamma=40$
ἔχομεν $\alpha^2=(20-\alpha)^2-120$ ἢ $\alpha=7$· ὥστε εἶναι $\beta+\gamma=13$.
ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\beta\gamma=40$, εὑρίσκομεν $\beta=8$ καὶ $\gamma=5$.

329. Δίδεται $\alpha=\frac{2}{3}\beta$ καὶ $\gamma=\frac{5}{6}\beta$· ἤδη τὴν γωνίαν Α εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{\beta^2+\frac{25}{36}\beta^2-\frac{4}{9}\beta^2}{2.\beta.\frac{5}{6}\beta}=\frac{3}{4}$$

καὶ λογσυνΑ=λογ3—λογ4=0,47712—0,60206 ἢ
λογ συνΑ$=\overline{1},87506$· ὅθεν $A=41^0\ 24'\ 35''$

$$\text{Ὁμοίως : } \sigma\upsilon\nu B=\frac{\frac{4}{9}\beta^2+\frac{25}{36}\beta^2-\beta^2}{2.\frac{2}{3}.\frac{5}{6}\beta^2}=\frac{1}{8} \text{ καὶ}$$

λογ συνΒ=—λογ8$=\overline{1},09691$· ὅθεν $B=82^0\ 49'\ 9''$

$$\text{Ὁμοίως : } \sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\frac{4}{9}\beta^2+\beta^2-\frac{25}{36}\beta^2}{2.\frac{2}{3}.\beta^2}=\frac{9}{16} \text{ καὶ}$$

λογσυνΓ=λογ9—λογ16=0,95424—1,20412 ἢ
λογσυνΓ $=\overline{1},75012$· ὅθεν $\Gamma=55^0\ 46'\ 16''$.

330. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ καὶ ἡ γωνία Δ εἶναι γνωσταί. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΓ λύεται, διότι γνωρίζομεν δύο πλευρὰς τὰς γ, δ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Δ· ἐκ τῆς λύσεως δὲ τούτου εὑρίσκομεν τὴν ΑΓ καὶ τὰς γωνίας ΔΑΓ καὶ ΔΓΑ· ἀλλὰ τώρα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς· ἑπομένως εὑρίσκομεν τὰς γωνίας του Β, ΒΑΓ, ΒΓΑ. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ἤτοι εἶναι $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B+\frac{1}{2}\gamma\delta\eta\mu\Gamma$.

331. Ἔχομεν $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2P$ ἢ $\alpha=2P\eta\mu A=87{,}50\eta\mu 53^0\ 30'$· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν α. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἄλλας πλευράς.

332. Εἶναι $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=2P$. Ὥστε $\alpha=2P\eta\mu A=$ $=164\eta\mu 52^0\ 12'$· ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν α· εἶναι ἑπομένως $\beta+\gamma=286-\alpha$.

Ἀλλὰ $\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=2P$ ἤτοι $\frac{\beta+\gamma}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=2P$, ὅπου ἀγνωστον εἶναι τὸ συν $\frac{B-\Gamma}{2}$· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ μετὰ τῆς $\frac{B+\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

333. Δίδεται Ρ=10,15 α=15,23 καὶ Β=47°· ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2P$ λαμβάνομεν $\eta\mu A=\frac{\alpha}{2P}=\frac{15{,}23}{20{,}30}$· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν Α· κατόπιν ἐκ τῆς $\frac{\beta}{\eta\mu B}=2P$ ἢ τῆς $\beta=20{,}30\eta\mu 47^0$ εὑρίσκομεν τὴν β· ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\eta\mu\Gamma}=2P$ εὑρίσκομεν τὴν $\gamma[\Gamma=180^0-(A+B)]$.

334. Ἔστω τὸ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον οὗ αἱ πλευραὶ ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ εἶναι γνωσταὶ καὶ οὗ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ· ἔχομεν δὲ τότε $A\Gamma^2=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\Delta$ καὶ $A\Gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu B$· ὥστε εἶναι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu B=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\Delta$· ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $B+\Delta=180^0$ ἔχομεν συνΔ=−συνΒ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu B=\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu B$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}$

ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu B}{2}}$ ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}}{2}}=\sqrt{\frac{2\alpha\beta+2\gamma\delta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)^2}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\,(\alpha+\beta-\gamma+\delta)}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu B}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\alpha\beta+2\gamma\delta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}=\sqrt{\frac{(\gamma+\delta)^2-(\alpha-\beta)^2}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\gamma+\delta+\alpha-\beta)(\gamma+\delta-\alpha+\beta)}{4(\alpha\beta+\gamma\delta)}}.$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$ ἔχομεν

$$\beta+\gamma+\delta-\alpha=2(\tau-\alpha),\quad \alpha+\gamma+\delta-\beta=2(\tau-\beta)$$
$$\alpha+\beta+\delta-\gamma=2(\tau-\gamma),\quad \alpha+\beta+\gamma-\delta=2(\tau-\delta)$$

οἱ δὲ προηγουμένως εὑρεθέντες τύποι γράφονται

$$\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}, \quad \eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}.$$

ὥστε : $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}$· ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν

ὅτι $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\delta)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$.

Αἱ ἄλλαι γωνίαι Γ,Δ εὑρίσκονται ἤδη εὐκόλως, διότι εἶναι παραπληρώματα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β· εἶναι δηλ. $\Gamma=180^\circ-A$ καὶ $\Delta=180^\circ-B$.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ἤτοι εἶναι $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B+\frac{1}{2}\gamma\delta\eta\mu\Delta$ ἢ

$E=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta)\eta\mu B$ ἤ, ἐπειδὴ εἶναι $\eta\mu B=2\eta\mu\frac{B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$,

$E=(\alpha\beta+\gamma\delta)\eta\mu\frac{B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$· ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\eta\mu\frac{B}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν τιμῶν ἔχομεν

$$E=(\alpha\beta+\gamma\delta).\frac{\sqrt{(\tau-\alpha).(\tau-\beta)}}{\sqrt{\alpha\beta+\gamma\delta}}.\frac{\sqrt{(\tau-\gamma).(\tau-\delta)}}{\sqrt{\alpha\beta+\gamma\delta}} \quad ἢ$$

$$E=\sqrt{(\tau-\alpha).(\tau-\beta).(\tau-\gamma).(\tau-\delta)}$$

335. Ἐὰν $\alpha=3$ μ., $\beta=5$ μ., $\gamma=7$ μ. καὶ $\delta=12$ μ., ἔχομεν $\tau=13,5$ μ. $\tau-\alpha=10,5$ μ., $\tau-\beta=8,5$ μ., $\tau-\gamma=6,5$ μ. καὶ $\tau-\delta=1,5$ μ. Ὥστε εἶναι

$$E=\sqrt{10,5.8,5.6,5.1,5}=0,75\sqrt{7.17.13}.$$

336. Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, Ο τὸ κέντρον αὐτοῦ καὶ ΟΓ τὸ ἀπόστημα, ἡ γωνία ΓΟΑ εἶναι 18°, εἶναι δὲ $(O\Gamma)=(A\Gamma)\sigma\varphi 18^\circ=\sigma\varphi 18^\circ$, τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ τριγώνου ΑΒΟ εἶναι $\frac{1}{2}(AB).(O\Gamma)=\frac{1}{2}.2.\sigma\varphi 18^\circ=\sigma\varphi 18^\circ$ καὶ τοῦ δεκαγώνου εἶναι $10\sigma\varphi 18^\circ$.

337. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος υ, ἔχομεν $\upsilon=\gamma\eta\mu B$· ἀλλ' εἶναι

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}, \text{ ὥστε καὶ } \upsilon=\frac{\alpha\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

338. Ἐὰν δ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἔχομεν $(A\Delta B)+(A\Delta\Gamma)=(AB\Gamma)$ ἢ $\frac{1}{2}\gamma\delta\eta\mu\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\beta\delta\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$, ἤτοι

$$\delta = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \frac{A}{2}} = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \frac{2\eta\mu \frac{A}{2}. \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}}{\eta\mu \frac{A}{2}} = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}. \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}\cdot$$

ἀλλ' εἶναι $\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$ καὶ $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$· ὅθεν $\beta\gamma = \frac{\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\eta\mu^2 A}$

καὶ $\beta+\gamma = \frac{\alpha}{\eta\mu A}(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma)$ καὶ $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}$

ὥστε ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα σχέσις $\delta = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \frac{\eta\mu A}{\eta\mu \frac{A}{2}}$

γίνεται $\delta = \frac{\alpha\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\frac{A}{2}\,(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma)}$.

339. Ἐὰν ΑΔ εἶναι ἡ διάμεσος μ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν

$$(A\Delta)^2 = (A\Gamma)^2 + (A\Delta)^2 - 2(A\Gamma)(\Gamma\Delta)\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

ἤτοι $\mu^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$· ἀλλὰ $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$.

ὅθεν ἔχομεν $\mu^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2+\alpha^2-\gamma^2}{2} = \frac{2\beta^2}{4} + \frac{2\gamma^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$

ἢ $\mu^2 = \frac{1}{4}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2)$, ἄρα $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}$.

ἀλλὰ πάλιν $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2 = 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$· ὥστε ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ μ γράφεται

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}.$$

340. Ἐὰν ΑΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι $\alpha = (B\Delta)+(\Delta\Gamma)$ ἢ

$$\alpha = \varrho\sigma\varphi\frac{B}{2} + \varrho\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \varrho\left(\sigma\varphi\frac{B}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$$

ἤτοι $\alpha = \varrho.\frac{\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$· ἀλλ' $\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$·

ὥστε ἔχομεν $\alpha = \varrho.\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$ καὶ $\varrho = \alpha.\frac{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$

341. Εἶναι $\Gamma = 180^0 - (A+B)$, καὶ (ἄσκ. 340) $\alpha = \varrho.\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$.

Ὁμοίως εἶναι $\beta = \varrho.\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$, $\gamma = \varrho.\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}.\eta\mu\frac{B}{2}}$.

Ἤδη ἡ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου εἶναι εὔκολος.

342. Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu \Gamma}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta+\gamma}{2\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha=\frac{(\beta+\gamma).2.\eta\mu\frac{A}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\frac{(\beta+\gamma)\,\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}},$$

εἰς ἣν ἄγνωστον εἶναι τὸ συν $\frac{B-\Gamma}{2}$· εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἐκ τῆς $\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ· κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

343. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta-\gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta-\gamma}{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha=\frac{(\beta-\gamma).2\eta\mu\frac{A}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}.\eta\mu\frac{A}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\frac{(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}, \quad \text{ἐξ ἧς}$$

εὑρίσκομεν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἐκ τῆς $\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

344. Ἐὰν $\upsilon=4$ μ., $\upsilon'=5$ μ. καὶ $\upsilon''=6$ μ., εἶναι $\mu=\frac{1}{4}$, $\nu=\frac{1}{5}$ καὶ $\sigma=\frac{1}{6}$. Ὥστε εὑρίσκομεν $\mu+\nu+\sigma=2\lambda=\frac{37}{60}$ καὶ $\lambda=\frac{37}{120}$. Ἄρα εἶναι $\lambda-\mu=$ $=\frac{37}{120}-\frac{30}{120}=\frac{7}{120}$, $\lambda-\nu=\frac{37}{120}-\frac{24}{120}=\frac{13}{120}$ καὶ $\lambda-\sigma=\frac{37}{120}-\frac{20}{120}=\frac{17}{120}$ καὶ ἐπομένως $\varrho'=\sqrt{\frac{7.13\ 17}{120^2.37}}=\frac{1}{120}\sqrt{\frac{7.13.17}{37}}$. Κατόπιν τούτων ἐκ τῶν τύπων εφ $\frac{A}{2}=\frac{\varrho'}{\lambda-\mu}$, εφ $\frac{B}{2}=\frac{\varrho'}{\lambda-\nu}$ καὶ εφ $\frac{A}{2}=\frac{\varrho'}{\lambda-\sigma}$ καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων, εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Α, Β, Γ καὶ τέλος εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν τύπων $\alpha=\frac{\mu}{2\lambda\varrho'}$, $\beta=\frac{\nu}{2\lambda\varrho'}$ καὶ $\gamma=\frac{\sigma}{2\lambda\varrho'}$.

Προβλήματα.

345. Ἔστω ΑΒ ἡ δύναμις τῶν 50 χιλιογράμμων καὶ ΑΓ ἡ τῶν 60 χιλιογράμμων, ὁπότε ΒΑΓ=35°. Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι τὸ ΑΒΓΔ, ἡ ζητουμένη συνισταμένη εἶναι ἡ ΑΔ, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, εἰς ὃ εἶναι ΑΒ=50, ΒΔ=60 καὶ ΑΒΔ=145· ὥστε εἶναι (§ 72) $(ΑΔ)^2=50^2+60^2-2.50.60συν145°$ ἢ

$$(ΑΔ)=\sqrt{50^2+60^2+2.50.60.συν35°},\ \text{διότι}\ συν145°=-συν35°.$$

346. Ἐὰν αἱ δυνάμεις εἶναι α καὶ 2α καὶ ἡ γωνία αὐτῶν χ, ἔχομεν $5^2=α^2+4α^2.2α.2ασυνχ$, ἤτοι $συνχ=\frac{25-5α^2}{4α^2}$. Δίδοντες ἤδη εἰς τὸ α τιμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ καθιστοῦν τὸ κλάσμα μικρότερον τῆς μονάδος, προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν χ.

347. Ἐὰν αἱ ζητούμεναι δυνάμεις εἶναι αἱ χ καὶ ψ, ἔχομεν $\frac{χ}{ημ30°}=$ $=\frac{ψ}{ημ45°}=\frac{100}{ημ75°}$. Ἐπειδὴ δὲ $ημ30°=\frac{1}{2}$, $ημ45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἔχομεν $χ=\frac{50}{ημ75°}$ καὶ $ψ=\frac{50\sqrt{2}}{ημ75°}$.

348. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα δύναμις εἶναι Α, ἔχομεν $Α^2=χ^2+χ^2+2χχσυνω$, ἤτοι $Α^2=2χ^2+2χ^2συνω$ ἢ $\frac{Α^2}{2(1+συνω)}=χ^2$. Ἐπειδὴ δὲ $1+συνω=2συν^2\frac{ω}{2}$ εὑρίσκομεν $χ^2=\frac{Α^2}{4συν^2\frac{ω}{2}}$ καὶ $χ=\frac{Α}{2συν\frac{ω}{2}}$.

349. Ἐὰν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του εἶναι 2πρ καὶ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας του διανύει εἰς 1″ διάστημα $\frac{2πρ}{86400}$· ἀλλ' ἐὰν Ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς, ἔχομεν ρ=Ρσυνω, ὅπου ω εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ταχύτης ἰσοῦται μὲ $\frac{2πΡσυνω}{86400}=\frac{2.π.6366.συν58°\ 20'}{86400}=\frac{π.3183συν58°\ 20'}{21600}$.

350. Ἔστω ΑΖ ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα, ἡ ὁποία σχηματίζει τὴν γωνίαν ΒΑΖ καὶ τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ ω· ἐὰν δὲ Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν δυνάμεων ΓΑ=0,2 καὶ ΒΑ=0,3 ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν παραλλήλων δυνάμεων τῶν ἐφηρμοσμένων εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἐν τῇ θέσει τῆς ἰσορροπίας, δέον νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς κατακορύφου διὰ τοῦ σημείου Α καὶ ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς Ζ τῆς κατακορύφου διὰ τοῦ Α καὶ τῆς ΔΕ. Ἤδη ἐκ τῶν τριγώνων ΑΖΕ καὶ ΑΖΔ

λαμβάνομεν $\frac{ΖΕ}{ημΖΑΕ}=\frac{ΖΑ}{ημΑΕΖ}$ καὶ $\frac{ΖΔ}{ημΔΑΖ}=\frac{ΖΑ}{ημΑΔΖ}$, ἐκ τῶν

ὁποίων λαμβάνομεν $\frac{ΖΕ}{ΖΑ}=\frac{ημΖΑΕ}{ημΑΕΖ}$ καὶ $\frac{ΖΔ}{ΖΑ}=\frac{ημΔΑΖ}{ημΑΔΖ}$. Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν τὰς τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$\frac{ΖΕ}{ΖΔ}=\frac{ημΖΑΕ.ημΑΔΖ}{ημΑΕΖ.ημΔΑΖ}=\frac{συνω.ημΑΓΒ}{ημΑΒΓ.ημω}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\frac{ημΑΓΒ}{ημΑΒΓ}=\frac{0,3}{0,2}$

καὶ $\frac{ΖΕ}{ΖΔ}=\frac{0,2}{0,3}$, ἕπεται ὅτι $\frac{0,2}{0,3}=\frac{συνω}{ημω}\cdot\frac{0,3}{0,2}$, ἤτοι σφω$=\frac{0,2^2}{0,3^2}=$

$=\frac{0,04}{0,09}=\frac{4}{9}$.

351. Ἔστω ΑΒ ἡ ἀρχικὴ ἀκτίς, ΒΓ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς ἐν τῇ ὑάλῳ καὶ ΓΔ ἡ διεύθυνσις κατὰ τὴν ἔξοδον τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία κάθετος συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΓΕ. Κατόπιν τούτων ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΒ λαμβάνομεν (ΓΕ)=(ΓΒ)· ημΓΒΕ (1). Ἀλλ' ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως

ημ$45^0=\frac{3}{2}$ημψ, ἤτοι ημψ$=\frac{2}{3}$ημ$45^0=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ἤτοι ψ$=28^0\ 7'\ 34''$.

Ὥστε ἡ γωνία ΓΒΕ ἰσοῦται μὲ $45^0-28^0\ 7'\ 34''=16^0\ 52'\ 26''$.

Ἤδη ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΖ ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς ὑάλου, ὁπότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΖ λαμβάνομεν

$$(ΓΒ)=\frac{ΓΖ}{συν28^0\ 7'\ 34''}=\frac{0,03}{συν28^0\ 7'\ 34''}.$$

Ὥστε ἡ σχέσις (1) μᾶς δίδει ΓΕ$=\frac{0,03ημ16^0\ 52'\ 26''}{συν28^0\ 7'\ 34''}$ καὶ λογ(ΓΕ)=

$=\bar{2},30103+\bar{1},46280-\bar{1},94543=\bar{3},81840$ καὶ ΓΕ=0,00658.

352. Ἐπειδὴ (ΑΒ)=12 μ., (ΒΓ)=10 μ., (ΓΑ)=18 μ., ἔχομεν τ=20,

τ—α=10, τ—β=2 καὶ τ—γ=8. Ὥστε εἶναι εφ $\frac{Β}{2}=\sqrt{\frac{10.8}{20.2}}=\sqrt{2}$ καὶ

λογεφ $\frac{Β}{2}=0,15052$ καὶ $\frac{Β}{2}=54^0\ 44'\ 9''$. Ἀλλ' ἡ $\frac{Β}{2}$ εἶναι ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως, ἤτοι ἡ γωνία τῆς προσπιπτούσης ἀκτῖνος ΑΒ μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ Β. Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία ἰσοῦται μὲ $90^0-54^0 44' 9''=35^0 15' 51''$.

353. Ἐὰν $\upsilon=(\text{AB})$ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος καὶ $\alpha=(\text{BΓ})$ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ ἀντιστοίχως, $\sigma\varphi\varphi=\frac{35+\alpha}{\upsilon}$, $\sigma\varphi 2\varphi=\frac{10+\alpha}{\upsilon}$ καὶ $\sigma\varphi 3\varphi=\frac{\alpha}{\upsilon}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ

$\sigma\varphi 2\varphi=\frac{\sigma\varphi^2\varphi-1}{2\sigma\varphi\varphi}$, λαμβάνομεν

$$\frac{10+\alpha}{\upsilon}=\left[\left(\frac{35+\alpha}{\upsilon}\right)^2-1\right]:\frac{2.(35+\alpha)}{\upsilon}=\frac{(35+\alpha)^2-\upsilon^2}{2\upsilon(35+\alpha)},$$

ἤτοι $2(10+\alpha)(35+\alpha)=(35+\alpha)^2-\upsilon^2$ (1).

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\sigma\varphi 3\varphi=\sigma\varphi(2\varphi+\varphi)=\frac{\sigma\varphi\varphi.\sigma\varphi 2\varphi-1}{\sigma\varphi\varphi+\sigma\varphi 2\varphi}$, ἤτοι

$$\frac{\alpha}{\upsilon}=\left[\frac{(35+\alpha)(10+\alpha)}{\upsilon^2}-1\right]:\left[\frac{35+\alpha}{\upsilon}=\frac{10+\alpha}{\upsilon}\right]=\frac{(35+\alpha)(10+\alpha)-\upsilon^2}{\upsilon(45+2\alpha)} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha(45+2\alpha)=(35+\alpha)(10+\alpha)-\upsilon^2 \quad (2).$$

Ἐὰν ἤδη ἀφαιρέσωμεν τὴν ἰσότητα (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν $3(10+\alpha)(35+\alpha)-\alpha(45+2\alpha)=(35+\alpha)^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\alpha=8{,}75$ μ.

Κατόπιν τούτων ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν

$$\upsilon^2=(35+\alpha)^2-2(10+\alpha)(35+\alpha)=(35+\alpha)(35+\alpha-20-2\alpha),$$

ἤτοι $\upsilon^2=(35+\alpha)(15-\alpha)=43{,}75.6{,}25$ καὶ $\upsilon=\sqrt{43{,}75.6{,}25}=16{,}53$ μέτρα.

358. Ἔστω ΑΒ ἡ βάσις μήκους 2α, Γ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ ΔΕ τὸ ὕψος τοῦ πύργου (Ε ἡ κορυφή του), τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ υ. Τότε εἶναι $\varphi+\text{ΕΓΔ}$ καὶ $\omega=\text{ΕΑΔ}=\text{ΕΒΔ}$. Κατόπιν τούτων λαμβάνομεν $(\text{ΓΔ})=\upsilon\sigma\varphi\varphi$ καὶ $\text{ΑΔ}=\text{ΒΔ}=\upsilon\sigma\varphi\omega$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἕπεται ὅτι $\text{ΑΓΔ}=90^0$ καὶ ἑπομένως $(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΓΔ})^2$, ἤτοι $\upsilon^2\sigma\varphi^2\omega=\alpha^2+\upsilon^2\sigma\varphi^2\varphi$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon^2(\sigma\varphi^2\omega-\sigma\varphi^2\varphi)=\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \upsilon^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\eta\mu^2\varphi}\right)=\alpha^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\upsilon^2=\frac{\alpha^2\eta\mu^2\omega.\eta\mu^2\varphi}{\eta\mu^2\varphi.\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega.\sigma\upsilon\nu^2\varphi}=\frac{\alpha^2\eta\mu^2\omega.\eta\mu^2\varphi}{(\eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu\varphi.\eta\mu\omega)(\eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu\varphi.\eta\mu\omega)}$$

Ὥστε εἶναι $\upsilon^2=\frac{\alpha^2\eta\mu^2\omega.\eta\mu^2\varphi}{\eta\mu(\varphi+\omega).\eta\mu(\varphi-\omega)}$ καὶ $\upsilon=\frac{\alpha\eta\mu\omega.\eta\mu\varphi}{\sqrt{\eta\mu(\varphi+\omega).\eta\mu(\varphi-\omega)}}$.

359. Ἔστω Μ ὁ στόχος, Α ἡ πρώτη θέσις τοῦ ἀεροστάτου καὶ Β ἡ δευτέρα θέσις αὐτοῦ, ὁπότε τὰ ὕψη τοῦ ἀεροστάτου ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα πρὸς υ. Κατόπιν τούτων ἔχομεν $(\text{ΓΜ})=\upsilon\sigma\varphi 33^0$ καὶ $(\text{ΜΔ})=\upsilon\sigma\varphi 21^0$. Ἐπίσης ἔχομεν $(\text{ΜΔ})^2=(\text{ΜΓ})^2+(\text{ΓΔ})^2$ (διότι ἡ διεύθυνσις πρὸς Ν εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν πρὸς Α), ἤτοι $\upsilon^2\sigma\varphi^2 21^0=\upsilon^2\sigma\varphi^2 33^0+5^2$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν ὅτι

$$υ = \frac{5ημ33^0.ημ21^0}{\sqrt{ημ54^0 \cdot ημ21^0}} \quad καὶ$$

$λογ\,υ = 0{,}69897 + \bar{1}{,}73611 + \bar{1}{,}55433 - (\bar{1}{,}95398 + \bar{1}{,}65894)$, ἤτοι

$λογ\,υ = 0{,}37649$ καὶ $υ = 2{,}37955$ χιλ.

360. Ἔστω Μ καὶ Ν αἱ δύο θέσεις τοῦ πλοίου, Α ὁ πλησιέστερος φάρος καὶ Β ὁ περισσότερον ἀπομακρυσμένος. Τότε εἶναι $BNM = 45^0$, $ANM = 22^0\,30'$, ἑπομένως καὶ $NAM = 67^0\,30'$, Κατόπιν τούτων ἔχομεν $\frac{BN}{BA} = \frac{ημBAZ}{ημBNA} =$

$= \frac{ημ(180^0 - 67^0\,30')}{ημ(45^0 - 22^0\,30')} = σφ22^0\,30'$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $σφ22^0\,30' = \sqrt{2} + 1$ καὶ $BA = 10$ ἕπεται ὅτι $BN = 10\,(\sqrt{2} + 1)$. Ὁμοίως ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι

$MN = BNημ45^0 = 10\,(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5(2 + \sqrt{2}) = 5.(2 + 1{,}414) = 17{,}07$ χιλ.

363. Ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου, ἐφ' οὗ κεῖνται οἱ δύο τόποι, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς ἐπὶ συν52°, ἤτοι 6366συν52°. Ἐξ ἄλλου ἡ ζητουμένη ἀπόστασις χ τῶν δύο τόπων εἶναι τὸ μῆκος τόξου 30° τῆς περιφερείας τοῦ ἄνω παραλλήλου. Ἑπομένως εἶναι $χ = \frac{π.30.6366συν52^0}{180} = π.1061συν52^0$ καὶ

$λογχ = 0{,}49707 + 3{,}02572 + \bar{1}{,}78934 = 3{,}31213$, ὁπότε $χ = 2051{,}762$.

368. Ἡ ἀκμὴ α ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς κλίσεως. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐν λόγῳ διαγώνιος ἰσοῦται μὲ $\sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}$ ἔχομεν $α = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}.\,ημω$, ἤτοι $ημω = \frac{α}{\sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}}$.

369. 1) Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, ΟΚ τὸ ὕψος αὐτῆς, Ε τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ΟΕΚ ἡ γωνία ω· ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΕ λαμβάνομεν (ΟΚ)=(ΚΕ)εφω, ἤτοι $υ = \frac{α}{2}$ εφω καὶ συνεπῶς $εφω = \frac{2υ}{α}$

2) Ἐὰν ἐκ τοῦ Κ φέρωμεν τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΓ καὶ κατόπιν φέρωμεν τὰς ΖΑ καὶ ΖΒ, ἡ γωνία ΑΖΒ εἶναι ἡ δοθεῖσα φ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΖ λαμβάνομεν (ΑΚ)=(ΚΖ)εφ $\frac{φ}{2}$· ἀλλ' ἐπειδὴ $AK = \frac{AB}{2} =$ $= \frac{α\sqrt{2}}{2}$, ἔχομεν εφ $\frac{φ}{2} = \frac{α\sqrt{2}}{α(KZ)}$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΟΚΓ λαμβάνομεν (ΚΖ).(ΟΓ)=(ΟΚ).(ΚΓ), ἤτοι

$$(\text{ΚΖ}) = \frac{(\text{ΟΚ}).(\text{ΚΓ})}{(\text{ΟΓ})} = \frac{\upsilon \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\upsilon^2 + \frac{\alpha^2}{2}}} = \frac{\upsilon\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{2\upsilon^2+\alpha^2}{2}}}.$$

Κατόπιν τούτων εἶναι

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\upsilon^2+\alpha^2}{2}}}{\upsilon \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2\upsilon^2+\alpha^2}{2\upsilon^2}}$$

ἢ

$$\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2\upsilon^2}}.$$

ΤΕΛΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μὲ τὸ βιβλίον τοῦτο, δύναται ὁ μαθητὴς νὰ ἀποκτήσῃ τὴν ἱκανότητα νὰ λύῃ πᾶν πρόβλημα Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον θὰ τοῦ δοθῆ εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τῶν ἀνωτέρων σχολῶν τοῦ Κράτους. Ἐπιτυγχάνει δὲ τοῦτο,

1) **Διὰ τῆς ἐπιτυχοῦς ἐκλογῆς τῆς ὕλης καὶ τῶν ἀσκήσεων,** ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 600 περίπου δίδονται μετὰ τῶν λύσεων. Ἐξ αὐτῶν αἱ ὑπ᾿ ἀριθ. 74, 110, 121, 158, 190, 237, 402, 538, 633, 639, 806 καὶ 989 ἐδόθησαν εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τοῦ Πολυτεχνείου, τοῦ Πανεπιστημίου καὶ ἄλλων σχολῶν κατὰ τὰ δύο τελευταῖα ἔτη.

2) **Διὰ τῶν ὁδηγιῶν,** ἵνα δι᾿ αὐτῶν δύναται ὁ μαθητὴς νὰ λαμβάνῃ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τὴν ὀρθὴν κατεύθυνσιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματός του. Π. χ. ν᾿ ἀντιληφθῇ ἀμέσως, ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι εὐθεία γραμμή, ἢ περιφέρεια κύκλου.

3) **Διὰ τῆς ἀναπτύξεως τῶν κλασσικῶν μεθόδων λύσεως προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας,** ὡς εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ καὶ ἡ συνθετικὴ (πρωτεύουσαι μέθοδοι), ἡ ἀλγεβρική, ἡ μέθοδος τῆς ὁμοιότητος ἢ τῶν ὁμοίων σχημάτων.

4) **Διὰ τῶν νέων μεθόδων,** ὧν ἡ κατανόησις δὲν εἶναι καθόλου δύσκολος καὶ διὰ τῶν ὁποίων πλεῖστα προβλήματα τῆς Γεωμετρίας λύονται πολὺ εὐκόλως.

Τὸ βιβλίον τοῦτο διαιρεῖται εἰς δύο μέρη:

Μέρος πρῶτον.—Ἐπιπεδομετρία.—Πρῶται γνώσεις. Θεμελιώδη θεωρήματα καὶ προβλήματα. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις. Γ. κατασκευαί. Γ. τόποι. Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς τομῆς τῶν γ. τ. Μετρικαὶ σχέσεις. Γ. κατασκευὴ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Μέθοδος τῆς ὁμοιότητος. Ἁρμονικὴ διαίρεσις. Ριζικοὶ ἄξονες. Κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως. Ὁμοιοθεσία. Μεταφορά. Περιστροφή. Ἀντιστροφή.

Μέρος δεύτερον.—Στερεομετρία.—Περὶ τοῦ ἐπιπέδου. Γ. τόποι. Θ. περὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν. Συμμετρία ἐν τῷ χώρῳ. Ὅμοια πολύεδρα. Περὶ τῶν πολυέδρων ἐν γένει. Περὶ κυλίνδρου, κώνου καὶ σφαίρας. Σφαιρικὰ τρίγωνα. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Μεταφορά, περιστροφή, ὁμοιοθεσία καὶ ἀντιστροφὴ ἐν τῷ χώρῳ. Στερεογραφικὴ προβολή. Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν μεθ᾿ ἕκαστον κεφάλαιον καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου 117 ζητήματα λυμένα καὶ μή, δοθέντα εἰς ἀνωτέρας σχολάς, ἰδικάς μας καὶ ξένας.

Τιμὴ 25.000 δραχμαί.

Ἀθῆναι 25/9/49

Μόλις ἐξεδόθησαν

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τὸν μαθητήν, ὅστις ἠμπορεῖ νὰ εἶναι βέβαιος, ὅτι θὰ εὕρῃ εἰς αὐτὸ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα, τὸ ὁποῖον χρειάζεται νὰ ἀναφέρῃ εἰς τὴν ἀπόδειξίν του, ἢ τὸν τύπον τὸν ἁρμόζοντα εἰς τὸ ζήτημά του ἢ καὶ ἀριθμούς, οἵτινες θὰ τὸν διευκολύνουν νὰ λύσῃ ὀρθῶς καὶ ταχέως τὸ πρόβλημά του: τῆς Ἀριθμητικῆς ἢ τῆς Ἀλγέβρας, τῆς Γεωμετρίας, τῆς ἐπιπέδου ἢ σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, τῆς Κοσμογραφίας ἢ τῆς Φυσικῆς.

Περιέχει δὲ ἀκόμη τὸ βιβλίον τοῦτο παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

Οἱ πίνακές του ἀνέρχονται εἰς 34. Εἶναι π.χ. πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Πίνακες ἀνατοκισμοῦ, ἴσων καταθέσεων καὶ χρεωλυσίας—Δυνάμεων ἀριθμῶν, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν, πρώτων ἀριθμῶν, διαφόρων τιμῶν τοῦ π.—Ἀναγωγῆς μοιρῶν εἰς ἀκτίνια, βαθμοὺς καὶ ἀντιστρόφως· καὶ ἀναγωγῆς κοινῶν λογαρίθμων εἰς φυσικοὺς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τῆς Χημείας καὶ τῆς Φυσικῆς περιέχει τὸν διεθνῆ πίνακα τῶν ἀτομικῶν βαρῶν, καὶ πίνακας εἰδικῶν βαρῶν, συντελεστῶν γραμμικῆς διαστολῆς, θερμοκρασίας τήξεως, ποσοῦ θερμότητος τήξεως, θερμοκρασίας βρασμοῦ ὕδατος ὑπὸ διαφόρους πιέσεις.

Ἰδιαιτέρως σημειοῦμεν τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν καὶ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων μὲ τρία καὶ μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, διὰ τὴν λύσιν ζητημάτων Φυσικῆς, ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν κ. ἄ. Ζητήματα μὲ τοιαύτας φυσικὰς τιμάς, δίδονται καὶ εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις ἀνωτέρων σχολῶν.

Τιμὴ 10.000 δραχμαὶ

Ἀθῆναι 25/9/49