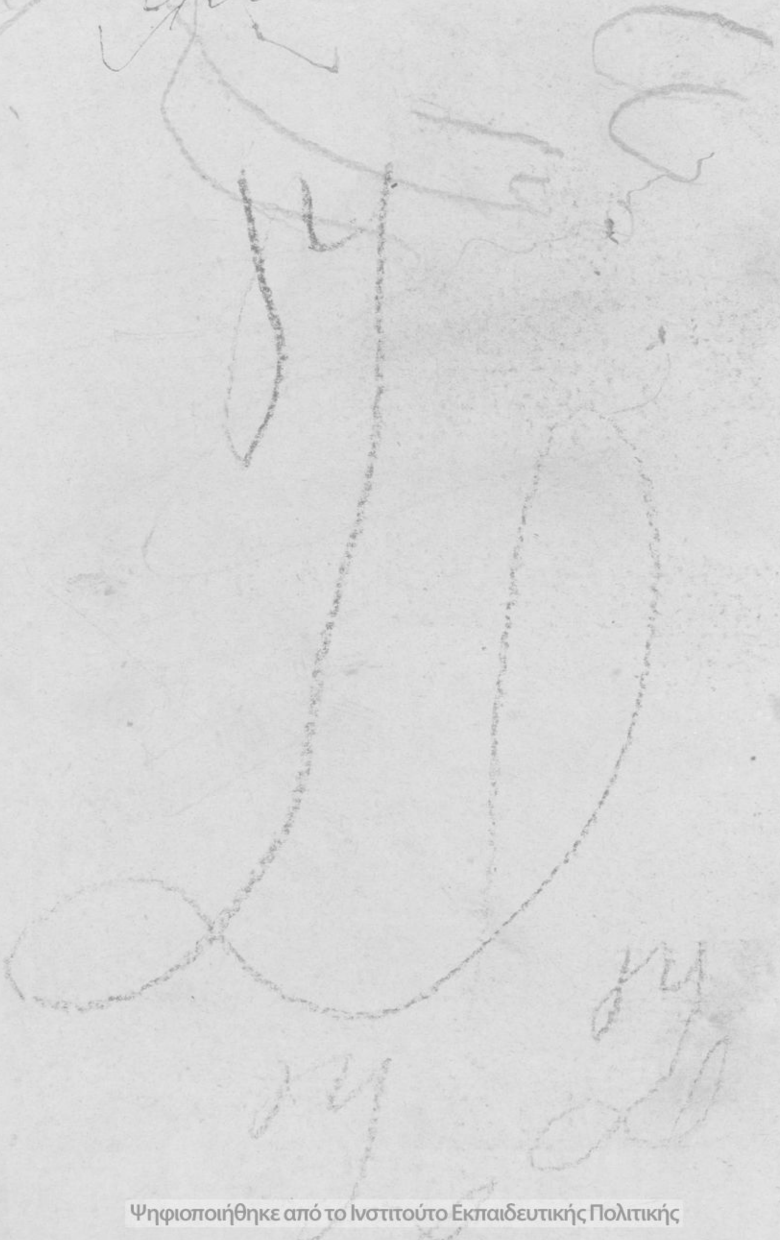
916

Κρεουάνι
Ελένη



ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑ

ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΚΑΡΟΛΟΥ ΚΟΠΠΗ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΘΕΝ

ὑπὸ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΘ. ΓΕΡΑΚΗ.

ΕΒΔΟΜΗ ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΠΙΔΙΩΡΘΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ
ΜΕ ΤΑΣ ΕΙΣ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ.

Πρὸς χρῆσιν τῶν ἑλληνικῶν σχολείων

Κατ' ἔγκρισιν τῆς Κυβερνήσεως.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Α. ΚΑΝΑΡΙΩΤΟΥ καὶ Ζ. ΓΡΥΠΑΡΗ.

1873.

Πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς πολιτείαν καὶ πρὸς τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή. Τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι καὶ τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει, καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται παρὰ τὴν αὐτοῦ φύσιν ἐπιδόντα θείᾳ τέχνῃ.

ΠΛΑΤΩΝ περὶ νόμων σελ. 747, Β.

Πρωτ. 2303
Ἀριθ. ——————
2743

Ἐν Ἀθήναις
τῇ 25 Φεβρουαρίου 1863.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ.

Τὸ ἐπὶ τῶν Ἐκκλησιαστικῶν καὶ τῆς δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως Ὑπουργεῖον.

Πρὸς τοὺς Σχολάρχας καὶ Διευθυντὰς Ἑλληνικῶν Σχολείων Διδασκάλους.

Γνωστοποιοῦμεν ὑμῖν, ὅτι τὸ πρὸς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων συνταχθὲν Ἐγχειρίδιον Ἀριθμητικῆς ὑπὸ τοῦ Γυμνασιάρχου Πατρῶν Κ. Γ. Γεράκη ἐνεκρίθη παρ᾽ ἡμῶν ὡς διδακτικὸν βιβλίον, ὅπως ἄρτι μετερρυθμίσθη ὑπ᾽ αὐτοῦ.

Ὁ Ὑπουργὸς
Κ. Ν. ΔΟΣΙΟΣ.

Μ. Καλλιφρονᾶς.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ἑβδόμη ἔκδοσις τῆς Ἀριθμητικῆς μου, τὴν ὁποίαν ἤδη προσφέρω εἰς τὸ πανελλήνιον, εἶνε ὑπερτέρα τῶν προτέρων ἐκδόσεων ἐν πολλοῖς.

Διότι, ἐπιθυμῶν νὰ καταστήσω αὐτὴν ἁρμοδιωτέραν εἰς διδασκαλίαν παίδων ἀρχαρίων, πολλὰ μέρη αὐτῆς ἐσυντόμευσα καὶ μετέβαλον ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον καὶ σαφέστερον. Γίνεται δὲ τοῦτο φανερόν, ἐάν τις ἀναγνώσῃ μάλιστα τὰς §§ 2,12,24,29,40,48,71,77,79,87,92,95,96 καὶ 103. ά.

Πρὸς δὲ τούτοις προσέθεσα ἐν τέλει τοῦ βιβλίου τὰς ἀποκρίσεις εἰς τὰ πρὸς ἄσκησιν πολυάριθμα προβλήματα. Αἱ ἀποκρίσεις αὗται εἶνε πολὺ χρήσιμοι εἴς τε τὸν διδάσκοντα καὶ εἰς τὸν διδασκόμενον. Διότι ὁ μὲν μαθητής, ὅταν κατ᾿ ἰδίαν ἐνασχολῆται εἰς τὸ λύειν προβλήματα, ὁδηγούμενος ὑπὸ τῶν ἀποκρίσεων τούτων βλέπει ποῦ ἔσφαλε καὶ ποῦ ἐπέτυχε, καὶ εὑρίσκει μόνος τὸ σφάλμα του ἐπαναλαμβάνων τὴν πρᾶξιν μετὰ μεγαλειτέρας προσοχῆς. Ἐννοεῖται δέ, ὅτι οἱ μαθηταὶ ὀφείλουσι νὰ παρουσιάζωσιν εἰς τὸν διδάσκαλον οὐχὶ ξηρὸν τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχουσι καὶ αὗται αἱ ἀποκρίσεις, ἀλλ᾿ ὅλην τὴν σειρὰν τῶν ὑπολογισμῶν, τοὺς ὁποίους ἔκαμον πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποκρίσεως. Ὅταν δὲ οἱ μαθηταὶ πάντες ἐνασχολῶνται συνάμα ἐνώπιον τοῦ διδα-

...ειν προβλήματα, πρέπει νὰ τοῖς ἦνε ἀπη-
...λέπωσι τὰς ἀποκρίσεις, ἀλλ' ὁ διδάσκαλος
...ψιν αὐτὰς βλέπει ἀμέσως τίνες τῶν μαθητῶν
...ον ἐξαγόμενον καὶ τίνες ἔσφαλον, καὶ εὐθὺς ὁ-
...σφάλλοντας εἰς εὕρεσιν τῶν σφαλμάτων των.
...ῶν βελτιώσεων τούτων καὶ προςθηκῶν πέποιθα ὅτι
...στησα τὸ πόνημά μου τοῦτο χρησιμώτερον εἰς τὸν σκοπόν,
...ὃν εἶνε προωρισμένον, καὶ ἔτι μᾶλλον ἄξιον ἧς ἀπολαύει παρὰ τῶν ἑλλήνων διδασκάλων καὶ μαθητῶν γενικῆς ὑποδοχῆς.

Ἐπαναλαμβάνονται δὲ καὶ ἐκ τοῦ προλόγου τῆς προτέρας ἐκδόσεως τὰ ἑξῆς·

Καθὼς εἰς τῆς λατινικῆς γλώσσης τὴν διδασκαλίαν ὁ μαθητὴς ἔχει χρείαν οὐ μόνον γραμματικῆς τινος συντόμου περιεχούσης τοὺς κανόνας, ἀλλὰ καὶ χρηστομαθείας τινὸς πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν κανόνων καὶ ἐξάσκησιν, οὕτω καὶ τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου τὸ μὲν Ἐγχειρίδιον παρέχει εἰς τὸν μαθητὴν πρὸς τὴν τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίαν τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ γραμματικὴ πρὸς τὴν τῆς γλώσσης, ἡ δὲ Συλλογὴ τῶν προβλημάτων δύναται νὰ παραβληθῇ πρὸς τὴν χρηστομάθειαν.

Καὶ τοῦ μὲν Ἐγχειριδίου ὁ σκοπὸς εἶνε νὰ καθιστᾷ δυνατὸν εἰς τὸν μαθητήν, ἵνα τὸ μάθημα, τὸ ὁποῖον ἐδιδάχθη τὴν προτεραίαν ἢ πρὸ μιᾶς ἑβδομάδος ἢ πρὸ ἑνὸς μηνὸς ἢ καὶ πρὸ ἑνὸς ἔτους καὶ ἴσως ἐλησμόνησεν, ἐπαναλάβῃ κατ' οἶκον καὶ ἐντυπώσῃ ἐκ νέου εἰς τὸν νοῦν του.

Ἡ δὲ Συλλογὴ τῶν προβλημάτων ἔχει σκοπὸν ν' ἀπαλλάξῃ τὸν μὲν διδάσκαλον τοῦ κόπου ν' ἀναζητῇ αὐτὸς προβλήματα ἁρμόδια καὶ νὰ ὑπαγορεύῃ εἰς τοὺς μαθητάς, τοὺς δὲ μαθητὰς τῆς ἀνάγκης νὰ καταδαπανῶσι πολύτιμον εἰς αὐτοὺς χρόνον γράφοντες αὐτά. Διότι ὁ μαθητὴς ἐν τῇ σπουδῇ τῆς ἀριθμητικῆς δὲν πρέπει νὰ ἀρκῆται εἰς τὸ νὰ μανθάνη ἑκάστοτε τὴν ὑπὸ τοῦ διδασκάλου γινομένην ἑρμηνείαν, ἀλλὰ προσαπαιτεῖται νὰ ἐνασχολῆται καὶ κατ' ἰδίαν ἐν τῷ σχολείῳ ἢ ἐν τῷ οἴκῳ εἰς τὸ νὰ λύῃ προβλήματα ἁρμόδια πρὸς τὴν γενομένην ἑρμηνείαν. Οὕτω δὲ μόνον ὁ ἀρχάριος μαθητὴς ἐντυπώνει καλῶς εἰς τὸν νοῦν του ὅσα ἐδιδάχθη, ἀποκτᾷ βαθμηδὸν τὴν ἀποχρῶσαν εὐχέρειαν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, καὶ καθίσταται ἱκανὸς νὰ ἐννοήσῃ τὰ ἑπόμενα τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἡ δὲ μέθοδος τοῦ Ἐγχειριδίου εἶνε οὐχὶ ἡ συνθετική, ἀλλ' ἡ ἀναλυτική· διότι ἐν αὐτῷ οἱ ἀριθμητικοὶ νόμοι καὶ κανόνες δὲν ἐξάγονται ἐκ γενικῶν ἀρχῶν καὶ ἀξιωμάτων, ὡς ἐν τῇ συνθετικῇ μεθόδῳ, καθ' ἣν ἐκθέτονται αἱ γνώσεις ἐν τῇ ἐπιστημονικῇ ἤτοι θεωρητικῇ ἀριθμητικῇ τῇ προωρισμένῃ πρὸς τὴν ἐν τοῖς γυμνασίοις διδασκαλίαν, ἀλλὰ συνάγονται ἐκ μερικῶν παραδειγμάτων καὶ ἔπειτα ἐκφράζονται δι' ὡρισμένων λέξεων. Ἡ ἀναλυτικὴ αὕτη μέθοδος κρίνεται φυσικωτέρα καὶ ἁρμοδιωτέρα εἰς τὴν στοιχειώδη διδασκαλίαν τῆς ἀριθμητικῆς, καθὼς καὶ *εἰς πάσης γλώσσης διδασκαλίαν ἐπιτυγχάνει ὁ διδάσκων παῖδας, ἐὰν ἀρχίζῃ ἐκ παραδειγμάτων καὶ ἐκ τούτων συνάγῃ ἔπειτα δι' ἀφαιρέσεως τὸν κανόνα*, οὐχὶ δὲ ἐὰν ἐξηγῇ ἀντιστρόφως πρῶτον τὸν κανόνα καὶ ἔπειτα τὰ παραδείγματα. Διότι, ὡς σοφῶς διδάσκει ὁ Δειστερβέγης ὁ περιώνυμος συγγραφεὺς καὶ διευθυντὴς ἄλλοτε τοῦ ἐν Βερολίνῳ βασ. Διδασκαλείου, τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα ἀποκτᾷ τὰς γνώσεις προβαῖνον ἐκ τῶν μερικῶν εἰς τὰ γενικά, ἤγουν εὑρίσκει καὶ ἀνακαλύπτει πρῶτον τὰ μερικά, τὰ καθ' ἕκαστα, καὶ ἐκ τούτων συνάγει ἔπειτα τὰ γενικά· ἡ ἀρχὴ λοιπὸν αὕτη ἡ ἐκ τῶν μερικῶν καὶ εἰδικῶν καὶ ἡ πρόοδος εἰς τὰ γενικὰ εἶνε ἡ φυσικὴ πορεία τῆς νοητικῆς ἀναπτύξεως. Διὰ τοῦτο καὶ πᾶσα διδασκαλία, ἥτις ἔχει σκοπὸν ν' ἀναπτύξῃ τὰς διανοητικὰς δυνάμεις τοῦ παιδός, τὴν μέθοδον ταύτην ὀφείλει νὰ τηρῇ, ἥτις ὀνομάζεται *ἀναλυτικὴ* ἤτοι *στοιχειώδης* πρὸς διαστολὴν τῆς ἄλλης μεθόδου, ἥτις λέγεται *συνθετικὴ* ἤτοι *ἐπιστημονικὴ* καὶ εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἀντίστροφος τῆς στοιχειώδους, καθότι τὸ τέλος τῆς μιᾶς εἶνε ἀρχὴ τῆς ἑτέρας. Διδασκόμενος λοιπὸν ὁ παῖς οὕτω κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον *ἐξασκεῖται ἀποχρώντως* καὶ εἰς τὸ *δι' ἀφαιρέσεως γενικεύειν*.

Μεταξὺ δὲ τῶν προβλημάτων οὐκ ὀλίγα ἐν ἑκάστῳ κεφαλαίῳ εἶνε κατακεχωρισμένα ἐπίτηδες πρὸς ἄσκησιν εἰς τὴν πρακτικὴν καὶ *ἐκ μνήμης ἀριθμητικήν*, ἤτοι εἰς τὸν *ἀπὸ μνήμης λογισμόν*. Διότι ὁ ἀπὸ μνήμης λογισμὸς ἐπιβάλλεται εἰς τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα καὶ διὰ τοῦ 8 ἄρθρου τοῦ ἀπὸ 31 Δεκεμβρίου τοῦ 1836 κανονισμοῦ τῶν ἑλλ. σχολείων, καὶ κρίνεται ὡς ἔχων μεγάλην δύναμιν κατὰ τὸν θεῖον Πλάτωνα ἵνα καὶ τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρῃ καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζηται. Ἐξηγεῖ δὲ τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμὸν αὐτὸς ὁ προμνημονευθεὶς Δειστερβέργης λέγων ἐν σελ. 347 τοῦ β' τόμου τῆς δ' ἐκδόσεως τοῦ Ὁδηγοῦ του τὰ ἑξῆς·

« Ὁ λογισμὸς ἐνεργεῖται ἐν τῷ νῷ· λογαριάζοντες ἐνασχολούμεθα μὲ τὰς ἰδέας τοῦ πλήθους ὁμοειδῶν ὄντων, πανταχοῦ λοιπὸν μὲ ἰδέας. Ὅθεν ὁ λογισμὸς εἶνε νοητικὴ ἐργασία, καὶ ἰδίως παραγωγὴ νέων ἰδεῶν ἐξ ἄλλων δεδομένων».

« Ὁ λογισμὸς οὗτος, ὅταν μὲν ἐνεργῆται διὰ μόνων ἰδεῶν· ἄνευ τῆς χρήσεως ἐξωτερικῶν μέσων ἤτοι σημείων, ὀνομάζεται *ἀπὸ μνήμης λογισμός*. Ὅταν δὲ λογαριάζοντες μεταχειριζώμεθα καὶ σημεῖα καὶ μάλιστα ψηφία, τότε ὁ λογισμὸς λέγεται *ἔγγραφος* ἢ διὰ ψηφίων. Ἀμφότεροι ὅμως εἶνε *λογισμοὶ κατὰ νοῦν*. Κατ' οὐσίαν λοιπὸν ἓν *μόνον εἶδος* λογισμοῦ ὑπάρχει. Ὁ δὲ λογισμὸς ὁ διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου ἤτοι διὰ σημείων παριστώντων γενικὰ ἀριθμητικὰ ποσὰ καλεῖται *ἐγγράμματος*. Τὸ ψηφίον δὲν εἶνε ἀριθμός, ἀλλὰ *σημεῖον* ἀριθμοῦ. Εἰς πάντας τοὺς λογισμοὺς ἐνασχολούμεθα μὲ τὰς ἰδέας τῶν ἀριθμῶν. Προσλαμβάνομεν δὲ εἰς τοὺς λογισμοὺς καὶ τὰ ψηφία, ἵνα παριστῶμεν αὐτοὺς *ἐγγράφως κάλλιον* καὶ ἵνα βοηθῶμεν τὴν μνήμην εἰς τὸ νὰ διατηρῇ τοὺς ἀριθμούς. Ὃν λόγον ἔχει ἡ λέξις πρὸς τὸ διανόημα ὅπερ σημαίνει καὶ τὸ γράμμα πρὸς τὴν λέξιν, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὴν ἰδέαν αὐτοῦ καὶ τὸ ψηφίον πρὸς τὸ ὄνομα. Λοιπὸν διανόημα, λέξις καὶ γράμμα ἀφ' ἑνὸς καὶ ἰδέα ἀριθμοῦ, ὄνομα αὐτοῦ καὶ ψηφίον ἀφ' ἑτέρου σχηματίζουσι δύο παραλληλισμούς. Καθὼς τὸ γράμμα εἶνε οὐδὲν ἄνευ τῆς λέξεως, καὶ ἡ λέξις οὐδὲν ἄνευ τοῦ διανοήματος, οὕτω καὶ τὸ ψηφίον εἶνε οὐδὲν ἄνευ τοῦ ὀνόματος καὶ τῆς ἰδέας τοῦ ἀριθμοῦ. Πάντα τὰ προβλήματα λύονται διὰ τοῦ νοῦ καὶ οὐχὶ διὰ σημείων ».

« Ὁ μὲν διὰ ψηφίων λογισμὸς ἐκτελεῖται καθ' ὡρισμένους ἐκ παραδόσεως καὶ συνηθείας στερεοτύπους τρόπον τινὰ κανόνας μᾶλλον ἢ ὁ ἀπὸ μνήμης. Εἰς δὲ τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμὸν ἔχει ἕκαστος εὐρὺ στάδιον ἐλευθέρας ἐνεργείας. Ὅθεν ἀρέσκει εἰς πάντας τοὺς ζωηροὺς κατὰ τὸ πνεῦμα διδασκάλους καὶ παῖδας. Οἱ χωλοὶ καὶ οἱ ἄλλοι ἀνάπηροι εἴτε κατὰ τὸ σῶμα εἴτε κατὰ τὸ πνεῦμα μεταχειρίζονται *πανταχοῦ* τὰς βακτηρίας. Ὁ δὲ ἐλεύθερος ἄνθρωπος ἀγαπᾷ νὰ καταλείπῃ τὴν πλατεῖαν καὶ τετριμμένην λεωφόρον καὶ νὰ ἀνοίγῃ εἰς ἑαυτὸν διὰ τοῦ δάσους ἄλλας εὐθείας ὁδοὺς φερούσας συντομώτερα καὶ εὐκολώτερα εἰς τὸν σκοπόν του » . . .

« Ἡ οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀπὸ μνήμης λογισμοῦ καὶ τοῦ διὰ ψηφίων εἶνε ἡ ἑξῆς, ὅτι *ὁ μὲν ἀπὸ μνήμης λο-*

γαριάζων λύει τὰ προβλήματα κατὰ τὰς μερικὰς ἰδιότητας καὶ ποιότητας τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ζητεῖ. Ἐὰν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ π. χ. μὲ τὸν ἀριθμὸν 48, θεωρεῖ αὐτὸν ὡς συγκείμενον ἀπὸ 40 καὶ 8 (ἔνθα πλησιάζει μὲ τὸν διὰ ψηφίων λογισμόν), ἀπὸ 42 καὶ 6, ἀπὸ 45 καὶ 3, ὡς 50—2, ὡς 4×12 κ. τ. ἑ. Ἐὰν δὲ ἦνε λεπτά, ὡς 1/2 δρ.—2 λεπτ., ὡς 12/25 δραχ., ὡς 2/5 δραχ.+2/25 δραχ., ἐν γένει οὕτως, ὡς εἶνε ἁρμοδιώτερον εἰς τὸν λογισμόν. Τοῦτο εἶνε λογισμὸς ἀπὸ μνήμης. Ἐκ τούτου προέρχεται ἡ ποικιλία τῶν λύσεων, ἡ αὐτενέργεια τοῦ λογαριάζοντος ἀπὸ μνήμης (Παρβλ. κεφ. Α' προβλ. 35—37, 42—48, κεφ. Β'. προβλ. 69—72, κεφ. Γ'. προβλ. 54—61). Ὁ δὲ διὰ ψηφίων λογαριάζων ἐκτελεῖ τοὺς λογισμοὺς κατὰ τοὺς ἐκ συνηθείας παραδεδομένους κανόνας, ὡς ἐκτελεῖ αὐτοὺς εἷς ἕκαστος ».

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 18 Δεκεμβρίου 1872.

Ὁ συντάκτης
ΓΕΩΡΓ. ΓΕΡΑΚΗΣ.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ.

Σελίδι	στίχῳ	ἀντὶ	γράφον
33	2	11/37	11/27.
59	13	35 λίρ.	32 λίρ.
82	8 κάτωθεν	α) 307	307
91	3 »	31)	21)
128	17	73	75

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 1.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ λέγεται ἡ περὶ τῶν ἀριθμῶν πραγματεία.

Ἀριθμὸς δὲ εἶνε πληθὺς ὡρισμένη ὁμοειδῶν ἢ ὁμωνύμων ὄντων. Τὸ δὲ ὄν, τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον παράγει τὸν ἀριθμόν, ὀνομάζεται *μονάς*.

Οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἢ *συγκεκριμένοι*, ὡς πέντε τάλ., ἑπτὰ πήχ., ἐννέα λίτραι, ἢ *ἀφῃρημένοι*, ὡς πέντε, ἑπτά, ἐννέα. Εἰς μὲν τὸν ἀφῃρημένον ἀριθμὸν ἐκφράζεται μόνον ἡ πληθὺς τῶν ἀριθμηθέντων ὄντων, ὄχι ὅμως καὶ τὸ εἶδος αὐτῶν· εἰς δὲ τὸν συγκεκριμένον (ἑπτὰ πήχεις) ἐκφράζεται ὄχι μόνον ἡ πληθὺς (ἑπτὰ) τῶν ἀριθμηθέντων ὄντων, ἀλλὰ καὶ τὸ εἶδος (πήχεις).

Εἰς τὰς ἀμέσως ἐφεξῆς παραγράφους θέλομεν πραγματευθῇ κατ' ἐξοχὴν τοὺς ἀφῃρημένους ἀριθμούς.

§ 2.

Ἵνα παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐγγράφως, ἔχομεν τὰ ἑξῆς δέκα σημεῖα ἢ ψηφία,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ 0.

Μὲ τὰ ἐννέα πρῶτα ἐκ τῶν ψηφίων τούτων σημαίνομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτὼ καὶ ἐννέα, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται *μονάδες πρώτης τάξεως*.

Δέκα δὲ μονάδες πρώτης τάξεως ὁμοῦ ἀποτελοῦσι *μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως*, ἥτις λέγεται *δεκάς*. Τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως σημαίνομεν μὲ τὰ *ἴδια* ψηφία· γραφμεν ὅμως τὸ ψηφίον αὐτῶν εἰς τὴν δευτέραν πρὸς ἀριστερὰ θέσιν, εἰς δὲ τὴν πρώτην θέσιν, ἐὰν δὲν ὑπάρχωσι μονάδες πρώτης τάξεως, γράφομεν τὸ σημεῖον 0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ θέσις εἶνε κενὴ καὶ ὀνομάζεται *μηδέν*. Αἱ δεκάδες λοιπὸν γράφονται οὕτω,

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

10 μονάδες δευτέρας τάξεως ὁμοῦ ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τρίτης τάξεως, ἥτις λέγεται *ἑκατοντάς*. Τὰς μονάδας τῆς τρίτης τάξεως γράφομεν εἰς τὴν τρίτην θέσιν πρὸς ἀριστερὰ οὕτω,

100, 200, 300, 400, ... 800, 900.

10 μονάδες τρίτης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τετάρτης τάξεως, ἥτις λέγεται *χιλιάς*. Τὰς χιλιάδας φράφομεν εἰς τὴν τετάρτην θέσιν οὕτω,

1000, 2000, 3000, 4000, ... 9000.

10 μονάδες τετάρτης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα πέμπτης τάξεως, ἥτις λέγεται *δεκὰς χιλιάδος* ἢ *μυριάς*. Αἱ δεκάδες χιλιάδος γράφονται εἰς τὴν πέμπτην θέσιν οὕτω,

10000, 20000, 30000, ... 90000.

10 μονάδες πέμπτης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα ἕκτης τάξεως, ἥτις λέγεται *ἑκατοντὰς χιλιάδος*. Τὰς ἑκατοντάδας χιλιάδος γράφομεν εἰς τὴν ἕκτην θέσιν οὕτω,

100000, 200000, 300000, ... 900000.

10 μονάδες ἕκτης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα ἑβδόμης τάξεως, ἥτις λέγεται *ἑκατομμύριον*, διότι ἰσοῦται μὲ ἑκατὸν μυριάδας. Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατομμυρίων γράφομεν εἰς τὴν ἑβδόμην θέσιν οὕτω,

1000000, 2000000, 3000000, ... 9000000.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω καταλαμβάνει τις ὅτι ὁ *γενικὸς νόμος* τοῦ ἡμετέρου ἀριθμητικοῦ συστήματος εἶνε ὁ ἑξῆς· *δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Ὁ νόμος οὗτος ἀληθεύει εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμούς, λοιπὸν καὶ εἰς τοὺς μεγαλειτέρους τοῦ ἑκατομμυρίου, ὅθεν

10 ἑκατομμύρια	ἀποτελοῦσι	1	δεκάδα ἑκατομμυρίου,
10 δεκάδες ἑκατομμυρίου	»	1	ἑκατοντάδα »
10 ἑκατοντάδες »	»	1	χιλιάδα »
10 χιλιάδες »	»	1	δεκάδα χιλιάδος »
10 δεκάδες χιλιάδος ἑκ.	»	1	ἑκατοντάδα » »
10 ἑκατοντάδες » »	»	1	διλλιόνιον

10 ἑκατοντάδες χιλιάδος διλλιονίου λέγονται τριλλιόνιον, καὶ 10 ἑκατοντάδες χιλιάδος τριλλιονίου λέγονται τετραλλιόνιον.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατομμυρίων γράφεται εἰς τὴν ἑβδόμην θέσιν, τὸ τῶν διλλιονίων γράφεται εἰς τὴν δεκάτην τρίτην, καὶ τὸ τῶν τριλλιονίων εἰς τὴν δεκάτην ἐννάτην.

Προσέτι ἀληθεύει καὶ ὁ ἑξῆς γενικὸς νόμος·

Ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν προχωρήσῃ μίαν θέσιν πρὸς ἀριστερά, σημαίνει μονάδας δεκάκις μεγαλειτέρας ἐκείνων, τὰς ὁποίας ἐσήμαινεν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Γράψον διὰ ψηφίων τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς· α) δέκα ἑπτὰ ἑκατομμύρια τριακοσίας δέκα ὀκτὼ χιλιάδας καὶ ἕν. β) τριακόσια ἑξήκοντα ἑκατομμύρια ὀγδοήκοντα ἓξ χιλιάδας καὶ ἑπτακόσια πέντε. γ) διακόσια τριάκοντα ἑκατομμύρια καὶ πεντήκοντα.

2) Ἀνάγνωσον τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς (ἵνα τοὺς ἀναγνώσῃς εὐκολώτερα, θὲς πρὸς δεξιὰ τοῦ 4ου, 7ου, 10ου, 13ου καὶ 16ου ψηφίου στιγμὴν ἢ κόμμα) α) 4345646, β) 12973648, γ) 217964272, δ) 85942638, ε) 3000000, ζ) 500000000, η) 7200000000, θ) 702000000, ι) 900300000, κ) 230007000, λ) 800700600, μ) 2785634792, ν) 738524936787, ξ) 900806300070, ο) 70330007090, π) 17308500087000 8001.

§ 3.

Ἔχοντες ἕνα μόνον ἀριθμὸν οὐδὲν δυνάμεθα νὰ πράξωμεν· οὕτω π. χ. ὁ 12 μόνος εἶνε καὶ μένει 12, καὶ κανένα ἄλλον ἀριθμὸν δὲν δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν ἐξ αὐτοῦ. — Ἐὰν ὅμως δοθῇ καὶ ἕτερος ἀριθμός, π. χ. ὁ 3, τότε δύναμαι νὰ ζητήσω πολλὰ καὶ διάφορα, ἤγουν, κατὰ πόσον ὁ 12 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 3; — Ἀπόκρ. κατὰ 9.— ἢ τίς ἀριθμὸς γίνεται, ἐὰν εἰς τὸν 12 προςθέσω καὶ 3; — Ἀπόκρ. 15.— κ. τ. ἑ. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον συμπλέκων τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 3 εὑρίσκω νέους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους πρότερον δὲν εἶχον εἰς τὸν νοῦν.— Τὸ δὲ συμπλέκειν δύο ἀριθμούς, ὥςτε νὰ παράγηται ἐξ αὐτῶν νέος τις ἀριθμός, τοῦτο ὀνομάζεται *λογισμός*. Ὁ διὰ τοῦ λογισμοῦ εὑρισκόμενος ἀριθμὸς λέγεται *ἐξαγόμενον*. — Ὑπάρχουσι δὲ τέσσαρα κύρια εἴδη λογισμοῦ, ἤτοι τέσσαρες *ἀριθμητικαὶ πράξεις*, ἡ *πρόςθεσις*, *ἀφαίρεσις*, ὁ *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ἡ *διαίρεσις*, τῶν ὁποίων ἑκάστην χωριστὰ μέλλομεν ἤδη κατὰ σειρὰν νὰ πραγματευθῶμεν.

Πρόςθεσις.

§ 4.

Προςθέτω δύο ἀριθμοὺς (5 *καὶ* 6) σημαίνει ἀθροίζω αὐτοὺς εἰς ἕνα ἀριθμὸν (11) ἔχοντα τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ δεδομένοι. Καὶ οἱ μὲν ἀριθμοὶ (5 καὶ 6), οἱ ὁποῖοι πρόκειται νὰ προςτεθῶσιν, ὀνομάζονται *προςθετέοι*, ὁ δὲ ἀριθμὸς (11), ὅςτις εὑρίσκεται διὰ τῆς προςθέσεως τῶν δεδομένων (5 καὶ 6), λέγεται *ἄθροισμα* ἢ *κεφάλαιον*.

Τὸ σημεῖον τῆς προςθέσεως εἶνε (+), καὶ προφέρεται *σὺν* ἢ *καί*· ἐὰν λοιπὸν πρόκειται νὰ προςθέσω π. χ. 8 καὶ 12, γράφω τοῦτο ὡς ἑφεξῆς· $8+12$

καὶ τὸ προφέρω 8 σὺν 12 ἢ 8 καὶ 12. Ἐὰν δὲ θέλω νὰ ἐκφράσω, ὅτι 8 καὶ 12 ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 20, γράφω οὕτως

$$8+12=20$$

(8 σὺν 12 ἴσον μὲ 20)· τὸ σημεῖον (=) προφέρεται «*ἴσον*».

§ 5.

Κυρίως διὰ μιᾶς πράξεως δύο μόνον ἀριθμοὶ προςθέτονται. Ἐὰν δὲ ζητηθῇ νὰ προςθέσω τρεῖς ἀριθμούς, 5, 8 καὶ 9, ἐκτελῶ τοῦτο προςθέτων πρῶτον δύο, 5 καὶ 8, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα 13 προςθέτων καὶ τὸν τρίτον 9. Τὸ αὐτὸ πράττω καὶ ὅταν δοθῶσι τέσσαρες ἢ καὶ πλειότεροι προςθετέοι. Εἰς ὅλας δὲ τὰς περιπτώσεις ταύτας ἀληθεύει ὁ ἑξῆς κανών·

Ὅταν πρόκειται νὰ προςθέσω πολλοὺς ἀριθμούς, εἶνε ἀδιάφορον κατὰ τίνα τάξιν ἐκτελέσω τοῦτο· διότι πάντοτε εὑρίσκω τὸ ἴδιον ἄθροισμα.

§ 6.

Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ προςθέσω δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς πολυψηφίους, ἤγουν ἔχοντας πολλὰ ψηφία, π.χ. τοὺς ἀριθμοὺς 7863, 90742 καὶ 5531, γράφω αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, ὥςτε νὰ τύχωσιν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς ὑπὸ τὰς μανάδας τοῦ ἄλλου, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας κ. ἑ. καὶ ἄγω ὑποκάτω γραμμὴν ὁριζόντιον, ὡς φαίνεται ἀντικρύ, ἔπειτα προςθέτω κατὰ σειρὰν τὰς ὁμοταγεῖς μονάδας ἀρχίζων ἐκ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων, ὡς ἑφεξῆς· λέγω δηλ. πρῶτον εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, 3 καὶ 2 . . 5 καὶ 1 . . 6, γράφω 6 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· ἔπειτα εἰς τὰς δεκάδας 6 καὶ 4 . . 10 καὶ 3 . . 13, ἤτοι 3 δεκάδες καὶ 1 ἑκατοντάς, λοιπὸν τὰς μὲν 3 δεκάδας γράφω ὑπὸ τὰς δεκάδας, τὴν δὲ 1 ἑκατοντάδα κρατῶ καὶ προςθέτω εἰς τὰς ἑκατοντάδας, λέγων 8 καὶ 1 . . 9 καὶ 7 . . 16 καὶ 5 . . 21, ἤτοι 1 ἑκατοντὰς καὶ 2 χιλιάδες, γράφω τὴν 1 ἑκατοντάδα ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, τὰς δὲ 2 χιλιάδας κρατῶ καὶ προςθέτω εἰς τὰς χιλιάδας, ὅπου λέγω 2 καὶ 7 . . 9 καὶ 5 . . 14, ἤτοι 4 χιλιάδες καὶ

$$\begin{array}{r} 7863 \\ 90742 \\ 3531 \\ \hline 104136 \end{array}$$

1 δεκὰς χιλιάδος, γράφω τὰς 4 χιλιάδας ὑπὸ τὰς χιλιάδας, τὴν δὲ 1 δεκάδα χιλιάδος κρατῶ καὶ προςθέτω εἰς τὰς δεκάδας χιλιάδος λέγων 9 καὶ 1.. 10, ἤτοι 0 δεκάδες χιλιάδος καὶ 1 ἑκατοντὰς χιλιάδος, γράφω 0 ὑπὸ τὰς δεκάδας χιλιάδος, τὴν δὲ 1 ἑκατοντάδα χιλιάδος γράφω εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν θέσιν. Ὁ οὕτω λοιπὸν εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 104136 εἶνε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν:

3) Ἀρίθμησον κατὰ 3 ἀρχίζων ἀπὸ 1 ἕως 100, καὶ ἀπὸ 2 ἕως 101, καὶ ἀπὸ 3 ἕως 102, οὕτως 1+3=4, 4+3 =7, 7+3=10 κ. ἑ. καὶ τέλος 97+3=100.

4) Ἀρίθμησον ὁμοίως κατὰ 6 α) ἀπὸ 1 ἕως 103, β) ἀπὸ 2 ἕως 104, γ) ἀπὸ 3 ἕως 105, δ) ἀπὸ 4 ἕως 100, ε) ἀπὸ 5 ἕως 101, καὶ ζ) ἀπὸ 6 ἕως 102.

5) Ἀρίθμησον ὁμοίως κατὰ 8 α) ἀπὸ 1 ἕως 105, β) ἀπὸ 2 ἕως 106, γ) ἀπὸ 3 ἕως 107, δ) ἀπὸ 4 ἕως 108, ε) ἀπὸ 5 ἕως 109, ζ) ἀπὸ 6 ἕως 110, η) ἀπὸ 7 ἕως 111 καὶ θ) ἀπὸ 8 ἕως 112.

6) Πόσα ὀστᾶ ἔχει τὸ ἀνθρώπινον σῶμα, ἐὰν εἰς μὲν τὴν κεφαλὴν ὑπάρχωσιν 63, εἰς δὲ τὸν κορμὸν 53, εἰς τὰ ἄνω κῶλα 68 καὶ εἰς τὰ κάτω 64;

7) Ἔμπορος τις εἰςέπραξε κατὰ τοὺς 12 κατὰ σειρὰν μῆνας τοῦ ἔτους δραχ. 729, 478, 536, 447, 349, 712, 483, 658, 513, 489, 598, 688. Πόσας εἰςέπραξε τὴν πρώτην τριμηνίαν, πόσας τὴν δευτέραν, τρίτην καὶ τετάρτην, πόσας τὴν πρώτην ἑξαμηνίαν, πόσας τὴν δευτέραν, πόσας ὅλον τὸ ἔτος;

8) Πρόςθες εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα α) τοὺς τέσσαρας εἰς ὁριζόντιον σειρὰν ἀριθμοὺς α, β, γ, δ καὶ γράψον τὸ ἄθροισμα ἑκάστης σειρᾶς ἀπέναντι πρὸς δεξιά, εὑρὲ ἔπειτα β) τὸ ἄθροισμα τῶν 4 καθέτων στηλῶν Α, Β, Γ, Δ, καὶ γράψον ὑποκάτω τὰ ἀθροίσματα. Εὑρὲ ἔπειτα γ) τὸ ἄθροισμα

ὄχι μόνον τῆς οὕτω σχηματισθείσης νέας καθέτου στήλης Ε, ἀλλὰ καὶ τῆς σχηματισθείσης νέας ὁριζοντίου σειρᾶς ε. Ἐὰν δὲ ὁ λογισμὸς γείνῃ ὀρθῶς, θέλεις εὑρεῖ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 424, τὸ ὁποῖον δύνασαι νὰ γράψῃς εἰς τὴν ἐξωτάτην γωνίαν·

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
α)	23+	16+	46+	38	=123
β)	27+	13+	19+	58	=117
γ)	24+	47+	15+	16	=102
δ)	23+	24+	18+	17	= 82
ε)	97+	100+	98+	129	=424.

9) Πρᾶξον τὰ αὐτὰ εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

387+459+678+519+748+378+559+778
439+796+398+374+398+497+859+598
798+985+796+796+476+749+985+765
797+397+584+895+583+794+777+375
486+785+276+967+297+947+496+432
395+989+435+388+488+974+888+649

Ἀφαίρεσις.

§ 7.

Διὰ μὲν τῆς προσθέσεως εὑρίσκω, πόσος γίνεται ἀριθμός τις, ἐὰν αὐξήσω αὐτὸν κατά τινα ἀριθμόν. Ὅταν δὲ θέλω νὰ μάθω, πόσον ἀπομένει, ἐὰν ἀριθμόν τινα μεγαλείτερον (12) ἐλαττώσω κατ' ἄλλον μικρότερον (8), εὑρίσκω τοῦτο διὰ τῆς *ἀφαιρέσεως*. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὁ μὲν μεγαλείτερος (12), ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, ὀνομάζεται *μειωτέος*, ὁ δὲ μικρότερος (8), ὅστις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, *ἀφαιρετέος*, καὶ ὁ ἀριθμὸς (4), ὅστις εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε (—), καὶ προφέρεται *πλὴν* ἢ *παρά*, π. χ.

12—8=4 (ἤγουν 12 πλὴν 8 ἢ 12 παρὰ 8 εἶνε ἴσον 4).

§ 8. ά.

Ἐὰν ζητῆται ν' ἀφαιρέσω ἀριθμὸν πολυψήφιον ἀπὸ πολυψηφίου, π.χ. τὸν 5603 ἀπὸ 8679, πράττω ὡς ἐφεξῆς· Γράφω τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, ὥςτε αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἦνε ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας κ. ἑ., ὡς ἀπέναντι φαίνεται· ἔπειτα ἀφαιρῶ μονάδας ἀπὸ μονάδων, δεκάδας ἀπὸ δεκάδων κ. ἑ. καὶ γράφω ὑποκάτω τὰς διαφοράς, λέγων 3 ἀπὸ 9 . . 6, 0 ἀπὸ 7 . . 7, 6 ἀπὸ 6 . . 0, 5 ἀπὸ 8 . . 3. Οὕτως ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 3076 εἶνε ἡ ζητουμένη διαφορά.

$$\begin{array}{r} 8679 \\ 5603 \\ \hline 3076 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ ψηφία τινὰ τοῦ μειωτέου ἦνε μικρότερα τῶν ὁμοταγῶν ψηφίων τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς εἰς τὸ ἀπέναντι παράδειγμα, αὐξάνω ἕκαστον αὐτῶν κατὰ 10, δανειζόμενος μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου ψηφίου τοῦ μειωτέου καὶ ἀναλύων αὐτὴν εἰς 10 ἀμέσως κατωτέρας, καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτου τὸ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, ἔπειτα ὅμως τὸ ἀμέσως ἀνώτερον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου αὐξάνω κατὰ 1 καὶ οὕτω τὸ ἀφαιρῶ· λέγω δηλ. 9 ἀπὸ 15 . . 6, 2 καὶ 1 . . 3 ἀπὸ 3 . . 0, 8 ἀπὸ 11 . . 3, 4 καὶ 1 . . 5 ἀπὸ 7 . . 2. Οὕτως ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε 2306.

$$\begin{array}{r} 7135 \\ 4829 \\ \hline 2306 \end{array}$$

Ὁμοίως ἐκτελῶ καὶ τὴν ἀπέναντι ἀφαίρεσιν, λέγω δηλ. 4 ἀπὸ 7 . . 3, 6 ἀπὸ 10 . . 4, 5 καὶ 1 . . 6 ἀπὸ 13 . . 7, 8 καὶ 1 . . 9 ἀπὸ 10 . . 1, 7 καὶ 1 . . 8 ἀπὸ 10 . . 2, 1 ἀπὸ 5 . . 4.

$$\begin{array}{r} 500307 \\ 78564 \\ \hline 421743 \end{array}$$

§ 8. 6'.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 28 ἀφαιρέσω τὸν 15 καὶ εὕρω διαφορὰν τὸν 13, καὶ ζητήσω νὰ μάθω, ἂν ἐξετέλεσα τὸν λογισμὸν ὀρθῶς, δύναμαι νὰ πράξω τὴν ἑξῆς δοκιμήν, νὰ προςθέσω εἰς τὸν 15 τὴν διαφορὰν 13, καὶ νὰ παρατηρήσω ἂν θέλῃ εὑρεθῇ ἄθροισμα ὁ 28. Καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκω πραγματικῶς ἐξαγόμενον τὸν 28, συμπεραίνω, ὅτι ὁ λογισμὸς ἐξετελέσθη ὀρθῶς. Ἐν γένει λοιπὸν εἰς ἕκαστον ὀρθὸν παράδειγμα ἀφαιρέσεως (28—15=13) ἀληθεύει ὁ ἑξῆς κανών·

Ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον (15) προσθέσω τὴν διαφορὰν (13), εὑρίσκω τὸν μειωτέον (28).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

10) Ἀπαρίθμησον ἀρχίζων ἀπὸ 100 α) κατὰ 2 οὕτως 100, 98, 96, κ. ἑ. μέχρι 0, β) κατὰ 3 μέχρις 1, γ) κατὰ 4 μέχρι 0, δ) κατὰ 5 μέχρι 0, ε) κατὰ 6 μέχρι 4, ζ) κατὰ 7 μέχρι 2, η) κατὰ 8 μέχρι 4 καὶ θ) κατὰ 9 μέχρις 1.

11) Ἐλάττωσον ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν α) 9103, β) 9000, γ) 8113, δ) 9297, ε) 5986, ζ) 1999 καθ' ἕκαστον τῶν ἑπομένων (15 παραδείγματα).

12) Τίς ἀριθμὸς προςθετόμενος εἰς 67 δίδει 73; β) Ἐκ δύο ἀριθμῶν ἀποτελούντων ἄθροισμα 347 ὁ εἷς εἶνε 180, πόσος εἶνε ὁ ἕτερος;

13) Πόσα ἔτη εἶνε μέχρι σήμερον α) ἀπὸ τῆς εὑρέσεως τῆς πυρίτιδος γενομένης τὸ 1320 μ. Χ., β) ἀπὸ τοῦ μεγάλου σχίσματος τὸ 1054, γ) ἀπὸ τοῦ 1436, ὅτε ἐφευρέθη ἡ τυπογραφία, δ) ἀπὸ τοῦ 1453, ὅτε ἐκυριεύθη ἡ Κωνσταντινούπολις, ε) ἀπὸ τοῦ 1492, ὅτε ἀνεκαλύφθη ἡ Ἀμερική, ζ) ἀπὸ τοῦ 1821, ὅτε ἐπανέστη ἡ Ἑλλάς;

14) Ὁ Ἀρχιμήδης γεννηθεὶς τὸ 285 π. Χ. ἐφονεύθη κατὰ τὴν ἅλωσιν τῶν Συρακουσῶν ὢν 73 ἐτῶν. Πότε συνέβη τοῦτο;

15) Εὑρὲ τὰς διαφορὰς μεταξὺ α) 3742 δραχ. καὶ 2916 δραχ. β) 2734 σταδίων καὶ 1856 σταδ. γ) 9848 ὀκ. καὶ 7863 ὀκ. δ) 8846 πήχ. καὶ 4793 πήχ. ε) 5987 ταλ. καὶ 2768 ταλ. ζ) 68747 στατ. καὶ 39674 στατ. η) 7946 λιρῶν καὶ 3879 λιρ. θ) 1000000 ποδ. καὶ 769230 ποδ.

Πολλαπλασιασμός.

§ 9.

Καθὼς πολλοὺς ἀριθμοὺς προσθέτω εἰς ἕνα, οὕτω δύναμαι καὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν νὰ προσθέσω πολλάκις, π.χ. τὸν 8 νὰ

Δημητρίου Λαζαριναίου

προσθέσω τρὶς (λοιπὸν 8 καὶ 8 γίνονται 16, καὶ 8 γίνονται 24). Τὸ δὲ προσθέτειν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν πολλάκις ὀνομάζεται *πολλαπλασιασμός*. Δίδονται λοιπὸν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς (8) χρειάζεται νὰ προστεθῇ πολλάκις εἰς ἑαυτόν, ὁ δὲ ἕτερος (3) ἐκφράζει ποσάκις πρέπει νὰ γείνῃ τοῦτο. Ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς (8) ὀνομάζεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δὲ δεύτερος (3) λέγεται *πολλαπλασιαστής*. Ἀμφότεροι δὲ ὀνομάζονται καὶ κοινῶς *παράγοντες*. Ὁ δὲ ἀριθμὸς (24), ὅστις εὑρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὀνομάζεται *γινόμενον*. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μεταχειρίζονται δύο σημεῖα (.) καὶ (×)· οὕτω π. χ.

$$3.\ 8 = 24, \text{ ἢ } 3 \times 8 = 24$$

(ἀνάγνωσον 3 φορὰς 8 ἢ 3 ἐπὶ 8 ἴσον 24).

§ 10.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἔχομεν τέσσαρας περιπτώσεις, τὰς ἑξῆς·

1) Ἐὰν ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω ἀριθμὸν μονοψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, π.χ. 8 ἐπὶ 6, εὑρίσκω τὸ γινόμενον 48 συντομώτερα διὰ τοῦ *κεφαλισμοῦ* ἢ τῆς *προπαιδείας*, τὴν ὁποίαν χρεωστεῖ νὰ γνωρίζῃ ὁ μαθητὴς ἐκ στήθους, καὶ εἶνε ἡ ἑξῆς·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

2) Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον π. χ. 3068 ἐπὶ 7, γράφω τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπάγω γραμμήν, ὡς ἀπέναντι φαίνεται, ἔπειτα λέγω 7κις 8 μονάδες γίνονται 56 μονάδες ἤτοι 6 μονάδες καὶ 5 δεκάδες, γράφω τὰς 6 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων, καὶ κρατῶ τὰς 5 δεκάδας· ἔπειτα 7κις 6 δεκάδες γίνονται 42 δεκάδες καὶ 5 αἱ κρατούμεναι 47, ἤτοι 7 δεκάδες καὶ 5 ἑκατοντάδες, γράφω εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων 7 καὶ κρατῶ τὰς 4 ἑκατοντάδας, ἔπειτα 7κις 0 ἑκατοντάδες γίνονται 0 καὶ 4 αἱ κρατούμεναι γίνονται 4, γράφω 4 εἰς τὰς ἑκατοντάδας, τέλος 7κις 3 χιλιάδες γίνονται 21 χιλιάδες, ἤτοι 1 χιλιὰς καὶ 2 δεκάδες χιλιάδος, γράφω 1 εἰς τὰς χιλιάδας καὶ 2 εἰς τὰς δεκάδας χιλιάδος. Λοιπὸν τὸ 7πλάσιον τοῦ 3068 εἶνε 21476.

```
 3068
    7
-----
21476
```

3) Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, γράφω εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 0, π. χ. 763×10=7630. Διότι διὰ τῆς προσθήκης τοῦ 0 ὅλα τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μεταβαίνουσιν εἰς τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν θέσιν, καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν ἐν § 2 τεθεῖσαν συνθήκην σημαίνουσι μονάδας δεκάκις μεγαλειτέρας ἢ πρότερον. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100, 1000 κ. τ. ἑ., ἐὰν γράψω εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ δύο, τρία κ. τ. ἑ. μηδενικά.

4) Ἐὰν τέλος ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω πολυψήφιον ἐπὶ πολυψήφιον, π.χ. 3854 ἐπὶ 6047, ἐκτελῶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἀπέναντι φαίνεται, ἤγουν γράφω τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑπάγω γραμμήν, ἔπειτα λέγω, τὸν 3854 ἀντὶ νὰ λάβω 6047 φορὰς διὰ μιᾶς, τὸν λαμβάνω χωριστὰ 7 φοράς, 40 καὶ 6000, ἔπειτα προσθέτω τὰ τρία μερικὰ γινόμενα. Καὶ 7 μὲν φορὰς τὸν λαμβάνω ὡς ἐλέχθη εἰς 2)· ἵνα

```
    3854
    6047
--------
   26978
  15416
 23124
--------
23305138
```

δὲ τὸν λάβω 40 φοράς, τὸν πολλαπλασιάζω ἐπὶ 4, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πολλαπλασιάζω ἐπὶ 10 θέτων εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἓν 0, ἤτοι γράφων αὐτὸ ὑπὸ τὸ προηγηθὲν ὡς δεκάδας· ἵνα δὲ τὸν λάβω 6000 φοράς, τὸν πολλαπλασιάζω ἐπὶ 6, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πολλαπλασιάζω ἐπὶ 1000 θέτων εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ τρία 0, ἤτοι γράφων αὐτὸ ὡς χιλιάδας.

§ 11.

Ἐὰν ἦνε δεδομένοι πρὸς πολλαπλασιασμὸν τρεῖς ἢ πλειότεροι παράγοντες, πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον κ. τ. ἑ. Ἀληθεύει δὲ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ὁ ἑξῆς κανών, ὅτι *εἶνε ἀδιάφορον κατὰ ποίαν τάξιν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δεδομένους παράγοντας.*

Σημ. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν γίνονται καὶ αἱ ἑξῆς συντομίαι·

1. Ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ καὶ ἀμφότεροι λήγωσιν εἰς μηδενικά, τότε πολλαπλασιάζομεν τὰ σημαντικὰ μόνον ψηφία, καὶ ἔπειτα προσκολλῶμεν εἰς τὸ γινόμενον τὰ παραλειφθέντα μηδενικά, π. χ.

$$\begin{array}{r} 562 \\ 4300 \\ \hline 1686 \\ 2248 \\ \hline 2416600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7900 \\ 40 \\ \hline 316000 \end{array}$$

Διότι εἶνε $562 \times 4300 = 562 \times 43 \times 100 = 24166 \times 100 = 2416600$· καὶ $7900 \times 40 = 79 \times 100 \times 4 \times 10 = 79 \times 4 \times 100 \times 10 = 316 \times 1000 = 316000$.

2. Ὅταν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 9, ἐπειδὴ εἶνε $9 = 10 - 1$, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον ἐπὶ 10 (ἤγουν νὰ προσαρτήσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν μηδενικόν), καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, π. χ. $387 \times 9 = 3870 - 387$,

$$\begin{array}{r} 3870 \\ 387 \\ \hline 3483 \end{array}$$

Εἰς δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ 99 ἢ ἐπὶ 999 προσαρτῶμεν δύο ἢ τρία μηδενικά, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ὁμοίως τὸν πολλαπλασιαστέον. Διότι εἶνε $99 = 100 - 1$ καὶ $999 = 1000 - 1$. Οὕτω π. χ. $982 \times 99 = 98200 - 982$,

$$\begin{array}{r} 98200 \\ 982 \\ \hline 97218 \end{array}$$

3. Ὅταν δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀριθμὸν ἀναλυόμενον εἰς παράγοντας μονοψηφίους, τότε πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἕνα παράγοντα πρῶτον, καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἄλλον· π. χ.

$$893 \times 56 = 893 \times 7 \times 8.$$

$$\begin{array}{r} 893 \\ 56 \\ \hline 5358 \\ 4465 \\ \hline 50008 \end{array}$$

ἢ συντομώτερον ὁπωςοῦν

$$\begin{array}{rl} 893 & \\ \hline 6251 & (7 \\ \hline 50008 & (8 \end{array}$$

4. Ἐὰν ψηφίον τι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἦνε 1, γράφομεν αὐτὸν οὕτως, ὥςτε τὸ 1 νὰ τύχῃ ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὰ ἄλλα ψηφία ἐκτὸς τοῦ 1, κ. ἑ. π. χ.

$$\begin{array}{r} 375 \\ 61 \\ \hline 2250 \\ \hline 22875 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 964 \\ 17 \\ \hline 6748 \\ \hline 16388 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 849 \\ 815 \\ \hline 4245 \\ 6792 \\ \hline 691935 \end{array}$$

5. Εἰς δὲ τὰ ἑξῆς παραδείγματα γίνεται ἄλλη συντομία·

$$ά) \begin{array}{r} 6378 \\ 842 \\ \hline 12756 \\ 25512 \\ 51024 \\ \hline 5370276 \end{array} \qquad β') \begin{array}{r} 2469 \\ 369 \\ \hline 7407 \\ 14814 \\ 22221 \\ \hline 911061 \end{array} \qquad γ') \begin{array}{r} 2469 \\ 369 \\ \hline 22221 \\ 88884 \\ \hline 911061 \end{array}$$

Εἰς τὸ ά) παράδειγμα ἐπολλλαπλασίασα 6378 ἐπὶ 2, τὸ δὲ γινόμενον 12756 πολλαπλασιάσας πάλιν ἐπὶ 2 εὗρον τὸ 4πλάσιον τοῦ 6378, πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸ γινόμενον 25512 ἐπὶ 2, εὗρον τὸ 8πλάσιον τοῦ 6378. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐπολλαπλασίασα β') 2469 πρῶτον ἐπὶ 3, τὸ δὲ εὑρεθὲν γινόμενον 7407 ἐπὶ 2 καὶ οὕτως εὗρον τὸ 6πλάσιον τοῦ 2469, τὸ αὐτὸ γινόμενον ἐπολλαπλασίασα ἐπὶ 3, καὶ οὕτως εὗρον τὸ 9πλάσιον τοῦ 2469. Τὰ δὲ τρία ταῦτα γινόμενα ἔθεσα ἁρμοδίως τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο καὶ τὰ προσέθεσα. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 2469 ἐπολλαπλασιάσθη εἰς τὸ γ') ἐπὶ 369, ἀφοῦ ἐπολλαπλασίασα πρῶτον ἐπὶ 9, ἔπειτα δέ, ἐπειδὴ ὁ 36 εἶνε 4άκις 9, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 36, ἔλαβον 4άκις τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 22221.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

16) Πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν α) 387, β) 296, γ) 585, δ) 301, ε) 589, ζ) 989, η) 297, ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 καὶ 12 (77 παραδ.)

17) Ἐὰν ἀτμόπλοιόν τι διατρέχῃ 9 μίλια τὴν ὥραν, πόσα μίλια διατρέχει εἰς ὥρας α) 13, β) 61, γ) 35;

18) Πολλαπλασίασον α) 876 ἐπὶ 41, 51, 61, 71, 81, 91, β) 956 ἐπὶ 18, 19, 17, γ) 2397 ἐπὶ 712.

19) Εἰς στέγην ὀρθογώνιον ὑπάρχουσι κατὰ μῆκος μὲν 67 κέραμοι, κατὰ πλάτος δὲ 39, πόσας κεράμους ἔχει ἡ στέγη;

20) Μία σελὶς βιβλίου τινὸς ἔχει 34 στίχους, ἐν ἑκάστῳ στίχῳ εἶνε κατὰ μέσον ὅρον 47 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει α) μία σελίς, β) ἓν τυπογραφικὸν φύλλον ἐκ 16 σελίδων;

21) Πληρώνει τις ἐνοίκιον 135 δραχ. κατὰ μῆνα, πόσον πληρώνει α) κατὰ τριμηνίαν, β) κατ' ἔτος;

22) Πολλαπλασίασον α) 3758, β) 2978, γ) 9186 ἐπὶ τὰ γινόμενα α) 56, β) 54, γ) 63, δ) 64, ε) 36, ζ) 42, η) 49.

23) Ἐκτέλεσον ἀπὸ μνήμης κατὰ σημ. 2 τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς, α) 99.8, β) 99.6, γ) 99.83, δ) 99. 67, ε) 98.26, ζ) 198.13, η) 297.15, θ) 398.22.

24) Ἐκτέλεσον συντόμως κατὰ σημ. 5 τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς· α) 98775.63, β) 2698.84, γ) 7985.24, δ) 59873.62, ε) 3877.28, ζ) 3975.93, η) 97653. 482, θ) 3794.682, ι) 5974.936, κ) 3875.186, λ) 5967.568, μ) 3877.856, ν) 79658.637. ξ) 49836. 954, ο) 56284.63549, π) 812793.56287, ρ) 144729. 108549, σ) 73549. 56637.

Διαίρεσις.

§ 12.

Διαιρῶ (π. χ. 40 διὰ 5) σημαίνει μοιράζω ἀριθμόν τινα (40) εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα ἐμφαίνει ἄλλος τις ἀριθμὸς (5), καὶ εὑρίσκω τὸ ἓν ἐκ τῶν μερῶν τούτων. Ὁ μὲν ἀριθμὸς (40), ὅςτις πρέπει νὰ διαιρεθῇ, ὀνομάζεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμὸς (5), ὅςτις ἐμφαίνει εἰς πόσα μέρη θὰ διαιρεθῇ, ὀνομάζεται *διαιρέτης*, καὶ ὁ ἀριθμὸς (8), ὅςτις εὑρίσκεται διὰ τῆς διαιρέσεως, ὀνομάζεται *πηλίκον*.

Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε (:), οὕτω π. χ.

36 : 4 = 9 (ἀνάγνωσον 36 διαιρούμενος διὰ 4 εἶνε ἴσον 9).

§ 13.

Ἐὰν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5 διαιρέσω τὸν 40 καὶ εὕρω πηλίκον 8, ὁ 8 εἶνε τὸ 5^{ον} μέρος τοῦ 40, ἤγουν ὁ 8 λαμβανόμενος 5κις γίνεται 40. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ 5 λαμβανόμενος 8κις εἶνε ἴσος μὲ 40, συμπεραίνω ὅτι καὶ ὁ 5 ἐμπεριέχεται 8κις εἰς τὸν 40. Δύναμαι λοιπὸν νὰ ἐκφράσω τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως καὶ ὡς ἑξῆς· *διαιρῶ ἀριθμόν τινα* (40) *διά τινος ἄλλου* (5) *σημαίνει ζητῶ ποσάκις ὁ δεύτερος* (5) *ἐμπεριέχεται εἰς τὸν πρῶτον* (40), *ἤτοι ποσάκις ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτοῦ*.

§ 14.

Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις εἶνε ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθὼς καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶνε ἀντίστροφος τῆς προςθέσεως, διὰ τοῦτο δυνάμεθα ἕκαστον παράδειγμα διαιρέσεως νὰ δοκιμάζωμεν κατὰ τὸν ἐφεξῆς κανόνα·

Ἐὰν διαιρέσω ἀριθμόν τινα (84) *διά τινος ἄλλου* (12), *καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσω τὸ πηλίκον* (7) *ἐπὶ τὸν διαιρέτην* (12), *πρέπει νὰ εὕρω γινόμενον τὸν διαιρετέον*.

§ 15.

Εἰς τὰς ἀνωτέρω προτάσεις ὑποθέτεται ὅτι ὁ διαιρετέος διαιρεῖται πραγματικῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἤγουν, ὡς συνήθως ἐκφραζόμεθα, ὅτι ὁ διαιρέτης εἰςέρχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν διαιρετέον, ὡς π. χ. ὅταν διαιρῶ 28 διὰ 4, ὅπου εὑρίσκω 7· διότι 4×7 εἶνε ἀκριβῶς$=28$. Ἐὰν ὅμως πρόκειται νὰ διαιρέσω 35 μονάδας διὰ 4, τὸ πηλίκον δὲν δύναμαι νὰ ἐκφράσω ἀκριβῶς διὰ μονάδων ἀκεραίων· διότι ἐὰν μὲν λάβω 8 μονάδας ὡς τὸ 4ον μέρος, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε μικρότερος τοῦ δέοντος, διότι ὁ 8 λαμβανόμενος 4κις δίδει 32 μόνον, καὶ ἑπομένως ἀπὸ τοῦ 35 περισσεύουσι 3· ἀπ' ἐναντίας ὁ 9 εἶνε μεγαλείτερος τοῦ δέοντος, διότι 4×9 γίνονται 36. Εἰς τὴν τοιαύτην δὲ διαίρεσιν ἐκφράζομαι συνήθως ὡς ἑξῆς· Ἐὰν διαιρέσω 35 διὰ 4, εὑρίσκω πηλίκον 8 καὶ κατάλοιπον 3· τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσω 8 ἐπὶ 4, εὑρίσκω γινόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προςθέσω καὶ τὸ κατάλοιπον 3, ἵνα γείνῃ 35. Τὸ πηλίκον λοιπόν, τὸ ὁποῖον οὕτω λαμβάνω, ὅταν μένῃ κατάλοιπον, δὲν εἶνε ἐντελές. Οὕτω π. χ. ἐὰν διαιρέσω 58 διὰ 6 καὶ εὕρω πηλίκον 9 καὶ κατάλοιπον 4, δὲν δύναμαι νὰ εἴπω, ὅτι ὁ 9 εἶνε τὸ 6ον μέρος τῶν 58 μονάδων· διότι μένουσι καὶ 4 μονάδες ἀδιαίρετοι. Ἐὰν δὲ θέλω νὰ εὕρω ἀκριβῶς τὸ 6ον μέρος, πρέπει νὰ διαιρέσω καὶ τὰς 4 ταύτας μονάδας εἰς 6 ἴσα μέρη, τοῦτο δὲ ἐξηγεῖται εἰς τὸ ἀκόλουθον κεφάλαιον.

§ 16.

Εἰς τὴν διαίρεσιν ὑπάρχουσι δύο κύριαι περιπτώσεις, διότι ὁ διαιρετέος ἐνδέχεται νὰ ἦνε 1) μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου καὶ 2) μεγαλείτερος.

Καὶ ὅταν μὲν ὁ διαιρετέος ἦνε μικρότερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, ὡς ὅταν θέλω νὰ διαιρέσω 487 διὰ 65, τὸ πηλίκον εἶνε μικρότερον τοῦ 10. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου πράττω ὡς εἰς τὸ ἀπέναντι παράδειγμα, ἤγουν βοηθούμενος ἀπὸ τὴν προπαίδειαν πρῶτον ζητῶ τὸ 65ον μέρος τοῦ 487, ἤτοι τὸν

```
65 |487|7
    455
    ---
     32
```

ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 65 δίδει γινόμενον ὡς ἔγγιστα τὸν 487, καὶ εὑρίσκω 7, τὸ ὁποῖον γράφω εἰς τὸ πηλίκον· δεύτερον πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 65 ἐπὶ τὸ πηλίκον 7· καὶ τρίτον τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 455 ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, καὶ εὑρίσκω κατάλοιπον 32.

Ὅταν δὲ ὁ διαιρετέος ἦνε μεγαλείτερος τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου, νοῶ τὸν διαιρετέον χωρισμένον εἰς μέρη μικρότερα μὲν τοῦ δεκαπλασίου τοῦ διαιρέτου ὄχι ὅμως μικρότερα καὶ τοῦ διαιρέτου αὐτοῦ, καὶ διαιρῶ ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ἀρχίζων ἐξ ἀριστερῶν, καὶ γράφω τὰ εὑρισκόμενα ψηφία εἰς τὸ πηλίκον, ὡς φαίνεται εἰς τὰ δύο κατωτέρω παραδείγματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἔχει μονοψήφιον διαιρέτην τὸν 6, τὸ δὲ πολυψήφιον τὸν 234.

```
α'.) 6|38628|6438          β'.) 234|485812|2076
     36                             468
     ——                             ————
      26                            1781
      24                            1638
      ——                            ————
       22                            1432
       18                            1404
       ——                            ————
        48                             28
        48
        ——
         0
```

Εἰς τὸ α' παράδειγμα λέγω, τὸ $6^{ον}$ μέρος τῶν 38 χιλιάδων εἶνε 6 χιλιάδες καὶ κατάλοιπον 2 χιλιάδες, εἰς τὸ κατάλοιπον προσθέτων τὰς 6 ἑκατοντάδας ἔχω 26 ἑκατοντάδας, τὸ $6^{ον}$ τῶν 26 ἑκατοντάδων 4 καὶ κατάλοιπον 2 ἑκατοντάδες, εἰς τὸ κατάλοιπον προσθέτων καὶ τὰς 2 δεκάδας ἔχω 22 δεκάδας, τὸ $6^{ον}$ τῶν 22 δεκάδων 3 καὶ κατάλοιπον 4 δεκάδες, εἰς τὸ κατάλοιπον προσθέτων τὰς 8 μονάδας ἔχω 48 μονάδας, τὸ $6^{ον}$ τῶν 48 μονάδων 6. Λοιπὸν τὸ $6^{ον}$ τοῦ 38628 εἶνε 6438 ἀκριβῶς.

Εἰς τὸ β' παράδειγμα διῄρεσα διὰ 234 πρῶτον τὰς 485 χιλιάδας καὶ εὗρον πηλίκον 2 χιλιάδας καὶ κατάλοιπον 17 χιλιάδας, εἰς τὸ κατάλοιπον προςθέσας τὰς 8 ἑκατοντάδας εὗρον δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 178 ἑκατοντάδας, ὅςτις εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρετέου, καὶ διὰ τοῦτο ἔγραψα εἰς τὸ πηλίκον 0 ἑκατοντάδας, εἰς δὲ τὸ κατάλοιπον 178 ἑκατοντάδας προςθέσας τὴν 1 δεκάδα εὗρον τρίτον μερικὸν διαιρετέον 1781 δεκάδας, τὸν ὁποῖον διαιρέσας εὗρον πηλίκον 7 δεκάδας καὶ κατάλοιπον 143 δεκάδας, εἰς τὸ κατάλοιπον προςθέσας τέλος τὰς 2 μονάδας εὗρον τελευταῖον μερικὸν διαιρετέον 1432 μονάδας, τὸν ὁποῖον διαιρέσας εὗρον πηλίκον 6 μονάδας καὶ κατάλοιπον 28.

Σημ. Εἰς τὴν διαίρεσιν γίνονται αἱ ἑξῆς συντομίαι·

1. Ἐὰν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς ἓν ἢ πολλὰ μηδενικά, ἀποκόπτομεν ταῦτα καὶ ἰσάριθμα ψηφία ἐκ τῶν τελευταίων τοῦ διαιρετέου καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν. Εἰς τὸ τελευταῖον κατάλοιπον ὅμως προςκολλῶμεν καὶ τὰ ἀποκοπέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.— Ἡ ὀρθότης τῆς προτάσεως ταύτης γίνεται εὐκόλως φανερὰ ἐκ τοῦ διττοῦ λογισμοῦ ἑνὸς παραδείγματος ὡς τοῦ ἑξῆς·

2700|583946|216	συντομώτ.	27(00|5839(46|216
5400		54
4394		43
2700		27
16946		169
16200		162
746		746

2. Εἰς τὴν διαίρεσιν διὰ διαιρέτου μονοψηφίου συνειθίζουσι νὰ κάμνωσιν ἐκ μνήμης τοὺς ἀναγκαίους πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις, μὴ γράφοντες τὰ γινόμενα μηδὲ τὰ κατάλοιπα· π. χ.

8 | 59240 | 7405. | Ἢ οὕτω. 8)59240
7405

3. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀναλύηται εἰς μονοψηφίους παράγοντας, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν πρῶτον διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος, τὸ δὲ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ ἄλλου παράγοντος κ. οὕ. ἑ. Ἐὰν π. χ. πρό-

κειται νὰ διαιρέσω 4452 διὰ 84=3. 4. 7, πράττω τοῦτο ὡς ἑξῆς·

4452
3)————
1484
4)————
371
7)————
53

Ὁ ἀριθμὸς 53, τὸν ὁποῖον εὗρον διὰ τῆς πράξεως ταύτης, εἶνε τὸ 84ον μέρος τοῦ 4452.— Διότι, ἐὰν ἀριθμόν τινα διαιρέσω εἰς 3 ἴσα μέρη, καὶ ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων ὑποδιαιρέσω εἰς 4 ἴσα μέρη, εὑρίσκω προφανῶς τὸ 12ον μέρος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲ τὸ 12ον τοῦτο μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ὑποδιαιρέσω εἰς 7 ἴσα μέρη, εὑρίσκω τὸ 84ον μέρος. Ἐὰν ὅμως εἰς τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος μείνῃ κατάλοιπόν τι, τότε δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν τοιαύτην τοῦ διαιρέτου ἀνάλυσιν, πρὶν μάθωμεν πῶς διαιροῦνται κλάσματα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

25) Πόσον εἶνε τὸ 9ον μέρος τῶν 72 ταλ.; β) ποσάκις 9 τάλ. περιέχονται εἰς 72 τάλ.; γ) ποσάκις 7 δραχμαὶ ἀφαιροῦνται ἀπὸ 56 δραχ.;

26) 9 πήχ. στοιχίζουσιν 63 δρ., πόσον στοιχίζει 1 πῆχυς;

27) Πόσας ἑβδομάδας ἔχει ἓν ἔτος ἐκ 365 ἡμερῶν;

28) Διαίρεσον τοὺς ἀριθμοὺς α) 157248, β) 169344, γ) 181440, δ) 205632, ε) 1081584, ζ) 1201536, η) 447552, θ) 520128, ι) 883008, κ) 1028160 δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α) 3, β) 4, γ) 6, δ) 7, ε) 8, ζ) 9 (παραδ. 60).

29) 73 στατ. πραγματείας τινὸς τιμῶνται 12045 δραχ., πόσον τιμᾶται εἷς στατήρ;

30) Διαίρεσον ἕκαστον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν α) 77181001, β) 154362002, γ) 231543003, δ) 540267007, δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α) 37, β) 43, γ) 139, δ) 349.

31) Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἀριθμῇς εἰς ἕκαστον λεπτὸν ἕως 100, καὶ τὴν ἀρίθμησιν ταύτην νὰ ἐξακολουθήσῃς ἡμέραν καὶ νύκτα καθ' ὅλην τὴν ζωήν σου ἀδιακόπως χωρὶς νὰ κοι-

μᾶσαι μηδὲ νὰ λαμβάνῃς ἀναψυχήν, εἰς πόσα ἔτη ἤθελες ἀριθμήσει 1000000000000 ἤτοι ἓν διλλιόνιον ;

Προβλήματα πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν.

32) Γράψον διὰ ψήφων α) τριακοσίας χιλιάδας καὶ 20, β) 2 ἑκατομμύρια 9 χιλιάδας καὶ 26, γ) 8 διλλιόνια 20 ἑκατομμύρια 40 χιλιάδας καὶ 70, δ) 12 ἑκατομμύρια 12 χιλιάδας 12 ἑκατοντάδας καὶ 12.

33) Ἀνάγνωσον α) 10000300, β) 1000300000000001.

34) Τὸ ῥωμαϊκὸν πολίτευμα ἀπὸ τοῦ ἔτους 754 π. Χ. ὅτε ἐκτίσθη ἡ Ῥώμη, μέχρι τοῦ 509 ἦτο βασιλικόν, ἀπὸ τοῦ 509 μέχρι τοῦ 30 π. Χ. ἦτο δημοκρατικόν, ἀπὸ τοῦ 30 π. Χ. μέχρι τῆς καταστροφῆς τοῦ ῥωμαϊκοῦ κράτους τὸ 476 ἦτο αὐτοκρατορία. Πόσα ἔτη τὸ ῥωμαϊκὸν κράτος εἶχε α) βασιλείαν, β) δημοκρατίαν, γ) αὐτοκρατορίαν ; καὶ δ) πόσον διήρκεσεν ;

35) Παραδείγματα, ὁποῖα τὰ ἑφεξῆς, ὑπολογίζονται καὶ ἀπὸ μνήμης εὐκόλως· α) 38+99 (*), β) 79+199, γ) 89+599, δ) 439+97, ε) 548+395, ζ) 897+469, η) 518+689, θ) 784+487, ι) 997+387, κ) 4996+8734.

36) Ἐὰν ἀπὸ 136 ἀφαιρέσω 100, ἔχω ὑπόλοιπον 36. Ἐὰν ὅμως ἀπὸ 136 ἀφαιρέσω 99, τί ὑπόλοιπον ἔχω, 35 ἢ 37;

37) Ἐκτέλεσον ἀπὸ μνήμης τὰς ἑξῆς ἀφαιρέσεις, α) 324—98, β) 783—197, γ) 359—296, δ) 891—694, ε) 2719—999, ζ) 3846—997, η) 4873—2995, θ) 6875—3991.

38) Χωρικὸς πωλεῖ 367 ὀκ. σίτου πρὸς 38 λεπ. 546 ὀκ. κριθῆς πρὸς 27 λεπ. καὶ 149 ὀκ. ἀραβοσίτου πρὸς 18 λεπ. Πόσα χρήματα λαμβάνει δι' ὅλα ;

39) Ἔμπορος ἠγόρασε 4 κομμάτια ὑφασμάτων, ἔχοντα πήχεις 63, 72, 56 καὶ 32, στοιχίζει δὲ ὁ πῆχυς τοῦ πρώ-

(*) Ἀντὶ 99 προσθέτω 100, ἔπειτα ἀφαιρῶ 1.

του 15 δρ. τοῦ δευτέρου 9, τοῦ τρίτου 8 καὶ τοῦ τετάρτου 11. Πόσον ἀξίζουσι τὰ 4 κομμάτια;

40) Ἠγόρασα 7 πήχ. ῥούχου πρὸς 13 δραχ. καὶ ἔδωκα εἰς τὸν ἔμπορον 19 τάλ., πόσον πρέπει νὰ μοῦ ἐπιστρέψῃ;

41) Πόσον ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τὸ 3ον, τὸ 4ον, 5ον, 6ον, 8ον, 9ον, 10ον καὶ 19ον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 232792560;

42) Πολλαπλασίασον ἐκ μνήμης α) 5. 24, β) 25. 32, γ) 125. 56 (*), δ) 5. 48, ε) 5. 56, ζ) 72. 5, η) 5. 37, θ) 25. 8, ι) 25. 36, κ) 25. 65, λ) 125. 24, μ) 125.72, ν) 125. 37, ξ) 125. 59.

43) Ζητεῖται νὰ διαιρέσῃς 380 διὰ 5. Ἐὰν δὲ διαιρέσῃς διὰ 10 ἀντὶ νὰ διαιρέσῃς διὰ 5, τὸ πηλίκον 38 εἶνε δὶς μεγαλείτερον ἢ δὶς μικρότερον τοῦ ζητουμένου;

44) Διαίρεσον συντόμως α) διὰ 5 τοὺς ἀριθμοὺς α) 270. 190, 245, 355, 311, β) διὰ 25 τοὺς ἀριθμοὺς 300,400, 800,1300, 625, 925, 850.

45) Διαίρεσον ἐκ μνήμης α) 396 διὰ 4 (**), β) 95 διὰ 5, γ) 392 : 8, δ) 294: 6, ε) 588 : 6, ζ) 196 : 4, η) 984 : 8. θ) 3976 : 8, ι) 891 : 9, κ) 588 : 12.

46) Πρόσθεσον συντόμως τοὺς 20 πρώτους ἀριθμούς (***).

47) Πολλαπλασίασον ἀπὸ μνήμης α) 25. 9 ἐπὶ 4, β) 237. 125 ἐπὶ 8.

48) Ἐκτέλεσον ἀπὸ μνήμης τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμοὺς α) 25.9.4.11.3, β) 125.25.5.8.2.4, γ) 125×125×125 ×8×8×8.

49) Ὁ ἦχος διατρέχει εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον 1059 πόδας Βιέννης. Πόσον μακρὰν ἀφ' ἡμῶν ἐβρόντησεν, ἐὰν ἀπὸ

(*) Νόησον τὸν 5 ὡς τὸ ἥμισυ τοῦ 10, τὸν 25 ὡς τὸ 4ον τοῦ 100 καὶ τὸν 125 ὡς τὸ 8ον τοῦ 1000, λοιπὸν εἶνε 5.24=10. 12=120, 25. 32=100. 8=800, 125. 56=1000. 7=7000.

(**) Θεωρῶ τὸν 396 ὡς 400—4 κ. τ. ἑ.

(***) Τὰ ἀθροίσματα 1+20, 2+19, 3+18 κ. τ. ἑ. εἶνε ἴσα· λοιπὸν λάβε τὸ ἓν τούτων 10κις.

τῆς ἀστραπῆς μέχρι τῆς βροντῆς παρῆλθον δευτερόλεπτα α) 13, β) 25, γ) 37;

50) Καθ᾽ ἕκαστον λεπτὸν γίνονται σφυγμοὶ εἰς μὲν τὸν ἄνδρα ἕως 75, εἰς δὲ τὸ παιδίον ἕως 85. Ποσάκις ἡ καρδία πάλλει εἰς ἑκάτερον α) εἰς μίαν ὥραν, β) εἰς μίαν ἡμέραν, γ) εἰς ἓν ἔτος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ τῶν κλασμάτων.

Α΄. Τροπαί.

§ 17.

Ἐὰν ζητῆται τὸ πέμπτον μέρος 3 πήχεων, δύναμαι νὰ εὕρω τοῦτο, ἐὰν διαιρέσω πρῶτον ἕνα πῆχυν εἰς πέντε ἴσα μέρη, ἔπειτα, ἐπειδὴ μοῦ εἶνε δεδομένοι 3 πήχ., λάβω τὸ πέμπτον μέρος τρίς. Τὸ πέμπτον μέρος μιᾶς μονάδος γράφεται οὕτω $^1/_5$, καὶ μέρος τοιοῦτον τρὶς λαμβανόμενον λέγεται τρία πέμπτα$=^3/_5$. Οἱ ἀριθμοὶ $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$ κ. τ. ἑ. λέγονται *κλάσματα*. *Κλάσμα λοιπὸν εἶνε πολλοστὸν μέρος μονάδος, εἰλημμένον μίαν ἢ πολλὰς φοράς*. Οὕτω π. χ. τὸ κλάσμα $^5/_9$ (πέντε ἔννατα) ἔγεινεν ἀφοῦ μίαν μονάδα διήρεσα εἰς 9 ἴσα μέρη καὶ ἓν ἐκ τούτων ἔλαβον 5κις.

Πρὸς παράστασιν τοῦ κλάσματος ($^7/_{12}$) μεταχειρίζομαι πάντοτε δύο ἀριθμούς. Ὁ μὲν εἷς τούτων (12) ἐμφαίνει εἰς πόσα μέρη εἶνε διῃρημένη ἡ μονάς, καὶ ὀνομάζεται *παρονομαστής*, διότι παρονομάζει τὸ κλάσμα (δωδέκατα), ὁ δὲ ἕτερος ἀριθμὸς (7) ἐμφαίνει ποσάκις ἓν ἐκ τούτων τῶν μερῶν ἐλήφθη εἰς τὸ κλάσμα, καὶ λέγεται *ἀριθμητής*. Ὁ μὲν ἀριθμητὴς γράφεται ἄνω τῆς γραμμῆς, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὑποκάτω.

§ 18.

Τὸ μέγεθος τοῦ κλάσματος ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ. *Ἐὰν δύο κλάσματα π. χ.* $^5/_8$ *καὶ* $^3/_8$ *ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 8, διαφόρους ὅμως ἀριθμητὰς 5 καὶ 3, προφανῶς μεγαλείτερον εἶνε* ($^5/_8$) *τὸ ἔχον τὸν μεγαλείτερον ἀριθμητὴν* (5)· διότι εἰς τὸ $^5/_8$ ὑπάρχουσι πλειότερα μέρη ἢ εἰς τὸ $^3/_8$.

Λοιπὸν ἐὰν αὐξήσω τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλείτερον, καὶ μάλιστα ὁσάκις μεγαλείτερον κάμω τὸν ἀριθμητήν, τοσάκις μεγαλείτερον γίνεται καὶ τὸ κλάσμα· οὕτω π. χ. τὸ $^6/_8$ εἶνε προφανῶς διπλάσιον τοῦ $^3/_8$, τὸ $^9/_8$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $^3/_8$ κτλ.

Ἐὰν ἐξ ἐναντίας αὐξήσω τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα γίνεται μικρότερον. Ἐὰν π. χ. πρόκειται ἓν μῆλον νὰ μοιρασθῇ εἰς τρεῖς παῖδας, καὶ ἕτερον μῆλον νὰ μοιρασθῇ εἰς τέσσαρας παῖδας, εἰς τὸν πρῶτον μοιρασμὸν λαμβάνει ἕκαστος παῖς μεγαλείτερον μερίδιον ἢ εἰς τὸν δεύτερον, λοιπὸν τὸ $^1/_3$ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ $^1/_4$· *διότι εἰς ὅσον πλειότερα μέρη ἴσα διαιρεῖται ποσόν τι, τόσον μικρότερα γίνονται τὰ μέρη.* Καθὼς δὲ $^1/_3$ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ $^1/_4$, οὕτω καὶ $^2/_3$ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ $^2/_4$ καὶ $^3/_3$ μεγαλείτερον τοῦ $^3/_4$ κ.τ.ἑ. *Λοιπὸν ἐκ δύο κλασμάτων ἐχόντων ἴσον ἀριθμητὴν μεγαλείτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν.* Ἀληθεύει μάλιστα καὶ τὸ ἑξῆς· *Ὁσάκις μεγαλείτερον καταστήσω τὸν παρονομαστήν, τοσάκις μικρότερον γίνεται τὸ κλάσμα.* Οὕτω π. χ. ἐὰν ἓν μῆλον μοιρασθῶσι 3 παῖδες καὶ ἕτερον μῆλον μοιρασθῶσι διπλάσιοι παῖδες, δηλ. 6, ἕκαστος παῖς εἰς τὸν δεύτερον μοιρασμὸν λαμβάνει τὸ ἥμισυ τοῦ εἰς τὸν πρῶτον. Λοιπὸν τὸ $^1/_6$ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ $^1/_3$. Ὁ παρονομαστὴς ὅμως εἰς τὸ $^1/_6$ εἶνε διπλάσιος τοῦ εἰς τὸ $^1/_3$.

§ 19.

Ἐὰν παραβάλω τὸν ἀριθμητὴν πρὸς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, θέλω διακρίνει τρεῖς περιπτώσεις, ἢ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ ὁποῖον εἶνε συνηθέστερον, ὡς εἰς τὰ κλάσματα $^3/_4$, $^5/_8$, $^4/_9$, $^{13}/_{16}$, κ.τ.τ., ἢ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, ὡς εἰς τὰ κλάσματα $^8/_8$, $^{12}/_{12}$, $^{20}/_{20}$, κ. τ. τ., ἢ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλείτερος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς εἰς τὰ κλάσματα $^9/_4$, $^8/_7$, $^{23}/_{18}$ κ.τ.τ. Τὰ μὲν κλάσματα τὰ ἔχοντα ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ ὀνομάζονται *κύρια*, τὰ δὲ ἔχοντα ἀριθμητὴν ἴσον ἢ μεγαλείτερον ὀνομάζονται *καταχρηστικά*.

Καταχρηστικὸν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν ἴσον μὲ τὸν παρονομαστήν, ὡς τὸ $^4/_4$, ἰσοῦται μὲ μίαν ἀκεραίαν μονάδα· διότι ὅλα τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διήρεσα τὴν μονάδα, λαμβανόμενα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι βεβαίως τὴν μονάδα. Ἐκ τούτου συμπεραίνω, ὅτι *πᾶν κλάσμα* ($^8/_8$) *τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, ἰσοῦται μὲ μίαν μονάδα.* Πᾶν δὲ κλάσμα ($^7/_8$) ἔχον ἀριθμητὴν (7) μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ (8) εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, καὶ πᾶν κλάσμα ($^{11}/_8$) ἔχον ἀριθμητὴν (11) μεγαλείτερον τοῦ παρονομαστοῦ (8) εἶνε μεγαλείτερον τῆς μονάδος. Ὁ κανὼν οὗτος ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς· *Τὸ κύριον κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, τὸ δὲ καταχρηστικὸν εἶνε ἴσον ἢ μεγαλείτερον τῆς μονάδος.*

§ 20.

Ἐπειδὴ μίαν μονάδα δύναμαι νὰ ἐκφράσω ὡς κλάσμα (π. χ. $1 = ^8/_8$), εἶνε δυνατὸν νὰ πράξω τοῦτο καὶ εἰς πολλὰς μονάδας. Οὕτω π. χ. 3 μονάδες εἶνε $= ^{24}/_8$· διότι, ἐπειδὴ μία μονὰς ἔχει 8 ὄγδοα, εἶνε προφανές, ὅτι 3 μονάδες ἔχουσι 3 φορὰς 8 ὄγδοα $=$ 24 ὄγδοα. Ἐκ τούτου πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα· *Τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν (3) δύναμαι πάντοτε νὰ τρέπω εἰς κλάσμα ($^{24}/_8$) ἔχον παρονομαστὴν δεδομένον (8)· εὑρίσκω δὲ τοῦ κλάσματος τούτου τὸν ἀριθμητὴν (24), ἐὰν πολλαπλασιάζω τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν (3) ἐπὶ τὸν δεδομένον παρονομαστὴν (8).*

§ 21.

Δύναμαι προσέτι καὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν μετὰ κλάσματος, π. χ. 5 μονάδας καὶ $^3/_4$, νὰ τρέπω εἰς ἓν κλάσμα. Διότι 5 μονάδες εἶνε (κατὰ τὴν ἀνωτέρω §) $^{20}/_4$ καὶ $^3/_4$ ὁμοῦ γίνονται $^{23}/_4$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα (5 $^3/_4$) τὸ συγκείμενον ἐξ ἀκεραίου (5) καὶ κλάσματος ($^3/_4$) ὀνομάζεται *μικτὸς ἀριθμός*, γίνεται ὁ ἑξῆς κανών· *Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς (5 $^3/_4$) δύναται νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα $^{23}/_4$ ἔχον παρονομαστὴν (4) τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος ($^3/_4$)· εὑρίσκω δὲ τὸν ἀριθμητὴν (23) τοῦ ζητουμένου κλάσματος, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν ἀκέραιον (5) ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν (4) τοῦ δεδομένου κλάσματος (4×5=20), καὶ εἰς τὸ γινόμενον (20) προςθέσω τὸν ἀριθμητὴν (3) τοῦ δεδομένου κλάσματος (20+3=23).*

§ 22.

Καὶ ἀντιστρόφως, δύναμαι ἀντὶ καταχρηστικοῦ κλάσματος νὰ θέσω μικτὸν ἀριθμόν, π. χ. $^{23}/_4$=5 $^3/_4$. Τοῦτο δὲ πράττω κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα· *Ὅταν πρόκειται νὰ τρέψω καταχρηστικὸν κλάσμα ($^{23}/_4$) εἰς μικτὸν ἀριθμὸν (5 $^3/_4$), διαιρῶ τὸν ἀριθμητὴν (23) διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (4), καὶ τὸ μὲν πηλίκον (5) δεικνύει τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ κατάλοιπον (3) εἶνε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ προςθετέου κλάσματος*· παρονομαστὴν δὲ ἔχει τὸ κλάσμα τοῦτο τὸν τοῦ δεδομένου κλάσματος. — Ἐὰν δὲ μείνῃ κατάλοιπον μηδέν, τὸ κλάσμα ἔχει μόνον ἀκεραίας μονάδας (π. χ. $^{36}/_9$=4 μονάδες).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ὁ πῆχυς διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη α) 2, β) 4, γ) 8, δ) 16, πῶς ὀνομάζεται ἕκαστον μέρος; καὶ πόσον εἶνε μεγαλείτερον ἑκάστου ἑπομένου;

2) Ἐὰν ὁ πῆχυς ἦνε διῃρημένος εἰς 12 ἴσα μέρη, πῶς ὀνομάζονται α) 2, β) 3, γ) 5, δ) 7 τοιαῦτα μέρη;

3) Τί κλάσμα δραχμῆς εἶνε α) 1 λεπτόν, β) 5 λεπ. γ) 25 λεπ. δ) 37 λεπ.; Τί κλάσμα ὀκᾶς εἶνε ε) 200 δράμ. ς) 250 δράμ. ζ) 353 δράμ.;

4) Πόσον εἶνε $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$ $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{10}$, $^{1}/_{12}$, $^{1}/_{15}$, $^{1}/_{20}$, $^{1}/_{30}$ ὥρας ἐκπεφρασμένον εἰς λεπτά;

5) Πόσα λεπτὰ ἔχουσι $^{3}/_{4}$ δραχμῆς, $^{3}/_{5}$, $^{7}/_{10}$, $^{13}/_{20}$, $^{47}/_{50}$, $^{73}/_{100}$;

6) 5 ἄνθρωποι θέλουσι νὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 3 μῆλα, πόσον κλάσμα τοῦ μήλου θὰ λάβῃ ἕκαστος;

7) Πόσον εἶνε α) τὸ ἕβδομον μέρος 5 πήχεων, β) τὸ ἔνατον 12 δραχμῶν;

8) Πόσα τέταρτα ἔχουσιν 88 μονάδες, 216, 7518;

9) Πόσα 34$^{\text{τα}}$ ἔχουσι 38 μονάδες, 49,506;

10) Τρέψον εἰς κλάσματα τοὺς ἀκολούθους μικτοὺς ἀριθμούς· α′) 85 $^{3}/_{4}$, β′) 27 $^{5}/_{8}$, γ′) 93 $^{5}/_{12}$, δ′) 318 $^{9}/_{10}$, ε′) 44 $^{7}/_{16}$, ς′) 326 $^{9}/_{11}$, ζ′) 414 $^{3}/_{17}$, η′) 28 $^{39}/_{84}$, θ′) 744 $^{4}/_{15}$, ι′) 8 $^{19}/_{128}$, ια′) 12 $^{13}/_{20}$, ιβ′) 45 $^{1}/_{77}$, ιγ′) 900 $^{4}/_{73}$, ιδ′) 814 $^{7}/_{24}$, ιε′) 50 $^{31}/_{67}$, ις′) 47 $^{229}/_{360}$.

11) Πόσαι μονάδες ἀκέραιαι ἐμπεριέχονται εἰς τὰ ἀκόλουθα κλάσματα· α′) $^{1728}/_{4}$, β′) $^{3516}/_{6}$, γ′) $^{984}/_{12}$, δ′) $^{1892}/_{22}$, ε′) $^{1428}/_{34}$, ς′) $^{966}/_{23}$, ζ′) $^{3468}/_{72}$, η′) $^{7968}/_{96}$, θ′) $^{7208}/_{342}$, ι′) $^{12096}/_{432}$;

12) Πόσας μονάδας καὶ μέρη μονάδος ἐμπεριέχουσι τὰ ἀκόλουθα κλάσματα· α′) $^{73}/_{4}$, β′) $^{97}/_{6}$, γ′) $^{347}/_{8}$, δ′) $^{918}/_{24}$, ε′) $^{5449}/_{36}$, ς′) $^{7318}/_{43}$, ζ′) $^{5081}/_{54}$, η′) $^{7397}/_{80}$, θ′) $^{12396}/_{125}$, ι′) $^{99345}/_{434}$, ια′) $^{3149}/_{777}$, ιβ′) $^{536725}/_{3586}$;

§ 23.

Καθὼς μία μονὰς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κλάσμα κατὰ πολλοὺς τρόπους, π. χ. $1 = {}^{4}/_{4} = {}^{7}/_{7} = {}^{15}/_{15}$ κ. τ. ἑ., οὕτω δύναμαι καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μονάδος νὰ ἐκφράσω κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ἐὰν π. χ. διαιρέσω τὴν μονάδα εἰς 4 ἴσα μέρη, ἔχω τέταρτα, καὶ ἐὰν ἕκαστον τέταρτον ὑποδιαιρέσω εἰς 5 ἴσα μέρη, διαιρεῖται προφανῶς ἡ μονὰς εἰς 20 ἴσα μέρη, καὶ ἑπομένως ἔχω εἰκοστά. Εἰς 1 δὲ τέταρτον ἀνήκουσι 5 εἰκοστά, λοιπὸν εἶνε $^{1}/_{4} = {}^{5}/_{20}$, ἑπομένως εἶνε καὶ $^{3}/_{4} = {}^{15}/_{20}$.

ὁμοίως εἶνε καὶ $^3/_8 = ^{12}/_{32}$· διότι, ἐὰν μίαν μονάδα διαιρέσω πρῶτον εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ὄγδοον ὑποδιαιρέσω εἰς 4 ἴσα μέρη, ἡ ὅλη μονὰς διαιρεῖται εἰς 32 ἴσα μέρη· εἰς $^1/_8$ ἀνήκουσι $^4/_{32}$, ἑπομένως εἶνε $^3/_8 = ^{12}/_{32}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκω, ὅτι εἶνε π. χ.

$$\frac{5}{6} = \frac{4 \times 5}{4 \times 6} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 9} = \frac{12}{27}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{5 \times 1}{5 \times 7} = \frac{5}{35} \text{ κ. τ. τ.}$$

Συνάγεται δὲ ἐκ τούτου ὁ ἑξῆς κανών· *Τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν πολλαπλασιάσω ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.* Τότε δὲ λέγω ὅτι *ἐκτείνω τὸ κλάσμα.*

Καθὼς δὲ δύναμαι ἀντὶ $^3/_8$ νὰ θέσω $^{12}/_{32}$, οὕτω δύναμαι βεβαίως καὶ ἀντὶ $^{12}/_{32}$ νὰ θέσω ἐπίσης $^3/_8$. Ὅθεν ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει καὶ ἀντιστρόφως· *Τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν διαιρέσω ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.* Τότε δὲ λέγω ὅτι *ἁπλοποιῶ τὸ κλάσμα.* Οὕτω π. χ. $^{12}/_{16}$ ἁπλοποιούμενον διὰ 4 εἶνε $= ^3/_4$, $^{28}/_{35}$ ἁπλοποιούμενον διὰ 7 εἶνε $= ^3/_5$ κ. τ. ἑ.

§ 24.

Ἐὰν δέ τις ἐρωτήσῃ, διὰ τίνα λόγον τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλεται, ὅταν πολλαπλασιάσω ἢ διαιρέσω ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, δύναμαι νὰ δώσω καὶ τὴν ἑξῆς ἀπόκρισιν·— Ἐὰν τοῦ κλάσματος π. χ. $^5/_7$ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 3, εὑρίσκω $^{15}/_7$, καὶ τὸ κλάσμα γίνεται (κατὰ § 18) τρὶς μεγαλείτερον· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσω καὶ τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ 3, εὑρίσκω $^{15}/_{21}$. Τώρα τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶχε γείνει τρὶς μεγαλείτερον, ἔγεινε καὶ τρὶς μικρότερον, διότι τὸ $^{1}/_{21}$ εἶνε (κατὰ § 18) τρὶς μικρότερον τοῦ $^{1}/_{7}$. Ἐκ τούτου λοιπὸν γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ κλάσμα δὲν μετεβλήθη κατὰ τὴν ἀξίαν, διότι κατέστησα αὐτὸ πρῶτον τρὶς μεγαλείτερον καὶ ἔπειτα τρὶς μικρότερον. — Ἐὰν δὲ τοῦ κλάσματος π. χ. $^{15}/_{18}$ διαιρέσω τὸν ἀριθμητὴν διὰ 3, εὑρίσκω $^{5}/_{18}$ τρὶς μικρότερον, καὶ ἐὰν διαιρέσω καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ 3, εὑρίσκω $^{5}/_{6}$ τρὶς μεγαλείτερον, (διότι τὸ $^{1}/_{6}$ ἔχει $^{3}/_{18}$)· λοιπὸν προφανῶς ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος ἔμεινε πάλιν ἡ αὐτή.

§ 25.

Ὅ,τι παρετήρησα ἐπὶ τοῦ κλάσματος, δύναμαι νὰ ἐφαρμόσω καὶ εἰς παραδείγματα ἐν γένει διαιρέσεως. Ἐὰν πρόκειται νὰ διαιρέσω π. χ. 770 διὰ 55, εὑρίσκω (κατὰ § 17) πηλίκον $^{770}/_{55}$, τοῦτο δὲ ἁπλοποιούμενον διὰ 11 γίνεται $^{70}/_{5}=14$. Ἐκ τούτου πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα (ὅστις εἰς τὰ ἐφεξῆς κεφάλαια εἶνε πολὺ σπουδαῖος)· Ὅταν πρόκειται νὰ διαιρέσω δύο ἀριθμοὺς (770 καὶ 55) τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, εὑρίσκω τὸ ἀληθὲς πηλίκον καὶ ἐὰν ἀμφοτέρους τοὺς ἀριθμοὺς τούτους (770 καὶ 55) διαιρέσω πρότερον διὰ τρίτου τινὸς ἀριθμοῦ (11), ἤτοι τὸ *πηλίκον* (770 : 55) *δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσω καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ* (11), (*λοιπὸν* 770 : 55 = 70 : 5) — Ἐπίσης εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ *πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*. Οὕτω δύναμαι π. χ. ἀντὶ 20 : 5 νὰ θέσω καὶ 40 : 10 καὶ 60 : 15, ὅπου εὑρίσκω πάντοτε πηλίκον 4· διότι, ἐπειδὴ ὁ 5 εἰσέρχεται 4κις εἰς 20, πρέπει νὰ εἰσέρχηται ἐπίσης 4κις καὶ ὁ 5×2 εἰς τὸν 20×2 καὶ ὁ 5×3 εἰς τὸν 20×3 κ. τ. ἑ.

§ 26.

Ἵνα ἁπλοποιήσω κλάσμα τι, χρειάζεται πρῶτον νὰ εὕρω τίς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστήν, ἤτοι τίς εἶνε κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο δέ μοὶ χρησιμεύουσιν οἱ ἑξῆς κανόνες·

1) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 2, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον διαιρῆται διὰ 2 (ἐὰν δηλ. ἦνε 0, 2, 4, 6, 8).

2) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4. Οὕτω π.χ. ὁ 7536 διαιρεῖται διὰ 4, διότι ὁ 36 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4.

3) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 8, ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8. Οὕτω π.χ. ὁ 395256 διαιρεῖται διὰ 8, διότι ὁ 256 διαιρεῖται διὰ 8.

4) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 5, ἐὰν λήγῃ εἰς 5 ἢ εἰς 0. Οὕτω π. χ. ὁ 2975 διαιρεῖται διὰ 5, ὡς λήγων εἰς 5.

5) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 25, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 25, ἤτοι ἐὰν λήγῃ εἰς 25, 50 ἢ 75.

6) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 125, ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 125.

7) Ὅταν θέλω νὰ μάθω, ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 3 ἢ διὰ 9, συναθροίζω τὰ ψηφία αὐτοῦ, καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιρῆται διὰ 3 ἢ διὰ 9, συμπεραίνω, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς διαιρεῖται διὰ 3 ἢ διὰ 9. Ἐὰν π. χ. ἦνε δεδομένος ὁ 7428, λέγω, 7, 4, 2 καὶ 8 ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 21, ὁ 3 διαιρεῖ τὸ 21, λοιπὸν ὁ 3 πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 7428· ἐξ ἐναντίας ὁ 9 δὲν διαιρεῖ τὸ 21, λοιπὸν δὲν διαιρεῖ καὶ τὸν 7428. — Ἔστω προσέτι ὁ 5364· ἐνταῦθα εἶνε $5+3+6+4=18$, καὶ ἐπειδὴ ὁ 9 διαιρεῖ τὸ 18, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 5364. (Πᾶς δὲ ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 9, διαιρεῖται βεβαίως καὶ διὰ 3).

Σημ. Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω κανόνων εἶνε αἱ ἑξῆς·

1. Ὁ ἀριθμὸς 476 διαιρεῖται διὰ 2, διότι ὁ 2 διαιρεῖ τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ 6. Διότι ὁ ἀριθμὸς 476 εἶνε $=470+6=47\times10+6$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 10, ἑπομένως καὶ τὸν $47\times10=470$ καὶ τὸν 6, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $470+6=476$.

2. Ὁ ἀριθμὸς 7536 εἶνε$=7500+36=75\times100+36$. Λοιπὸν ὁ 4, ἐπειδὴ διαιρεῖ τὸν 100, ἐπομένως καὶ τὸν $75\times100=7500$ καὶ τὸν 36, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $7500+36=7536$.

3. Ὁ ἀριθμὸς 395256 εἶνε$=395000+256=395\times1000+256$. Λοιπὸν ὁ 8, ἐπειδὴ διαιρεῖ τὸν 1000, ἐπομένως καὶ τὸν $395\times1000=395000$ καὶ τὸν 256, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $395000+256=395256$.

4—6. Ὁ ἀριθμὸς 3975 εἶνε$=397\times10+5$, κτλ.

7. Ὁ ἀριθμὸς 7428 εἶνε$=7\times1000+4\times100+2\times10+8=7\times999+7+4\times99+4+2\times9+2+8=7\times999+4\times99+2\times9+7+4+2+8$. Ἤδη ὁ 3 διαιρεῖ τὸν 7×999 καὶ τὸν 4×99 καὶ τὸν 2×9, καὶ ἐπειδὴ διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα $7+4+2+8=21$, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὅλον ἄθροισμα, δηλ. τὸν 7428.

§ 27.

Ἐνδέχεται ὅμως τὸ κλάσμα νὰ ἁπλοποιῆται καὶ διὰ 7, 11, 13, 17 κ. ἄ. τ. ἀριθμῶν, περὶ τῶν ὁποίων δὲν ἔχομεν ἁρμοδίους κανόνας. Ἵνα δὲ εὕρω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $^{391}/_{897}$, μεταχειρίζομαι τὸν ἑξῆς ὑπολογισμόν·

$$
\begin{array}{rrrrrr}
391 & 897 & 2 & & & \\
 & 782 & & & & \\
\hline
 & 115 & 391 & 3 & & \\
 & & 345 & & & \\
\hline
 & & 46 & 115 & 2 & \\
 & & & 92 & & \\
\hline
 & & & 23 & 46 & 2 \\
 & & & & 46 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Ἐνταῦθα διήρεσα πρῶτον τὸν μεγαλείτερον 897 διὰ τοῦ μικροτέρου 391, ἔπειτα τὸν μικρότερον 391 διὰ τοῦ καταλοίπου 115, ἔπειτα τὸ κατάλοιπον 115 διὰ τοῦ δευτέρου καταλοίπου 46, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, μέχρις οὗ εὗρον κατάλοιπον μηδέν. Ὁ δὲ τελευταῖος διαιρέτης 23 διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστήν.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad 23 \quad}} \\ 391 & 17 \\ \hline 897 & 39 \end{array}$$

Ὁ ἀριθμὸς (23), τὸν ὁποῖον εὑρίσκω διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως, εἶνε πάντοτε ὁ μέγιστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν ἁπλοποιεῖται τὸ κλάσμα, καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζεται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*. Ὅθεν, ἐὰν δι' αὐτοῦ διαιρέσω ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν, τὸ κλάσμα γίνεται ἁπλούστατον.

Σημ. ά. Ὅτι ὁ τελευταῖος διαιρέτης 23—ὅςτις δίδει κατάλοιπον μηδὲν—διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἀριθμητὴν 391 καὶ τὸν παρονομαστὴν 897, ἀποδεικνύεται ὡς ἐφεξῆς· Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὑπολογισμὸν ὁ 23 διαιρεῖ πρῶτον τὸν 46, λοιπὸν καὶ τὸν $2 \times 46 = 92$, ἑπομένως καὶ τὸν $115 = 92 + 23$. Ὅθεν πρέπει ὁ 23 νὰ διαιρῇ καὶ τὸν $3 \times 115 = 345$, ἑπομένως καὶ τὸν $345 + 46 = 391$, διότι ὁ 23 διαιρεῖ καὶ τὸν 345 καὶ τὸν 46· τέλος πρέπει ὁ 23 νὰ διαιρῇ καὶ τὸν $2 \times 391 = 782$· ἑπομένως καὶ τὸν $782 + 115 = 897$, διότι ὁ 23 διαιρεῖ καὶ τὸν 782 καὶ τὸν 115. Λοιπὸν ὁ 23 διαιρεῖ τὸν 391 καὶ τὸν 897.

Προςέτι οὐδεὶς μεγαλείτερος ἀριθμὸς ὑπάρχει ἔχων τὴν ἰδιότητα ταύτην· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτός τις ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν 391 καὶ τὸν 897, τότε πρέπει οὗτος νὰ διαιρῇ καὶ τὸν $2 \times 391 = 782$, ἑπομένως καὶ τὸν $897 - 782 = 115$· προςέτι πρέπει ὁ ἀριθμὸς οὗτος να διαιρῇ καὶ τὸν $3 \times 115 = 345$, ἑπομένως καὶ τὸν $391 - 345 = 46$· ὅθεν πρέπει οὗτος νὰ διαιρῇ τέλος καὶ τὸν $2 \times 46 = 92$ καὶ τὸν $115 - 92 = 23$. Ἀλλὰ τὸν 23 αὐτὸν οὐδεὶς μεγαλείτερος τοῦ 23 ἀριθμὸς διαιρεῖ. Ὅθεν οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει μεγαλείτερος τοῦ 23 διαιρῶν τὸν 391 καὶ 897.

Σημ. β'. Ὅταν δὲ διὰ τῆς ἐργασίας ταύτης φθάνωμεν εἰς κατάλοιπον 1, τοῦτο εἶνε σημεῖον, ὅτι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἔχουσι τὴν μονάδα καὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ἀσυνδιαίρετοι. Πᾶν δὲ κλάσμα ἔχον τοὺς ὅρους ἀσυνδιαιρέτους δὲν γίνεται ἁπλούστερον.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

13) Ἁπλοποίησον διὰ 2, 3 ἢ 5 τὰ ἑξῆς κλάσματα· ά) $66/128$, β') $48/120$, γ') $128/144$, δ') $54/150$, έ) $25/160$, ς') $75/180$, ζ') $125/200$, η') $128/136$, θ') $54/246$, ί) $105/225$, ιά) $72/240$, ιβ')

$^{144}/_{248}$, ιγ') $^{160}/_{256}$, ιδ') $^{176}/_{264}$, ιέ) $^{225}/_{270}$, ις') $^{192}/_{288}$, ιζ') $^{7}/_{300}$, ιή) $^{324}/_{405}$, ιθ') $^{405}/_{540}$.

14) Ἁπλοποίησον διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τὰ ἑξῆς κλάσματα· ά) $^{91}/_{104}$, 6') $^{105}/_{441}$, γ') $^{212}/_{371}$, δ') $^{143}/_{169}$, έ) $^{117}/_{189}$, ϛ') $^{126}/_{147}$, ζ') $^{1113}/_{1643}$, ή) $^{975}/_{24609}$.

§ 28.

Πολλάκις χρειάζεται καὶ νὰ ἐκτείνω τὸ κλάσμα. Πράττω δὲ τοῦτο μάλιστα, ὅταν θέλω νὰ τρέψω κλάσμα τι εἰς ἄλλο ἔχον μεγαλείτερον παρονομαστήν. Ἤγουν, καθὼς δύναμαι νὰ ζητήσω, πόσας δραχμὰς ἔχει ἓν τάληρον; — οὕτω δύναμαι νὰ ζητήσω καὶ πόσα δωδέκατα ἔχει τὸ $^{1}/_{4}$ πήχεως; Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $^{1}/_{4}={}^{3}/_{12}$, εἶνε καὶ $^{3}/_{4}={}^{9}/_{12}$.

Ὁμοίως πράττω, ὅταν θέλω νὰ τρέψω π. χ. $^{7}/_{8}$ εἰς $24^{\text{τα}}$, λέγων, $^{1}/_{8}$ εἶνε$={}^{3}/_{24}$, λοιπὸν $^{7}/_{8}={}^{21}/_{24}$.—Ἐκ τούτων πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα· *Ὅταν θέλω νὰ τρέψω κλάσμα τι ($^{7}/_{8}$) εἰς μεγαλείτερον παρονομαστὴν (24), εὑρίσκω τὸν νέον ἀριθμητὴν διαιρῶν τὸν νέον παρονομαστὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δεδομένου κλάσματος (24 : 8=3) καὶ πολλαπλασιάζων ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος (3×7=21).*

Ἀλλ' ὅταν θέλω νὰ τρέψω κλάσμα τι εἰς ἄλλον τινὰ παρονομαστήν, πρέπει αὐτὸς ὄχι μόνον νὰ ἦνε μεγαλείτερος, ἀλλὰ καὶ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου παρανομαστοῦ. Οὕτω π. χ. τὰ $4^{\text{τα}}$ τρέπονται εἰς $8^{\text{α}}$, $12^{\text{τα}}$, $16^{\text{τα}}$, $20^{\text{τά}}$, ὄχι ὅμως καὶ εἰς $13^{\text{τα}}$, $14^{\text{τα}}$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

15) Πόσα $24^{\text{τα}}$ ἔχουσιν $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{12}$, $^{5}/_{8}$, $^{7}/_{12}$;

16) Πόσα $432^{\text{α}}$ ἔχει $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{18}$, $^{1}/_{27}$, $^{1}/_{48}$, $^{1}/_{144}$;

17) Πόσα $792^{\text{α}}$ ἔχει $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{9}$, $^{1}/_{12}$, $^{1}/_{22}$, $^{1}/_{33}$, $^{1}/_{132}$;

18) Πόσα 144^{τα} ἔχουσι $^5/_8$, $^7/_9$, $^{11}/_{12}$, $^5/_{16}$, $^{13}/_{24}$, $^{29}/_{36}$;
19) Πόσα 216^{τα} ἔχουσι $^5/_6$, $^4/_9$, $^7/_{18}$, $^{11}/_{37}$, $^{17}/_{36}$, $^{53}/_{54}$;
20) Πόσα 360^{στα} ἔχουσιν $^7/_8$, $^5/_{12}$, $^{11}/_{15}$, $^{19}/_{24}$, $^{22}/_{45}$, $^{49}/_{72}$;
21) Πόσα 1296^{τα} ἔχουσιν $^9/_{16}$, $^{13}/_{24}$, $^{25}/_{27}$, $^{31}/_{36}$, $^7/_{48}$;

Β΄. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

§ 29.

Ἐὰν προςθέσω $^3/_{11}$ καὶ $^5/_{11}$, εὑρίσκω προφανῶς ἄθροισμα $^8/_{11}$. Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνω τὸ ἑξῆς· *Ὅταν θέλω νὰ προςθέσω δύο κλάσματα ($^3/_{11}$ καὶ $^5/_{11}$) ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν* (11), *πρέπει νὰ προςθέτω μόνον τοὺς ἀριθμητὰς* (3 *καὶ* 5).

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς π. χ. $^2/_3$, $^1/_6$ *καὶ* $^5/_8$, *τότε πρέπει νὰ τρέψω πρῶτον αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.* Ἐνταῦθα βλέπω ἀμέσως, ὅτι τὰ 3^{τα}, 6^{τα} καὶ 8^α τρέπονται ὅλα εἰς 24^{τα}, λοιπὸν εἶνε κατὰ § 18

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$$
$$\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$$

Λοιπὸν $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{16+4+15}{24}=\dfrac{35}{24}=1\dfrac{11}{24}.$

Ὁ νέος παρονομαστὴς (24), εἰς τὸν ὁποῖον τρέπομεν τὰ δεδομένα κλάσματα ($^2/_3$, $^1/_6$, $^5/_8$), ὀνομάζεται *κοινὸς παρονομαστής*, καί, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην §, πρέπει νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν δεδομένων παρονομαστῶν (3, 6, 8). Τοιοῦτος δὲ ἀριθμὸς εὑρίσκεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εὐκολώτατα. Ὅταν δὲ δὲν δύναμαι νὰ εὕρω κανένα ἄλλον τοιοῦτον ἀριθμόν, λαμβάνω ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων· διότι καὶ αὐτὸ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ. Εἰς τὴν περίστασιν δὲ ταύτην τρέπω τὰ κλάσματα *εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζων ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.*

Ἐὰν π. χ. δοθῶσι τὰ κλάσματα $^2/_3$, $^4/_5$, $^2/_7$, $^1/_2$, τὰ τρέπω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζων τοὺς δύο ὅρους τοῦ μὲν $^2/_3$ ἐπὶ τὸ γινόμενον $5\times7\times2=70$, καὶ ἔχω $^{140}/_{210}$, τοῦ δὲ $^4/_5$ ἐπὶ τὸ $3\times7\times2=42$ καὶ ἔχω $^{168}/_{210}$, τοῦ δὲ $^2/_7$ ἐπὶ τὸ $3\times5\times2=30$, καὶ ἔχω $^{60}/_{210}$ καὶ τοὺς τοῦ $^1/_2$ ἐπὶ τὸ $3\times5\times7=105$ καὶ ἔχω $^{105}/_{210}$.

Σημ. Ἐπὶ δὲ τὸ πρακτικώτερον ἡ ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἡ πρόσθεσις ἐκτελεῖται εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα ὡς ἑξῆς·

	24		
$^2/_3$	8	16	
$^1/_6$	4	4	
$^5/_8$	3	15	
	24	35	$1\ ^{11}/_{24}$
		24	
		11	

	210		
$^2/_3$	70	140	
$^4/_5$	42	168	
$^2/_7$	30	60	
$^1/_2$	105	105	
	210	473	$2\ ^{53}/_{210}$
		53	

Ὁμοίως ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις καὶ εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

	48	
$^{7}/_{16}$	3	21
$^{13}/_{24}$	2	26
		$^{47}/_{48}$

	30		
$^{5}/_{6}$	5	25	
$^{2}/_{3}$	10	20	
$^{4}/_{5}$	6	24	
	30	69	$2^{3}/_{10}$
		60	
		9	3
		30	10

	72		
$^{5}/_{8}$	9	45	
$^{1}/_{12}$	6	6	
$^{4}/_{9}$	8	32	
$^{7}/_{72}$	1	7	
	72	90	$1^{1}/_{4}$
		72	
		18	1
		72	4

§ 30.

Ἵνα δὲ εὕρω τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, ὅστις εἶνε χρησιμώτατος εἰς τὸν περαιτέρω ὑπολογισμόν, μεταχειρίζομαι τὴν ἑξῆς μέθοδον·

Γράφω τοὺς παρονομαστὰς κατὰ σειρὰν ὁριζόντιον, καὶ ὑπάγω γραμμὴν ὁριζόντιον, διαγράφω τοὺς παρονομαστάς, ὅσοι διαιροῦσιν ἀκριβῶς ἄλλον τινά· ἔπειτα, ἂν ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρῇ δύο ἢ πλειοτέρους παρονομαστάς, διαιρῶ τούτους διὰ 2, καὶ γράφω κατὰ σειρὰν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ τὰ πηλίκα, καὶ τοὺς παρονομαστὰς τοὺς μὴ διαιρουμένους διὰ 2· πράττω καὶ εἰς τὴν σειρὰν ταύτην ὅ,τι ἔπραξα εἰς τὴν προηγουμένην, τὸ αὐτὸ πράττω καὶ εἰς τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, μέχρις οὗ εὕρω ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὑπάρχωσι μηδὲ δύο διαιρούμενοι ἀκριβῶς διὰ 2. Ἔπειτα πράττω διὰ τοῦ 3 ὅ,τι ἔπραξα διὰ τοῦ 2, ἔπειτα διὰ τοῦ 5, 7 κ. ἑ., μέχρις οὗ τέλος εὕρω σειρὰν ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν νὰ μὴ εὑρίσκωνται μηδὲ δύο διαιρούμενοι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους καὶ ὅλους τοὺς διαιρέτας πολλαπλασιάζω ἐπ' ἀλλήλους· καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον εἶνε ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

Παράδ. ά. Οἱ παρονομασταὶ ἔστωσαν 12, 16, 24, 15.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12, & 16, & 24, & 15 \\ \hline 2) & & 8, & 12, & 15 \\ \hline 2) & & 4, & 6, & 15 \\ \hline 2) & & 2, & 3, & 15 \end{array}$$

$$2\times2\times2\times2\times15=240.$$

Παράδ. β΄. Οἱ δεδομένοι παρονομασταὶ ἔστωσαν 3, 4, 10, 12, 27, 35, 45.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 3, & 4, & 10, & 12, & 27, & 35, & 45 \\ \hline 2) & & & 5, & 6, & 27, & 35, & 45 \\ \hline 3) & & & & 2, & 9, & 35, & 15 \\ \hline 3) & & & & 2, & 3, & 35, & 5 \end{array}$$

$$2\times3\times3\times2\times3\times35=3780.$$

Σημ. α΄. Ἵνα γείνῃ φανερὰ ἡ ὀρθότης τῆς πράξεως ταύτης, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὁ ἀκόλουθος συλλογισμός, εἰς τὸν ὁποῖον θέλω μεταχειρισθῇ ὡς βάσιν τὸ τελευταῖον παράδειγμα· Ὅτι δύναμαι πρῶτον νὰ παραλείψω τοὺς παρονομαστάς, ὅσοι διαιροῦσιν ἀκριβῶς ἄλλους, εἶνε αὐτόδηλον. Μένει λοιπὸν νὰ ἐργασθῶ μόνον ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 10, 12, 27, 35, 45. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $10=2\times5$ καὶ $12=2\times6$, θέλω φθάσει εἰς τὸν σκοπόν μου, ἐὰν ζητήσω ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ 5, 6, 27, 35, 45, καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάσω ἐπὶ 2, ἵνα διαιρῆται καὶ διὰ 2×5 καὶ διὰ 2×6. Μένει λοιπὸν ἤδη νὰ ἐργασθῶ ἐπὶ μόνων τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς 5, 6, 27, 35, 45· ἀλλ' ὁ 5 δύναται νὰ παραλειφθῇ, ὡς διαιρῶν τὸν 45· ὁ δὲ 6, 27 καὶ 45 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 3· εἶνε λοιπὸν $6=3\times2, 27=3\times9$ καὶ $45=3\times15$· τότε ζητῶ ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ 2, 9, 35 καὶ 15· καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3, ἵνα διαιρῆται καὶ διὰ $3\times2=6$, $3\times9=27$ καὶ $3\times15=45$· Ἐργάζομαι λοιπὸν ἤδη μόνον, ἵνα εὕρω ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης σειρᾶς 2, 9, 35, 15. Ἐπειδὴ πάλιν ὁ 3 εἶνε παράγων τοῦ 9 καὶ 15, ἔχω $9=3\times3$ καὶ $15=3\times5$· ὅθεν ζητῶ ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ 2, 3, 35 καὶ 5, καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3, καὶ οὕτω θέλει διαιρεῖσθαι καὶ διὰ $9=3\times3$ καὶ διὰ $15=3\times5$. Τὸν δὲ ἤδη ζητούμενον ἀριθμὸν εὑρίσκω, ἂν παραλείψω τὸν 5, ὅστις διαιρεῖ τὸν 35, καὶ πολλαπλασιάσω τοὺς

2, 3, 35, οἵτινες οὐδένα πλέον ἔχουσι κοινὸν παράγοντα. Τὸ γινόμενον τοῦτο $2\times3\times35=210$ διαιρεῖται προφανῶς διὰ τῶν ἀριθμῶν τῆς τετάρτης σειρᾶς· πολλαπλασιάζω τὸν ἀριθμὸν 210 ἐπὶ 3, οὕτω πρέπει τὸ γινόμενον $3\times210=630$, ὡς ἤδη ἐδείχθη, νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης σειρᾶς· καὶ ἐὰν ἔτι πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, τὸ γινόμενον $3\times630=1890$ θέλει διαιρεῖσθαι καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς, καὶ ἐὰν τέλος πολλαπλασιάσω ἔτι ἐπὶ 2, τὸ γινόμενον $2\times1890=3780$ θέλει διαιρεῖσθαι καὶ δι' αὐτῶν τῶν δεδομένων παρονομαστῶν τῶν γεγραμμένων εἰς τὴν πρώτην σειράν.

Σημ. β'. Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα—ἀντὶ νὰ διαιρέσω τρὶς διὰ 2—ἐδυνάμην νὰ διαιρέσω διὰ μιᾶς δι' 8, καὶ νὰ εὕρω τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἑξῆς συντομωτέρου λογισμοῦ,

$$\begin{array}{r|llll} 8) & \cancel{12}, & 16, & 24, & 15 \\ \hline & & 2, & \cancel{3}, & 15 \end{array}$$

$$8.\ 2.\ 15=240.$$

Τὴν συντομίαν ὅμως ταύτην πρέπει νὰ μεταχειριζ… πολλῆς προσοχῆς, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὑρίσκωμεν αὐτὸν … σ τ ο ν κοινὸν παρονομαστήν. Οὕτω τὸ ἑξῆς παράδι… ὄχι τὸν ἐλάχιστον,

$$\begin{array}{r|llll} 8) & 48, & 80, & 36, & 30 \\ \hline 2) & \cancel{6}, & \cancel{10}, & 36, & 30 \\ \hline 3) & & & 18, & 15 \\ \hline & & & 6, & 5 \end{array}$$

$$8.\ 2.\ 3.\ 6.\ 5=1440.$$

Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς λογισμοῦ,

$$\begin{array}{r|llll} 4) & 48, & 80, & 36, & 30 \\ \hline 4) & 12, & 20, & 9, & 30 \\ \hline 3) & \cancel{3}, & \cancel{5}, & 9, & 30 \\ \hline & & & 3, & 10 \end{array}$$

$$4.\ 4.\ 3.\ 3.\ 10=1440.$$

Ἐξ ἐναντίας λαμβάνομεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸ… ἐὰν μεταχειρισθῶμεν ἀκριβῶς τὴν ἀνωτέρω ἐξηγη…

$$
\begin{array}{r|l}
 & 48,\ 80,\ 36,\ 30 \\
2) & 24,\ 40,\ 18,\ 15 \\
2) & 12,\ 20,\ 9,\ 15 \\
2) & 6,\ 10,\ 9,\ 15 \\
2) & 3,\ 5,\ 9,\ 15 \\
3) & \quad\ \ 3,\ 5
\end{array}
$$

2. 2. 2. 2. 3. 3. 5=720.

§ 31.

Ὅταν δὲ πρόκειται νὰ προσθέσω μικτοὺς ἀριθμοὺς ($5\,^1/_2$ … $7\,^2/_3$), προσθέτω πρῶτον τὰ κλάσματα ($^1/_2+^2/_3=^7/_6$ … $/_6$), καὶ ἔπειτα τοὺς ἀκεραίους (5+7=12), καὶ τὰ …λάσματα συνάπτω εἰς ἓν ($12+1\,^1/_6=13\,^1/_6$).

…Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

…θες τὰ ἑξῆς κλάσματα· ά) $^1/_4+^5/_6+^7/_{12}$, β΄)
… $/_{15}$, γ΄) $^5/_6+^7/_{18}+^4/_9+^2/_3$, δ΄) $^5/_6+^1/_2+^3/_4$
… $+^3/_4+^4/_5$, ς΄) $^7/_{12}+^5/_6+^1/_3+^1/_8+^3/_4$,
… $^1/_3$, ή) $^3/_4+^7/_{12}+^4/_9+^1/_2+^5/_{18}$, θ΄) $^5/_{16}$
… $+^1/_6+^5/_{12}+^{11}/_{18}+^4/_9$, ιά) $^1/_2+^2/_3+^3/_4$
… β΄) $^6/_7+^7/_8+^8/_9$, ιγ΄) $^3/_5+^7/_8+^9/_{10}+^3/_{20}$.
… $+^9/_{20}+^4/_5+^1/_6+^1/_4+^7/_{10}$.
…ς ἔτι, ά) $8\,^2/_3+5\,^7/_9$. β΄) $4\,^3/_4+5\,^1/_6$, γ΄)
…, δ΄) $2\,^1/_3+8+3\,^1/_4$, ε΄) $271\,^3/_8+95\,^1/_2$
…93 $^5/_6+1812\,^2/_3+^5/_8+205\,^1/_{12}+1305$.
…ν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τῶν ἑξῆς
… ά) 48, 4, 6, 12, 16, 36, 9· β΄) 25, 9, 20,
… 15, 24, 8, 12, 16· δ΄) 9, 30, 45, 24,60,
… 72, 48, 54, 81, 45· ς΄) 15, 16, 25, 20,
…ν 24, 80, 36, 25, 120, 108· ή) 33, 45,
…θεῖσαν … 5, 20, 36.

25) Πρόςθες προςέτι· α') $^7/_{16}+^3/_8+^2/_{36}+^{17}/_{45}+^{39}/_{40}$, β') $^7/_{60}+^9/_{40}+^3/_8+^7/_{25}+^{31}/_{100}+^{47}/_{75}$. γ') $^{49}/_{20}+^{20}/_{21}+^{15}/_{22}+^1/_{24}+^{12}/_{25}+^{16}/_{27}+^{23}/_{28}+^{19}/_{30}$.

§ 32.

Ἐὰν ἀπὸ $^{11}/_{15}$ ἀφαιρέσω $^8/_{15}$, μένουσι $^3/_{15}$ ἤτοι $^1/_5$. Ὅθεν λέγω· *Δύο κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀφαιροῦνται τὸ ἓν ἀπὸ τοῦ ἄλλου, ἐὰν ἀφαιρέσω ἀριθμητὴν ἀπὸ ἀριθμητοῦ.*

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα ἔχωσιν ἀνίσους παρονομαστάς, ὡς $^7/_8-^5/_{12}$, *τότε πρέπει πρότερον, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόςθεσιν, νὰ φέρω αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν* 24. *Λοιπὸν εἶνε* $^7/_8=^{21}/_{24}$, $^5/_{12}=^{10}/_{24}$, καὶ $^{21}/_{24}-^{10}/_{24}=^{11}/_{24}$.

§ 33.

Ὅταν δὲ πρόκειται ν' ἀφαιρέσω μικτὸν ἀριθμὸν ἀπὸ μικτοῦ, π. χ. $4\,^3/_8$ *ἀπὸ* $7\,^1/_2$, *ἀφαιρῶ πρῶτον τὰ κλάσματα* $^1/_2-^3/_8=^1/_8$, *καὶ ἔπειτα τοὺς ἀκεραίους* $7-4=3$, *καὶ συνάπτω τὰς δύο διαφορὰς εἰς μίαν,* 3 *καὶ* $^1/_8=3\,^1/_8$.

Εἰς δὲ τὸ ἑξῆς παράδειγμα, $8\,^1/_3-5\,^3/_4$, τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μεγαλείτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου ($^3/_4$ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ $^1/_3$). Ἵνα δυνηθῶ ν' ἀφαιρέσω, λαμβάνω (δανείζομαι) 1 μονάδα ἐκ τῶν 8 μονάδων, καὶ ἑνώνω αὐτὴν μὲ $^1/_3$. $1+^1/_3=^4/_3$· ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρῶ $^3/_4$, $^4/_3-^3/_4=^{16}/_{12}-^9/_{12}=^7/_{12}$· ἔπειτα δὲ ἀφαιρῶ τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου $7-5=2$, καὶ συνάπτω τὰ δύο ἐξαγόμενα $^7/_{12}$ καὶ 2 μονάδες $=2\,^7/_{12}$.

Σημ. Πρακτικώτερον δὲ ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὡς ἐν ταῖς ἑξῆς,

	72			30	30
$8\,^7/_9$	8	56	$25\,^2/_{15}$	2	4
$3\,^3/_8$	9	27	$18\,^7/_{10}$	3	21
$5\,^{29}/_{72}$		29	$6\,^{13}/_{30}$		13

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

26) Πόσον εἶνε α) $7/8$ πλὴν $19/24$· β′) $25/48$ πλὴν $7/16$· γ′) $7/12$ πλὴν $5/18$· δ′) $8/9 - 3/8$· ε′) $7/11 - 2/9$· ς′) $13/15 - 3/4$· ζ′) $9/13 - 5/12$· η′) $3/8 - 5/22$· θ′) $15/16 - 1/3$· ι′) $19/24 - 7/18$;

27) Πόσον εἶνε α′) $35\,1/2 - 27\,1/3$, β′) $88\,3/4 - 59\,5/8$, γ′) $112\,5/8 - 58\,7/12$, δ′) $44\,1/4 - 30\,5/8$, ε′) $74\,2/9 - 23\,11/18$, ς′) $82\,3/4 - 65\,8/9$, ζ′) $14\,7/11 - 13\,3/8$, η′) $436\,7/16 - 381\,2/5$, θ′) $709\,3/7 - 86\,8/11$, ι′) $100\,7/15 - 33\,19/20$.

Γ′. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

§ 34.

Ἐὰν πρόκειται τὸ $3/5$ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 8 (νὰ τὸ λάβω 8κις), εὑρίσκω προφανῶς $24/5$ ἤτοι $4\,4/5$. Ἐκ τούτου πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα· *Κλάσμα* ($3/5$) *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν* (8), *ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμητὴν* (3) *ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* (8), (*λοιπὸν* $8 \times 3/5 = 24/5 = 4\,4/5$).

§ 35.

Τὸ ἀκόλουθον ὅμως παράδειγμα 8κις $19/24$ δύναμαι νὰ ὑπολογισθῶ καὶ ὡς ἐφεξῆς· $19/24$ εἶνε 19κις $1/24$, καὶ $1/24$ 8κις λαμβανόμενον δίδει $8/24$ ἤτοι $1/3$, καὶ 19κις $1/3$ εἶνε $19/3$ ἤτοι $6\,1/3$. Ἐκ τούτου πορίζομαι καὶ δεύτερον κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· *Ὅταν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω κλάσμα* ($19/24$) *ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν* (8), *δύναμαι καὶ νὰ διαιρέσω τὸν παρονομαστὴν* (24) *διὰ τοῦ ἀκεραίου* (8), (λοιπὸν $8 \times 19/24 = 19/3 = 6\,1/3$).

Διὰ τί δὲ διαιρῶ τὸν παρονομαστήν, ὅταν θέλω νὰ πολλαπλασιάσω τὸ κλάσμα, τοῦτο γίνεται καταληπτὸν ἐκ τῆς § 18· διότι ὁσάκις μικρότερον κάμω τὸν παρονομαστήν, τοσάκις μεγαλείτερον γίνεται τὸ κλάσμα.

Ἀλλὰ τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τότε μόνον μεταχειρίζομαι, ὅταν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν παρονομαστήν.

§ 36.

Όταν δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $8\ ^5/_7$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 9, λέγω, 8×9 δίδει 72, καὶ $^5/_7 \times 9$ δίδει $^{45}/_7$ ἤτοι $6\ ^3/_7$, 72 καὶ $6\ ^3/_7$ γίνονται ὁμοῦ $78\ ^3/_7$. Τοῦτο δὲ ἐκφράζω ὡς ἑφεξῆς· *Μικτὸς ἀριθμὸς ($8\ ^5/_7$) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον (9), ἐὰν πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἔπειτα τὸ κλάσμα* ($9 \times 8 = 72$, *καὶ* $9 \times {}^5/_7 = 6\ ^3/_7$) *καὶ συναθροίσω τὰ δύο ἐξαγόμενα* ($72 + 6\ ^3/_7 = 78\ ^3/_7$).

§ 37.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ διαιρέσω $^{15}/_{16}$ διὰ 3, ἤγουν νὰ λάβω τὸ $3^{ον}$ μέρος τοῦ $^{15}/_{16}$, εὑρίσκω προφανῶς $^5/_{16}$. Τοῦτο δὲ ἐκφράζω διὰ κανόνος ὡς ἑφεξῆς· *Κλάσμα* ($^{15}/_{16}$) *διαιρεῖται δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ* (3), *ἐὰν διαιρέσω τὸν ἀριθμητὴν* (15) *διὰ τοῦ ἀκεραίου* (3)· (λοιπὸν $^{15}/_{16} : 3 = {}^5/_{16}$).

Ἀλλὰ τὸν κανόνα τοῦτον τότε μόνον μεταχειρίζομαι, ὅταν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμητήν. Ἐὰν δὲ ἐξ ἐναντίας πρόκειται νὰ διαιρέσω $^5/_8$ διὰ 6, λέγω $^1/_8$ περιέχει $^6/_{48}$, λοιπὸν τὸ $6^{ον}$ μέρος τοῦ $^1/_8$ εἶνε $^1/_{48}$, ἐπομένως τὸ $6^{ον}$ μέρος τοῦ $^5/_8$ εἶνε $^5/_{48}$. Τοῦτο δὲ ἐκφράζεται διὰ κανόνος ὡς ἑφεξῆς· *Κλάσμα* ($^5/_8$) *διαιρεῖται δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ* (6), *ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν παρονομαστὴν* (8) *ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν* (6)· (λοιπὸν $^5/_8 : 6 = {}^5/_{48}$).— Διότι ὁσάκις μεγαλείτερον κάμω τὸν παρονομαστήν, τοσάκις μικρότερον γίνεται τὸ κλάσμα.

§ 38.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ διαιρέσω τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $5\ ^2/_3$ *διὰ τοῦ ἀκεραίου* 8, *τρέπω πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα*, $5\ ^2/_3 = {}^{17}/_3$, ἔπειτα πράττω ὡς ἀνωτέρω, $^{17}/_3 : 8 = {}^{17}/_{24}$.

Ἐὰν ὅμως ὁ διαιρετέος ἦνε μεγαλείτερος τοῦ διαιρέτου, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα $38\ ^3/_5 : 4$, τότε προτιμῶ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ὡς εὐκολωτέραν· διαιρῶ διὰ 4 πρῶτον τὸν ακέραιον 38, καὶ ἔχω πηλίκον 9 καὶ κατάλοιπον 2, τὸ κατάλοιπον 2 προςθέτω εἰς τὸ κλάσμα ${}^{3}/_{5}$, καὶ ἔχω ${}^{13}/_{5}$· ἔπειτα ${}^{13}/_{5} : 4 = {}^{13}/_{20}$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

28) Πόσον εἶνε α) $9^{κις}\,{}^{12}/_{13}$, β') $7^{κις}\,{}^{13}/_{24}$, γ') $14^{κις}\,{}^{15}/_{16}$, δ') $8^{κις}\,{}^{29}/_{33}$, ε') $9^{κις}\,{}^{87}/_{128}$, ς') $24^{κις}\,{}^{7}/_{9}$, ζ') $35^{κις}\,{}^{5}/_{12}$, ή) $57^{κις}\,{}^{8}/_{15}$, θ') $99^{κις}\,{}^{17}/_{20}$, ί) $44^{κις}\,{}^{39}/_{68}$, ιά) $329^{κις}\,{}^{16}/_{81}$, ιβ') $716^{κις}\,{}^{43}/_{48}$, ιγ') 2081 φορὰς ${}^{18}/_{25}$, ιδ') $378^{κις}\,{}^{263}/_{288}$, ιέ) $5^{κις}\,{}^{57}/_{64}$;

29) Πόσον εἶνε $12^{κις}\,{}^{17}/_{60}$, β') $9^{κις}\,{}^{113}/_{144}$, γ') $8^{κις}\,{}^{55}/_{64}$, δ') $12^{κις}\,{}^{65}/_{72}$, ε') $16^{κις}\,{}^{37}/_{48}$, ς') $27^{κις}\,{}^{58}/_{81}$, ζ') $11^{κις}\,{}^{73}/_{88}$, ή) $25^{κις}\,{}^{59}/_{100}$, θ') 21 φορὰς ${}^{31}/_{84}$;

30) Πόσον εἶνε ά) $8^{κις}\ 18\,{}^{2}/_{3}$, β') $5^{κις}\ 97\,{}^{1}/_{2}$, γ') $9^{κις}\ 14\,{}^{1}/_{15}$, δ') $12^{κις}\ 8\,{}^{7}/_{16}$, ε') $11^{κις}\ 29\,{}^{5}/_{6}$, ς') $16^{κις}\ 7\,{}^{21}/_{22}$, ζ') $234^{κις}\ 6\,{}^{37}/_{48}$, ή) $55^{κις}\ 29\,{}^{2}/_{5}$, θ') $70^{κις}\ 9\,{}^{5}/_{6}$, ί) $85^{κις}\ 92\,{}^{21}/_{25}$, ιά) $316^{κις}\ 7\,{}^{1}/_{4}$, ιβ') 582 φορὰς $12\,{}^{3}/_{8}$, ιγ') $1096^{κις}\ 4\,{}^{3}/_{5}$, ιδ') $37^{κις}\ 9\,{}^{81}/_{125}$, ιέ) $74^{κις}\ 63\,{}^{75}/_{364}$, ις') $19^{κις}\ 462\,{}^{7}/_{528}$, ιζ') $80^{κις}\ 24\,{}^{3}/_{472}$, ιή) 52 φορὰς $17\,{}^{419}/_{500}$, ιθ') $89^{κις}\ 4\,{}^{529}/_{663}$;

31) Εἷς πῆχυς ἀξίζει $17\,{}^{3}/_{4}$ δρ., πόσον ἀξίζουσι 3 πήχ., 8, 22, 35;

32) Πόσον εἶνε ά) $44^{κις}\,{}^{28}/_{33}$, β') $15^{κις}\,{}^{17}/_{25}$, γ') $63^{ἰς}\,{}^{33}/_{49}$, δ') $2^{ἰς}\,{}^{59}/_{64}$, ε') $36^{κις}\,{}^{37}/_{45}$, ς') $84^{κις}\,{}^{13}/_{144}$, ζ') $128^{κις}\,{}^{23}/_{64}$, ή) $72^{ἰς}\,{}^{97}/_{108}$, θ') $75^{κις}\,{}^{84}/_{125}$, ί) $288^{κις}\,{}^{29}/_{48}$;

33) Πῶς ὀνομάζεται ά) τὸ $9^{ον}$ μέρος τοῦ ${}^{1}/_{16}$, β) τὸ $12^{ον}$ μέρος τοῦ ${}^{1}/_{14}$, γ') τὸ $24^{ον}$ τοῦ ${}^{1}/_{8}$, δ') τὸ $47^{ον}$ τοῦ ${}^{1}/_{18}$, ε') τὸ $5^{ον}$ τοῦ ${}^{1}/_{87}$, ς') τὸ $39^{ον}$ τοῦ ${}^{1}/_{275}$;

34) Πῶς ὀνομάζεται ά) τὸ $8^{ον}$ μέρος τοῦ ${}^{23}/_{24}$, β') τὸ $15^{ον}$ τοῦ ${}^{16}/_{17}$, γ') τὸ $18^{ον}$ τοῦ ${}^{24}/_{25}$, δ') τὸ $12^{ον}$ τοῦ ${}^{52}/_{59}$, ε') τὸ $21^{ον}$ τοῦ ${}^{57}/_{68}$, ς') τὸ $64^{ον}$ τοῦ ${}^{14}/_{15}$, ζ') τὸ $49^{ον}$ τοῦ

$^{27}/_{28}$, ή) τὸ 73^{ον} τοῦ $^{5}/_{14}$, θ) τὸ 198^{ον} τοῦ $^{12}/_{23}$, ί) τὸ 6^{ον} τοῦ $^{115}/_{128}$;

35) Πῶς ὀνομάζεται ά) τὸ 9^{ον} μέρος τοῦ 3 $^{1}/_{7}$, β') τὸ 12^{ον} τοῦ 7 $^{5}/_{8}$, γ) τὸ 23^{ον} τοῦ 9 $^{2}/_{15}$, δ') τὸ 15^{ον} τοῦ 7$^{3}/_{16}$, ἐ) τὸ 45^{ον} τοῦ 25 $^{15}/_{16}$, ς') τὸ 29^{ον} τοῦ 3 $^{7}/_{9}$, ζ') τὸ 32^{ον} τοῦ 14 $^{5}/_{11}$, ή) τὸ 54^{ον} τοῦ 50 $^{13}/_{16}$, θ') τὸ 8^{ον} τοῦ 7 $^{7}/_{23}$, ί) τὸ 27^{ον} τοῦ 23 $^{11}/_{23}$, ιά) τὸ 16^{ον} τοῦ 13 $^{5}/_{23}$, ιβ') τὸ 19^{ον} τοῦ 74 $^{4}/_{7}$, ιγ') τὸ 36^{ον} τοῦ 23 $^{4}/_{25}$, ιδ') τὸ 80^{ον} τοῦ 25 $^{3}/_{4}$, ιέ) τὸ 36^{ον} τοῦ 29 $^{5}/_{23}$;

36) Πῶς ὀνομάζεται τὸ 6^{ον}, 7^{ον}, 8^{ον} μέρος τοῦ 3024 $^{5}/_{7}$;

37) Πῶς ὀνομάζεται τὸ 3^{ον}, 4^{ον}, 5^{ον} μέρος τοῦ 431 $^{5}/_{6}$;

38) Πῶς ὀνομάζεται τὸ 8^{ον}, 11^{ον}, 12^{ον} τοῦ 9718 $^{13}/_{16}$;

39) Πῶς ὀνομάζεται ά) τὸ 6^{ον} μέρος τοῦ 728 $^{2}/_{3}$, β') τὸ 9^{ον} τοῦ 515 $^{1}/_{2}$, γ') τὸ 13^{ον} τοῦ 83 $^{5}/_{6}$, δ') τὸ 20^{ὸν} τοῦ 615 $^{25}/_{28}$, ἐ) τὸ 27^{ον} τοῦ 3718 $^{2}/_{9}$, ς') τὸ 44^{ον} τοῦ 389 $^{23}/_{25}$, ζ') τὸ 57^{ον} τοῦ 9721 $^{4}/_{7}$, ή) τὸ 36^{ον} τοῦ 1044 $^{3}/_{4}$, θ') τὸ 70^{ὸν} τοῦ 4891 $^{13}/_{16}$, ί) τὸ 500^{ὸν} τοῦ 29365 $^{35}/_{36}$;

40) Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς, ἐὰν 9 πήχ. τιμῶνται ά) 405 $^{1}/_{2}$ δρ., β') 327 $^{2}/_{7}$, γ') 6814 $^{7}/_{15}$;

§ 39.

Ἐπειδὴ ἕκαστον πηλίκον 24 : 3 δύναμαι νὰ ἐκφράσω καὶ ὡς κλάσμα $^{24}/_{3}$, διὰ τοῦτο τοὺς ἤδη ἐκτεθέντας κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων δύναμαι νὰ ἐφαρμόσω καὶ εἰς τὰ πηλίκα.

Οὕτω πορίζομαι κατ' ἐξοχὴν δύο κανόνας πολὺ σπουδαίους εἰς τὰ ἑπόμενα, τοὺς ἑξῆς· 1) *Τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν διαιρετέον.* Οὕτω π. χ. 24 : 3=8· ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσω τὸν διαιρετέον 24 ἐπὶ 4 (24×4=96), ἔπειτα διαιρέσω τὸ γινόμενον 96 διὰ 3 (96 : 3=32), τὸ πηλίκον 32 γίνεται 4^{κις} μεγαλείτερον.

2) *Τὸ πηλίκον διαιρεῖται, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν διαιρέτην.* Οὕτω π. χ. εἶνε 24 : 3=8· ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσω τὸν διαιρέτην 3 ἐπὶ 4 (3×4=12) καὶ διὰ τοῦ

γινομένου 12 διαιρέσω 24 (24 : 12=2), καὶ τὸ πηλίκον 2 γίνεται $4^{\text{κις}}$ μικρότερον.

§ 40.

Ὅταν ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω $^7/_8$ ἐπὶ $^3/_4$, ἤγουν νὰ εὕρω τοῦ $^7/_8$ τὰ $^3/_4$, διαιρῶ τὸ $^7/_8$ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4, καὶ κατὰ § 37 ἔχω $^7/_{32}$, τὸ δὲ πηλίκον $^7/_{32}$ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 3, καὶ κατὰ § 34 ἔχω $^{21}/_{32}$· λοιπὸν εἶνε $^3/_4 \times {}^7/_8 = {}^{21}/_{32}$. Τοῦτο δὲ ἐκφράζω διὰ κανόνος ὡς ἐφεξῆς· *Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσω ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν.*

Παράδειγμα· $^{25}/_{87} \times {}^{42}/_{55}$·

$$\begin{array}{r} 25 \\ 42 \\ \hline 50 \\ 100 \\ \hline 1050 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 87 \\ 55 \\ \hline 435 \\ 435 \\ \hline 4785 \end{array}$$

$$\text{Ἀπ. } {}^{1050}/_{4785} \,|\, \overbrace{{}^{210}/_{957}}^{5} \,|\, \overbrace{{}^{70}/_{319}}^{3}.$$

Σημ. Δύναμαι δὲ καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐξαλείφω τοὺς κοινοὺς παράγοντας μεταξὺ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, καὶ μεταξὺ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου. Οὕτω π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ($^{25}/_{87} \times {}^{42}/_{55}$) κοινὸς παράγων ὑπάρχει μεταξὺ μὲν 25 καὶ 55 ὁ 5, μεταξὺ δὲ 87 καὶ 42 ὁ 3· ὅθεν εἶνε

$$^{25}/_{87} \times {}^{42}/_{55} = {}^5/_{29} \times {}^{14}/_{11} = {}^{70}/_{319}.$$

Διότι κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἶνε

$$\frac{25}{87} \times \frac{42}{55} = \frac{25 \times 42}{87 \times 55}.$$

Κατὰ δὲ § 23 τὸ κλάσμα μένει ἀμετάβλητον, ἐὰν διαιρέσω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν· ἐνταῦθα δὲ δύναμαι νὰ διαιρέσω διὰ 3 καὶ 5 ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν, οὕτως ἔχω

$$\frac{25\times42}{87\times55}=\frac{5\times14}{29\times11}=\frac{70}{319}.$$

§ 41.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $4\,{}^2/_3$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $^5/_8$, εἶνε εὐκολώτερον, ἐὰν τρέψω τὸν μικτὸν $4\,{}^2/_3$ εἰς κλάσμα $^{14}/_3$, ἔπειτα πράξω κατὰ τὴν ἀνωτέρω §. Λοιπὸν $^{14}/_3\times{}^5/_8={}^{70}/_{24}=2\,{}^{12}/_{24}=2\,{}^{11}/_{12}$.

Τὸ αὐτὸ πράττω ὅταν πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω δύο μικτοὺς ἀριθμοὺς $7\,{}^1/_2$ ἐπὶ $4\,{}^2/_3$· τοὺς τρέπω πρῶτον εἰς κλάσματα, $7\,{}^1/_2={}^{15}/_2$, $4\,{}^2/_3={}^{14}/_3$, ἔπειτα πολλαπλασιάζω

$$^{15}/_2\times{}^{14}/_3={}^{210}/_6=35.$$

Παραδείγματα· 1) $87\,{}^{13}/_{24}\times{}^{21}/_{32}$.

$87\,{}^{13}/_{24}$	2101	24
348	21	32
174	2101	48
13	4202	72
2101	44121	768
24		

```
768 | 44121 | 57
      3840
      ----
       5721
       5376     3
      -----
        345 | 115
        --- | ---
        768 | 256
```

Απ. $57\,{}^{115}/_{256}$.

2) $25\,^3/_4 \times 16\,^5/_9$.

$$\begin{array}{c} 25\,^3/_4 \times 16\,^5/_9 \\ \hline ^{103}/_4 \times ^{149}/_9 \\ 149 \\ 103 \\ \hline 447 \\ 149 \\ 36 \,|\, 15347 \,|\, 426\,^{11}/_{36} \\ 94 \\ 227 \\ 11 \end{array}$$

'Απ. $426\,^{11}/_{36}$.

Σημ. Τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα ὑπολογίζονται καὶ ὡς ἑξῆς·

1) $87\,^{13}/_{24} \times ^{21}/_{32}$

$$\begin{array}{r|l} & \overset{256}{\smile} \\ 87 \times ^{21}/_{32} = 57\,^3/_{32} & 24 \\ ^{13}/_{24} \times ^{21}/_{32} = ^{91}/_{256} & 91 \\ \hline 57\,^{115}/_{256} & \end{array}$$

2) $25\,^3/_4 \times 16\,^5/_9$

$$\begin{array}{r|l} & \overset{36}{\smile} \\ 25 \times 16 = 400 & \\ 25 \times ^5/_9 = \quad 13\,^8/_9 & 32 \\ ^3/_4 \times 16 = \quad 12 & \\ ^3/_4 \times ^5/_9 = \quad ^5/_{12} & 15 \\ \hline 425 \quad 36 & 47 \,|\, 1\,^{11}/_{36} \\ 1\,^{11}/_{36} & 11 \\ \hline 426\,^{11}/_{36}. & \end{array}$$

§ 42.

Ὅταν δὲ πρόκειται νὰ διαιρέσω τὸν ἀκέραιον 9 διὰ τοῦ κλάσματος $^4/_5$, χρειάζεται νὰ ζητήσω ποσάκις τὸ κλάσμα $^4/_5$ ἐμπεριέχεται εἰς τὸν ἀκέραιον 9. Ἵνα δὲ εὕρω τοῦτο, τρέπω τὸν ἀκέραιον 9 εἰς κλάσμα ἔχον τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 5· οὕτως 9 μονάδες εἶνε$=^{45}/_5$, τὸ δὲ $^4/_5$ εἰς $^{45}/_5$ ἐμπεριέχεται 11 $^1/_4$ φοράς.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ διαιρέσω τὸ κλάσμα $^3/_4$ δι' ἄλλου κλάσματος $^5/_6$, χρειάζεται νὰ ζητήσω ποσάκις τὸ $^5/_6$ ἐμπεριέχεται εἰς $^3/_4$. Ἵνα δὲ εὕρω τοῦτο, τρέπω τὰ δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 12· οὕτω $^3/_4$ εἶνε $^9/_{12}$ καὶ $^5/_6$ εἶνε $^{10}/_{12}$, τὸ δὲ $^9/_{12}$ διαιρούμενον διὰ $^{10}/_{12}$ εἶνε$=^9/_{10}$.

Ἐκ τούτων πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα· *Ὅταν πρόκειται νὰ διαιρέσω διὰ κλάσματος ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ κλάσμα, τρέπω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, ἔπειτα διαιρῶ ἀριθμητὴν δι' ἀριθμητοῦ.* — Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἢ ὁ διαιρετέος ἢ καὶ ἀμφότεροι ἦνε μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπω πρότερον αὐτοὺς εἰς κλάσματα καταχρηστικά, ἔπειτα τὰ διαιρῶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παραδείγματα· 1) $87 : {}^5/_{12}$.

$$\begin{array}{r|c|l} & 87 & \\ & 12 & \\ \hline 5 & 1044 & 208\ ^4/_5 \end{array}$$

Ἀπ. 208 $^4/_5$.

2) $^{17}/_{18} : {}^5/_{12}$.

$$\begin{array}{r|c|l} & 36 & \\ \hline ^{17}/_{18} & 2 & 34 \\ ^5/_{12} & 3 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|c|l} 15 & 34 & 2\ ^4/_{15} \\ & 30 & \\ \hline & 4 & \end{array}$$

Ἀπ. 2 $^4/_{15}$.

3) $19\ ^5/_7 : 26\ ^3/_5$.

$$\begin{array}{cc} 19\ ^5/_7 & 26\ ^3/_5 \\ \hline ^{138}/_7 & ^{133}/_5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|c|l} & 35 & \\ \hline ^{138}/_7 & 5 & 690 \\ ^{133}/_5 & 7 & 931 \end{array}$$

Ἀπ. $^{690}/_{931}$.

§ 43.

Ἐὰν κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς τελευταίας § διαιρέσω $^3/_4$ διὰ τοῦ $^5/_7$, εὑρίσκω

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{21}{20}=\frac{3\times7}{4\times5}.$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον δύναμαι νὰ νοήσω, ὅτι γίνεται καὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $^3/_4$ ἐπὶ $^7/_5$, διότι

$$^3/_4\times{}^7/_5={}^{21}/_{20}.$$

Εἶνε λοιπὸν τὸ αὐτὸ τὸ νὰ διαιρέσω $^3/_4$ διὰ $^5/_7$, καὶ τὸ νὰ πολλαπλασιάσω $^3/_4$ ἐπὶ $^7/_5$. Ὅθεν δύναμαι τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως $^3/_4 : {}^5/_7$ νὰ τρέψω εἰς πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ, ἐὰν *ἀναστρέψω τὸν διαιρέτην* $^5/_7$ καὶ ἐπὶ τὸ ἀνεστραμμένον τοῦτο κλάσμα $^7/_5$ πολλαπλασιάσω. Ἡ παρατήρησις αὕτη μὲ φέρει εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα· *Ἀριθμός τις (ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς) διαιρεῖται διὰ κλάσματος, ἐὰν πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀνεστραμμένον.*

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

41) Πόσον εἶνε α') $^{15}/_{28}\times{}^{21}/_{85}$, β') $^4/_{25}\times{}^7/_8$, γ') $^{12}/_{13}\times{}^{15}/_{16}$, δ') $^{14}/_{27}\times{}^{18}/_{55}$, ε') $^{44}/_{45}\times{}^9/_{11}$, ς') $^{13}/_{16}\times{}^{17}/_{18}$, ζ') $^{25}/_{36}\times{}^{24}/_{35}$, η') $^{21}/_{29}\times{}^{15}/_{28}$, θ') $^{53}/_{88}\times{}^{33}/_{125}$, ι') $^{85}/_{128}\times{}^{72}/_{215}$;

42) Πόσον εἶνε α) $7\,^2/_{11}\times{}^5/_9$, β') $28\,^1/_4\times{}^3/_5$, γ) $44\,^7/_{12}\times{}^2/_3$, δ') $118\,^1/_2\times{}^1/_6$, ε) $5\,^3/_{10}\times{}^{13}/_{18}$, ζ') $2\,^{27}/_{28}\times{}^8/_{15}$, η') $345\,^2/_3\times{}^6/_7$, θ') $87\,^1/_2\times{}^4/_9$, ι') $3\,^{17}/_{18}\times{}^{24}/_{35}$, κ') $2\,^{14}/_{45}\times{}^{12}/_{13}$;

43) Πόσον εἶνε α) $8\,^2/_3\times4\,^1/_2$, β) $5\,^3/_4\times2\,^1/_3$, γ) $19\,^5/_6\times7\,^3/_8$. δ) $12\,^4/_9\times2\,^2/_5$, ε) $18\,^4/_7\times8\,^3/_4$, ζ) $118\,^1/_5$

$\times 3\ ^2/_3$, η) $426\ ^7/_9 \times 3\ ^3/_5$, θ) $817\ ^5/_6 \times 2\ ^3/_4$, ι) $2\ ^{11}/_{12} \times 3\ ^{18}/_{25}$, κ) $9\ ^{15}/_{16} \times 24\ ^8/_{21}$;

44) Πόσον εἶνε ά) $22 : ^5/_8$, 6') $9 : ^7/_{12}$, γ') $44 : ^{24}/_{25}$, δ) $81 : ^{18}/_{29}$, έ) $12 : ^{27}/_{32}$;

45) Πόσον εἶνε ά) $4 : 7\ ^2/_5$, 6') $13 : 2\ ^4/_9$, γ') $85 : 13\ ^5/_6$, δ') $14 : 26\ ^1/_2$, έ) $35 : 8\ ^4/_7$;

46) Πόσον εἶνε ά) $^5/_6 : ^3/_8$, 6') $^{15}/_{19} : ^7/_{12}$, γ') $^{14}/_{15}, ^7/_{12}$, δ') $^{24}/_{35} : ^{27}/_{28}$, έ) $^{81}/_{128} : ^{45}/_{56}$;

47) Πόσον εἶνε ά) $5\ ^1/_2 : ^3/_8$, 6') $^7/_8 : 3\ ^2/_3$, γ') $3\ ^4/_5 : 6\ ^1/_4$, δ') $9\ ^3/_4 : 5\ ^1/_3$, έ) $418\ ^3/_5 : 7\ ^5/_6$;

48) Ὁ στατὴρ ἀξίζει 89 δραχ., πόσον ἀξίζουσι $^5/_8$ στατ., $3\ ^1/_2$, $5\ ^2/_3$, $8\ ^4/_{11}$;

49) Ὁ πῆχυς ἀξίζει $^{25}/_{32}$ ταλ., πόσον ἀξίζουσι $^2/_3$ πήχ., $^8/_{15}$, $^{12}/_{17}$;

50) Ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $33\ ^5/_6$ δραχ., πόσον ἀξίζουσι $^3/_4$ ὀκᾶς, $^4/_7$, $^8/_{11}$, $6\ ^2/_3$, $25\ ^7/_8$;

51) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν $^3/_4$ ὀκᾶς ἀξίζωσι δραχ. 26, 318, 925, $45\ ^2/_3$;

52) Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν ἀξίζωσιν $7\ ^1/_2$ ὀκ. 38 δραχ., $9\ ^3/_4$ ὀκ. 126 δραχ., $4\ ^5/_8$ ὀκ. 148 δραχ.;

53) Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς, ἐὰν ἀξίζωσι $^3/_4$ πήχ. $^5/_6$ ταλ., $^7/_{12}$ πήχ. $^{13}/_{24}$ ταλ., $^5/_{16}$ πήχ. $^9/_{26}$ ταλ.;

54) Πόσον ἀξίζει ὁ στατήρ, ἐὰν ἀξίζωσι $2\ ^1/_4$ στατ. $718\ ^2/_3$ δραχ., $7\ ^1/_5$ στατ. $819\ ^3/_4$ δραχ., $4\ ^2/_3$ στατ. $79\ ^1/_6$ δραχ.;

55) Ἐκ 265 ὀκ. ἐπωλήθη τὸ ἥμισυ πρὸς $8\ ^1/_2$ δραχ., τὸ $^1/_3$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς $7\ ^3/_4$ δραχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6 δραχ. Πόσα χρήματα εἰςεπράχθησαν;

Προβλήματα πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν.

56) Πόσα δράμια ἔχουσιν $^1/_2$, $^3/_4$, $^2/_5$, $^5/_8$, $^7/_{10}$, $^{13}/_{20}$, $^3/_{25}$, $^{17}/_{40}$ τῆς ὀκᾶς;

4

57) Τί κλάσμα τοῦ ἔτους εἶνε 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 μῆνες;

58) Πόσον εἶνε τὸ πέμπτον μέρος 1, 2, 3, 4, 5 δραχμῶν;

59) Τρέψον τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς $1\ ^1/_2$, $1\ ^2/_3$, $5\ ^3/_8$, $7\ ^5/_{12}$, $297\ ^{317}/_{349}$ εἰς καταχρηστικὰ κλάσματα.

60) Τρέψον τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα $^5/_4$, $^{29}/_5$, $^{35}/_8$, $^{37}/_6$ εἰς μικτοὺς ἀριθμούς.

61) Διὰ ποίων ἀριθμῶν διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ α) 10378368, β) 3675375, γ) 138752757, δ) 1048576000;

62) Ἁπλοποίησον τὰ ἑξῆς κλάσματα, α) $^{12}/_{15}$, β) $^{15552}/_{25920}$, γ) $^{125}/_{1000}$, δ) $^{2109}/_{4818}$, ε) $^{28080}/_{36720}$.

63) Τὰ κλάσματα $^1/_2$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_{12}$, $^{11}/_{15}$, $^{17}/_{20}$, $^7/_{10}$, $^3/_5$ τρέψον εἰς ἑξηκοστά.

64) Οἰκία τις ἔχει ὕψος ἕως τὸ πρῶτον πάτωμα $14\ ^1/_4$ πόδ., ἀπὸ τοῦ πρώτου πατώματος ἕως τὸ δεύτερον $13\ ^2/_3$ πόδ., ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἕως τὸ τρίτον $11\ ^1/_8$ καὶ ἀπὸ τοῦ τρίτου ἕως τὴν στέγην $14\ ^5/_8$. Πόσον ὕψος ἔχει ἡ οἰκία;

65) Ἐκ τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος τὸ $^1/_3$ ἦσαν ἀμελεῖς, τὸ $^1/_2$ μέτριοι, καὶ τὸ ἐπίλοιπον ἐπιμελεῖς. Πόσον μέρος ἦσαν οἱ ἐπιμελεῖς;

66) Βαρέλιον πλῆρες καφφὲ ἔχει βάρος μικτὸν $243\ ^1/_2$ λίτρ., τὸ κενὸν βαρέλιον (ἡ τάρα) εἶνε $27\ ^3/_4$ λίτρ., πόσον εἶνε α) τὸ καθαρὸν βάρος (ἤγουν τὸ βάρος μόνον τοῦ καφφέ), β) πόσον θέλομεν πληρώσει, ἐὰν ἡ λίτρα τοῦ καφφὲ στοιχίζῃ $1\ ^1/_4$ δραχ.;

67) Ἐὰν ἡ ἁτμάμαξα διατρέχῃ ἐπὶ τοῦ σιδηροδρόμου $3\ ^3/_4$ γερμανικὰ μίλια τὴν ὥραν, α) εἰς $10\ ^1/_2$ ὥρας πόσα διατρέχει; β) εἰς πόσας ὥρας διατρέχει $50\ ^1/_2$ μίλια;

68) Ἐὰν ἡ ἁτμάμαξα διατρέχῃ $12\ ^1/_2$ μίλια εἰς $3\ ^3/_4$ ὥρας, πόσα διατρέχει τὴν ὥραν;

69) Πολλαπλασίασον ἐκ μνήμης α) $^{17}/_{18}$ ἐπὶ 15, β) $^{9}/_{16}$ ἐπὶ 14, γ) 9 $^{13}/_{15}$ ἐπὶ 12, δ) 499 $^{19}/_{20}$ ἐπὶ 36 (*).

70) Πολλαπλασίασον ἐκ μνήμης α) $^{63}/_{64}$ ἐπὶ 65, β) $^{27}/_{29}$ $\times$28, γ) $^{23}/_{51}\times$53 (**).

71) Εὑρὲ ἐκ μνήμης τὴν τιμὴν α) 36 ὀκ. πρὸς 50 λεπ. β) 16 πήχ. πρὸς 53 λεπ. γ) 47 ὀκ. πρὸς 49 λεπ. δ) 37 πήχ. πρὸς 75 λεπ. (***).

72) Πολλαπλασίασον ἀπὸ μνήμης ά) 758.5, β') 48. 25, γ') 72. 125, δ') 348. 75, ε) 48$\times$33 $^{1}/_{3}$, ς') 36. 66 $^{2}/_{3}$, ζ') 72. 625 (****).

73) Διὰ τριῶν κρουνῶν ῥέει ὕδωρ εἰς δεξαμενήν, ἥτις διὰ τοῦ πρώτου γεμίζει εἰς 7 ὥρας, διὰ τοῦ δευτέρου εἰς 6 καὶ διὰ τοῦ τρίτου εἰς 5. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει εἰς 1 ὥρ., ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν κρουνῶν ῥέῃ συγχρόνως ὕδωρ;

74) Οἱ Μωαμεθανοὶ ὑπολογίζουσι μὲ ἔτη σεληνιακὰ ἔχοντα 354 $^{11}/_{30}$ ἡμ. Λοιπὸν εἰς τουρκικήν τινα οἰκογένειαν ὁ μὲν πρόπαππος εἶνε 93 ἐτῶν, ὁ πάππος 68, ὁ πατὴρ 37 καὶ τὸ τεκνίον 3. Πόση εἶνε ἡ ἡλικία ἑκάστου τούτων εἰς ἡλιακὰ ἔτη ἐκ 365 $^{1}/_{4}$ ἡμ.;

75) Τὸ βῆμα τῆς στρατιωτικῆς ὁδοιπορίας ἔχει 2 $^{2}/_{5}$ πόδ. Πόσα βήματα κάμνει ὁ στρατιώτης ὁδοιπορῶν εἰς ἓν γεωγραφικὸν μίλιον ἔχον 23436 πόδ.;

(*) Θεώρησον α) $^{17}/_{18}=1-^{1}/_{18}$, β) $^{9}/_{16}=^{1}/_{2}+^{1}/_{16}$, γ) 9 $^{13}/_{15}=10-^{2}/_{15}$, δ) 499 $^{19}/_{20}=500-^{1}/_{20}$ κ. τ. ἑ.

(**) Χώρισον α) 65 εἰς 64+1, β) 28 εἰς 29—1, γ) 53 εἰς 51+2.

(***) Θεώρησον α) 50 λεπ.$=^{1}/_{2}$ δρ., β) 53 λεπ.$=^{1}/_{2}$ δρ.+3 λεπ., γ) 49 λεπ.$=^{1}/_{2}$ δρ.—1 λεπ., δ) 75 λεπτ.$=^{1}/_{2}+^{1}/_{4}$ δραχ.

(****) Ἴδ. ἐν Κεφ. Α΄ πρόβλ. 48. Εἶνε γ) 125$=^{1}/_{8}$ τοῦ 1000, δ) 75$=^{3}/_{4}$ τοῦ 100, ε) 33 $^{1}/_{3}=^{1}/_{3}$ τοῦ 100, ς') 66 $^{2}/_{3}=^{2}/_{3}$ τοῦ 100, ζ) 625$=^{5}/_{8}$ τοῦ 1000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Αἱ τέσσαρες πράξεις ἐπὶ τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν.

§ 44.

Εἰς ἕκαστον συγκεκριμένον ἀριθμὸν (7 πήχεις) διακρίνω τὴν *πληθὺν* (7) καὶ τὴν *ὀνομασίαν* (πήχεις).

Δύο συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ἐὰν μὲν ἔχωσι τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ὡς π. χ. 9 δραχ. καὶ 12 δραχ., ὀνομάζονται *ὁμώνυμοι*, ἐὰν δὲ ἔχωσι διάφορον ὀνομασίαν, ὡς π. χ. 3 δραχ. καὶ 5 πήχεις, λέγονται *ἑτερώνυμοι*.

§ 45.

Ἐκ τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν ἄλλοι μέν, ὡς π. χ. 7 λίτραι, 8 δραχ., 9 πήχ., 12 κοιλά, οὐδεμίαν ἐπιδέχονται σύγκρισιν, ἄλλοι δὲ ἐξ ἐναντίας, ὡς π. χ. τάληρα καὶ δραχμαί, ὀκάδες καὶ δράμια, ἡμέραι καὶ ὧραι κ. ἄ. τ., δύνανται νὰ συγκριθῶσι πρὸς ἀλλήλους. Διότι 5 δραχμαὶ ἀποτελοῦσιν ἓν τάληρον, ἤτοι λέγοντες δραχμὴν ἐννοοῦμεν τὸ πέμπτον μέρος τοῦ ταλήρου· ὁμοίως δράμιον ἐννοοῦμεν τὸ 400$^{\text{τὸν}}$ μέρος τῆς ὀκᾶς, καὶ ὥραν τὸ 24$^{\text{ον}}$ μέρος τῆς ἡμέρας κ. τ. ἑ. Τοιοῦτοι δὲ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἵτινες ἢ ἔχουσι τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ὡς π. χ. 8 πήχ. καὶ 5 πήχ., ἢ ἡ μονὰς τοῦ ἑνὸς νοεῖται ὡς μέρος ὡρισμένον τῆς μονάδος τοῦ ἄλλου, ὡς π. χ. 7 ὀκ. καὶ 350 δράμια, λέγονται γενικῶς *ὁμοειδεῖς συγκεκριμένοι ἀριθμοί*.

Σημ. Παρ' Ἄγγλοις μονὰς μὲν νομισματικὴ εἶνε ἡ λίρα στερλίνα, ἥτις διαιρεῖται εἰς 20 σελλίνια, τὸ σελλίνιον εἰς 12 πέννας, καὶ ἡ πέννα εἰς 4 φαρδίνια· μονὰς δὲ μήκους εἶνε ἡ ὑάρδα, ἥτις διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ὁ πούς εἰς 12 δακτύλους καὶ ὁ δάκτυλος εἰς 12 γραμμάς, καὶ 1760 ὑάρδαι ἀποτελοῦσιν 1 μίλιον.

§ 46.

Καθὼς τρέπω μονάδας ἀκεραίας εἰς ἡμίσεα, εἰς 3$^{\text{τα}}$, 4$^{\text{τα}}$ κ. ἑ. πολλαπλασιάζων αὐτὰς κατὰ § 20 ἐπὶ 2, 3, 4 κ. ἑ., οὕτω δύναμαι νὰ τρέψω καὶ ἀκέραια τάληρα εἰς 5$^{\text{τα}}$ δηλ. εἰς δραχμάς, καὶ λίρας εἰς 20στὰ δηλ. εἰς σελλίνια. Ὁμοίως τρέπω καὶ στατῆρας εἰς ὀκάδας, καὶ ἡμέρας εἰς ὥρας, καὶ ἐν γένει πᾶσαν πληθὺν μονάδων εἰς κατωτέρας, τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶνε μέρος πολλοστὸν ἐκείνων. Ἵνα τρέψω π. χ. τάληρα εἰς δραχμάς, πρέπει πρὸ πάντων νὰ γνωρίζω, πόσας δραχμὰς ἔχει ἓν τάληρον. Ὁ δὲ ἀριθμὸς (ἐνταῦθα ὁ 5) ὁ δεικνύων ποσάκις ἡ μικροτέρα μονὰς περιέχεται εἰς τὴν μεγαλειτέραν, ὀνομάζεται *ἀριθμὸς ὑποδιαιρέσεως*.

§ 47.

Ἐὰν θέλω νὰ τρέψω 13 τάληρα εἰς δραχμάς, λέγω, 1 τάληρον ἔχει 5 δραχ., λοιπὸν 13 τάλ. ἔχουσι 13 φορὰς 5 δραχ. =65 δραχ. Ἵνα τρέψω λοιπὸν τάληρα εἰς δραχμάς, πρέπει νὰ τὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 5.—Ἐὰν δὲ θέλω 7 στατῆρας νὰ τρέψω εἰς ὀκάδας, λέγω 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκ., λοιπὸν 7 στατῆρες ἔχουσιν 7 φορὰς 44 ὀκ.=308 ὀκ. Ἵνα τρέψω λοιπὸν στατῆρας εἰς ὀκάδας, πρέπει νὰ τοὺς πολλαπλασιάσω ἐπὶ 44.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων πορίζομαι τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα· *Ὅταν πρόκειται μονάδας ἀνωτέρας νὰ τρέψω εἰς κατωτέρας, πρέπει νὰ τὰς πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς ὑποδιαιρέσεως*.—Ἐκ τούτου συνάγεται καὶ τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος ὁ κανών· *Ὅταν θέλω νὰ τρέψω μονάδας κατωτέρας εἰς ἀνωτέρας, πρέπει νὰ τὰς διαιρέσω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ὑποδιαιρέσεως*. Οὕτω π. χ. ἐὰν θέλω νὰ τρέψω 75 δραχ. εἰς τάληρα, πρέπει νὰ διαιρέσω 75 διὰ 5 (75 : 5=15)· λοιπὸν εἶνε 75 δραχ.=15 τάληρα.

§ 48. α.

Ἐὰν θέλω νὰ τρέψω 137 σελλίνια εἰς λίρας, διαιρῶ 137 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς ὑποδιαιρέσεως 20,

20 [137] 6
17

οὕτως εὑρίσκω 6 ἀκεραίας λίρας καὶ κατάλοιπον 17 σελλίνια· τὰ 17 ταῦτα σελλίνια δύναμαι νὰ προσκολλήσω εἰς τὰς 6 λίρας ὡς $^{17}/_{20}$ λίρας, καὶ νὰ εἴπω 137 σελλίνια εἶνε=$6^{17}/_{20}$

λίρας. Δύναμαι ὅμως τὰς εὑρεθείσας 6 λίρας καὶ τὰ καταλειφθέντα 17 σελ. καὶ νὰ συνάψω εἰς μίαν ἔκφρασιν, καὶ νὰ εἴπω 137 σελ. εἶνε=6 λίρ. 17 σελ. Ἡ τελευταία αὕτη ἔκφρασις, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται δύο ὀνομασίαι, λίραι καὶ σελλίνια, ὀνομάζεται *συμμιγὴς ἀριθμός*.—Ὁ συμμιγὴς δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ τρεῖς, τέσσαρας ἢ καὶ πλειοτέρας ὀνομασίας, ὡς π. χ.

5 τάλ. 3 δραχ. 75 λεπ.

365 ἡμ. 5 ὥρ. 48 λεπ. 48 δεύτ.

Εἰς ὅλας ὅμως τὰς περιπτώσεις εἶνε εὔκολον νὰ τρέπωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἕνα *ἀμιγῆ* συγκεκριμένον ἀριθμόν, δηλ. εἰς μίαν μόνην ὀνομασίαν. Ἔστω π. χ.

7 μῆνες 25 ἡμ. 18 ὥρ.

Ἐὰν θέλω νὰ τρέψω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὅλον εἰς ὥρας, λέγω πρῶτον 7 μῆνες ἔχουσιν 7κις 30 ἡμέρας=210 ἡμ. προσθέτων καὶ τὰς 25 ἡμ. ἔχω 235 ἡμ. Ἔπειτα 235 ἡμέραι ἔχουσι 235 φορὰς 24 ὥρας=5640 ὥρ. προσθέτων καὶ τὰς 18 ὥρας ἔχω 5658 ὥρ. Ὅθεν εἶνε

1) 7 μῆν. 25 ἡμ. 18 ὥρ.=5658 ὥρ.

Δύναμαι ὅμως τὸν ἀριθμὸν τοῦτον νὰ ἐκφράσω καὶ εἰς ἡμέρας· διότι λέγω 7 μῆν. καὶ 25 ἡμ. ἔχουσι 235 ἡμ. 18 δὲ ὧραι εἶνε $^{18}/_{24}$ ἡμ. ἤτοι $^{3}/_{4}$ ἡμ. Λοιπὸν εἶνε ὁμοῦ

2) 7 μῆν. 25 ἡμ. 18 ὥρ.=235 $^{3}/_{4}$ ἡμ.

Τέλος δύναμαι νὰ ἐκφράσω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ εἰς μῆνας· διότι λέγω 25 ἡμ. καὶ 18 ὥρ. ἔχουσιν 25 $^{3}/_{4}$ ἡμ. ἵνα δὲ τρέψω ἡμέρας εἰς μῆνας, πρέπει κατὰ § 47 νὰ διαιρέσω διὰ 30, 25 $^{3}/_{4}$: 30 κατὰ § 38 εἶνε $^{103}/_{120}$. Λοιπὸν εἶνε

3) 7 μῆν. 25 ἡμ. 18 ὥρ.=7 $^{103}/_{120}$ μῆν.

§ 48. 6΄.

Ἵνα δὲ τρέψω κλάσμα εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, εὑρίσκω πρῶτον τὰς ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν τὸ κλάσμα ἦνε καταχρηστικόν, διαιρῶν ἀριθμητὴν διὰ παρονομαστοῦ, τὸ δὲ κατάλοιπον τρέπω εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας ὑποδιαιρέσεως καὶ διαιρῶ αὐτὰς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ ἴδιον πράττω εἰς πᾶν ἑπόμενον κατάλοιπον, μέχρις οὗ φθάσω εἰς τὴν κατωτάτην ὑποδιαίρεσιν. Π.χ. τὰ $^{19}/_{7}$ στατῆρος τρέπονται εἰς συμμιγῆ διὰ τοῦ ἑξῆς λογισμοῦ·

7 | 19 | 2 στατ. 3 ὀκ. 171 $^{3}/_{7}$ δράμ.
5 ὑπόλοιπον
×44
220 ὀκ.
10
3 ὑπόλοιπον
×400
1200 δράμ.
50
10
3 ὑπόλοιπον.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσα λεπτὰ ἔχουσι 53 δραχ. 67 λεπ., 83 δρ, 38 λπ. ;

2) Πόσα δράμια ἔχουσιν 7 ὀκ. 160 δράμ., 18 ὀκ. 275 δράμ., 77 ὀκ. 320 δράμια ;

3) Πόσα δράμ. ἔχουσι 15 στατ. 34 ὀκ. 255 δράμ., 28 στατ. 17 ὀκ. 130 δράμ., 863 στατ., 345 στατ. 347 δράμ.;

4) Πόσας πέννας ἔχουσιν 67 λίρ. 9 σελ. 7 πέν., 83 λίρ. 19 σελ. 11 πέν., 39 λίρ. 7 πέν, ;

5) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχει τὸ ἔτος τὸ ἐκ 365 ἡμερῶν ;

6) Πόσα τάλληρα ἔχουσι 384 δραχ., 7056, 8364 ;

7) Πόσας λίρας ἔχουσιν 893 σελ., 7064, 9851, 17364 ;

8) Πόσους στατῆρας ἔχουσι 392 ὀκ., 867, 13940 ;

9) Πόσας λίρας ἔχουσι 55796 πέν., 193481, 7529364 ;

10) Τί κλάσμα ταλήρου εἶνε $^{15}/_{17}$ δραχ., $^{12}/_{43}$, $^{17}/_{80}$;

11) Τί κλάσμα λίρας εἶνε $17\,^{3}/_{4}$ σελ., $9\,^{5}/_{21}$, $16\,^{14}/_{27}$;

12) Τί κλάσμα ὀκᾶς εἶνε $78\,^{3}/_{4}$ δράμ., $264\,^{5}/_{8}$, $340\,^{2}/_{3}$;

13) Τί κλάσμα λίρας εἶνε 11 σελ. 3 πέν., 18 σελ. 9 πέν., 8 σελ. 9 πέν., 15 σελ. 4 πέν.;

14) Τρέψον εἰς συμμιγεῖς τὰ ἑξῆς κλάσματα, ά) στατῆρος $^{3}/_{5}$, $^{8}/_{9}$, $^{17}/_{12}$, β́) ταλήρου $^{5}/_{8}$, $^{8}/_{15}$, $^{23}/_{7}$, γ́) λίρας $^{6}/_{7}$, $^{14}/_{17}$, $^{28}/_{9}$, δ́) ἔτους $^{5}/_{9}$ $^{13}/_{5}$, $^{25}/_{7}$, έ) ἡμέρας $^{12}/_{7}$, $^{4}/_{9}$, $^{13}/_{5}$.

§ 49.

Οἱ κανόνες τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν εἶνε τόσον ἁπλοῖ, ὥςτε συντομίας χάριν θέλω περιορισθῆ εἰς δύο ζεύγη παραδειγμάτων ἑκατέρας πράξεως.

1) *Πρόςθεσις.*

λίρ.	σελ.	πέν.	μῆν.	ἡμ.	ὧρ.	12
3	9	8	7	18	$13\,^{3}/_{4}$	9
25	17	—	8	14	$21\,^{1}/_{2}$	6
333	—	5	11	7	$12\,^{2}/_{3}$	8
51	18	10	—	25	$8\,^{5}/_{6}$	10
414	5	11	28	6	$8\,^{3}/_{4}$	12|33]$2\,^{9}/_{12}$

2) *Ἀφαίρεσις.*

λίρ.	σελ.	πεν.	στατ.	ὀκ.	24
34	13	7	373	$25\,^{3}/_{8}$	9(+24)
17	16	11	182	$34\,^{5}/_{6}$	20
16	16	8	190	$34\,^{13}/_{24}$	13

Σημ. Μία ἐκ τῶν εὐκόλων καὶ ὠφελίμων ἀσκήσεων εἰς τὸν μαθητὴν εἶνε νὰ ἐκθέσῃ αὐτὸς τοὺς ἐνταῦθα ἐλλείποντας κανόνας καθ' ὁδηγίαν τοῦ διδασκάλου.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

15) Πρόςθες 13 ἔτ. 11 μῆν. 17 ἡμ. + 23 ἔτ. 8 μῆν. 24 ἡμ. + 7 ἔτ. 15 ἡμ. + 18 ἔτ. 9 μῆν. 1 ἡμ.

16) Πρόςθες 8 λίρ. 19 σελ. $5\frac{1}{2}$ πέν. + 25 λίρ. 7 σελ. $11\frac{2}{3}$ πέν. + 56 λίρ. 12 σελ. $6\frac{3}{4}$ πέν. + 569 λίρ. 8 σελ + 7 σελ. $3\frac{7}{8}$ πέν. + 236 λίρ. 10 πέν. + $4\frac{4}{5}$ πέν.

17) Πρόςθες 54 στατ. 23 ὀκ. $368\frac{1}{2}$ δράμ. + 109 στατ. $58\frac{7}{12}$ δράμ. + 19 ὀκ. $208\frac{4}{5}$ δράμ. + 105 στατ. 12 ὀκ.

18) Πρόςθες 25 ὑάρδας 2 πόδ. 9 δακτ. 8 γραμ. + 23 ὑάρ. 1 πόδ. 5 δακτ· $7\frac{2}{3}$ γραμ. + 9 ὑάρ. 2 πόδ. $6\frac{3}{4}$ γραμ.

19) Ὁ ποιητὴς Σχίλλερος ἐγεννήθη τῇ 10 Νοεμ. 1759 καὶ ἔζησε 45 ἔτ. 5 μῆνας καὶ 29 ἡμ. Πότε ἀπέθανεν;

20) Ἀφαίρεσον α΄) 18 πήχ. 7 ῥούπ. ἀπὸ 23 πήχ. 3 ῥούπ. β΄) 6 ἔτ· 7 μῆν. 23 ἡμ. ἀπὸ 15 ἔτ. 3 μην. 13 ἡμ. γ΄) 7 στατ. 37 ὀκ. 243 δράμ. ἀπὸ 12 στατ. 8 ὀκ. 300 δραμ. δ΄) 24 λίρ. 15 σελ. $9\frac{3}{4}$ πέν. ἀπὸ 45 λίρ. 13 σελ. $4\frac{1}{2}$ πέν. ε΄) 193 στατ. $27\frac{2}{3}$ ὀκ. ἀπὸ 228 στατ. ς΄) 8 ὑάρδ. 2 πόδας 9 δακτ. $5\frac{7}{8}$ γραμ. ἀπὸ 13 ὑάρδ. 1 πόδ. 6 δακτ. $8\frac{5}{6}$ γραμμῶν.

21) Ὁ μέγας Ναπολέων ἐγεννήθη τῇ 15 Αὐγούστου 1769 καὶ ἀπέθανε τῇ 5 Μαΐου 1821. Πόσα ἔτη ἔζησεν;

22) Ὁ Κοπέρνικος ἀπέθανε τῇ 24 Μαΐου 1543 ἔχων ἡλικίαν 70 ἐτ. 3 μην. καὶ 5 ἡμ. Πότε ἐγεννήθη;

§ 50.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγῶν ἀριθμῶν δι' ἀῤῥημένων ἀκεραίων θέλω περιορισθῇ ὡςαύτως εἰς τὴν ἔκθεσιν παραδειγμάτων τινῶν, παραλείπων εἰς τὸν μαθητὴν νὰ εὕρῃ αὐτὸς τοὺς κανόνας πρὸς ἰδίαν ἑαυτοῦ ἄσκησιν.

4 λίρ. 15 σελ. $7\,^1/_3$ πέν. $\times 8$

38 λίρ. 4 σελ. $10\,^2/_3$ πέν. (8

20) 15 τάλ. 3 δραχ. 75 λεπτ. : 20

— τάλ. 3 δραχ. $93\,^3/_4$ λεπ.

8) 47 στατ. $35\,^3/_4$ όκ. : 8

5 στατ. $42\,^{31}/_{32}$ όκ. (*)

Τὰς δύο ταύτας πράξεις μεταχειριζόμεθα κατ' ἐξοχὴν ὅταν γνωρίζοντες τὴν τιμὴν ἑνὸς πήχεως, μιᾶς λίτρας, κ.τ.τ., ζητῶμεν τὴν τιμὴν πολλῶν πήχεων, λιτρῶν κ. τ. τ. καὶ ὅταν γνωρίζοντες τὴν τιμὴν πολλῶν πήχεων, λιτρῶν κτ.τ. ζητῶμεν τὴν τιμὴν ἑνὸς πήχεως, μιᾶς λίτρας τ. τ. ἑ.

§ 51.

Ὅταν δὲ πρόκειται συμμιγῆ ἀριθμόν, π.χ. 25 λίρ. $19\,^1/_2$ σελ., νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ ἀφῃρημένον κλασματικὸν ἀριθμὸν $^3/_4$, τότε πρέπει κατὰ § 40 νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν 3, καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον νὰ διαιρέσω διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4· λοιπὸν

25 λίρ. $19\,^1/_2$ σελ. $\times\, ^3/_4$

4) 77 λίρ. $18\,^1/_2$ σελ. (3

19 λίρ. $9\,^5/_8$ σελ.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω συμμιγῆ ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, π. χ. 28 στατ. 35 όκ. ἐπὶ $5\,^2/_3$, τρέπω πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καταχρηστικὸν $^{17}/_3$, καὶ ἔπειτα ἐκτελῶ ὁμοίως τὸν ὑπολογισμὸν ὡς ἑξῆς·

28 στατ. 35 όκ. $\times\, ^{17}/_3$

3) 489 » 23 » (17

163 στατ. $7\,^2/_3$

Ἤ, ὅπερ πολλάκις εἶνε εὐκολώτερον, πολλαπλασιάζω χω-

(*) Εἰς μὲν τοῦ πολλαπλασίασμοῦ τὰ προβλήματα θέτουσι συνήθως τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, εἰς δὲ τὰ τῆς διαιρέσεως θέτουσι τὸν διαιρέτην εἰς τὰ ἀριστερά.

ριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα, καὶ τὰ δύο γινόμενα συναθροίζω εἰς ἕν, ὡς ἐφεξῆς·

28 στατ. 35 ὀκ. ×5 $^2/_3$ 28 στατ. 35 ὀκ.

57 » 26 » (2 143 » 43 » (5

3) 19 » 8 $^2/_3$ ὀκ.

143 » 43 »

163 στατ. 7 $^2/_3$ ὀκ.

§ 52.

Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ πολλαπλασιάσω συμμιγῆ ἐπὶ συμμιγῆ, τρέπω πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν κατὰ § 48 εἰς κλάσμα τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἢ εἰς μικτὸν ἀριθμόν, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω. Π. χ. μισθοῦταί τις 35 λίρ. 17 σελ. 8 πέν. κατ' ἔτος, πόσον λαμβάνει εἰς 4 ἔτη 8 μῆνας 15 ἡμ; Ἐνταῦθα τρέπω τὸν δεύτερον συμμιγῆ εἰς τὸν μικτὸν 4 $^{17}/_{24}$ ἔτ. καὶ ἐπ' αὐτὸν πολλαπλασιάζων τὸν πρῶτον ὡς εἰς § 51 εὑρίσκω 154 λίρ. 16 σελ. 6 $^1/_6$ πέν.

§ 53.

Ὅταν θέλω νὰ διαιρέσω συμμιγῆ ἀριθμόν, ἐὰν μὲν ὁ διαιρέτης ἦνε κλάσμα, π. χ. $^5/_7$, ἀναστρέφω κατὰ § 43 τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου $^5/_7$, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζω, ἤτοι τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 καὶ διαιρῶ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 5. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἦνε μικτὸς ἀριθμὸς ἢ συμμιγής, τρέπω αὐτὸν εἰς ἓν κλάσμα τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἔπειτα διαιρῶ ὁμοίως. Π. χ. διὰ 5 στατ. 11 ὀκ. ἐπλήρωσα 28 λίρ. 13 σελ. 7 πέν., πόσον ἀξίζει ὁ στατήρ; Ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς·

28 λίρ. 13 σελ. 7 πέν. : 5 $^1/_4$

114 » 14 » 4 (4

21) 5 » 9 » 3 $^1/_{21}$ »

§ 54.

Ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ διαιρέσω συμμιγῆ διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς, π. χ. 27 λίρ. 15 σελ. 10 πέν. διὰ 6 λίρ. 17 σελ. 6 πεν., τρέπω διαιρετέον καὶ διαιρέτην εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, π. χ. εἰς πέννας, καὶ ἔπειτα διαιρῶ τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου. Οὕτω λοιπὸν εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τρέψας διαιρετέον εἰς 6670 πέν. καὶ διαιρέτην εἰς 1650 πέν. καὶ διαιρέσας τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, εὗρον πηλίκιον $4\ {}^{7}/_{165}$.

§ 55.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον πολυψήφιον ἢ ἐπὶ μικτὸν ἢ ἐπὶ συμμιγῆ ἀριθμὸν μεταχειρίζονται καὶ ἄλλην μέθοδον, ἥτις ὀνομάζεται *μέθοδος διὰ τῶν πολλοστῶν* καὶ γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

	386 λίρ.	15 σελ.	8 πεν.
	567		
	2702 λίρ.		
	2316		
	1930		
διὰ 10 σελ.	283	10 σελ.	
5 »	141	15 »	
6 πέν.	14	3	6 πέν.
2 »	4	14	6 »
	219306 λίρ.	3 σελ.	

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασίασα πρῶτον 386 λίρ. ἐπὶ 567· ἔπειτα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 15 σελ. ἐπὶ 567, ἵνα εὕρω τὸ γινόμενον ἀμέσως εἰς λίρας, εἶδον, ὅτι, ἂν εἶχον μίαν λίραν νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 567, τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶσθαι 567 λίραι, ἀλλὰ 15 σελ, ἢ $^{15}/_{20}$ λίρ. εἶνε $^{3}/_{4}$ λίρ. ἢ ἐὰν τὰ χωρίσω εἰς 10 σελ, καὶ 5 σελ., εἶνε τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον λίρας, λοιπὸν τὸ ζητούμενον γινόμενον σύγκειται ἐκ τοῦ ἡμίσεος τῶν 567 λιρῶν καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου τῶν 567 λιρ. ἤτοι ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος τῶν 567 λιρῶν. Οὕτω διαιρέσας 567 λίρ. διὰ 2, εὗρον τῶν 10 σελ. τὸ γινόμενον 283 λίρ. 10 σελ., διαιρέσας δὲ καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ 2, εὗρον τῶν 5 σελ. τὸ γινόμενον 141 λίρ. 15 σελ.

Μεταβὰς δὲ εἰς τὰς 8 πέν. ἐχώρισα αὐτὰς εἰς 6 πέν. καὶ 2 πέν., αἱ 6 πέν. εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ σελλινίου ἤτοι τὸ δέκατον τῶν 5 σελ., ὅθεν εὗρον τὸ γινόμενον τῶν 6 πεν. διαιρέσας 141 λίρ. 15 σελ. διὰ 10· τὸ δὲ γινόμενον τῶν 2 πεν. εὗρον διαιρέσας τὸ γινόμενον τῶν 6 πεν. διὰ 3. Ἔπειτα προςέθεσα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Σημ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασι- 567 εἶνε=9. 9. 7, τὸ γινόμενον εὑρίσκεται εὐκολώτερον. λαπλασιάσωμεν ἐπὶ 9, τὸ δὲ ἐννεαπλάσιον πάλιν ἐπὶ 9 νεαπλάσιον τοῦ ἐννεαπλασίου ἐπὶ 7.

§ 56.

Ὁμοίως ἐκτελεῖται καὶ ὁ ἑξῆς πολλαπλα- γοῦς ἐπὶ μικτόν·

	83 λιρ.	17 σελ.	11 πέν.			
	46 7/8					
	498 λίρ.					
	332					
διὰ 10 σελ.	23					
5 »	11	10 σελ.				
2 »	4	12				
6 πέν.	1	3				
3 »		11	6 πέν.			
2 »		7	8 »	8		
4/8	41	18	11 1/2	4	4	
2/8	20	19	5 3/4	2	6	
1/8	10	9	8 7/8	1	7	
	3932 λίρ.	12 σελ.	4 1/8 πέν.	8	17	2 1/8

Ἐνταῦθα, ἀφοῦ ἐπολλαπλασίασα κατὰ τὴν ἐν § 55 μέθοδον ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 46, θέλων νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα 7/8, ἐχώρισα τὸ 7/8 εἰς 4/8, 2/8 καὶ 1/8, καὶ οὕτως εὗρον τὸ μὲν γινόμενον τῶν 4/8

$=\frac{1}{2}$, διαιρέσας ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον διὰ 2, τὸ δὲ γινόμενον τῶν $\frac{2}{8}$ διαιρέσας ὁμοίως διὰ 2 τὸ γινόμενον τῶν $\frac{4}{8}$, καὶ τέλος τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{1}{8}$ διαιρέσας τὸ γινόμενον τῶν $\frac{2}{8}$ διὰ 2.

§ 57.

Ὁμοίως ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ εἰς τὸ ἑξῆς ...δειγμα, ἔνθα καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε συμμιγής·

37 λίρ.	12 σελ.	9 πέν.			
53 ἔτη	7 μῆν.	18 ἡμ.			
...111 λίρ.					
...25					
...5	10 σελ.				
	6				
	6	6 πέν.			
	13	3 »	40		
	16	$4\frac{1}{2}$	20		20
	2	$8\frac{3}{4}$	10		30
	11	$4\frac{3}{8}$	5		15
...0	6	$3\frac{11}{40}$	1		11
...018 λίρ.	12 σελ.	$5\frac{9}{10}$ πέν.	40		76 | $1\frac{9}{10}$

...σα, ἀφοῦ ἐπολλαπλασίασα κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέ...ον ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 53 ἔτ., ἔπειτα θέ...κων νὰ πολλαπλασιάσω καὶ ἐπὶ 7 μῆνας, ἐχώρισα αὐτοὺς εἰς 6 μῆνας, οἱ ὁποῖοι εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἔτους, καὶ εἰς 1 μῆνα, ὅστις εἶνε τὸ ἕκτον τῶν 6 μηνῶν, καὶ οὕτως εὗρον τὸ γινόμενον τῶν μὲν ἓξ μηνῶν διαιρέσας τὸν πολλαπλασιαστέον ὅλον διὰ 2, τὸ δὲ τοῦ 1 μην. διαιρέσας τὸ προηγηθὲν γινόμενον διὰ 6.

Μεταβὰς δὲ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ 18 ἡμ. ἐχώρισα αὐτὰς εἰς 15 ἡμ., αἵτινες εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ μηνός, καὶ εἰς 3 ἡμ. αἵτινες εἶνε τὸ 5ον τῶν 15 ἡμ. Οὕτω λοιπὸν εὗρον τὸ γινόμενον τῶν μὲν 15 ἡμ. διαιρέσας τὸ γινόμενον τοῦ 1 μην. διὰ 2, τὸ δὲ τῶν 3 ἡμ. διαιρέσας τὸ γινόμενον τῶν 15 ἡμ. διὰ 5.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

23) Ἐν βαρέλιον ζακχάρ. ἔχει βάρος 17 στατ. 29 ὀκ. 326 δράμ. πόσον βάρος ἔχουσι 9, 16, 74, 108 βαρέλια ἴσα;

24) Μὲ 1 δραχ. ἀγοράζω 5 πήχ. 7 $^3/_4$ ῥούπ., πόσον λαμβάνω μὲ δραχ. 6, 8, 37;

25) Δαπανᾷ τις καθ' ἡμέραν 3 δραχ. 68 λεπ., πόσον δαπανᾷ εἰς ἡμέρας 7, 43, 52, εἰς ἓν ἔτος;

26) Δαπανᾷ τις κατ' ἔτος 329 λίρ. 17 σελ. 8 πέν. 3 φαρδ., πόσον δαπανᾷ εἰς ἔτη 7, 25, 263;

27) Ὁ στατὴρ ἀξίζει 17 λίρ. 8 $^2/_3$ σελ., πόσον ἀξίζουσι στατῆρες 4, 9, 365;

28) Πόσον γίνονται ά) 5^{κις} 13 ἡμ. 9 ὥρ. 34 $^1/_2$ λεπ. β) 7^{κις} 42 στατ. 28 ὀκ. 168 $^2/_3$ δράμ.,

29) Πόσον λαμβάνω μὲ 1 δραχ. ἐὰν λαμβάνω ά) μὲ 45 δρ. 6 ὀκ. 165 δράμ. β) μὲ 13 δραχ. 21 ὀκ. 232 δράμ. γ') μὲ 37 δραχ. 35 ὀκ. 45 δράμ. δ') μὲ 29 δραχ. 4 στατ. 38 ὀκ. 327 δράμ.;

30) Πόσον στοιχίζει ὁ στατήρ, ἐὰν στοιχίζωσι ά) 8 στατ. 82 λίρ. 16 σελ. 3 πέν. 2 φαρδ., β') 18 στατ. 120 λίρ 12 σελ. 7 $^3/_4$ πέν. γ') 25 στατ. 127 λίρ. 10 σελ. 11 $^5/_8$ πέν.;

31) Πόσον εἶνε ά) τὸ 66^{ον} μέρος τῶν 7 στατ. 1 ὀκ. 368 δραμ. β') τὸ 72^{ον} τῶν 431 στατ. 41 ὀκ. 144 δραμ. γ') τὸ 499^{ον} τῶν 23853 στατ. 38 ὀκ. 16 $^5/_6$ δράμ.,

32) Πόσον εἶνε ά) τὸ 6^{ον} μέρος τῶν 28 λιρ. 13 σελ. 7 $^3/_4$ πεν. β') τὸ 18^{ον} τῶν 324 πήχ. 7 $^4/_9$ ῥουπ. γ') τὸ 9^{ον} τῶν 25 ἡμ. 17 ὥρ. 25 $^2/_5$ λεπ.;

33) Ἡ λίτρα στοιχίζει 15 σελ. 10 πέν., πόσον στοιχίζουσι τὰ $^3/_5$, $^5/_6$, $^{13}/_{16}$ λίτρας;

34) Ὁ πῆχυς στοιχίζει 27 δραχ. 58 λεπ., πόσον στοιχίζουσιν $^1/_4$, $^4/_5$, $^9/_{16}$ $3\,^3/_4$ πήχ.,

35) Ὁ στατὴρ ἀξίζει 17 λίρ. 15 σελ. 8 πέν., πόσον ἀξίζουσιν $9\,^2/_3$, $12\,^3/_4$, $15\,^5/_6$ στατ.,

36) Ὁ στατὴρ ἀξίζει 8 σελ. $11\,^5/_8$ πέν, πόσον ἀξίζουσιν $7\,^1/_4$ στατ., $5\,^2/_3$, $4\,^3/_8$;

37) Ἡ ὑάρδα τιμᾶται 27 λίρ. 13 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ., πόσον τιμῶνται 8 ὑάρδ. 2 πόδ. 9 δάκτ. 11 γραμ.;

38) Ὁ πῆχυς τιμᾶται 8 δραχ. 65 λεπ., πόσον τιμῶνται 13 πήχ. $7\,^1/_2$ ῥούπ.;

39) Διὰ $^5/_8$ πήχ. ἐπλήρωσα 23 δραχ. 38 λεπ., πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

40) Διὰ $5\,^2/_3$ στατ. ἐπλήρωσα 13 τάλ. 4 δραχ. 70 λεπ., πόσον ἀξίζει ὁ στατήρ;

41) Διὰ $8\,^5/_6$ ὑάρδας ἐπλήρωσα 34 λίρ. 13 σελ. 9 πέν. 2 φαρδ., πόσον ἀξίζει ἡ ὑάρδα;

42) Διὰ 8 ὑάρδ. 2 πόδ. 9 δακτ. ἐπλήρωσα 25 λίρ. 18 σελ. 11 πέν., πόσον ἀξίζει ἡ ὑάρδα;

43) Μὲ μίαν λίραν ἀγοράζω 17 ὑάρδ. 1 πόδ. 7 δακτ. 9 γραμ., πόσον ἀγοράζω μὲ 23 λίρ. 16 σελ. 10 πέν.,

44) Ἐὰν ὁ στατὴρ ἔχῃ 3 τάλ. 1 δραχ. 45 λεπ., πόσους στατῆρας θὰ λάβω μὲ 72 τάλ. 2 δραχ. 80 λεπ.;

Προβλήματα πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν.

45) Τρέψον τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 5 ὥρ. 48 λεπ. 48 δεύτερα, καθ' ὃν τὸ ἔτος εἶνε μεγαλείτερον τῶν 365 ἡμερῶν, εἰς κλάσμα ἡμέρας.

46) Τρέψον $^{20}/_7$ ἡμ. εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

47) Ἤρχισέ τις τὰ γράμματα ἐν ἡλικίᾳ 5 ἐτ. 11 μην. 27 ἡμ., μετὰ 4 ἔτ. 3 μῆν. προεβιβάσθη εἰς τὸ ἑλλ. σχολεῖον, μετὰ δὲ 3 ἔτ. 8 μῆν. 15 ἡμ. εἰς τὸ γυμνάσιον, μετὰ 4 ἔτ. 2 μ, 20 ἡμ. ἐνεγράφη φοιτητὴς ἐν τῷ πανεπιστημίῳ, μετὰ 4 ἔτ. 6 μ. 25 ἡμ. μεταβὰς εἰς Γερμανίαν ἐσπούδασεν ἔτι 1 ἔτ.

5 μ. 24 ἡμ. Ἔπειτα μετὰ 1 ἔτ. 7 μ. 17 ἡμ. ἀπὸ τῆς ἀποφοιτήσεώς του διωρίσθη εἰς ὑπηρεσίαν. Πόσην ἡλικίαν εἶχε τότε; (ὁ μὴν λογίζεται 30 ἡμερῶν).

48) Ἐξ 730 στατ. 23 ὀκ. 165 δρ. ἐπωλήθησαν 289 στατ. 35 ὀκ. 250 δρ. Πόσον μένει;

49) Ἡ ταχυτάτη ἀτμάμαξα διέτρεξεν εἰς τὸ λεπτὸν 1618 ὑάρδ. 2 πόδ. 11 δακτ., πόσα Ἀγγλ. μίλια ἐκ 1760 ὑαρδ. διατρέχει ά) εἰς 17 λεπ., β) εἰς 1 ὥρ., γ) εἰς 7 ὥρ. 37 λεπ.;

50) Ὁ σεληνιακὸς μὴν ἔχει 29 ἡμ. 12 ὥρ. 44 λεπ. 3 δεύτ. Πόσας ἡμέρας ἔχουσι ά) 7 σεληνιακοὶ μῆνες, β') 12, γ') 19, δ') 47, ε) 235;

51) Ὁ χρόνος τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιστροφῆς τοῦ πλανήτου Ἀφροδίτης τοῦ κοινῶς λεγομένου Αὐγερινοῦ εἶνε 224 ἡμ. 16 ὥρ. 41 λεπ. 25 δεύτ. Τοῦ χρόνου τούτου τὸ 8πλάσιον μεγαλείτερον εἶνε ἢ μικρότερον 5 ἐτῶν ἐχόντων ἀνὰ 365 ἡμ. 5 ὥρας 48 λεπτ. 48 δεύτ.;

52) Εἰς 19 ἔτη ἡ Σελήνη κάμνει 235 περιστροφὰς περὶ τὴν Γῆν. Εἰς πόσον καιρὸν κάμνει μίαν περιστροφήν, ἐὰν τὸ ἔτος ἔχῃ 365 ἡμ. 5 ὥρ. 48 λεπ. 48 δεύτ.;

53) Πολλαπλασίασον 17 λίρ. 15 σελ. 7 πέν. ἐπὶ ά) 24, β) 21, γ) 45, δ) 63, ε) 315 (*).

54) Πολλαπλασίασον 367 στατῆρας 23 ὀκ. ἐπὶ α) 73, β) 53 (**).

55) Κρουνός τις χύνει 13 κυβικὰ μέτρα ὕδατος εἰς 1 ἡμ. 17 ὥρ. 49 λεπ. Εἰς πόσον καιρὸν χύνει ἓν κυβ. μέτρον;

56) Ἐὰν 20 ὑάρδαι τιμῶνται 17 λίρ., πόσον τιμᾶται 1 ὑάρδα; (***)

57) Διαίρεσον ἀπὸ μνήμης α) 6 $^1/_2$ λίρ. : 20, β) 13 $^2/_3$

(*) Πολλαπλασίασον τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τοὺς παράγοντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· εἶνε δὲ $24=3.8$, $21=3.7$, $45=9.5$, $63=9.7$, $315=63.5$.

(**) Θεώρησον α) $73=8\times9+1$, β) $53=6\times9-1$.

(***) Ἐὰν 20 ὑάρδ. τιμῶνται 1 λίρ., 1 ὑάρδ. τιμᾶται 1 σελ., ἐὰν δὲ 20 ὑάρδ. τιμῶνται 17 λίρ., 1 ὑάρδ. τιμᾶται 17 σελ.

λίρ.: 20, γ) $5\,^1/_2$ πήχ.: 8, δ) $67\,^1/_4$ δραχ.: 100, ε) 25 $^3/_4$ στατ.: 44.

58) Ὁμοίως α) $7\,^3/_4$ λίρ.: 40, β) $9\,^1/_2$ λίρ.: 10, γ) 3 $^1/_2$ λίρ.: 5, δ) $32\,^1/_2$ στατ.: 88, ε) $8\,^2/_3$ στατ.: 22 ζ) $35\,^1/_2$ δρ.: 50, η) $7\,^3/_4$ ὥρ.: 30, θ) $15\,^1/_2$ ὥρ.: 120.

59) Διαίρεσον 37 λίρ. 13 σελ. 7 πεν. 2 φαρδ. διὰ α) 56, β) 63, γ) 81 (*).

60) Εὑρὲ τὸ 3ον μέρος τῶν 2 στατ. 41 ὀκ. (**).

61) Διαίρεσον α) 4 δρ. 90 λεπ. διὰ 5, β) 11 στατ. 32 ὀκ. διὰ 6, γ) 23 λίρ. 12 σελ. διὰ 8, δ) 55 στατ. 37 ὀκ. διὰ 7.

62) Μεταξὺ τῶν πλανητῶν ὁ μὲν ἀπώτατος Ποσειδῶν κάμνει μίαν περὶ τὸν Ἥλιον περιστροφὴν εἰς 165 ἔτη (ἔχοντα ἀνὰ 365 ἡμ.) 357 ἡμ. 5 ὥρ. 30 λεπ., ὁ δὲ πλησιέστατος Ἑρμῆς εἰς 87 ἡμ. 23 ὥρ. 15 λεπ. 46 δεύτ. Πόσας περιστροφὰς κάμνει ὁ Ἑρμῆς ἐν ᾧ χρόνῳ ὁ Ποσειδῶν κάμνει μίαν;

63) Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μοίρας (360^0), 1^0 εἰς 60 λεπτὰ $(60')$, $1'$ εἰς 60 δευτερόλεπτα $(60'')$, εἰς πόσα δὲ μέρη δύναται νὰ διαιρεθῇ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσιν ἀνὰ $2^0\,48'\,45''$;

64) 60 πεντάφραγκα ἔχουσι βάρος 1 ὀκ. 68 $^3/_4$ δράμ. (1 $^1/_2$ χιλιόγραμμον), πόσα δράμ. ἔχει ἓν πεντάφραγκον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 58.

Τὰ ἑξῆς κλάσματα $^7/_{10}$, $^{8325}/_{100}$, $^{23}/_{1000}$ κ. τ. τ. συμφωνοῦσι κατὰ τοῦτο, ὅτι ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν εἶνε τὸ 1 μετὰ προςηρτημένων μηδενικῶν. Τοιαῦτα δὲ κλάσματα ὀνομάζονται, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἄλλων κλασμάτων, *δεκαδικὰ κλάσματα.*

(*) Ἐπειδὴ εἶνε 56=7. 8, διαίρεσον πρῶτον διὰ 7, καὶ τὸ πηλίκον διὰ 8, κ. τ. λ.

(**) Θεώρησον 2 στατ. 41 ὀκ.=3 στατ.—3 ὀκ.

Ἵνα γνωρίσω κλάσμα τι κοινόν, π. χ. $^{83}/_{725}$, ἀνάγκη νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὁ ἀριθμητὴς 83 καὶ ὁ παρονομαστὴς 725. Εἰς τὸ δεκαδικὸν ὅμως κλάσμα, π. χ. $^{825}/_{100}$, μοῦ ἐξαρκεῖ ἡ γνῶσις τοῦ ἀριθμητοῦ 825, ἐὰν γνωρίζω προςέτι ὅτι ὁ παρονομαστὴς ἔχει δύο μηδενικά. Τοῦτο δὲ σημαίνομεν συνήθως διὰ πολὺ ἁπλοῦ τρόπου, χωρίζοντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ 825 τὰ δύο τελευταῖα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ὡς ἐφεξῆς

8,25.

Οὕτω λοιπὸν σημαίνομεν κλάσμα δεκαδικόν, τοῦ ὁποίου ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶνε 825, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἔχει δύο μηδενικά, ἤτοι εἶνε 100, ἐπειδὴ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ὑπάρχουσι δύο ψηφία. Ὁμοίως

ἀντὶ $^{329}/_{10}$ γράφομεν συντομώτερον 32,9

ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 10 ἔχει ἓν μόνον μηδενικόν, ἀποκόπτοντες μόνον τὸ τελευταῖον ψηφίον δι' ὑποδιαστολῆς· προςέτι ἀντὶ $^{7893}/_{1000}$ γράφομεν 7,893, ἀποκόπτοντες ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ 7893 τὰ τρία τελευταῖα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἵνα σημάνωμεν, ὅτι ἔχει παρονομαστὴν 1000. Ἐν γένει λοιπὸν *εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα γράφομεν μόνον τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀποκόπτομεν ἀπ' αὐτοῦ ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερὰ τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.*

Ἐνταῦθα ὅμως ἐνδέχεται, ὡς ὅταν πρόκειται νὰ γράψωμεν π. χ. $^{7}/_{1000}$, νὰ ἔχῃ ὁ παρονομαστὴς μηδενικὰ πλειότερα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμητοῦ. Τότε ἀναπληρώνομεν τὰ ἐλλείποντα ψηφία διὰ μηδενικῶν, τὰ ὁποῖα γράφομεν πρὸς ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 7, οὕτω 007, ἔπειτα γράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ἓν ἔτι μηδενικόν· οὕτως εἶνε $^{7}/_{1000}=0,007$.

Ἔτι δὲ καὶ ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἔχῃ ψηφία ἰσάριθμα μὲ τὰ μηδενικὰ τοῦ παρονομαστοῦ, π. χ. $^{88}/_{100}$, γράφομεν ἓν ἔτι μηδενικὸν πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, οὕτως $^{88}/_{100}=0,88$· διότι δὲν συγχωρεῖται νὰ ἀρχίζῃ δεκαδικὸν κλάσμα ἐκ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Κατὰ ταῦτα ἀναγινώσκεται καὶ γράφεται

$72{,}56=\frac{7256}{100}$ $\qquad$ $\frac{7}{10}=0{,}7$

$0{,}3481=\frac{3481}{10000}$ $\qquad$ $\frac{28795}{100}=287{,}95$

$1792{,}3=\frac{17923}{10}$ $\qquad$ $\frac{54}{1000}=0{,}054$

$9{,}005=\frac{5}{1000}$ $\qquad$ $\frac{3}{1000000}=0{,}000003$

κ. τ. ἑ.

§ 59.

Ἐὰν ζητῆται, πόσαι ἀκέραιαι μονάδες ὑπάρχουσιν εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα

$$27{,}893=\frac{27893}{1000},$$

βλέπω ἀμέσως, ὅτι εἶνε 27 μονάδες καὶ $\frac{893}{1000}=0{,}893$.

Ἐν γένει *ἕκαστον δεκαδικὸν κλάσμα χωρίζεται εἰς δύο μέρη, εἰς ἀκέραιον ἀριθμόν, ὅστις κεῖται πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ εἰς κύριον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς κεῖται μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.* Ὅταν ὅμως πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ὑπάρχῃ μηδενικόν, π. χ. 0,893, τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχουσι μονάδες ἀκέραιαι.

Τὸ δὲ κλάσμα $0{,}893=\frac{893}{1000}$ δύναμαι πάλιν νὰ ὑποδιαιρέσω εἰς τρία μέρη, δηλ. εἰς

$$\frac{800}{1000}+\frac{90}{1000}+\frac{3}{1000}=\frac{8}{10}+\frac{9}{100}+\frac{3}{1000}.$$

Ὅθεν δύναμαι τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 27,893 νὰ ἀναγνώσω κατὰ τρεῖς τρόπους, δηλ.

1) $27{,}893=\frac{27893}{1000}$

(ἀνάγνωσον 27893 χιλιοστά).

2) $27{,}893=27+\frac{893}{1000}=27+0{,}893$

(ἀνάγνωσον 27 μονάδες καὶ 893 χιλιοστά).

3) $27{,}893=27+0{,}8+0{,}09+0{,}003=27+\frac{8}{10}+\frac{9}{100}+\frac{3}{1000}$

(ἀνάγνωσον 27 μονάδες 8 δέκατα 9 ἑκατοστὰ 3 χιλιοστά).

§ 60.

Ὁ τελευταῖος οὗτος τρόπος τοῦ ἀναγινώσκειν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶνε πολὺ οὐσιώδης. Ἤγουν, ἐπειδὴ 1 μονὰς ἀκεραία εἶνε δεκαπλασία τοῦ $^1/_{10}$, ὡς τὸ $^1/_{10}$ εἶνε δεκαπλάσιον τοῦ $^1/_{100}$, καὶ τὸ $^1/_{100}=10\times{}^1/_{1000}$ κ. τ. έ., συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα πᾶσα μονὰς ἀνωτέρας θέσεως εἶνε δεκαπλασία μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἑπομένης θέσεως. *Λοιπὸν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ἔγεινε κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον, καθ' ὃν καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμός*· διότι καὶ εἰς τὸν ἀκέραιον πᾶν ψηφίον ἀνωτέρας θέσεως σημαίνει μονάδας $10^{κις}$ μεγαλειτέρας τῶν τῆς ἑπομένης, 1 δεκὰς=10 μονάδας, 1 ἑκατοντὰς=10 δεκάδας, 1 χιλιὰς=10 ἑκατοντάδας κ. τ. έ. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ λογισμοὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὡς θέλει δειχθῆ κατωτέρω, γίνονται μὲ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ οἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 61.

Τὸ κυριώτατον εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶνε ἡ ὑποδιαστολή· διότι ἐκ τῆς θέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς ὁρίζεται ποῖον ψηφίον σημαίνει μονάδας, ποῖον $10^{τα}$, $100^{στα}$, $1000^{στα}$ κ.τ.έ.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα π. χ.

25, 3762

μεταθέσω τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν πρὸς δεξιά, ἤγουν γράψω αὐτὸ οὕτω

253,762

αἱ 25 μονάδες γίνονται 25 δεκάδες, τὰ $^3/_{10}$ γίνονται 3 μονάδες, τὰ $^7/_{100}$ γίνονται $^7/_{10}$, τὰ $^6/_{1000}$ γίνονται $^6/_{100}$ καὶ τὰ $^2/_{10000}$ γίνονται $^2/_{1000}$· ὅθεν εἰς τὸ νέον κλάσμα ἕκαστον ψηφίον σημαίνει μονάδας δεκάκις μεγαλειτέρας ἢ πρότερον, καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα ἔγεινε δεκαπλάσιον. Ἐκ τούτου πορίζομαι τὸ ἑξῆς συμπέρασμα· *Ἐὰν εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα μεταθέσω τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς δεξιά, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ* 10.— *Ἐὰν ὅμως ἀντιστρόφως μεταθέσω τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν θέσιν* ἐκ *δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ* **10.**— Διότι ἐὰν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὸ κλάσμα

$$97,26$$

τρέψω εἰς

$$9,726$$

αἱ 9 δεκάδες γίνονται 9 μονάδες, αἱ 7 μονάδες γίνονται $^7/_{10}$, τὰ $^2/_{10}$ γίνονται $^2/_{100}$, καὶ τὰ $^6/_{100}$ γίνονται $^6/_{1000}$. Ὅθεν ἕκαστον ψηφίον ἤδη σημαίνει μονάδας δεκάκις μικροτέρας ἢ πρότερον, καὶ ἐπομένως τὸ κλάσμα ἔγεινεν ὁμοίως $10^{\text{κις}}$ μικρότερον.

Ἐξ ἐναντίας *τὸ δεκαδικὸν κλάσμα δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσκολλήσω εἰς αὐτὸ ἓν ἢ πολλὰ μηδενικά.* Ἀντὶ π. χ.

$$327,56$$

δύναμαι νὰ γράψω καὶ οὕτω

$$327,5600$$

διότι καὶ τὸ ἓν καθὼς καὶ τὸ ἄλλο σημαίνουσι 327 ἀκεραίας μονάδας 5 δέκατα 6 ἑκατοστὰ μηδὲν χιλιοστὰ μηδὲν δεκάκις χιλιοστά, κ. τ. ἑ.

§ 62.

Ἐκ τούτου δὲ συμπεραίνω προσέτι, ὅτι ἐὰν εἰς πολυψήφιόν τι δεκαδικὸν κλάσμα, π. χ. εἰς τὸ

$$798,362954,$$

παραλείψω τὰ τρία τελευταῖα ψηφία 954, τὰ παραλειφθέντα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον μιᾶς μονάδος τοῦ τελευταίου ἐκ τῶν διατηρηθέντων ψηφίων, λοιπὸν ἐνταῦθα τοῦ ψηφίου τῆς τρίτης θέσεως·

Διότι τὸ μὲν παραλειφθὲν εἶνε

$$0,000954 = {}^{954}/_{1000000}$$

μία δὲ μονὰς τῆς τρίτης θέσεως εἶνε

$$0,001 = {}^{1}/_{1000} = {}^{1000}/_{1000000}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $1000 > 954$, πρέπει νὰ ἦνε καὶ

$${}^{1000}/_{1000000} > {}^{954}/_{1000000}.$$

Τοῦτο δὲ εἶνε πάλιν μέγα πλεονέκτημα, τὸ ὁποῖον παρέχουσι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα. Διότι εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις δὲν ἀπαιτεῖται ἐντελεστάτη ἀκρίβεια, ἀλλὰ πολλάκις μᾶς ἀρκεῖ προσέγγισίς τις. Ἐὰν π.χ. ἔκ τινος προβλήματος εὗρον

798,362954 τάλ.,

δύναμαι κάλλιστα νὰ ἀρκεσθῶ, ἐὰν γνωρίζω τὰ ἀκέραια, τὰ $10^{τα}$ τὰ $100^{στὰ}$ καὶ τὸ πολὺ τὰ $1000^{στὰ}$ ταλήρου· διότι ὅ,τι εἶνε μικρότερον τοῦ $^1/_{1000}$ ταλ. καὶ ἑπομένως δὲν ἀποτελεῖ οὐδὲ ἓν λεπτόν, δύναμαι βεβαίως νὰ παραλείψω.

Δύναμαι λοιπὸν ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ νὰ θέσω τὸν συντομώτερον 798,862.

§ 63.

Ἐκ τῶν πλεονεκτημάτων τούτων, ἐπειδὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἡ πληθὺς σχετικῶς εἶνε μικρά, μικρὸν ὄφελος ἠθέλομεν ἔχει, ἐὰν δὲν ἐτρέποντο μετ' εὐκολίας καὶ τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικά. Εἴς τινα μὲν κλάσματα γίνεται τοῦτο φανερὸν ἐκ πρώτης ὄψεως, π.χ. εἰς τὰ ἀκόλουθα

$$^1/_2 = {}^5/_{10} = 0,5$$

$$^3/_5 = {}^6/_{10} = 0,6$$

$$^7/_{50} = {}^{14}/_{100} = 0,14 \text{ κ. τ. τ.}$$

Εἰς ἄλλα δὲ κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν τρέπονται τόσον εὐκόλως εἰς δεκαδικά, πράττω ὡς ἑξῆς· Ζητῶ πρῶτον πόσαι ἀκέραιαι μονάδες ἐμπεριέχονται εἰς τὸ κλάσμα, ἔπειτα πόσα $10^{τα}$, πόσα $100^{στὰ}$ κ. τ. ἑ. Ἐὰν π. χ. ἦνε δεδομένον τὸ κλάσμα $^{23}/_8$, ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|r|l} 8 & 23 & 2,875 \\ & 70 & \\ & 60 & \\ & 40 & \end{array}$$

Ἐνταῦθα διαιρῶ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 τὸν ἀριθμητὴν 23, καὶ εὑρίσκω 2 μονάδας πηλίκον καὶ 7 μονάδας κατάλοιπον. Τὰς 7 ταύτας μονάδας τρέπω εἰς $10^{τα}$ λέγων 7 μονάδες εἶνε $^{70}/_{10}$, καὶ ὁ 8 εἰς $^{70}/_{10}$ εἰσέρχεται $^8/_{10}$ =0,8 καὶ μένει $^6/_{10}$ κατάλοιπον. Τὸ κατάλοιπον $^6/_{10}$ τρέπω εἰς $^{60}/_{100}$

καὶ λέγω ὁ 8 διαιρῶν $^{60}/_{100}$ δίδει $^{7}/_{100}$=0,07 πηλίκον καὶ $^{4}/_{100}$ κατάλοιπον. Τὰ $^{4}/_{100}$ τρέπω εἰς $^{40}/_{1000}$, καὶ λέγω ὁ 8 διαιρῶν $^{40}/_{1000}$ δίδει $^{5}/_{1000}$=0,005 πηλίκον καὶ μηδὲν κατάλοιπον. Ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον συνίσταται ἐκ 2 μονάδων 8 δεκάτων 7 ἑκατοςῶν καὶ 5 χιλιοστῶν· λοιπὸν εἶνε τὸ κλάσμα

$$^{23}/_{8}=2,875.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλω τρέψει καὶ τὸ κλάσμα $^{3}/_{125}$·

$$\begin{array}{r|l|l} 125 & 3,00 & 0,024 \\ & 500 & \\ & 0 & \end{array}$$

Ἐνταῦθα λέγω, ὁ 125 διαιρῶν 3 μονάδας δίδει μηδὲν μονάδας, ὁ 125 διαιρῶν $^{30}/_{10}$ δίδει ἔτι μηδὲν δέκατα, ὁ 125 διαιρῶν $^{300}/_{100}$ δίδει $^{2}/_{100}$ καὶ κατάλοιπον $^{50}/_{100}$, $^{50}/_{100}$ εἶνε=$^{500}/_{1000}$, ὁ 125 διαιρῶν $^{500}/_{1000}$ δίδει πηλίκον ἐντελὲς $^{4}/_{1000}$. Λοιπὸν εἶνε

$$^{3}/_{125}=0,024.$$

§ 64.

Θέλω προςπαθήσει προςέτι νὰ τρέψω καὶ τὸ $^{5}/_{11}$ εἰς δεκαδικόν. Ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l|l} 11 & 7,0 & 0,6363\ldots \\ & 40 & \\ & 70 & \\ & 40 & \\ & 70 & \end{array}$$

Ἐνταῦθα βλέπω ὅτι ἐπανέρχονται πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ ὅτι ὑπολογισμὸς οὐδέποτε δύναται ν' ἀποπερατωθῇ. Λοιπὸν δύο περιπτώσεις εἶνε νοηταί, ἢ θέλω νὰ ἐκφράσω πάντη ἀκριβῶς τὸ $^{7}/_{11}$ διὰ δεκαδικοῦ κλάσματος, καὶ τότε ἡ ἀπόκρισις εἶνε, ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, διότι ὁ ὑπολογισμὸς οὐδέποτε περατοῦται, ἢ ἀρκοῦμαι νὰ ἐκφράσω τὸ $^{7}/_{11}$ ὡς δεκαδικὸν κλάσμα μέχρι τινὸς βαθμοῦ ἀκριβείας, π. χ. μέχρις ὀλιγωτέρου τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ, δηλ. ὥςτε νὰ μὴ ἐλλείπῃ ἐξ αὐτοῦ μηδὲ ἓν ἑκατομμυριοστόν, τότε δύναμαι νὰ θέσω

$$^7/_{11}=0,636363.$$

Ἡ δὲ περίπτωσις αὕτη, καθ' ἣν ὁ ὑπολογισμὸς δὲν περατοῦται, εἶνε ἡ συχνοτάτη. Τὰ ὀλιγώτατα ἐκ τῶν κλασμάτων δύνανται νὰ τραπῶσιν εἰς ἐντελῆ δεκαδικά. Τὰ δὲ κλάσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐπανέρχονται πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκτείνωμεν αὐτά, ὀνομάζονται *περιοδικά*.

§ 65.

Ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶνε πολὺ εὐκολωτέρα τῆς προσθέσεως τῶν κοινῶν κλασμάτων. Διότι εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δὲν δύνανται νὰ ὑπάρξωσιν ἄλλα μέρη ἢ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστὰ κ. τ. ἑ. Ἐὰν λοιπὸν ἦνε δεδομένα νὰ προστεθῶσι π. χ. 27,5· 3,459· 345,28· 0,037· 52,407, χρειάζεται πρῶτον νὰ γράψω τὰ κλάσματα οὕτως, ὥςτε νὰ ἦνε μονάδες ὑπὸ μονάδας, δέκατα ὑπὸ δέκατα, ἑκατοστὰ ὑπὸ ἑκατοστὰ κ. τ. ἑ. Κατορθώνω δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν θέσω τὰς ὑποδιαστολὰς τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην οὕτως,

$$\begin{array}{r} 27,5 \\ 3,459 \\ 345,28 \\ 0,037 \\ 52,407 \\ \hline 428,683 \end{array}$$

Ἤδη κεῖνται αἱ μονάδες ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰ δέκατα ὑπὸ τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστὰ ὑπὸ τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστὰ ὑπὸ τὰ χιλιοστά. Ὅθεν δύναμαι ἤδη πολὺ εὐκόλως νὰ προςθέσω, ἀρχίζων ἐκ δεξιῶν, πρῶτον τὰ χιλιοστά, ἔπειτα τὰ ἑκατοστά, ἔπειτα τὰ δέκατα, καὶ τέλος τὰς ἀκεραίας—μονάδας, δεκάδας κ. τ. ἑ.—καὶ νὰ κάμω τὴν πρόςθεσιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· διότι εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, πᾶσα ἀνωτέρα μονὰς εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας.

Ὅθεν ὁ κανὼν τῆς προςθέσεως τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶνε ὁ ἑξῆς· *Γράψον ὑποδιαστολὴν ὑπὸ ὑποδιαστολὴν καὶ πρόσθες ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.*

§ 66.

Ὁ αὐτὸς κανὼν ὑπάρχει καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν. Ἐὰν θέλω ν' ἀφαιρέσω π.χ. 7,856 ἀπὸ 19,0324, ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 19,0324 \\ 7,856 \\ \hline 11,1764 \end{array}$$

Ἐνταῦθα ἔγραψα πάλιν μονάδας ὑπὸ μονάδας, $10^{\text{τα}}$ ὑπὸ $10^{\text{τα}}$, $100^{\text{ϛὰ}}$ ὑπὸ $100^{\text{ϛὰ}}$ κ.ἑ. ἔπειτα ἀφήρεσα ἀρχίσας ἐκ δεξιῶν. Ἐὰν ὅμως πρόκειται ν' ἀφαιρέσω 0,0795 ἀπὸ 320,84, ἐπειδὴ ἐνταῦθα ὁ μειωτέος ἔχει δεκαδικὰ ψηφία ὀλιγώτερα τοῦ ἀφαιρετέου, ἵνα γείνῃ ἡ ἀφαίρεσις εὐκολώτερον, ἀναπληρῶ τὰς ἐλλειπούσας θέσεις διὰ μηδενικῶν· διότι τὸ δεκαδικὸν κλάσμα (κατὰ § 61) δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν προσαρτήσωμεν εἰς αὐτό· ἔχω λοιπὸν

$$\begin{array}{r} 320,8400 \\ 0,0795 \\ \hline 320,7605. \end{array}$$

§ 67.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ πολλαπλασιάσω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 7,6 ἐπὶ τὸ 0,24, ἀκολουθῶ τὸν ἐν § 40 κανόνα· Κλάσματα πολλαπλασιάζονται, ἐὰν πολλαπλασιάσω ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Οἱ μὲν ἀριθμηταὶ ἐνταῦθα εἶνε 76 καὶ 24, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εὑρίσκω κατὰ τὸν συνήθη τρόπον,

$$\begin{array}{r} 76 \\ 24 \\ \hline 304 \\ 152 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Οἱ δὲ παρονομασταὶ εἶνε 10 καὶ 100, καὶ τὸ γινόμενον

αὐτῶν εἶνε 1000. ὅθεν τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶνε
$^{1824}/_{1000}=1,824$.

Τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα λοιπὸν εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο δεδομένων κλασμάτων. Ἐὰν δὲ ἤδη ἐρωτηθῶ, διὰ τίνος λογισμοῦ εὗρον τὸ κλάσμα τοῦτο, δίδω τὴν ἑξῆς ἀπόκρισιν· Τὰ μὲν ψηφία, μὲ τὰ ὁποῖα εἶνε γεγραμμένον τὸ κλάσμα 1,824, εὑρίσκω ἐὰν πολλαπλασιάσω τὰ ψηφία τῶν δεδομένων κλασμάτων 7,6 καὶ 0,24 κατὰ τὸν συνήθη τρόπον· ἵνα δὲ προςδιορίσω ὀρθῶς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζω μὲ πόσα μηδενικὰ εἶνε γεγραμμένος ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος, ὁ μὲν εἷς τῶν δεδομένων παρονομαστῶν 10 ἔχει ἓν μηδενικόν, ὁ δὲ ἕτερος 100 ἔχει δύο, λοιπὸν ὁ ζητούμενος παρονομαστὴς ἔχει τρία, ἤγουν πάντοτε τόσα, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παρονομασταί. Ὅσα δὲ μηδενικὰ ἔχει ὁ παρανομαστής, τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει τὸ κλάσμα. Ὅθεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων δύναμαι νὰ ἐκφράσω ὡς ἑξῆς· *Πολλαπλασίασον ὡς ἀκεραίους ἀριθμούς, καὶ χώρισον ἐκ τοῦ γινομένου τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ· λοιπὸν*

$$\begin{array}{r}
7,6 \\
0,24 \\
\hline
304 \\
152 \\
\hline
1,824
\end{array}$$

Δεύτερον παράδειγμα· $0,0305 \times 0,072$.

$$\begin{array}{r}
0,0305 \\
0,072 \\
\hline
610 \\
2135 \\
\hline
0,0021960
\end{array}$$

(Τὰ δύο κλάσματα ἔχουσιν ὁμοῦ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν 21960 ἔχει πέντε μόνον ψηφία· ὅθεν πρέπει, ἵνα διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς χωρίσωμεν ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία, νὰ προςγράψωμεν εἰς αὐτὸ καὶ δύο μηδενικά, καὶ ἓν ἔτι πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς).

Τρίτον παράδειγμα· $34,05 \times 732$

$$\begin{array}{r} 34,05 \\ 732 \\ \hline 6810 \\ 10215 \\ 23835 \\ \hline 24924,60. \end{array}$$

§ 68.

Εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὡς καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κοινῶν κλασμάτων, διακρίνω δύο περιπτώσεις, ἢ τὰ *κλάσματα ἔχουσι* τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δηλ. *ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, ἢ ὄχι. Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν*, ὅταν π. χ. πρόκειται νὰ διαιρέσω 7,52 διὰ 3,46, χρειάζεται νὰ διαιρέσω *προδήλως μόνον τοὺς ἀριθμητὰς* 752 *καὶ* 346 *τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου*— κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς § 63.—λοιπὸν 3,46 | 7,52 | 2,173

$$\begin{array}{r} 600 \\ 2540 \\ 1180 \\ 1420 \end{array}$$

καὶ οὕτως ἐξακολουθῶ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον κατὰ τὸν βαθμὸν τῆς ἀκριβείας, τὸν ὁποῖον θέλω. *Εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅταν τὸ ἓν κλάσμα ἔχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἑτέρου*, ὡς π. χ. ὅταν πρόκειται νὰ διαιρέσω 72,5 διὰ 0,936, προςκολλῶ εἰς τὸ κλάσμα τὸ ἔχον τὰ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία τόσα μηδενικά, ὥστε νὰ ἔχῃ ἰσάριθμα μὲ τὸ ἕτερον, καὶ ἔπειτα ἐκτελῶ τὸν ὑπολογισμὸν ὡς ἀνωτέρω· λοιπὸν ἀντὶ

0,936 | 72,5

θέτω 0,936 | 72,500 | 77,457
6,980
4280
5360
6800
248

κ. τ. έ. Έστω προςέτι νὰ διαιρεθῆ 0,852 διὰ 0,9· τότε γράφω

0,9(00 | 0,8(52 | 0,9466
42
60
60
6

κ. τ. έ. Τέλος θέλω διαιρέσει ἔτι 51 διὰ 876,04. Ἐνταῦθα γράφω πρῶτον

876,04 | 51,00

καὶ ἐπειδὴ τὸ πηλίκον δὲν ἔχει ἀκεραίας μονάδας οὐδὲ δέκατα, γράφω

876,04 | 51,0000 | 0,0582
719800
189980
14472 κ. τ. έ.

Σημ. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις, καθ' ἃς ὁ διαιρέτης ἔχει δεκαδικὰ ψηφία ὀλιγώτερα τοῦ διαιρετέου, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα

0,9 | 0,852,

δυνάμεθα καὶ ν' ἀποφύγωμεν παντάπασι τὴν προςθήκην τῶν μηδενικῶν, μετακινοῦντες τὴν ὑπαδιαστολὴν εἰς τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον ἰσαρίθμους θέσεις, μέχρις οὗ ὁ διαιρέτης γείνῃ ὅλος ἀκέραιος, καὶ οὕτως ἐκτελοῦμεν τὸν ὑπολογισμόν,

9 | 8,52 | 0,946 . . .
42
60
6

Ἐνταῦθα διῄρεσα διὰ 9 πρῶτον 8 μονάδας, καὶ εὗρον 0 μονάδας, ἔπειτα διῄρεσα 85 δέκατα, καὶ εὗρον 9 δέκατα, καὶ οὕ.ε.ὡς ἐν § 63.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τίνα δεκαδικὰ κλάσματα εἶνε 10, 100, 1000 φορὰς μεγαλείτερα τοῦ 2,7549;

2) Τίνα δεκαδικὰ κλάσματα εἶνε 10, 100, 1000 φορὰς μικρότερα τοῦ 5879,462;

3) Φέρε τὰ ἑξῆς δεκαδικὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, α) 0,7 καὶ 0,53, ϐ) 0,73 καὶ 0,7564, γ) 3,50 καὶ 7, δ) 5,986 καὶ 3,2 καὶ 9,37543, ε) 25,7. 8,564. 0,00001 καὶ 1.

4) Ἐὰν ἀντὶ 0,3042 τάλ. θέσω 0,304 τάλ., πόσον λάθος κάμνω;

5) Ἐὰν ἀντὶ 0,75287 θέσω α) 0,752, ϐ΄) 0,753, πόσον λάθος κάμνω τὴν πρώτην καὶ πόσον τὴν δευτέραν φοράν, καὶ ποῖον ἐκ τῶν δύο λαθῶν εἶνε μικρότερον;

6) Τρέψον εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τὰ ἑξῆς κοινά· α) $^3/_4$, ϐ) $^5/_8$, γ) $^3/_{40}$, δ) $^7/_{16}$, ε) $^3/_{50}$, ζ) $^4/_{625}$, η) $^{39}/_{64}$, θ) $^1/_{800}$.

7) Προςέτι α) $^2/_3$, ϐ) $^7/_{12}$, γ) $^3/_{11}$, δ) $^5/_{24}$, ε) $^2/_{37}$, ζ) $^5/_7$, η) $^5/_{32}$, θ) $^{82}/_{99}$, ι) $^3/_{128}$, κ) $^{15}/_{28}$, λ) $^{37}/_{60}$, μ) $^2/_{407}$.

8) Πρόςθες α) 23,56+4,938+708,5, ϐ) 0,039+728+5,6+921,831+5,27, γ) 92,88+4,7812+0,3291+75,4+72,396+5,8231, δ) 7,8+92,5+3,4+17,56+2,38479+728,357, ε) 2,37+4,1+5,029+734,1+0,293+24.

9) Ἐκτέλεσον τὰς ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

α) 28,9—17,5	η) 17,2—6,93
ϐ) 7,45—2,09	θ) 8,45—0,6923
γ) 36,402—29,563	ι) 316,4—2,93782
δ) 5,2946—2,842	κ) 80—12,72
ε) 45,821—17,3	λ) 99—3,4209
ζ) 30,02765—8,452	μ) 5—4,936.

10) Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων ποσάκις ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶνε μεγαλειτέρα τῆς διαμέτρου εἶνε 3,14159265. Τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐκφράζουσι κατὰ προσέγγισιν καὶ τὰ κλάσματα $^{22}/_7$ καὶ $^{355}/_{113}$. Πόση εἶνε ἡ διαφορὰ δεκαδικῶς ἐκ-

πεφρασμένη τῶν κλασμάτων τούτων πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὴν εἰρημένην τιμήν ;

11) Ἐκτέλεσον τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς·

α) $7,934 \times 5,6$
β) $82,91 \times 4,08$
γ) $39,47 \times 0,823$
δ) $0,82 \times 0,37$
ε) $784,6 \times 0,0051$
ζ) $0,05 \times 0,007$
η) $0,793 \times 0,0049$
θ) $825 \times 6,401$
ι) $7,09 \times 580$
κ) $0,00925 \times 16000$
λ) $0,125 \times 0,0008$
μ) $0,0091 \times 8,315$.

12) Ἐκτέλεσον τὰς ἑξῆς διαιρέσεις·

α) 7,2 : 2,4
β) 3,69 : 0,09
γ) 75,234 : 0,729
δ) 8,52 : 0,0496
ε) 316,2 : 4,93
ζ) 781 : 0,8
η) 35 : 0,025
θ) 8 : 0,25
ι) 0,347 : 16
κ) 7,2 : 50
λ) 95,46 : 11
μ) 3,927 : 2,18
ν) 4,73 : 12,4
ξ) 0,0039 : 2,88
ο) 0,047 : 0,000029
π) 0,82 : 0,008
ρ) 8,207 : 25,3
σ) 0,763 : 0,29.

13) Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὑπελόγιζον εἰς τάλαντα, ὧν ἕκαστον διηρεῖτο εἰς 60 μνᾶς, ἡ μνᾶ εἰς 100 δραχ. καὶ ἡ δραχμὴ εἰς 6 ὀβολούς. Ἐὰν ἓν τάλαντον ἀξίζῃ φράγκα ἤτοι νέας δραχμὰς 5559 καὶ 72 ἑκατοστά, πόσα ἀξίζει α) μία μνᾶ, β) μία δραχμή, γ) εἷς ὀβολός ;

14) Ὁ κύων, τοῦ ὁποίου τὴν οὐρὰν ἔκοψεν ὁ Ἀλκιβιάδης, εἶχεν ἀγορασθῇ 70 μνᾶς. Πόσον ἠγοράσθη εἰς φράγκα ;

15) Πόσοι σεληνιακοὶ μῆνες διέρχονται εἰς 19 ἔτη, ἐὰν ὁ μὲν σεληνιακὸς μὴν ἔχῃ 29,530588 ἡμέρας, τὸ δὲ ἔτος 365,24222 ἡμ. ;

16) Τὸ χρυσοῦν εἰκοσάφραγκον ἔχει διάμετρον 0,021 γαλ. μέτρου, τὸ δε τεσσαρακοντάφραγκον 0,026. Πόσον μῆκος ἀποτελοῦσι 32 τεσσαρακοντάφραγκα καὶ 8 εἰκοσάφραγκα τεθειμένα κατὰ σειράν;

17) Τὸ πεντάφραγκον ἔχει διάμετρον 0,037 γαλ. μέτρου, τὸ δὲ δίφραγκον 0,027. Πόσον μῆκος ἀποτελοῦσι 19 πεντάφραγκα καὶ 11 δίφραγκα τεθειμένα κατὰ σειράν;

18) Τὸ χιλιόγραμμον τοῦ μὲν καθαροῦ χρυσοῦ τιμᾶται 3437,77 φράγκα, τοῦ δὲ καθαροῦ ἀργύρου 218,89. Ποσάκις ἡ ἀξία τοῦ χρυσοῦ εἶνε μεγαλειτέρα τῆς τοῦ ἀργύρου;

19) Τὸ ἔτος ἔχει ἡμ. 365,242226· ἂν δ' ἐκληφθῇ ἔχον 365 $^1/_4$ ἡμ., πόσον λάθος γίνεται εἰς 4 αἰῶνας;

20) Τὰ ὕψη τῶν ἐφεξῆς ἡφαιστείων ὀρέων εἰς Παρισινοὺς πόδας ἐκπεφρασμένα εἶνε α) Στρομβίλης 2175, β) Βεσουβίου 3637, γ) Αἴτνης 10200, δ) Πίκου τῆς Τενερίφφας 11424, ε) Κοτοπαξίου 17892. Πόσον εἶνε ἕκαστον τῶν ὑψῶν τούτων ἐκφραζόμενον εἰς γαλ. μέτρα, ἐὰν 1 γαλ. μέτρον ἦνε=3,078 Παρ. ποδ.;

21) Πόσα γαλ. μέτρα ἔχοντα ἀνὰ 3,163446 ποδ. Βιέννης ἰσοῦνται μὲ 80 πήχ. Βιέννης ἔχοντας ἀνὰ 2, 465 ποδ. Βιέννης; πόσα δὲ μὲ 118 πήχ. Πρωσσικοὺς ἔχοντας ἀνὰ 2,1098 ποδ. Βιέννης; πόσα δὲ μὲ 23 ὑάρδας ἐχούσας ἀνὰ 2,8926 πόδας Βιέννης;

Τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

§ 69.

Ἐὰν παραβάλωμεν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ἡ δεκαδικὴ ὑποδιαίρεσις τῶν ἀρχικῶν μονάδων φέρει μεγάλην εὐκολίαν εἰς τὰς πράξεις.

Διὰ τοῦτο εἶνε εἰσηγμένον εἰς τὴν Ἑλλάδα τὸ δεκαδικὸν σύστημα τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν καὶ νομισμάτων τῆς Γαλλίας, τῶν ὁποίων αἱ ὀνομασίαι ἐπωνομάσθησαν *βασιλικαὶ* καὶ εἶνε αἱ ἑξῆς·

ά. Μέτρα μήκους.

Πῆχυς ἴσος μὲ τὸ γαλλικὸν μέτρον, ἤτοι μὲ τὸ δεκάκις ἑκατομμυριοστὸν τοῦ τετάρτου τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς˙

Παλάμη τὸ 0,1 πήχεως˙

Δάκτυλος τὸ 0,1 παλάμης ἢ τὸ 0,01 πήχεως˙

Γραμμὴ τὸ 0,1 δακτύλου ἢ τὸ 0,01 παλάμης ἢ τὸ 0,001 πήχεως˙

Στάδιον ἴσον μὲ 1000 πήχ. ἤτοι τὸ γαλ. χιλιόμετρον.

Σχοινὶς ἴση μὲ 10 στάδια ἤτοι μὲ 10000 πήχεις, τὸ γαλ. μυριόμετρον.

β΄. Μέτρα ἐπιφανείας.

Τετραγωνικὸς πῆχυς.

Στρέμμα ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικοὺς πήχεις.

γ΄. Μέτρα τοῦ ὄγκου τῶν στερεῶν καὶ ῥευστῶν.

Λίτρα ἢ κυβικὴ παλάμη ἴση μὲ τὸ 0,001 κυβικοῦ πήχ.

Κοτύλη τὸ 0,1 λίτρας˙

Μύστρον τὸ 0,1 κοτύλης ἢ τὸ 0,01 λίτρας˙

Κύβος τὸ 0,1 μύστρου ἢ τὸ 0,01 κοτύλης ἢ τὸ 0,001 λίτρας˙

Κοιλὸν ἴσον μὲ 100 λίτρας ἤτοι μὲ 0,1 κυβικοῦ πήχεως.

δ΄. Σταθμά.

1) Διὰ πολύτιμα εἴδη.

Γράμμα ἢ δραχμὴ τὸ βάρος καθαροῦ ὕδατος πληροῦντος ἕνα βασ. κύβον ἤτοι 0,001 βασ. λίτρ.

Ὀβολὸς τὸ 0,1 γράμματος˙

Κόκκος τὸ 0,1 ὀβολοῦ.

2) Διὰ κοινὰ εἴδη.

Μνᾶ ἴση μὲ 1500 γράμ. ἢ $1\,{}^1/_2$ χιλιόγραμμον γαλλικ.

3) Διὰ μεγάλας ποσότητας.

Τάλαντον ἴσον μὲ 100 μνᾶς˙

Τόνος ἴσος μὲ 10 τάλαντα.

Σημ. Τῶν δὲ νομισμάτων ἀρχικὴ μονὰς εἶνε ἡ νέα δραχμὴ (τὸ φράγκον) ἔχουσα βάρος 5 γράμματα ἀργύρου μὲ καθαρότητα 0,9.

§ 70.

1) Τὰ παλαιὰ μέτρα συγκρινόμενα μὲ τὰ βασιλικὰ εἶνε˙

Ὁ μικρὸς πῆχ. Κων/πόλεως ἐνταζὲς ἔχει		0,648	β. πήχεως
Ὁ μέγας πῆχυς ἀρσὶν	»	0,669	» »
Ὁ ἐπίσημος τεκτονικὸς πῆχυς	»	0,75	» »
Ὁ τετραγ. τεκτονικὸς	»	0,5625	τετ.β.π.
Ὁ τετραγ. μικρὸς πῆχυς	»	0,419	»
Τὸ Πελοποννησιακὸν στρέμμα	»	1,27	β. στρέμ.
Ἡ ὀκᾶ	»	1,28	» λίτρ.

Τὸ παλαιὸν κοιλὸν 0,33166 β. κοιλοῦ ἢ 33,166 β. λίτρ.

2) Τὰ δὲ βασιλικὰ συγκρινόμενα μὲ τὰ παλαιὰ εἶνε·

Ὁ β. πῆχυς ἔχει 1,5432 μικροὺς πήχ.

Ὁ β. πῆχ. ἔχει 1,495 μεγάλους πήχ. ἢ 1,33 τεκτ.

Ὁ β. τετρ. πῆχ. ἔχει 2,381 τετρ. μικροὺς πήχ.

Ὁ β. τετρ. πῆχ. ἔχει 2,235 μεγάλους πήχ. ἢ 1,77 τεκ.

Τὸ β. στρέμμα ἔχει 0,787 παλαιοῦ στρέμματος.

Ἡ βασ. λίτρα ἔχει 0,78125 ὀκ. ἢ 312 $^1/_2$ δράμ.

Τὸ β. κοιλὸν ἔχει 3,015 παλ. κοιλά.

Σημ. Εὑρίσκω τοὺς ἀριθμοὺς ἑκατέρου τῶν πινάκων τούτων, ἐὰν διαιρέσω 1 διὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑτέρου πίνακος.

Τρέπω δὲ παλαιὰ μὲν μέτρα εἰς βασιλικὰ πολλαπλασιάζων τὰς ἐν τῷ πρώτῳ πίνακι τιμὰς αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλ. μέτρων, βασιλικὰ δὲ μέτρα εἰς παλαιὰ πολλαπλασιάζων τὰς ἐν τῷ δευτέρῳ πίνακι τιμὰς αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν βασ. μέτρων.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

22) Τρέψον εἰς βασ. πήχ. α) 347 μικροὺς πήχ. β) 568 πήχ. ἀρσίν, γ) 257 ἐπισήμους τεκτ. πήχ.

23) Τρέψον α) εἰς τετρ. β. πήχ. α) 307 τετρ. τεκτ. πήχ. β) εἰς τετρ. τεκτ. πήχ. ἐν β. στρέμμα.

24) Τρέψον 48 $^5/_8$ στρέμματα Πελοπον. εἰς βασιλικά.

25) Τρέψον 743 πήχ. 7 παλ. 8 δακτ. α) εἰς πήχ. μικρούς, β) εἰς πήχ. ἀρσίν, γ) εἰς ἐπισήμους τεκτονικούς.

26) Τὸ ἀρτεσιανὸν φρέαρ ἐν Γρενέλλῃ πλησίον Παρισίων ἔχει βάθος 547 β. πήχ., ἡ διάμετρος τῆς ὀπῆς αὐτοῦ εἶνε 23 δακτ. Εἰς 24 ὥρας ἐξάγει 400000 β. λίτρ. ὕδατος. Πόσον

εἶνε τὸ βάθος καὶ ἡ διάμετρος εἰς τεκτονικοὺς πήχ.; Πόσας ὀκ. ὕδατος ἐξάγει τὸ φρέαρ α) εἰς 24 ὥρας, β) εἰς τὸ λεπτόν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

Α΄. Περὶ λόγων.

§ 71.

Ἐὰν δύο ἀριθμούς, π. χ. 6 καὶ 2, παραβάλω πρὸς ἀλλήλους, εὑρίσκω, ὅτι ὁ 6 περιέχει τὸν 2 τρὶς καὶ ὁ 2 τὸν 6 ἓν τρίτον ($^1/_3$)· ὁμοίως καὶ ὁ 9 περιέχει τὸν 3 τρίς, ὅσον καὶ ὁ $^3/_4$ τὸν $^1/_4$, καὶ ἀντιστρόφως, ὁ 3 περιέχει τὸν 9 ἓν τρίτον, ὅσον ὁ $^1/_4$ περιέχει τὸν $^3/_4$. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς τοιαύτης συγκρίσεως μεταξὺ δύο ἀριθμῶν ὀνομάζεται *λόγος*. Οἱ δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι συγκροτοῦσι τὸν λόγον, ὀνομάζονται *ὅροι* τοῦ λόγου, ὁ μὲν πρῶτος *ἡγούμενος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἑπόμενος*· ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων ποσάκις ὁ ἡγούμενος περιέχει τὸν ἑπόμενον, λέγεται *δείκτης*. Εὑρίσκεται δὲ ὁ δείκτης, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου, καὶ διὰ τοῦτο γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο ὅρων τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, π. χ. 6 : 2, καὶ προφέρομεν 6 *πρὸς* 2.

§ 72.

Ἐὰν τὸν λόγον μεταξὺ δύο ὁμοειδῶν ποσῶν Α καὶ Β, π. χ. μεταξὺ δύο γραμμῶν, νομισμάτων, ἢ σταθμῶν, θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν μὲ ἀριθμούς, μετροῦμεν τὰ ποσὰ Α καὶ Β διὰ τρίτου τινὸς ὁμοειδοῦς ποσοῦ Γ, καὶ ἐὰν εὕρωμεν, ὅτι τὸ Γ ἐμπεριέχεται π. χ. εἰς μὲν τὸ Α 5$^{\kappa\iota\varsigma}$ εἰς δὲ τὸ Β 3$^{\iota\varsigma}$, λέγομεν, ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β ἔχουσι λόγον ὡς 5 : 3.

Ἀντιστρόφως, ὅταν λέγωμεν, ὅτι τὰ ποσὰ Α καὶ Β ἔχουσι λόγον ὡς 5 : 3, σημαίνομεν μὲ τοῦτο ὅτι ὑπάρχει τρίτον τι ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς Α $5^{\text{κις}}$ καὶ εἰς Β $3^{\text{ίς}}$.

Σημ. Π. χ. ἡ μὲν ὀκᾶ ἔχει 400 δράμ. ἡ δὲ αὐστρ. λίτρα 175, λοιπὸν εἶνε ὀκᾶ πρὸς λίτραν ὡς 400 : 175. Ἀντιστρόφως ὅταν λέγῃ τις, ὅτι ὁ β. πῆχυς εἶνε πρὸς τὸν παρισινὸν πόδα ὡς 40 : 13, ἐκφράζει μὲ τοῦτο, ὅτι ὑπάρχει μῆκός τι, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς μὲν τὸν πῆχυν 40 φοράς, εἰς δὲ τὸν πόδα 13.

§ 73.

Ἐπειδὴ εἰς τὸν λόγον ὁ μὲν ἡγούμενος ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸν διαιρετέον, ὁ δὲ ἑπόμενος μὲ τὸν διαιρέτην καὶ ὁ δείκτης μὲ τὸ πηλίκον αὐτῶν, εἶνε εὔκολον νὰ εὑρίσκωμεν ἕκαστον ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἀριθμῶν, ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς δύο ἄλλους.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρὲ τὸν δείκτην τῶν ἑξῆς λόγων, α´) 18 : 9, β´) 15 : 10, γ´) 20 : 15, δ´) 25 : 12 $^1/_2$, ε´) 30 : 24, ς´) 14 : 21, ζ´) 10 $^1/_2$: 7, η´) 7 : 10 $^1/_2$, θ´) 5 : 3 $^3/_4$, ι´) 3 $^3/_4$: 5, ια´) 7 $^7/_8$: 6 $^2/_3$, ιβ´) 6 $^2/_3$: 7 $^7/_8$.

2) Ὁ ἑπόμενος ὅρος τοῦ λόγου εἶνε α´) 6, β´) $^3/_4$, γ´) 4 $^1/_2$, ὁ δὲ δείκτης α´) 5, β´) $^1/_5$, γ´) 3 $^1/_2$. Πόσος εἶνε ὁ ἡγούμενος; (9 παραδ.).

3) Ὁ ἡγούμενος ὅρος τοῦ λόγου εἶνε α´) 24, β´) $^2/_3$, γ´) 3 $^1/_5$, ὁ δὲ δείκτης α´) 8, β´) $^1/_6$, γ´) 3 $^3/_4$. Πόσος εἶνε ὁ ἑπόμενος;

4) Ὁ λόγος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἔχει δείκτην 3 $^1/_7$. Ἐὰν λοιπὸν α´) ἡ διάμετρος ἦνε 42 ποδῶν, πόση εἶνε ἡ περιφέρεια; β´) Πόση εἶνε ἡ διάμετρος, ἐὰν ἡ περιφέρεια ἔχῃ 99 πόδ.;

5) Πῶς εὑρίσκομεν α´) τὸν δείκτην, β´) τὸν ἡγούμενον, γ´) τὸν ἑπόμενον, ἐὰν ἦνε δεδομένοι οἱ δύο ἄλλοι ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν;

§ 74.

Ἕκαστον πηλίκον δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, π. χ.

$$9 : 6 = {}^{9}/_{6},\ 15 : 5 = {}^{15}/_{5}$$

$$7 : 2\,{}^{1}/_{2} = \frac{7}{2\,{}^{1}/_{2}},\ 2\,{}^{1}/_{2} : 7 = \frac{2\,{}^{1}/_{2}}{7}.$$

Ὁμοίως καὶ ὁ δείκτης τοῦ λόγου, καθ' ὃ πηλίκον διαιρέσεως, ἰσοῦται μὲ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶνε ὁ ἡγούμενος ὅρος τοῦ λόγου, παρονομαστὴς δὲ ὁ ἑπόμενος. Λοιπὸν καὶ ὁ δείκτης πολλαπλασιάζεται μέν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἡγούμενος ὅρος ἢ διαιρεθῇ ὁ ἑπόμενος, διαιρεῖται δέ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἡγούμενος ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἑπόμενος, καὶ μένει ἀμετάβλητος, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

§ 75.

Ἵνα φέρω λόγον τινὰ εἰς τὴν ἁπλουστάτην μορφήν, πράττω ὡς εἰς τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων (§ 26,27), διαιρῶ δηλ. ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Π. χ. λόγος $9 : 6$, δείκτης ${}^{9}/_{6}$, κοινὸς διαιρέτης 3

$= 3 : 2$, » ${}^{3}/_{2}$

» $18 : 24$ » ${}^{18}/_{24}$ » » 6

$= 3 : 4$ » ${}^{3}/_{4}$

Ἐὰν δὲ ὁ εἷς ὅρος τοῦ λόγου ἢ καὶ ἀμφότεροι ἦνε κλασματικοί, ἢ τρέπω τοὺς δύο ὅρους εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ παραβάλλω ἔπειτα μόνον τοὺς ἀριθμητὰς παραλείπων τὸν κοινὸν παρονομαστήν· π. χ.

$${}^{16}/_{25} : {}^{8}/_{9} = {}^{144}/_{225} : {}^{200}/_{225}$$

Λοιπὸν ${}^{16}/_{25} : {}^{8}/_{9} = 144 : 200$ ἢ $18 : 25$·

ἢ ζητῶ τὸ πηλίκον μεταξὺ τῶν δύο ὅρων καὶ ἁπλοποιῶ αὐτό· π. χ. ${}^{16}/_{25} : {}^{8}/_{9}$ δείκτης ${}^{16}/_{25} \times {}^{9}/_{8} = {}^{18}/_{25}$, λοιπὸν $18 : 25$.

${}^{24}/_{25} : {}^{15}/_{16}$ δείκτης ${}^{24}/_{25} \times {}^{16}/_{15} = {}^{128}/_{125}$, λοιπὸν $128 : 125$.

${}^{18}/_{35} : {}^{27}/_{28}$ δείκτης ${}^{18}/_{35} \times {}^{28}/_{27} = {}^{8}/_{15}$, λοιπὸν $8 : 15$.

ὅταν λοιπὸν ὁ δείκτης ἀχθῇ εἰς τὴν ἁπλουστάτην μορφήν, ὁ μὲν ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶνε ὁ ἡγούμενος ὅρος τοῦ λόγου, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὁ ἑπόμενος.

§ 76.

Δύο λόγοι, ἐὰν ἔχωσι τὸν αὐτὸν δείκτην, ὀνομάζονται *ἴσοι*. Ἴσοι εἶνε π. χ. οἱ λόγοι 12 : 9, 24 : 18, 16 : 12, τῶν ὁποίων ὁ δείκτης εἶνε $^4/_3$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

6) Ἁπλοποίησον τοὺς ἑξῆς λόγους, ά) 2 : 4, β΄) 6 : 12, γ΄) 9 : 12, δ΄) 25 : 20, ε΄) 24 : 30, ϛ΄) 16 : 24, ζ΄) 12 : 20, ή) 14 : 21, θ΄) 24 : 28, ί) 24 : 36, ιά) 36 : 48, ιβ΄) 48 : 60, ιγ΄) 54 : 72, ιδ΄) 70 : 84, ιε΄) 56 : 70, ιϛ΄) 64 : 80, ιζ΄) 64 : 96, ιή) 144 : 192, ιθ΄) 288 : 432, κ΄) 63733 : 89976.

7) Ἔκφρασον τοὺς ἑξῆς λόγους διὰ τῶν ἐλαχίστων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ά) $^1/_2$: 1, β΄) $^1/_5$: 1, γ΄) $^1/_4$: 3, δ΄) $^3/_4$: 5, ε΄) 5 : $^2/_3$, ϛ΄) $^7/_8$: $^{21}/_{32}$, ζ΄) $^{14}/_{15}$: $^{21}/_{40}$, ή) $^{11}/_{12}$: $^{22}/_{35}$, θ΄) $^5/_6$: $^{20}/_{39}$, ί) $^{17}/_{18}$: $^{51}/_{72}$, ιά) 2 $^1/_2$: 7 $^1/_2$, ιβ΄) 3 $^1/_3$: 4 $^4/_5$, ιγ΄) 7 $^7/_8$: 5 $^5/_6$, ιδ΄) 6 $^3/_4$: 3 $^3/_5$, ιε΄) 7 $^1/_2$: 21 $^1/_4$, ιϛ΄) 13 $^3/_4$: $^{11}/_{12}$, ιζ΄) 6 $^2/_3$: 33 $^1/_3$, ιή) 12 $^1/_2$: 18 $^3/_4$, ιθ΄) 13 $^3/_5$: 27 $^1/_2$, κ΄) 11 $^1/_9$: 14 $^2/_7$.

8) Τίνες εἶνε ἴσοι ἐκ τῶν ἑξῆς λόγων, ά) 10 : 15, β΄) 12 : 15, γ΄) 18 : 15, δ΄) 28 : 35, ε΄) 21 : 28, ϛ΄) 14 : 21, ζ΄) 24 : 20, ή) 12 : 16 ;

9) Δι' 6 ὀκ. ὀρυζίου ἐπλήρωσα δραχ. 5 καὶ δι' 8 ὀκ. σίτου δραχ. 4, τίνα λόγον ἔχει ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκ. ὀρυζίου πρὸς τὴν τιμὴν μιᾶς ὀκ. σίτου ;

10) Ὁ Α καὶ ὁ Β ἀγοράζουσιν ὁμοῦ ἕνα κλῆρον τοῦ λαχείου. Πληρώνουσι δὲ δι' αὐτὸν ὁ μὲν Α δραχ. 15 $^{15}/_{16}$, ὁ δὲ Β 35 $^1/_{16}$. Κατὰ τίνα λόγον θέλουσι διανεμηθῇ ὅ,τι κερδίσωσι δι' αὐτοῦ ;

11) Ὁ Α ἐργάζεται καθ' ἡμέραν $7\,{}^1/_2$ ὥρ. ὁ δὲ Β $12\,{}^1/_2$ ὥρ. Τίνα λόγον ἔχουσι τὰ ἡμερομίσθια αὐτῶν;

12) Ὁ Α γράφει καθ' ἑβδομάδα 36 φύλλα, ὁ δὲ Β 40. Τίνα λόγον ἔχουσιν οἱ χρόνοι τῆς ἐργασίας, δοθέντος ὅτι ἀμφότεροι οἱ γραφεῖς εἰς *ἴσον* χρόνον γράφουσιν *ἴσον*;

13) Τὸ γαλλικὸν χιλιόγραμμον ἔχει $312\,{}^1/_2$ δράμ. ἡ δὲ ὀκᾶ 400. Τίνα λόγον ἔχουσι τὰ δύο ταῦτα σταθμά;

14) Τὸ μὲν χιλιόγραμμον ἔχει $1\,{}^{11}/_{14}$ λίτρας Βιέννης, ἡ δὲ αὐστριακὴ τελωνιακὴ λίτρα ἔχει ${}^{25}/_{28}$. Τίνα λόγον ἔχουσι τὰ δύο ταῦτα σταθμά;

15) Ἡ μὲν ὑάρδα ἔχει $1\,{}^1/_6$ πήχ. Βιέννης, ὁ δὲ βασ. πῆχυς $1\,{}^2/_7$. Τίνα λόγον ἔχει ἡ ὑάρδα πρὸς τὸν βασ. πῆχυν;

16) Ὁ ἐν Βιέννῃ ναὸς τοῦ ἁγίου Στεφάνου ἔχει 333 ποδ. μῆκος, 222 ποδ. πλάτος καὶ 444 ὕψος. Τίνα λόγον ἔχει α') τὸ μῆκος πρὸς τὸ πλάτος, β') τὸ μῆκος πρὸς τὸ ὕψος, γ') τὸ πλάτος πρὸς τὸ ὕψος;

17) Ἡ λίρα ἔχει δραχ. $28\,{}^1/_2$, τὸ δὲ εἰκοσάφραγκον δραχ. $22\,{}^1/_2$. Τίνα λόγον ἔχει ἡ λίρα πρὸς τὸ εἰκοσάφραγκον;

18) Διατρέχει τὸ αὐτὸ διάστημα ἡ μὲν ἀτμάμαξα εἰς $2\,{}^1/_2$ ὥρ., ἡ δὲ ταχυδρομικὴ εἰς 9 ὥρ. Τίνα λόγον ἔχουσιν αἱ ταχύτητες αὐτῶν, ἤγουν τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διατρέχουσιν εἰς τὴν αὐτὴν χρονικὴν μονάδα (*);

19) Διατρέχει ἓν γεωγραφικὸν μίλιον ἡ μὲν ἀτμάμαξα εἰς 12 λεπ. ἡ δὲ ταχυδρομικὴ εἰς μίαν ὥραν, καὶ ὁ πεζοδρόμος

(*) Ἡ μὲν ἀτμάμαξα διατρέχουσα εἰς $2\,{}^1/_2$ ὥρ. διάστημά τι εἰς 1 ὥρ. διατρέχει τὸ $\frac{1}{2\,{}^1/_2}$ μέρος αὐτοῦ, ἡ δὲ ταχυδρομικὴ διατρέχουσα εἰς 9 ὥρ. τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς 1 ὥρ. διατρέχει τὸ ${}^1/_9$ αὐτοῦ. Λοιπὸν αἱ ταχύτητες εἶνε ὡς $\frac{1}{2\,{}^1/_2} : {}^1/_9$ ἤτοι ὡς $9 : 2\,{}^1/_2$, ἤγουν εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς χρόνους.

εἰς $1 \frac{2}{3}$ ὥρ. Τίνα λόγον ἔχουσιν αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἀνὰ δύο;

20) Μία μοῖρα τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς ἔχει α') 15 γεωγραφικὰ μίλια, β') 20 γαλλ. μίλια, γ') 25 παλαιὰς λεύγας, δ') 60 ἀγγλ. θαλάσσια μίλια. Τίνα λόγον ἔχουσιν ἀνὰ δύο ἐκ τῶν μέτρων τούτων;

Β΄. Περὶ ἀναλογιῶν.

§ 77.

Ἀναλογία ὀνομάζεται ἡ παράθεσις δύο λόγων *ἴσων*, ἤγουν ἐχόντων τὸν αὐτὸν δείκτην, π. χ.

$$18 : 6 = 36 : 12.$$

Αὕτη ἀναγινώσκεται οὕτω, 18 πρὸς 6 *ὡς* 36 *πρὸς* 12. Πᾶσα ἀναλογία ἔχει τέσσαρας ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι λέγονται *ὅροι* αὐτῆς, ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τρίτος *ἡγούμενοι*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος *ἑπόμενοι*. Προςέτι ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος λέγονται *ἄκροι*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος *μέσοι*.

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας ἦνε συγκεκριμένοι, πρέπει οἱ δύο ὅροι ἑκατέρου λόγου νὰ ἦνε ὁμοειδεῖς· π. χ.

7 πήχ. : 28 πήχ. = 15 δραχ. : 60 δραχ.

§ 78.

Ἡ ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ δύο μέσοι ὅροι εἶνε ἴσοι, ὡς π. χ.

$$6 : 18 = 18 : 54$$

ὀνομάζεται *συνεχής*, καὶ ὁ ἴσος ὅρος 18 λέγεται *μέσος ἀνάλογος*.

§ 79.

Ἐὰν τῆς ἀναλογίας ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον οἱονδήποτε πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀναλογία μένει ὀρθή. Ἐὰν π. χ. τῆς ἀναλογίας

$$18 : 6 = 24 : 8$$

πολλαπλασιάσω ἐπὶ 2 τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον ἢ τὸν πρῶτον καὶ τρίτον, ἢ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον ἢ τὸν δεύτερον καὶ τέταρτον, γίνονται αἱ ἑξῆς ὀρθαὶ ἀναλογίαι,

1) 36 : 12=24 : 8
2) 36 : 6 =48 : 8
3) 18 : 6 =48 : 16
4) 18 : 12=24 : 16.

Διότι εἰς μὲν τὴν 1) καὶ 3) ἔμεινε κατὰ § 74 ὁ δείκτης ὁ αὐτός, ἐπειδὴ ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν οἱ δύο ὅροι τοῦ αὐτοῦ λόγου· εἰς δὲ τὴν 2) ἑκάτερος δείκτης ἔγεινε δὶς μεγαλείτερος καὶ εἰς τὴν 4) δὶς μικρότερος, ἐπειδὴ ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 2 εἰς μὲν τὴν μίαν οἱ ἡγούμενοι, εἰς δὲ τὴν ἄλλην οἱ ἑπόμενοι.

2) Ἐὰν τῆς ἀναλογίας ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον οἱονδήποτε διαιρέσω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀναλογία μένει ὀρθή. Ἐὰν π. χ. τῆς ἀναλογίας

18 : 6=24 : 8

διαιρέσω διὰ 2 ἢ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον, ἢ τὸν πρῶτον καὶ τρίτον, ἢ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον, ἢ τὸν δεύτερον καὶ τέταρτον, ἔχω τὰς ἑξῆς ὀρθὰς ἀναλογίας,

1) 9 : 3=24 : 8
2) 9 : 6=12 : 8
3) 18 : 6=12 : 4
4) 18 : 3=24 : 4.

Ἡ ἀπόδειξις εἶνε φανερὰ ἐκ τῆς § 74.

§ 80.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, π. χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν

28 : 7=36 : 9

εἶνε $28\times9=7\times36=252$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ἀναλογία γραφθῇ οὕτω

$7\times4 : 7=9\times4 : 9$,

βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο ἡγούμενοι εἶνε γινόμενα ὁ μὲν πρῶτος τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν δείκτην, ὁ δὲ τρίτος τοῦ τετάρτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν δείκτην. Λοιπὸν εἶνε καὶ τὸ γινόμενον

τῶν μὲν ἄκρων $28 \times 9 = 7 \times 4 \times 9$,

τῶν δὲ μέσων $7 \times 36 = 7 \times 9 \times 4$.

Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν μὲν ἄκρων ἔχει παράγοντας τὸν δεύτερον ὅρον, τὸν δείκτην καὶ τὸν τέταρτον, τὸ δὲ τῶν μέσων ὁμοίως τὸν δεύτερον, τὸν τέταρτον καὶ τὸν δείκτην. Λοιπὸν ἀμφότερα τὰ γινόμενα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας, ἄρα εἶνε ἴσα. Τὰ αὐτὰ δύνανται νὰ λεχθῶσι καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης ὀρθῆς ἀναλογίας.

Κατὰ δύο λοιπὸν τρόπους δυνάμεθα νὰ δοκιμάζωμεν ἐὰν δύο λόγοι σχηματίζωσιν ἀναλογίαν, παρατηροῦντες δηλ. 1) ἐὰν οἱ δεῖκται αὐτῶν ἦνε ἴσοι, 2) *ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἦνε ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων.*

§ 81.

Ἐκ τῶν εἰρημένων συμπεραίνομεν, ὅταν ἀναλογίας τινὸς ἦνε δεδομένοι τρεῖς ὅροι, πῶς εὑρίσκεται ὁ τέταρτος, π.χ. εἰς τὴν

$$18 : 6 = 36 : \chi$$

χ εἶνε ὁ ἐλλείπων τέταρτος ὅρος. Ὁ δείκτης τοῦ πρώτου λόγου εἶνε $^{18}/_{6} = 3$· ὁ δὲ τέταρτος ὅρος εἶνε ἴσος μὲ τὸν τρίτον ὅρον διαιρούμενον διὰ τοῦ δείκτου, ἤτοι εἶνε $\chi = {}^{36}/_{3} = 12$.

Ὁμοίως εἰς $18 : \chi = 36 : 12$ εἶνε $\chi = {}^{18}/_{3} = 6$
» $18 : 6 = \chi : 12$ « $\chi = 12.3 = 36$
» $\chi : 6 = 36 : 12$ » $\chi = 6.3 = 18$.

Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ἄγνωστον ὅρον τῆς ἀναλογίας καὶ ὡς ἑφεξῆς, ἐὰν μὲν ἦνε ἄκρος, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο μέσους καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, ἐὰν δὲ ἦνε μέσος, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ἄκρους καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦντες διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου· π. χ. εἰς τὴν

$$18 : 6 = 36 : \chi$$

εἶνε $18.\chi$ ἴσον μὲ $36.6 = 216$.

καὶ ἐπειδὴ ὁ εἷς παράγων τοῦ γινομένου 216 εἶνε ὁ 18, ὁ ἕτερος πρέπει νὰ ἦνε 216 διὰ 18=12.

Λοιπὸν πλήρης ἡ ἀναλογία εἶνε 18 : 6=36 : 12.

Ὁμοίως εἰς $18 : \chi = 36 : 12$ εἶνε $\chi = 18 \times 12 : 36 = 6$
» $18 : 6 = \chi : 12$ » $\chi = 18 \times 12 : 6 = 36$
» $\chi : 6 = 36 : 12$ » $\chi = 36 \times 6 : 12 = 18$.

§ 82.

Εἴδομεν ἀνωτέρω (§ 80), ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Ἐκ τούτων δὲ συμπεραίνομεν, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τέσσαρας ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥςτε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ ἦνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων δύο, δυνάμεθα ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἀριθμῶν νὰ συγκροτήσωμεν ἀναλογίαν, καθιστάνοντες ἄκρα μὲν τῆς ἀναλογίας τοὺς παράγοντας τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσα δὲ τοὺς παράγοντας τοῦ ἑτέρου· π. χ. ἐκ τῶν

$$8 \times 12 = 16 \times 6$$

γίνονται αἱ ἑξῆς ὀκτὼ ἀναλογίαι,

	A		B
α	$6 : 8 = 12 : 16$	α	$12 : 16 = 6 : 8$
β	$16 : 8 = 12 : 6$	β	$8 : 16 = 6 : 12$
γ	$6 : 12 = 8 : 16$	γ	$12 : 6 = 16 : 8$
δ	$16 : 12 = 8 : 6$	δ	$8 : 6 = 16 : 12$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν Α καὶ Β στήλην παραβάλωμεν τὰς ἀναλογίας τῶν σειρῶν β, γ, δ πρὸς τὴν τῆς α, συνάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας·

1. Οἱ ἄκροι ὅροι δύνανται νὰ ἀνταλλαχθῶσι (β)
2. Οἱ μέσοι » » » (γ)
3. Οἱ ἄκροι καὶ μέσοι » » (δ)

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

31) Τίνες εἶνε ὀρθαὶ ἐκ τῶν ἑξῆς ἀναλογιῶν, α΄) 12 : 15 =25 : 20, β΄) 12 : 20=15 : 25, γ΄) $^1/_2 : {}^1/_3 = 2 : 3$, δ΄) $^1/_2 : {}^1/_3 = 3 : 2$;

22) Πῶς εὑρίσκεις τῆς ἀναλογίας α) ἕνα ἄκρον ὅρον, δεδομένου τοῦ ἑτέρου ἄκρου καὶ τῶν δύο μέσων, β) ἕνα μέσον, δεδομένου τοῦ ἑτέρου μέσου καὶ τῶν δύο ἄκρων ;

23) Ζήτησον εἰς τὰς ἑξῆς ἀναλογίας τὸν ἄγνωστον ὅρον χ, ά) $3 : 7 = 5 : \chi$, β') $9 : 2 = 7 : \chi$, γ') $8 : 7 = 25 : \chi$, δ') $7 : 5 = \chi : 3$, έ) $9 : \chi = 12 : 7$, ς') $\chi : 7 = 4 : 8$.

24) Ἁπλοποίησον τὰς ἑξῆς ἀναλογίας καὶ ζήτησον ἔπειτα τὸν χ, ά) $7 : 21 = 19 : \chi$, β) $42:35 = 13 : \chi$, γ') $13 : 19 = 65 : \chi$, δ') $11 : 23 = 44 : \chi$, έ) $448 : 21 = 160 : \chi$, ς') $180 : 2640 = \chi : 22$, ζ') $375 : \chi = 637875 : 1458$.

25) Τρέψον πρῶτον εἰς ἀκεραίους τοὺς ὅρους τῶν ἑξῆς ἀναλογιῶν, καὶ ἔπειτα εὑρὲ τὸν χ, ά) $2\,{}^1/_2 : 7\,{}^1/_2 = 3\,{}^1/_2 : \chi$, β') $1\,{}^1/_2 : 2\,{}^1/_2 = 7 : \chi$, γ') $5\,{}^3/_4 : 7\,{}^2/_3 = 9\,{}^1/_4 : \chi$, δ') $1\,{}^5/_8 : 2\,{}^3/_6 = \chi : 5\,{}^3/_4$, έ) $9\,{}^2/_3 : \chi = 5\,{}^1/_8 : 4\,{}^1/_2$, ς') $0{,}6 : 0{,}8 = 4 : \chi$, ζ') $0{,}08 : 0{,}072 = 0{,}45 : \chi$.

26) Σχημάτισον τὰς ἀναλογίας, ὅσαι δύνανται νὰ γείνωσιν ἐκ τῶν παραγόντων τῶν ἑξῆς ἴσων γινομένων.

ά. 10×12 καὶ 8×15 δ'. $7\,{}^1/_2 \times 2\,{}^2/_3$ καὶ 4×5

β'. 16×9 » 8×18 έ. $13\,{}^1/_3 \times 2\,{}^7/_{10}$ » $7\,{}^1/_2 \times 4\,{}^4/_5$

γ'. 7×25 » 35×5 ς'. $8\,{}^4/_5 \times 2\,{}^8/_{11}$ » $7\,{}^1/_5 \times 3\,{}^1/_3$.

§ 83.

Ἐὰν εἰς ἀναλογίαν τινά, π. χ.

$$24 : 8 = 21 : 7$$

τοὺς δύο ἡγουμένους 24 καὶ 21 αὐξήσω ἢ ἐλαττώσω κατὰ τὰς μονάδας τῶν δύο ἑπομένων 8 καὶ 7, γίνονται αἱ ἑξῆς δύο ὀρθαὶ ἀναλογίαι·

$$(24+8) : 8 = (21+7) : 7$$
$$(24-8) : 8 = (21-7) : 7.$$

Διότι οἱ δεῖκται ἀμφοτέρων τῶν λόγων διὰ μὲν τῆς προσθέσεως αὐξάνουσι κατὰ μονάδα, διὰ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ἐλαττοῦνται κατὰ μονάδα, ἑπομένως μένουσι πάλιν ἴσοι.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν τὸ ἑξῆς· *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου* *ὅρου ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου πρὸς τὸν τέταρτον.*

§ 84. ά.

Ἐὰν ἀναλογίας τινὸς π. χ. $24 : 8 = 21 : 7$
μεταθέσω τοὺς μέσους, ἔχω $24 : 21 = 8 : 7$,
καὶ ἂν ἐφαρμόσω τὸν ἀνωτέρω κανόνα (§ 83), εὑρίσκω τὴν ἀναλογίαν $(24+21) : 21 = (8+7) : 7$.

Ταύτης δὲ τοὺς μέσους ἐὰν μεταθέσω, ἔχω τὴν ἀναλογίαν
$$(24+21) : (8+7) = 21 : 7.$$
Τὴν τελευταίαν ἀναλογίαν παραβάλλων πρὸς τὴν πρώτην συμπεραίνω τὸν ἑξῆς κανόνα·

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

§ 84. 6΄.

Ἐὰν ἔχω πολλοὺς ἴσους λόγους, π. χ.
$$6 : 2 = 24 : 8 = 9 : 3 \text{ κτλ.}$$
οἱ δύο πρῶτοι λόγοι, ἐπειδὴ συγκροτοῦσι τὴν ἀναλογίαν,
$$6 : 2 = 24 : 8,$$
κατὰ § 84.ά. δίδουσιν $(6+24) : (2+8) = 24 : 8$,
καὶ ἐπειδὴ εἶνε $24 : 8 = 9 : 3$,
ἀντικαθιστῶν τὸν λόγον $9 : 3$ ἀντὶ τοῦ $24 : 8$, ἔχω,
$$(6+24) : (2+8) = 9 : 3,$$
ἐφαρμόζων δὲ καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην τὸν αὐτὸν κανόνα ἔχω $(6+24+9) : (2+8+3) = 9 : 3$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνω τὸν ἑξῆς κανόνα· *Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἑπομένων, ὡς ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.*

§ 85.

Ἐὰν εἰς δύο ἢ πλειοτέρας ἀναλογίας πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον, τὰ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντα τέσσαρα γινόμενα ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἥτις ὀνομάζεται *σύνθετος*.

π. χ. ἐκ τῶν ἀναλογιῶν $4 : 2 = 6 : 3$
καὶ $5 : 7 = 15 : 21$

γίνεται ἡ σύνθετος $4 \times 5 : 2 \times 7 = 6 \times 15 : 3 \times 21$.
Διότι αἱ ἀναλογίαι γράφονται καὶ οὕτω $4/_2 = 6/_3$
καὶ $5/_7 = 15/_{21}$

καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσω τὰ ἴσα, ἔχω $\frac{4 \times 5}{2 \times 7} = \frac{6 \times 15}{3 \times 21}$.

ἤτοι $4 \times 5 : 2 \times 7 = 6 \times 15 : 3 \times 21$.
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὅταν αἱ ἀναλογίαι ἦνε πλειότεραι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

Περὶ μεθόδων.

Α'. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

§ 86.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος καθ' ὃν λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τέταρτος, ὅςτις εἶνε ἀνάλογος πρὸς τοὺς δεδομένους.

Τὰ προβλήματα ταῦτα λύονται ὡς τὰ ἐφεξῆς παραδείγματα·

1) Ἐὰν 9 πήχ. τιμῶνται 18 δραχ., 12 πήχ. πόσον τιμῶνται;

Ἐνταῦθα, ἐὰν οἱ πήχεις γείνωσι δίς, τρὶς κτλ. πλειότεροι, γίνεται καὶ ἡ τιμὴ αὐτῶν δίς, τρὶς κτλ. μεγαλειτέρα· ὅθεν ἐὰν ὀνομάσωμεν χ τὴν ζητουμένην τιμήν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

9 πήχ. : 12 πήχ. = 18 δραχ. : χ δραχ.

Κατὰ δὲ § 81 ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο μέσους καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· λοιπὸν εἶνε

Μαρία, 137
Μαρία 134
Μαρία 137.

$$\chi = \frac{12 \times 18}{9} \text{ δραχ.} = 24 \text{ δραχ.}$$

Λύονται δὲ τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν 9 πήχ. τιμῶνται 18 δραχ.

1 πῆχ. τιμᾶται $^{18}/_{9}$ »

καὶ 12 » τιμῶνται $\frac{12.18}{9}$ »

Ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος ὀνομάζεται *ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.*

Ἵνα δὲ ἐκτελῶμεν εὐκολώτερον τὸν ὑπολογισμόν, θὰ γράφωμεν τὴν λύσιν καὶ οὕτως

$$9 \mid 12 \times 18 \text{ δρ.}$$

διὰ τῆς ὁποίας ὡσαύτως θὰ σημαίνωμεν τὸ $9^{ον}$ τῶν $12^{κις}$ 18 *δραχμῶν.*

2) Ἐὰν 25 στατ. τιμῶνται 436 δραχ., πόσον τιμῶνται 128 στατ.;

Καὶ ἐνταῦθα, ἐπειδή, ὅταν οἱ στατῆρες γείνωσι δίς, τρὶς κτλ. πλειότεροι, γίνεται καὶ ἡ τιμὴ αὐτῶν δίς, τρὶς κτλ. μεγαλειτέρα, ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν,

$$25 \text{ στατ} : 128 \text{ στατ.} = 436 \text{ δραχ.} : \chi \text{ δραχ.}$$

ἡ δὲ λύσις καὶ ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 25 \text{ στατ.} & 436 \text{ δραχ.} \times 128 \text{ στατ.} \\ & \quad\ \ 128 \\ \hline & \quad 3488 \\ & \quad 872 \\ & 436 \\ \hline 25 & 55808 \,|\, 2232\ ^{8}/_{25}. \end{array}$$

Μαρία
Μαρία

§ 87.

3) Ἐὰν 44 ἐργάται λαμβάνωσι μισθὸν 293 δραχ., 77 ἐργάται πόσας δραχ. λαμβάνουσι;

Καὶ ἐνταῦθα συγκροτεῖται ἡ ἑξῆς ἀναλογία,

$$44 \text{ ἐργ.} : 77 \text{ ἐργ.} = 293 \text{ δρ.} : \chi \text{ δρ.}$$

ἐξ ἧς ἡ λύσις $\quad 44 \text{ ἐργ.} \mid 293 \text{ δρ.} \times 77 \text{ ἐργ.}$

Μαρ.

Εἰς τὴν λύσιν ταύτην βλέπω ὅτι ὁ διαιρέτης 44 καὶ ὁ διαιρετέος 77 ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸν 11. Εἴδομεν δὲ εἰς § 25, ὅτι *τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσω τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*. Ὅθεν διαιρῶ αὐτοὺς δι' 11, καὶ οὕτως ἔχω τὴν ἑξῆς ἁπλουστάτην λύσιν, 4 | 293×7.

4) Μὲ 96 δραχ. ἀγοράζω 104 πήχ., πόσους ἀγοράζω μὲ 81 δραχ;

Εἶνε 96 δραχ. : 81 δραχ.=104 πήχ : χ πήχ.

Λοιπὸν ἡ λύσις 96 δρ. | 104 πήχ.×81 δραχ.

Ἐνταῦθα δύναμαι νὰ ἐξαλείψω τὸν κοινὸν παράγοντα 8 μεταξὺ 96 καὶ 104, ἔπειτα τὸν 3 μεταξὺ 12 καὶ 81, καὶ οὕτως εὑρίσκω τὴν ἑξῆς ἁπλουστέραν λύσιν

4 | 13×27.

Λοιπὸν ἡ λύσις τοῦ τελευταίου παραδείγματος καὶ ὁ ὑπολογισμὸς ὁλόκληρος εἶνε ὁ ἑξῆς·

~~96~~ δρ.	~~104~~ πήχ.×~~81~~ δρ.
~~12~~	13
4	27
	91
	26
4	351 | 87 $^3/_4$ πήχ.

§ 88.

5) $^7/_{12}$ λίτρ. τιμῶνται $^3/_4$ δρ., πόσον τιμῶνται 5 λίτραι;

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $^7/_{12}$ λίτρ. : 5 λίτρ. = $^3/_4$ δρ. : χ δρ. προέρχεται ἡ

λύσις $^7/_{12}$ δρ. | $^3/_4$ δραχ. ×5 λίτρ.

Ἐνταῦθα, ἵνα ἁπλοποιήσω τὸν λογισμόν, στηρίζομαι εἰς τὸν ἐν § 25 κανόνα· *Τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον*. Ἵνα λοιπὸν ἐξαλείψω τὰ κλάσματα, πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον πρῶτον ἐπὶ 12, καὶ ἀντὶ $^7/_{12}$×12 γράφω τὸ ἴσον 7, οὕτως ἔχω

$$7 \mid {}^{3}/_{4} \times 5 \times 12,$$

Ἔπειτα πολλαπλασιάζω διαιρέτην καὶ διαιρετέον καὶ ἐπὶ 4, καὶ ἀντὶ $^{3}/_{4} \times 4$ γράφω τὸ ἴσον 3. Οὕτως ἔχω τὴν ἑξῆς λύσιν, ἥτις δὲν ἔχει κανὲν κλάσμα,

$$4 \times 7 \mid 3 \times 5 \times 12.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συμπεραίνω τὸν ἑξῆς κανόνα· *Ἐὰν εἰς λύσιν τινὰ θέλω νὰ ἐξαλείψω τὰ κλάσματα, διαγράφω τοὺς παρονομαστάς, καὶ γράφω τοὺς μὲν παρονομαστὰς τοῦ διαιρέτου ὡς παράγοντας εἰς τὸν διαιρετέον, τοὺς δὲ τοῦ διαιρετέου ὡς παράγοντας εἰς τὸν διαιρέτην.*

Τὸν κανόνα τοῦτον ἐφαρμόζω καὶ εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

6) $^{7}/_{16}$ πήχ. τιμῶνται $^{11}/_{12}$ ταλ., $^{9}/_{10}$ πήχ. πόσον τιμῶνται;

Λύσις καὶ ὑπολογισμός.

	Διαιρέτης	*Διαιρετέος*
	$^{7}/_{16}$ πήχ.	$^{11}/_{12}$ τάλ. $\times\, ^{9}/_{10}$ πήχ.
	$10 \times 12 \times 7$	11 τάλ. $\times 9 \times 16$
3)	$10 \times 4 \times 7$	11 τάλ. $\times 3 \times 16$
4)	10×7	11 τάλ. $\times 3 \times 4$
2)	5×7	11 τάλ. $\times 3 \times 2$
	35	66 τάλ. $\mid 1\,^{31}/_{35}$ τάλ.
		31 Ἀπ. $1\,^{31}/_{35}$ τάλ. (*)

(Ἐν τῇ πρώτῃ γραμμῇ ἔγραψα τὴν λύσιν, ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξήλειψα τοὺς παρονομαστάς, ἐν τῇ τρίτῃ ἁπλοποίησα μὲ 3, ἔπειτα μὲ 4 καὶ τέλος μὲ 2).

(*) Ὁ ἁπλοῦς ὑπολογισμὸς ἐπὶ τοῦ πίνακος εἶνε περίπου ὡς ἑξῆς·

$\frac{7}{\cancel{16}}$ πήχ.	$\frac{11}{\cancel{12}}$ τάλ. $\times \frac{9}{\cancel{10}}$ 3 πήχ.
4 $\cancel{12}$	$\cancel{16}$
$\cancel{10}$	$\cancel{4}$
5	2
35	66 $\mid 1\,^{31}/_{35}$ τάλ.

§ 89.

Εἰς τὸ πρόβλημα δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι καὶ μικτοὶ ἀριθμοί, π.χ. ἐὰν $6\,{}^2/_3$ ὀκ. ἀξίζωσι $4\,{}^4/_{15}$ δρ., πόσον ἀξίζουσιν $9\,{}^1/_4$ ὀκ.; Ἐνταῦθα εἶνε προφανές, ὅτι πρὶν ἐκτελέσω τὸν ὑπολογισμόν, πρέπει νὰ τρέψω τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα, $6\,{}^2/_3 = {}^{20}/_3$, $9\,{}^1/_4 = {}^{37}/_4$ καὶ $4\,{}^4/_{15} = {}^{64}/_{15}$. Οὕτω λοιπὸν ἐκ τῆς ἀναλογίας $6\,{}^2/_3$ ὀκ : $9\,{}^1/_4$ ὀκ. $= 4\,{}^4/_{15}$ δρ. : χ δρ. προέρχεται ἡ ἑξῆς λύσις καὶ ὁ ὑπολογισμός,

$6\,{}^2/_3$ ὀκ	$4\,{}^4/_{15}$ δραχ. $\times\ 9\,{}^1/_4$ ὀκ.
${}^{20}/_3$	${}^{64}/_{15}$ δραχ. $\times\ {}^{37}/_4$
$15\times4\times20$	64 δρ. $\times$ 37 $\times$ 3
$3\times4\times4)$ 5 $\times$ 5	4 δρ. $\times$ 37
	4
25	148 | $5\,{}^{23}/_{25}$ δρ. $=$ 5,92 δρ.
	23

§ 90.

Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα εἷς ἢ πλειότεροι ὅροι ἦνε συμμιγεῖς ἀριθμοί, τρέπω αὐτοὺς εἰς μίαν ὀνομασίαν. Π. χ. εἰς 3 ἔτη 8 μῆνας ἐπλήρωσα τόκον 28 λίρ. 16 σελ., πόσον θέλω πληρώσει εἰς 5 ἔτη 9 μῆνας διὰ τὸ αὐτὸ χρέος;

3 ἔτ. 8 μ. : 5 ἔτ. 9 μ. $=$ 28 λίρ. 16 σελ. : χ λίρ.

Λύσις καὶ ὑπολογισμός,

3 ἔτ. 8 μ.	28 λίρ. 16 σελ. $\times$ 5 ἔτ. 9 μ.
$\times$12	$\times$20 $\qquad$ $\times$12
44 μ.	576 σελ. $\times$ 69 μ.
4) 11	144 σελ. $\times$ 69
	$\times$69
	1296
	864
11	9936 | $903\,{}^3/_{11}$ σελ.

Δύναμαι ὅμως τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς νὰ ἐκφράσω καὶ διὰ τῆς ἀρχικῆς ὀνομασίας, π. χ. 3 ἔτ. 8 μ. $=3\ ^2/_3$ ἔτ. 5 ἔτ. 9 μ. $=5\ ^3/_4$ ἔτ., 28 λίρ. 16 σελ. $=28\ ^4/_5$ λίρ., καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσω τὸν ὑπολογισμὸν κατὰ § 89, καὶ οὕτω θέλω εὑρεῖ τὸ ἐξαγόμενον εἰς λίρας 45 $^9/_{55}$.

§ 91.

Ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε δεκαδικὰ κλάσματα·

Ἐὰν 6, 3 πήχ. τιμῶνται δρ. 4,50, πόσον τιμῶνται 12,25 πήχ.;

6,3 πήχ. : 12,25 πήχ. = 4,5 δρ. : χ δρ.

Λύσις καὶ ὑπολογισμός.

	6, 3πήχ.	12,25 πήχ. × 4,5 δρ.
	6300	1225×45 δρ.
9)	700	1225×5
5)	140	1225
5)	28	245
7)	4	35 | 8,75 δρ.

§ 92.

Τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντα προβλήματα λέγονται τῆς *εὐθείας μεθόδου τῶν τριῶν*· διότι τὰ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὑπάρχοντα δύο ποσὰ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τοιαύτην σχέσιν, ὥστε ὅσον αὐξάνει τὸ ἕν, τόσον αὐξάνει ἀναλόγως καὶ τὸ ἕτερον, π. χ. ἐὰν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ. τὸ ποσὸν τῆς πραγματείας, τῶν ἐργατῶν, τοῦ κεφαλαίου, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. καὶ ἡ τιμή, ὁ μισθός, ὁ τόκος αὐτοῦ.

Εἰς ἄλλα δὲ προβλήματα ὑπάρχει τὸ ἀντίστροφον, ἤγουν ὅσον αὐξάνει τὸ ἓν ποσόν, τόσον ἐλαττοῦται ἀναλόγως τὸ ἕτερον· π. χ. ὅσον αὐξάνει ἡ ταχύτης τοῦ ἀτμοπλοίου, εἰς τόσον ὀλιγωτέρας ὥρας διατρέχει τὸ αὐτὸ διάστημα. Τὰ προβλήματα ταῦτα λέγονται *τῆς ἀντιστρόφου μεθόδου τῶν τριῶν*. Τοιαῦτα δὲ εἶνε τὰ ἑξῆς·

1) Ἐὰν 8 ἐργάται σκάπτωσιν ἀγρόν τινα εἰς 15 ἡμ., 12 ἐργ. εἰς πόσας ἡμ. τὸν σκάπτουσιν;

Ἐνταῦθα βλέπομεν, ὅτι ἐὰν οἱ ἐργάται γείνωσι δίς, τρὶς κτλ. πλειότεροι, θὰ σκάψωσι τὸν ἀγρὸν εἰς δίς, τρὶς κτλ. ὀλιγωτέρας ἡμέρας· ὅθεν, ἵνα σχηματισθῇ ὀρθὴ ἀναλογία, πρέπει ὁ λόγος τῶν ἐργατῶν 8 : 12 ν' ἀντιστραφῇ· οὕτως εἶνε

12 ἐργ. : 8 ἐργ. = 15 ἡμ. : χ ἡμ. ὅθεν $\chi = \frac{8 \times 15}{12} = 10$ ἡμ.

2) Κτίριόν τι κτίζεται εἰς 5 μῆνας ὑπὸ 12 κτιστῶν, ἐὰν θέλω νὰ τὸ κτίσω εἰς 2 μῆνας, πόσους κτίστας χρειάζομαι;

Καὶ ἐνταῦθα ἡ μέθοδος εἶνε ἀντίστροφος, διότι ὅσον ὀλιγοστεύουν οἱ μῆνες, τόσον αὐξάνουσιν οἱ κτίσται· λοιπὸν εἶνε

2 μῆν. : 5 μῆν. = 12 κτίς. : χ κτ. ὅθεν $\chi = \frac{5 \times 12}{2} = 30$ μῆν.

3) Ἐὰν 7 ἵπποι διατρέφωνται μὲ ποσόν τι χόρτου 20 ἡμ., 12 ἵπποι μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν πόσας ἡμ. διατρέφονται;

Ἐὰν οἱ ἵπποι γείνωσι δίς, τρὶς κτλ. πλειότεροι, θὰ τελειώσωσι τὴν τροφὴν εἰς δίς, τρὶς κτλ. ὀλιγωτέρας ἡμ. ὅθεν εἶνε

12 ἵπ. : 7 ἵπ. = 20 ἡμ. : χ ἡμ. ὅθεν $\chi = \frac{7 \times 20}{12} = 11^2/_3$ ἡμ.

Τὰ τῆς ἀντιστρόφου μεθόδου τῶν τριῶν προβλήματα λύονται καὶ αὐτὰ καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς·

1) Ἐὰν 8 ἐργ. περατῶσιν ἔργον τι εἰς 15 ἡμ., 1 ἐργ. περατοῖ αὐτὸ εἰς 15×8 ἡμ., καὶ οἱ 12 ἐργ. εἰς $\frac{15 \times 8}{12}$ ἡμ.

2) Ἐὰν κτίριόν τι κτίζηται εἰς 5 μῆνας ὑπὸ 12 κτισ., ἵνα κτισθῇ εἰς 1 μῆνα, χρειάζεται 12×5 κτ., καὶ ἵνα κτισθῇ εἰς 2 μῆνας, χρειάζεται $\frac{12 \times 5}{2}$ κτίστας.

3) Ἐὰν 7 ἵπ. διατρέφωνται 20 ἡμ., 1 ἵπ. διατρέφεται μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν 20×7 ἡμ., καὶ οἱ 12 ἵπ. διατρέφονται $\frac{20 \times 7}{12}$ ἡμ.

Σημ. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ τρεῖς γνωστοὶ ὅροι δὲν εἶνε τόσον προφανεῖς, ἀλλ' ἀπαιτεῖται σκέψις τις πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν. Τοιαῦτα εἶνε τὰ ἑξῆς·

1) Ἐπλήρωσα δι' ἕνα σάκκον καφφὲ ἔχοντα 200 λίτρας 150 δρ. ἀλλ' 28 λίτραι ἐφθάρησαν, πόσον μοῦ στοιχίζει ἡ λίτρα;

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν 200 λιτρῶν ἐφθάρησαν 28, μένουσιν 172 λίτρ. Λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἶνε, ἐὰν 172 λίτρ. ἐστοίχισαν 150 δραχ., 1 λίτρ. πόσον ἐστοίχισεν;

2) Ἠγόρασα πέντε σάκκους ἀνθράκων ἔχοντας ὀκ. 42, 38, 50, 36 καὶ 45, καὶ ἐπλήρωσα δι' ὅλους 32 δραχ., πόσον μοῦ ςοιχίζει ὁ ςατ.;

Ἐνταῦθα εἶνε φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ προσθέσω τὰς ὀκ. τῶν πέντε σάκκων, $42+38+50+36+45$ ὀκ. $=211$ ὀκ., καὶ ἔπειτα νὰ εἴπω, ἐὰν 211 ὀκ. τιμῶνται 32 δραχ., 1 στατ. ($=44$ ὀκ.) πόσον τιμᾶται;

3) Σιτοπώλης τις πωλήσας 350 κοιλὰ ἀντὶ 1500 δρ. ἐζημιώθη 250 δραχ. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ κοιλόν;

Ὁ σιτοπώλης εἶχε πληρώσει δραχ. $1500+250=1750$. Λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἶνε, ἐὰν 350 κοιλὰ ἐςτοίχισαν 1750 δραχ., 1 κοιλὸν πόσον ἐστοίχισε;

4) Ὡρολόγιόν τι δεικνῦον ἤδη ἀκριβῶς τὴν 12ην ὑστερεῖ 7 λεπ. εἰς 3 ὥρ., μετὰ πόσον καιρὸν θέλει δείξει πάλιν τὴν ἀληθῆ ὥραν;

Ἵνα δείξῃ πάλιν τὸ ὡρολόγιον τὴν ἀληθῆ ὥραν, πρέπει νὰ ὑστερήσῃ 12 ὥρας. Ὅθεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ τεθῇ ὡς ἑξῆς· Ἐὰν 7 λεπτῶν ὑστέρησις συμβαίνῃ εἰς 3 ὥρ., 12 ὡρῶν ὑστέρησις εἰς πόσας ὥρας θέλει συμβῇ; Λοιπὸν εἶνε

$$7 \text{ λεπ.} : 60 \times 12 \text{ λεπ.} = 3 \text{ ὥρ.} : \chi \text{ ὥρ.}$$

Ὅθεν εἶνε $\chi = \frac{720 \times 3}{7} = 308\ ^4/_7$ ὥρ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 17 λίτραι τιμῶνται 13 δραχ., πόσον ἀξίζει 1 λίτρα;
2) Μὲ 5 δρ. ἀγοράζω 18 πήχ., μὲ 1 δρ. πόσους;
3) 27 λίτραι τιμῶνται 28 δρ., 29 λίτραι πόσον ἀξίζουσι;
4) Μὲ 23 δρ. ἀγοράζω 18 πήχ., μὲ 13 δρ. πόσους;
5) 9 λίτραι τιμῶνται 14 δρ., 17 λίτρ. πόσον;
6) 29 πήχ. τιμῶνται 33 δρ., 18 πήχ. πόσον;
7) Μὲ πόσα σελλίνια ἰσοῦνται 20 φράγκα, ἐὰν 48 φράγκα ἔχωσι 41 σελ.;
8) Ἐὰν πρὸς μεταφορὰν 9 στατ. πληρώνω 14 τάλ., πρὸς μεταφορὰν 13 στατ. πόσον θέλω πληρώσει;
9) Ἐὰν βάρος τι μετεφέρθη 30 μίλια μὲ 9 τάλ., μὲ 8 ταλ. πόσα μίλια μεταφέρεται;
10) Ἐὰν 100 τεκτ. πήχ. ἰσῶνται μὲ 77 βασιλικούς, 31 βασ. μὲ πόσους τεκτονικοὺς ἰσοῦνται;
11) 11 βασ. πήχ. ἰσοῦνται μὲ 35 πρωσ. πόδ. α') πόσους πόδ. ἔχουσιν 73 βασ. πήχ. β') πόσους βασ. πήχ. ἔχουσι 325 πόδες;
12) Ἐὰν 100 τετρ. βασ. πήχ. ἰσῶνται μὲ 169 τετρ. τεκτονικούς, 1000 τετρ. βασ. πήχ. πόσους τεκτ. ἔχουσι;
13) 26 στατ. ἀξίζουσι 5 λίρ., πόσους λαμβάνω μὲ 23 λίρ.;
14) 45 στατ. ἀξίζουσι 13 λίρ., πόσας λίρ. (σελ. καὶ πέν.) ἀξίζουσι 28 στατ.;
15) 81 ὀκ. ἀξίζουσιν 815 δρ., πόσας ἀξίζουσι 48 ὀκ.;
16) 72 στατ. ἀξίζουσιν 56 λίρ., 225 στατ. πόσας;
17) Ἐὰν τις κατ' ἔτος (εἰς 365 ἡμ.) χρειάζηται πρὸς καπνὸν 225 δρ., μὲ 72 δρ. πόσας ἡμ. περνᾷ;
18) Ἐὰν 100 φιορίνια ἀργυρᾶ ἰσῶνται μὲ 112 χάρτινα, μὲ πόσα ἀργυρᾶ ἰσοῦνται 256 χάρτ.;
19) Ἐὰν 7 δίστ. ἰσῶνται μὲ 30 σελ. α') μὲ πόσα σελ. ἰσοῦνται 896 δίστ., β') μὲ πόσα δίστ. ἰσοῦνται 315 σελ.;
20) 787 στρέμ. παλαιὰ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1000 βασ. στρέμ. 86 στρέμ. βασ. μὲ πόσα παλαιὰ στρέμ. ἰσοδυναμοῦσιν;

21) 5 λίτραι ἀξίζουσιν $^7/_9$ ταλ., πόσον ἀξίζουσιν 27 λίτρ.;

22) $^3/_4$ πήχ. ἐπληρώθησαν 7 δραχ., πόσον ἀξίζουσι $^{13}/_{16}$ πήχεως;

23) $^7/_8$ ὀκ. ἀξίζουσιν $^{11}/_{12}$ δίστ., πόσον ἀξίζουσιν 28 ὀκ.;

24) Μὲ 18 δίστ. ἀγοράζω $^8/_{11}$ στατ., πόσον ἀξίζουσι $^{16}/_{25}$ στατῆρος;

25) 1 ὀκᾶ ἀξίζει $^{16}/_{33}$ δίστ., πόσον ἀξίζουσι $^{15}/_{32}$ ὀκ.;

26) Μὲ $^7/_8$ δίστ. ἀγοράζω $^{15}/_{16}$ πήχ., πόσον ἀξίζουσιν $^{11}/_{12}$ πήχ.;

27) 6 $^3/_4$ ὀκ. ἀξίζουσι 18 δρ., πόσον ἀξίζουσιν 28 ὀκ.;

28) 58 ὀκ. ἀξίζουσιν 11$^3/_5$ δρ., πόσον ἀξίζουσιν 25$^1/_2$ὀκ.;

29) Μὲ 5 $^1/_3$ δίστ. ἀγοράζω 27 πήχ., πόσον ἀξίζουσιν 63 πήχεις;

30) Πόσον ἀξίζουσι 18 κοιλά, ἐὰν μὲ 5 $^1/_2$ δίστ. λαμβάνω 8 $^1/_4$ κοιλά;

31) 2 $^1/_2$ ὀκ. ἀξίζουσι $^4/_5$ δίστ., πόσον ἀξίζουσι 15 ὀκ.;

32) πόσον ἀξίζουσι 13 $^3/_4$ λίτρ., ἐὰν μὲ 15 $^1/_2$ δραχ. λαμβάνω 22 λίτρ.;

33) 1 στατὴρ ἀξίζει 4$^7/_{12}$ δίστ., πόσον ἀξίζουσιν $^8/_{11}$ στατ.

34) 19 ὀκ. ἀξίζουσιν 8 $^3/_4$ δίστ., πόσας ὀκ. λαμβάνω μὲ 12 $^1/_2$ δίστηλα;

35) Πόσον ἀξίζει 1 πῆχυς, ἐὰν μὲ 9$^3/_4$ δίστ. λαμβάνω 12 $^{15}/_{16}$ πήχ.;

36) Μὲ 1 δίστηλον λαμβάνω $^{15}/_{22}$ στατ., πόσον ἀξίζουσι 3 $^5/_8$ στατῆρες;

37) $^3/_4$ πήχ. ἀξίζουσι $^5/_6$ δίστ., πόσον ἀξίζουσι 2$^1/_2$ πήχ.;

38) Μὲ πόσα δίστ. ἰσοῦνται 43 $^1/_2$ ρούβλια, ἐὰν 20 ρούβλια ἰσῶνται με 14$^5/_6$ δίστ.;

39) 14 πρωσσικὰ τάλ. εἶνε=2$^1/_8$ λίρ., μὲ πόσας λίρ. ἰσοῦνται 128 πρωσ. τάλ.;

40) 2$^1/_2$ πήχ. τιμῶνται 17 σελ. 9 πέν., πόσον τιμῶνται 3 $^3/_4$ πήχ.;

41) Μὲ 2 $^2/_3$ δίσ. ἀγοράζω 9 στατ. 28 $^3/_4$ ὀκ., πόσον λαμβάνω μὲ 4 δίστ.;

42) Λειμών τις $9\,^3/_4$ στρεμ. ἐμισθώθη $117\,^2/_3$ δίστ. ἐπὶ $8^1/_2$ ἔτη, πόσον εἶνε τὸ ἐτήσιον μίσθωμα τοῦ λειμῶνος;

43) Ἐὰν ὑφάντης τις ἐργαζόμενος 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 20 ἡμ., πόσας ὥρ. πρέπει νὰ ἐργάζηται τὴν ἡμέραν, ἵνα τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμ.;

44) Αἱ 100 δραχ. φέρουσι τόκον $3\,^1/_3$ δραχ., πόσον τόκον φέρουσι 1260 δραχ.;

45) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 100 δραχ., ἐὰν $37^1/_2$ δραχ. ἔδωσαν $3\,^3/_4$ δραχ. τόκον;

46) Ἐὰν 2 στατ. 6 ὀκ. ἀξίζωσι $17^3/_4$ δίστ., πόσον ἀξίζουσιν 6 στατ. 18 ὀκ.;

47) Μὲ 3 λίρ. λαμβάνω 63 πήχ., πόσον λαμβάνω μὲ 7 σελ.;

48) 16 ὀκ. ἀξίζουσι 17 δραχ., πόσον ἀξίζουσιν 11 στατ.;

49) 12 πήχ. ἀξίζουν 4 λίρ. 15 σελ., πόσον ἔχουν 17 πήχ.;

50) Πόσον ἀξίζουσι 55 πήχ., ἐὰν διὰ 32 πήχ. ἐπλήρωσα 3 λίρ. 6 σελ.;

51) Μὲ 12 λίρ. 16 σελ. λαμβάνω 56 λίτρας, πόσας λαμβάνω μὲ 7 λίρ. 18 σελ.;

52) Μὲ ἓν δίστ. λαμβάνω 5 ὀκ. 240 δράμ., πόσον ἀξίζουσι 57 ὀκ. 160 δράμ.;

53) Πόσον ἀξίζουσι 48 ὀκ. 240 δράμ., ἐὰν μὲ ἓν δίστ. λαμβάνω 10 ὀκ. 160 δράμ.;

54) Ἐὰν 15 κῶνοι ζακχάρεως ἀγορασθέντες ἀντὶ δραχμῶν 160,75 ἔχωσι μικτὸν βάρος 112,50 ὀκ., καὶ τάραν 13 ὀκ., πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ;

55) Ἓν δέμα πραγματείας ἔχει βάρος μικτὸν 195,75 λίτρ., τάραν $15\,^1/_2$ λίτρ., πόσον πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ δέμα, ἐὰν 100 λίτρ. καθαραὶ στοιχίζωσιν 27,64 δρ.;

56) Ὁ βασ. πῆχ. εἶνε πρὸς τὸν μικρὸν πῆχυν Κων/πόλεως ὡς 77 πρὸς 50, α) πόσους βασ. πήχ. ἔχουσι 55 πήχ. Κων/πόλεως, β) πόσους πήχ. Κωνστ. ἔχουσι $31\,^3/_5$ βασ. πήχ.;

57) Ἡ ὀκᾶ εἶνε πρὸς τὸ χιλιόγραμμον ὡς 32 πρὸς 25, α) πόσας ὀκ. ἔχουσι 256 χιλιόγραμμα, β) πόσα χιλιόγραμμα ἔχουσιν 68 ὀκ.;

58) $^1/_{33}$ αὐστρ. μιλ.$=^1/_7$ ἀγγλ. μιλ. α) Πόσα αὐστρ. μίλια ἰσοῦνται μὲ 10 ἀγγλικά, β) πόσα δὲ ἀγγλ. μίλια ἰσοῦνται μὲ 100 αὐστριακά;

59) Ὁ Βερολίνιος ποὺς εἶνε πρὸς τὸν Παρισινὸν πόδα (σχεδὸν) ὡς 28 : 29, α) πόσους Παρισινοὺς πόδας ἔχουσι $31\,^1/_2$ ποδ. Βερολίνιοι, καὶ β) πόσους ποδ. Βερολινίους ἔχουσι 17 $^3/_5$ ποδ. Παρισινοί;

60) Τὸ χιλιόγραμμον ἔχει λόγον πρὸς τὴν Πρωσσικὴν λίτραν (σχεδὸν) ὡς 15 : 7, α) πόσα χιλιόγραμμα ἔχουσι 35 λίτραι, καὶ β) πόσας λίτρ. ἔχουσιν 20 χιλιόγραμμα;

61) Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἔχει λόγον πρὸς τὴν περιφέρειαν (σχεδὸν) ὡς 7 : 22, πόσον εἶνε τὸ μέγεθος τῆς περιφερείας κύκλου ἔχοντος $83\,^3/_4$ ποδ. διάμετρον;

62) Ἡ περιφέρεια τῆς Γῆς ἔχει 5400 γερμ. γεωγραφικὰ μίλια, πόση εἶνε ἡ διάμετρος αὐτῆς;

63) 12 ἐργάται τελειώνουσιν ἔργον τι εἰς 27 ἡμ., πόσας ἡμ. χρειάζονται εἰς τοῦτο 16 ἐργάται;

64) Μὲ 17 στατ. χόρτου διατρέφονται 8 ἵπποι $12\,^1/_2$ ἑβδομάδας, πόσον καιρὸν ἐξαρκεῖ τὸ χόρτον εἰς 13 ἵπ.;

65) Μὲ 7 τάλ. μεταφέρονται $9\,^3/_4$ στατ. $18\,^2/_3$ μίλια, πόσα μίλια μεταφέρονται 12 στατ. μὲ 7 τάλ.;

66) Μὲ ποσόν τι νήματος ὑφαίνονται 36 πήχ. ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $^3/_4$ πήχ., πόσοι πήχ. γίνονται μὲ τὸ αὐτὸ νῆμα, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος $^7/_4$;

67) Ἐξ ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $^5/_4$ χρειαζόμεθα 70 πήχ., πόσους πήχεις ἠθέλομεν χρειασθῆ πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος $^9/_4$;

68) 7 ἐργ. περατοῦσιν ἔργον τι εἰς 16 ἡμ., πόσοι ἐργάται χρειάζονται, ἵνα περατώσωσιν αὐτὸ εἰς 14 ἡμ.;

69) Ἀτμομηχανὴ 24 ἵππων χρειάζεται 4 ἡμ. πρὸς ἀποπεράτωσιν ἐργασίας τινός, ἑτέρα μηχανὴ 16 ἵππων πόσας ἡμ. χρειάζεται πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς αὐτῆς ἐργασίας;

70) Εἰς φρούριόν τι ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 1484 ἄν-

δρας ἐπὶ 5 μῆνας 10 ἡμ., πόσοι ἄνδρες δύνανται νὰ τραφῶσι μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς 7 μῆν. 15 ἡμ. ;

71) Ἐὰν ἀντλῶμεν δι' ἀγγείου χωροῦντος 1 $^3/_5$ ὀκ., κενοῦται δεξαμενή τις μετὰ 89 ἀντλήσεις, ποσάκις δὲ πρέπει νὰ ἀντλήσῃ τις δι' ἑτέρου ἀγγείου χωροῦντος 1$^1/_4$ ὀκ., ὥστε νὰ κενωθῇ ἡ αὐτὴ δεξαμενή ;

72) Ἐργάτης ἐργαζόμενος 10 $^1/_2$ ὥρ. τὴν ἡμέραν τελειώνει ἔργον τι εἰς 22 ἡμ., εἰς πόσας ἡμ. θέλει τελειώνει ἴσον ἔργον ἐργαζόμενος 11 $^3/_4$ ὥρ. ;

73) Δι' ἔνδυμά τι χρειάζομαι 3,85 πήχ. ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1,8 πήχ., ἐὰν δὲ τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 1,5 πήχ., πόσους πήχ. χρειάζομαι ;

74) Ταχυδρόμος περιπατῶν 7 $^3/_4$ μίλια τὴν ἡμέραν διατρέχει διάστημά τι εἰς 9$^1/_2$ ἡμ., ἐὰν δὲ περιπατῇ 8$^1/_4$ μίλ. τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμ. τὸ διατρέχει ;

75) Πάσσαλος καθέτως ἐστημένος καὶ ἔχων μῆκος 2$^1/_2$ πήχ. ῥίπτει σκιὰν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους 4$^3/_4$ πήχ., πόσου ὑψηλὸν εἶνε τὸ κωδωνοστάσιον, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ῥίπτει σκιὰν 189 $^2/_3$ πήχ. ;

Β'. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

§ 93.

Εἰς τὸ ἑξῆς πρόβλημα,

Ἐὰν 6 ἐργάται εἰς 15 ἡμ. λαμβάνωσι μισθὸν 75 τάλ., 8 ἐργάται εἰς 20 ἡμ. πόσον λαμβάνουσι ;

ὁ μισθὸς ἐξαρτᾶται οὐ μόνον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν. Ἵνα λύσωμεν αὐτὸ πρῶτον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, λέγομεν, 6 ἐργάται εἰς 15 ἡμέρας λαμβάνουσιν 75 τάλ.

1 » » 15 » » $\frac{75}{6}$ »

8 » » 15 » » $\frac{75.8}{6}$ »

8 » » 1 » » $\frac{75.8}{6.15}$ »

8 » » 20 » » $\frac{75.8.20}{6.15.}$ »

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα δι' ἀναλογιῶν, ζητοῦμεν πρῶτον πόσος γίνεται ὁ μισθός, ὅταν μεταβληθῶσι μόνον οἱ ἐργάται, καὶ ἔχομεν

6 ἐργ. : 8 ἐργ.$=$75 τάλ. : χ, $\chi=\frac{8.75}{6}=$100 τάλ.

Ἔπειτα ζητοῦμεν πόσος γίνεται ὁ μισθός, ὅταν μεταβληθῶσι καὶ αἱ ἡμέραι, καὶ ἔχομεν

15 ἡμ.: 20 ἡμ.$=$100 τάλ. :χ', $\chi'=\frac{20.100}{15}=133\,^1/_3$ τάλ.

Ἀλλ' ἵνα συντέμωμεν τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ εὑρίσκειν τὸν ἄγνωστον, δὲν ζητοῦμεν τὸν διὰ μέσου ἄγνωστον χ, ἀλλὰ γράφομεν τὰς δύο ἀναλογίας τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην οὕτω

$$6 : 8=75 : \chi,$$
καὶ $$15 : 20=\chi : \chi'$$

Ἔπειτα πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους κατὰ § 85 καὶ ἐξαλείφοντες τὸν χ, ὅστις εἶνε κοινὸς παράγων εἰς τὸ τρίτον καὶ τέταρτον γινόμενον, ἔχομεν τὴν ἑξῆς σύνθετον ἀναλογίαν,

$$6.\,15 : 8.\,20=75 : \chi',$$

Ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸν

$$\chi'=\frac{3.20.75}{6.15}=133\,^1/_3 \text{ τάλ.}$$

Τοιαῦτα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄγνωστος ἐξαρτᾶται ἐκ δύο ἢ πλειοτέρων ποσῶν, ὀνομάζονται *τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν*.

§ 94.

Πρὸς πλειοτέραν κατάληψιν τῆς δι' ἀναλογιῶν μεθόδου ἔστωσαν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Ἐὰν 20 ἐργάται εἰς 18 ἡμ. ἔσκαψαν τάφρον 250 πήχ. τὸ μῆκος, 16 τὸ πλάτος καὶ 6 τὸ βάθος, πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 36 ἡμ. σκάπτουσι τάφρον 450 πήχ. τὸ μῆκος, 24 τὸ πλάτος καὶ 8 τὸ βάθος;

α΄. Ζητοῦμεν πόσοι γίνονται οἱ ἐργάται, ὅταν μεταβληθῇ μόνον τὸ μῆκος τῆς τάφρου, καὶ ἐπειδὴ τὸ μῆκος εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον πρὸς τοὺς ἐργάτας, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

250 πήχ. : 450 πήχ. = 20 ἐργ : χ ἐργ.

β΄. Ἔπειτα ζητοῦμεν, πόσοι γίνονται οἱ ἐργάται, ὅταν μεταβληθῇ καὶ τὸ πλάτος, καὶ ἔχομεν ὁμοίως τὴν ἀναλογίαν,

16 πήχ. : 24 πήχ. = χ ἐργ. : χ΄ ἐργ.

γ΄. Ἔπειτα ζητοῦμεν, πόσοι γίνονται οἱ ἐργάται, ὅταν μεταβληθῇ καὶ τὸ βάθος, καὶ ἔχομεν ὁμοίως

6 πήχ. : 8 πήχ. = χ΄ ἐργ. : χ΄΄ ἐργ.

δ΄. Τέλος ζητοῦμεν, πόσοι γίνονται οἱ ἐργάται, ὅταν μεταβληθῶσι καὶ αἱ ἡμέραι, καὶ ἐπειδὴ αἱ ἡμέραι εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐργάτας (διότι εἰς δίς, τρὶς κ. τ. ἑ. πλειοτέρας ἡμέρας χρειάζονται ἐργάται δίς, τρὶς κ. τ. ἑ. ὀλιγώτεροι), ἔχομεν τὴν ἀντίστοφον ἀναλογίαν

36 ἡμ. : 18 ἡμ. = χ΄΄ ἐργ. : Χ ἐργ.

Τὰς τέσσαρας ταύτας ἀναλογίας (εἰς τὰς ὁποίας τὸ μὲν Χ σημαίνει τὸ ζητούμενον, τὸ δὲ χ, χ΄ καὶ χ΄΄ τοὺς διὰ μέσου ἀγνώστους) γράφομεν τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους ἔχομεν κατὰ § 85 μίαν σύνθετον ἀναλογίαν.

Ἀλλὰ πρὶν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ τέταρτοι ὅροι χ, χ΄ καὶ χ΄΄ γίνονται τρίτοι εἰς τὰς ἑπομένας ἀναλογίας. Ὅθεν δυνάμεθα ν' ἁπλοποιήσω-μεν τὸν δεύτερον λόγον τῆς συνθέτου ἀναλογίας ἀπαλείφοντες τοὺς παράγοντας χ, χ' καὶ χ'', οἱ ὁποῖοι εἶνε κοινοὶ εἰς τὸν τρίτον καὶ τέταρτον ὅρον, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἑξῆς σύνθετον ἀναλογίαν,

$$250 . 16 . 6 . 36 : 450 . 24 . 8 . 18 = 20 : X$$

$$\text{ὅθεν } X = \frac{450 . 24 . 8 . 18 . 20}{250 . 16 . 6 . 36} = 36 \text{ ἐργ.}$$

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τοὺς διὰ μέσου ἀγνώστους, οἱ ὁποῖοι πάντοτε ἀπαλείφονται, εἶνε περιττὸν νὰ γράφωμεν εἰς τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ καταστρώνωμεν ὅλους τοὺς λόγους, τοὺς ὁποίους παρέχει τὸ πρόβλημα, τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, καὶ οὕτω πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς ν' ἀποτελῶμεν τὸν σύνθετον λόγον, ὅςτις εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τρίτου δεδομένου πρὸς τὸν ὁμοειδῆ του τέταρτον, ἤτοι πρὸς τὸν ζητούμενον χ.

2) Ἐὰν 10 ὑφάνται ἐργαζόμενοι 5 ἡμ. καθ' ἑβδομάδα καὶ $12\frac{1}{2}$ ὥρ. καθ' ἡμέραν εἰς 15 ἑβδομάδας ὕφαναν 90 κομμάτια ὑφάσματος ἔχοντα ἀνὰ 30 πήχ. μῆκος, εἰς πόσας ἑβδομάδας 20 ὑφάνται ὑφαίνουσιν 81 κομμάτια ἀνὰ 40 πήχ. μῆκος, ἐργαζόμενοι 6 ἡμ. καθ' ἑβδόμάδα καὶ $13\frac{3}{4}$ ὥρ. καθ' ἡμέραν;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς ὅλα τὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, διαιρεῖται εἰς δύο κῶλα, εἰς ὑπόθεσιν καὶ ἐρώτησιν· τὸ μὲν πρῶτον κῶλον, ἡ ὑπόθεσις, περιέχει ὅλα τὰ ποσὰ τὰ σχετικὰ πρὸς τὸν 15 ἑβδ., ὅςτις εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἄγνωστον χ· τὸ δὲ δεύτερον κῶλον, ἡ ἐρώτησις, περιέχει ὅλα τὰ δεδομένα ποσὰ τὰ σχετικὰ πρὸς αὐτὸν τὸν ἄγνωστον χ.

Γράφομεν λοιπὸν κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν τὰ ποσὰ τοῦ πρώτου κώλου, καὶ ὑπ' αὐτὰ τὰ τοῦ δευτέρου, ὥςτε τὰ ὁμοειδῆ ν' ἀντιστοιχῶσιν, οὕτω,

ὑφάντ.	ἑβδομ.	ἡμ.	ὥρ.	κομμάτ.	πήχ.
10	15	5	$12\frac{1}{2}$	90	30
20	χ	6	$13\frac{3}{4}$	81	40

Ἔπειτα γράφομεν τὸν μὲν ἄγνωστον χ εἰς τὴν θέσιν τοῦ τετάρτου ὅρου τῆς σχηματισθησομένης συνθέτου ἀναλογίας, τὸν δὲ ὁμοειδῆ αὐτοῦ 15 ἑβδ. εἰς τὴν θέσιν τοῦ τρίτου ὅρου, τοὺς δὲ ἀριθμοὺς ὅλων τῶν ἄλλων ζευγῶν γράφομεν εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον τῆς συνθέτου ἀναλογίας, πρῶτον μὲν τὸν τῆς ὑποθέσεως καὶ δεύτερον τὸν τῆς ἐρωτήσεως, ἐὰν τὸ ποσὸν ἦνε κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον πρὸς τὰς ἑβδομάδας, πρῶτον δὲ τὸν τῆς ἐρωτήσεως καὶ δεύτερον τὸν τῆς ὑποθέσεως, ἐὰν τὸ ποσὸν ἦνε ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὰς ἑβδομάδας. Λοιπόν, ἐπειδὴ οἱ ὑφάνται, αἱ ἡμέραι καὶ αἱ ὧραι εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἑβδομάδας, τὰ δὲ κομμάτια καὶ οἱ πήχεις εἶνε κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα πρὸς αὐτάς, ἡ λύσις διατάσσεται ὡς ἑξῆς,

$$\left.\begin{array}{r@{\,:\,}l} 20 & 10 \\ 6 & 5 \\ 13\,^3/_4 & 12\,^1/_5 \\ 90 & 81 \\ 30 & 40 \end{array}\right\} = 15 : \chi$$

Ὁ δὲ ὑπολογισμὸς γίνεται εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς·

	$20.6.13^3/_4.90.30$	$10.5.12\,^1/_2.81.40.15$	
20.10)	20.6.55.90.30.2	10.5.25.81.40.15.4	
30.2)	6.55.9.30.2	5.25.81.2.15.4.	
5.9)	6.55.9	5.25.81.2	
6)	6.11	25.9.2	
	11	25.3	
	11	75 | 9	$6\,^9/_{11}$ ἑβδ.

3) Κεφάλαιον 333 $^1/_3$ δρ. εἰς 3 $^3/_4$ ἔτ. φέρει 11 $^1/_4$ δρ. τόκ.
Πόσον κεφάλαιον εἰς 4 $^2/_7$ » » 7 $^1/_2$ » »

Λύσις καὶ ὑπολογισμός.

	$4\,^2/_7 \times 11\,^1/_4$	$3\,^3/_4 \times 7\,^1/_2 \times 333\,^1/_3$
	$^{30}/_7 \times ^{45}/_4$	$^{15}/_4 \times ^{15}/_2 \times ^{1000}/_3$
$4\times15\times15)$	$4\times2\times3\times30\times45$	$15\times15\times1000\times7\times4$
	$2\times3\times2\times3$	1000×7
$4)$	3×3	250×7
	9	1750 | $194\,^4/_9$ δρ.

4) 66,60 δρ. εἰς 3,5 ἔτ. φέρουσι 17,40 δραχ. τόκον
37,50 » » 4,25 » » πόσας » »

Λύσις καὶ ὑπολογισμός.

	$66{,}6\times3{,}5$	$37{,}5\times4{,}25\times17{,}4$
	$666\times35\times100$	$375\times425\times174$
$6\times5)$	$111\times7\times100$	$75\times425\times29$
$3\times5)$	$37\times7\times20$	$25\times85\times29$
$5)$	$37\times7\times4$	$5\times85\times29$
	7	5
	259	425
	4	29
	1036	3825
		850
	1036	12325 | 11,89 δραχ.
		1965
		9290
		10020
		696.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

76) Ἐὰν 5 ἐργάται εἰς 8 ἡμ. λαμβάνωσιν $11\,^2/_3$ δίστ., πόσον λαμβάνουσιν 7 ἐργάται εἰς 12 ἡμ.;

77) Ἐὰν 3 ἵπποι εἰς 12 ἡμέρας δαπανῶσιν 8 $^1/_4$ κοιλὰ κριθῆς, πόσον δαπανῶσι 15 ἵπποι εἰς 5 ἡμ.;

78) 3 κῶνοι ζακχάρεως ἔχοντες ἕκαστος 22 $^1/_2$ λίτρας ἀξίζουσι 11 $^3/_5$ δίστ., πόσον ἀξίζουσι 5 κῶνοι ἔχοντες ἕκαστος 13 $^3/_4$ λίτρας;

79) 700 δραχ. εἰς 3 $^1/_4$ ἔτη φέρουσι τόκον 128 $^1/_2$ δρ., πόσον τόκον φέρουσι 550 δραχ. εἰς 8 $^3/_4$ ἔτη;

80) 5 πήχ. ῥούχου μὲ $^7/_4$ πλάτος ἀξίζουσι 14 $^7/_{10}$ δίς., πόσον ἀξίζουν 8 $^1/_2$ πήχ. τῆς αὐτῆς ποιότητος μὲ $^{11}/_4$ πλάτος;

81) Ἡ ταπιδόστρωσις θαλάμου ἔχοντος 18 ποδῶν μῆκος καὶ 12 $^1/_2$ ποδῶν πλάτος στοιχίζει 29 $^1/_2$ δίστ., πόσον στοιχίζει ἡ ταπιδόστρωσις ἑτέρου θαλάμου ἔχοντος 15 ποδῶν μῆκος καὶ 11 ποδῶν πλάτος;

82) Εἰς τοῖχον ἔχοντα 25 ποδῶν μῆκος, 8 ποδῶν ὕψος καὶ 1 $^2/_3$ ποδῶν πάχος ἀπαιτοῦνται 2108 πλίνθοι· πόσαι πλίνθοι ἀπαιτοῦνται εἰς ἕτερον τοῖχον ἔχοντα 16 ποδῶν μῆκος, 6 ποδῶν ὕψος καὶ 1 $^1/_3$ ποδῶν πάχος;

83) Δοκὸς ἔχουσα 13 ποδῶν μῆκος, 8 δακτύλων ($= ^8/_{12}$ ποδ.) πάχος καὶ 10 δακτύλων πλάτος, ἔχει βάρος 416 $^1/_2$ λιτρῶν, πόσον βάρος ἔχει ἑτέρα δοκὸς ἔχουσα 25 ποδῶν μῆκος 9 δακτύλ. πάχος καὶ 1 ποδ. πλάτος;

84) 9 πήχ. ῥούχου μὲ $^{11}/_4$ πλάτος στοιχίζουσι 30 τάλ., πόσον δὲ πλάτος ἔπρεπε νὰ ἔχῃ τὸ ῥοῦχον, ὥστε νὰ στοιχίζωσι 5 πήχ 18 τάλ.;

85) Μὲ 18 τάλ. ἀγοράζω 12 πήχ. ῥούχου ἔχοντος πλάτος $^7/_4$, πόσον πλάτος ἔπρεπε νὰ ἔχῃ, ὥστε οἱ 12 πήχεις νὰ στοιχίζωσιν 20 τάλ.;

86) 22 πήχ. ῥούχου μὲ πλάτος $^9/_4$ ἀξίζουσιν 28 τάλ., πόσοι πήχεις ῥούχου τῆς αὐτῆς ποιότητος μὲ $^7/_4$ πλάτος ἀξίζουσι 36 τάλ.;

87) 300 δραχ. εἰς $7^1/_2$ μῆνας φέρουσιν $8^1/_3$ δραχ. τόκον, πόσον κεφάλαιον εἰς 9 μῆνας φέρει $11^1/_4$ δραχ. τόκον;

88) Βιβλίον τι σύγκειται ἐκ 12 $^1/_2$ τυπογραφικῶν φύλ-

λων, ἑκάστη σελὶς ἔχει 34 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος κατὰ μέσον ὅρον 46 γράμματα. Θέλω δὲ ν' ἀνατυπώσω τὸ βιβλίον εἰς σχῆμα μεγαλείτερον, ὥστε ἡ σελὶς νὰ ἔχῃ 46 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 60 γράμματα. Ἐκ πόσων φύλλων θέλει σύγκεισθαι τὸ βιβλίον ;

89) 7 ἐργάται τελειώνουσιν εἰς 15 ὥρας τοῖχον ἔχοντα 18 ποδῶν μῆκος, 4 ποδῶν ὕψος καὶ $1\ ^1/_2$ ποδ. πάχος, εἰς πόσον καιρὸν θέλουσι τελειώσει οἱ αὐτοὶ ἐργάται τοῖχον ἔχοντα 24 ποδ. μῆκος, 6 ποδ. ὕψος καὶ 1 ποδ. πάχος ;

90) Ἐὰν 3 ἐργάται τελειώνωσι τοῖχον ἔχοντα 10 ποδ. μῆκος, 6 ποδ. ὕψος καὶ 1 ποδ. πάχος εἰς 36 ὥρας, 5 ἐργάται εἰς 27 ὥρας τόσον ὑψηλὸν θέλουσι κτίσει τοῖχον ἔχοντα 15 ποδ. μῆκος, $1\ ^1/_3$ ποδ. πάχος ;

Σημ. Ἡ πληθὺς τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων δύναται νὰ ἐπαυξηθῇ, ἐὰν εἰς ἕκαστον αὐτῶν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου ὑποθέτωμεν ὡς χ ἀνὰ ἕνα ἐκ τῶν ἄλλων ὅρων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ πρόβλημα, καὶ διὰ λογισμοῦ εὑρίσκωμεν αὐτόν.

Γ΄. Μέθοδος τοῦ τόκου καὶ τῆς ὑφαιρέσεως.

§ 95.

Τὸ δανειζόμενον χρηματικὸν ποσὸν ὀνομάζεται *δάνειον* ἢ *κεφάλαιον* ἢ *χρέος*, τὸ δὲ ποσόν, τὸ ὁποῖον ὁ *ὀφειλέτης* πληρώνει εἰς τὸν *δανειστὴν* διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ κεφαλαίου, λέγεται *τόκος*.

Προσδιορίζεται δὲ ὁ τόκος ἐκ τοῦ ἐτησίου ἢ μηνιαίου τόκου τῶν 100 δραχ., ὅστις λέγεται *ἐπιτόκιον*. Λέγων π. χ. ὅτι ἐτόκισα χρήματα πρὸς 8 τ. $^0/_0$ (πρόφερε 8 ἐπὶ τοῖς 100) *κατ' ἔτος*, νοῶ ὅτι λαμβάνω κατ' ἔτος 8 δρ. δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα τοῦ κεφαλαίου, ἤτοι $^8/_{100}$ δρ. δι' ἑκάστην δραχμὴν αὐτοῦ.

Τὰ δὲ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκ τῶν τεσσάρων ποσῶν, τοῦ κεφαλαίου, χρόνου, *ἐπιτοκίου* καὶ τόκου ζητεῖται ἓν οἱονδήποτε, δεδομένων τῶν τριῶν ἄλλων, ὀνομάζονται τῆς *μεθόδου τοῦ τόκου*. Λύονται δὲ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Πρὸς κατάληψιν τούτων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Πόσον τόκον φέρουσιν 7850 δραχ. εἰς ἓν ἔτος πρὸς 5 τ. $^0/_0$ τοκισθεῖσαι;

Ἀνάλυσις. 100 δρ. κεφάλ. φέρουσι 5 δρ. τόκον,
7850 » » » χ » »

$100 : 7850 = 5 : \chi \qquad \chi = 392\,^1/_2$ δρ.

2) Πόσον τόκον φέρουσιν 880 δρ. εἰς $4\,^1/_2$ ἔτη τοκισθεῖσαι πρὸς $3\,^1/_3$ τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος;

Ἀνάλυσις. 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρουσι $3\,^1/_3$ δρ. τόκ.
880 » » » $4^1/_2$ » » χ » »

$$\left.\begin{matrix} 100 : 880 \\ 1 : 4\,^1/_2 \end{matrix}\right\} = 3\,^1/_3 : \chi$$

$\chi = 132$ δραχ.

3) Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον εἶνε τοκισμέναι 800 δρ., ἐὰν κατ' ἔτος φέρωσι τόκον 28 δρ;

Ἀνάλυσις. 800 δρ. κεφ. φέρουσι τόκον 28 δρ.
100 » » » » χ »

$800 : 100 = 28 : \chi$

$\chi = 3\,^1/_2$ δρ.

4) Πόσον εἶνε τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τοκιζόμενον πρὸς 3 τ. $^0/_0$ φέρει τόκον 510 δρ. κατ' ἔτος;

Ἀνάλυσις. 3 δρ. τόκος χρειάζεται 100 δρ. κεφ.
510 » » » χ » »

$3 : 510 = 100 : \chi, \ \chi = 17000$ δρ.

5) Πόσον εἶνε τὸ κεφάλαιον, ὅπερ τοκιζόμενον πρὸς $6\,^2/_3$ τ. $^0/_0$ εἰς $7\,^1/_2$ ἔτη φέρει τόκον 495 δρ.;

Ἀνάλυσις. 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρουσι $6\,^2/_3$ δρ. τόκ.
χ » » » $7^1/_2$ » » 495 » »

$$\left.\begin{matrix} 7\,^1/_2 : 1 \\ 6^2/_3 : 495 \end{matrix}\right\} = 100 : \chi$$

$\chi = 990$ δρ.

6) 4000 δρ. κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 5 τ. $^0/_0$ εἰς πόσον χρόνον φέρει 850 δρ. τόκον;

Ἀνάλυσις. 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρουσι 5 δρ. τόκον
4000 » » » χ » » 850 » »

$$\left.\begin{matrix} 4000 : 100 \\ 5 : 850 \end{matrix}\right\} = 1 : \chi$$

$$\chi = 4\ ^1/_4 \text{ ἔτ.} = 4 \text{ ἔτ. } 3 \text{ μῆν.}$$

7) 563 δρ. εἰς 7 ἡμ. πρὸς 9 τ. $^0/_0$ πόσον τόκ. φέρουσιν;

Ἀνάλυσις 100 δρ. κεφ. εἰς 360 (*) ἡμ. φέρουσι τόκ. 9 δρ.
563 » » » 7 » » χ »

Λύσις. 9) $\dfrac{100\times360}{100\times40}$ | $\dfrac{563\times7\times9}{\dfrac{563\times7}{7}}$

4(000 | 3(941]0,985. Ἀπ. 98$^1/_2$ λεπ.

Σημ. Ἐκ τοῦ λογισμοῦ τοῦ τελευταίου προβλήματος συμπεραίνομεν, ὅτι, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον ἦνε 9, εὑρίσκεται ὁ τόκος ἡμερῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται τοκάριθμος, διαιρέσωμεν διὰ 4000.

Δι' ὁμοίους λόγους πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου νὰ διαιρῶμεν τὸν τοκάριθμον διὰ 12000 μέν, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον ἦνε 3, διὰ 9000 δέ, ὅταν ἦνε 4, διὰ 8000, ὅταν ἦνε 4 $^1/_2$, διὰ 6000, ὅταν ἦνε 6 καὶ διὰ 3000, ὅταν ἦνε 12, ὡς ἐξηγεῖται ἐκτενέστερον ἐν τῇ ἐμπορικῇ Ἀριθμητικῇ.

§ 96.

Ἐὰν ἔκ τινος πληρωτέου χρέους χαρίζηται ποσόν τι ἐπὶ τοῖς 100, ἡ πρᾶξις αὕτη ὀνομάζεται *ὑφαίρεσις*, τὸ δὲ χαριζόμενον ποσὸν *ἔκπτωσις*. Οὕτω π.χ. ἐὰν εἰς χρέος 300 δρ. γίνηται ὑφαίρεσις πρὸς 5 τ. $^0/_0$, ἡ ἔκπτωσις εἶνε 15 δρ. καὶ ἡ πραγματικὴ πληρωμὴ 285 δρ.—Ἐνίοτε δὲ τὴν λέξιν *ὑφαίρεσιν* μεταχειρίζονται καὶ ὑπὸ ἄλλην σημασίαν, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ δείξῃ τὸ ἐφεξῆς παράδειγμα· Ὁ Α ὀφείλει

(*) Παρ' ἐμπόροις καὶ τραπεζίταις ὁ μὴν λογίζεται συγκείμενος ἐκ 30 ἡμ. καὶ τὸ ἔτος ἐκ 360 ἡμ.

νὰ πληρώσῃ μετὰ ἓν ἔτος εἰς τὸν Β δρ. 6300, ἀλλὰ θέλων νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος τώρα, συμφωνεῖ νὰ κάμῃ ἔκπτωσιν πρὸς 5 τ. $^0/_0$ τοιαύτην, ὥστε ἡ τωρινὴ πληρωμὴ τοκιζομένη πρὸς 5 τ. $^0/_0$ μετὰ ἓν ἔτος νὰ γείνῃ μὲ τὸν τόκον της 6300 δρ. Οὕτω πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ Α;—Ἵνα εὕρω τοῦτο λέγω, ἐὰν 100 δρ. προεξοφλητέαι ἰσοδυναμῶσι μὲ 105 δρ. πληρωτέας μετὰ ἓν ἔτος, ἢ ἀντιστρόφως, ἐὰν 105 δρ. πληρωτέαι μετὰ ἓν ἔτος προεξοφλῶνται τώρα μὲ 100 δρ., 6300 δρ. πληρωτέαι μετὰ ἓν ἔτος μὲ πόσας τώρα προεξοφλοῦνται;

Λύσις· $105 : 100 = 6300 : \chi$

$\chi = 6000$ δραχ.

Λοιπὸν ὁ Α πληρώνων τώρα τὸ χρέος του κρατεῖ ἐξ αὐτοῦ 300 δρ., ἤγουν τοὺς τόκους τῶν προπληρωνομένων 6000 δρ.

Καὶ ἡ μὲν πρώτη ὑφαίρεσις, καθ' ἣν ὁ προπληρώνων κρατεῖ 5 ἐπὶ ταῖς 100 δρ. τοῦ χρέους, λέγεται *ἐξωτερική*· ἡ δὲ δευτέρα, καθ' ἣν ὁ προπληρώνων κρατεῖ 5 ἐξ 105 δρ. τοῦ χρέους, λέγεται *ἐσωτερική*.

Ἂν καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε κατ' ἀρχὴν ἡ μόνη ὀρθή, διότι κατ' αὐτὴν ὁ προπληρώνων κρατεῖ μόνον τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον προπληρώνει, ἐνῷ κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν κρατεῖ καὶ τὸν τόκον τοῦ τόκου, ὅμως εἰς τὰς ἐμπορικὰς συναλλαγὰς προτιμῶσι μᾶλλον τὴν ἐξωτερικήν, θεωροῦντες τὴν ἔκπτωσιν ὡς συνήθη τόκον ὅλου τοῦ χρέους.

Οὕτω λύονται καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Ὁ Α ὀφείλων νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Β μετὰ 3 μῆνας 550 δραχ. συμφωνεῖ νὰ προεξοφλήσῃ τώρα τὸ χρέος του μὲ ἔκπτωσιν ἐξωτερικὴν πρὸς $^1/_2$ τ. $^0/_0$ κατὰ μῆνα. Πόση εἶνε ἡ ἔκπτωσις, καὶ πόση ἡ προεξόφλησις;

Ἀνάλυσις. $^1/_2$ τ. $^0/_0$ κατὰ μῆνα φέρει $1\,^1/_2$ τ. $^0/_0$ εἰς 3 μῆνας, λοιπὸν ἔχομεν·

$$100 : 550 = {}^3/_2 : \chi$$

$\chi = 8^1/_4$ ἔκπτωσις, καὶ $550 - 8^1/_4 = 541^3/_4$ προεξόφλησις.

2) Πόσον ὀφείλω νὰ πληρώσω τώρα διὰ χρέος 5580 δρ.

πληρωτέον μετὰ 6 ἔτη, ἐὰν μοῦ χαρίζηται ἔκπτωσις ἐσωτερικὴ $4\,{}^1/_3$ τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος;

Ἀνάλυσις. $4\,{}^1/_3$ δραχ. ἔκπτωσις κατ' ἔτος φέρουσιν 26 δραχ. ἔκπτωσιν εἰς 6 ἔτη, καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ γείνῃ ὑφαίρεσις ἐσωτερική, λέγομεν·

126 δρ. πληρωτέαι μετὰ 6 ἔτη προεξοφλοῦνται μὲ 100δρ.
5580 » » » » » χ »

λοιπὸν $126 : 5580 = 100 : \chi$
$\chi = 4428\,{}^4/_7$ δρ.

3) Χρέος 891 δραχ. προεξωφλήθη διὰ 825 δραχ., ἐὰν ἔγεινεν ὑφαίρεσις ἐσωτερική, πρὸς πόσον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη;

Ἀνάλυσις. 825 δρ. προεξόφλησις ἰσοῦται μὲ 891 δρ. χρέος,
100 » » » χ » »

$825 : 100 = 891 : \chi$
$\chi = 108$ δρ., λοιπὸν ἡ ἔκπτωσις 8 τ. $^0/_0$.

4) Ἐὰν ὅμως ἔγεινεν ὑφαίρεσις ἐξωτερική, ἵνα εὕρω τὸ ἐπιτόκιον, ἐκτελῶ τὸν ὑπολογισμὸν ἁπλούστερα ὡς ἐφεξῆς· Ἐπειδὴ ἀντὶ 891 δραχ. ἐπληρώθησαν 825 δραχ., ἡ ἔκπτωσις εἶνε $891 - 825 = 66$ δραχ.

Λοιπὸν 891 δρ. χρέος ἔχουσιν ἔκπτωσιν 66 δρ.
100 » » » » χ »

$891 : 100 = 66 : \chi$
$\chi = 7\,{}^{11}/_{27}$ δρ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

91) 5780 δρ. πρὸς 5 τ. $^0/_0$ πόσον τόκον φέρουν κατ' ἔτος;

92) όσον τόκον φέρουν 9587 δρ. πρὸ: $4\,{}^1/_2$ τ. $^0/_0$;

93) Ποσος εἶνε ὁ τόκος 875 δρ. πρὸς $3\,{}^1/_2$ τ. $^0/_0$;

94) Πόσον τόκον φέρουσιν 6300 δραχ. εἰς 7 ἔτη πρὸς $3\,{}^1/_2$ τ. $^0/_0$;

95) Πόσος εἶνε ὁ τόκος 1864 δραχ. εἰς $3\,{}^3/_4$ ἔτη πρὸς 5 τ. $^0/_0$;

96) Πόσος εἶνε ὁ τόκος 118 δρ. 75 λεπ. πρὸς 4 τ. $^0/_0$ εἰς 2 ἔτη 9 μῆνας;

97) Πόσον τόκον φέρουσιν 28 δραχ. 50 λεπ. εἰς 10 μῆνας πρὸς 6 $^2/_3$ τ. $^0/_0$;

98) Ἐὰν 800 δραχ. εἰς 12 ἔτη φέρωσι τόκον 405 δρ., 1300 δρ. εἰς 4 $^4/_5$ ἔτη μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον πόσον τόκον φέρουσι;

99) Πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ ἐτοκίσθησαν 3525 δρ., ἐὰν φέρωσιν ἐτησίως τόκον 117 δραχ. 50 λεπ.;

100) 900 δραχ. εἰς 14 ἔτη φέρουσι τόκον 560 δραχ., πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ ἐτοκίσθησαν;

101) Πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ πρέπει νὰ τοκισθῶσι 3645 δρ., ἵνα δώσωσι τόκον 810 δραχ. εἰς 7 $^1/_2$ ἔτη;

102) Πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ ἐτοκίσθησαν 27 $^1/_2$ λίραι, ἐὰν εἰς 9 μῆνας φέρωσι τόκον 2 λίρ. 15 σελ. 2 πέν.;

103) Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσω πρὸς 4 $^1/_2$ τ. $^0/_0$, ὥστε νὰ φέρῃ κατ' ἔτος 63 δραχ. τόκον;

104) Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσω πρὸς 3 $^1/_2$ τ. $^0/_0$, ὥστε εἰς 6 ἔτη νὰ φέρῃ τόκον 343 δραχ.;

105) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 τ. $^0/_0$ εἰς 8 μῆνας φέρει τόκον 318 δραχ.;

106) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 $^1/_2$ τ. $^0/_0$ εἰς 3 ἔτη 6 μῆνας φέρει τόκον, ὅσον φέρουσιν 763 δραχ. εἰς 2 ἔτη 9 μῆνας πρὸς 3 $^1/_2$ τ. $^0/_0$;

107 α) Εὑρὲ κατὰ τὴν σημ. τῆς § 95 τοὺς τόκους τῶν 12600 δρ. α) εἰς 1 ἡμ. β) εἰς 7, γ) εἰς 13, δ) εἰς 41 πρὸς α) 4, β) 4 $^1/_2$, γ) 6, δ) 9 καὶ ε) 12 τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος.

107 β') Πόσον τόκον φέρουσι πρὸς ἐπιτόκιον ἐτήσιον α') 4 $^1/_2$ καὶ β') 6, α') 2784 δρ. ἀπὸ 1 Ἰανουαρίου μέχρι 16 Μαΐου, β') 3764 δρ. 58 λεπ. ἀπὸ 9 Μαρτίου μέχρις 23 Ἰουλίου, γ') 6783 δρ. ἀπὸ 15 Ἀπριλίου μέχρι 5 Νοεμβρ.;

107 γ') Πόσον τόκον φέρουσιν εἰς 3 ἔτη 7 $^1/_2$ μῆνας ὁμοῦ α) 364 δραχ. πρὸς 4 $^1/_2$ τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος, β') 762 δραχ.

πρὸς $3\,{}^3/_4$ τ. $^0/_0$, γ) 513 δρ. πρὸς $4\,{}^2/_3$ τ. $^0/_0$ δ) 352 δρ. πρὸς $4\,{}^5/_8$ τ. $^0/_0$; (*)

107 δ') Ἐδάνεισέ τις πρὸς $4\,{}^1/_2$ τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος ά) 800 δρ. διὰ 2 ἔτη, 6') 742 δρ. δι' $^1/_2$ ἔτος, γ') 654 δρ. δι' $1\,{}^1/_3$ ἔτ., δ') 856 δρ. διὰ 3 μῆνας, έ) 728 δρ. διὰ $7\,{}^1/_2$ μῆνας. Πόσον τόκον φέρουσιν ὅλα ὁμοῦ; (**)

108) Συνάλλαγμα 7828 δρ. πωλεῖται μὲ ἔκπτωσιν ἐξωτερικὴν πρὸς 6 τ. $^0/_0$, μὲ πόσας δρ. προεξοφλεῖται;

109) Ὁ Α ὀφείλει εἰς τὸν Β 7800 δρ. πληρωτέας μετὰ 3 μῆνας, πόσον θέλει πληρώσει τώρα, ἐὰν χαρισθῇ εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις ἐξωτερικὴ $^2/_3$ τ. $^0/_0$ κατὰ μῆνα;

110) Συνάλλαγμα ἐξ $914\,{}^1/_2$ δραχ. πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας πωλεῖται μὲ ἔκπτωσιν ἐξωτερικὴν πρὸς $^1/_2$ τ. $^0/_0$ κατὰ μῆνα, πόση εἶνε ἡ προεξόφλησις;

111) Ὁ Α ὀφείλει εἰς τὸν Β 5400 δρ. πληρωτέας μετὰ $7\,{}^1/_2$ ἔτη, θέλει δὲ νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος τώρα μὲ ἔκπτωσιν ἐξωτερικὴν $3\,{}^1/_3$ τ. $^0/_0$ κατ' ἔτος, πόση εἶνε ἡ προεξόφλησις;

112) Συνάλλαγμα 500 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ ἓν ἔτος ἐξαργυροῦται τώρα μὲ ἔκπτωσιν ἐξωτερικὴν 12 τ. $^0/_0$, πόση εἶνε ἡ προεξόφλησις;

113) Ἐκ χρέους 600 δραχ. χαρίζεται ἔκπτωσις ἐσωτερικὴ 4 τ. $^0/_0$, ἀντὶ πόσων δραχμῶν πληρώνεται;

114) Συνάλλαγμα 495 ταλήρων πληρωτέων μετὰ $3\,{}^3/_4$ ἔτη, ἐξαργυροῦται τώρα μὲ ἔκπτωσιν ἐσωτερικὴν $3\,{}^1/_3$ τ. $^0/_0$, πόση εἶνε ἡ προεξόφλησις;

115) Ἐκ χρέους 306 ταλήρων πληρωτέων μετὰ $2\,{}^1/_2$

(*) Εὑρὲ πρῶτον χωριστὰ ἑκάστου κεφαλαίου τοὺς ἐτησίους τόκους, καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐτησίων εὑρὲ τοὺς τόκους 3 ἐτῶν καὶ $7\,{}^1/_2$ μηνῶν πολλαπλασιάζων ἐπὶ 3 ἔτ. $7\,{}^1/_2$ μ.

(**) Οἱ τόκοι τῶν 800 δρ. διὰ 2 ἔτη εἶνε ἴσοι μὲ τοὺς τόκους τῶν 1600 δρ. δι' 1 ἔτος, οἱ τῶν 742 δι' ἥμισυ ἔτ. ἴσοι μὲ τοὺς τῶν 371 δι' 1 ἔτ. κ. τ. λ.

έτη χαρίζεται έκπτωσις εσωτερική 5 τ. $^0/_0$ κατ' έτος, πόση είνε ή προεξόφλησις ;

116) Είς χρέος 513 δρ. έγεινεν έκπτωσις εξωτερική 81 δρ., πόσον τ. $^0/_0$ έγεινεν έκπτωσις ;

117) Ὁ Α όφείλων είς τὸν Β 328 τάλ. πληρωτέα μετὰ 2 $^2/_3$ έτη πληρώνει τώρα 304 τάλ. μὲ έκπτωσιν εξωτερικήν, πόσον τ. $^0/_0$ κατ' έτος έγεινεν ή έκπτωσις ;

118) Ἀντὶ 818 δραχ. πληρωτέων μετὰ 5 έτη έπληρώθησαν τώρα 700 δραχ., πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ κατ' έτος έγεινεν έκπτωσις εσωτερική ;

119) Ἀντὶ 8820 δραχ. έπληρώθησαν 8400 δραχ. μὲ έκπτωσιν, πρὸς πόσον τ. $^0/_0$ έγεινεν έκπτωσις εξωτερική ;

120) Ἐκ χρέους 2615 δραχμῶν έχαρίσθησαν 415 δρ., πόσον τ. $^0/_0$ έγεινεν έκπτωσις εσωτερική ;

121) Συνάλλαγμα 912 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ 3 $^1/_2$ έτη έπληρώθη τώρα μὲ έκπτωσιν 112 δρ., πόσον τ. $^0/_0$ έγεινεν έκπτωσις εσωτερική ;

*Δ΄. Συνεζευγμένη μέθοδος.

§ 97.

Ὑπάρχουσι πολλὰ προβλήματα, τὰ όποῖα λύομεν σχηματίζοντες δύο ἢ πλειοτέρας μεθόδους τῶν τριῶν κατὰ συνέχειαν. Τοιαῦτα δὲ είνε τὰ ἑξῆς· —

1) Μὲ πόσα φράγκα ίσοῦνται 88 λίραι, έὰν ἦνε 13 λίραι=60 δίστ. καὶ 5 δίστ.=27 φράγκα ; Ἐνταῦθα τρέπω τὰς 88 λίρας πρῶτον είς δίστ., έπειτα τὰ εὑρεθέντα δίστ. είς φράγκα.

Ἤγουν ζητῶ κατὰ πρῶτον,

Ἐὰν 13 λίρ. έχωσιν 60 δίστ., 88 λίρ. πόσα έχουσι ;

Λοιπὸν είνε 13 λίρ. : 88 λίρ.=60 δίστ. : χ δίστ.

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{88 \text{ λίρ.} \times 60 \text{ δίστ.}}{13 \text{ λίρ.}} = 406 \, ^2/_{13} \text{ δίστ.}$$

Ἔπειτα ζητῶ,

Ἐὰν 5 δίστ. ἰσῶνται μὲ 27 φράγκα, $406\ ^2/_{13}$ δίστ. μὲ πόσα φράγκα ἰσοῦνται;

Λοιπὸν εἶνε 5 δίστ. : $406\ ^2/_{13}$ δίστ. = 27 φρ. : χ΄ φρ.

$$\text{Ὅθεν } \chi' = \frac{406\ ^2/_{13}\ \text{δίστ.} \times 27 \text{φρ.}}{5\ \text{δίστ.}} = 2193\ ^3/_{13}\ \text{φρ.}$$

Ἀλλὰ τὰς δύο ταύτας λύσεις δύναμαι καὶ νὰ συζεύξω εἰς μίαν μόνην, ὅπερ φέρει συνήθως εὐκολίαν εἰς τὸν ὑπολογισμόν. Πρὶν ὅμως ἐξηγήσω τὴν σύζευξιν ταύτην, ὑπενθυμίζω τὸ ἑξῆς· *Ἐὰν ἦνε δεδομένον ὅτι 13 λίραι ἰσοῦνται μὲ 60 δίστ. καὶ θέλω νὰ τρέψω λίρας εἰς δίστ.*, πρέπει, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγηθεῖσαν λύσιν, *νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν τῶν λιρῶν ἐπὶ 60 καὶ νὰ διαιρέσω διὰ 13*· προσέτι ἐὰν ἦνε δεδομένον, ὅτι 5 δίστ. ἰσοῦνται μὲ 27 φράγκα, καὶ θέλω νὰ τρέψω δίστ. εἰς φράγκα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν τῶν διστήλων ἐπὶ 27 καὶ νὰ διαιρέσω διὰ 5.— Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ζητεῖται νὰ τρέψω 88 λίρ. εἰς φράγκα, τὰς τρέπω πρῶτον εἰς δίς. πολλαπλασιάζων αὐτὰς ἐπὶ 60 καὶ διαιρῶν διὰ 13, διότι 13 λίρ. ἔχουσιν 60 δίστ. Οὕτως, ἐὰν διατηρήσω καὶ τὰς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, ἔχω τὴν ἑξῆς λύσιν,

$$\frac{88\ \text{λίρ.} \times 60\ \text{δίστ.}}{13\ \text{λίρ.}}$$

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐκφράζει ἡ λύσις αὕτη, εἶνε δίστηλα· ταῦτα πρέπει ἤδη νὰ τρέψω εἰς φράγκα· ἐκτελῶ δὲ τοῦτο, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν τῶν διστ. ἐπὶ 27 καὶ διαιρέσω διὰ 5, διότι 5 δίστ. ἔχουσιν 27 φραγ. Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω λύσις εἶνε πηλίκον· τὸ δὲ *πηλίκον κατὰ* § 39 *πολλαπλασιάζεται μέν, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν διαιρετέον*, διαιρεῖται *δέ, ἐὰν πολλαπλασιάσω τὸν διαιρέτην*. Οὕτως, ἐὰν διατηρήσω πάλιν τὰς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκω

$$\frac{88\ \text{λίρ} \times 60\ \text{δίστ.} \times 27\ \text{φράγ.}}{13\ \text{λίρ} \times 5\ \text{δίστ.}}$$

Οὕτως ἔχω εἰς ἓν ὅλην τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος.
Εἰς τὸ ἑξῆς ὅμως θέλω γράφει τὰς τοιαύτας λύσεις οὕτω,

	διαιρέτης	διαιρετέος
Α)		88 λίρ.
	13 λίρ.	60 δίστ.
	5 λίρ.	27 φράγ.

Διὰ τῆς γραφῆς ταύτης οὐσιωδῶς μὲν καμμία μεταβολὴ δὲν γίνεται, ἐκτίθεται ὅμως τὸ πρόβλημα συντομώτερα καὶ εὐσυνοπτότερα—Ἄλλως τε αἱ λύσεις αὗται ἀναγινώσκονται ὁμοίως, ὡς καὶ αἱ πρότεραι, ἤγουν, 88κις 60κις 27 φράγκα διαιρούμενα διὰ 13ις 5. Ὁ δὲ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ αὐτὸς καὶ ὁ τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς·

	88 λίρ.
13 λίρ.	60 δίστ, 12
5 δίστ.	27 φράγ.
13	28512 φράγ. | 2193 $^3/_{13}$ φράγ.
	25
	121
	42
	3

(Ἐνταῦθα ἁπλοποίησα διὰ 5, ἔπειτα ἐπολλαπλασίασα τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ διαιρετέου 88, 12 καὶ 27, καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 28512 διῄρεσα διὰ τοῦ διαιρέτου 13).

Οὕτω λοιπὸν εὑρίσκω τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ἀμέσως δι' ἑνὸς ὑπολογισμοῦ, ὅστις ἐκτελεῖται μετὰ μεγαλειτέρας εὐκολίας διὰ τὰς γινομένας ἀπαλοιφὰς τῶν κοινῶν παραγόντων.

2) Πόσας δραχμὰς στοιχίζουσι 35 στατ., ἐὰν 28 στατ. στοιχίζωσιν 615 φιορίνια, καὶ 25 φιορ. ἔχωσιν 68 δραχ.;

Ἐνταῦθα εὑρίσκω πρῶτον πόσα φιορίνια στοιχίζουσιν οἱ 35 στατ., πρὸς τοῦτο δὲ μοῦ εἶνε δεδομένον, ὅτι 28 στατ., στοιχίζουσιν 615 φιορίνια· ὅθεν εὑρίσκω—ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω— πόσον στοιχίζουσι 35 στατ., ἐὰν πολλαπλασιάσω 615 ἐπὶ 35 καὶ διαιρέσω διὰ 28, λοιπὸν,

	35 στατ.
28 στατ.	615 φιορίν.

('Ανάγνωσον, 35^{κις} 615 φιορ. διαιρούμενα διὰ 28).

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκφράζει φιορίνια· ταῦτα πρέπει ἤδη νὰ τρέψω εἰς δραχ. καὶ ἐπειδὴ 25 φιορ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 68 δρ., εὑρίσκω τοῦτο, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τῶν φιορινίων πολλαπλασιάσω ἐπὶ 68 καὶ διαιρέσω διὰ 25 (πολλαπλασιάζων τὸν διαιρέτην ἐπὶ 25). Οὕτω λοιπὸν ἔχω,

Β)		35 στατ.
	28 στατ.	615 φιορ.
	25 φιορ.	68 δραχ.

('Ανάγνωσον, 35^{κις} 615^{κις} 68 δραχμαὶ διαιρούμεναι διὰ 28^{κις} 25). Ὁ δὲ ὑπολογισμὸς καὶ οὗτος γίνεται ὡς ἑξῆς·

	~~35~~ στατ.	5
2 ~~4~~ ~~28~~ στατ.	~~615~~ φιορ.	123
~~5~~ ~~25~~ φιορ.	~~68~~ δραχ.	34
2	4182 | 2091 δραχ.	

('Ενταῦθα πρῶτον ἁπλοποίησα διὰ 7, ἔπειτα διὰ 5, 5 καὶ 2, ἔπειτα ἐπολλαπλασίασα 123 ἐπὶ 34 καὶ τὸ γινόμενον 4182 διῄρεσα διὰ 2).

§ 98.

Εἰς τὰς δύο λύσεις Α) καὶ Β) τῆς ἀνωτέρω § ὑπάρχει ἄνω εἰς τὸ ἀριστερὸν τῆς γραμμῆς μία θέσις κενή. Ἐν αὐτῇ δὲ γράφουσι τὴν ὀνομασίαν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ μετὰ ἐρωτηματικοῦ σημείου, καὶ οὕτως ἡ παράστασις γίνεται μᾶλλον ὁμοιόμορφος. Αἱ λύσεις ἐκεῖναι λοιπὸν γράφονται ὡς ἑξῆς,

Α)	; φράγ.	88 λίρ.
	13 λίρ.	60 δίστ.
	5 δίστ.	27 φράγ.
Β)	; δραχ.	35 στατ.
	28 στατ.	615 φιορ.
	25 φιορ.	68 δραχ.

Ἐὰν τὰς δύο ταύτας λύσεις θεωρήσωμεν ἀκριβέστερον, εὑρίσκομεν μεταξὺ τῶν ὅρων τῶν μερικῶν σειρῶν τὴν ἑξῆς ἀξιοσημείωτον συνάφειαν·

1) *Ἡ πρώτη σειρὰ ἀρχίζει ἐκ τῆς αὐτῆς ὀνομασίας, εἰς τὴν ὁποίαν λήγει ἡ ἐσχάτη·*

2) *Πᾶσα σειρὰ λήγει εἰς τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ἐκ τῆς ὁποίας ἀρχίζει ἡ ἀκόλουθος·*

3) *Οἱ δύο ὅροι ἑκάστης σειρᾶς οἱ κείμενοι ἑκατέρωθεν τῆς γραμμῆς ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέγεθος ἢ τὴν αὐτὴν ἀξίαν.*

Ὅθεν εἰς τὰς ἀνωτέρω λύσεις οἱ μερικοὶ ὅροι σχηματίζουσιν *ἅλυσιν*, καὶ διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη ὀνομάζεται *συνεζευγμένη μέθοδος εἴτε ἅλυσις.*

§ 99.

Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων καθίσταται ἤδη πολὺ εὔκολον νὰ καταστρώσω τὴν λύσιν προβλήματός τινος κατὰ τὴν ἅλυσιν, π. χ.

Πόσας δραχ. στοιχίζουσιν 84 πήχ., ἐὰν $33\ ^1/_3$ πήχ. ἦνε $=$ 25 ὑάρδας ἀγγλικάς, καὶ 7 ὑάρδαι στοιχίζωσι $32\ ^1/_2$ σελ. καὶ 10 σελ. ἦνε $=$ 14,06 δραχ.;

Λύσις	
; δραχ.	84 πήχ.
$33\ ^1/_3$ πήχ.	25 ὑάρδ. ἀγγλ.
7 ὑάρδ.	$32\ ^1/_2$ σελ.
10 σελ.	14,06 δρ.

Τὴν λύσιν ταύτην κατέστρωσα ἤδη ἀμέσως ἄνευ τινὸς κόπου. — Ἐάν τις ὅμως μ᾽ ἐρωτήσῃ, πῶς εὗρον αὐτήν, δύναμαι εὐκολώτατα νὰ δικαιολογήσω ἓν ἕκαστον βῆμα. Ἔτρεψα δηλ. πρῶτον τοὺς 84 πήχ. εἰς ὑάρδας, πολλαπλασιάσας ἐπὶ 25 καὶ διαιρέσας διὰ $33\ ^1/_3$, διότι $33\ ^1/_3$ πήχ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 25 ὑάρδας, καὶ οὕτως εὗρον

	84 πήχ.
$33\ ^1/_3$ πήχ.	25 ὑάρδ.

(ἀνάγωσον, 84 κις 25 ὑάρδαι διαιρούμεναι διὰ $33\ ^1/_3$)

Ἤδη ἔχω ὑάρδας, καὶ εὑρίσκω τὴν τιμὴν αὐτῶν εἰς σελλίνια (*), λέγων 7 ὑάρδαι τιμῶνται 32 $^1/_2$ σελ., ὅθεν πρέπει τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑαρδῶν νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 32 $^1/_2$ καὶ νὰ διαιρέσω διὰ 7· οὕτως ἔχω·

	84 πήχ.
33 $^1/_3$ πήχ.	25 ὑάρδ.
7 ὑάρδ.	32 $^1/_2$ σελ.

(84$^{\text{κις}}$ 25$^{\text{κις}}$ 32 $^1/_2$ σελ. διαιρούμενα διὰ 33 $^1/_3$ φορὰς 7).

Ἤδη πρέπει νὰ τρέψω τὰ σελ. εἰς δραχ. Ἐπειδὴ 10 σελ. ἰσοῦνται μὲ 14,07 δραχ., πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ 14,06 καὶ νὰ διαιρέσω διὰ 10, οὕτως ἔχω·

	84 πήχ.
33 $^1/_3$ πήχ.	25 ὑάρδ.
7 ὑάρδ.	32 $^1/_2$ σελ.
10 σελ.	14,06 δραχ.

(Ἀνάγνωστον, 84$^{\text{κις}}$ 25$^{\text{κις}}$ 32 $^1/_2$ φορὰς 14,06 δραχ. διαιρούμεναι διὰ 33 $^1/_3$ φορὰς 7$^{\text{κις}}$ 10)

Ἡ λύσις αὕτη εἶνε ἡ αὐτὴ ἐκείνη, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω εἶχον καταστρώσει ἀμέσως κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς λύσεως. Ὁ δὲ ὑπολογισμὸς καὶ ἐνταῦθα ἐκτελεῖται ἀπαραλλάκτως ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα·

	; δραχ.	84 πήχ.	21	3
4	100 $33\frac{1}{3}$ πήχ.	25 ὑάρδ.	3	
	2×7 ὑάρδ.	$32\frac{1}{2}$	65	13
20	100×10 σελ.	14,06 δραχ.	1406	703
	2(00	822(51 | 411 $^{51}/_{200}$ δραχ.		

(Ἐνταῦθα πρῶτον τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς ἔτρεψα εἰς κατα-

(*) Ἐδυνάμην νὰ ἐκφρασθῶ καὶ οὕτω· τρέπω ἤτοι μεταβάλλω τὰς ὑάρδας εἰς σελλίνια· διότι εἰς τὸ ἐμπόριον συναλλάσσεται τὸ ἓν ἀντὶ τοῦ ἄλλου, καὶ ἐν γένει ἐκλαμβάνουσι συνήθως τὰ χρήματα ὡς ἐμπορεύματα καὶ τὰ ἐμπορεύματα ὡς χρήματα. Οὕτω δὲ ἡ παράστασις ἤθελεν εἶσθαι μᾶλλον ὁμοιόμορφος.

χρηστικὰ κλάσματα καὶ συνάμα ἀπήλειψα τοὺς παρονομαστὰς (κατὰ § 88), ἔπειτα ἁπλοποίησα διαιρέσας διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου 25, ἔπειτα διὰ 4, διὰ 7, 2 καὶ 5· ἔπειτα τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ διαιρετέου 3,3,13 καὶ 703 ἐπολλαπλασίασα τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον, καθὼς καὶ τοὺς τοῦ διαιρέτου 20 καὶ 10, καὶ τέλος διῄρεσα τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου).

§ 100.

Πρὸς διασάφησιν δύνανται νὰ χρησιμεύσωσι καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

1) 1000 λίτραι Βενετίας πρέπει νὰ τραπῶσιν εἰς στατῆρας ἀγγλικούς· 1 ἀγγλικὸς στατὴρ εἶνε = 112 λίτρ. ἀγγλ. καὶ 20 λίτραι ἀγγλικαὶ = 19 λίτραι Βενετίας.

Διάταξις κατὰ τὴν ἄλυσιν· Μὲ πόσους ἀγγλικοὺς στατῆρας ἰσοῦνται 1000 λίτραι βενετικαί, ἐὰν ἦνε 19 λίτρ. βενετ. = 20 λίτρ. ἀγγλ., καὶ 112 λίτρ. ἀγγλ. = 1 στατ. ἀγγλ ;

Λύσις. ; στατ. ἀγγλ.	1000 λίτρ. βενετ.
19 λίτρ. βενετ.	20 λίτρ. ἀγγλ.
112 λίτρ. ἀγγλ.	1 στατ. ἀγγλ. Ἀπ. $9\,{}^{53}/_{133}$

2) Ἔμπορός τις ἀγοράζει $8\frac{1}{2}$ στατ. σταφίδος ἐν Τεργέστῃ δραχ. 240, πόσα φιορίν. χάρτινα στοιχίζει ὁ στατ., ἐὰν 68 δραχ. ἦνε = 25 φιορ. ἀργυρᾶ, καὶ τὸ ἀργυροῦν φιορίνιον ἔχῃ ὑπερτίμησιν $23\,{}^{1}/_{3}$ τ. $^{0}/_{0}$;

Διάταξις κατὰ τὴν ἄλυσιν· Πόσα χάρτινα φιορ. στοιχίζει ὁ στατήρ, ἐὰν $8\,{}^{1}/_{2}$ στατ. στοιχίζωσι 240 δραχ., 68 δραχ. ἦνε = 25 φιορίν. ἀργυρᾶ καὶ 100 φιορίν. ἀργυρᾶ = $123\,{}^{1}/_{3}$ φιορ. χάρτινα ;

Λύσις ; φιορ. χάρτ.	1 στατ.
$8\,{}^{1}/_{2}$ στατ.	240 δραχ.
68 δραχ.	25 φιορ. ἀργ.
100 φιορ. ἀργ.	$123\,{}^{1}/_{3}$ φ. χαρ. Ἀπ. 19,2 φ.

3) Ἔμπορός τις ἀγοράζει ὑφάσματα ἐν Γαλλίᾳ πρὸς $25\,{}^{1}/_{2}$ φράγκα τὸ γαλ. μέτρον, καὶ δαπανᾷ διὰ μεταφοράν,

τελώνιον κτλ. 16 τ. $^0/_0$, πόσας δραχ. πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίζῃ 8 τ. $^0/_0$, καὶ ἐὰν ἦνε 50 μέτρα =77 πήχ., καὶ 500 φράγ.=560 δραχ. ;

Διάταξις κατὰ τὴν ἄλυσιν· Πόσας δρ. τιμᾶται ὁ πῆχυς, ἐὰν 77 πήχ. ἦνε=50 μέτρα καὶ 1 μέτρον=25 $^1/_2$ φράγ. καὶ 100 φράγ. ἀγορᾶς ἦνε 116 φράγ. μετὰ τῶν ἐξόδων, καὶ 100 φράγ. μετὰ τῶν ἐξόδων γίνωνται 108 φράγ. μετὰ τοῦ κέρδους, καὶ 500 φράγ.=560 δραχ.;

; δραχ.	1 πῆχυς
77 πήχ.	50 μέττρα
1 μέτρ.	25 $^1/_2$ φράγ. ἀγορ.
100 φράγ. ἀγορ.	116 φράγ. μετὰ τῶν ἐξόδων
100 φράγ. μετὰ τ. ἐξόδων	108 μετὰ τοῦ κέρδους
500 φράγ. μετὰ τ. κέρδ.	560 δραχ. Ἀπ. 25,38.

4) Ἔμπορός τις ἀγοράζει 16 βαρέλια ζακχάρεως ἔχοντα βάρος μικτὸν 3360 λίτρ. διὰ τὰ βαρέλια ὑπολογίζονται 9 $^1/_2$ τ. $^0/_0$ τάρα· πληρώνει δὲ πρὸς 20 φιορίνια χάρτινα τὸν καθαρὸν στατῆρα (=100 λίτρ)· πόσας δραχ. μέλλει νὰ πληρώσῃ, ἐὰν 100 ἀργυρᾶ φιορ. ἔχωσι 275 δραχ. καὶ ὁ ἄργυρος ἔχῃ ὑπερτίμησιν 32 $^1/_2$ τ. $^0/_0$;

Διάταξις κατὰ τὴν ἄλυσιν· Πόσας δραχμὰς στοιχίζουσι 3360 λίτρ. μικταί, ἐὰν 100 λίτρ. μικταὶ ἦνε=90 $^1/_2$ καθαράς, 100 λίτρ. καθαραὶ=20 φιορ. χάρτ. καὶ 132 $^1/_2$ φιορίν. χάρτ.=100 φιορ. ἀργυρᾶ. καὶ 100 φιορ. ἀργ.=275 δρ. ;

Ἀπ. δρ. 1262,22.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

122) Μὲ πόσα φράγκα ἰσοδυναμοῦσι 336 σελλίνια, ἐὰν ἦνε 30 σελ.=7 δίστ., καὶ 93 δίστ.=500 φράγκα ;

123) Μὲ πόσα δὲ σελλίνια ἰσοδυναμοῦσι κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας 105 φράγκα ;

124) Μὲ πόσας δραχ. ἰσοδυναμοῦσι 484 σελ., ἐὰν ἦνε 11 σελ.=5 $^2/_3$ φιορίνια καὶ 25 φιορίνια=68 δραχ. ;

125) Μὲ πόσα δὲ σελ. ἰσοδυναμοῦσιν 786 δραχ. κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

126) Μὲ πόσα φιορίνια ἰσοδυναμοῦσι 864 λίραι, ἐὰν ἦνε 13 λίρ=60 δίστ., 10 δίστ.=54 φράγκα καὶ 245 φράγκα=100 φιορίνια;

127) Μὲ πόσας δὲ λίρας ἰσοδυναμοῦσι 1000 φιορ. κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

128) Μὲ πόσας δραχ. ἰσοδυναμεῖ ἓν πρωσσικὸν τάληρον, ἐὰν 1 πρωσ. τάλ. ἔχῃ 30 γροσίκια, 40 γροσίκια=5 φράγκα, 500 φράγκα.=560 δραχ.;

129) Ῥοῦχον ἀγορασθὲν ἐν Γαλλίᾳ πρὸς $16\,^3/_4$ φράγκα τὴν ἄουναν πρὸς πόσας δραχ. ἔρχεται τὸν πῆχυν (ἀρσίν), ἐὰν 89 ἄουναι ἰσοδυναμῶσι μὲ 106 βασ. πήχ. καὶ 84 βασ. πήχεις ἰσοδυναμῶσι μὲ 123 πήχ. (ἀρσίν);

130) 264 πήχ. Κων/πόλεως μὲ πόσους ἐπισήμους τεκτ. πήχ. ἰσοδυναμοῦσιν, ἐὰν 11 πήχ. Κωνστ.=4 ὀργ. πελοπον. καὶ 10 ὀργ.=18 βασ. πήχ. καὶ 73 βασ. πήχ.=100 πήχ. τεκτον.;

131) Σταφὶς ἀγορασθεῖσα πρὸς 85 δίστ. τὰς 1000 βενετικὰς λίτρας πρὸς πόσα σελ. ἔρχεται τὸν ἀγγλικὸν στατῆρα, ἐὰν ἦνε 1 ἀγγλ. στατ.=112 λίτρ. ἀγγλ., 20 λίτρ. ἀγγλ.=19 λίτρ. βεν., καὶ ἐπληρώθη τελώνιον κ. τ. έ. 16 τ. $^0/_0$, καὶ ἦνε 7 δίστ.=30 σελ.;

132) Ἐὰν δὲ πωλῆται πρὸς 45 σελ. τὸν ἀγγλ. στατ., πρὸς πόσα δίστ. ἔρχεται τὰς 1000 βεν. λίτρ. κατὰ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

133) Οἰκόπεδον ἀγορασθὲν πρὸς 1860 δρ. τὸ βασ. στρέμμα πρὸς πόσας δραχ. ἔρχεται τὸν τετραγ. τεκτονικὸν πῆχυν, ἐὰν ἦνε 1 στρέμ. βασ=1000 τετρ. βασ. πήχ. καὶ 100 τετρ. βασ. πήχ.=169 τετρ. τεκτ. πήχεις;

134) Σταφὶς ἀγορασθεῖσα πρὸς 56 δίστ. τὰς 1000 βενετ. λίτρας πρὸς πόσα φιορίνια χάρτινα ἔρχεται τὸν στατ., ἐὰν ἦνε 1000 λίτρ. βεν.=375 ὀκ. καὶ 44 ὀκ.=1 στατ. καὶ 1 δίστ.=6 δραχμὰς καὶ 275 δραχμαὶ=100 φιορ. ἀργυρᾶ

καὶ 100 φιορίνια ἀργυρᾶ $=132\,{}^1/_2$ φιορίνια χάρτινα;

135) Ἐὰν δὲ πωλῆται $8\,{}^1/_2$ φιορ. χάρτ. τὸν στατ., πρὸς πόσα δίστ. συμφέρει ν' ἀγορασθῶσιν αἱ 1000 βεν. λίτραι ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

136) Ζάκχαρις ἀγορασθεῖσα ἐν Τεργέστῃ πρὸς 21 φιορ. χάρτ. τὸν στατῆρα πρὸς πόσας δραχ. ἔρχεται τὴν ὀκᾶν, ἐὰν ἦνε 1 στατ. $=100$ λίτρας καὶ 25 λίτρ. $=11$ ὀκ. καὶ τὸ ἀργυροῦν φιορίνιον ἔχῃ ὑπερτίμησιν 28 τ. $^0/_0$, καὶ 100 ἀργυρᾶ $=275$ δρ.;

137) Μέταξα ἀγορασθεῖσα ἐν Ἑλλάδι πρὸς 28 δραχ. τὴν ὀκᾶν πρὸς πόσα φράγκα ἔρχεται τὸ χιλιόγραμμον εἰς Μασσαλίαν, ἐὰν τὸ χιλιόγραμμον ἔχῃ $312\,{}^1/_2$ δράμ. καὶ ἐδαπανήθησαν 15 τ. $^0/_0$ εἰς τελώνιον κ. τ. λ.;

138) Μὲ πόσας λίρας ἰσοδυναμοῦσι 560 ῥούβλια, ἐὰν ἦνε 20 ῥούβλ. $=14\,{}^5/_6$ δίστ., $12\,{}^1/_2$ δίστ. $=13$ τάλ. γερμανικὰ καὶ 24 τάλ. γερμ. $=5$ λίρας;

139) Σταφὶς ἀγορασθεῖσα πρὸς $68\,{}^3/_4$ τὰς 1000 ἀγγλ. λίτρας πρὸς πόσα φιορίνια χάρτινα στοιχίζει τὸν αὐστρ. στατῆρα, ἐὰν ὁ στατὴρ ἔχῃ 44 ὀκ. καὶ 57 ὀκ. ἔχωσιν 160 ἀγγλ. λίτρας καὶ 1 δίστ. ἔχῃ 6 δρ. καὶ 275 δρ. $=100$ φιορ. ἀργυρᾶ, ἐδαπανήθησαν δὲ 12 τ. $^0/_0$, καὶ 100 φιορ. ἀργυρᾶ $=$ 130 φιορ. χάρτ.;

140) Ὀφείλει τις εἰς Λονδῖνον 324 λίρ., πόσας δραχ. πρέπει νὰ πληρώσῃ, ἐὰν μὲ 116 δραχ. ἀγοράζῃ 100 φράγ. καὶ μὲ 1 φράγ. $9\,{}^3/_4$ πέν. καὶ 240 πέν. $=1$ λίρ.;

141) Ὀφείλει τις εἰς Τεργέστην 550 φιορ. χάρτινα, πόσας δραχ. θέλει πληρώσει, ἐὰν 580 δραχ. ἦνε $=100$ τάλ. γερμ. καὶ 25 τάλ. γερμ. $=53$ φιορ. ἀργυρᾶ καὶ 100 φιορ. ἀργυρᾶ $=130$ φιορ. χάρτινα;

142) Πραγματεία 250 πρωσ. λιτρῶν ἀγορασθεῖσα πρὸς 12 φράγκα τὸ χιλιόγραμμον πόσα πρωσσικὰ τάλ. στοιχίζει, ἐὰν ἦνε 100 φράγκα $=27$ πρωσ. τάληρα, καὶ τὸ χιλιόγραμμον ἦνε πρὸς τὴν πρωσ. λίτραν ὡς $15:7$;

143) Πόσα βασ. στάδια ἔχουσι 32 ἀγγλ. μίλια, ἐὰν τὸ

ἀγγλ. μίλιον ἔχῃ 1760 ὑάρδας, ἡ ὑάρδα 3 πόδ. ἀγγλ., 28 ἀγγλ. πόδ.=27 πόδ. Βιέννης καὶ 316 πόδ. Βιέννης=100 βασ. πήχ. καὶ 1000 βασ. πήχ.=1 βασ. στάδιον;

144) Τὸ γεωγρ. μίλιον πόσους βασ. πήχ. ἔχει, ἐὰν τὸ μῆκος μιᾶς μοίρας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς ἔχῃ 15 γεωγρ. μίλια=57013,109 γαλ. ὀργυιάς, καὶ ἡ ὀργυιὰ ἔχῃ 6 πόδ. παρισινοὺς καὶ ὁ βασ. πῆχυς ἔχῃ παρισ. πόδ. 3,078;

145) Πόσας δρ. ἀξίζουσι 16 $^1/_2$ λίτραι καθαραί, ἐὰν 132 λίτραι μικταὶ ἐπληρώθησαν 150 $^3/_4$ δραχ., καὶ ἡ τάρα ἦνε 7 $^1/_2$ τ. $^0/_0$;

145) 1 λίτρα καθαρὰ ἀξίζει 6 $^2/_3$ δραχ., πόσον ἀξίζουσι 350 λίτρ. μικταί, ἐὰν ἡ τάρα ἦνε 9 τ. $^0/_0$;

147) Πόσον ἀξίζουν 4 δέματα πραγματείας ἔχοντα βάρος μικτὸν 3600 λίτρ. καὶ τάραν 12 $^1/_2$ τ. $^0/_0$ ἀγορασθέντα πρὸς 186 δραχ. 48 λεπτ. τὰς 100 καθαρὰς λίτρ.;

148) 10 βαρέλια πραγματείας ἠγοράσθησαν 880 δίστ., ἔχουσι δὲ βάρος μικτὸν 4192 ὀκ. καὶ τάραν 16 $^2/_3$ τ. $^0/_0$, πόσον στοιχίζει ὁ καθαρὸς στατήρ;

149) 750 λίτραι μικταὶ πόσα φιορίνια χάρτινα στοιχίζουσιν, ἐὰν ἡ τάρα ἦνε 5 $^1/_2$ τ. $^0/_0$, ἠγοράσθησαν δὲ πρὸς 23 $^1/_3$ φιορίνια ἀργυρᾶ τὰς 100 καθαρὰς λίτρας, καὶ ὁ ἄργυρος ἔχῃ ὑπερτίμησιν 24 $^3/_4$ τ. $^0/_0$;

150) Ἔμπορος ἠγόρασε καφφὲ πρὸς 128 δραχ. τὸν στατῆρα, πόσον θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίζῃ 12 τ. $^0/_0$;

151) 56 στατ. 35 ὀκ. στοιχίζουσιν 105 δίστ., πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, ἵνα κερδίζῃ 12 τ. $^0/_0$;

152) Ἔμπορός τις πωλεῖ τὸν καφφὲ πρὸς δρ. 2 $^2/_3$ τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 10 $^1/_2$ τ. $^0/_0$, πόσον ἠγόρασε τὸν στατῆρα;

153) Πόσους βασ. πήχ. ἔχουσιν 77 πήχ. Βιέννης, ἐὰν 1 πῆχ. Β. ἔχῃ 2 $^{13}/_{28}$ πόδ. Β. καὶ 155 πόδ.=49 βασ. πήχ.;

154) Ἐπὶ Καρόλου τοῦ μεγάλου ὁ παχὺς βοῦς ἐπωλεῖτο 5 σελ., 22 δὲ τοιαῦτα σελ. ἐκόπτοντο ἐκ μιᾶς λίτρας ἀργύρου (ἐχούσης 175 δράμ.)· τώρα δὲ ἐξ ἑνὸς ἡμιλίτρου (ἐκ μιᾶς μάρκας) ἀργύρου κόπτονται 14 πρωσ. τάλ., 10 δὲ πρωσ. τάλ.

ἰσοῦνται μὲ δραχ. 41,80. Πόσας δραχ. ἐστοίχιζε τότε ὁ βοῦς;

155) Πόσους β. πήχεις ἔχει ἡ Πελοποννησιακὴ ὀργυιά, ἐὰν 4 ὀργ. ἰσῶνται μὲ 11 πήχ. μικρούς, καὶ 15432 πήχ. μικροὶ ἰσῶνται μὲ 10000 πήχ. βασ.;

Ε΄. Μέθοδος τῆς εταιρίας.

§ 101.

Τί ὀνομάζομεν μέθοδον τῆς ἑταιρίας, δύνανται νὰ δείξωσι τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

1) Ἐμπορικός τις οἶκος ἔκαμε στάσιν τῶν πληρωμῶν· ἡ ὑπάρχουσα περιουσία αὐτοῦ εἶνε 12000 τάλ., χρεωστεῖ δὲ εἰς Α 8000 τάλ. εἰς Β 6000 τάλ. εἰς Γ 4400 τάλ., πόσον ἐκ τῆς περιουσίας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν 3 δανειστῶν;

Ἀνάλυσις. Ὅλα τὰ χρέη ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ

8000 τάλ.
6000 »
4400 »
―――――――
18400 τάλ.

Ἤδη ἔχω νὰ ὑπολογισθῶ τὰ ἑξῆς προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

ά. 18400 τάλ. χρέος φέρουσι 12000 τάλ. πληρωμήν, 8000 τάλ. χρέος πόσην πληρωμὴν φέρουσιν;

Ἀπ. $5217\ ^9/_{23}$ τάλ.

β΄. 18400 ταλ. χρέος δίδουσι 12000 τάλ. πληρωμήν, 6000 τάλ. χρέος πόσην πληρωμὴν δίδουσιν;

Ἀπ. $3913\ ^1/_{23}$ τάλ.

γ. Πόσον δίδουσι 4400 τάλ. χρέος; Ἀπ. $2869\ ^{13}/_{23}$ τάλ.

Οὕτω λαμβάνει ὁ Α $5217\ ^9/_{23}$ τάλ.
ὁ Β $3913\ ^1/_{23}$ »
ὁ Γ $2869\ ^{13}/_{23}$ »
―――――――
ὁμοῦ 12000 τάλ.

2) Τέσσαρες ἔμποροι Α, Β, Γ, Δ συνιστῶσιν ἑταιρίαν, ὁ Α καταβάλλει 8000 τάλ. ἐπὶ 9 μῆνας, ὁ Β 600 τάλ. ἐπὶ

6 μῆνας, ὁ Γ 12000 τάλ. ἐπὶ 4 μῆνας καὶ ὁ Δ 8000 τάλ. ἐπὶ 3 μῆνας· κερδίζουσι δὲ 4500 τάλ., πόσον ἐκ τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἀνάλυσις. Ἐνταῦθα λέγω οὕτως·

8000 τάλ.	ἐπὶ 9 μῆν.	εἶνε ὡς	9×8000	τάλ.	$=72000$	τάλ.	ἐπὶ 1 μῆν.
6000	» » 6	» » »	6×6000	»	$=36000$	»	» »
12000	» » 4	» » »	4×12000	»	$=48000$	»	» »
8000	» » 3	» » »	3×8000	»	$=24000$	»	» »
				Τὸ ὅλον	180000	τάλ.	ἐπὶ 1 μῆν.

Ἤδη ὑπολογίζομαι τὰ ἑξῆς 4 προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

180000 τάλ. φέρουσιν (εἰς ἕνα μῆνα) 4500, πόσον φέρουσι πρῶτον 72000 τάλ.; — Ἀπ. 1800 τάλ. Δεύτερον, πόσον φέρουσι 36000 τάλ.; — Ἀπ. 900 τάλ. Τρίτον, πόσον φέρουσι 48000 τάλ.; — Ἀπ. 1200 τάλ. Τέλος τέταρτον, πόσον φέρουσιν 24000 τάλ.; — Ἀπ. 600 τάλ. Οὕτω λαμβάνει ἐκ τοῦ κέρδους

ὁ Α 1800 τάλ.
ὁ Β 900 »
ὁ Γ 1200 »
ὁ Δ 600 »

ὁμοῦ 4500 τάλ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

156) Ὁ Α καὶ ὁ Β ἠγόρασαν χοῖρον 250 λιτρῶν μὲ 84 δρ. καὶ ὁ μὲν Α ἔλαβε τὰς 200 λίτρας, ὁ δὲ Β τὸ ὑπόλοιπον, πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἑκάτερος;

157) Εἴς τινα κοινὴν ἐπιχείρησιν κατέβαλεν ὁ Α 2000 τάλ. ὁ Β 1500 τάλ. ὁ Γ 1300 τάλ., ἐκέρδισαν δὲ 1200 τάλ., πόσον ἐκ τοῦ κέρδους πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

158) Ἐμπορικόν τι κατάστημα ἔκαμε στάσιν τῶν πληρωμῶν, ὀφείλει δὲ εἰς Α 2400 τάλ. εἰς Β 1600 τάλ. εἰς Γ 2150 τάλ. εἰς Δ 1050 τάλ., ἡ ὑπάρχουσα ἐνεργητικὴ περιουσία αὐτοῦ εἶνε 4800 τάλ., πόσον ἐξ αὐτῆς ἀνήκει εἰς ἕκαστον

τῶν δανειστῶν ἀναλόγως τῶν εἰς αὐτοὺς ὀφειλομένων;

159) Τέσσαρες πολῖται Α, Β, Γ, Δ ὀφείλουσι νὰ συνεισφέρωσιν 845 τάλ. ἀναλόγως τοῦ φόρου, τὸν ὁποῖον πληρώνουσιν ἐτησίως. Ὁ μὲν Α πληρώνει $6^1/_3$ τάλ. ὁ Β $5^3/_4$, ὁ Γ 8 καὶ ὁ Δ $7^2/_3$, πόσα πρέπει νὰ συνεισφέρῃ ἕκαστος;

160) Ἡ πυρῖτις συνθέτεται ἐξ 100 μερῶν νίτρου, 10 μερῶν θείου καὶ 15 μερῶν ἄνθρακος· πόσον ἐξ ἑκάστου συστατικοῦ μέρους ἐμπεριέχεται εἰς 100 λίτρας πυρίτιδος;

161) Μεταλλική τις μίξις συνθέτεται ἐκ 5 μερῶν ψευδαργύρου, 7 μερῶν κασσιτέρου, 8 μερῶν μολύβδου καὶ 10 μερῶν χαλκοῦ, πόσον ἐξ ἑκάστου μετάλλου ἐμπεριέχεται εἰς 829 λίτρ. μίγματος;

162) Τρεῖς ἐργολάβοι ἀνεδέχθησαν κοινῶς ἐργασίαν τινά, ὁ Α ἔβαλε 5 ἐργάτας 3 ἡμ., ὁ Β 6 ἐργ. 4 ἡμ., ὁ Γ 2 ἐργ. 6 ἡμ. ἔλαβον δὲ διὰ τὴν ἐργασίαν 43 $^1/_2$ δίστ., πόσον ἐξ αὐτῶν ἀνήκει εἰς ἕκαστον;

163) Πρὸς κοινὴν ἐμπορείαν κατέβαλεν ὁ Α 3000 τάλ. ἐπὶ 8 μῆνας καὶ ὁ Β 2000 τάλ. ἐπὶ 9 μῆνας, πόσον ἐκ τοῦ κέρδους 1200 ταλήρων θέλει λάβει ἑκάτερος;

164) Τέσσαρες κρεωπῶλαι ἐμίσθωσαν λειμῶνά τινα 164 δρ., ὁ Α ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸν 4 βόας 9 ἡμ., ὁ Β 5 βόας 10 ἡμ., ὁ Γ 12 βόας 8 ἡμ., καὶ ὁ Δ 6 βόας 15 ἡμ., πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

165) Πέντε ἁμαξηλάται μετεκόμισαν ἐμπόρου τινὸς ὁ μὲν Α 9 στατ. 20 μίλια, ὁ δὲ Β 15 στατ. 6 μίλια, ὁ δὲ Γ $7^1/_2$ στατ. 24 μίλια, ὁ δὲ Δ 18 στατ. $17^2/_3$ μίλια καὶ ὁ Ε 6 στατ. 50 μίλια· ὁ ἔμπορος ἐπλήρωσε τὸ ὅλον τῆς μεταφορᾶς 92 $^1/_3$ δίστ., πόσον ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἕκαστος;

166) Τρεῖς τεχνῖται ἀνέλαβον κοινῶς ἔργον τι, εἰς τὸ ὁποῖον εἰργάσθη ὁ Α 3 ἡμ. ἀνὰ 10 ὥρας τὴν ἡμ., ὁ Β 4 ἡμέρας ἀνὰ 8 ὥρας καὶ ὁ Γ 6 ἡμέρας ἀνὰ 7 ὥρας, ἐπληρώθησαν δὲ δι' ὅλον τὸ ἔργον 38 δραχ. 60 λεπ., πόσον θέλει λάβει ἕκαστος;

Στ'. Μέθοδος τῆς μίξεως.

§ 102.

1) Οἰνοπώλης τις μιγνύει 8 ὀκ. οἰνοπνεύματος τιμωμένου πρὸς 180 λεπ. τὴν ὀκᾶν μὲ 22 ὀκ. ὕδατος, πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

Ἀνάλυσις. Αἱ 8 ὀκ. τοῦ οἰνοπνεύματος τιμῶνται 8×180 λεπ.=1440 λεπ., αἱ 8 ὀκ. οἰνοπνεύματος καὶ 22 ὀκ. ὕδατος ἀποτελοῦσι μίγμα 30 ὀκ. Ἤδη τὸ πρόβλημα εἶνε, ἐὰν 30 ὀκ. μίγματος τιμῶνται 1440 λεπ., 1 ὀκᾶ πόσον τιμᾶται;
Ἀπ. 48 λεπ.

2) Ἔμπορός τις μιγνύει δύο εἴδη καπνοῦ, 12 ὀκ. κατωτέρου τιμωμένου πρὸς 4 δραχ. καὶ 5 ὀκ. καλλιτέρου πρὸς 7 δραχ. Πόσον στοιχίζει ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

Ἀνάλυσις. Εἰς τὸ μίγμα ἐμπεριέχονται 12 ὀκ.+5 ὀκ.=17 ὀκ., αἱ μὲν 12 ὀκ. στοιχίζουσι 12×4 δρ.=48 δρ., αἱ δὲ 5 ὀκ. στοιχίζουσι 5×7 δραχ.=35 δραχ. καὶ τὸ ὅλον μίγμα 48 δραχ.+35 δραχ.=83 δραχ. Ἤδη τὸ πρόβλημα εἶνε, ἐὰν 17 ὀκ. τιμῶνται 83 δραχ., 1 ὀκ. πόσον τιμᾶται;
Ἀπ. 4 δραχ. 88 $^{4}/_{17}$ λεπ.

§ 103, ά.

1) Ἔχω οἰνόπνευμα τιμώμενον 120 λεπ. τὴν ὀκ. καὶ θέλω ν' ἀραιώσω αὐτὸ δι' ὕδατος τόσον, ὥςτε νὰ δύναμαι νὰ πωλῶ τὴν ὀκᾶν πρὸς 70 λεπ. Ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ὕδωρ πρὸς τὸ οἰνόπνευμα τοῦ μίγματος;

Ἀνάλυσις. Ἐνταῦθα λέγω, ἐὰν μὲ 120 λεπ. ἔχω μίαν ὀκᾶν οἰνοπνεύματος, πόσον οἰνόπνευμα λαμβάνω μὲ 70 λεπ.; —Ἀπ. $^{70}/_{120}$=$^{7}/_{12}$ ὀκ. Λοιπὸν μία ὀκᾶ μίγματος ἀξίζουσα 70 λεπ. πρέπει νὰ σύγκειται ἐξ $^{7}/_{12}$ ὀκ. καθαροῦ οἰνοπνεύματος καὶ ἐκ $^{5}/_{12}$ ὀκ. ὕδατος, ἤτοι πρέπει νὰ μίξω 7 ὀκ. οἰνοπνεύματος καὶ 5 ὀκ. ὕδατος.

2) Ἔχω δύο εἰδῶν ταμβάκου, ἡ ὀκᾶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους τιμᾶται 12 δρ., τοῦ δὲ δευτέρου 5, θέλω δὲ νὰ μίξω ἐξ ἑκατέρας ποιότητος τόσον μέρος, ὥςτε νὰ δύναμαι νὰ

πωλῶ τὸ μίγμα πρὸς 8 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὰ δύο συστατικὰ μέρη τοῦ μίγματος ;

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ μία ὀκᾶ τῆς καλλιτέρας ποιότητος εἶνε κατὰ 7 δραχ. ἀκριβοτέρα ἢ μία ὀκᾶ τῆς κατωτέρας ποιότητος, συμπεραίνω ὅτι $^1/_7$ ὀκᾶς τῆς πρώτης ποιότητος εἶνε κατὰ 1 δραχ. ἀκριβότερον τοῦ $^1/_7$ ὀκᾶς τῆς δευτέρας. Ὅθεν ἐάν, ἵνα σχηματίσω μίγμα μιᾶς ὀκᾶς, βάλω $^1/_7$ ὀκᾶς ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος—ἑπομένως τὰ $^6/_7$ ὀκᾶς ἐκ τῆς δευτέρας—ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θέλει εἶσθαι κατὰ 1 δραχ. ἀκριβοτέρα μιᾶς ὀκᾶς ἐκ τῆς δευτέρας ποιότητος. Ἀλλ' ἐπειδὴ θέλω νὰ ἦνε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος κατὰ 3 δραχ. ἀκριβοτέρα τῆς ὀκᾶς τῆς δευτέρας ποιότητος, πρέπει νὰ θέσω εἰς τὸ μίγμα $^3/_7$ ὀκᾶς ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος, καὶ ἑπομένως τὰ $^4/_7$ ὀκᾶς ἐκ τῆς κατωτέρας. Λοιπόν, ἵνα σχηματίσω μίγμα 7 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλω 3 ὀκ. ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ 4 ὀκ. ἐκ τῆς δευτέρας.

Οὕτω λοιπὸν ἡ λύσις καὶ ὁ ὑπολογισμὸς δύνανται νὰ ἐκτεθῶσι κατὰ τὸν ἑξῆς εὔληπτον τρόπον·

1 ὀκ. ά ποιότητ. =12 δραχ.	
1 ὀκ. μεσ. ποιότ.= 8 δραχ.	3 ὀκ. πρώτης ποιότητος
1 ὀκ. κατ. ποιότ.= 5 δραχ.	4 ὀκ. κατωτέρας ποιότητος
	7 ὀκ. μεσαίας ποιότητος.

Εὑρόντες δ' οὕτως, ὅτι ὁ λόγος μεταξὺ τῶν δύο συστατικῶν μερῶν τοῦ μίγματος εἶνε ὡς 4 : 3, εὐκόλως προσδιορίζομεν ἐπὶ ὡρισμένου ποσοῦ μίγματος, π.χ. ἐπὶ 50 ὀκ., πόσον πρέπει νὰ μίξωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους· διότι σχηματίζομεν τὴν ἑξῆς μέθοδον τῶν τριῶν·

Εἰς 7 ὀκ. μίγματος θέτονται 4 ὀκ. κατωτέρας ποιότητος
» 50 » » » χ » » »

$7 : 50 = 4 : χ$

Λοιπὸν $28\ ^4/_7$ ὀκ. ἐκ τῆς κατωτέρας ποιότητος
καὶ $50 - 28\ ^4/_7 = 21\ ^3/_7$ ὀκ. ἐκ τῆς καλλιτέρας ποιότ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύονται ἤδη εὐκόλως καὶ ἄλλα ὅμοια προβλήματα καὶ ἐπὶ μεγαλειτέρων καὶ πολυπλοκωτέρων ἀριθμῶν.

Σημ. Ἐὰν δὲ δοθῶσι πρὸς μίξιν ὑπὲρ τὰ δύο εἴδη, π.χ. πέντε εἴδη οἴνου τιμώμενα τὴν ὀκᾶν πρὸς λεπ. 120,100,70,64 καὶ 45, καὶ ζητῆται νὰ κάμω μίγμα ἀξίας 90 λεπτῶν, εὑρίσκω πρῶτον μερικὰ μίγματα ἀξίας 90 λεπτῶν λαμβάνων αὐτὰ ἀνὰ δύο τὸ μὲν ἐν ἀξίας ἀνωτέρας τῶν 90 λεπτῶν τὸ δὲ ἕτερον κατωτέρας· π.χ. μεταξὺ τῶν εἰδῶν τὰ ὁποῖα ἀξίζουσι α΄) 120 καὶ 70, β΄) 100 καὶ 64 καὶ γ΄) 100 καὶ 45, οὕτω

$$\begin{array}{ccc} 120 & & 20 \\ \hline & 90 & \\ 70 & & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 100 & & 26 \\ \hline & 90 & \\ 64 & & 10, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 100 & & 45 \\ \hline & 90 & \\ 45 & & 10. \end{array}$$

Ἔπειτα λέγω, τὸ ζητούμενον μίγμα πρέπει νὰ ἔχῃ ἐκ τοῦ α΄ μίγματος 20 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄ 26+45=71 ὀκ., ἐκ τοῦ γ΄ 30, ἐκ τοῦ δ΄ 10 καὶ ἐκ τοῦ ε΄ 10.

§ 103. β΄.

Ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν καὶ δύο ἐκφράσεις ἐκ τῆς μεταλλουργίας, αἱ ὁποῖαι εἶνε εὔχρηστοι καὶ εἰς τὸν κοινωνικὸν βίον· ἤγουν πρῶτον ὁ ἄργυρος λέγεται ὅτι εἶνε

16 βαθμῶν, ἐὰν ἦνε ἐντελῶς καθαρός,
15 » ἐὰν ἐν ἑκάστῃ μονάδι ἔχῃ 15 μέρη ἀργ. καὶ 1 χαλκ.
14 » » » » » 14 » » 2 »

κ. τ. λ.

Δεύτερον ὁ χρυσὸς λέγεται ὅτι εἶνε

24 κερατίων, ἐὰν ἦνε ἐντελῶς καθαρός,
23 » ἐὰν ἐν ἑκάστῃ μον. ἔχῃ 23 μέρη χρυσ. καὶ 1 χαλκ.
22 » » » » » » 22 » » 2 »

κ. τ. λ.

Κατὰ ταῦτα λύονται τὰ δύο ἑφεξῆς προβλήματα·

1) Κομμάτιον χρυσοῦ εἶνε τῶν 21 κερατίων καὶ ἔχει βάρος 120 δραμίων, πόσος καθαρὸς χρυσὸς ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ;

Ἀπ. 120×21 κεράτια=2520 κεράτια=105 δράμια.

2) Χρυσοχόος τις συγχωνεύει 50 δράμια ἀργύρου τῶν 12 βαθμῶν, 30 δράμ. τῶν 15 καὶ 40 τῶν 9· πόσων βαθμῶν καθαρότητα ἔχει τὸ συγχώνευμα ;

Ἀνάλυσις.

50 δρ. τῶν 12 ἔχει	$50 \times 12 = 600$	βαθμοὺς	καθαροῦ	ἀργύρ.
30 » τῶν 15 »	$30 \times 15 = 450$	»	»	»
40 » τῶν 9 »	$40 \times 9 = 360$	»	»	»
120 δρ. ἔχουσιν ὁμοῦ	1410	»	»	»

Λοιπὸν εἰς ἕκαστον δράμιον ἀναλογοῦσι $1410/_{120} = 11\ 3/_4$ βαθμοὶ καθαροῦ ἀργύρου.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

167) 7 ὀκ. ὄξους τιμωμένου πρὸς 24 λεπ. ἀραιοῦνται διὰ 3 ὀκ. ὕδατος, πόσον ἀξίζει 1 ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

168) 9 ὀκ. οἰνοπνεύματος πρὸς 160 λεπ. ἀραιοῦνται μὲ 13 ὀκ. ὕδατος, πόσον ἀξίζει 1 ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

169) Ἔμπορός τις μιγνύει τρία εἴδη οἴνου, 20 ὀκ. πρὸς 100 λεπ., 45 ὀκ. πρὸς 80 λεπ. καὶ 25 ὀκ. πρὸς 64 λεπ., πόσον στοιχίζει 1 ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

170) Ἔμπορός τις μιγνύει δύο εἴδη καπνοῦ 50 ὀκ. πρὸς $6\ 1/_2$ δραχ. καὶ 30 ὀκ. πρὸς 4 δραχ., πόσον στοιχίζει μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

171) 12 ὀκ. οἰνοπνεύματος πρὸς 160 λεπ. πρόκειται ν' ἀραιωθῶσιν, ὥςτε νὰ πωλῆται ἡ ὀκᾶ πρὸς 100 λεπ., πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ βληθῇ εἰς αὐτάς;

172) Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἴδη καπνοῦ, τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 12 γρόσια, τοῦ δὲ δευτέρου 9 γρόσια, θέλει δὲ νὰ μίξῃ 40 ὀκ. τῆς καλλιτέρας ποιότητος μὲ τὴν κατωτέραν ποιότητα οὕτως, ὥςτε νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 10 γρόσια, πόσας ὀκ. τῆς κατωτέρας πρέπει νὰ λάβῃ;

173) Ἐὰν δὲ θέλῃ νὰ ἦνε τὸ ὅλον μίγμα 100 ὀκ., πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀφ' ἑκατέρου εἴδους;

174) Οἰνοπώλης τις ἔχει καλλίτερον οἶνον τιμώμενον 64

λεπ. τὴν ὀκᾶν καὶ κατώτερον τιμώμενον 40 λεπ. τὴν ὀκᾶν, πόσας ὀκ. πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα σχηματίσῃ μίγμα 80 ὀκ. τιμώμενον 50 λεπ. τὴν ὀκᾶν;

175) Ἀργυροῦς τις δίσκος ἔχει βάρος 167 δράμ. καὶ 13 βαθμῶν καθαρότητα, πόσος καθαρὸς ἄργυρος ὑπάρχει ἐν αὐτῷ;

176) 25 δράμ. χρυσοῦ τῶν 12 κερατίων, 48 δράμ. τῶν 16 κερατίων καὶ 13 τῶν 20 συνεχωνεύθησαν εἰς ἕν, πόσων κερατίων εἶνε τὸ συγχώνευμα;

177) Μὲ 78 δράμια ἀργύρου τῶν 13 βαθμῶν συνεχωνεύθησαν 35 δράμ. χαλκοῦ, πόσων βαθμῶν καθαρότητα ἔχει τὸ συγχώνευμα;

178) Πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συγχωνεύσω μὲ 100 δράμ. ἀργύρου τῶν 14 βαθμῶν καθαρότητος, ἵνα τὸ συγχώνευμα γείνῃ 11 βαθμῶν;

179) Ἐξ ἐναντίας, πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ συγχωνεύσω μὲ 64 δράμ. ἔχοντα 9 βαθμῶν καθαρότητα, ἵνα τὸ συγχώνευμα γείνῃ 13 βαθμῶν;

180) Πόσον ἄργυρον τῶν $8\,{}^{1}/_{2}$ βαθμῶν καὶ πόσον τῶν $12\,{}^{3}/_{4}$ πρέπει νὰ συγχωνεύσω, ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ συγχώνευμα 120 δραμ. τῶν 10 βαθμῶν;

*ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ τετραγώνου καὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

§ 104.

Ἐὰν ἀριθμόν τινα, π. χ. τὸν 5, πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὸν αὐτόν, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 25 ὀνομάζεται *τετράγωνον* τοῦ ἀριθμοῦ 5. Σημειώνουσι δὲ συνήθως τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος, 5, γράφοντες ἐπ' αὐτοῦ πρὸς δεξιὰ μικρὸν 2, οὕτω 5^2, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται, 5 *εἰς τὸ τετράγωνον*. Τὸ 2 τοῦτο δεικνύει, ὅτι εἰς τὸ γινόμενον 5×5 ὑπάρχει ὁ παράγων 5 δίς, καὶ διὰ τοῦτο λέγεται *δείκτης*. Ὁμοίως εἶνε

$$4^2=16$$
$$9^2=81$$
$$12^2=144$$
$$20^2=400 \text{ κ. τ. ἑ.}$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲ τοῦ τετραγώνου εἶνε ἡ *τετραγωνικὴ ῥίζα*· ὀνομάζομεν δηλ. τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, π.χ. τοῦ 64, τὸν ἀριθμὸν (8), ὅςτις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν αὐτὸν δίδει τετράγωνον τὸν 64. Τὸ σημεῖον τῆς ῥίζης εἶνε τὸ $\sqrt{\ }$.

Οὕτω δὲ δύναμαι νὰ γράψω

$\sqrt{64}=8$, (ἤγουν ἡ ῥίζα τοῦ 64=8)

ὁμοίως $\sqrt{9}=3$

$\sqrt{169}=13$, κ. τ. ἑ.

§ 105.

Νὰ ὑψώσω μὲν εἰς τὸ τετράγωνον πάντα ἀριθμὸν δύναμαι, διότι πάντα ἀριθμὸν ἠξεύρω νὰ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸν αὐτόν. Ἀλλ' ἡ ῥίζα πάντων τῶν ἀριθμῶν δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ἐξαχθῇ· οὕτω π.χ. ἡ $\sqrt{40}$ δὲν εὑρίσκεται· διότι ὁ μὲν 6^2 εἶνε $=36$ ἤτοι μικρότερος τοῦ 40, ὁ δὲ $7^2=49$ εἶνε μεγαλείτερος τοῦ 40. Εἰς τοιαύτας δὲ περιπτώσεις, καθ' ἃς ζητεῖται ἡ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος 40, ὅςτις δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, λαμβάνουσι συνήθως τὴν ῥίζαν 6 τοῦ πλησιεστάτου τετραγώνου 36 καὶ τὸ κατάλοιπον $40-36=4$. Λέγω λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ 40 εἶνε 6, ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 6 ἀφαιρέσω ἀπὸ 40, μένει καὶ κατάλοιπον 4.

§ 106.

Ἀριθμοῦ ἔχοντος ἓν ἢ δύο ψηφία γνωρίζω ἀμέσως τὴν ῥίζαν, ἐὰν ἐξάγηται, καὶ πῶς ὀνομάζεται. Οὕτω γνωρίζω π. χ. ἀμέσως ἐκ τῆς προπαιδείας, ὅτι ἡ $\sqrt{81}$ εἶνε 9. Ὅταν ὅμως ἀριθμός τις ἦνε γεγραμμένος μὲ 3 ἢ πλειότερα ψηφία, τότε ἡ ῥίζα αὐτοῦ δὲν εἶνε μονοψήφιος, καὶ δὲν ἐμπεριέχεται εἰς τὴν προπαίδειαν, δι' ὃ καὶ δὲν ἐξάγεται τόσον εὐκόλως. Πρὶν ὅμως δείξω, πῶς εὑρίσκεται ἡ διψήφιος καὶ πολυψήφιος ῥίζα, πρέπει νὰ ἐξετάσω, πῶς σχηματίζεται τὸ τετράγωνον τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 32^2

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

Ἐνταῦθα πρῶτον ἐπολλαπλασίασα 4κις,—$2\times2=4$, $2\times3=6$, $3\times2=6$, $3\times3=9$—καὶ ἔπειτα προςέθεσα. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον $32^2=1024$ σύγκειται ἐκ 4 μερῶν, ἤγουν ἐκ 4 μονάδων, ἐκ δὶς 6 δεκάδων καὶ ἐξ 9 ἑκατοντάδων. Αἱ 4 μονάδες εἶνε τὸ τετράγωνον τῶν δεδομένων μονάδων 2, αἱ δὶς 6 δεκάδες εἶνε δὶς τὸ γινόμενον τῶν 2 μονάδων ἐπὶ τὰς 3 δεκάδας, καὶ τέλος αἱ 9 ἑκατοντάδες εἶνε τὸ τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων. Ὅθεν δύναμαι νὰ εἴπω, Τὸ τετράγωνον τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ 32 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς μερῶν, ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς πάντα ἄλλον ἀριθμόν, π. χ. εἰς τὸν 73,

$$\begin{array}{r} 73 \\ 73 \\ \hline 219 \\ 511 \\ \hline 5329 \end{array}$$

Καὶ ἐνταῦθα ἐπολλαπλασίασα 4κις—$3\times3=9$, $3\times7=21$, $7\times3=21$, $7\times7=49$—ἂν καὶ δὲν ἔγραψα χωριστὰ τὰ δύο τελευταῖα γινόμενα, ἀλλὰ τὰ συνεχώνευσα εἰς ἕνα ἀριθμὸν 511, ὑπάρχουσιν ὅμως κυρίως 4 γινόμενα, καὶ μάλιστα ὁποῖα ἦσαν καὶ ἀνωτέρω, δηλ. 9 μονάδες, οὖσαι τὸ τετράγωνον τῶν 3 μονάδων, δὶς 21 δεκάδες, οὖσαι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων 7 ἐπὶ τὰς μονάδας 3, καὶ 49 ἑκατοντάδες, οὖσαι τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων,

Ὅθεν δύναμαι τὸ τετράγωνον τοῦ 32 καὶ τὸ τοῦ 73 νὰ σχηματίσω καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, εἰς τὰ ὁποῖα ὅμως θέλω γράψει τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων πρῶτον καὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων ἔσχατον, λοιπὸν

$$\begin{array}{rr} 30^2=900 & 70^2=4900 \\ 2\times30\times2=120 & 2\times70\times3=420 \\ 2^2=4 & 3^2=9 \\ \hline 32^2=1024 & 73^2=5329 \end{array}$$

Ἐν γένει περὶ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ τετραγώνου παντὸς διψηφίου ἀριθμοῦ ὑπάρχει ὁ ἑξῆς κανών· *Τὸ τετράγωνον διψηφίου ἀριθμοῦ σύγκειται ἐκ τριῶν μερῶν, ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων.*

§ 107.

Ἕτερος οὐσιώδης κανών, τὸν ὁποῖον πορίζομαι ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῶν ἤδη σχηματισθέντων τετραγώνων, καὶ ὅστις εἶνε πολὺ ἀναγκαῖος εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, εἶνε ὁ ἑξῆς· *Τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει μόνον ἑκατοντάδας* (οὐδεμίαν δεκάδα καὶ μονάδα)· *τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δίδει μόνον δεκάδας* (οὐδεμίαν μονάδα), *καὶ μόνον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων δίδει καὶ μονάδας.*

§ 108.

Διὰ τῶν προηγουμένων κανόνων γίνεται ἤδη πολὺ εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὴν διψήφιον τετραγωνικὴν ῥίζαν. Ἔστω π. χ. νὰ εὕρω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀνωτέρω σχηματισθέντος τετραγώνου 1024.

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη ῥίζα ἔχει δύο ψηφία, ζητῶ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο χωριστά, καὶ μάλιστα πρῶτον τὰς δεκάδας. Πρὸς τοῦτο δὲ μεταχειρίζομαι τὸν κανόνα τῆς ἀνωτέρω §, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει μόνον ἑκατοντάδας. Δύναμαι λοιπόν, ἐν ὅσῳ ἐργάζομαι εἰς τὸ τετράγωνον τοῦτο μόνον, νὰ παραλείψω παντάπασι τὰς μονάδας καὶ δεκάδας, καὶ διὰ τοῦτο χωρίζω ταύτας ἀπὸ τῶν ἄλλων ψηφίων διὰ γραμμῆς 10|24

Τὸ τετράγωνον λοιπὸν τῶν δεκάδων ἀνάγκη νὰ ἐμπεριέχηται εἰς μόνα τὰ ψηφία 10, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸ τῆς γραμμῆς. Ὅθεν εὑρίσκω τὰς ζητουμένας δεκάδας, ἐὰν ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ 10

10 | 24 [3 δεκάδες
9
—
1

Ἡ ῥίζα αὐτη εἶνε 3 καὶ ἀφίνει κατάλοιπον 1, (ὅπερ προέρχεται ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας). Ἤδη εὗρον τὰς 3 δεκάδας· ἵνα δὲ εὕρω καὶ τὰς 2 μονάδας, μεταχειρίζομαι τὸν δεύτερον κανόνα τῆς ἀνωτέρω §, τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δίδει μόνον δεκάδας. Ὅθεν καταβιβάζω εἰς τὸ κατάλοιπον 1 ἑκατοντάδα καὶ τὰς ἀκολούθους 2 δεκάδας,

10 | 24 | 3
9
—
12

καὶ λέγω, εἰς τὰς σχηματισθείσας 12 δεκάδας πρέπει νὰ ἐμπεριέχηται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας. Τὰς 3 δεκάδας γνωρίζω ἤδη, τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων εἶνε 6, καὶ ἐπειδὴ 12 πρέπει νὰ ἦνε τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, εὑρίσκω προφανῶς τὰς μονάδας, ἐὰν διαιρέσω 12 διὰ 6, λοιπὸν

	10 | 24	3 δεκάδες
	9	
6	12	2 μονάδες
	12	
	4	32 ἡ ζητουμένη ῥίζα.
	4	

Οὕτως εὗρον τὰς ἐλλειπούσας 2 μονάδας.—Ἤδη ἔμειναν ἔτι καὶ 4 μονάδες—Ἀφήρεσα ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ 1024 πρῶτον τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, ἔπειτα δὶς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· πρέπει λοιπὸν νὰ μένῃ ὑπόλοιπον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, καὶ τοῦτο συνέβη, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 2 εἶνε ἀκριβῶς 4. Ὅθεν εἶνε 32 ἡ ἐντελὴς ῥίζα τοῦ 1024, δηλ. 32×32 εἶνε $= 1024$ (*).

Ἤδη θέλω ζητήσει κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν ῥίζαν καὶ τοῦ ἄλλου τετραγώνου 5329, τὸ ὁποῖον ἀνωτέρω ἐσχημάτισα·

53 | 29	7 ά ψηφίον τῆς ῥίζης
$7^2 = 49$	
$2 \times 7 = 14$ | 42	
$3 \times 14 = 42$	3 6΄. » » »
9	73 ἡ ζητουμένη ῥίζα.
$3^2 = 9$	
0	

Κύρου Μαρίο

Ἐνταῦθα πάλιν ἐχώρισα πρῶτον τὰ δύο τελευταῖα ψηφία διὰ γραμμῆς· ἔπειτα ἐξήγαγον ἐκ τοῦ ὑπολειφθέντος μέρους 53 τὴν ῥίζαν, ἥτις εἶνε 7 δεκάδες· εἰς τὸ κατάλοιπον 4 κατεβίβασα τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2, τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν 42 διῄρεσα διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων $2 \times 7 = 14$ καὶ εὗρον πηλίκον τὰς 3 μονάδας. Τέλος κατεβίβασα καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9, καὶ ἀφήρεσα ἀπ' αὐτοῦ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων. Καὶ ἐπειδὴ οὐδὲν ἔμεινε κατάλοιπον, ὁ 73 εἶνε ἡ ἀκριβὴς ῥίζα τοῦ 5329, δηλ. εἶνε $73 \times 73 = 5329$.

Τέλος θέλω ἐξαγάγει καὶ τὴν ἑξῆς ῥίζαν.

(*) Ὁ διδάσκαλος πρέπει νὰ πραγματευθῇ οὐ μόνον τοῦτο ἀλλὰ καὶ ἄλλα πολλὰ παραδείγματα μὲ τὴν αὐτὴν λεπτομέρειαν· ἔτι δὲ καὶ πρὸ τῆς ἐξαγωγῆς νὰ ἀναθέσῃ εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ σχηματίσωσιν αὐτοὶ τὰ τετράγωνα πολλῶν διψηφίων ῥιζῶν.

2 | 92	1 ά ψηφίον τῆς ῥίζης
$1^2=1$	
$2\times1=2$] 19	7 β' » » »
$7\times2=14$	17 ἡ ζητουμένη ῥίζα.
52	
$7^2=49$	

3 κατάλοιπον.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα μένει κατάλοιπον 3, καταλαμβάνω, ὅτι, ἐὰν ὑψώσω 17 εἰς τὸ τετράγωνον, πρέπει νὰ προςθέσω καὶ 3, ἵνα εὕρω 292.

Σημ. Εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 19 διὰ 2 δὲν πρέπει νὰ θέσω πηλίκον 8 ἢ 9· διότι τότε δὲν ἤθελε μείνει ἀρκετὸν κατάλοιπον πρὸς ἀφαίρεσιν καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων.

§ 109.

Ἤδη εὔκολον εἶνε νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν πενταψηφίου ἢ ἑξαψηφίου ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ 426409. Εἰς τὴν ῥίζαν ταύτην διακρίνω πάλιν τὰς δεκάδας, (αἵτινες ἐνταῦθα εἶνε διψήφιοι) καὶ τὰς μονάδας. Ἵνα εὕρω τὰς δεκάδας, λέγω ὡς καὶ ἀνωτέρω, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει μόνον ἑκατοντάδας. Ἐν ὅσῳ λοιπὸν ἐνασχολοῦμαι εἰς τὸ τετράγωνον τοῦτο μόνον, δύναμαι τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ τετραγώνου νὰ παραλείψω· ὅθεν χωρίζω τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀπὸ τῶν λοιπῶν διὰ γραμμῆς, οὕτω

426 | 409.

Λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐμπεριέχεται ὅλον εἰς τὸν ὄντα πρὸ τῆς γραμμῆς ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει, ἵνα εὕρω τὰς δεκάδας αὐτάς, νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 4264. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 4 ψηφία· ἔμαθον δὲ ἀρκούντως εἰς τὴν ἀνωτέρω §, πῶς ἐξάγεται ἡ ῥίζα τετραψηφίου ἀριθμοῦ. Ἐκτελῶν λοιπὸν τὴν πρᾶξιν ταύτην εὑρίσκω·

42 | 64 | 09	6 ά ψηφίον τῆς ρίζης
$6^2=36$	
$2\times6=12$ | 66	5 6΄ » » »
$5\times12=60$	65 εὑρεθὲν μέρος τῆς ρίζης
64	
$5^2=25$	
39	

Ἤδη εὗρον τὰς ζητουμένας δεκάδας=65 καὶ συνάμα ἀφῄρεσα καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῶν ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Ἵνα ἤδη εὕρω καὶ τὰς μονάδας, λέγω, τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δίδει μόνον δεκάδας· ὅθεν εἰς τὰς καταλειφθείσας 39 ἑκατοντάδας καταβιβάζω τὰς 0 δεκαδας, καὶ εἰς τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν 390 ἐμπεριέχεται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων 65 ἐπὶ τὰς ἐλλειπούσας μονάδας· ὅθεν διαιρῶ τὸν ἀριθμὸν 390 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων $2\times65=130$, καὶ οὕτως εὑρίσκω τὰς ζητουμένας μονάδας 3, ἔπειτα ἀφαιρῶ τὸ διπλάσιον γινόμενον $2\times65\times3=390$, καταβιβάζω τέλος καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 καὶ ἀφαιρῶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, λοιπόν,

42 | 64 | 09	6 ά ψηφίον τῆς ρίζης
36	
$2\times6=12$ | 66	5 6΄ » » »
$5\times12=60$	65 εὑρεθὲν μέρος τῆς ρίζης
64	
$5^2=25$	
$2\times65=130$ | 390	3 γ΄ ψηφίον τῆς ρίζης
$3\times130=390$	653 ἡ ζητουμένη ρίζα.
9	
$5^2=9$	

Ἐπειδὴ οὐδὲν ἔμεινε κατάλοιπον, ὁ 653 εἶνε ἡ ζητουμένη ρίζα, εἶνε δηλ. $653^2=426409$.

§ 110.

Τὴν αὐτὴν μέθοδον μεταχειρίζομαι καὶ ὅταν πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ ἔχοντος 7 ἢ 8 ψηφία, π. χ. τοῦ 7496644. Ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς·

7|49|66|44	2 ά ψηφίον τῆς ῥίζης
$2^2=4$	
$2\times3=4$ | 34	7 β΄ » » »
$2\times7=28$	27 εὑρεθὲν μέρος τῆς ῥίζης
69	
$2^2=49$	
$2\times27=54$ | 206	3 γ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης
$3\times54=162$	273 εὑρεθὲν μέρος τῆς ῥίζης
446	
$3^2=9$	
$2\times273=546$ | 4374	8 δ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης
$8\times546=4368$	2738 ἡ ζητουμένη ῥίζα.
64	
$2^2=64$	

Ἡ σκέψις, ἥτις μὲ ὡδήγησεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον, εἶνε ἡ ἑξῆς· Ζητῶ πρῶτον νὰ προςδιορίσω τὰς δεκάδας τῆς ζητουμένης ῥίζης· ἵνα δ᾽ εὕρω ταύτας, λέγω πάλιν, τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει μόνον ἑκατοντάδας· ὅθεν χωρίζω, ὡς ἀνωτέρω, τὰ δύο τελευταῖα ψηφία 44 διὰ γραμμῆς ἀπὸ τῶν λοιπῶν, καὶ ζητῶ τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 74966, τοῦ κειμένου πρὸς ἀριστερὰ τῆς ἀχθείσης γραμμῆς. Ἀλλὰ τὴν ῥίζαν ταύτην δύναμαι νὰ ἐξαγάγω κατὰ τὴν προηγουμένην §, διότι ὁ ἀριθμὸς 74966 ἔχει μόνον 5 ψηφία. Ἐκτελῶν λοιπὸν τὴν ἤδη ἐξηγηθεῖσαν ἐργασίαν, εὑρίσκω 273 τὰς ζητουμένας δεκάδας, καὶ μένει ὑπόλοιπον 437. Ἵνα δὲ ἤδη προςδιορίσω καὶ τὰς μονάδας, λέγω προςέτι το διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δίδει μόνον δεκάδας, ὅθεν καταβιβάζω, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4, τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν 4374 διαιρῶ διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων $2 \times 273 = 546$, καὶ εὑρίσκω μονάδας 8, τέλος καταβιβάζω καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 καὶ ἀφαιρῶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων. Καὶ ἐπειδὴ οὐδὲν κατάλοιπον μένει, ὁ 2738 εἶνε ἡ ζητουμένη ῥίζα, εἶνε δηλ. $2738 \times 2738 = 7496644$.

§ 111.

Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνεται ἤδη φανερὸν πῶς ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἀριθμοῦ ἔχοντος 9 ἢ πλειότερα ψηφία. Ὅθεν εἰς τοῦτο δὲν θέλω ἐνδιατρίψει πλέον, ἀλλὰ θέλω δείξει μόνον δι' ἑνὸς παραδείγματος, τί πράττομεν, ὅταν εἰς τὴν ῥίζαν ὑπάρχῃ μηδέν. Ἔστω λοιπὸν νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 29224836.

$29 \mid 22 \mid 48 \mid 36$	5 ά ψηφίον τῆς ῥίζης
$5^2 = 25$	
$2 \times 5 = 10 \mid 42$	4 β΄ » »
$4 \times 10 = 40$	54 εὑρεθὲν μέρος τῆς ῥίζης
22	
$4^2 = 16$	
$2 \times 54 = 108 \mid 64$	0 γ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης
$0 \times 108 = 0$	540 εὑρεθ. μέρος τῆς ῥίζης
648	
$0^2 = 0$	
$2 \times 540 = 1080 \mid 6483$	6 δ΄ ψηφίον τῆς ῥίζης
$6 \times 1080 = 6480$	6406 ἡ ζητουμένη ῥίζα.
36	
$6^2 = 36$	
0	

§ 112.

Ἐὰν δὲ θέλω νὰ μάθω, πῶς ἐξάγεται ἡ ῥίζα κλάσματος, πρέπει νὰ ἴδω πρότερον, πῶς τετραγωνίζεται κλάσμα. Ἐὰν π. χ. θέλω νὰ τετραγωνίσω τὸ $^3/_4$, εὑρίσκω

$$^3/_4 \times {}^3/_4 = {}^9/_{16}.$$

Ἐκ τούτου δὲ καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων πορίζομαι τὸν ἑξῆς κανόνα· *Κλάσμα τετραγωνίζεται, ἐὰν τετραγωνίσω τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ.* Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται καὶ τὸ ἀντίστροφον· *Ὅταν πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν κλάσματός τινος, πρέπει νὰ ἐξαγάγω αὐτὴν ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ*, εἶνε λοιπὸν π. χ.

$$\sqrt{^9/_{16}} = {}^3/_4$$
$$\sqrt{^{25}/_{64}} = {}^5/_8$$
$$\sqrt{^{49}/_{144}} = {}^7/_{12}, \text{ κ. τ. δ.}$$

§ 113.

Μέχρι τοῦδε ὑπεθέτομεν σχεδὸν πανταχοῦ, ὅτι εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης ὁ ὑπολογισμὸς περατοῦται· ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει σπανίως, εἰς δὲ τὰς πλείστας περιπτώσεις ἡ ῥίζα δὲν ἐξάγεται ἀκριβῶς. Ἐὰν π.χ. ἐρωτήσῃ τις, ποία εἶνε ἡ ῥίζα τοῦ 54, δὲν δύναμαι νὰ ἐκφράσω αὐτὴν ἀκριβῶς. Δύναμαι μὲν νὰ εἴπω, ὅτι αὕτη κεῖται μεταξὺ 7 καὶ 8, διότι 7×7 εἶνε $=$ 49, λοιπὸν < 54, 8×8 ὅμως εἶνε 64 λοιπὸν > 54. Ἀλλὰ μὲ τοῦτο ἔλαβον πολὺ ἀτελῆ γνῶσιν τῆς ζητουμένης ῥίζης· ἐὰν δὲ θέλω νὰ γνωρίσω αὐτὴν ἀκριβέστερον, εἶνε ἁπλούστερον νὰ τρέψω τὸν 54 εἰς δεκαδικὸν κλάσμα ἔχον δεκαδικὰ ψηφία διπλάσια τῶν ὅσα θέλω νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα. Λοιπὸν ἐὰν θέλω νὰ γνωρίσω τὴν $\sqrt{54}$ μέχρις ἑνὸς 100^{στοῦ} ἀκριβῶς, ἀντὶ 54 θέτω

$$54{,}0000 = {}^{540000}/_{10000}$$

καὶ ἔπειτα ἐξάγω κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 540000 καὶ τοῦ παρονομαστοῦ 10000. Καὶ ἐπειδὴ τοῦ παρονομαστοῦ ἡ ῥίζα εἶνε 100, χωρίζω ἀπὸ τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ δύο δεκαδικὰ ψηφία. Λοιπὸν ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἑξῆς,

```
      54, | 00 | 00 | 7,34
      49
     ─────────
  14 | 50
       42
     ─────────
       80
        9
     ─────────
 146 | 710
       584
     ─────────
       1260
         16
     ─────────
       1244
```

Αι Ελένα καί Μαρία· ημέρα Τετάρτη 14 Δεκεμβ.

Ἐνταῦθα, ἐπειδὴ ἔμεινε κατάλοιπον, ὁ ἀριθμὸς 7,34 δὲν εἶνε ἀκόμη ἴσος μὲ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν, ἀλλὰ μικρότερος· διαφέρει ὅμως αὐτῆς ὀλιγώτερον τοῦ $^1/_{100}$· διότι ἐὰν ἤθελον λάβει ὡς ῥίζαν τὸν 7,35, ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὡς φαίνεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὑπολογισμοῦ, ἤθελεν εἶσθαι μεγαλείτερος τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Ὅταν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐξάγωμεν τὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχουσαν 1, 2, 3, 4, ... δεκαδικὰ ψηφία, δὲν εἶνε ἀναγκαῖον νὰ προσκολλῶμεν πρότερον 2, 4, 6, 8, ... μηδενικὰ εἰς τὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν τοῦτο καὶ ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τότε λοιπὸν ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἔχει τὴν ἀπέναντι συντομίαν.

```
        54 | 7,34
        49
      ─────
   14 | 50
        42
      ─────
        80
         9
      ─────
  146 | 710
        584
      ─────
        1260
          16
      ─────
        1244
```

§ 114.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος 8,5762, τὸ ὁποῖον ἔχει δεκαδικὰ ψηφία ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, ἐξάγω τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 85762 καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ 10000· καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε 100, χωρίζω ἀπὸ τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ δύο ψηφία ὡς δεκαδικά, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα ἔχει τὸ δεδομένον κλάσμα. Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περιττὰ κατὰ τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία, ὡς π. χ. 7,89304· ἐνταῦθα ὁ παρονομαστὴς εἶνε 100000, καὶ τοῦ 100000 ἡ ῥίζα δὲν ἐξάγεται ἀκριβῶς. Ἀλλὰ τὴν δυσκολίαν ταύτην δύναμαι νὰ ἄρω, ἐὰν προσκολλήσω εἰς τὸ δεδομένον κλάσμα ἓν μηδενικόν, λοιπὸν

7,893040.

Τώρα ὁ ἀριθμητὴς εἶνε 1000000, καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ εἶνε 1000· ὅθεν δύναμαι ἤδη νὰ κάμω τὸν ὑπολογισμὸν ὡς ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου θέλω νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν, μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν πρέπει νὰ ἔχῃ πάντοτε ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία, εἶνε φανερόν, ὅτι μία τῶν γραμμῶν διαιρέσεως διέρχεται διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς. Ὅθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων· *Ἄγαγε πάντοτε τὴν πρώτην γραμμὴν διαιρέσεως διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, χώρισον ἔπειτα τὰ πρὸς δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ αὐτῆς ψηφία κατὰ σειρὰν εἰς ζεύγη, καὶ οὕτως ἐκτέλεσον τὸν ὑπολογισμὸν ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.* Ἐκ δὲ τῆς ῥίζης χώρισον δεκαδικὰ ψηφία τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα ἔχει τὸ δεδομένον κλάσμα.

Ἐὰν δὲ θέλω νὰ εὕρω δεκαδικὰ ψηφία πλειότερα τῶν ὅσα εὑρίσκω κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, δύναμαι νὰ ἐπεκτείνω τὸν ὑπολογισμὸν ὅσον θέλω, προσκολλῶν μηδενικὰ ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω § ἐπὶ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Ἐννοεῖται ὅμως ὅτι, ἵνα προσδιορίζω τὴν ὑποδιαστολὴν τῆς ῥίζης, πρέπει καὶ τὰ προσκολληθέντα μηδενικὰ νὰ συναριθμῶ ὡς δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

'Εὰν π. χ. πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ 4278,938 ἔχουσαν τρία δεκαδικὰ ψηφία, ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἀκόλουθος.

```
     42|78|93|80 | 65,413
     36          |
    -----        |
     12|67       |
       60        |
    -----        |
        78       |
        25       |
    ------       |
  130 | 539      |
        520      |
      -----      |
        193      |
         16      |
      -----      |
 1308 | 1778     |
        1308     |
      ------     |
         4700    |
            1    |
      ------     |
13082 | 46990    |
        39246    |
      -------    |
         77440   |
             9   |
      -------    |
         77431   |
```

§ 115.

'Εὰν δὲ πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν κοινοῦ κλάσματος, ἐξάγω αὐτὴν ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, ὡς ἐν § 112 ἐλέχθη. 'Εὰν ὅμως τοῦτο δὲν γίνηται εὐκόλως, ὡς π. χ. ὅταν πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ $^4/_{15}$, εἰς τὸ ὁποῖον τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ 4 ἐξάγεται ἡ ῥίζα, ὄχι ὅμως καὶ ἡ τοῦ παρονομαστοῦ 15, τότε ἁπλούστερον εἶνε νὰ τρέψω πρῶτον τὸ δεδομένον κλάσμα $^4/_{15}$ εἰς δεκαδικὸν (κατὰ § 63), καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσω τὸν ὑπολογισμόν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην § ἐλέχθη· λοιπὸν

```
15|4,0|0,266...
   30
  -----
   100
    90
  -----
   100
    90
  -----
    10
```

```
  0, | 26 | 6... | 0,516.
       25        |
     -----       |
  10 | 16        |
       10        |
     -----       |
        66       |
         1       |
     -----       |
 102 | 656       |
       612       |
     -----       |
       446       |
        36       |
```

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐξάγαγε τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

α) 729, β) 1849, γ) 3025, δ) 9409, ε) 6724, ζ) 841, η) 4761, θ) 32041, ι) 88209, κ) 180625, λ) 234256, μ) 440896, ν) 839056, ξ) 509796, ο) 893025, π) 4826809, ρ) 34012224, σ) 7529536, τ) 24157225, υ) 47045881, φ) 2752281, χ) 18907104, ψ) 191106976.

2) Ἐξάγαγε προσέτι τὰς ῥίζας τῶν ἑξῆς·

α) 43264, β) 498436, γ) 166464, δ) 28164249, ε) 16777216, ζ) 6889332004, η) 1607448649, θ) 280979505625.

3) Ἔκφρασον τὰς ῥίζας διὰ 4 δεκαδικῶν ψηφίων τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν· α) 7, β) 12, γ) 40, δ) 352, ε) 6156.

4) Ὡσαύτως τῶν ἑξῆς τὰς ῥίζας διὰ 4 δεκαδικῶν ψηφίων·

α) 0,49, β) 8,1, γ) 31,36, δ) 0,9, ε) 5,672, ζ) 0,00423, η) 37,8924, θ) 235,672.

5) Ὡσαύτως τὰς ῥίζας τῶν ἑξῆς κλασμάτων διὰ 3 δεκαδικῶν ψηφίων· α) $^1/_2$, β) $^2/_3$, γ) $^7/_8$, δ) $^5/_{11}$, ε) $7\,^3/_{16}$, ζ) $5\,^7/_{12}$.

6) Ζήτησον εἰς τὰς ἑξῆς συνεχεῖς ἀναλογίας (ἴδε § 78) τοὺς μέσους ἀναλόγους·

α) $12 : \chi = \chi : 16$, β) $15 : \chi = \chi : 20$, γ) $1 : \chi = \chi : 1{,}5$, δ) $1{,}5 : \chi = \chi : 2$, ε) $18 : \chi = \chi : 8$.

ΑΙ ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ

εἰς τὰ πρὸς ἄσκησιν προβλήματα.

ΚΕΦΑΛ. Α'.

Πρόβλ. *'Απόκρ.*

6) 248
7) 1743,1508,1654,1775, 3251, 3429,6680.
9) καθέτως 3302+4411+ 3167+3939+2990+ 4339+4564+3597= 30309· ὁριζοντίως 4506+ 4359+6350+5202+ 4686+5206=30309.
11) α) 103,990,1806,3117, 7104. β) 887,1703,3014, 7001. γ) 816,2127,6114. δ) 1311, 5298. ε) 3987.
12) α) 6, β) 167.
13) α) 553, β) 819, γ) 437, δ) 420, ε) 381, ζ) 52.
14) 212 π. Χ.
15) α) 826 δρ. β) 878 στ. γ) 1985 ὀκ. δ) 4053 πήχ. ε) 3219 τάλ. ζ) 29073 ςατ. η) 4067 λίρ. θ) 230770 πόδ.
16) ἐπὶ 2 α) 774, β) 592, γ) 1170, δ) 602, ε) 1178, ζ) 1978, η) 594 κ. ἑ.
17) α) 117, β) 549, γ) 315.
18) α) 35916, 44676, 53436, 62196, 70956,

Πρόβλ. *'Απόκρ.*

79716, β) 16408, 17164, 16252, γ) 1706664.
19) 2613.
20) α) 1598, β) 25568.
21) α) 405, β) 1620.
22) α) ἐπὶ 56 α) 210448, β) 166768, γ) 514416, β) ἐπὶ 63 α) 236754, β) 187614. γ) 578718 κ. ἑ.
23) α) 100—1 ἐπὶ 8 εἶνε 800—8=792 κ. ἑ.
24) α) 6222825. β) 226632. γ) 191640. δ) 3712126. ε) 108556. ζ) 369675. η) 47068746. θ) 2507508. ι) 5591664, κ) 720750 λ) 3389256. μ) 3318712 ν) 50742146. ξ) 47543 544. ο) 3576801916. π) 45749679591. ρ) 15710 188221. σ) 4165594713.
25) α) 8 τάλ. β) 8κις. γ) 8κις.
26) 9 δρ.
27) 52 ἑβδ. καὶ 1 ἡμ.
28) α) διὰ 3 α) 52416. β) 56448. γ) 60480. δ) 68544. ε) 360528. ζ) 400512. η) 149184.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

θ) 173376. ι) 294336. κ) 342720 κ. έ.

29) 165 δρ.

30) α) διὰ 37 α) 2085973. β) 4171946. γ) 6257919. δ) 14601811. β) διὰ 43 α) 1794907. β) 3589814. γ) 5384721. δ) 12564349. γ) διὰ 139 α) 555259. β) 1110518. γ) 1665777. δ) 3886813. δ) διὰ 349 α) 221149. β) 442298. γ) 663447. δ) 1548043.

31) ὑπὲρ τὰ 19025 ἔτη.

34) α) 245 β) 479. γ) 506. δ) 1230.

38) 313 δρ. 70 λεπ.

39) 2393 δρ.

40) 4 δρ.

41) 311649338.

43) εἶνε δὶς μικρότερον.

46) 210.

47) εἶνε α) 25. 4. 9=100. 9=900. β) 125. 8. 237 =1000. 237=237000.

49) α) 13767. β) 26475. γ) 39183.

50) α) 4500.5100. β) 108000. 122400. γ) 39420000. 44676000.

ΚΕΦΑΛ. Β′.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

1) $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{16}$. εἶνε διπλάσιον.

2) $^{2}/_{12}$, $^{3}/_{12}$, $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{12}$.

3) α) $^{1}/_{100}$, β) $^{1}/_{20}$, γ) $^{1}/_{4}$, δ) $^{37}/_{100}$, ε) $^{1}/_{2}$, ς) $^{5}/_{8}$, ζ) $^{353}/_{400}$.

4) 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2 λεπ.

5) 75, 60, 70, 65, 94, 73 λεπ.

6) $^{3}/_{5}$ μήλ.

7) α) $^{5}/_{7}$ πήχ. β) $^{12}/_{9}$ δρ.

8) 352, 864, 30072.

9) 1292, 1666, 17204.

10) α) $^{343}/_{4}$. β) $^{221}/_{8}$. γ) $^{1124}/_{12}$. δ) $^{3189}/_{10}$. ε) $^{711}/_{16}$. ς) $^{3595}/_{11}$. ζ) $^{7041}/_{17}$. ή) $^{2391}/_{84}$. θ) $^{11164}/_{15}$. ι) $^{1043}/_{128}$. ιά) $^{253}/_{20}$. ιβ′) $^{3466}/_{77}$. ιγ′) $^{65704}/_{73}$. ιδ′) $^{19543}/_{24}$. ιέ) $^{3381}/_{67}$. ις′) $^{17149}/_{360}$.

11) α) 432. β′) 586. γ′) 82. δ′) 86. έ) 42, ς′) 46. ζ′) 44. ή) 83. θ′) 21 $^{26}/_{342}$. ί) 28.

12) ά) 18 $^{1}/_{4}$. β′) 16 $^{1}/_{6}$. γ′) 43 $^{3}/_{8}$. δ′) 38 $^{6}/_{24}$. έ) 142 $^{7}/_{36}$. ς′) 170 $^{8}/_{43}$. ζ′) 94 $^{5}/_{54}$. ή) 92 $^{37}/_{80}$. θ′) 99

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

21/125. ι) 230 215/431. ιά) 4 41/777. ιβ) 149 2411/3586.

13) ά) 33/64. β') 2/5. γ') 8/9. δ') 9/25. ε) 5/32. ς') 5/12. ζ') 5/8. ή) 16/17. θ') 1/4. ι) 7/13. ιά) 3/10. ιβ') 18/31. ιγ') 5/8. ιδ') 2/3. ιέ) 5/6. ις') 2/3. ιζ') 1/4. ιή) 4/5. ιθ') 3/4.

14) α) 7/8. β') 5/21. γ') 4/7. δ') 11/13. ε) 13/21. ς') 6/7. ζ') 21/31. ή) 25/631.

15) 12, 8, 6, 4, 3, 2, 15, 14.

16) 72, 54, 24, 16, 9, 3.

17) 99, 88, 66, 36, 24, 6.

18) 90, 112, 132, 45, 78, 116.

19) 180, 96, 84, 88, 102, 212.

20) 315, 150, 264, 285, 176, 245.

21) 729, 702, 1200, 1116, 189.

22) ά) 1 2/3. β') 1 14/15. γ') 2 1/3. δ') 2 23/24. έ) 1 13/20. ς') 2 5/8. ζ) 1 7/18. ή) 2 5/9. θ) 29/48. ι') 2 19/72. ιά) 3 11/20. ιβ') 2 313/504. ιγ') 2 21/40. ιδ') 3 13/60.

23) ά) 14 4/9. β') 9 11/12. γ') 25 9/10. δ) 13 7/12. έ) 367 13/24. ς') 10417 5/24.

24) ά) 144. β') 900. γ') 240. δ') 360. ε) 6480. ς') 1200. ζ') 10800. ή) 9900.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

25) ά) 2 73/240. β) 1 14/15 γ') 5 63709/415800.

26) ά) 1/12. β) 1/12. γ') 11/36. δ') 37/72. έ) 41/99. ς') 7/60. ζ') 43/156. ή) 13/88. θ') 29/48. ι') 29/72.

27) ά) 8 1/6. β') 29 1/8 γ') 54 1/24. δ') 13 5/8. έ) 50 11/18. ς') 16 31/36. ζ') 1 23/88. ή) 55 3/80. θ') 622 54/77. ί) 66 31/60.

28) ά) 8 4/13. β') 3 19/24. γ) 13 1/8. δ) 7 1/33. ε) 6 15/128. ς) 18 2/3. ζ) 14 7/12. η) 30 2/5. θ) 84 3/20. ι) 25 4/17. ια) 64 80/81. ιβ) 196. ιγ) 1498 8/25. ιδ) 345 3/16. ιε) 4 29/64.

29) α) 3 2/5. β) 7 1/16. γ) 6 7/8. δ) 10 5/6. ε) 12 1/3. ς) 19 1/3. ζ) 9 1/8. η) 14 3/4. θ) 7 3/4.

30) α) 149 1/3. β) 487 1/2. γ) 126 3/5. δ) 101 1/4. ε) 328 1/6. ς) 127 3/11. ζ) 1584 3/8. η) 1617. θ) 688 1/3. ι) 7891 2/5. ια) 2291. ιβ) 7202 1/4. ιγ) 5041 3/5. ιδ) 356 122/125. ιε) 4677 45/182. ις) 8778 133/528.

Πρόβλ.	Ἀπόκρ.

ιζ) 1920 30/59. ιη) 927 72/125. ιθ) 427 8/663.
31) 53 1/4. 142. 390 1/2. 621 1/4.
32) α) 37 1/3. β) 10 1/5. γ) 42 3/7. δ) 66 3/8. ε) 29 3/5. ς) 7 7/12. ζ) 46. η) 64 2/3. θ) 50 2/5. ι) 174.
33) α) 1/144. β) 1/168. γ) 1/192. δ) 1/846. ε) 1/435. ς) 1/10725.
34) α) 23/192. β) 16/255. γ) 4/75. δ) 13/177. ε) 19/476. ς) 7/480. ζ) 27/1372. η) 5/1022. θ) 2/759. ι) 115/4368.
35) α) 22/63. β) 61/96. γ) 137/207. δ) 3/48. ε) 83/144. ς) 34/261. ζ) 159/352. η) 271/288. θ) 21/23. ι) 20/23. ια) 19/23. ιβ) 3 129/133. ιγ) 193/300. ιδ) 103/320. ιε) 56/69.
36) 504 5/42. 432 5/49. 378 5/56.
37) 143 17/18. 107 23/24. 86 11/30.
38) 1214 109/128. 883 93/176. 809 173/192.
39) α) 121 4/9. β) 57 5/18. γ) 6 35/78. δ) 30 89/112. ε) 137 173/243. ς) 8 237/275. ζ) 170 224/399. η) 29 1/48. θ) 69 989/1120. ι) 58 527/720.
40) α) 45 1/18. β) 36 23/63. γ) 757 22/135.
41) α) 9/68. β) 7/50. γ) 45/52. δ) 28/165. ε) 4/5. ς) 221/288. ζ) 10/21. η) 315/812. θ) 159/1000. ι) 153/688.
42) α) 3 98/99. β) 16 19/20. γ) 29 13/18. δ) 19 3/4. ε) 3 149/180. ζ) 1 61/105. η) 296 2/7. θ) 38 8/9. ι) 2 227/490. κ) 2 2/15.
43) α) 39. β) 13 5/12. γ) 146 13/48. δ) 29 13/15. ε) 162 1/2. ζ) 433 2/5. η) 1536 2/5. θ) 2249 1/24. ι) 10 17/20. κ) 242 2/7.
44) α) 35 1/5. β) 15 3/7. γ) 45 5/6. δ) 130 1/2. ε) 14 2/9.
45) α) 20/37. β) 5 7/22. γ) 6 12/83. δ) 28/53. ε) 4 1/12.
46) α) 2 2/9. β) 1 47/133. γ) 1 3/5. δ) 32/45. ε) 63/80.
47) α) 14 2/3. β) 21/88. γ) 76/125. δ) 1 53/64. ε) 53 103/235.
48) 55 5/8. 311 1/2. 504 1/3. 744 4/11.
49) 25/48. 5/12. 75/136.
50) 25 3/8. 19 1/3. 24 20/33. 225 5/9. 737 4/19.
51) 34 2/3, 424, 1233 1/3, 60 8/9.
52) 5 1/15. 12 12/13. 32.
53) 1 1/9, 13/14, 1 7/65.
54) 319 11/27, 113 41/48,

Πρόβλ. *᾿Απόκρ.*

$16\ ^{27}/_{28}$.

55) $1998\ ^{13}/_{24}$ δρ.

56) 200, 300, 160, 250, 280, 260, 48, 170 δρ.

57) $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{3}$, $^{5}/_{12}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$.

58) $^{1}/_{5}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{5}$, $^{4}/_{5}$, $^{5}/_{5}$.

59) $^{3}/_{2}$, $^{5}/_{3}$, $^{43}/_{8}$, $^{89}/_{12}$, $^{103970}/_{349}$.

60) $1\ ^{1}/_{4}$, $5\ ^{4}/_{5}$, $4\ ^{3}/_{8}$, $6^{1}/_{6}$.

61) α) διὰ 8 καὶ 9. β) διὰ 9 καὶ 125. γ) διὰ 9. δ) διὰ 8 καὶ 1000.

62) α) $^{4}/_{5}$. β) $^{3}/_{5}$. γ) $^{1}/_{8}$. δ) $^{703}/_{1606}$. ε) $^{13}/_{17}$.

63) $^{30}/_{60}$, $^{45}/_{60}$, $^{50}/_{60}$, $^{35}/_{60}$, $^{44}/_{60}$, $^{51}/_{60}$, $^{42}/_{60}$, $^{36}/_{60}$.

64) $51\ ^{2}/_{3}$ πόδ.

65) τὸ $^{1}/_{6}$ τῶν μαθητῶν.

66) α) $215\ ^{3}/_{4}$ λίτρ. β) $269\ ^{11}/_{16}$ δρ.

67) α) $39\ ^{3}/_{8}$ μίλ. β) $13\ ^{7}/_{15}$ ὥρ.

68) $3\ ^{1}/_{4}$ μιλ.

69) α) $^{17}/_{18} = 1 - {}^{1}/_{18}$. καὶ $1 - {}^{1}/_{18}$ ἐπὶ 15 εἶνε $15 - {}^{15}/_{18} = 14\ ^{3}/_{18} = 14\ ^{1}/_{6}$. β) $^{9}/_{16} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{16}$, τοῦτο ἐπὶ 14 εἶνε $7\ ^{14}/_{16} = 7\ ^{7}/_{8}$. γ) $9\ ^{13}/_{15} = 10 - {}^{2}/_{15}$, τοῦτο ἐπὶ 12 εἶνε $120 - {}^{24}/_{15} = 118\ ^{6}/_{15} = 118\ ^{2}/_{5}$. δ) $499\ ^{19}/_{20} = 500 - {}^{1}/_{20}$, τοῦτο ἐπὶ 36 εἶνε $18000 - {}^{36}/_{20} = 17998\ ^{1}/_{5}$.

70) α) ᾿Επειδὴ $^{63}/_{64} \times 64 = 63$, $^{63}/_{64} \times 65 = 63\ ^{63}/_{64}$. β) Ὅθεν $^{27}/_{29} \times 28 = 27 - {}^{27}/_{29} = 26^{2}/_{29}$ καὶ γ) $^{23}/_{51} \times 53 = 23\ ^{46}/_{51}$.

71) α) 36 όκ. $\times\ ^{1}/_{2}$ δρ. = 18 δρ. β) 16 πήχ. ἐπὶ $^{1}/_{2}$ δρ. εἶνε 8 δρ. καὶ ἐπὶ 3 λεπ. εἶνε 48 λεπ., τὸ ὅλον 8 δρ. 48 λεπ. γ) 47 όκ. πρὸς $^{1}/_{2}$ δρ. — 1 λεπ. εἶνε $23\ ^{1}/_{2}$ δρ. — 47 λεπτ. ἤτοι 23 δρ. 3 λεπ. δ) 37 πήχ. ἐπὶ $^{1}/_{2}$ δρ. εἶνε $18^{1}/_{2}$ δρ. καὶ ἐπὶ $^{1}/_{4}$ εἶνε $9\ ^{1}/_{4}$ δρ., τὸ ὅλον $27\ ^{3}/_{4}$ δρ.

72) α) 3790. β) 1200. γ) 9000. δ) 26100. ε) 1600. ϛ) 2400. ζ) 45000.

73) Εἰς μίαν ὥραν χύνει ὁ μὲν ά κρουνὸς $^{1}/_{7}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ β' $^{1}/_{6}$ καὶ ὁ γ' $^{1}/_{5}$, τὸ ὅλον $^{107}/_{210}$.

74) $90\ ^{1672}/_{7305}$. $65\ ^{21341}/_{21915}$. $35^{19669}/_{21915}$. $2\ ^{6652}/_{7305}$.

75) 9765 βήμ.

ΚΕΦΑΛ. Γ'.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

1) 5367,8338 λεπ.
2) 2960,7475,31120 δρ.
3) 277855. 499730. 15188800. 6072347 δρ.
4) 16195, 20159, 9371 πέν.
5) 31536000 δευτ.
6) 64, 1176. 1394 δίς.
7) 44 λίρ. 13 σέλ., 353 λίρ. 4 σελ., 492 λ. 11 σελ., 868 λίρ. 4 σελ.
8) 8 στ. 40 ὀκ., 19 στ. 31 ὀκ., 316 στ. 36 ὀκ.
9) 232 λίρ. 9 σελ. 8 πέν., 806 λίρ. 3 σέλ. 5 πέν., 31372 λίρ. 7 σελ.
10) $^3/_{17}$, $^{12}/_{215}$, $^{17}/_{400}$ τάλ.
11) $^{71}/_{80}$, $^{97}/_{210}$, $^{223}/_{270}$ λίρ.
12) $^{63}/_{320}$, $^{2117}/_{3200}$, $^{511}/_{600}$ ὀκ.
13) $^9/_{16}$, $^{15}/_{16}$, $^7/_{16}$. $^{23}/_{30}$ λίρ.
14) α) 26 ὀκ. 160 δρ., 39 ὀκ. 44 $^1/_9$ δρ., 1 ς. 18 ὀκ. 133 $^1/_3$ δρ. β) 3δρ. 12 $^1/_2$ λεπ., 2 δρ. 66 $^2/_3$ λεπ., 3 ταλ. 1 δρ. 42 $^6/_7$ λεπ. γ) 17 σελ. 1 πέν. 3φαρ. σχεδόν, 16 σελ. 5 πεν. 2 $^{10}/_{17}$ φαρ., 3 λίρ. 2 σελ. 2 πέν. 2 $^2/_3$ φαρ. δ) 6 μῆν. 20 ἡμ., 2 ἔτ. 7 μῆν. 6 ἡμ., 3 ἔτ. 6 μῆν. 25 ἡμ. 17 $^1/_7$ ὥρ. ε) 1 ἡμ. 17 ὥρ. 8 $^4/_7$ λεπ., 10 ὥρ. 40 λεπ., 2ἡμ. 14 ὥρ. 24 λεπ.
15) 63 ἔτ. 5 μῆν. 27 ἡμ.
16) 896 λίρ. 16 σελ. 6 $^{71}/_{120}$ πέν.
17) 269 στ. 11 ὀκ. 235 $^{53}/_{60}$ δρ.
18) 59 ὑάρ. 3δακ. 10 $^5/_{12}$ γρ.
19) τῇ 9 Μαΐου 1805.
20) α) 4 πήχ. 4 ῥούπ. β) 8 ἔτ. 7 μῆν. 20 ἡμ. γ) 4ς. 15 ὀκ. 57 δρ. δ) 20 λίρ. 17 σελ. 6 $^3/_4$ πέν. ε) 34 στ. 16 $^1/_3$ ὀκ. ς) 4 ὑάρ. 1 ποδ. 9 δακ. 2 $^{23}/_{24}$ γραμ.

21) θάνατος τῷ 1821 Μαΐ.5	=	1821 ἔτη	4 μῆν.		5 ἡμ.		
γέννησις τῷ 1769 Αὐγ.15	=	1769 »	7 »		15 »		
διαφορὰ		51 »	8 »		20 »		

22) τῇ 19 Φεβρ. 1473.
23) 159 στ. 4 ὀκ. 134 δρ., 282 στ. 37 ὀκ. 16 δρ., 1308 στ. 6 ὀκ. 124 δρ.,

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

1909 ϛατ. 8 ὀκ. 8 δρ.
24) 35 πήχ. 6 $^1/_2$ ῥούπ., 47 πήχ. 6 ῥούπ., 220 πήχ. 6 $^3/_4$ ῥούπ.
25) 25 δρ. 76 λεπ., 158 δρ. 24 λεπ., 191 δρ. 36 λεπ., 1343 δρ. 20 λεπ.
26) 2309 λίρ. 4 σελ. 1 πέν. 1 φαρ., 8247 λίρ. 3 σελ. 2 πέν. 3 φαρ., 86760 λίρ. 2 σελ. 9 πεν 1 φαρ.
27) 69 λίρ. 14 $^2/_3$ σελ., 156 λίρ. 18 σελ., 6363 λίρ. 3 $^1/_3$ σελ.
28) α) 66 ἡμ. 23 ὥρ. 52 $^1/_2$ λεπ. β) 298 στ. 22 ὀκ. 380 $^2/_3$ δρ.
29) α) 57 δρ. β) 1 ὀκ. 264 δρ. γ) 379 $^{22}/_{37}$ δρ. δ) 7 ὀκ. 163 δρ.
30) α) 10 λίρ. 7 σελ. 1 $^3/_4$ φαρ. β) 6 λίρ. 14 σελ. $^1/_2$ πέν. σχ. γ) 5 λίρ. 2 σελ. 1 πέν σχ.
31) α) 4 ὀκ. 278 $^{10}/_{33}$ δρ. β) 5 στ. 43 ὀκ. 385 $^1/_3$ δρ. γ) 47 στ. 35 ὀκ 139 δρ. σχεδόν.
32) α) 4 λίρ. 15 σελ. 7 $^7/_{24}$ πέν. β) 18 πήχ. $^{67}/_{162}$ ῥούπ. γ) 2 ἡμ. 20 ὥρ. 36 λεπ. σχ.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

33) 9 σελ. 6 πέν., 13 σελ. 2 $^1/_3$ πέν., 12 σελ. 10 $^3/_8$ πέν.
34) 6 δρ. 89 $^1/_2$ λεπ., 22 δρ. 6 $^2/_5$ λεπ., 15 δρ. 51 $^3/_8$ λεπ., 103 δρ. 42 $^1/_2$ λεπ.
35) 171 λίρ. 18 σελ. 1 $^1/_3$ πέν., 326 λίρ. 14 σελ. 9 πέν., 281 λίρ. 11 σελ. 4 $^2/_3$ πέν.
36) 3 λίρ. 5 σελ. $^9/_{32}$ πέν., 2 λίρ. 10 σελ. 10 πέν. σχ., 1 λίρ. 18 σελ 11 πέν. σχ.
37) 247 λίρ. 9 σελ. 2 πέν. 3 $^{241}/_{432}$ φαρ.
38) 120 δρ. 56 λεπ. σχ.
39) 37 δρ. 41 λεπ. σχ.
40) 2 τάλ. 2 δρ. 30 λεπ.
41) 3 λίρ. 18 σελ. 6 πέν. 2 φαρ.
42) 2 λίρ. 18 σελ. 2 $^{38}/_{107}$ πέν.
43) 418 ὑάρ. 6 δακ. 2 $^{73}/_{80}$ γραμ. Ἐπολλαπλασίασα τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον κατὰ §57.
44) 22 στατ. 2 ὀκ 163 δρ.
45) $^{109}/_{450}$ ἡμέρας.
46) 2 ἡμ. 20 ὥρ. 34 λεπ. 17 $^1/_7$ δευτ.
47) 25 ἔτ. 10 μῆν. 8 ἡμ.
48) 440 ϛατ. 31 ὀκ. 315 δρ.
49) α) 15 μίλ. 1122 ὑάρ. 1 ποδ.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*
7 δακτ., β) 55 μίλ. 338 ὑάρ. 1 π., γ) 420 μίλ. 670 ὑάρ. 11 δάκτ.
50) α) 206 ἡμ. 17 ὥρ. 8 λεπ. 21 δεύτ. β) 354 ἡμ. 8 ὥρ. 48 λεπ. 36 δευτ.

Ἀπόκρ.
γ) 561 ἡμ. 1 ὥρ. 56 λεπ. 57 δεύτ. δ) 1387 ἡμ. 22 ὥρ. 30 λεπ. 21 δευτ. ε) 6939 ἡμ. 16 ὥρ. 31 λεπ. 45 δευτ.

51) 5 ἔτη τῆς Γῆς	= 1826 ἡμ.		5^0	4′	
8 ἔτη τῆς Ἀφροδ.	=1797	»	13^0	31′	20″
διαφορὰ	28	»	15	32	40

52) 19 ἔτη ἔχουν 6939 ἡμ. 14^0 27′ 12″, τοῦτο διὰ 235 διαιρούμενον δίδει 29 ἡμ. 12^0 43′ 24″.
53) α) 426 λίρ. 14 σελ. β) 373 λίρ. 7 σελ. 3 πέν. γ) 800 λίρ. 1 σελ. 3 πέν. δ) 1120 λίρ. 1 σελ. 9 πέν. ε) 5600 λίρ. 8 σελ. 9 πέν.
54) α) 26829 στ. 7 όκ. β) 19478 στ. 31 όκ.
55) 3 ὥρ. 13 λεπ.
57) α) 6 $^1/_2$ σελ. β) 13 $^2/_3$ σελ. γ) 5 $^1/_2$ ῥούπ. δ) 67 $^1/_4$ λεπ. ε) 25 $^3/_4$ όκ.
58) α) 3 $^7/_8$ σελ. β) 19 σελ. γ) 14 σελ. δ) 16 $^1/_4$ όκ. ε) 17 $^1/_3$ όκ. ζ) 71 λεπ. η) 15 $^1/_2$ λεπ. θ) 7 $^3/_4$ λεπ.
59) α) 13 σελ. 5 πέν. 2 φαρ. σχ. β) 11 σελ. 11 πέν. 2 φαρ. σχ. γ) 9 σελ.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*
3 πέν. 2 φαρ. σχ.
60) 3 στ.—3 όκ. διὰ 3= 1 στ.—1 όκ.=43 όκ.
61) α) 98 λεπ. β) 42 όκ, γ) 2 λίρ. 19 σελ. δ) 7 στατ. 43 όκ.
62) ὑπὲρ τὰς 688 φοράς.
63) εἰς 128 μέρη.
64) 7 $^{13}/_{16}$ δράμ.

ΚΕΦΑΛ. Δ′.

1) Τὰ 27,549. 275,49. 2754,9.
2) Τὰ 587,9462. 58,79462. 5,879462.
3) α) 0,70 καὶ 0,53, β) 0,7300 καὶ 0,7564, γ) 3,5 καὶ 7,0, δ) 5,98600. 3,20000 καὶ 9,37543, ε) 25,70000. 8,56400 καὶ 0,00001 καὶ 1,00000.

Πρόβλ.	*Ἀπόκρ.*	*Πρόβλ.*	*Ἀπόκρ.*
4)	Ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ ταλ.	11)	α) 44,4304. β) 338,2728. γ) 32,48381. δ) 0,3034. ε) 2,43226. ζ) 0,00035. η) 0,0038857. θ) 5280,825. ι) 4112,2. κ) 148. λ) 0,0001. μ) 0,0756665.
5)	α) Λαμβάνω κλάσμα μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κατ' ὀλιγώτερον μὲν ἑνὸς χιλιοστοῦ πλειότερον δὲ τοῦ ἡμίσεος. β) Λαμβάνω κλάσμα μεγαλείτερον τοῦ ἀληθοῦς κατ' ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος χιλιοστοῦ.	12)	α) 3. β) 41. γ) 103,20164 δ) 171,77. ε) 64,137. ζ) 976,25. η) 1400. θ) 32. ι) 0,0216875. κ) 0,144. λ) 8,67818. μ) 1,8013. ν) 0,381. ξ) 0,00135. ο) 1620,69 σχ. π) 102,5. ρ) 0,324. σ) 2,631.
6)	α) 0,75, β) 0,625, γ) 0,075, δ) 0,4375, ε) 0,06, ζ) 0,0064, η) 0,609375, θ) 0,00125.	13)	α) 92,662. β) 0,93. γ) 15 $^1/_2$ ἑκατοστά.
7)	α) 0,66.. β) 0,5833.. γ) 0,272.. δ) 0,20833.. ε) 0,0540.. ζ) 0,7142857. η) 0,15625. θ) 0,828.. ι) 0,0234375. κ) 0,535 7142857.. λ) 0,6166.. μ) 0,004914004...	14)	6486,34 φρ.
		15)	235 σχεδόν.
		16)	1 γαλ. μέτρον.
		17)	1 γαλ. μέτρον.
		18)	15,7 φοράς.
8)	α) 736,998. β) 1660,74 γ) 251,6094. δ) 852,00179. ε) 769,892.	19)	ἡμέρας 3,1096.
		20)	α) 706,62. β) 1181,61. γ) 3313,84. δ) 3711,5. ε) 5812,86.
9)	α) 11,4. β) 5,36. γ) 6,839. δ) 2,4526. ε) 28,521. ζ) 21,57565. η) 10,27, θ) 7,7577. ι) 313,46218. κ) 67,28. λ) 95,5791. μ) 0,064.	21	α) 62,33. β) 78,69 γ) 21.
		22)	α) 224,856. β) 379,992. γ) 209,25.
		23)	α) 172,6875. β) 1777,77.
10)	α) 0,00126422. β) 0,00126449. γ) 0,00000027.	24)	61,7537.
		25)	α) 1147,60. β) 1111,95 γ) 989,23.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

26) Τὸ βάθος 727,51· ἡ διάμ. 0,3059. α) 312500. β) 217 ὀκ.

ΚΕΦΑΛ. Ε΄.

1) α) 2. β) $^3/_2$. γ) $^4/_3$. δ) 2. ε) $^5/_4$. ς) $^2/_3$. ζ) $^3/_2$. η) $^2/_3$. θ) $^4/_3$. ι) $^3/_4$. ια) $^{189}/_{160}$. ιβ) $^{160}/_{189}$.

2) α) 30. β) $^{15}/_4$. γ) 22 $^1/_2$. α) $^6/_5$. β) $^3/_{20}$. γ) $^9/_{10}$. α) 21. β) $^{21}/_8$. γ) $^{63}/_4$.

3) α) 3. β) $^1/_{12}$. γ) $^2/_5$. α) 144. β) 4. γ) $^{96}/_5$. α) $^{32}/_5$. β) $^8/_{45}$. γ) $^{64}/_{75}$.

4) α) 132. β) 31 $^1/_2$.

5) α) Διαιροῦντες τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου. β) Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἑπόμενον ἐπὶ τὸν δείκτην. γ) Διαιροῦντες τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ δείκτου.

6) α) 1 : 2. β) 1 : 2. γ) 3 : 4. δ) 5 : 4. ε) 4 : 5. ς) 2 : 3. ζ) 3 : 5. η) 2 : 3. θ) 6 : 7. ι) 2 : 3. ια) 3 : 4. ιβ) 4 : 5. ιγ) 3 : 4. ιδ) 5 : 6. ιε) 4 : 5. ις) 4 : 5. ιζ) 2 : 3. ιη) 3 : 4. ιθ) 2 : 3. κ) 17 : 24.

7) α) 1 : 2. β) 1 : 5. γ) 1 : 12. δ) 3 : 20. ε) 15 : 2. ς) 4 : 3. ζ) 16 : 9. η) 35 : 24. θ) 13 : 8. ι) 4 : 3. ια) 1 : 3. ιβ) 25 : 36. ιγ) 27 : 20. ιδ) 15 : 8. ιε) 6 : 17. ις) 15 : 1. ιζ) 1 : 5. ιη) 2 : 3. ιθ) 136 : 275. κ) 7 : 9.

8) Ὁ α΄ καὶ ὁ ς΄, ἔχοντες δείκτην $^2/_3$, ὁ β΄ καὶ ὁ δ΄, ἔχοντες δείκτην $^4/_5$, ὁ γ΄ καὶ ὁ ζ΄, ἔχοντες δείκτην $^6/_5$.

9) Ἡ ὀκᾶ τοῦ μὲν ὀρυζίου τιμᾶται $^5/_6$ δρ. τοῦ δὲ σίτου $^1/_2$ δρ. Ὅθεν αἱ δύο τιμαὶ εἶνε ὡς $^5/_6$: $^1/_2$ ἢ ὡς 10 : 6=5 : 3.

10) ὡς 5 : 11.

11) ὡς 3 : 5.

12) ὡς 9 : 10.

13) ὡς 25 : 32.

14) ὡς 2 : 1.

15) ὡς 49 : 54.

16) α) 3 : 2. β) 3 : 4. γ) 1 : 2.

17) ὡς 19 : 15.

18) ὡς 18 : 5.

19) α : β=5 : 1, α : γ =25 : 3, β : γ=5 : 3.

20) α : β=4 : 3, α : γ= 5 : 3, α : δ = 4 : 1, β : γ=5 : 4, β : δ=3 : 1, γ : δ=12 : 5.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

21) Ἡ β' καὶ ἡ δ'· αἱ δὲ δύο ἄλλαι γίνονται ὀρθαί, ἐὰν ἀντιστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ ἑνὸς λόγου.

23) α) $11\frac{2}{3}$. β) $1\frac{5}{9}$. γ) $21\frac{7}{8}$. δ) $4\frac{1}{5}$. ε) $5\frac{1}{4}$. ς) $3\frac{1}{2}$.

24) α) 57. β) $10\frac{5}{6}$. γ) 95. δ) 92. ε) $7\frac{1}{2}$. ς) $1\frac{1}{2}$. ζ) $\frac{6}{7}$.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

25 α) $10\frac{1}{2}$. β) $11\frac{2}{3}$. γ) $12\frac{1}{3}$. δ) $3\frac{59}{80}$. ε) $8\frac{20}{41}$. ς) $5\frac{1}{3}$. ζ) 0,405.

26) α) $10 : 8 = 15 : 12$ β) $16 : 8 = 18 : 9$. γ) $7 : 35 = 5 : 25$. δ) $7\frac{1}{2} : 4 = 5 : 2\frac{2}{3}$. ε) $13\frac{1}{3} : 7\frac{1}{2} = 4\frac{4}{5} : 2\frac{7}{10}$. ς) $8\frac{4}{5} : 7\frac{1}{5} = 3\frac{1}{3} : 2\frac{8}{11}$.

ΚΕΦΑΛ. ΣΤ'.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

1) $\frac{13}{17}$ δρ.
2) $3\frac{3}{5}$ πήχ.
3) $30\frac{2}{27}$ δρ.
4) $10\frac{4}{23}$ πήχ.
5) $26\frac{4}{9}$ δρ.
6) $20\frac{14}{29}$ δρ.
7) $17\frac{1}{12}$ σελ.
8) $20\frac{2}{9}$ τάλ.
9) $26\frac{2}{3}$ μίλ.
10) $40\frac{20}{77}$ τ. π.
11) α) $232\frac{3}{11}$. πρ. π. β) $102\frac{1}{7}$ β. πήχ.
12) 1690 τεκτ.
13) $119\frac{3}{5}$ ς.
14) $8\frac{4}{45}$ λίρ.
15) δρ. 482,96.
16) 175 λίρ.
17) $116\frac{4}{5}$ ἡμ.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

18) φιορ. 228,57.
19) α) 3840 σελ. β) $73\frac{1}{2}$ δίς.
20) ςρ. π. 67,682.
21) $4\frac{1}{5}$ ταλ.
22) $7\frac{7}{12}$ δρ.
23) $29\frac{1}{3}$ ταλ
24) $15\frac{21}{25}$ ς.
25) $\frac{5}{22}$ διστ.
26) $\frac{77}{90}$ διστ.
27) $74\frac{2}{3}$ δρ.
28) δρ. 5,1.
29) $12\frac{4}{9}$ δίστ.
30) 12 δίστ.
31) $4\frac{4}{5}$ δίς.
32) $9\frac{11}{16}$ δρ.
33) $3\frac{1}{3}$ δρ.
34) $27\frac{1}{7}$ ὀκ.
35) $\frac{156}{205}$ δίστ.
36) $5\frac{19}{60}$ δίστ.
37) $2\frac{7}{9}$ δίς.
38) $32\frac{21}{80}$ δίς.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

39) $19\frac{3}{7}$ λίρ.
40) 26 σλ. $7\frac{1}{2}$ πν.
41) 14 στατ. $21\frac{1}{8}$ ὀκ.
42) $8\frac{43}{51}$ δίστ.
43) 15 ὥρ.
44) 42 δρ.
45) 10 %.
46) $53\frac{1}{4}$.
47) $7\frac{7}{20}$ πήχ.
48) $514\frac{1}{4}$ δρ.
49) 6 λίρ. $14\frac{7}{12}$ σελ.
50) 5 λίρ. $13\frac{7}{16}$. σελ.
51) $34\frac{9}{16}$ λίτ.
52) $10\frac{1}{4}$ δίστ.
53) $4\frac{37}{52}$ δίστ.
54) δρ. 1,61 σχ.
55) δρ. 49,82.
56) α) $35\frac{5}{7}$. β) 48,66.

Πρόβλ.	*Ἀπόκρ.*	*Πρόβλ.*	*Ἀπόκρ.*	*Πρόβλ.*	*Ἀπόκρ.*

57) α) 200 ὀκ. β) 87,04.
58) α) $2\,{}^{4}/_{33}$ αὐς. β) $471\,{}^{3}/_{7}$ ἀγγ.
59) α) $30\,{}^{12}/_{29}$ Π. β) $18\,{}^{3}/_{35}$ Β.
60) α) $26\,{}^{2}/_{15}$. χιλ. β) $42\,{}^{6}/_{7}$ λ.
61) $263\,{}^{3}/_{14}$ πόδ.
62) $1718\,{}^{2}/_{11}$ μίλ.
63) $20\,{}^{1}/_{4}$ ἡμ.
64) $7\,{}^{9}/_{13}$ ἑβδ.
65) $15\,{}^{1}/_{6}$ πήχ.
66) $15\,{}^{3}/_{7}$ πήχ.
67) $38\,{}^{8}/_{9}$ πήχ.
68) 8 ἐργ.
69) 6 ἡμ.
70) $1055\,{}^{13}/_{45}$ ἄν.
71) $113\,{}^{23}/_{25}$ ἀντ.
72) $19\,{}^{31}/_{47}$ ἡμ.
73) 4, 62 πήχ.
74) $8\,{}^{61}/_{66}$ ἡμ.
75) $99\,{}^{47}/_{57}$ πήχ.
76) $24\,{}^{1}/_{2}$ δίστ.
77) $17\,{}^{3}/_{16}$ κοιλ.
78) $11\,{}^{22}/_{27}$ δίς.
79) 271,82 δρ.
80) 39, 27 δίστ.
81) $21\,{}^{19}/_{30}$ δίς.
82) $809\,{}^{59}/_{125}$ πλ.
83) $1081\,{}^{31}/_{104}$.
84) 2, 97 πλ.
85) ${}^{35}/_{18}$ πλάτος.
86) $36\,{}^{18}/_{49}$ πήχ.
87) $337\,{}^{1}/_{2}$ δρ.
88) $7\,{}^{1}/_{12}$ φύλ.
89) 20 ὥρ.
90) $3\,{}^{3}/_{4}$ πόδ.
91) 289 δρ.
92) 431,41 δρ.
93) δρ. 30,62.
94) 1543, 5 δρ.
95) 349,5 δρ.
96) 13,06 δρ.
97) 1,58 δρ.
98) 263,25 δρ.
99) $3\,{}^{1}/_{3}$ τ. %.
100) $4\,{}^{4}/_{9}$ τ. %.
101) δρ. 2,97.
102) 13 λίρ. 7 ${}^{47}/_{99}$ σελ.
103) 1400 δρ.
104) $1633\,{}^{1}/_{3}$ δρ.
105) 11925 δρ.
106) 466,27 δρ.
107) α) πρὸς 4 % α) 1,40. β) 9, 80. γ) 18.20. δ) 57,40. πρὸς 4 ${}^{1}/_{2}$ % α) 1,57 β) 11,02. γ) 20, 47. δ) 64,57. πρὸς 6 % α) 2,10. β) 14,70. γ) 27,30. δ) 86, 10. πρὸς 9 % α) 3,15. β) 22, 05. γ) 40,95. δ) 129,15. πρὸς 12 %. α) 4,20. β) 29,40. γ) 54, 60. δ) 172,20.
107) β. α) αἱ 2784 δρ. ἐπὶ 136 ἡμ. α) 47,32. β) 63,10. β) αἱ δρ. 3764,58 ἐπὶ 137 ἡμ. α) 64, 46. β) 85,95. γ) αἱ δρ. 6783 ἐπὶ 205 ἡμ. α) 173, 81. β) 231,75.
107) γ) 272,50 δ.
107) δ) 158,04.
108) 7358,32 δρ.
109) 7644 δρ.
110) 891,64 δρ.
111) 4050 δρ.
112) 440 δρ.
113) 576,92 δρ.
114) 440 δρ.
115) 272 δρ.
116) 15,78 %.
117) 2,74 %.
118) 3,37 %.
119) 4,76 %.
120) 18,86 %.
121) 4 %.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

122) 421,50 φρ.
123) 83,7 σελ.
124) 678,18 δρ.
125) 560,94 σελ.
126) 8789,2 φιορ.
127) 98 λ. 6 σελ.
128) δρ. 4,20.
129) 10,75.
130) 230,4 τεκ.
131) 44,90 σελ.
132) $85\frac{4}{55}$ δίσ.
133) πρὸς 1,10 δ.
134) φιορ. 19,20.
135) 25 δίς. σχ.
136) δρ. 1,02 σχ.
137) φρ. 22,46.
138) λίρ. 89,99.
139) φιορ. 26,97.
140) 9251,45 δ.
141) 1157,47 δρ.
142) 378 Πρ.
143) ςάδ. 51,558.
144) 7409 σχ.
145) 20,37 δρ.
146) $2123\frac{1}{3}$ δ.
147) 5874,12 δ.
148) $11\frac{11}{131}$ δίς.
149) 206,30.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

150) δρ. 3,20.
151) 28,25 λπ.
152) δρ. 106,18.
153) 59,98 βασ.
154) δρ. 26,60.
155) 1,78 βασ.
156) ὁ Α 67,20. ὁ Β. 16,80.
157) ὁ Α 500, ὁ Β 375, ὁ Γ 325.
158) ὁ Α 1600, Β $1066\frac{2}{3}$, Γ $1433\frac{1}{3}$, Δ 700.
159) ὁ Α $192\frac{284}{333}$, Β $175\frac{10}{111}$, Γ $243\frac{67}{111}$, Δ $233\frac{151}{333}$.
160) ἐξ 80 + 8 + 12.
161) $138\frac{1}{6} + 193\frac{13}{30} + 221\frac{1}{15} + 276\frac{1}{3}$.
162) ὁ Α $12\frac{27}{34}$, Β $20\frac{8}{17}$, Γ $10\frac{4}{17}$.
163) ὁ Α $685\frac{5}{7}$, Β $514\frac{2}{7}$.

Πρόβλ. *Ἀπόκρ.*

164) ὁ Α $21\frac{12}{17}$, Β $30\frac{5}{34}$, Γ $57\frac{15}{17}$, Δ $54\frac{9}{34}$.
165) Α 15,56, Β 7,78, Γ 15,56, Δ 27,40, Ε 26,03.
166) ὁ Α δρ. 11,13. Β 11,89. Γ 15,58.
167) λεπ. 16,8.
168) $65\frac{5}{11}$ λεπ.
169) 80 λεπ.
170) δρ. 5,56.
171) $7\frac{1}{5}$ ὀκ.
172) 80 ὀκ.
173) $33\frac{1}{3}$ καὶ $66\frac{2}{3}$.
174) $33\frac{1}{3}$ καὶ $46\frac{2}{3}$.
175) $135\frac{11}{16}$ δ.
176) $17\frac{9}{19}$ κερ.
177) τῶν 9 σχεδ.
178) $27\frac{3}{11}$ δρ.
179) $85\frac{1}{3}$ δράμ.
180) $77\frac{11}{17}$ καὶ $42\frac{6}{17}$.

ΚΕΦΑΛ. Ζ'.

Πρόβλ. *'Απόκρ.*
1) α) 27. β) 43. γ) 55. δ) 97. ε) 82. ζ) 29. η) 69. θ) 179. ι) 297. κ) 425. λ) 484. μ) 664. ν) 916. ξ) 714. ο) 945. π) 2197. ρ) 5832. σ) 2744. τ) 4915. υ) 6859. φ) 1659. χ) 4348. ψ) 13824.
2) α) 208. β) 706. γ) 408. δ) 5307. ε) 4096. ζ) 83002. η) 40093.

Πρόβλ. *'Απόκρ.*
θ) 530075.
3) α) 2,6457. β) 3,4641. γ) 6,3245. δ) 18,7616. ε) 78,3964.
4) α) 0,7. β) 2,8460. γ) 5,6. δ) 0,9486. ε) 2,3815. ζ) 0,065. η) 6,1556. θ) 15,3515.
5) α) 0,7071. β) 0,816. γ) 0,9354. δ) 0,674. ε) 2,6807, ζ) 2,3629.
6) α) 13,85. β) 17,32. γ) 1,224. δ) 1,732. ε) 12.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ.

Σελίδι	*στίχῳ*	*ἀντὶ*	*γράψον*
9	12	9297	7297
25	6	$^{23}/_{4}$	$(^{23}/_{4})$
27	8 κάτωθεν	$^{3}/_{5}$	$^{4}/_{5}$
33	16	§ 18	§ 28
39	1	$^{3}/_{36}$	$^{5}/_{36}$
55	6	3 ὀκ.	31 ὀκ.
71	10	862	362
72	18	$^{5}/_{11}$	$^{7}/_{11}$
98	5	$6\ ^{2}/_{2}$	$6\ ^{2}/_{3}$

Ἐὰν π. χ. πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ 4278,938 ἔχουσαν τρία δεκαδικὰ ψηφία, ὁ ὑπολογισμὸς εἶνε ὁ ἀκόλουθος,

```
   42 78 93|80 |65,413
   36
 12|67
   60
     78
     25
 130 | 539
       520
        193
         16
 1308 | 1778
        1308
         4700
            1
 13082 | 46990
         39246
          77440
              9
          77431

 0,| 26 | 6 ... |0,516.
     25
 10|  16
      10
       66
        1
 102 | 656
       612
        446
         36
```

§ 115.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν κοινοῦ κλάσματος, ἐξάγω αὐτὴν ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, ὡς ἐν § 112 ἐλέχθη. Ἐὰν ὅμως τοῦτο δὲν γίνηται εὐκόλως, ὡς π. χ. ὅταν πρόκειται νὰ ἐξαγάγω τὴν ῥίζαν τοῦ $^4/_{15}$, εἰς τὸ ὁποῖον τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ 4 ἐξάγεται ἡ ῥίζα, ὄχι ὅμως καὶ τοῦ παρονομαστοῦ 15, τότε ἁπλούστερον εἶνε νὰ τρέψω τὸ δεδομένον κλάσμα $^4/_{15}$ πρῶτον εἰς δεκαδικὸν (κατὰ § 63), καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσω τὸν ὑπολογισμόν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην § ἐλέχθη· λοιπὸν

```
15|4,0|0,266. . .
   30
   100
    90
   100
    90
    10
```

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐξάγαγε τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

α) 729, β) 1849, γ) 3025, δ) 9409, ε) 6724, ζ) 841, η) 4761, θ) 32041, ι) 88209, κ) 180625, λ) 234256, μ) 440896, ν) 839056, ξ) 509796, ο) 893025, π) 4826809, ρ) 34012224, σ) 7529536, τ) 24157225, υ) 47045881, φ) 2752281, χ) 18907104, ψ) 191106976.

2) Ἐξάγαγε προςέτι τὰς ῥίλας τῶν ἑξῆς·

α) 43264, β) 498436, γ) 166464, δ) 28164249, ε) 16777216, ζ) 6889332004, η) 1607448649, θ) 280979505625.

3) Ἔκφρασον τὰς ῥίζας διὰ 4 δεκαδικῶν ψηφίων τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν α) 7, β) 12, γ) 40, δ) 352, ε) 6156.

4) Ὡςαύτως τῶν ἑξῆς τὰς ῥίζας διὰ 4 δεκαδικῶν ψηφίων·

α) 0,49, β) 8,1, γ) 31,36, δ) 0,9, ε) 5,672, ζ) 0,00423, η) 37,8924, θ) 235,672.

5) Ὡςαύτως τὰς ῥίζας τῶν ἑξῆς κλασμάτων διὰ 3 δεκαδικῶν ψηφίων· α) $^1/_2$, β) $^2/_3$, γ) $^7/_8$, δ) $^5/_{11}$, ε) 7 $^3/_{16}$, ζ) 5 $^7/_{12}$.

6) Ζήτησον εἰς τὰς ἑξῆς συνεχεῖς ἀναλογίας (ἰδὲ § 78) τοὺς μέσους ἀναλόγους·

α) 12 : χ=χ : 16, β) 15 : χ=χ : 20, γ) 1 : χ=χ : 1,5, δ) 1,5 : χ=χ : 2, ε) 18 : χ=χ : 8.

Αἱ ἀποκρίσεις

εἰς τὰ πρὸς ἄσκησιν προβλήματα.

ΚΕΦΑΛ. Α΄.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

6) 248

7) 1743, 1508, 1654, 1775, 3251, 3429, 6680.

Ἀπόκρ.

9) καθέτως 3302+4411+3167+3939+2990+4339+4564+3607=30309 ὁριζοντίως 4506+4359+6350+5202+4686+5206=30309.

Προβλ. *'Απόκρ.*

11)α)103,990,1806,3117, 7104.β)887,1713,3014, 7001.γ)816,2127,6114. δ) 1311,5298. ε) 3987.
12) α) 6, β) 167.
13) α) 553,β) 819, γ)437, δ) 420, ε)381, ζ) 52.
14) 212 π. Χ.
15) α) 1826 δρ.β) 876 στ. γ)1985 όκ.δ)4053 πήχ.ε) 3219 τάλ. ζ)29073 ςατ. η)4067 λίρ.θ)235770πόδ
16) ἐπὶ 2 α) 774, β)592, γ) 1170, δ) 602, ε) 1178, ζ) 1978, η) 594 κ. ἑ.
17) α) 117,β) 549, γ) 315.
18) α) 35916, 44676, 53436, 62196, 70956, 79716,β)16408,17164, 16252, γ) 1706664.
19) 2613.
20) α) 1598, β) 25568.
21) α) 405, β) 1620.
22) α)ἐπὶ 56 α)210448, β) 167768, γ) 516016, β) ἐπὶ 63 α) 236754, β) 187614,γ) 580518 κ.ἑ.
23) α) 100—1 ἐπὶ 8 εἶνε 800—8=792 κ. ἑ.
24)α)6222825 β)226632. γ) 191640.δ) 3712126. ε) 98556. ζ)369675. η) 47068764. θ) 2527508.

'Απόκρ.

ι) 5591664, κ) 720750. λ)3235396.μ)3318712. ν) 50742146. ξ) 47543 544. ο) 3576791916.π) 45749679591. ρ)15709 188221.σ)416594713.
25) α) 8 τάλ. β)8κις. γ)8κις.
26) 9 δρ.
27) 52 ἑβδ. καὶ 1 ἡμ.
28) α) διὰ 3 α) 52416. β) 56448. γ) 60480. δ) 68544. ε) 360528. ζ) 400512. η) 149184. θ) 173376. ι) 294336. κ) 342720 κ. ἑ.
29) 465 δρ.
30)α) διὰ 37 α)2085973. β)4171946.γ)6257919. δ) 14601811.β)διὰ 43α) 1794907.β)3589814.γ) 5384721. δ)12564349. γ)διὰ 139 α) 555259.β) 1110518.γ)1665777.δ) 3886813. δ) διὰ 349 α) 221149. β) 442298. γ) 663447. δ) 1548043.
31) ὑπὲρ τὰ 19025 ἔτη.
34) α) 245 β) 479. γ)506. δ) 1230.
38) 293 δρ. 70 λεπ.
39) 2393 δρ.
40) 4 δρ.
41) 311649338.

Προβλ. *'Απόκρ.*

43) εἶνε δὶς μικρότερον.

46) 210.

47) εἶνε α) 25. 4. 9=100. 9=900. 6) 125. 8.237 1000.237=237000.

49) α) 13767. 6) 26475. γ) 39183.

50) α) 4500.5100, 6) 108000. 122400. γ) 39420000. 44676000.

ΚΕΦΑΛ. Β'.

Προβλ. *'Απόκρ.*

1) $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{16}$· εἶνε διπλάσιον.

2) $^{2}/_{12}$, $^{3}/_{12}$, $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{12}$.

3) α) $^{1}/_{100}$, 6) $^{1}/_{20}$, γ) $^{1}/_{4}$, δ) $^{37}/_{100}$, ε) $^{1}/_{2}$, ς) $^{5}/_{8}$, ζ) $^{353}/_{400}$.

4) 30, 20, 15, 12, 10,6, 5, 4 3, 2 λεπ.

5) 75, 60, 70, 65, 94, 73 λεπ.

6) $^{3}/_{5}$ μήλ.

7) α) $^{5}/_{7}$ πήχ. 6) $^{12}/_{9}$ δρ.

8) 352, 864, 30072.

9) 1292, 1666, 17204.

10) α) $^{343}/_{4}$. 6) $^{221}/_{8}$· γ) $^{1121}/_{12}$· δ) $^{3189}/_{10}$· ε) $^{711}/_{16}$· δ) $^{3595}/_{11}$, ζ) $^{7041}/_{17}$· ή) $^{2391}/_{84}$· θ') $^{11164}/_{15}$· ί) $^{1043}/_{128}$· ιά) $^{253}/_{20}$· ιб') $^{3466}/_{77}$· ιγ') $^{65704}/_{73}$· ιδ') $^{19543}/_{24}$· ιέ) $^{3381}/_{67}$· ις') $^{17149}/_{360}$.

11) ά) 432. б') 586. γ') 82. δ') 86. έ) 42. στ')46. ζ') 44. ή) 83. θ') 21 $^{26}/_{342}$ ί) 28.

12) ά) 18 $^{1}/_{4}$. б') 16 $^{1}/_{6}$ γ') 43 $^{3}/_{8}$. δ') 38 $^{6}/_{24}$. έ) 142 $^{7}/_{36}$· ς')170 $^{8}/_{43}$ ζ') 94 $^{5}/_{54}$ ή) 92 $^{37}/_{80}$ θ) 99 $^{21}/_{125}$· ί) 230 $^{215}/_{431}$· ιά) 4 $^{41}/_{777}$· ιб)149 $^{2411}/_{3586}$.

13) ά) $^{33}/_{64}$ б') $^{2}/_{5}$ γ') $^{8}/_{9}$· δ') $^{9}/_{25}$ έ) $^{5}/_{32}$· στ') $^{5}/_{12}$· ζ') $^{5}/_{8}$· ή) $^{16}/_{17}$· θ') $^{1}/_{4}$· ί.) $^{7}/_{15}$· ιά) $^{3}/_{10}$· ιб) $^{18}/_{32}$· ιγ') $^{5}/_{8}$ ιδ') $^{2}/_{3}$· ιέ) $^{5}/_{6}$· ις') $^{2}/_{3}$· ιζ') $^{1}/_{4}$· ιή) $^{4}/_{5}$. ιθ'.) $^{3}/_{4}$.

14) ά) $^{7}/_{8}$. б') $^{5}/_{21}$· γ') $^{4}/_{7}$. δ') $^{11}/_{13}$· έ) $^{13}/_{21}$· ς') $^{6}/_{7}$ ζ') $^{21}/_{31}$· ή) $^{25}/_{631}$.

15) 12, 8,6,4, 3, 2,15,14.

16) 72, 54, 24, 16, 9,3.

17) 99, 88, 66, 36,24,6.

18) 90, 112, 132, 45,78, 116

19) 180, 96, 84, 88,102, 212.

20) 315, 150, 264, 285, 176, 245.

21) 729,702,1200,1116, 189.

Προβλ. *᾿Απόκρ.*

22) α) $1\frac{2}{3}$. β) $1\frac{14}{15}$. γ) $2\frac{1}{3}$. δ) $2\frac{23}{24}$. ε) $1\frac{13}{20}$ ς) $2\frac{5}{8}$. ζ) $1\frac{7}{18}$. η) $2\frac{5}{9}$. θ) $\frac{29}{48}$, ι) $2\frac{19}{72}$. ια.) $3\frac{11}{20}$ ιβ) $2\frac{313}{504}$. ιγ) $2\frac{21}{40}$. ιδ) $3\frac{13}{60}$.

23) α) $14\frac{4}{9}$. β) $9\frac{11}{12}$. γ) $25\frac{9}{10}$. δ) $13\frac{7}{12}$. ε) $367\frac{13}{24}$ ς) $10417\frac{5}{24}$.

24) α) 144. β) 450. γ) 120. δ) 360. ε) 6480 ς) 1200. ζ) 10800. η) 9900.

25) α) $2\frac{73}{240}$. β) $1\frac{14}{15}$ γ) $5\frac{152509}{41580}$.

26) α) $\frac{1}{12}$. β) $\frac{1}{12}$. γ) $\frac{11}{36}$. δ) $\frac{37}{72}$. ε) $\frac{41}{99}$. ς) $\frac{7}{60}$. ζ) $\frac{43}{156}$. η) $\frac{13}{88}$. θ) $\frac{9}{48}$. ι) $\frac{29}{72}$.

27) α) $8\frac{1}{6}$. β) $29\frac{1}{8}$. γ) $54\frac{1}{24}$. δ) $13\frac{5}{8}$, ε) $50\frac{11}{18}$ ς) $16\frac{31}{36}$. ζ) $1\frac{23}{88}$. η) $55\frac{3}{80}$. θ) $622\frac{54}{77}$. ι) $66\frac{31}{60}$

28) α) $8\frac{4}{13}$. β) $3\frac{19}{24}$. γ) $13\frac{1}{8}$ δ) $7\frac{1}{33}$ ε) $6\frac{15}{128}$ ς) $19\frac{1}{9}$ ζ) $14\frac{7}{12}$ η) $30\frac{2}{5}$. θ) $84\frac{3}{20}$ ι) $25\frac{4}{17}$ ια) $64\frac{80}{81}$. ιβ) 196. ιγ) $1498\frac{8}{25}$. ιδ) $345\frac{3}{16}$ ιε) $4\frac{29}{64}$.

29) α) $3\frac{2}{5}$. β) $7\frac{1}{16}$. γ) $6\frac{7}{8}$ δ) $10\frac{5}{6}$. ε) $12\frac{1}{3}$. ς) $19\frac{1}{3}$. ζ) $9\frac{1}{8}$. η) $14\frac{3}{4}$. θ) $7\frac{3}{4}$.

30) α) $149\frac{1}{3}$. β) $487\frac{1}{2}$. γ) $136\frac{3}{5}$. δ) $101\frac{1}{4}$. ε) $329\frac{1}{6}$. ς) $127\frac{3}{11}$. ζ) $1584\frac{3}{8}$ η) 1617. θ) $688\frac{1}{3}$ ι) $7891\frac{2}{5}$. ια) 2291. ιβ) $7202\frac{1}{4}$. ιγ) $5041\frac{3}{5}$. ιδ) $356\frac{122}{125}$. ιε) $4677\frac{45}{182}$. ις) $8778\frac{133}{528}$. ιζ) $1920\frac{30}{59}$. ιη) $927\frac{72}{125}$. ιθ) $427\frac{8}{663}$.

31) $53\frac{1}{4}$, 142, $390\frac{1}{2}$, $621\frac{1}{4}$.

32) α) $37\frac{1}{3}$. β) $10\frac{1}{5}$. γ) $42\frac{3}{7}$. δ) $66\frac{6}{17}$. ε) $29\frac{3}{5}$. ς) $7\frac{7}{12}$. ζ) 46. η) $70\frac{103}{108}$. θ) $50\frac{2}{5}$. ι) 174.

33) α) $\frac{1}{144}$. β) $\frac{1}{168}$. γ) $\frac{1}{192}$ δ) $\frac{1}{846}$. ε) $\frac{1}{435}$. ς) $\frac{1}{10725}$.

34) α) $\frac{23}{192}$. β) $\frac{16}{255}$. γ) $\frac{4}{75}$. δ) $\frac{13}{177}$. ε) $\frac{19}{476}$. ς) $\frac{7}{480}$. ζ) $\frac{27}{1372}$. η) $\frac{5}{1022}$. θ) $\frac{2}{759}$. ι) $\frac{115}{4368}$.

35) α) $\frac{22}{63}$. β) $\frac{61}{96}$. γ) $\frac{137}{207}$. δ) $\frac{3}{48}$. ε) $\frac{83}{144}$ ς) $\frac{34}{261}$. ζ) $\frac{159}{352}$. η) $\frac{271}{288}$. θ) $\frac{21}{23}$ ι) $\frac{20}{23}$. ια) $\frac{19}{23}$. ιβ) $3\frac{123}{433}$. ιγ) $\frac{193}{300}$. ιδ) $\frac{103}{320}$. ιε) $\frac{56}{69}$.

36) $504\frac{5}{42}$. $432\frac{5}{49}$. $378\frac{5}{56}$.

Προβλ. *Απόκρ.*

37) $143\frac{17}{18}$, $107\frac{23}{24}$, $86\frac{11}{30}$.

38) $1214\frac{109}{128}$, $883\frac{93}{176}$, $809\frac{173}{192}$.

39) α) $121\frac{4}{9}$. β) $57\frac{5}{18}$. γ) $6\frac{35}{78}$. δ) $30\frac{89}{112}$. ε) $137\frac{173}{243}$. ς) $8\frac{237}{275}$. ζ) $170\frac{221}{399}$. η) $29\frac{1}{48}$. θ) $69\frac{989}{1120}$. ι) $58\frac{527}{720}$.

40) α) $45\frac{1}{18}$. β) $36\frac{23}{63}$. γ) $757\frac{2}{135}$.

41) α) $\frac{9}{68}$. β) $\frac{7}{50}$. γ) $\frac{45}{52}$. δ) $\frac{28}{165}$. ε) $\frac{4}{5}$ ς) $\frac{221}{288}$. ζ) $\frac{10}{21}$. η) $\frac{315}{812}$. θ) $\frac{159}{1000}$ ι) $\frac{153}{688}$.

42) α) $3\frac{98}{99}$ β) $11\frac{19}{20}$. γ) $29\frac{13}{18}$ δ) $19\frac{3}{4}$ ε) $3\frac{149}{180}$. ζ) $1\frac{61}{105}$. η) $296\frac{2}{7}$. θ) $38\frac{8}{9}$. ι) $2\frac{227}{490}$. κ) $2\frac{2}{15}$

43) α) $39\frac{1}{3}$ β) $13\frac{5}{12}$ γ) $146\frac{13}{48}$ δ) $29\frac{13}{15}$. ε) $162\frac{1}{2}$ ζ) $433\frac{2}{5}$ η) $1547\frac{1}{5}$. θ) $3066\frac{7}{8}$. ι) $10\frac{17}{20}$ κ) $242\frac{2}{7}$.

44) α) $35\frac{1}{5}$ β) $15\frac{3}{7}$. γ) $45\frac{5}{6}$ δ) $130\frac{1}{2}$. ε) $14\frac{2}{9}$.

45) α) $\frac{20}{37}$. β) $5\frac{7}{22}$ γ) $6\frac{12}{83}$. δ) $\frac{28}{53}$ ε) $4\frac{1}{12}$.

46) α) $2\frac{7}{9}$ β) $1\frac{47}{133}$ γ) $1\frac{3}{5}$. δ) $\frac{32}{45}$. ε) 6[illegible]/80.

47) α) $14\frac{2}{3}$ β) $\frac{21}{88}$ γ) $\frac{76}{125}$. δ) $1\frac{53}{64}$. ε) $53\frac{103}{235}$.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

48) $55\frac{5}{8}$. $311\frac{1}{2}$. $504\frac{1}{3}$. $744\frac{4}{11}$.

49) $\frac{25}{48}$. $\frac{5}{12}$. $\frac{75}{136}$.

50) $25\frac{3}{8}$. $19\frac{1}{3}$. $24\frac{20}{33}$ $225\frac{5}{9}$. $737\frac{4}{19}$.

51) 34 /3, 424, $1233\frac{1}{3}$, $60\frac{8}{9}$.

52) $5\frac{1}{15}$, $12\frac{12}{13}$, 32.

53) $1\frac{1}{9}$, $\frac{13}{14}$. $1\frac{7}{65}$.

54) $319\frac{11}{27}$, $113\frac{41}{48}$. $16\frac{27}{28}$.

55) $1998\frac{15}{24}$ δρ.

56) 200, 300, 160, 250, 280, 260, 48, 170 δρ.

57) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$

58) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$.

59) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{43}{8}$, $\frac{89}{12}$, $\frac{103970}{349}$.

60) $1\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{5}$, $4\frac{3}{8}$, $6\frac{1}{6}$.

61) α) διὰ 8 καὶ 9. β) διὰ 9 καὶ 125. γ) δια 9. δ) διὰ 8 καὶ 1000.

62) α) $\frac{4}{5}$. β) $\frac{1944}{3215}$. γ) $\frac{1}{8}$ δ) $\frac{703}{1606}$ ε) $\frac{13}{17}$.

63) $\frac{30}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{35}{60}$, $\frac{44}{60}$, $\frac{51}{60}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{36}{60}$.

64) $51\frac{2}{3}$ πόδ.

65) τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν μαθητῶν.

66) α) $215\frac{3}{4}$ λίτρ. β) $269\frac{11}{16}$ δρ.

67) α) $39\frac{3}{8}$ μίλ. β) $13\frac{7}{15}$ ὥρ.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

68) $3\,^1/_4$ μίλ.

69) α) $^{17}/_{18} = 1 - \,^1/_{18}$. καὶ $1 - \,^1/_{18}$ ἐπὶ 15 εἶνε $15 - \,^{15}/_{18} = 14\,^3/_{18} = 14\,^1/_6$. β) $^9/_{16} = \,^1/_2 + \,^1/_{16}$, τοῦτο ἐπὶ 14 εἶνε $7\,^{14}/_{16} = 7\,^7/_8$. γ) $9\,^{13}/_{15} = 10 - \,^2/_{15}$, τοῦτο ἐπὶ 12 εἶνε $120 - \,^{24}/_{15} = 118\,^6/_{15} = 118\,^2/_5$ δ) $499\,^{19}/_{20} = 500 - \,^1/_{20}$, τοῦτο ἐπὶ 36 εἶνε $18000 - \,^{36}/_{20} = 17998\,^1/_5$.

70) α) Ἐπειδὴ $^{63}/_{64} \times 64 = 63$, $^{63}/_{64} \times 65 = 63\,^{63}/_{64}$. β) Ὅθεν $^{27}/_{29} \times 28 = 27 - \,^{27}/_{29} = 26\,^2/_{29}$ καὶ γ) $^{23}/_{31} \times 53 = 23\,^{46}/_{31}$.

71) α) 36 ὀκ. $\times\,^1/_2$ δρ. = 18 δρ. β) 16 πήχ. ἐπὶ $^1/_2$ δρ. εἶνε 8 δρ. καὶ ἐπὶ 3 λεπ. εἶνε 48 λεπ. τὸ ὅλον 8 δρ. 48 λεπ. γ) 47 ὀκ. πρὸς $^1/_2$ δρ. — 1 λεπ. εἶνε $23\,^1/_2$ δρ. — 47 λεπτ. ἤτοι 23 δρ. 3 λεπ. δ) 37 πήχ. ἐπὶ $^1/_2$ δρ. εἶνε $18\,^1/_2$ δρ. καὶ ἐπὶ $^1/_4$ εἶνε $9\,^1/_4$ δρ. τὸ ὅλον $27\,^3/_4$ δρ.

72) α) 3790. β) 1200 γ) 9000 δ) 26100. ε) 1600. ς) 2400. ζ) 45000.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

73) Εἰς μίαν ὥραν χύνει ὁ μὲν α΄ κρουνὸς $^1/_7$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ β΄ $^1/_6$ καὶ ὁ γ΄ $^1/_5$, τὸ ὅλον $^{107}/_{210}$.

74) $90\,^{1672}/_{7305}$. $65\,^{21341}/_{21915}$. $35\,^{19669}/_{21915}$. $2\,^{6652}/_{7305}$.

75) 9765 βήμ.

ΚΕΦΑΛ. Γ΄.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

1) 5367,8338 λεπ.

2) 2960,7475,31120 δρ.

3) 277855 . 499730 . 15189147 δρ.

4) 16195, 20159, 14167 πέν.

5) 21536000 δευτ.

6) 64,1176,1394 δίς.

7) 44 λίρ. 13 σελ., 353 λίρ. 4 σελ., 492 λ. 11 σελ., 868 λίρ. 4 σελ.

8) 8 στ. 40 ὀκ., 19 στ. 31 ὀκ., 316 στ. 36 ὀκ.

9) 232 λίρ. 9 σελ. 8 πέν., 806 λίρ. 3 σελ. 5 πέν., 31372 λίρ 7 σελ.

10) $^3/_{17}$, $^{12}/_{215}$, $^{47}/_{400}$ τάλ.

11) $^{71}/_{80}$, $^{97}/_{210}$, $^{223}/_{270}$ λίρ.

12) $^{63}/_{320}$, $^{2117}/_{3200}$, $^{511}/_{600}$ ὀκ.

13) $^9/_{16}$, $^{13}/_{16}$, $^7/_{16}$, $^{23}/_{36}$ λίρ.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

14) α) 26 ὀκ. 16 δρ., 39 ὀκ. $44\,^{4}/_{9}$ δρ., 1 ϛ. 18 ὀκ. $133\,^{1}/_{3}$ δρ. β) 3 δρ. $12\,^{1}/_{2}$ λεπ., 2 δρ $66\,^{2}/_{3}$ λεπ., 3 τάλ. 1 δρ. $42\,^{6}/_{7}$ λεπ. γ) 17 σελ. 1 πεν. 3 φαρ. σχεδόν, 16 σελ. 5 πεν. $2\,^{10}/_{17}$ φαρ., 3 λίρ. 2 σελ. 2 πέν. $2\,^{2}/_{3}$ φαρ. δ) 6 μῆν. 20 ἡμ., 2 ἔτ. 7 μῆν. 6 ἡμ., 3 ἔτ. 6 μῆν. 25 ἡμ. 17 ὥρ ε) 1 ἡμ. 17 ὥρ $8\,^{4}/_{7}$ λεπ, 10 ὥρ 40 λεπ., 2 ἡμ. 14 ὥρ. 24 λεπ.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

15) 64 ἔτ. 5 μῆν. 27 ἡμ.

16) 896 λίρ. 16 σελ. $6\,^{71}/_{120}$ πέν.

17) 169 στ. 11 ὀκ. $235\,^{53}/_{60}$ δρ.

18) 59 ὑάρ. 3 δακ. $10\,^{5}/_{12}$ γρ.

19) 9 Μαΐου 1805.

20) α) 4 πηχ. 4 ῥούπ. β) 8 ἔτ. 7 μῆν 20 ἡμ. γ) 4 ϛ. 15 ὀκ. 67 δρ. δ) 20 λίρ. 17 σελ. $6\,^{3}/_{4}$ πέν. ε) 34 στ. $16\,^{1}/_{3}$ ὀκ. ϛ) 4 ὑάρ. 1 ποδ. 9 δακ. 3 γραμ.

21) θάνατος τῷ 1821 Μαΐ. 5	=1821	ἔτη 4	μῆν. 5	ἡμ.
γέννησις τῷ 1769 Αὐγ. 15	=1769	» 7	» 15	»
διαφορὰ	51	« 8	» 20	»

22) τῇ 19 Φεβρ. 1473.

23) 159 ϛατ. 4 ὀκ. 134 δρ., 282 στ. 37 ὀκ. 16 δρ., 1308 στ. 6 ὀκ. 124 δρ., 1909 ϛατ. 8 ὀκ. 8 δρ.

24) 35 πήχ. $6\,^{1}/_{2}$ ῥούπ., 47 πήχ. 6 ῥούπ. 220 πήχ. $6\,^{3}/_{4}$ ῥούπ.

25) 25 δρ. 76 λεπ., 158 δρ. 24 λεπ., 191 δρ. 36 λεπ, 1343 δρ. 20 λεπ.

26) 2309 λίρ. 4 σελ. 1 πέν. 1 φαρ., 8247 λίρ. 3 σελ. 2 πεν. 3 φαρ., 86760 λίρ. 2 σελ. 9 πεν. 1 φαρ.

27) 69 λίρ. $14\,^{2}/_{3}$ σελ., 156 λίρ. 18 σελ. 6363 λίρ. $3\,^{1}/_{3}$ σελ.

28) α) 66 ἡμ. 23 ὥρ. $52\,^{1}/_{2}$ λεπ. β) 298 στ. 22 ὀκ. $380\,^{2}/_{3}$ δρ.

29) α) 57 δρ. β) 1 ὀκ. 264 δρ. γ) $379\,^{22}/_{37}$ δρ. δ) 7 ὀκ. 163 δρ.

30) α) 10 λίρ. 7 σελ. $1\,^{3}/_{4}$ φαρ. β) 6 λίρ. 14 σελ. $^{1}/_{2}$ πεν. σχ. γ) 5 λίρ. 2 σελ. 1 πέν. σχ.

Προβλ *'Απόκρ.*

31) α) 4 όκ. $278\,{}^{10}/_{33}$ δρ. β) 5 στ. 43 όκ. $385\,{}^{1}/_{3}$ δρ. γ) 47 στ. 35 όκ. 139 σχεδὸν δρ.

32) α) 4 λίρ. 15 σελ. $7\,{}^{7}/_{24}$ πέν. β) 18 πήχ. ${}^{67}/_{162}$ ρούπ. γ) 2 ἡμ. 20 ὥρ. 36 λεπ. σχ.

33) 9 σελ. 6 πεν., 13 σελ. $2\,{}^{1}/_{3}$ πέν., 12 σελ. $10\,{}^{3}/_{8}$ πέν.

34) 6 δρ. $58\,{}^{1}/_{2}$ λεπ., 22 δρ. $6\,{}^{2}/_{5}$ λεπ., 15 δρ. $51\,{}^{3}/_{8}$ λεπ., 103 δρ. $42\,{}^{1}/_{2}$ λεπ.

35) 171 λίρ. 18 σελ. $1\,{}^{1}/_{3}$ πέν., 326 λίρ. 14 σελ. 9 πέν., 281 λίρ. 11 σελ. $4\,{}^{2}/_{3}$ πέν.

36) 3 λίρ. 5 σελ. ${}^{9}/_{32}$ πέν., 2 λίρ. 10 σελ. 10 πέν. σχ., 1 λίρ. 18 σελ. 11 πέν. σχ.

37) 237 λίρ. 9 σελ. 3 πεν. $1\,{}^{77}/_{144}$ φαρ.

38) 120 δρ. 56 λεπ. σχ.

39) 35 δρ. 41 λεπ. σχ.

Προβλ. *'Απόκρ.*

40) 2 τάλ. 2 δρ. 30 λεπ.

41) 3 λίρ. 18 σελ. $6\,{}^{17}/_{53}$ πέν.

42) 2 λίρ. 18 σελ. $2\,{}^{38}/_{107}$ πέν.

43) 417 ὑάρ. 2 πόδ. $8\,{}^{1}/_{11}$ δακτ. σχ.

44) 22 στατ.

45) ${}^{109}/_{450}$ ἡμέρας.

46) 2 ἡμ. 20 ὥρ. 34 λεπ. $17\,{}^{1}/_{7}$ δευτ.

47) 25 ἔτ. 10 μῆν. 8 ἡμ.

48) 440 στατ. 31 όκ. 315 δρ.

49) 15 μίλ. 1122 ὑάρ. 1 πόδ. 7 δακτ., 55 μίλ. 338 ὑάρ. 1 π., 420 μίλ. 1320 ὑάρ. 11 δακτ.

50) α) 206 ἡμ. 17 ὥρ. 8 λεπ. 21 δεύτ. β) 354 ἡμ. 8 ὥρ. 48 λεπ. 36 δευτ. γ) 561 ἡμ. 1 ὥρ 56 λεπ. 57 δεύτ. δ) 1387 ἡμ. 22 ὥρ. 30 λεπ. 21 δευτ. ε) 6939 ἡμ. 16 ὥρ. 31 λεπ. 45 δευτ.

51)	5 ἔτη Γῆς	= 1826	ἡμ.	5^0	4′	
	8 ἔτη 'Αφροδ.	= 1797	»	13^0	31′	20″
	διαφορὰ	28	»	15	32	40

52) 19 ἔτη ἔχουν 6939 ἡμ. 14^0 27′ 12′, τοῦτο διὰ 235 διαιρούμενον δίδει 29 ἡμ. 12^0 43′ 24″.

53) α) 426 λίρ. 14 σελ. β) 375 λίρ. 7 σελ. 3 πεν. γ) 800 λίρ. 1 σελ. 3 πέν. δ) 1126 λίρ. 1 σελ. 9 πέν.

Ἀπόκρ.

ε) 5630 λίρ. 8 σελ. 9 πέν.

54) α) 26829 στ. 7 ὀκ, β) 19478 στ. 31 ὀκ.

55) 3 ὥρ. 13 λεπ.

57) α) $6 \frac{1}{2}$ σελ. β) $13 \frac{2}{3}$ σελ. γ) $5 \frac{1}{2}$ ῥούπ. δ) $67 \frac{1}{4}$ λεπ. ε) $25 \frac{3}{4}$ ὀκ.

58) α) $3 \frac{7}{8}$ σελ. β) 19 σελ. γ) 14 σελ. δ) $16 \frac{1}{4}$ ὀκ. ε) $17 \frac{1}{3}$ ὀκ. ζ) 71 λεπ. η) $15 \frac{1}{2}$ λεπ. θ) $7 \frac{3}{4}$ λεπ.

59) α) 13 σελ. 5 πεν. 2 φαρ. σχ. β) 11 σελ. 11 πεν. 2 φαρ. σχ. γ) 9 σελ. 3 πεν. 2 φαρ. σχ.

60) 3 στ.— 3 ὀκ. διὰ 3= 1 στ.—1 ὀκ.=43 ὀκ.

61) α) 98 λεπ β) 42 ὀκ. γ) 2 λίρ. 19 σελ. δ) 7 ςατ. 43 ὀκ.

62) ὑπὲρ τὰς 688 φοράς.

63) εἰς 128 μέρη.

64) $7 \frac{13}{16}$ δράμ.

ΚΕΦΑΛ. Δ΄.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

1) τὰ 27,549. 275,49. 2754,9.

2) τὰ 587,9462. 58,79462. 5,879462.

3) α) 0,70 καὶ 0,53 β) 0,7300 καὶ 0, 7564, γ) 3,5 καὶ 7,0, δ) 5,98600.

Ἀπόκρ.

3,20000 καὶ 9,37543, ε) 25,70000. 8,56400 καὶ 0,00001 καὶ 1,00000.

4) ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ ταλ.

5) α) λαμβάνω κλάσμα μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κατ' ὀλιγώτερον μὲν ἑνὸς χιλιοςοῦ πλειότερον δὲ τοῦ ἡμίσεος. β) λαμβάνω κλάσμα μεγαλείτερον τοῦ ἀληθοῦς κατ' ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος χιλιοστοῦ.

6) α) 0,75, β) 0,625, γ) 0,075, δ) 0.4375, ε) 0,06, ζ) 0,0064, η) 0,609375, θ) 0,00125.

7) α) 0,66. β) 0,5833. γ) 0,272, δ) 0,20833. ε) 0,0540.. ζ) 0,7142857. η) 0,15625. θ) 0,828.. ι) 0,0234375, κ) 0,535, 7142857.. λ) 0,6166.. μ) 0,004914004.

8) α) 736,998. β) 1660, 74. γ) 251,6094. δ) 852, 02179. ε) 769, 892.

9) α) 11,4. β) 4,36. γ) 6,839. δ) 2,4526. ε) 28,521. ζ) 21,57565. η) 10,27, θ) 7,7577. ι) 313,46218. κ) 67,28. λ) 95,5791. μ) 0,064.

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

10) α) 0,00126422.
β) 0,00126449.
γ) 0,00000027.

11) α) 39,4304. β) 338,2728
γ) 22,48381. δ) 0,3024.
ε) 2, 43226. ζ) 0,00035.
η) 0,0038857. θ) 5280,
825. ι) 4112,2. κ) 148.
λ) 0,1. μ) 0,0756665.

12) α) 3. β) 41. γ) 103,2167.
δ) 171,77. ε) 64,547.
ζ) 976,25. η) 1400. θ) 32.
ι) 0,0216875. κ) 0,144.
λ) 8,676363. μ) 1,7096.
ν) 0,381. ξ) 0,00135.
ο) 1620,69 σχ. π) 102,5.
ρ) 0,324. σ) 2,631.

13) α) 92,662. β) 0,93.
γ) 15 $^1/_2$ ἑκατοστά.

14) 6486,34 φρ.

15) 235 σχεδόν.

16) 1 γαλ. μέτρον.

17) 1 γαλ. μέτρον.

18) 15,7 φοράς.

19) ἡμέρας 3,1096.

20) α) 706,62. β) 1181,61.
γ) 3313,84. δ) 3711,5.
ε) 5812,86.

21) α) 62,33. β) 78,69
γ) 21.

22) α) 224,856. β) 379,992.
γ) 209,25.

23) α) 172,6875. β) 1777,77

Προβλ. *Ἀπόκρ.*

24) 61,7537.

25) α) 1147,60. β) 1111,95.
γ) 989,23.

26) τὸ βάθος 727,51· ἡ
διάμ. 0,3059. α) 312500.
β) 217 ὀκ.

ΚΕΦΑΛ. Ε΄.

1 α) 2. β) $^3/_2$. γ) $^4/_3$ δ) 2.
ε) $^5/_4$. ς) $^2/_3$. ζ) $^3/_2$. η) $^2/_3$.
θ) $^4/_3$. ι) $^3/_4$. ια) $^{189}/_{160}$.
ιβ) $^{160}/_{189}$.

2) α) 30. β) $^{15}/_4$. γ) 22 $^1/_2$.
α) $^6/_5$. β) $^3/_{20}$. γ) $^9/_{10}$.
α) 21. β) $^{21}/_8$. γ) $^{63}/_4$.

3) α) 3. β) $^1/_{12}$. γ) $^2/_5$. α)
144. β) 4. γ) $^{96}/_5$. α) $^{32}/_5$.
β) $^8/_{45}$. γ) $^{64}/_{75}$.

4) α) 132. β) 31 $^1/_2$.

5) α) διαιροῦντες τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου.
β) πολλαπλασιάζοντες τὸν ἑπόμενον ἐπὶ τὸν δείκτην.
γ) διαιροῦντες τὸν ἡγούμενον διὰ τοῦ δείκτου.

6) α) 1 : 2. β) 1 : 2. γ)
3 : 4. δ) 5 : 4. ε) 4 : 5.
ς) 2 : 3. ζ) 3 : 5 η) 2 : 3.
θ) 6 : 7. ι) 2 : 3. ια)
3 : 4. ιβ) 4 : 5. ιγ) 3 : 4
ιδ) 5 : 6. ιε) 4 : 5 ις)
4 : 5. ιζ) 2 : 3 ιη) 3 : 4.

'Απόκρ.

ιθ) 2 : 3. κ) 17 : 24.

7) α) 1 : 2. β) 1 : 5. γ) 1 : 12. δ) 3 : 20. ε) 15 : 2. ς) 4 : 3. ζ) 16 : 9. η) 35 : 24. θ) 13 : 8. ι) 4 : 3. ια) 1 : 3. ιβ) 25 : 36. ιγ) 27 : 20. ιδ) 35 : 24. ιε) 6 : 17. ις) 15 : 1. ιζ) 1 : 5. ιη) 2 : 3. ιθ) 136 : 275. κ) 7 : 9.

8 Ὁ α' μὲ τὸν ς', ἔχοντες δείκτην $^2/_3$. ὁ β' μὲ τὸν δ', ἔχοντες δείκτην $^4/_5$, ὁ γ' μὲ τὸν ζ' ἔχοντες δείκτην $^6/_5$.

9) Ἡ ὀκᾶ τοῦ μὲν ὀρυζίου τιμᾶται $^5/_6$ δρ. τοῦ δὲ σίτου $^1/_2$ δρ. Ὅθεν αἱ δύο τιμαὶ εἶνε ὡς $^5/_6 : ^1/_2$ ἢ ὡς 10 : 6=5 : 3.

10) ὡς 5 : 11.

11) ὡς 3 : 5.

12) ὡς 9 : 10.

13) ὡς 25 : 32.

14) ὡς 2 : 1.

15) ὡς 49 : 54.

16) α) 3 : 2. β) 3 : 4. γ) 1 : 2.

17) ὡς 19 : 15.

18) ὡς 18 : 5.

19) α : β=5 : 1, α : γ =25 : 3, β : γ=5 : 3.

Προβλ *'Απόκρ.*

20) α : β = 4 : 3, α : γ =5 : 3, α : δ = 4 : 1 β : γ=5 : 4, β : δ= 3 : 1, γ : δ=12 : 5.

21) ἡ β' καὶ ἡ δ', αἱ δὲ δύο ἄλλαι γίνονται ὀρθαί, ἐὰν ἀντιστραφῶσιν οἱ ὅροι τοῦ ἑνὸς λόγου.

23) α) 11 $^2/_3$. β) 1 $^5/_9$. γ) 21 $^7/_8$. δ) 4 $^1/_5$. ε) 5 $^1/_4$. ς) 3 $^1/_2$.

24) α) 57. β) 10 $^5/_6$. γ) 95. δ) 92. ε) 7 $^1/_2$. ς) 1 $^1/_2$. ζ) $^6/_7$.

25 α) 10 $^1/_2$. β) 11 $^2/_3$. γ) 12 $^1/_3$. δ) 3 $^{59}/_{80}$. ε) 8 $^{20}/_{41}$. ς) 5 $^1/_3$. ζ) 0,405.

26) α) 10 : 8=15 : 12. β) 16 : 8=18 : 9. γ) 7 : 35=5 : 25. δ) 7 $^1/_2$: 4=5 : 2 $^2/_3$. ε) 13 $^1/_3$: 7 $^1/_2$=4 $^4/_5$: 2 $^7/_{10}$. ς) 8 $^4/_5$: 7 $^1/_5$=3 $^1/_3$: 2 $^8/_{11}$.

ΚΕΦΑΛ. ς'.

Προβλ.	*'Απόκρ.*
1)	$^{13}/_{17}$ δρ.
2)	3 $^3/_5$ πήχ.
3)	30 $^2/_{27}$ δρ.
4)	10 $^4/_{23}$ πήχ.
5)	26 $^4/_9$ δρ.

Πρ. *Ἀπόκρ.*

6) 20 14/29 δρ.
7) 17 1/12 σελ.
8) 20 2/7 τάλ.
9) 26 2/3 μίλ.
10) 40 20/71 τ.π.
11 α) 232 3/11 πρ. π. β) 102 1/7 β. π.
12) 1690 τεκτ.
13) 119 3/5 ς.
14) 8 4/45 λίρ.
15) δρ. 482,96.
16) 175 λίρ.
17) 116 4/5 ἡμ.
18) φιορ. 228,57.
19) α) 3840 σελ. β) 73 1/2 δίς.
20) ςρ π. 67,682.
21) 4 1/5 ταλ.
22) 7 7/12 δρ.
23) 29 1/3 ταλ.
24) 15 21/25 ς.
25) 5/22 διστ.
26) 77/90 διστ.
27) 74 2/3 δρ.
28) δρ. 5,1.
29) 12 4/9 δίστ.
30) 12 δίστ.
31) 4 1/5 δίστ.
32) 9 11/16 δρ.
33) 3 1/3 δρ.
34) 27 1/7 όκ.
35) 156/205 δίστ.

Πρ. *Ἀπόκρ.*

36) 5 19/60 δίς.
37) 2 7/9 δίστ.
38) 32 21/80 δί.
39) 19 3/7 λίρ.
40) 26 σελ. 7 1/2 πέν.
41) 14 στατ. 21 1/8 όκ.
42) 8 43/51 δίς.
43) 15 ὥρ.
44) 42 δρ.
45) 10 0/0
46) 52 9/64.
47) 7 7/20 πήχ.
48) 514 1/4 δρ.
49) 6 λίρ. 14 7/12 σελ.
50) 5 λίρ. 13 7/16 σελ.
51) 34 9/16 λίτ.
52) 10 14/57 δί.
53) 4 35/52 δίς.
54) δρ. 1,62 σχ.
55) δρ. 49,82.
56) α) 36 4/11 β) 48,66.
57) α) 200 όκ. β) 87,04.
58) α) 2 4/33 αὔς. β) 471 1/7 ἀγγ.
59) α) 30 12/29 π. β) 18 3/35 Β.
60) α) 26 2/15

Ἀπ

χιλ. β) 4...
61) 263 3/14 λ.
62) 1718 2/11 μίλ.
63) 20 1/4 ἡμ.
64) 7 9/13 ἑβδ.
65) 15 1/6 μίλ.
66) 15 3/7 πήχ.
67) 38 8/9 πήχ.
68) 8 ἐργ.
69) 6 ἡμ.
70) 1055 13/45 ἄν.
71) 113 23/25 ἄν.
72) 19 31/47 ἡμ.
73) 4, 62 πήχ.
74) 8 61/66 ἡμ.
75) 99 47/57 πήχ.
76) 24 1/2 δίστ.
77) 17 3/16 κοιλ.
78) 11 22/27 δίς.
79) 247 3/26 δρ.
80) 39, 27 δίστ.
81) 21 19/30 δίς.
82) 809 39/125 πλ.
83) 1081 31/104
84) 2, 97 πλ.
85) 35/18 πλ.
86) 34 16/49 πήχ.
87) 337 1/2 δρ.
88) 7 1/12 φύλ.
89) 20 ἡμ.
90) 60 πόδ.
91) 289 δρ.
92) 431,41 δρ.

Πρ. ’Απόκρ.
.. 30,62.
93) 1543,5 δρ.
9.) 349,5 δρ.
96) 13,06 δρ.
97) 1,58 δρ.
98) 263,25 δρ.
99) 3 1/3 τ. %
100) 4 4/6 τ. %
101) δρ. 2,97.
102) 13 λίρ. 7 47/99 σελ.
103) 1400 δρ.
104) 1633 1/3 δρ.
105) 11925 δρ.
106) 466,27 δρ.
107) α) πρὸς 4 % α) 1,40. β) 9, 80. γ) 18,20. δ) 57,40. πρὸς 4 1/2 % α) 1,57 β) 11,02. γ) 20, 47. δ) 64,57. πρὸς 6 % α) 2,10. β) 14,70. γ) 27,30. δ) 86, 10. πρὸς 9 % α) 3,15. β) 22, 05. γ) 40, 95 δ) 129,15. πρὸς 12 % α) 4,20 β) 29,40. γ) 54, 60. δ) 172,20.
107) β) πρὸς 4 1/2 % α) 26, 10 β) 64,47. γ) 172,96. πρὸς 6 % α) 34,80 β) 86,40. γ) 230, 62.
107) γ) 308,74 δ.
107) δ) 158,04
108) 7358,32 δρ.
109) 7644 δρ.
110) 891,64 δρ.
111) 4050 δρ.
112) 440 δρ.
113) 576,92 δρ.
114) 440 δρ.
115) 272 δρ.
116) 15,78 %
117) 2,76 %
118) 3,37 %
119) 4,76 %
120) 18,86 %
121) 4 %
122) 421,50 φρ.
123) 83,7 σελ.
124) 678,18 δρ.
125) 560,94 σελ
126) 8773,50 φ.
127) 98 λ. 6 σελ.
128) δρ. 4,20
129) 10,7
130) 230,4 τεκ.
131) 44,90 σελ.
132) 85 4/55 δίσ.

Πρ. ’Απόκρ.
133) πρὸς 1,10 δ.
134) φιορ. 19,20.
135) 25 δίς. σχ.
136) δρ. 1,02 σχ.
137) φρ. 22,46.
138) λίρ. 89,99.
139) φιορ. 26,97.
140) 9251,45 δ.
141) 1157,47 δρ.
142) 378 Πρ.
143) ϛαδ 51,558
144) 7409 β. πήχ. σχ.
145) 21 δρ. σχ.
146) 2123 1/3 δ.
147) 5874,12 δ.
148) 11 1/11 δίς. σχεδ.
149) 206,30.
150) δρ. 3,20.
151) 28 1/3 λ. σχ.
152) δρ. 106,18.
153) 59,98 βασ.
154) δρ. 26,60.
155) 1,78 βασ.
156) ὁ Α 67,20. ὁ Β 16,80.
157) ὁ Α 500 ὁ Β 375, ὁ Γ 325.
158) ὁ Α 1600. Β 1066 2/3. Γ 1433 1/3. Δ 700
159) ὁ Α 192

'Απόκρ.
$^{284}/_{335}$, Β 175
$^{10}/_{111}$, Γ 243
$^{67}/_{111}$, Δ 233
$^{151}/_{333}$.
160) ἐξ 80 + 8 + 12.
161) 138 $^{1}/_{6}$ + 193$^{13}/_{30}$ + 221 $^{1}/_{15}$ + 276 $^{1}/_{3}$.
162) ὁ Α 12 $^{27}/_{34}$, Β 20 $^{8}/_{17}$, Γ 10 $^{4}/_{17}$.
163) ὁ Α 685 $^{5}/_{7}$ Β 514 $^{2}/_{7}$.

Πρ. 'Απόκρ.
164) ὁ Α 21 $^{12}/_{17}$ Β 30 $^{5}/_{34}$, Γ 57 $^{15}/_{17}$, Δ 54 $^{9}/_{34}$.
165) ὁ Α 15 $^{50}/_{69}$ Β 7 $^{139}/_{178}$, Γ 14 $^{50}/_{69}$, Δ 27 $^{263}/_{534}$, Ε 25 $^{500}/_{534}$.
166) ὁ Α. δρ. 11, 14, Β 11,80, Γ 15,53.
167) λεπ. 16,8.
168) 65 $^{5}/_{11}$ λεπ.
169) 80 λεπ.

Πρ. 'Απόκρ.
170) δρ. 5,56
171) 7 $^{1}/_{5}$ ὀκ.
172) 80 ὀκ.
173) 33 $^{1}/_{3}$ καὶ 66 $^{2}/_{3}$.
174) 33 $^{1}/_{3}$ καὶ 46 $^{2}/_{3}$
175) 135 $^{11}/_{16}$ δ.
176) 17 $^{9}/_{19}$ κερ.
177) τῶν 9 σχεδ.
178) 27 $^{3}/_{11}$ δρ.
179) 85 $^{1}/_{3}$ δράμ.
180) 77 $^{11}/_{17}$ καὶ 42 $^{6}/_{17}$.

ΚΕΦΑΛ. Ζ'.

Πρ. 'Απόκρ.
1) α) 27. β) 43. γ) 55. δ) 97. ε) 82. ζ) 29. η) 69. θ) 179. ι) 297. κ) 425. λ) 484. μ) 664. ν) 916. ξ) 714. ο) 945. π) 2197. ρ) 5832. σ) 2744. τ) 4915. υ) 6859. φ) 1659. χ) 4348. ψ) 13824.
2) α) 208. β) 706. γ) 408. δ) 5307. ε) 4096. ζ) 83002. η) 40093.

'Απόκρ.
θ) 530075.
3) α) 2,6457. β) 3,4641. γ) 6,3245. δ) 18,7616. ε) 78,3964.
4) α) 0,7. β) 2,8460. γ) 5,6. δ) 0,9486. ε) 2,3815. ζ) 0,065. η) 6,1556. θ) 15,3515.
5) α) 0,7071. β) 0,816. γ) 0,9354. δ) 0,674. ε) 2,6807. ζ) 2,3629.
6) α) 13,85. β) 17,32. γ) 1,224. δ) 1,732. ε) 12.