ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρώην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α', Β', Γ' ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1933 — 1938

Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41062)31)7)933.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

Ἀντίτυπα 2.500

Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσήμου καὶ φόρου Δραχ.	43.80
Βιβλιόσημον	11.550
Ἀναγκαστικὸν Δάνειον	33.550
Ἀριθ. Ἀδείας κυκλοφορίας 61481/13'8/37	

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜΗΤΡ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦΑΝΟΥ ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Σ[ΙΑ]
81[Α] ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81[Α]
1937

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3000

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

'Αριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ πρώην καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης 'Εκπαιδεύσεως.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α', Β', Γ', ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1933 — 1938

'Αριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41062)31)7)933.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

'Αντίτυπα 2.500



ΣΤΕΦ. ΔΕΛΤΑΓΡΑΜ

81α—ΟΔΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ—81α

1937

17195

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.



Τύποις ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
Ὁδὸς Λέκα—Στοὰ Σιμοπούλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥΣ κ. κ. ΚΡΙΤΑΣ

Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει τὴν ὕλην τοῦ τελευταίου προγράμματος.

Ἡ θεωρητικὴ ἀπόδειξις τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων ἐπιτάσσεται ἑκάστοτε τῆς πρακτικῆς τοιαύτης σημειουμένη πρὸς διάκρισιν δι' ἀστερίσκου. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον διατηρεῖται ἡ προσήκουσα ἁρμονία καὶ ἐπιστημονικὴ ἀλληλουχία, ἀποφεύγεται ἄσκοπος ἐπανάληψις τῶν αὐτῶν προτάσεων καὶ μείζων κατ' ἀκολουθίαν ἐπέκτασις τοῦ βιβλίου χωρὶς νὰ προστίθηται τὸ παράπαν νέα ὕλη.

Ἀντιθέτως, ἂν τὰ θεωρητικὰ ταῦτα μέρη ἀνεγράφοντο πάντα ὁμοῦ εἰς ἴδιον κεφάλαιον ἢ βιβλίον, τοῦτο θὰ ἦτο κυρίως μία σύντομος Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ προσηρτημένη εἰς τὸ ἄλλο βιβλίον ἄνευ λογικοῦ τινος εἱρμοῦ. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει θὰ ἦτο ἴσως προτιμότερον νὰ παρείχετο εἰς τοὺς μαθητὰς ἴδιον καὶ αὐτοτελὲς ἐγχειρίδιον Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς· ἀλλὰ προφανῶς τὸ πνεῦμα τοῦ προγράμματος δὲν εἶναι τοιοῦτον.

Καὶ τὴν συσχέτισιν δὲ τῶν νέων πρὸς τὰς σχετικὰς παλαιὰς γνώσεις περισσότερον εὐκολύνει ἡ τοιαύτη διάταξις, διότι οἱ μαθηταὶ ἐπαναλαμβάνοντες τὴν γνωστὴν ἤδη αὐτοῖς πρακτικὴν ἀπόδειξιν προτάσεώς τινος εὑρίσκουσιν εὐθὺς ἀμέσως καὶ τὴν θεωρητικὴν τοιαύτην καὶ δὴ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμούς.

Ἂν ὅμως οἱ κ.κ. κριταὶ φρονοῦσιν ἔτι προτιμητέα εἶναι ἡ ἀθρόα ἀναγραφὴ τῶν θεωρητικῶν μερῶν εἰς ἴδιον μέρος τοῦ βιβλίου εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ συγκεντρώσωμεν τὰ μέρη ταῦτα, καθ' ἣν σειρὰν διαδέχονται λογικῶς ἄλληλα

Τὴν ἀναγραφὴν πολλῶν ἰδίᾳ μακρῶν κανόνων ἐκτελέσεως τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποφεύγομεν κατὰ τὸ δυνατόν, διότι οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ἐκ τοῦ δημοτικοῦ σχολείου. Ἐπιμένομεν ὅμως στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων νὰ ἐννοήσωσιν οἱ μαθηταὶ τὴν αἰτίαν, δι' ἣν γίνονται οὕτως αἱ πράξεις αὗται, ἵνα μὴ οἱ τρόποι οὗτοι θεωρῶνται αὐθαίρετοι. Ἐπίσης ἀποφεύγομεν νὰ ἀναγράψωμεν καὶ πολλοὺς κανόνας ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν δεκαδικῶν καὶ συμμιγῶν, καθ' ὅσον ἄλλοι μὲν τούτων εἶναι γνωστοὶ ἐκ τοῦ δημοτικοῦ σχολείου, ἄλλων δὲ ἡ διατύπωσις εἶναι εὔκολον νὰ γείνῃ ὑπὸ τῶν μαθητῶν. Πρὸς τοῦτο ὁδηγοῦνται οὐ μόνον ἀπὸ τοὺς ἐπὶ παραδειγμάτων συλλογισμούς,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν πράξεων, εἰς τινας δὲ περιπτώσεις καὶ ἀπὸ τὴν ἀναγραφὴν τύπων, δι' ὧν δηλοῦνται διὰ γραμμάτων αἱ ἐκτελεστέαι πράξεις.

Οὕτω δὲ οὐ μόνον σημαντικῶς μειοῦται ὁ ὄγκος τοῦ βιβλίου ἀλλὰ καὶ παρέχεται ἀφορμὴ εἰς τοὺς μαθητὰς νὰ ἐθίζωνται εἰς τὴν περιληπτικὴν διατύπωσιν τῶν μεμαθημένων.

Κατὰ τὸ πλεῖστον ὡς ἀφετηρίαν χρησιμοποιοῦμεν ἁπλᾶ προβλήματα, ἰδίᾳ ἐκ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου, διότι οὕτω προκαλεῖται ζωηρότερον τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν.

Τέλος παραθέτομεν μεθ' ἕκαστον θέμα ἀρκετὰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν καὶ ἐμπέδωσιν τῶν μεμαθημένων. Προσέχομεν δὲ ὅπως αἱ ἀσκήσεις ἀναφέρωνται εἰς ζητήματα τοῦ καθ' ἡμέραν βίου, στατιστικῆς καὶ φυσικῶν φαινομένων.

Οὕτω συντεταγμένον τὸ βιβλίον τοῦτο κολακεύομαι νὰ πιστεύω ὅτι ἀνταποκρίνεται εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προγράμματος καὶ ὅτι θὰ ἀποβῇ πολύτιμον βοήθημα τῶν μαθητῶν. Εἰς ὑμᾶς δὲ ἀπόκειται νὰ κρίνητε κατὰ πόσον ἡ αἰσιοδοξία μου αὕτη εἶναι δεδικαιολογημένη.

Ὁ Συγγραφεὺς
ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ

ΕΚ ΤΩΝ ΕΚΘΕΣΕΩΝ ΤΩΝ Κ.Κ. ΕΙΣΗΓΗΤΩΝ

«Τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι γεγραμμένον μὲ ἀκρίβειαν καὶ σαφήνειαν, περιέχει πᾶσαν τὴν ὑπὸ τοῦ προγράμματος ὁριζομένην ὕλην, ἥτις ἐκτίθεται μετὰ συντομίας τινός.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου γίνεται μεθοδικῶς καὶ εἰς γλῶσσαν σαφῆ καὶ ἀκριβῆ.

Κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὕλης τοῦ ἔργου ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθεῖ τὴν ἀρχὴν ἐκ τοῦ παραδείγματος εἰς τὸν ὁρισμὸν καὶ ἐκ τοῦ προβλήματος εἰς τὸν κανόνα.

Λίαν ἐπιτυχὴς καὶ σύμφωνος πρὸς τὸ πρόγραμμα εἶναι ἡ ἀνάπτυξις μερῶν τινων τοῦ βιβλίου π.χ. Αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ ἀφετηρίαν ἀπὸ τὰ κατάλληλα προβλήματα, τὰ περὶ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων».

Γ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ

«Τὸ βιβλίον τοῦτο συντεταγμένον κατὰ τὰς ὑποδείξεις τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος λίαν ἐντέχνως ἀναχωροῦν πάντοτε ἐξ ἁπλῶν παραδειγμάτων εἰς τὰ γενικὰ συμπεράσματα. Διὰ τῆς προσθήκης πολλῶν καὶ ποικίλων ἀσκήσεων εἰλημμένων ἐκ τοῦ καθ' ἡμέραν βίου ἀφήνει εὐρὺ στάδιον ἐργασίας εἰς τοὺς μαθητάς».

Δ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. **Πλῆθος καὶ μονάς.** Κάθε μαθητὴς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοὺς ἄλλους. Ὅλοι οἱ μαθηταὶ τάξεως ἀποτελοῦσι πλῆθος μαθητῶν.

Γενικῶς: *Πλῆθος ὀνομάζεται πᾶν ὅ,τι ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.*

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἓν πλῆθος καλεῖται *ἀκεραία μονάς*. Π.χ. κάθε μαθητὴς τάξεως εἶναι ἀκεραία μονάς.

§ 2. **Μέτρησις πλήθους. Ἀριθμός.** Διὰ νὰ μάθῃ ἓν παιδίον πόσους βόλους ἔχει εἰς κυτίον κάμνει τὰ ἑξῆς. Ἐξάγει βόλον τινὰ καὶ λέγει «ἕνας» ἢ «εἷς». Ἔπειτα ἐξάγει ἄλλον καὶ λέγει «*δύο*» καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρι π.χ. τοῦ *δώδεκα*, ὅτε ἐτελείωσαν οἱ βόλοι τοῦ κυτίου.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *μέτρησις* τῶν βόλων, τὸ δὲ ἐξαγόμενον δώδεκα βόλοι λέγεται *ἀριθμός*.

Ὥστε: *Μέτρησις πλήθους καλεῖται ἡ ἐργασία, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται τοῦτο.*

Ἀριθμὸς εἶναι ἔννοια, μὲ τὴν ὁποίαν φανερώνομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται πλῆθός τι.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν ἑνὸς πλήθους λέγεται καὶ *μέτρον* τοῦ πλήθους τούτου.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κάθε ἀριθμός, ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας· καὶ ἡ μονὰς εἶναι ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται *ἕν*.

Ἄρα: *Ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ πᾶν σύνολον ἀκεραίων μονάδων εἶναι ἀριθμός.* Λέγεται δὲ κάθε τοιοῦτος ἀριθμὸς καὶ *ἀκέραιος ἀριθμός*.

ΣΗΜ. Ἐνίοτε ἡ μονὰς εἶναι πλῆθος. Ὅταν π. χ. λέγωμεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«ἠγόρασα τρεῖς δωδεκάδας μανδήλια» θεωροῦμεν ὡς μονάδα τὴν δωδεκάδα τῶν μανδηλίων ἤτοι δώδεκα μανδήλια θεωρούμενα μαζὶ ὡς ἓν ὅλον.

§ 3. **Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀριθμοί. Ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.** Ὅταν λέγωμεν : ἑπτὰ δραχμαί, δώδεκα βόλοι, ἤτοι, ὅταν δηλώνωμεν καὶ τὸ ὄνομα τοῦ μετρηθέντος πλήθους, ἐκφράζομεν συγκεκριμένους ἀριθμούς. Ὅταν δὲ λέγωμεν ἁπλῶς : πέντε, ὀκτὼ κλπ. ἐκφράζομεν ἀφηρημένους ἀριθμούς.

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ πέντε πρόβατα, ὀκτὼ πρόβατα εἶναι μέτρα ὁμοίων πληθῶν, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Λέγονται δὲ οὗτοι *ὁμοειδεῖς* ἀριθμοί.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τρία δένδρα, πέντε πρόβατα εἶναι μέτρα διαφόρου εἴδους πληθῶν. Λέγονται δὲ οὗτοι *ἑτεροειδεῖς* ἀριθμοί. Ὁμοίως καὶ οἱ ἑπτὰ μανδήλια, ὀκτὼ δωδεκάδες μανδηλίων εἶναι ἑτεροειδεῖς.

Γενικῶς : *Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοειδεῖς, ἂν εἶναι μέτρα ὁμοίων πληθῶν, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Ἑτεροειδεῖς δέ, ἂν εἶναι μέτρα διαφόρων πληθῶν ἢ ὁμοίων, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ διαφόρους μονάδας.*

§ 4. **Ἀριθμητική.** Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῶν ἀριθμῶν λέγεται *Ἀριθμητική*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ὀνομάσατε διάφορα πλήθη, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας. Ὁρίσατε δὲ καὶ τὴν ἀντίστοιχον διὰ καθ' ἓν μονάδα.

2) Οἱ ἀριθμοὶ δύο δραχμαί, πέντε δραχμαί, ἐννέα δραχμαὶ εἶναι συγκεκριμένοι ἢ ἀφηρημένοι; Ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς καὶ διατί ;

3) Οἱ ἀριθμοὶ δέκα, δώδεκα, ὀκτὼ εἶναι ἀφηρημένοι ἢ συγκεκριμένοι καὶ διατί;

4) Ἐκφωνήσατε δύο ἀριθμοὺς ἀφηρημένους, ἄλλους τρεῖς συγκεκριμένους καὶ ὁμοειδεῖς, ἄλλους τέσσαρας συγκεκριμένους καὶ ἑτεροειδεῖς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ 5. **Πλῆθος τῶν ἀριθμῶν.** Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἓν ἑνώσωμεν ἀκόμη μίαν ἀκεραίαν μονάδα, σχηματίζομεν τὸν *δύο*. Ἀπὸ τοῦτον ὁμοίως σχηματίζομεν τὸν *τρία* καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἄρα : *Τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.*

§ 6. **Ἀρίθμησις.** Ἂν καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι, οἱ ἄνθρωποι εὗρον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν καὶ μὲ ὀλίγα σύμβολα νὰ γράφωμεν κάθε ἀριθμόν.

Τὸ μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν τρόπον τῆς ὀνομασίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, καλεῖται ἀρίθμησις.

Διαιρεῖται δὲ ἡ ἀρίθμησις εἰς *προφορικὴν* καὶ *γραπτὴν* ἀρίθμησιν. Ἡ μὲν προφορικὴ ἀρίθμησις διδάσκει τὸν τρόπον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ γραπτὴ τὸν τρόπον τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

Α΄. ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ 7. **Μονάδες διαφόρων τάξεων.** Ἐὰν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἓν ἐργασθῶμεν, ὅπως εἴπομεν προηγουμένως (§ 5), θὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο,.....,δέκα.

Τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *δεκάδα* ἢ μονάδα δευτέρας τάξεως.

Ἐὰν ἑνώσωμεν δέκα δεκάδας, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος λέγεται *ἑκατόν*. Τοῦτον θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἑκατοντάδα* ἢ μονάδα γ΄ τάξεως.

Ὁμοίως ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας σχηματίζομεν τὴν χιλιάδα (δ΄

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τάξεως), ἀπὸ αὐτὴν τὴν δεκάδα τῶν χιλιάδων (ε' τάξεως), ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἑκατοντάδα τῶν χιλιάδων, ἔπειτα τὸ ἑκατομμύριον κτλ.

Ὥστε : *Δέκα μονάδες ἀπὸ κάθε τάξιν σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Ἡ χιλιὰς ἔχει χιλίας ἁπλᾶς μονάδας, τὸ ἑκατομμύριον ἔχει χιλίας χιλιάδας, τὸ δισεκατομμύριον ἔχει χίλια ἑκατομμύρια κτλ. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον κτλ. λέγονται *πρωτεύουσαι* μονάδες.

Ὥστε : *Χίλιαι πρωτεύουσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν πρωτεύουσαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Εἶναι δὲ τώρα δυνατὸν νὰ χωρίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων εἰς *κλάσεις*, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὰς πρωτευούσας μονάδας· φέρει δὲ κάθε κλάσις τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν περιέχει. Οὕτως ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ δεκὰς καὶ ἡ ἑκατοντὰς ἀποτελοῦσι τὴν κλάσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἡ χιλιάς, δεκὰς τῶν χιλιάδαν καὶ ἡ ἑκατοντὰς τῶν χιλιάδων ἀποτελοῦσι τὴν κλάσιν τῶν χιλιάδων κτλ.

§ 8. **Σύνθεσις καὶ ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἓν παιδίον ἔχει εἰς κυτίον βόλους, τοὺς ὁποίους τοποθετεῖ ὡς ἑξῆς. Λαμβάνει πρῶτον δέκα βόλους καὶ τοὺς θέτει ὅλους μαζὶ εἰς ἓν μέρος. Ἔπειτα ἄλλους δέκα καὶ τοὺς θέτει εἰς ἄλλο μέρος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσουν ὅλοι οἱ βόλοι ἢ μείνωσι εἰς τὸ κυτίον ὀλιγώτεροι ἀπὸ δέκα. Ἔπειτα λαμβάνει (ἂν εἶναι δυνατὸν) δέκα ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας ἐσχημάτισε καὶ τοποθετεῖ ὅλας μαζὶ εἰς ἓν μέρος. Ἔπειτα ἄλλας δέκα δεκάδας βόλων τοποθετεῖ ὅλας μαζὶ εἰς ἄλλο μέρος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσωσιν ὅλαι αἱ δεκάδες ἢ μείνωσιν ὀλιγώτεραι ἀπὸ δέκα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐχώρισε τοὺς βόλους π.χ. εἰς τρεῖς ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας βόλων.

Ἄρα : *Κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ ἀπὸ οὐδεμίαν περιέχει περισσοτέρας ἀπὸ ἐννέα.*

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν αὐτὸν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ νὰ δηλώσωμεν ποίας μονάδας ἔχει καὶ πόσας ἀπὸ κάθε τάξιν. Ὅταν π.χ. λέγωμεν : ἓν παιδίον ἔχει τρεῖς ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας βόλων ἐκφράζομεν γνωστὸν καὶ ὡρισμένον ἀριθμόν.

Ἐπεκράτησαν ὅμως εἰς τὴν συνήθη χρῆσιν αἱ ἑξῆς συντομίαι, μὲ τὰς ὁποίας ἀλλάζει ὁ τρόπος τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν : Μία δεκάς, δύο δεκάδες,..., ἐννέα δεκάδες λέγομεν : δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα,..., ἐννενήκοντα.

2) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν : Μία ἑκατοντάς, δύο ἑκατοντάδες,....., ἐννέα ἑκατοντάδες, λέγομεν : ἑκατόν, διακόσια, τριακόσια,....., ἐννεακόσια.

3) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν : Μία χιλιάς, λέγομεν ἁπλῶς χίλια.

Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν δὲ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει μόνον μονάδας τῆς α' κλάσεως, ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἔχει ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως. Τοιουτοτρόπως ὁ ἀριθμὸς τῶν βόλων τοῦ παιδίου, τὸν ὁποῖον προηγουμένως (§ 8) ἀνεφέρομεν ἀπαγγέλλεται *τριακόσια εἴκοσιν ἑπτά*.

ΣΗΜ. Ἀντὶ δέκα ἓν, δέκα δύο, λέγομεν ἕνδεκα, δώδεκα.

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ ὀνομάσωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει καὶ ἀνωτέρας κλάσεις, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Χωρίζομεν πρῶτον εἰς πρωτευούσας μονάδας τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας περιέχει. Ἔπειτα δηλώνομεν τὸ πλῆθος καὶ ἔπειτα τὸ ὄνομα ἑκάστης πρωτευούσης μονάδος ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦντες κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς κλάσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τὸ ὄνομα συνήθως παραλείπεται. Οὕτως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει τρεῖς δεκάδας χιλιάδων, ἑπτὰ χιλιάδας, ὀκτὼ ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἐννέα ἁπλᾶς μονάδας, ἀπαγγέλλεται : *τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες ὀκτακόσια εἴκοσιν ἐννέα*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 5) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν δεκάδα καὶ ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας ;

6) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο δεκάδας καὶ τρεῖς ἁπλᾶς μονάδας ;

7) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁποῖος ἔχει ἑπτὰ δεκάδας καὶ μίαν ἁπλῆν μονάδα ;

8) Πόσας δεκάδας καὶ πόσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς ἐννενήκοντα τρία ;

9) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο ἑκατοντάδας καὶ τέσσαρας δεκάδας ;

10) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐννέα ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ ἁπλᾶς μονάδας ;

11) Ἀπὸ ποίας μονάδας ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια εἴκοσιν ἓξ καὶ πόσας περιέχει ἀπὸ κάθε τάξιν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο δεκάδας χιλιάδων, πέντε χιλιάδας, ἑπτὰ δεκάδας καὶ ἐννέα ἁπλᾶς μονάδας;

13) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἓξ ἑκατοντάδας χιλιάδων, μίαν χιλιάδα καὶ ἑπτὰ μονάδας;

14) Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὀκτὼ ἑκατομμύρια, ἑπτὰ ἑκατοντάδας χιλιάδων, τρεῖς δεκάδας καὶ δύο ἁπλᾶς μονάδας;

15) Ἀπὸ ποίας πρωτευούσας μονάδας ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα δύο ἑκατομμύρια ἑκατὸν ἑξήκοντα χιλιάδες πεντήκοντα ἑπτὰ καὶ πόσας περιέχει ἀπὸ κάθε μίαν;

Β΄. ΓΡΑΠΤΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ.

§ 9. **Γραφὴ τῶν ἀριθμῶν**. Διὰ νὰ γράψωμεν συντόμως τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς ἐπενοήθησαν τὰ ἑξῆς σύμβολα. Διὰ τὸν ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, τὸ σύμβολον 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Τὰ σύμβολα ταῦτα καλοῦνται *ψηφία ἢ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες*, διότι οἱ Εὐρωπαῖοι ἔμαθον ταῦτα ἀπὸ τοὺς Ἄραβας τῆς Ἱσπανίας.

Τὸν ἀριθμὸν λοιπόν, ὁ ὁποῖος ἔχει πέντε ἑκατοντάδας, ἐννέα δεκάδας καὶ τέσσαρας ἁπλᾶς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οὕτω: 5 ἑκατοντάδες, 9 δεκάδες, 4 μονάδες. Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων καὶ πλησιάσωμεν τὰ ψηφία, σχηματίζεται ἡ παράστασις 594. Μὲ αὐτὴν δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ ψηφίον 4 παριστάνει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 9 δεκάδας καὶ τὸ 5 ἑκατοντάδας.

Ἔγινε λοιπὸν ἡ ἑξῆς συμφωνία.

Πᾶν ψηφίον, ὅταν εἶναι γραμμένον ἀριστερὰ ἄλλου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 4 ἑκατοντάδες καὶ 7 ἁπλαῖ μονάδες προκύπτει ἡ παράστασις 47, ἡ ὁποία δὲν παριστάνει ἐκεῖνον. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δεκάδας, τὸ δὲ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων κατέλαβε τὴν θέσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἦτο λοιπὸν ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῇ καὶ ἕνα ψηφίον, τὸ ὁποῖον νὰ καταλαμβάνῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι τυχὸν λείπουσιν ἀπὸ τὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ ψηφίον 0, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μηδέν*, διότι οὐδὲν φανερώνει. Τὰ ἄλλα δὲ ψηφία λέγονται *σημαν-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τικὰ ψηφία, διότι σημαίνουσι μονάδας διαφόρων τάξεων. Ὁ προηγούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς γράφεται 407.

Μὲ τὰ δέκα αὐτὰ ψηφία δυνάμεθα νὰ γράφωμεν πάντα ἀριθμὸν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

α') *Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μόνον μονάδας πρώτης κλάσεως, γράφομεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας οὗτος περιέχει. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ θέτωμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων ἢ ἁπλῶν μονάδων, ἂν τυχὸν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ τοιαύτας.* Π. χ. ὁ ἀριθμὸς διακόσια ἑξήκοντα τέσσαρα γράφεται 264, ὁ πεντακόσια ἐννέα οὕτω 509.

β') *Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρων κλάσεων, γράφομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτάτης πρωτευούσης μονάδος καὶ μετὰ τοῦτον διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄλλων πρωτευουσῶν μονάδων· προσέχομεν ὅμως νὰ γράφωμεν πρὸ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῶν ἄλλων τούτων πρωτευουσῶν μονάδων ἓν ἢ δύο ἢ τρία 0, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχῃ δύο ἢ ἕν ἢ οὐδὲν ψηφίον.* Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τεσσαράκοντα τρεῖς χιλιάδες ἑπτακόσια πεντήκοντα δύο γράφεται οὕτω 43752· ὁ ἑκατὸν τρεῖς χιλιάδες ἑξήκοντα πέντε οὕτω 103065.

§ 10. **Ἀπαγγελία γραμμένων ἀριθμῶν.** α') *Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ψηφία περισσότερα ἀπὸ τρία, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς τὸ ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ.* Π. χ. ὁ 632 ἀπαγγέλλεται: ἑξακόσια τριάκοντα δύο.

β') *Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφία περισσότερα ἀπὸ τρία, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιὰ (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον). Ἔπειτα ἀρχίζοντες ἀπὸ ἀριστερὰ ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ κάθε τμῆμα ἐπισυνάπτοντες μὲ αὐτὸν καὶ τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν αὐτὸς φανερώνει. Συνήθως δὲ παραλείπεται τὸ ὄνομα τῶν ἁπλῶν μονάδων.* Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3106043 ἀπαγγέλλεται: τρία ἑκατομμύρια ἑκατὸν ἓξ χιλιάδες τεσσαράκοντα τρία.

§ 11. **Σύνολον μονάδων ἑκάστης τάξεως δοθέντος ἀριθμοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ὅλον ὁ ἀριθμὸς 4157.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Αἱ 4 χιλ. ἔχουσι 40 ἑκ. ἢ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

400 δεκ. Ἡ δὲ 1 ἑκ. ἔχει 10 δεκ. Ἔχει λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς 415 δεκάδας τὸ ὅλον, 41 ἑκατοντάδας κλπ.

Ἄρα: *Τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς δοθέντα ἀριθμόν, φανερώνει ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει, ἂν παραλειφθῶσι τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῆς τάξεως ταύτης ψηφία.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 16) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς διακόσια ὀγδοήκοντα δύο καὶ ὁ ὀκτακόσια ἑπτά.

17) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα πέντε χιλιάδες ὀκτὼ καὶ ὁ ἑπτακόσιαι δύο χιλιάδες.

18) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς ἑπτὰ ἑκατομμύρια ἑξήκοντα δύο χιλιάδες, ὁ ἐννέα ἑκατομμύρια καὶ ὁ τέσσερα δισεκατομμύρια.

19) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς ἓξ δισεκατομμύρια, πέντε ἑκατομμύρια καὶ τρία ἑκατομμύρια.

20) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 32063, 503007, 30004, 210010, 180210006.

21) Γράψατε ὀκταψήφιον ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον τὰ ψηφία νὰ εἶναι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ τὴν σειρὰν ἓν σημαντικὸν καὶ ἓν 0. Ἔπειτα ἀπαγγείλατε αὐτόν.

Παλαιότεραι γραφαὶ τῶν ἀριθμῶν.

§ 12. **Ἑλληνικὴ γραφή.** Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο διὰ τὴν γραφὴν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ σημεῖα ϛ (στίγμα), ϟ (κόππα), ϡ (σαμπῖ), ὑπεράνω τῶν ὁποίων καὶ δεξιὰ ἔθετον μίαν κεραίαν.

Τὸ πρὸς ἕκαστον ἀριθμὸν ἀντιστοιχοῦν γράμμα δεικνύει λεπτομερῶς ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′	ζ′	η′	θ′
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι′	κ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϟ′
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′

Διὰ τὴν παράστασιν δὲ τῶν χιλιάδων μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ γράμματα, ἀλλ' ἔθετον τὴν κεραίαν ἀριστερὰ καὶ κάτω. Οὕτω τὸν 1000 ἔγραφον ,α, τὸν 8000 ἔγραφον ,η, κτλ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τὴν παράστασιν δὲ τυχόντος ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ἔγραφον τὰ γράμματα, διὰ τῶν ὁποίων ἐδηλοῦτο τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως ἑκάστου ἀριθμοῦ. Οὕτω τὸν ἀριθμὸν 674 ἔγραφον χοδ΄, τὸν 3562 ἔγραφον ,γφξβ΄.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ σήμερον ἀκόμη ἀριθμοῦνται τὰ βιβλία καὶ κεφάλαια τῶν συγγραμμάτων (Βιβλίον Α΄, Β΄ κτλ. Κεφάλαιον α΄, β΄, γ΄, κτλ.), τὰ μέρη τῶν προϋπολογισμῶν κράτους, δήμων κ.τ.λ. τὰ σχολεῖα πόλεως, αἱ τάξεις σχολείου, τὰ σώματα στρατοῦ, τὰ συντάγματα, τάγματα καὶ λόχοι αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 22) Νὰ γραφῶσι κατὰ τὴν Ἑλληνικὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ 18, 78, 142, 694, 956, 999, 12467, 120994.

23) Νὰ ἀναγνωσθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ιζ΄, κγ΄, ψη΄, νε΄, πθ΄, ξη΄ ρθ΄, φϛ΄, ,αωκα΄, ,επξ΄, ,λν΄, ,τψ΄, ,ψε΄, ,πβ΄, ,ωω΄, ,υομδ΄.

§ 13. **Ρωμαϊκὴ γραφή**. Οἱ Ρωμαῖοι παρίστανον τοὺς ἀριθμοὺς 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 μὲ τὰ γράμματα I, V, X, L, C, D, M

Μὲ τὰ ἑπτὰ δὲ ταῦτα γράμματα παρίστανον πάντα ἀριθμὸν ἀκολουθοῦντες τοὺς ἑξῆς κανόνας.

α΄) Εἰς τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστάνει γράμμα τι προστίθεται ὁ μικρότερος αὐτοῦ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον παριστάνει γράμμα τιθέμενον δεξιὰ τοῦ πρώτου. Ἀφαιρεῖται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον παριστάνει γράμμα τιθέμενον ἀριστερὰ τοῦ πρώτου.

Οὕτως ὁ 4, 7, 20, 60, 90, 400, 600 900 ἐγράφετο IV, VII, XX, LX, XC, CD, DC, CM.

β΄) Ἐὰν γράμμα κεῖται μεταξὺ δύο ἄλλων, τὰ ὁποῖα παριστάνουσι μεγαλυτέρους ἀριθμούς, ὁ ὑπ᾽ αὐτοῦ παριστώμενος ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστάνει τὸ πρὸς τὰ δεξιά του γράμμα.

Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 14 140 1400 1090 παριστάνοντο οὕτω: XIV, CXL, MCD, MXC.

δ΄) Διὰ τὴν παράστασιν τῶν χιλιάδων, ἑκατομμυρίων, δισεκατομμυρίων κτλ. μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ σύμβολα φέροντα ὑπεράνω μίαν, δύο, τρεῖς κτλ. παύλας.

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ 18000, 60000, 44531172 παριστάνοντο κατὰ σειρὰν οὕτω $\overline{\text{XVIII}}$, $\overline{\text{LX}}$, $\overline{\overline{\text{XLIV}}}$ $\overline{\text{DXXXI}}$ CLXXII.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ σήμερον ἀκόμη οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν εἰς τὰς πλάκας τῶν ὡρολογίων γράφονται κατὰ τὴν γραφὴν ταύτην· ἡ ἀρίθμησις τῶν διαφόρων κεφαλαίων τῶν προϋπολογισμῶν καὶ ἀπολογισμῶν ἢ οἱωνδήποτε λογαριασμῶν Κράτους, Τραπεζῶν κτλ. γίνεται κατὰ τὴν γραφὴν ταύτην.

Ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα αὐτὴν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον διὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν διαφόρων ἰδιοτήτων τῶν πράξεων καὶ τῶν λελυμένων προβλημάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 24) Νὰ ἀναγνωσθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ XVII, XXIX, DLXIX, DCCXCIII, CMLDCIX, $\overline{\text{XXII}}$, $\overline{\text{XXXII}}$, $\overline{\text{LXIV}}$.

25) Νὰ γραφῶσι κατὰ τὴν Ρωμαϊκὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ 27, 92, 998, 3457102, 4000, 160004.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΙΣΟΙ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ — ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 14. **Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.** Εἰς κάθε δάκτυλον τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἀρτιμελοῦς ἀνθρώπου ἀντιστοιχεῖ ἕνας δάκτυλος τῆς ἀριστερᾶς χειρὸς καὶ τἀνάπαλιν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς μιᾶς χειρὸς εἶναι *ἴσος* μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἄλλης.

Γενικῶς : *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἂν εἰς κάθε μονάδα τοῦ καθ' ἑνὸς ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἄλλου.*

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι πρὸς τρίτον, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα δεξιὰ ἀπὸ τὸν ἄλλον καὶ μεταξύ των θέτομεν τὸ σημεῖον = τὸ ὁποῖον καλεῖται σημεῖον ἰσότητος καὶ ἀναγινώσκεται ἴσον.

Ἐὰν ὑποκάτω ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ 5 | 1, 1, 1, 1, 1
θέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 3 | 1, 1, 1,
βλέπομεν ὅτι εἰς δύο μονάδας τοῦ 5 δὲν ἀντιστοιχοῦσι μονάδες

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ 3, ἤτοι ὁ 5 ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν 3. Διὰ τοῦτο ὁ 5 λέγεται *μεγαλύτερος* ἀπὸ τὸν 3, ὁ 3 λέγεται *μικρότερος* τοῦ 3, οἱ δύο δὲ μαζὶ λέγονται *ἄνισοι* ἀριθμοί.

Ὥστε : *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν μερικαὶ μονάδες τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν ἄλλον.*

Ἀπὸ δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς περισσοτέρας μονάδας λέγεται *μεγαλύτερος* ἀπὸ τὸν ἄλλον· ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς ὀλιγωτέρας μονάδας, λέγεται *μικρότερος* ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, γράφομεν τὸν ἕνα δεξιὰ τοῦ ἄλλου καὶ μεταξὺ αὐτῶν θέτομεν τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$ προσέχοντες νὰ εἶναι μέσα εἰς τὴν γωνίαν ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός. Οὕτω $5>3$ ἀναγινώσκεται : ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 ἢ ἐκ δεξιῶν : ὁ 3 εἶναι μικρότερος τοῦ 5.

Τὸ σημεῖον $>$ καλεῖται σημεῖον ἀνισότητος.

§ 15. **Παράστασις τῶν ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων.** Πολλάκις χάριν τῆς γενικότητος μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν γράμματα. Οὕτω π. χ. γράφοντες $\alpha>5$ παριστάνομεν διὰ τοῦ α οἱονδήποτε ἀπὸ τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ 5 ἀριθμούς.

Α'. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

§ 16. **Ὁρισμοί**. Ἐὰν παιδίον ἔχῃ 2 βόλους, θέτῃ δὲ μαζὶ μὲ αὐτοὺς ἀπὸ ἕνα, ἕνα καὶ τρεῖς βόλους, τοὺς ὁποίους ἔδωκεν εἰς αὐτὸ ἕνας φίλος του, οἱ βόλοι του γίνονται κατὰ σειρὰν 3, 4, 5. Ἐὰν ἔπειτα μαζὶ μὲ αὐτοὺς θέτῃ ἀπὸ ἕνα, ἕνα 4 βόλους τοὺς ὁποίους ἐδώρησεν εἰς αὐτὸ ἡ ἀδελφή του, οἱ βόλοι του γίνονται 6, 7, 8, 9.

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *πρόσθεσις* τῶν 2, τῶν 3 καὶ τῶν 4 βόλων. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον 9 βόλοι ἔχει ὅλας τὰς μονάδας τῶν 2, 3, 4 καὶ μόνον αὐτάς.

Ἄρα : *Πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν, ἂν μᾶς δοθῶσιν ἀριθμοί τινες, εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλας τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προστίθενται λέγονται *προσθετέοι*. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *ἄθροισμα*.

Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς μὲ αὐτούς.

Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν π. χ. τῶν 2, 3, 4 σημειώνομεν οὕτω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2+3+4. Τὸ σημεῖον + καλεῖται σημεῖον τῆς προσθέσεως καὶ ἀπαγγέλλεται *σὺν ἢ καί*.

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ νοῶμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εὑρεθέν, θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω (2+3+4). Ἵνα δὲ δηλωθῇ ὅτι θεωρεῖται εὑρεθὲν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ (2+3+4) καὶ ἄλλου τινὸς ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 6, θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν, οὕτω [(2+3+4)+6].

§ 17. **Ἀθροίσματα ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν.**

Ἵνα φανερώσωμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι 9, γράφομεν οὕτω 2+3+4=9.

Τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐσχηματίσθη καλεῖται *ἰσότης*.

Ὁ πρὸ τοῦ = ἀριθμὸς καλεῖται α΄ μέλος τῆς ἰσότητος, ὁ δὲ μετὰ τὸ = καλεῖται β΄ μέλος τῆς ἰσότητος.

Ἡ παράστασις 7>5 καλεῖται ἀνισότης, ὁ 7 πρῶτον καὶ ὁ 5 δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος.

Εἶναι δὲ εὔκολον (§ 14, 16) νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι :

α΄) Ἂν α=6, θὰ εἶναι καὶ α+μ=6+μ. Ἂν δὲ εἶναι καὶ γ=δ, θὰ εἶναι καὶ α+γ=6+δ.

β΄) Ἂν α>6 καὶ γ>δ, θὰ εἶναι, καὶ α+γ>6+δ. Οὕτως ἐκ τῶν 7>3, 8>6 προκύπτει 15>9.

§ 18. **Πρόσθεσις δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, προσθέτομεν εἰς τὸν ἕνα τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου μίαν, μίαν. Συνήθως ὅμως μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω π.χ. λέγομεν ἀμέσως 2 καὶ 3 γίνονται 5 κτλ.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

§ 19. **Πρόβλημα Ι.** *Μαθητὴς ἔλαβε κατὰ τὰς ἐξετάσεις εἰς τὰ Ἑλληνικὰ 8, εἰς τὰ Μαθηματικὰ 9, καὶ εἰς τὴν Γεωγραφίαν 6. Ἄλλος μαθητὴς ἔλαβε εἰς αὐτὰ τὰ μαθήματα κατὰ σειρὰ 9, 6, 8. Ποῖος ἔλαβε μεγαλύτερον ἄθροισμα βαθμῶν εἰς τὰ μαθήματα ταῦτα ;*

Λύσις. Τὸ ἄθροισμα 8+9+6 τῶν βαθμῶν τοῦ α΄ ἔχει μόνον τὰς μονάδας τοῦ 8, τοῦ 9 καὶ τοῦ 6· ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα 9+6+8 τῶν βαθμῶν τοῦ β΄ ἔχει μόνον τὰς μονάδας τῶν ἰδίων προσθετέων. Εἰς κάθε λοιπὸν μονάδα τοῦ α΄ ἀντιστοιχεῖ μία μο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰς τοῦ β′ καὶ τανάπαλιν. Ἄρα (§ 14) εἶναι 8+9+6=9+6+8.

Γενικῶς : $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta+\alpha+\gamma$. Ἤτοι :

Α′. Ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν προσθετέων δὲν βλάπτει τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον κάμνομεν ἐνίοτε τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀπὸ τὰ ἄνω πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διάταξιν. Καὶ ἂν αἱ δύο προσθέσεις γείνωσι χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Ἡ δευτέρα πρόσθεσις λέγεται *δοκιμὴ* τῆς πρώτης.

Καὶ γενικῶς : *Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως* λέγεται ἡ *πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν βεβαιούμεθα ὅτι ἡ α′ ἔγεινε χωρὶς λάθος.*

§ 20. **Πρόβλημα ΙΙ**. *Πατὴρ ἔδωκε δι' ἀγορὰν Γραμματικῆς 53 δραχμάς, δι' ἐγγραφὴν τοῦ υἱοῦ του 254 δραχμὰς καὶ δι' ἀγορὰν Ἀριθμητικῆς 48 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὸ ὅλον ;*

Λύσις. (Α′ τρόπος). Προφανῶς ἐδαπάνησε (53+254+48) ἤτοι 355 δρχ.

(Β′ τρόπος). Ἐπειδὴ διὰ τὰ βιβλία ἔδωκε 53+48=101 δραχ. καὶ διὰ τὴν ἐγγραφὴν 254 δραχ, ἡ ὁλικὴ δαπάνη εἶναι (101+254) δρ. Ἄρα 53+254+48=101+254, ἤτοι :

Β′. Ἡ ἀντικατάστασις μερικῶν προσθετέων μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ ἀρχικὸν ἄθροισμα.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$53+254+48=53+48+254 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $53+48=101$, ἕπεται ὅτι

$$53+48+254=101+254, \qquad (2)$$

διότι ἡ ἀντικατάστασις τοῦ 53+48 διὰ τοῦ 101 εἶναι ἐκτέλεσις μέρους τῆς προσθέσεως.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας δὲ (1) καὶ (2) ἕπεται (§ 14) ὅτι $53+254+48=101+254$. ὅ.ἐ.δ.

Καὶ Γενικῶς $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοί, ἐκτελοῦμεν τὴν δοκιμὴν τῆς προσθέσεως καὶ ὡς ἑξῆς. Χωρίζομεν αὐτοὺς εἰς ὁμάδας, προσθέτομεν τοὺς προσθετέους ἑκάστης ὁμάδος καὶ ἔπειτα πάλιν προσθέτομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα.

	27467	
	942	
	1089	
	8543	29498
	708	
	2467	11718
	41216	41216

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἂν ὅλαι αἱ προσθέσεις ἔγειναν χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Γ'. *Ἡ ἀντικατάστασις προσθετέου ἀθροίσματος μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄθροισμα αὐτόν, δὲν βλάπτει τὸ ἀρχικὸν ἄθροισμα.*

Οὕτως εἴδομεν προηγουμένως ὅτι $101+254=53+254+48$.

Καὶ γενικῶς $\alpha+(\beta+\delta)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην εἶναι $23+5=20+3+5$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $20+3+5=20+8$ (§ 20 Β'), ἕπεται ὅτι $23+5=20+8=28$. Ὁμοίως $45+8=40+13=40+10+3$. Ἐπειδὴ δὲ $40+10+3=50+3$, ἕπεται ὅτι $45+8=50+3=53$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$197+9=100+90+16=100+90+10+6=100+100+6$$
$$=200+6=206.$$

Ἐντεῦθεν προῆλθεν ὁ γνωστὸς τρόπος τῆς προσθέσεως μονοψηφίου εἰς πολυψήφιον.

Διάταξις πράξεως.

23	45	197
5	8	9
28	53	206

§ 21. **Πρόβλημα ΙΙΙ**. *Οἰκογενειάρχης ἐδαπάνησε μίαν πρωΐαν 75 δραχ. διὰ κρέας, 14 δραχ. διὰ χόρτα καὶ 25 δρχ. δι' ἄρτον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ οἰκοδέσποινα ἐκράτησεν ὀλίγον ἀπὸ τὸ κρέας τοῦτο, ἔδωκε τὸ ἀπόγευμα ἄλλας 19 δραχ. καὶ ἠγόρασεν ὀλίγον ἀκόμη κρέας πρὸς συμπλήρωσιν ἑσπερινοῦ φαγητοῦ. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὴν ἡμέραν ταύτην;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ τὴν πρωΐαν ἔδωκεν $75+14+25=114$ δραχ. καὶ τὸ ἀπόγευμα 19 δραχ, ἡ ὁλικὴ δαπάνη εἶναι $(75+14+25)+19=114+19=133$ δραχ.

(Β΄ τρόπος). Ἐπειδὴ διὰ τὸ κρέας ἐδαπάνησε $75+19=94$ δραχ, ἡ ὁλικὴ δαπάνη πρέπει νὰ εἶναι $94+14+25=133$ δραχ. Ἄρα $(75+14+25)+19=94+14+25$. Ἤτοι:

Δ΄. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἀπὸ τοὺς προσθετέους, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι
$(75+14+25)+19=75+14+25+19$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 20 Β΄) εἶναι $75+14+25+19=94+14+25$, ἕπεται ὅτι
$(75+14+25)+19=94+14+25$. ὅ.ἔ.δ.

Γενικῶς: $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην εἶναι
$27+4=(20+7)+4=20+11=31$. Δι' αὐτὸ λέγομεν ἀγράφως: 7 καὶ 4 γίνεται 11, 11 καὶ 20 γίνεται 31.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 26) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἀθροίσματα
$36+4$, $44+8$, $71+9$, $85+7$, $201+42$, $302+45$.

27) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἀθροίσματα
$57+9$, $48+8$, $83+9$, $76+7$, $94+9$.

§ 22. **Πρόβλημα IV.** *Πεζοπόρος διέτρεξε μίαν ἡμέραν 40 χιλιόμετρα, τὴν ἄλλην 32 χιλ. καὶ τὴν τρίτην 28 χιλ. Ἀφ' οὗ δὲ ἀνεπαύθη μίαν ἡμέραν, ἐξηκολούθησε τὴν πορείαν καὶ διέτρεξε τὴν ἄλλην ἡμέραν 35 χιλ. κατὰ τὴν ἑπομένην 30 χιλ. Πόσον διάστημα διέτρεξε καὶ τὰς 5 ταύτας ἡμέρας;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Τὰς τρεῖς ἡμέρας διέτρεξε
$40+32+28=100$ χιλ.

Τὰς δὲ ἄλλας διέτρεξε $35+30=65$ χιλ. Διέτρεξε λοιπὸν τὸ ὅλον $(40+32+28)+(35+30)=100+65=165$ χιλιόμετρα.

(Β΄ τρόπος). Εὑρίσκομεν προφανῶς τὸ ζητούμενον καὶ ἂν προσθέσωμεν ὅλα τὰ χιλιόμετρα, τὰ ὁποῖα διήνυσε κατὰ τὰς διαφόρους ἡμέρας. Διέτρεξε λοιπὸν
$(40+32+28+35+30)$ χιλ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι
$(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+35+30$. Ἤτοι

Ε΄. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν διάφορα ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν Γ΄ ἰδιότητα (§ 20 Γ΄) εἶναι
$(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+(35+30)$ καὶ
$40+32+28+(35+30)=40+32+28+35+30$.

Ἄρα $(40+32+28)+(35+30)=40+32+28+35+30$. ὅ.ἔ.δ

Γενικῶς: $(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.

Ἐπειδὴ $16+27=(10+6)+(20+7)$, κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην θὰ εἶναι: $16+27=10+6+20+7=(10+20)+(6+7)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δι' αὐτὸ λέγομεν ἀγράφως : 20 καὶ 10 γίνεται 30· ἔπειτα 6 καὶ 7 γίνεται 13· τέλος 30 καὶ 13 γίνεται 43.

§ 23. **Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 145+256+78. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι (§ 20 Γ').

145=100+40+5
256=200+50+6
78= 70+8. Ἄρα τὸ ζητούμενον ἄθροισμα

εἶναι 300+160+19=(1+2)ἑκ.+(4+5+7)δεκ+(5+6+8).

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον προσθέτομεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τῶν προσθετέων.

Ἐπειδὴ δὲ (5+6+8)μον.=19μον=1 δεκ.+9μ, αἱ δεκάδες γίνονται (4+5+7)+1=17 δεκ.=1 ἑκ.+7δεκ. Ἄρα αἱ ἑκατοντάδες γίνονται (1+2)+1=4 ἑκ.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεώς τινος εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς ἁπλᾶς μονάδας αὐτοῦ, τὰς δὲ δεκάδας (κρατούμενα) προσθέτομεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

ΣΗΜ. Τὸ ἄθροισμα 20+30 ἰσοῦται πρὸς τὸ

2δεκ+3δεκ=5δεκ.=50.

Δι' αὐτὸ εὑρίσκομεν τοῦτο ἀγράφως λέγοντες : 2 καὶ 3 ἴσον 5· ἄρα 20+30=50. Ὁμοίως διὰ τὸ 40+50+30 λέγομεν 40 καὶ 50 γίνονται 90 καὶ 30 γίνονται 120.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 28) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

4+5, 132+6, 396+8, 994+9, 35994+7, 84+397+9+1462,

4053+19108+677+82+1009,

53407+108212+967004+106504+873009.

29) Ἔμπορος ἠγόρασε τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 7850 δραχμῶν καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 1574 δραχμῶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως ;

30) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 124500 δραχμῶν, ἐδαπάνησε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 27965 καὶ τὴν ἐπώλησε μὲ κέρδος 35780 δραχμῶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως ;

31) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1875 καὶ ἔζησεν 68 ἔτη. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν ;

32) Ἡ ἐν Μαραθῶνι μάχη ἐγένετο τὸ ἔτος 490 π.χ., ἡ δὲ ἅλωσις τῆς Κων)πόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἔγεινε τὸ ἔτος 1453

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μ.χ. Πόσα ἔτη ἐμεσολάβησαν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἱστορικῶν γεγονότων ;

33) Ὁ Φιλόσοφος καὶ Μαθηματικὸς Πυθαγόρας ἀπέθανεν 10 ἔτη πρὸ τῆς ἐν Μαραθῶνι μάχης. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν ὁ Πυθαγόρας ;

34) Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀτμομηχανῆς ὑπὸ τοῦ Watt ἔγεινε τὸ ἔτος 1799 μ.χ., ἡ δὲ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία ἔγεινε τὸ ἔτος 480 π.χ. Πόσα ἔτη ἐμεσολάβησαν μεταξὺ τούτων ;

34) Κατὰ τὸ ἔτος 1929 εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα βόες καὶ ταῦροι ἀξίας 122 377 025 δραχμῶν, ἀγελάδες ἀξίας 19 297 075 δραχμῶν, μόσχοι καὶ δαμάλεις ἀξίας 2 558 800 δραχμῶν, πρόβατα καὶ κριοὶ ἀξίας 237 504 550 δραχμῶν. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ ἀξία ὅλων τῶν ζώων τούτων ;

36) Κατὰ τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1932 εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα σῖτος ἐκ τῆς Ρωσίας ἀξίας 20 985 450 δραχ, ἐκ τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν ἀξίας 36 958 775 δραχ, ἐκ Καναδᾶ ἀξίας 24 342 400 δραχμῶν, ἐκ Ρουμανίας ἀξίας 6719740 δραχμῶν. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀπὸ τὰς χώρας ταύτας εἰσαχθέντος τούτου σίτου ;

37) Κατὰ τὸ ἔτος 1929 ἐξήχθησαν ἐκ τῆς Ἑλλάδος ἔλαια καὶ ἐλαιώδεις καρποὶ ἀξίας 59 191 000 δραχμῶν, πνευματώδη ποτὰ ἀξίας 73 954 000 δραχμῶν, δασικὰ προϊόντα ἀξίας 12 436 000 δραχμῶν καὶ ὀρυκτὰ ἀξίας 5 445 000 δραχμῶν. Πόση εἶναι ἡ ἀξία ὅλων τῶν ἐξαχθέντων τούτων εἰδῶν ;

38) Οἰνοπώλης ἔχει τρία βαρέλια οἴνου. Τὸ α΄ περιέχει 950 ὀκάδας, τὸ β΄ 640 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ α΄ καὶ τὸ γ΄ 375 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ β΄. Πόσας ὀκάδας περιέχουσι καὶ τὰ τρία βαρέλια ὁμοῦ ;

39) Μετατρέψατε τὸ ἄθροισμα $23+18$ εἰς ἄλλο ἄθροισμα ἴσον μὲ αὐτό, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τρεῖς προσθετέους, ἀπὸ τοὺς ὁποίους εἷς νὰ εἶναι μονοψήφιος καὶ εἷς νὰ λήγῃ εἰς 0.

40) Μετατρέψατε τὸ ἄθροισμα $14+12+8+16$ εἰς ἄλλο ἄθροισμα ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δύο προσθετέους οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς 0.

41) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $(5+11+7)+(4+3)$ ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα μὲ δύο προσθετέους, οἱ ὁποῖοι λήγουσι εἰς 5.

42) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$4+(2+7+8)+(3+8+9)=16+12+13.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

§ 24 **Ὁρισμός.** *Ἐὰν παιδίον ἔχῃ 8 βόλους καὶ δωρήσῃ εἰς φίλον του 3 βόλους, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, θὰ μείνωσιν εἰς αὐτὸ κατὰ σειρὰν 7, ἔπειτα 6 καὶ τέλος 5 βόλοι.* Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται *ἀφαίρεσις* τῶν 3 βόλων ἀπὸ τοὺς 8 βόλους.

Ὥστε : *Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἐλαττώνομεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλαττώνομεν, λέγεται *μειωτέος.* Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον, λέγεται *ἀφαιρετέος.* Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως καλεῖται *ὑπόλοιπον ἢ διαφορά.*

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι : α') Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

β') Διὰ νὰ γίνηται ἡ ἀφαίρεσις, πρέπει ὁ ἀφαιρετέος νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν μειωτέον.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μειωτέον, τὸ ὑπόλοιπον καλεῖται μηδὲν (0).

Τὴν διαφορὰν τοῦ 3 ἀπὸ τοῦ 8 σημειώνομεν οὕτω 8—3. Τὸ σημεῖον — καλεῖται σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ἀναγιγνώσκεται: *πλὴν ἢ ἀπό.* Οὕτω 8—3 ἀναγινώσκεται 8 πλὴν 3 ἢ 3 ἀπὸ 8.

Ἀντὶ νὰ ἀφαιρῶμεν μίαν, μίαν τὰς μονάδας τοῦ 3, συνηθίζομεν καὶ εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ ἐξαγόμενον καὶ λέγομεν 3 ἀπὸ 8 γίνεται 5 ἢ 8 πλὴν 3 ἴσον 5.

§ 25. **Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως.** Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι 8—3=5. Ἐὰν δὲ ὁ φίλος τοῦ παιδίου ἐπέστρεφε τοὺς 3 βόλους, τοῦτο θὰ εἶχε πάλιν 8 βόλους, ἤτοι 5+3=8.

Ἄρα : *Ἐὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν τὸν μειωτέον.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἐξάγεται ὅτι : *Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος μαζὶ μὲ τὸν β σχηματίζει τὸν α.*

Κατὰ ταῦτα, ἂν α—β=γ, θὰ εἶναι καὶ α=β+γ.

Ὅταν θέλωμεν νὰ νοῶμεν τὴν διαφορὰν α—β εὑρεθεῖσαν, θέτομεν αὐτὴν ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω (α—β). Ἵνα δὲ δηλώσωμεν ὅτι εὑρέθη π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν (α—β) καὶ (γ+δ), θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς ἀγκυλῶν οὕτω [(α—β)+(γ+δ)].

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 26. **Σχέσεις ὑπολοίπων ἀφαιρέσεως ἀριθμοῦ ἀπὸ ἴσων ἢ ἀνίσων ἀριθμῶν.** Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

α') Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu=\beta-\mu$.

Ἂν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu>\beta-\mu$.

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

§ 27. **Πρόβλημα I.** *Παιδίον εἶχε 3 βόλους, ἔδωκε δὲ εἰς αὐτὸ ἡ ἀδελφή του ἄλλους 5 καὶ ὁ ἀδελφός του ἄλλους 2. Ἐχάρισε δὲ ἔπειτα ἀπὸ αὐτοὺς εἰς φίλον του 4. Πόσοι βόλοι ἔμειναν εἰς αὐτό ;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Τὸ παιδίον εἶχε $(3+5+2)$ ἤτοι 10 βόλους καὶ ἀπὸ αὐτοὺς ἐδώρησε 4. Ἄρα ἔμειναν εἰς αὐτὸ

$$(3+5+2)-4=10-4=6.$$

(Β΄ τρόπος). Ἂν τὸ παιδίον ἔδιδε τοὺς 4 ἀπὸ τοὺς 5 τῆς ἀδελφῆς του, θὰ ἔμειναν εἰς αὐτὸ $3+1+2=6$ βόλοι.

Ὥστε $(3+5+2)-4=3+1+2$. Ἤτοι :

Α΄. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα μόνον προσθετέον, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.*

*Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 20 Γ΄) $3+5+2=3+1+4+2$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 20 Β΄) $3+1+4+2=(3+1+2)+4$, ἕπεται ὅτι

$$3+5+2=(3+1+2)+4.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $(3+1+2)$ μαζὶ μὲ τὸν 4 ἀποτελεῖ τὸν $(3+5+2)$. Καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 25) τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $(3+5+2)-4=(3+1+2)$. ὅ.ἔ.δ.

Καὶ γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$.

Δι' αὐτὸ τήν διαφορὰν π.χ. $15-3$ ἢ $(10+5)-3$ εὑρίσκομεν ἀγράφως λέγοντες τρία ἀπὸ 5 ἴσον 2· 2 καὶ $10=12$.

Ἐὰν τὸ ἄνω παιδίον ἐχάριζε 5 βόλους, εἶναι ὡς νὰ μὴ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὴν ἀδελφήν του τίποτε. Θὰ εἶχεν ἑπομένως $3+2$, ἤτοι $(3+5+2)-5=3+2$. Ἄρα

Β΄. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἄθροισμα ἕνα προσθετέον αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.*

Οὕτω $17-7=(10+7)-7=10,23-3=(20+3)-3=20$ κτλ.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(3+5+2)-5=3+(5-5)+2=3+2$,

Καὶ γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma)-\beta=\alpha+\gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 43) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀκόλουθοι διαφοραὶ 17—7, 43—3, 78—8, 69—5.

44) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀκόλουθοι διαφοραὶ 105—5, 206—7, 309—7, 235—35.

§ 28. **Πρόβλημα ΙΙ**. *Εἶχέ τις 18 δραχμάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξώδευσε τὴν πρωΐαν 6 δραχμάς, τὴν μεσημβρίαν 3 καὶ τὸ ἑσπέρας 4. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς αὐτόν ;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Κατὰ τὴν σειρὰν τῆς δαπάνης ἔμειναν εἰς αὐτὸν 18—6=12, 12—3=9, 9—4=5 δραχμαί.

(Β΄ τρόπος). Ἐπειδὴ ἐξώδευσε τὸ ὅλον 6+3+4=13 δρχ, ἕπεται ὅτι τοῦ ἔμειναν 18—(6+3+4) ἢ 18—13=5 δραχ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: 18—(6+3+4)=[(18—6)—3]—4. Ἄρα :

Γ΄. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν ἕνα προσθετέον, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἄλλον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ τελειώσουν ὅλοι οἱ προσθετέοι.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἀπὸ τὸν 18 ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα 6+3+4 ἢ τὸν 13, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 5, ἤτοι 18—(6+3+4)=5, (1)

ὅθεν 18=(6+3+4)+5.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 20 Γ΄) εἶναι (6+3+4)+5=6+3+4+5, ἕπεται ὅτι 18=6+3+4+5.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ταύτην εὑρίσκομεν (§ 27Β΄) 18—6=3+4+5, ἀπὸ αὐτὴν προκύπτει ἡ ἰσότης (18—6)—3=4+5 καὶ ἀπὸ αὐτὴν προκύπτει ἡ [(18—6)—3]—4=5 (2)

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) προκύπτει (§ 14) ἡ ἰσότης 18—(6+3+4)=[18—6)—3]—4, ὅ.ἔ.δ.

Καὶ γενικῶς $A-(\alpha+\beta+\gamma)=[(A-\alpha)-\beta]-\gamma$.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον τὴν διαφορὰν π.χ. 200—163 ἢ 200—(100+60+3) εὑρίσκομεν καὶ οὕτω 200—100=100,

100—60=40, 40—3=37.

§ 29. **Πρόβλημα ΙΙΙ**. *Ἡ α΄ τάξις σχολείου εἶχε 40 μαθητάς, ἡ δὲ β΄ 46 μαθητάς. Ἀπὸ τὴν α΄ τάξιν ἀπεφοίτησαν 6 καὶ ἀπὸ τὴν β΄ 8 μαθηταί. Πόσοι μαθηταὶ ἔμειναν καὶ εἰς τὰς δύο τάξεις.*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Κατ' ἀρχὰς αἱ δύο τάξεις μαζὶ εἶχον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

40+46=86 μαθητάς. Ἀπεφοίτησαν δὲ ἀπὸ τὰς δύο τάξεις 6+8=14 μαθηταί. Ἔμειναν ἄρα εἰς τὰς δύο τάξεις

(40+46)—(6+8) ἢ 86—14=72 μαθηταί.

(Β΄ τρόπος). Εἰς τὴν α΄ τάξιν ἔμειναν 40—6 μαθηταί, εἰς δὲ τὴν β΄ 46—8. Ἑπομένως εἰς τὰς δύο τάξεις ἔμειναν

(40—6)+(46—8) ἢ 34+38=72 μαθηταί. Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους τῆς λύσεως ἐννοοῦμεν ὅτι

(40—6)+(46—8)=(40+46)—(6+8). Ἤτοι

Γ΄. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφοράς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους, ἀπὸ δὲ τοῦ α΄ ἀθροίσματος νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

*Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 40—6=34 καὶ 46—8=38 (1)

ἕπεται ὅτι (40—6)+(46—8)=34+38=72 (2)

καὶ 40=34+6, 46=38+8. (3)

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας (3) εὑρίσκομεν ὅτι

40+46=34+6+38+8=(34+38)+(6+8),

ὅθεν ἕπεται ὅτι (40+46)—(6+8)=34+38=72.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ ἀπὸ τὴν (2) προκύπτει ὅτι

(40—6)+(46—8)=(40+46)—(6+8). ὅ.ἔ.δ.

Γενικῶς: (α—β)+(γ—δ)+(ε—ζ)=(α+γ+ε)—(β+δ+ζ).

§ 30. **Πρόβλημα IV.** *Ὁ Γεώργιος εἶναι 9 ἐτῶν καὶ ὁ Δημήτριος 6 ἐτῶν. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν σήμερον καὶ πόση μετὰ 7 ἔτη;*

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι ἐφ' ὅσον δύο ἄνθρωποι ζῶσιν, ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν εἶναι πάντοτε ἡ ἰδία. Ἐπειδὴ δὲ σήμερον ἡ διαφορὰ εἶναι 9—6, μετὰ 7 δὲ ἔτη θὰ εἶναι (9+7)—(6+7), συμπεραίνομεν ὅτι 9—6=(9+7)—(6+7). Ἤτοι:

Δ΄. *Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

*Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 7—7=0, ἕπεται ὅτι 9—6=(9—6)+(7—7).

Ἐπειδὴ δὲ (§ 29) (9—6)+(7—7)=(9+7)—(6+7), ἕπεται ὅτι 9—6=(9+7)—(6+7) ὅ.ἔ.δ.

Καὶ γενικῶς: α—β=(α+γ)—(β+γ).

§ 31. **Πρόβλημα V.** *Ἐργάτης εἶχεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης 600 δραχ. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἑβδομάδος τι-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὸς ἀπέσυρε δι' ἑκτάκτους ἀνάγκας τοῦ 250 δραχ. καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς αὐτῆς ἑβδομάδος κατέθεσεν ἄλλας 200 δραχ. Πόσα χρήματα εἶχε τότε εἰς τὸ ταμιευτήριον ;

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Ἀφ' οὗ ἀπέσυρε 250 δραχμὰς καὶ ἔπειτα κατέθεσε πάλιν 200 δραχμάς, εἶναι ὡς νὰ ἀπέσυρε (250—200) δραχ. Ἔμειναν λοιπὸν εἰς τὸ ταμιευτήριον 600—(250—200) ἢ 600—50=550 δραχ.

(Β΄ τρόπος). Ἐὰν δὲν ἀπέσυρε καθ' ὅλου χρήματα, θὰ εἶχεν εἰς τὸ ταμιευτήριον (600+200) δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ἀπέσυρε τὰς 250 δραχ., ἔχει (600+200)—250 ἢ 800—250=550. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι 600—(250—200)=(600+200)—250. Ἤτοι :

Ε΄. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ταύτης.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$600-(250-200)=(600+200)-[(250-200)+200] \quad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἀφαιρέσεως εἶναι

$$(250-200)+200=250$$

ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται 600—(250—200)=(600+200)—250, ὅ.ἔ.δ.

Καὶ γενικῶς $A-(\alpha-\beta)=(A+\beta)-\alpha$.

Ἐκτέλεσις τῆς ἀφαιρέσεως.

§ 32. Α΄. *Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ* ***ἀπὸ ἄλλου, ὅταν τὸ ὑπόλοιπον*** *εἶναι μονοψήφιον.* Τὴν διαφορὰν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ τὸ μονοψήφιον ὑπόλοιπον μονοψηφίου ἀπὸ διψηφίου ἀριθμοῦ μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα ἀμέσως. Εἰς τοῦτο μᾶς βοηθεῖ καὶ ἡ γνῶσις τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν π. χ. ἀμέσως ὅτι 9—3=6, διότι ἐνθυμούμεθα ὅτι 3+6=9 καὶ 17—8=9, διότι 8+9=17.

§ 33. **Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου τυχόντος. Πρόβλημα.** *Ἐχρεώστει τις 368 δραχμὰς καὶ ἐπέστρεψε 245 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς χρεωστεῖ ἀκόμη ;*

Λύσις. Προφανῶς χρεωστεῖ 368 δραχ. —245 δραχ. Παρατη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προῦντες ὅτι ἐχρεώστει 3 ἑκατ. 6 δεκ. 8 μονόδραχ.
καὶ ὅτι ἐπέστρεψε 2 » 4 » 5 »
εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι χρεωστεῖ 1 » 2 » 3 »
ἤτοι 123 δραχμάς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἀρκεῖ Διάταξις τῆς πράξεως
νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον ψη- 368 μειωτέος
φίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ 245 ἀφαιρετέος
ψηφίον τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ 123 ὑπόλοιπον
μειωτέου.

Ἂν ἐπλήρωνεν 249 δραχμάς, ἔπρεπεν ἀπὸ 3 ἑκατ. 6 δεκ. 8 δραχ.
νὰ ἀφαιρέσωμεν 2 » 4 » 9 »

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ 8 δραχ. δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν 9 δραχ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δραχ. καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 1 δεκάδραχμον, ὅτε (§ 30 Δ') τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται. Οὕτω δὲ ὁ μὲν μειωτέος γίνεται 3 ἑκατ. 6 δεκ. 18 δρχ.
ὁ δὲ ἀφαιρετέος 2 ἑκατ. 5 δεκ. 9 δρχ.
καὶ τὸ ὑπόλοιπον 1 ἑκατ. 1 δεκ. 9 δρχ.

ἤτοι 119 δρχ.

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις.

§ 34. **Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως**. Σύμφωνα μὲ τὴν γνωστὴν (§ 25) ἰδιότητα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον, ἡ ἀφαίρεσις ἔγεινεν ὀρθῶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 45) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ὑπόλοιπα 373—251, 748—536, 987—846, 4567—356, 6684—762, 3467—2156, 28942—3831.

46) Βαρέλιον χωρεῖ 675 ὀκάδες οἴνου. Ἐὰν ρίψωμεν εἰς αὐτὸ 260 ὀκάδας καὶ ἔπειτα ἄλλας 187 ὀκάδας, πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἀκόμη ;

47) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κ)πόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων (1453 μ. χ.) μέχρι τῆς κηρύξεως τῆς ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως ;

48) Ἡ τυπογραφία ἐφευρέθη ὑπὸ τοῦ Γουτεμβέργου (Gutemberg) τὸ ἔτος 1436 μ. χ. Πόσα ἔτη παρῆλθον ἕως τώρα ;

49) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς (1492 μ. χ.) ὑπὸ τοῦ Χριστοφόρου Κολόμβου, μέχρι τῆς ἐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φευρέσεως τοῦ σιδηροδρόμου (1832 μ. χ.) ὑπὸ τοῦ Στέφενσον (Stephenson) ;

50) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐφευρέσεως τῆς ἀτμομηχανῆς (1799 μ. χ.) ὑπὸ τοῦ Βὰτ (Watt), μέχρι τῆς ἐφευρέσεως τοῦ σιδηροδρόμου ;

51) Γεωργὸς ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως σίτου 3280 δραχμάς, ἀπὸ οἶνον 1345 δραχμὰς καὶ ἀπὸ καπνὸν 42948 δραχμάς. Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ἔδωκε δι' ἀγορὰν ἵππου 3160 δραχμὰς καὶ δι' ἀγορὰν ἀμπέλου 1957 δραχμάς. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν ;

52) Παντοπώλης διέθεσεν ἐν ὅλῳ δι' ἀγορὰν καφὲ καὶ ζακχάρεως 6742 δραχ. ἐδαπάνησε δὲ ἄλλας 245 δραχμὰς διὰ φόρον καὶ μεταφορικὰ αὐτῶν. Ἔπειτα ἐπώλησε τὸν μὲν καφὲν ἀντὶ 4940 τὴν δὲ ζάκχαριν ἀντὶ 3108 δραχμῶν. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον ;

53) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π. χ.) ;

54) Κατὰ τὸ ἔτος 1928 εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ὀρυκτὰ ἀξίας 117 790 000 δραχμῶν, μέταλλα καὶ μεταλλικὰ εἴδη ἀξίας 1 345 720 000 δραχ., κλωστικαὶ ἶνες καὶ ὑφάσματα ἀξίας 139 076 000 δραχμῶν. Ἐξήχθησαν δὲ ὀρυκτὰ ἀξίας 6 860 000 δρχ. μέταλλα καὶ μεταλλικὰ εἴδη ἀξίας 1 061 000 δρχ. κλωστικαὶ ἶνες καὶ ὑφάσματα ἀξίας 2 878 000 δρχ. Ἡ ἀξία τῶν εἰσαχθέντων ἢ ἐξαχθέντων τούτων εἰδῶν εἶναι μεγαλυτέρα καὶ πόσον ;

Συντομίαι κατὰ τὴν ἄγραφον ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

§ 35. **Α΄. Πρόσθεσις τοῦ 9, 99, 999 κτλ. καὶ τοῦ 8, 98, 998 κτλ. εἰς ἄλλον ἀριθμόν.**

Α΄. Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα 18+9 προσθέσωμεν 1, εὑρίσκομεν (§ 21 Δ΄) 18+10. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦτο ἀφαιρέσωμεν 1, πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν 18+9. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου (§ 27 Α΄) εἶναι

(18+10)−1=17+10. Ὥστε : 18+9=17+10=27.

Ὁμοίως 67+99=66+100=166, κλπ.

Β΄. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

47+8=45+10=55, 183+98=181+100=281 κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 55) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως καὶ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ ἀθροίσματα 8+9, 43+9, 347+9, 3478+9, 7+99, 47+99, 8+99, 6+999, 50+999, 6982+999.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

56) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα 37+8, 563+8, 17+98, 794+98, 67+998, 3264+997.

§ 36. **Γ΄. Ἀφαίρεσις τοῦ 9, 99, 999, κτλ. ἀπὸ ἄλλον.** Ἡ διαφορὰ 47—9 εἶναι (§ 30 Δ΄) ἴση πρὸς 48—10=38. Ὁμοίως 263—99=264—100=164, 135—98=137—100=37 κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 57) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 63—9, 87—8, 116—9, 547—8, 273—99, 491—98, 2945—99, 4875—998.

58) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 18475—9999, 89709—9998, 164572—9999.

§ 37. **Δ΄. Ἀφαίρεσις τοῦ 11, 101, 1001 κτλ. ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ.** Ἡ διαφορὰ 56—11 εἶναι (§ 30 Δ΄) ἴση πρὸς 55—10=45. Ὁμοίως εἶναι

683—101=682—100=582 κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 59) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 73—11, 245—11, 893—101, 993—101, 2671—1001.

60) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἀγράφως αἱ διαφοραὶ 89—12, 793—102, 78—12, 793—102, 7874—1002.

Γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

§ 38 **Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις 3 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 8 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ διὰ 1 πῆχυν ἔδωκεν 8 δραχ., διὰ 2 πήχ.
θὰ δώσῃ 8 δραχ. +8 δραχ.
καὶ διὰ 3 πήχ. 8 » +8 » +8 δραχ. =24 δραχ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον, ἐπαναλαμβάνομεν τὰς 8 δραχμὰς 3 φοράς. Τὴν πρᾶξιν ταύτην ὀνομάζομεν πολ)σμὸν τῶν 8 δραχμῶν ἐπὶ 3.

Γενικῶς : *Πολ)σμὸς εἶναι πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει ἄλλος ἀριθμός.*

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐπαναλαμβάνομεν καλεῖται *πολ)στέος.* Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας φορὰς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολ)στέον, καλεῖται *πολ)στής.* Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολ)σμοῦ καλεῖται *γινόμενον.* Ὁ πολ)στέος καὶ ὁ πολ)στὴς καλοῦνται ὁμοῦ *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ πολ)τὴς εἶναι πάντοτε ἀφῳρημένος ἀριθμός, ὁ δὲ πολ)στέος δύναται νὰ εἶναι συγκεκριμένος καὶ ἀφῳρημένος.

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν πολ)στέον, διότι γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτοῦ.

Σημεῖον τοῦ πολ)σμοῦ εἶναι τὸ $\times$. Τοῦτο ἀναγινώσκεται *ἐπὶ* καὶ τίθεται μεταξὺ τοῦ πολ)στέου καὶ τοῦ πολ)στοῦ, ἀπὸ αὐτοὺς δὲ ὁ β΄ γράφεται δεξιὰ τοῦ α΄.

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον $\times$ ἀντικαθίσταται ἐνίοτε ἀπὸ μίαν τελείαν στιγμήν. Οὕτως ἀντὶ 8×3 γράφομεν $8\,.\,3$.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ. λέγεται *διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον* κτλ. αὐτοῦ. Τὸ διπλάσιον τριπλάσιον κτλ. ἀριθμοῦ λέγονται μὲ μίαν λέξιν ***πολλαπλάσια*** αὐτοῦ.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι: α΄) Ἂν $\alpha=6$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\mu=6\times\mu$. β΄) Ἂν $\alpha>6$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha\times\mu>6\times\mu$.

§ 39. **Γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.** Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ ἡ εὕρεσις τοῦ 5×3 ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ $5+5+5$. Συνήθως ὅμως μανθάνομεν καὶ ἐνθυμούμεθα τὰ τοιαῦτα γινόμενα. Εὑρίσκονται δὲ ταῦτα εἰς τὸν ἀκόλουθον Πυθαγόρειον πίνακα, τοῦ ὁποίου ἡ χρῆσις εἶναι εὔκολος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἰδιαιτέρως παρατηροῦμεν ὅτι: $1\times5=1+1+1+1+1=5$ καὶ $5\times1=5$, ἤτοι:

Ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι 1, τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄλλον παράγοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. (ἀγράφως). 61) Ἡ ὀκᾶ τῶν σταφυλῶν τιμᾶται 8 δραχ. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δόσῃ τις, ἵνα ἀγοράσῃ 4 ὀκάδας ἀπὸ αὐτά;

62) Ἠγόρασέ τις 4 ὀκάδας χόρτα πρὸς 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν ἓν εἰκοσιπεντάδραχμον. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ὀπίσω;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

63) Δακτυλογράφος γράφει 8 σελίδας τὴν ὥραν. Πόσας σελίδας θὰ γράψῃ εἰς 6 ὥρας ;

64) Πόσα ρούπια ἔχουσιν 7 πήχεις ;

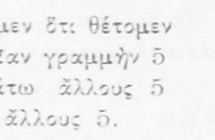
65) Πόσας ἡμέρας ἔχουσιν 9 ἑβδομάδες ;

66) Ὁρίσατε τὸ διπλάσιον, τὸ τριπλάσιον. τετραπλάσιον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 8, 9.

Ἰδιότητες τοῦ πολ)σμοῦ.

§ 40. **Α΄. Ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.**

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέτομεν εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν 5 βόλους ὑποκάτω ἄλλους 5 καὶ ὑποκάτω ἄλλους 5.



$$\left.\begin{matrix}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{matrix}\right\} = 5\times 3$$

$$3+3+3+3+3=3\times 5.$$

Ὅλοι οἱ βόλοι εἶναι 5+5+5.
ἢ 5×3. Ἀλλ' ἂν τοὺς μετρήσωμεν κατὰ στήλας, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 3×5. Ὥστε 5×3=3×5.

Γενικῶς $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$. Ἄρα.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξῃ ἡ τάξις τῶν παραγόντων.

Ἐφαρμογαί.

§ 41. **Α΄. Γινόμενον, τοῦ ὁποίου εἷς παράγων εἶναι 0.** Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ εἶναι.
0×4=0+0+0+0=0. Ἵνα δὲ ἰσχύῃ ἡ προηγουμένη ἰδιότης καὶ διὰ τὸ γινόμενον 4×0, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι 4×0=0×4=4.

Ἄρα : *Ὅταν ὁ εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας γινομένου εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.*

§ 42. **Β΄. Δοκιμὴ πολ)σμοῦ.** Εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς προηγουμένης (§ 40 Α΄) ἰδιότητος στηρίζεται ἡ γνωστὴ δοκιμὴ τοῦ πολ)σμοῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολ)σμὸν θέτοντες τὸν πολ)στέον ὡς πολ)στὴν καὶ τἀνάπαλιν.

§ 43. **Γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ.** *Διὰ νὰ μάθωμεν πόσας δεκάρας ἔχουσι 4 δραχμαί, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.* Ἀφ' οὗ 1 δραχμὴ ἔχει δέκα δεκάρες, αἱ 4 δραχμαὶ θὰ ἔχωσι 10×4 δεκ.=(10+10+10+10) δεκ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μονάδες τῶν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προσθετέων ἔχουσιν ἄθροισμα 0, αἱ δὲ δεκάδες 4, ἕπεται ὅτι $10\times4=40$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $10\times74=740$ κτλ. Ἐπειδὴ δὲ $74\times10=10\times74=740$, ἕπεται ὅτι καὶ $74\times10=740$· ὁμοίως εἶναι $15\times100=100\times15=1500, 7\times1000=1000\times7=7000$ κτλ.

Ἄρα : *Ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι 10,100,1000 κτλ. πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἄλλου παράγοντος ἀντιστοίχως, ἕν, δύο τρία κτλ. μηδενικά.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 67) Πόσα λεπτὰ ἔχουσι 43 δραχμαὶ καὶ πόσα 568 δραχμαί ;

68) Ἡ ὀκᾶ τῶν ἀνθράκων τιμᾶται 3 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται 100 ὀκάδες καὶ πόσον 1000 ὀκάδες ἀνθράκων ;

69) Ὁ στατὴρ ἔχει 44 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἔχουσι 1000 στατῆρες ;

70) Πόσα δράμια ἔχουσι 10 ὀκάδες καὶ πόσα 100 ὀκάδες ;

71) Τυρέμπορος ἠγόρασε 1000 ὀκάδας τυροῦ, ὅστις ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 27 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἔπειτα ἐπώλησεν αὐτὸν πρὸς 36 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν ;

§ 44. **Β'. Πολ)σμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν.**

Πρόβλημα. *Πατὴρ εἶχε 3 υἱοὺς καὶ ἔδωκε εἰς κάθε ἕνα τὰ ἑξῆς ποσά. Διὰ τετράδια 8 δραχμάς, διὰ στυπόχαρτον 2 δραχμὰς καὶ διὰ μολύβια 5 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;*

Λύσις. (Α' τρόπος) Ἐπειδὴ διὰ κάθε υἱὸν ἔδωκε 8 δραχ. +2 δραχ. +5 δραχ., διὰ τοὺς 3 υἱοὺς ἔδωκεν

$(8$ δραχ.$+2$ δραχ.$+5$ δραχ.$)\times3=15$ δραχ.$\times3=45$ δραχ.

(Β' τρόπος). Ἐπειδὴ διὰ τετράδια ἔδωκεν $(8$ δρ.$)\times3$, διὰ τὰ στυπόχαρτα $(2$ δραχ.$)\times3$ καὶ διὰ τὰ μολύβια $(5$ δραχ.$)\times3$, ἕπεται ὅτι ἔδωκε τὸ ὅλον $(8$δρ$\times3)+(2$δρ$\times3)+(5$δρ$\times3)$. Ὥστε

$$(8+2+5)\times3=(8\times3)+(2\times3)+(5\times3).$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ εἶναι

$$(8+2+5)\times3=(8+2+5)+(8+2+5)+(8+2+5).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 22Ε', 20Β') εἶναι

$$(8+2+5)+(8+2+5)+(8+2+5)=8+2+5+8+2+5+8+$$
$$+2+5=(8+8+8)+(2+2+2)+(5+5+5+5),$$

ἕπεται ὅτι $(8+2+5)\times3=(8\times3)+(2\times3)+(5\times3)$. Ε.Ἐ.Δ.

Γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma).\delta=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 17×3 ἢ $(10+7)\times3$ ἀγράφως λέγοντες τρὶς δέκα γίνεται 30, τρὶς 7 γίνεται 21, τέλος $30+21=51$.

Ὁμοίως τὸ γινόμενον 532×3 εἶναι ἴσον πρὸς

$$(500\times3)+(30\times3)+(2\times3)$$

ἢ $532\times3=(5\text{ἑκ}\times3)+(3\text{δεκ}\times3)+(2\text{μον}\times3)$.

Διὰ αὐτὸν τὸν λόγον, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον πολ)ζομεν χωριστὰ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 72) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἑξῆς γινόμενα

18×2, 12×5, 27×3, 47×4, 267×3, 592×5.

73) Ἠγόρασέ τις ζάκχαριν, μακαρόνια καὶ ὄρυζαν ἀπὸ 5 ὁκάδας ἓξ ἑκάστου εἴδους. Καὶ τὴν μὲν ζάκχαριν, ἠγόρασε πρὸς 22 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὰ μακαρόνια πρὸς 18 δραχ. καὶ τὴν ὄρυζαν πρὸς 16 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον ;

§ 45. **Γ'. Πολ)σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα.**

Πρόβλημα. *Ἕκαστος ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν κατωτέρων τάξεων Γυμνασίου προσέφερεν ὑπὲρ ἀσθενοῦντος οἰκογενειάρχου 5 δραχ. Ἡ μία ἀπὸ τὰς τάξεις ταύτας ἔχει 42 ἡ ἄλλη 38 καὶ ἡ τρίτη 32 μαθητάς. Πόσα χρήματα προσέφερον ὅλοι οἱ μαθηταὶ οὗτοι ;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ ὅλοι οἱ μαθηταὶ εἶναι $(42+38+32)$, ἕκαστος δὲ προσέφερεν ἀπὸ 5 δραχμάς, ὅλοι ὁμοῦ προσέφερον $5\times(42+38+32)$ δραχ. ἢ $5\times112=560$ δραχ.

(Β΄. τρόπος). Οἱ μαθηταὶ τῆς μιᾶς τάξεως προσέφερον $5\times42=210$ δραχ., τῆς ἄλλης $5\times38=190$ δραχ. καὶ τῆς τελευταίας $5\times32=160$ δραχ. Ὅλοι ἄρα ὁμοῦ προσέφερον $(5\times42)+(5\times38)+(5\times32$ ἢ $210+190+160=560$ δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι

$$5\times(42+38+32)=(5\times42+(5\times38)+(5\times32).$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν αὐτὸν ἐπὶ ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὴν Α΄ (§ 40) ἰδιότητα εἶναι.

$$5\times(42+38+32)=(42+38+32)\times5.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 44 Β΄) εἶναι

$(42+38+32)\times5=(42\times5)+(38\times5)+(32\times5)$, ἕπεται ὅτι

$5\times(42+38+32)=(42\times5)+(38\times5)+(32\times5)$, ὅθεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$5\times(42+38+32)=(5\times42)+(5\times38)+(5\times32)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)+(\alpha\times\delta)$.

§ 46. **Δ΄. Πολ)σμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.**

Πρόβλημα. *Ἐργάτης ἔχει ἡμερομίσθιον 75 δραχμάς, δαπανᾷ δὲ καθ' ἡμέραν 40 δραχμάς. Πόσα χρήματα περισσεύουσιν εἰς 3 ἡμέρας.*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Ἐπειδὴ καθ' ἡμέραν περισσεύουσι (75—40) δραχ, εἰς 3 ἡμέρας περισσεύουσι

$$(75-40)\times3=35\times3=105 \text{ δραχ.}$$

(Β΄ τρόπος). Εἰς τὰς τρεῖς ἡμέρας λαμβάνει 75×3 καὶ δαπανᾷ 40×3 δραχ. περισσεύουσι δὲ $(75\times3)-(40\times3)$ δραχ.

Ὥστε $(75-40)\times3=(75\times3)-(40\times3)$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ χωριστὰ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ εἶναι

$$(75-40)\times3=(75-40)+(75-40)+(75-40).$$

Ἐπειδὴ (§ 29 Δ΄) εἶναι

$(75-40)+(75-40)+(75-40)=(75+75+75)-(40+40+40)$, ἕπεται ὅτι $(75-40)\times3=(75\times3)-(40\times3)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $(\alpha-\beta)\times\mu=(\alpha\times\mu)-(\beta\times\mu)$.

Ἐφαρμογή. Τὸ γινόμενον 9×17 εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $9=10-1$, ἕπεται ὅτι

$$9\times17=(10-1)\times17=170-17=153.$$

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $23\times99=2300-23=2277$.

Ἄρα : *Ἐὰν ὅλα τὰ ψηφία παράγοντος εἶναι 9, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ ἀπὸ τὸν ἄλλον παράγοντα μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰ 9 καὶ ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 74) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως τὰ γινόμενα 9×15, 9×73, 9×267, 99×17, 99×86, 999×954.

75) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τρόπον ἀνάλογον τὰ γινόμενα

$$8\times47,\ 8\times173,\ 98\times15,\ 998\times23.$$

§ 47. **Ε΄. Πολ)σμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα.**

Πρόβλημα. *Πατὴρ ἔχει 3 υἱοὺς καὶ 2 θυγατέρας, ἔδωκε δὲ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς ἕκαστον 8 δραχμὰς διὰ νὰ ἀγοράσῃ τετράδια, 12 δρ. διὰ νὰ μετάσχῃ ἐράνου ὑπὲρ φιλανθρωπικοῦ σκοποῦ καὶ 4 δραχμὰς διὰ διάφορα μικροέξοδα τῆς ἡμέρας. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον ;

Λύσις. (Α΄. τρόπος). Διὰ κάθε τέκνον ἔδωκε (8+12+4) δραχ. Ἐπομένως διὰ τὰ (3+2) τέκνα ἔδωκε.

$$(8+12+4)\times(3+2)=24\times5=120 \text{ δραχ.}$$

(Β΄. τρόπος). Εἰς τοὺς υἱοὺς ἔδωκε (8×3) δραχ. διὰ τετράδια, (12×3) διὰ τὸν ἔρανον καὶ (4×3) διὰ τὰ μικροέξοδα. Ἤτοι τὸ ὅλον (8×3)+(12×3)+(4×3). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς θυγατέρας ἔδωκε τὸ ὅλον (8×2)+(12×2)+(4×2) δραχ. Ὥστε

$$(8+12+4)\times(3+2)=(8\times3)+(12+3)+(4\times3)+(8\times2)+$$
$$+(12\times2)+(4\times2).$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ α΄ ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ β΄ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα 8+12+4 ὡς εὑρεθέν, κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (§ 45Γ΄) θὰ εἶναι :

$$(8+12+4)\times(3+2)=(8+12+4)\times3+(8+12+4)\times2.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 44 Β΄) εἶναι

$$(8+12+4)\times3=(8\times3)+(12\times3)+(4\times3) \text{ καὶ}$$
$$(8+12+4)\times2=(8\times2)+(12\times2)+(4\times2), \text{ ἕπεται ὅτι}$$
$$(8+12+4)\times(3+2)=(8\times3)+(12\times3)+(4\times3)$$
$$+(8\times2)+(12\times2)+(4\times2). \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\delta+\varepsilon)=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta)$
$+(\alpha\times\varepsilon)+(\beta\times\varepsilon)+(\gamma\times\varepsilon).$

Διὰ αὐτὸν τὸν λόγον τὸ γινόμενον 12×23 ἢ (10+2)×(20+3) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀγράφως λέγοντες :

10×20=200, 2×20=40, 10×3=30, 2×3=6, τέλος

$$200+40+30+6=276.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 76) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ ἀγράφως τὰ γινόμενα 11×15, 15×13, 25×11, 13×34.

77) Γεωργὸς ἔχει 8 στρέμματα ἀγροῦ καὶ 5 στρέμματα ἀμπέλου. Ἐδαπάνησε δὲ 12 δραχμὰς κατὰ στρέμμα διὰ νὰ λιπάνῃ τὰ κτήματα ταῦτα καὶ 90 δραχμὰς τὸ στρέμμα διὰ τὴν καλλιέργειαν αὐτοῦ. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὸ ὅλον ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐξήγησις τοῦ κανόνος τοῦ πολ)σμοῦ.

§ 48. **Γινόμενον, τοῦ ὁποίου εἷς παράγων λήγει εἰς μηδενικά.** Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τῆς ζαχχάρεως τιμᾶται 20 δραχμάς, αἱ 3 ὀκάδες τιμῶνται 20 δρχ. $\times 3 = 20$ δρχ. $+ 20$ δρχ. $+ 20$ δρχ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν μονάδες ἔχουσιν ἄθροισμα 0, αἱ δὲ δεκάδες ἔχουσιν ἄθροισμα $2+2+2=2\times 3=6$, ἕπεται ὅτι $20\times 3=60$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 40Α΄) εἶναι $3\times 20=20\times 3$, ἕπεται ὅτι $3\times 20=60$.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $2\times 1200=1200\times 2$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 12×2 καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψωμεν δύο 0. Ἤτοι εἶναι

$$2\times 1200=1200\times 2=2400.$$

Ἄρα : *Ἐὰν ὁ εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας γινομένου λήγῃ εἰς μηδενικά, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ, ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν, ὅσα μηδενικὰ παρελείφθησαν.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 78) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα 19×50 27×30, 300×27, 400×34, 500×45, 804×400, 1024×900.

79) Πόσα δράμια ἔχουσιν 8 ὀκάδες καὶ πόσα 12 ὀκάδες ;

80) Πόσα δράμια ἔχει ὁ στατήρ ;

81) Ἐργάτης λαμβάνει 70 δραχμὰς καθ' ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν καὶ δαπανᾷ 50 δραχμὰς καθ' ἑκάστην. Πόσον περίσσευμα ἔχει καθ' ἑκάστην ἑβδομάδα ; (Τὰς Κυριακὰς δὲν ἐργάζεται).

82) Ἀμαξοστοιχία διανύει 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ἐχρειάσθη διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Ἀθηνῶν εἰς Λάρισσαα 14 ὥρας· 3 ὥρας ὅμως ἀπὸ αὐτὰς παρέμεινεν εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμούς. Πόσον ἀπέχει ἡ Λάρισσα τῶν Ἀθηνῶν ;

§ 49. **Γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς μηδενικά.** Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, ἑπομένως αἱ 60 ὀκάδες θὰ ἔχωσι 400 δράμ$\times 60$.

Ἐπειδὴ δὲ $4\times 6=24$, ἕπεται (§ 48) ὅτι $400\times 6=2400$ καὶ ἑπομένως (§ 48) 400 δράμ$\times 60=24000$ δράμια.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λήγουσιν εἰς μηδενικά, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία αὐτῶν καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν, ὅσα παρελείφθησαν μηδενικά.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 83) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ ἀκόλουθα γινόμενα 30×20, 70×40, 300×20, 800×900, 270×100 23400×500.

84) Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουσιν 70 ὧραι;

85) Βιβλίον ἔχει 230 σελίδας καὶ ἑκάστη σελὶς ἔχει 30 στίχους. Πόσους στίχους ἔχει τὸ βιβλίον τοῦτο;

86) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 70 ἄνδρες, 40 γυναῖκες καὶ 20 παιδία. Λαμβάνει δὲ ἕκαστος ἀνὴρ 80 δραχ, ἑκάστη γυνὴ 60 δραχμὰς καὶ ἕκαστον παιδίον 30 δραχμάς. Πόσα χρήματα λαμβάνουσιν ὅλοι ὁμοῦ τὴν ἡμέραν;

§ 50. **Γινόμενον δύο τυχόντων ἀριθμῶν.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 4967×365, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $365=300+60+5$ ἔπεται ὅτι

$$4967\times365=4967\times(300+60+5) \quad \text{ἢ (§ 45 Γ')}$$
$$4967\times365=(4967\times300)+(4967\times60)+(4967\times5).$$

Διάταξις τῆς πράξεως.

Ἐπειδὴ δὲ

	4967
	365
$4967\times5=24835$	24835
$4967\times60=298020=29802$ δεκάδες . .	29802
$4967\times300=1490100=14901$ ἑκατοντάδ. .	14901

ἔπεται ὅτι

$4967\times365=1812955$ 1812955

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ γνωστὸς κανὼν τοῦ πολ)σμοῦ.

ΣΗΜ. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ψηφίων τοῦ πολ)στοῦ περιέχηται ἓν ἢ περισσότερα 0, ὁ πολ)σμὸς τοῦ πολστέου μὲ ἕκαστον τούτων παραλείπεται. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ γράφωμεν τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 87) Ἓν κιβώτιον δύναται νὰ περιλάβῃ 75 ὀκ. σάπωνος. Πόσον σάπωνα δύνανται νὰ περιλάβωσι 38 τοιαῦτα κιβώτια;

88) Πόσας ὥρας ἔχει ἓν κοινὸν ἔτος καὶ πόσας ἓν δίσεκτον;

89) Πόσας ὀκάδας ἔχουσιν 104 στατῆρες;

90) Πόσους μῆνας ἔχουσι 15 ἔτη;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛ)ΣΜΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 51. **Πρόβλημα Ι**. *Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 56 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται 4 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ 1 πῆχυς τιμᾶται 56 δραχ, οἱ 4 πήχεις τιμῶνται 4 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 56 δρ. $\times 4 = 224$ δρχ.

§ 52. **Πρόβλημα ΙΙ**. *Κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκάδων. Πόσον βάρος ἔχουσι 5 κιβώτια τοιαῦτα ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ 1 κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκ, τὰ 5 κιβώτια θὰ ἔχωσι βάρος 12 ὀκ. $\times 5 = 60$ ὀκ.

§ 53. **Πρόβλημα ΙΙΙ**. *Μὲ ἓν πεντάδραχμον ἀγοράζομεν 3 μολυβδοκόνδυλα. Μὲ 7 πεντάδραχμα, πόσα τοιαῦτα μολυβδοκόνδυλα ἀγοράζομεν ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ μὲ 1 πεντ. ἀγοράζομεν 3 μολ., μὲ 7 πεν. θὰ ἀγοράζωμεν $3^{\mu} \times 7 = 21$ μολυβδοκόνδυλα.

Εἰς ἕκαστον ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα εἰς μίαν ὡρισμένην μονάδα ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον πλῆθος μονάδων ἄλλου ποσοῦ. Ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ εἰς ὡρισμένον πλῆθος μονάδων τοῦ πρώτου ποσοῦ ὁμοειδῶν πρὸς τὴν μίαν ἐκείνην μονάδα πόσαι μονάδες τοῦ δευτέρου ποσοῦ ἀντιστοιχοῦσι.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τοῦτο συντόμως λέγομεν : *Δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων.* Ὅταν δηλ. λέγωμεν ὅτι ἓν κιβώτιον ἔχει βάρος 12 ὀκάδων, θεωροῦμεν τὰς 12 ὀκάδας ὡς τιμὴν τοῦ βάρους ἑνὸς κιβωτίου.

Ἐκ τοῦ τρόπου δὲ τῆς λύσεως τῶν προηγουμένων προβλημάτων συμπεραίνομεν ὅτι :

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς ἐκείνην, πολλαπλασιάζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλῶν μονάδων.

Ὥστε, ἂν ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος εἶναι α, ἡ τιμὴ χ τῶν β ὁμοειδῶν μονάδων θὰ εἶναι $\alpha \times \beta$, ἤτοι $\chi = \alpha \times \beta$, (1)

Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται τύπος· δυνάμεθα δὲ μὲ αὐτὴν νὰ λύωμεν κάθε πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀρκεῖ νὰ θέτωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β τοὺς ὡρισμένους ὑπὸ τοῦ προβλήματος ἀριθμούς. Π. χ. διὰ τὸ Ι πρόβλημα ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\chi = 56$ δρ. $\times 4 = 224$ δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 91) Γεωργὸς ἐπώλησε 435 ὀκάδας καπνοῦ πρὸς 48 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ;

92) Ἓν βιβλίον ἔχει 183 σελίδας καὶ κάθε σελὶς 28 στίχους. Πόσους στίχους ἔχει τὸ βιβλίον τοῦτο ;

93) Ἔμπορος ἠγόρασεν 65 πήχεις ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον τοῦ ἐκόστισεν 2600 δραχμάς. Ἐὰν πωλήσῃ αὐτὸ πρὸς 48 δραχμὰς τὸν πῆχυν, θὰ κερδίσῃ ἢ θὰ ζημιωθῇ καὶ πόσον ;

94) Κιβώτιον ἔχει βάρος κενὸν μὲν 7 ὀκάδων, πλῆρες δὲ σάπωνος 62 ὀκάδων. Πόσας ὀκάδας σάπωνος ἔχουσι 25 τοιαῦτα κιβώτια ;

95) Ζωέμπορος ἠγόρασε 300 ἀρνία πρὸς 285 δραχμὰς ἕκαστον. Ἐκ τούτων ἐπώλησε τὰ μὲν 147 πρὸς 300 δραχμὰς τὸ ἕν, τὰ δὲ ἄλλα πρὸς 308 δραχμὰς τὸ ἕν. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν ;

96) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 18 ἐργάται πρὸς 70 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, 40 ἐργάτριαι πρὸς 56 δραχμὰς τὴν ἡμέραν καὶ 20 παιδία πρὸς 43 δραχμὰς τὴν ἡμέραν. Πόσα χρήματα λαμβάνουσιν ὅλοι ὁμοῦ τὴν ἡμέραν ;

97) Φιλάνθρωπος διένειμε κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τοῦ υἱοῦ του ἀπὸ 45 δραχμὰς εἰς 18 πτωχοὺς καὶ ἀπὸ 300 δραχμὰς εἰς τὰ σχολικὰ ταμεῖα τῶν τριῶν σχολείων τῆς πόλεως εἰς τὴν ὁποίαν ἐγεννήθη ὁ υἱός του. Πόσα χρήματα διένειμε τὸ ὅλον;

98) Ἀπὸ δύο πόλεις ἀναχωροῦσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν δύο ὁδοιπόροι καὶ κατευθύνονται ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον. Ὁ πρῶτος διανύει 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ὁ δὲ ἄλλος 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ συνηντήθησαν μετὰ 4 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των. Πόσον ἀπέχουσιν αἱ πόλεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξεκίνησαν ;

99) Ἀμαξοστοιχία διανύουσα 28 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν ἀπὸ ἕνα σταθμὸν καὶ μετὰ 4 ὥρας εὑρίσκετο 13 χιλιόμετρα μακρὰν ἀπὸ τὸν ἄλλον σταθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον κατευθύνεται. Πόσον ἀπέχουσιν οἱ σταθμοὶ οὗτοι ;

100) Εἰς ἓν σχολεῖον ἐνεγράφησαν ἐφέτος 283 μαθηταὶ καὶ ἐπλήρωσεν ἕκαστος 100 δραχμὰς εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον. Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ἡ σχολικὴ ἐπιτροπεία ἠγόρασεν 8 χάρτας πρὸς 25 δραχμὰς ἕκαστον, 3 μελανοπίνακας πρὸς 235 δραχμὰς ἕκαστον, 10 εἰκόνας πρὸς 35 δραχμὰς ἑκάστην, ἐδαπάνησε δὲ διὰ τὸν ὑδροχρωματισμὸν τοῦ σχολείου 560 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

§ 54. **Πρόβλημα Ι.** *Δωμάτιον ἔχει 3 παράθυρα, κάθε παράθυρον ἔχει 6 ὑαλοπίνακας καὶ κάθε ὑαλοπίναξ τιμᾶται 12 δραχ. Πόσον τιμῶνται ὅλοι οἱ ὑαλοπίνακες τοῦ δωματίου;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ ὁ ὑαλοπίναξ τιμᾶται 12 δραχ, οἱ 6 ὑαλοπίνακες ἑνὸς παραθύρου τιμῶνται $12\times6=72$ δραχ. Οἱ δὲ ὑαλοπίνακες τῶν 3 παραθύρων τιμῶνται 72 δραχ. $\times3=216$ δραχ.

Τὸ ἐξαγόμενον 216 ὀνομάζεται γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 12, 6 καὶ 3 σημειώνεται δὲ οὕτω $12\times6\times3$.

Γενικῶς: *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν πολ)σωμεν τὸν α΄ παράγοντα ἐπὶ τὸν β΄, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν γ΄, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ τελειώσουσιν ὅλοι οἱ παράγοντες.*

Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.

§ 55. **Α΄. Ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.** Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραθύρων τοῦ δωματίου εἶναι

$(12\times6\times3)$ δραχ.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ λύσωμεν τὸ ἴδιον πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς.

Τὰ 3 παράθυρα ἔχουσιν $(6\times3)=18$ ὑαλοπίνακας.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος τιμᾶται 12 δραχ. ὅλοι τιμῶνται 12×18 δραχ. Ἐπειδὴ δὲ $12\times18=18\times12$ καὶ $6\times3\times12=18\times12$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, ἔπεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν παραθύρων εἶναι $(6\times3\times12)$ δραχ. Ὥστε:

$$12\times6\times3=6\times3\times12.$$

Ἄρα: *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξῃ ἡ τάξις αὐτῶν.*

§ 56. **Β΄. Συνθετικὴ ἰδιότης.** Ἀπὸ τοὺς 2 τρόπους τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἐννοοῦμεν ὅτι

$$12\times6\times3=12\times18$$

Ἄρα: *Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς παράγοντας μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν προηγουμένην (§ 55 Α΄) ἰδιότητα εἶναι $12\times6\times3=6\times3\times12$. Ἀλλὰ $6\times3\times12=18\times12$, διότι ἡ ἀντι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατάστασις τοῦ 6×3 διὰ τοῦ 18 εἶναι μερικὴ ἐκτέλεσις τοῦ πολ)σμοῦ (§ 54). Ἄρα $12\times6\times3=18\times12$ ἢ

$$12\times6\times3=12\times18, \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Γενικῶς: $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

Διὰ τοῦτο $7\times2\times5=7\times10=70$,

$$4\times3\times25\times2=100\times6=600.$$

§ 57. **Γ'. Ἀναλυτικὴ ἰδιότης.** Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι: $12\times18=12\times6\times3$ καὶ $\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$.

Ἄρα: *Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι γινόμενον αὐτόν.*

§ 58. **Δ'. Πολ]σμὸς γινομένου ἐπὶ ἀριθμόν.**

Πρόβλημα Ι. *Ἐκαλλιέργησέ τις 3 ἀγροὺς ἀπὸ 8 στρέμματα ἕκαστον. Ἕκαστον στρέμμα ἀπέδωκεν 210 ὀκάδας σίτου, τὸν ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν;*

Λύσις. (Α' τρόπος), Οἱ τρεῖς ἀγροὶ ἔχουσιν 24 στρέμματα. Τὰ στρέμματα ταῦτα ἀπέδοσαν (210×24) ὀκάδας σίτου.

Ἀπὸ αὐτὰς εἰσέπραξεν $6\times(210\times24)$ ἢ $(6\times210\times24)$ δραχ.

$$=30240 \text{ δραχ.}$$

(Β' τρόπος). Ὁ εἷς ἀγρὸς ἀπέδωκεν (210×8) ὀκάδας. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβεν $6\times(210\times8)$ ἢ $(6\times210\times8)$ δραχ. (§ 57 Γ'). Ἀπὸ δὲ τοὺς τρεῖς ἀγροὺς ἔλαβεν $(6\times210\times8)\times3$ δραχ.

Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους ἐννοοῦμεν ὅτι

$$(6\times210\times8)\times3=6\times210\times24, \text{ ἤτοι:}$$

Διὰ νὰ πολ)σωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ τοὺς ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.

Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα εἶναι

$$(6\times210\times8)\times3=6\times210\times8\times3,$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 56 Β') εἶναι $6\times210\times8\times3=6\times210\times24$.

ἕπεται ὅτι $(6\times210\times8)\times3=6\times210\times24$, ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

§ 59. **Ε'. Γινόμενον γινομένων. Πρόβλημα ΙΙ.** *Δύο ἀδελφοὶ εἶχον ἀπὸ 25 πρόβατα ἕκαστος. Ἕκαστον πρόβατον ἀπέδωκε 3 ὀκ. μαλλίου, τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη πρὸς 30 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβον;*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις (Α΄ τρόπος) Τὰ πρόβατα ὅλα ἦσαν 25×2. Ἀπὸ τὸ μαλλίον ἑκάστου ἔλαβον (30×3) δραχ. Ἐπομένως ἀπὸ τὸ μαλλίον ὅλων τῶν προβάτων ἔλαβον $(30\times3)\times(25\times2)$ ἢ $90\times50=$ $=4500$ δραχμάς.

(Β΄ τρόπος). Τὰ 25×2 πρόβατα ἀπέδωκαν $3\times(25\times2)$ ἢ $3\times25\times2$ (§ 57 Γ΄) ὀκάδας μαλλίου. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβον $30\times(3\times25\times2)$ ἢ $30\times3\times25\times2$ ἢ 4500 δραχμάς.

Ἀπὸ τοὺς τρόπους τούτους τῆς λύσεως ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$(30\times3)\times(25\times2)=30\times3\times25\times2,$$ ἤτοι :

Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται πρὸς γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάντας τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων τούτων καὶ μόνον αὐτούς.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι (§ 57 Γ΄)

$$(30\times3)\times(25\times2)=(30\times3)\times25\times2=30\times3\times25\times2.$$

Γενικῶς : $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\delta\times\varepsilon)\times(\zeta\times\eta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon\times\zeta\times\eta.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 101) Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ γραφῆς καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῆς συνθετικῆς ἰδιότητος τὸ γινόμενον $2\times12\times25\times4$.

102) Νὰ εὑρεθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ γινόμενον

$$15\times125\times8 \text{ καὶ τὸ } 3\times20\times125\times8.$$

103) Νὰ εὑρεθῶσιν ἄνευ γραφῆς καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῆς ἀναλυτικῆς ἰδιότητος τὸ γινόμενα 18×4, 15×8, 12×25 καὶ τὸ $75\times8\times5$.

104) Πόσα δράμια ἔχουσι 10 στατῆρες ;

105) Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά, τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα λεπτά. Πόσα δευτερόλεπτα ἔχει τὸ ἡμερονύκτιον ;

106) Βιβλίον ἔχει 164 σελίδας, ἑκάστη σελὶς ἔχει 30 στίχους καὶ κάθε στίχος ἔχει 46 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει ὅλον τὸ βιβλίον ;

107) Κιβώτιον ἔχει 6 στρώματα σάπωνος, κάθε στρῶμα ἔχει 4 σειράς, κάθε σειρὰ ἔχει 5 πλάκας σάπωνος καὶ κάθε πλὰξ τιμᾶται 7 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ περιεχομένου σάπωνος ;

108) Σχολεῖον ἔχει 6 τάξεις, ἑκάστη τάξις ἔχει 20 θρανία καὶ εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 2 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχει τὸ σχολεῖον τοῦτο ;

Δ΄. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

§ 60. **Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα διαιρέσεως.** Ἂν μοιράσωμεν 20 δραχ. εἰς 4 πτωχοὺς δίδοντες μίαν, μίαν εἰς ἕκαστον, εὑρίσκο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεν ὅτι θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 5 δραχμὰς χωρὶς περίσσευμα· ἤτοι ἡ διαφορὰ $20-(5\times4)=0$. Ἐὰν μοιράσωμεν 23 δραχ. θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 5 δραχμάς, περισσεύουσι δὲ 3 δραχμαί, ἤτοι

$$23-(5\times4)=3$$

Ἡ ἐργασία αὕτη ὀνομάζεται μερισμὸς τοῦ 20 ἢ 23 διὰ τοῦ 4.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διαθέτομεν 20 ἢ 23 δραχ. διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ὕφασμα τῶν 4 δραχ. τὸν πῆχυν. Ἐὰν δίδωμεν ἀνὰ 4 δραχ. εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβωμεν 5 πήχεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία εἶναι $4\times5=20$ δραχ. Ἐπομένως εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν οὐδὲν περισσεύει, εἰς δὲ τὴν 6΄ περίπτωσιν περισσεύουσι 3 δραχ., ἤτοι

$$20-(4\times5)=0 \quad \text{καὶ} \quad 23-(4\times5)=3$$

Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται *μέτρησις* τῶν 20 ἢ 23 δραχμῶν διὰ τῶν 4 δραχμῶν.

Τὸν μερισμὸν καὶ τὴν μέτρησιν τοῦ 23 διὰ τοῦ 4 καλοῦμεν ***διαίρεσιν*** τοῦ 23 διὰ τοῦ 4.

Παρατηροῦντες ὅτι $4\times5=20<23$ ἀλλὰ $4\times6>23$ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον, ὁ ὁποῖος πολ)ζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα χωροῦσιν εἰς τὸν πρῶτον.

Ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς λέγεται ***διαιρετέος (Δ,)*** ὁ δὲ δεύτερος ***διαιρέτης (δ)*** καὶ ὁ γ΄ ***πηλίκον (π).***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης καλεῖται καὶ ***ὑπόλοιπον (υ)*** τῆς διαιρέσεως.

Ἡ διαιρεσις δὲ λέγεται τελεία ἢ ἀτελής, καθ' ὅσον τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0 ἢ ἄλλος ἀριθμός.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι : α΄) *Ὁ διαιρετέος τελείας διαιρέσεως εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.* Ἤτοι

$$\Delta=\delta\times\pi.$$

β΄) *Ὁ διαιρετέος ἀτελοῦς διαιρέσεως ὑπερβαίνει τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.*

Ἤτοι $$\Delta=(\delta\times\pi)+\upsilon$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς τρόπος δοκιμῆς τῆς διαιρέσεως.

Προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον τὸ ὑπόλοιπον. Οὕτω πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἂν ἡ διαίρεσις καὶ ἡ δοκιμὴ ἔγιναν χωρὶς λάθος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ διαίρεσις π. χ. τοῦ 20 διὰ 4 σημειοῦται οὕτω 20 : 4 καὶ ἀναγινώσκεται 20 διὰ 4.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι : α') Ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha:\mu=\beta:\mu$.

β') Ἂν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha:\mu>\beta:\mu$, ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι.

ΣΗΜ. Ἰδιαιτέρως παρατηροῦμεν ὅτι $\Delta:\Delta=1$ καὶ $0:\Delta=0$. Τῷ ὄντι· $\Delta\times1=\Delta$ καὶ $\Delta\times0=0$.

§ 61. **Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.** *Πόσα ψηφία ἔχει τὸ πηλίκον ἑκάστης τῶν διαιρέσεων 2467 : 582 καὶ 7742:89;*

Α'. Ἐπειδὴ $582\times10=5820>3467$ τὸ πηλίκον εἶναι <10, ἤτοι εἶναι μονοψήφιον.

Β'. Ἐπειδὴ $89\times10=890<7742$ καὶ

$$89\times100=8900>7742$$

τὸ πηλίκον εἶναι >10 καὶ <100, ἤτοι εἶναι διψήφιον.

Ἄρα : *Τὸ πηλίκον ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα τὸ ὁλιγώτερον μηδενικὰ πρέπει νὰ γραφῶσι δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, διὰ νὰ γείνῃ οὗτος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν διαιρετέον.*

§ 62. ***Εὕρεσις τοῦ μονοψηφίου πηλίκου, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ πηλίκον 43 : 5, ἐνθυμούμεθα ὅτι $5\times8=40<43$ καὶ $5\times9=45>42$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 8 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $43-40=3$.

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

§ 63. **Α'. Διαίρεσις ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ.**

Πρόβλημα Ι. *Πατὴρ ἔδωκεν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του 15 δραχ, τὴν ἑπομένην ἄλλας 12 καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν ἄλλας 21 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν εἰς τὸν καθένα ;*

Λύσις. (Α'. τρόπος). Τὴν α' ἡμέραν ἔδωκεν εἰς τὸν καθένα ἀπὸ 15 : 3=5 δραχ. τὴν β' ἀπὸ 12 : 3=4 δραχ. καὶ τὴν γ' ἀπὸ 21 : 3=7 δραχ. Ἄρα ἔδωκεν εἰς τὸν καθ' ἕνα

$$(5+4+7)=16 \text{ δραχ.}$$

(Β'. τρόπος). Ἐπειδὴ εἰς τοὺς 3 υἱοὺς ἔδωκεν $(15+12+21)$ δραχ. εἰς τὸν καθ' ἕνα ἔδωκε $(15+12+21):3$.

Ὥστε εἶναι $(15+12+21):3=5+4+7$.

Ἄρα *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι (5+4+7)×3=15+12+21, ἤτοι τὸ ἄθροισμα 5+4+7 πολ]μενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Εἶναι ἄρα (15+12+21) : 3=5+4+7.

Γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma) : \delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$,

ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται γίνωνται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ πηλίκον π.χ. 46:2 εὑρίσκομεν ἀγράφως λέγοντες 40:2=20, 6:2=3, τέλος 20+3=23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 109) Νὰ εὑρεθῶσι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ ἀγράφως τὰ πηλίκα 28:2, 39:3, 120:5, 72:6, 366:6, 428:2, 339:3, 525:5.

110) Πατὴρ ἀφῆκε κληρονομίαν εἰς τοὺς 4 υἱούς του μίαν οἰκίαν ἀξίας 160000 δραχμῶν, μίαν ἀμπελον ἀξίας 24000 δραχμῶν καὶ μετρητὰ 10000 δραχμάς. Πόσον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;

111) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν εἰς τὸν διαιρετέον τελείας διαιρέσεως προστεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον αὐξάνει κατὰ 1.

§ 64. **Β΄. Διαίρεσις διαφορᾶς δι' ἀριθμοῦ.**

Πρόβλημα ΙΙ. *Τέσσαρα ὅμοια κιβώτια εἶναι πλήρη ἀπὸ ἐμπόρευμα καὶ ἔχουσιν ὅλα ὁμοῦ βάρος 864 ὀκάδ, κενὰ δὲ 64 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας ἐμπορεύματος περιέχει τὸ καθ' ἕν ;*

Λύσις. (Α΄ τρόπος). Τὰ 4 κιβ. περιέχουσιν ἐμπόρευμα

(864—64) ὀκ.

Ἄρα τὸ καθ' ἓν περιέχει (864—64):4 ἢ 800:4=200 ὀκ.

(Β΄ τρόπος), Κάθε κιβώτιον ζυγίζει πλῆρες (864:4) ὀκ, κενὸν δὲ (64:4) ὀκ. Περιέχει λοιπὸν ἐμπόρευμα (864:4)—(64:4) ἢ 216—16=200 ὀκ. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι

(864—64) : 4=(864 : 4)—(64 : 4).

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ χωριστὰ τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τὸ α΄ πηλίκον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β΄.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι (216—16)×4=864—64, ἤτοι ἡ διαφορὰ (216—16) πολ)μένη ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 δίδει τὸν διαιρετέον (864—64). Εἶναι ἄρα (864—64):4=216—16.

Γενικῶς : $(\alpha-\beta) : \delta=(\alpha : \delta)-(\beta : \delta)$,

ἂν αἱ διαιρέσεις αὗται εἶναι τέλειαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον π. χ. 96 : 2 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀγράφως λέγοντες 100 : 2=50, 4 : 2=2 καὶ τέλος 50—2=48.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 112) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ πηλίκα 98 : 2, 117 : 3, 70 : 5, 588 : 6.

113) Πέντε ἐργάται ἐργασθέντες ὁμοῦ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 3600 δραχ. Ἐδαπάνησαν δὲ κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἐργασίας ταύτης 1520 δραχ. Πόσα χρήματα ἐπερίσσευσαν εἰς καθένα ;

114) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ 1.

§ 65. **Γ'. Διαίρεσις γινομένου δι' ἀριθμοῦ.**

Πρόβλημα III. *Κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων οἱ μαθηταὶ τριῶν τάξεων σχολείου προσέφεραν ἀπὸ 24 δραχ. ὁ καθεὶς διὰ νὰ μοιρασθῶσιν εἰς 4 πτωχὰς οἰκογενείας. Ἑκάστη ἀπὸ τὰς τάξεις αὐτὰς εἶχε 40 μαθητάς. Πόσα χρήματα ἔλαβε κάθε οἰκογένεια ;*

Λύσις. Α' τρόπος. Οἱ μαθηταὶ εἶναι 40×3, τὰ δὲ προσφερθέντα χρήματα 24×40×3. Ἄρα κάθε οἰκογένεια ἔλαβεν

$$(24\times40\times3) : 4$$

ἢ

$$2880 : 4=720 \text{ δραχ.}$$

(Β' τρόπος), Κάθε μαθητὴς ἔδωκε διὰ κάθε οἰκογένειαν 24:4=6 δραχ. Οἱ δὲ 40×3 μαθηταὶ ἔδωκαν (6×40×3) δραχ. =720 δραχ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι (24×40×3):4=6×40×3. Ἄρα *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν μόνον ἕνα παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως εἶναι.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ἂν παρατηρήσωμεν (§ 58 Δ') ὅτι (6×40×3)×4=24×40×3.

Γενικῶς : $(\alpha\times\beta\times\gamma) : \delta=\alpha\times(\beta : \delta)\times\gamma$.

Δ'. Ἂν αἱ προηγούμεναι οἰκογένειαι, ἦσαν τρεῖς, κάθε μία θὰ ἐλάμβανεν (24×40×3) : 3=2880 : 3=960 δρχ. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε μία θὰ ἐλάμβανε τὰ χρήματα μιᾶς τάξεως, ἤτοι

$$24\times40=960 \text{ δραχ.}$$

Εἶναι ἄρα (24×40×3) : 3=24×40, ἤτοι

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα, ἂν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα 3. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $(24\times40\times3) : 3 = 24\times40\times1 = 24\times40$.

Γενικῶς : $(\alpha\times\beta\times\gamma) : \beta = \alpha\times\gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 115) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα $(4\times5\times9) : 3$, $(7\times18\times15) : 6$, $72 : 3$, $48 : 3$, $(4\times8\times9) : 9$, $(7\times8\times2) : 16$, $(2\times7\times3) : 6$.

116) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουσιν ἐλαιῶνα, ὁ ὁποῖος ἔχει 5 σειρὰς ἐλαιῶν καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 12 ἐλαίας. Ἐὰν ἑκάστη ἐλαία ἀπέδωκεν ἔτος τι 20 ὀκ. ἐλαιοκάρπου, πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ὁ καθείς;

117) Τὶ πάσχει τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἂν μόνον ὁ διαιρετέος πολ)σθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν ;

§ 66. **Πρόβλημα IV**. *Φιλάνθρωπος εἶχε σκοπὸν νὰ δόσῃ εἰς 4 πτωχοὺς 80 δραχμάς. Ἐπειδὴ προσῆλθον καὶ ἄλλοι 4 ἐδιπλασίασε τὰ πρὸς διανομὴν χρήματα. Μετεβλήθη ἢ ὄχι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;*

Λύσις. Κατὰ τὴν α′ περίπτωσιν τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $80 : 4 = 20$ δραχ. Κατὰ τὴν β′ περίπτωσιν τὸ μερίδιον εἶναι $(80\times2) : (4\times2)$. Ἂν ὅμως φαντασθῶμεν ὅτι ἐμοίρασεν εἰς τοὺς πρώτους τὰς 80 δραχ. καὶ εἰς τοὺς ἄλλους 4 τὰς ἄλλας 80 δραχ. ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $80 : 4$, Ὥστε

$$80 : 4 = (80\times2) : (4\times2).$$

Ἂν εἶχε 83 δραχμὰς θὰ ἔδιδεν εἰς καθένα 20 δρχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον 3 δραχ. Καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας δὲ 83 δραχ. οἱ ἄλλοι 4 πτωχοὶ θὰ ἐλάμβανον ἀπὸ 20 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον ἄλλαι 3 δραχμαί. Τῆς διαιρέσεως λοιπὸν $(83\times2) : (4\times2)$ τὸ πηλίκιον εἶναι 20 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $3+3$ ἢ 3×2.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ε′. *Ἐὰν πολ)σωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.*

ΣΤ′. *Ἐὰν πολ)σωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολ)ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης πειθόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ τῆς διαιρέσεως $83 : 4$ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 20, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3, ἕπεται ὅτι $83 = (4\times20)+3$.

Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$83\times2=(4\times20)\times2+(3\times2)$ ἢ $83\times2=(4\times2)\times20+(3\times2)$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $3\times2<4\times2$, ἕπεται ὅτι τῆς διαιρέσεως $(83\times2):(4\times2)$ τὸ πηλίκον εἶναι 20 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3×2.

Γενικῶς : Ἂν $\Delta=(\delta\times\pi)+\upsilon$ καὶ $\upsilon<\delta$, θὰ εἶναι καὶ

$$\Delta\times\lambda=(\delta\times\lambda)\times\pi+(\upsilon\times\lambda) \text{ καὶ } \upsilon\times\lambda<\delta\times\lambda.$$

Ἂν δὲ $\upsilon=0$, προκύπτει ἐκ τῆς $\Delta=\delta\times\pi$, ἡ $\Delta\times\lambda=(\delta\times\lambda)\times\pi$.

§ 67. **Πρόβλημα V.** *Χωρικὸς ἔχει τρεῖς σειρὰς ἐλαιοδένδρων καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 15 ἐλαιόδενδρα. Κάθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ παρήγαγε κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος 50 ὀκ. ἐλαιοκάρπου· ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ αὐτοῦ ἔλαβε 27000 δραχμάς. Πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τὸν ἐλαιόκαρπον ;*

Λύσις. (Α΄. τρόπος). Ὁ χωρικὸς ἔχει (15×3) ἐλαιόδενδρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔλαβε $50\times(15\times3)$ ἢ $(3\times15\times50)$ ὀκ. ἐλαιοκάρπου.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὀκάδας ἔλαβε 27000 δραχμάς, ἀπὸ κάθε ὀκᾶν ἔλαβεν $27000:(3\times15\times50)$ ἢ $27000:2250=12$ δρ.

(Β΄. τρόπος). Ἀπὸ κάθε σειρὰν ἐλαιοδένδρων ἔλαβε $(27000:3)=9000$ δραχ. Ἀπὸ κάθε δένδρον ἔλαβεν $(27000:3):15$ ἢ $9000:15=600$ δραχ. Καὶ ἀπὸ κάθε ὀκᾶν $[(27000:3):15]:50$ ἢ $600:50=12$ δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι

$$2700:(3\times15\times50)=[(27000:3):15]:50,$$

Ἤτοι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν δι' ἑνὸς παράγοντος, τὸ πηλίκον δι' ἄλλου παράγοντος, τὸ νέον πηλίκον δι' ἄλλου παράγοντος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ τελειώσωσιν ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῆς ἰδιότητος ταύτης βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ $27000:2250=12$, ἕπεται ὅτι $27000=2250\times12$ ἢ

$$27000=3\times15\times50\times12$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ 3, εὑρίσκομεν (§ 65 Δ΄) ὅτι $27000:3=15\times50\times12$. Ἀπὸ αὐτὴν ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(27000:3):15=50\times12$ καὶ ἀπὸ αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$[(27000:3):15]:50=12.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $27000:(3\times15\times50)=12$, ἕπεται ὅτι

$$27000:(3\times15\times50)=[(27000:3):15]:50, \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Γενικῶς : $A:(\alpha\times\beta\times\gamma)=[(A:\alpha):\beta]:\gamma$.

ΣΗΜ. Ὅλαι αἱ διαιρέσεις αὗται ὁποτίθεται ὅτι εἶναι τέλειαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 118) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(20\times9):(5\times3)=4\times3$.

119) Ὁμοίως ὅτι $(9\times4\times8):(2\times4)=40-4$.

120) Ὁμοίως ὅτι $[2\times(7+5)\times24]:(8\times3)=2\times12$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Συντομίαι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως.

§ 68. Α'. **Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κλπ.** Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι 765 λεπτά, ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν πόσας φορὰς χωροῦσι τὰ 100 λεπτά, εἰς τὰ 765 λεπτά, ἤτοι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 765:100.

Ἐπειδὴ $765=700+65$ ἢ $765=(7\times100)+65$, εἶναι δὲ καὶ $65<100$, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 7, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 65. Ἄρα ἀπὸ τὰ 765 λεπτὰ ἀποτελοῦνται 7 δραχμαί, περισσεύουσι δὲ καὶ 65 λεπτά.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τῆς διαιρέσεως 368 : 10 πηλίκον εἶναι 36 καὶ ὑπόλοιπον 8· τῆς δὲ 43956 : 1000 πηλίκον εἶναι 43 καὶ ὑπόλοιπον 956.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὸ τέλος ἕν, δύο, τρία κτλ. ψηφία. Καὶ τὰ μὲν μένοντα πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσιν, ὅπως εἶναι γραμμένα, τὸ πηλίκον, τὰ δὲ ἀποκοπέντα ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 121) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀγράφως αἱ διαιρέσεις: 260 : 10, 253 : 10, 2347:10, 364 : 100, 4962 : 100, 15400:100, 7386 : 1000, 12400 : 1000, 43005 : 1000, 567932 : 10000, 1273006 : 100000.

122) Μὲ 80 δεκάρες πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦμεν καὶ πόσας μὲ 142 δεκάρες ;

123) Ἠγόρασέ τις 1000 λεμόνια καὶ ἔδωκε 500 δραχμάς. Πόσα λεπτὰ ἔδωκε διὰ τὸ καθ' ἕν ;

124) Τὸ μέτρον ἔχει 100 δακτύλους (πόντους). Πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 37600 δάκτυλοι ;

125) Ὁ αἰὼν ἔχει 100 ἔτη. Πόσους αἰῶνας ἀποτελοῦσι 2000 ἔτη ;

126) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $135 : 5=270 : 10$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ἑκάστης τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων 105 : 5, 150 : 50, 150 ; 25, 875:125.

127) Κατὰ ἀνάλογον τρόπον νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον ἑκάστης τῶν διαιρέσεων 73 : 5, 47 : 2, 75 : 25.

§ 69. **Β'. Διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος λήγει εἰς μη-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δενικά. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκάδας ἀποτελοῦσι 2376 δράμια, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰ 2376 δράμια διὰ 400.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ 4 ἑκατ. τοῦ διαιρέτου πολ)ζόμεναι ἐπὶ τὸ πηλίκον δίδουσι τὰς 23 ἑκατ. τοῦ διαιρετέου. Τὸ πηλίκον λοιπὸν θὰ εἶναι, ὅσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 23 : 4 ἤτοι 5.

Ἐπειδὴ δὲ 4 ἑκατ.×5=20 ἑκατ. καὶ 23 ἑκ.—20 ἑκ.=3 ἑκατ. τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 3 ἑκατ.+76=376.

Ὥστε τὰ 2376 δράμια ἀποτελοῦσι 5 ὀκάδας, περισσεύουσι δὲ καὶ 376 δράμια. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτει ὁ γνωστὸς σύντομος τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά.

Διάταξις τῆς πράξεως

23(76	4(00
376	5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 128) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις 2400 : 300, 38900 : 2400, 459600 : 28000.

129) Ἠγόρασέ τις βούτυρον πρὸς 80 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν 1920 δραχ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ;

130) Ὁ ἦχος διανύει εἰς τὸν ἀέρα 340 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ἐὰν πυροβόλον ἐκπυρσοκροτήσῃ εἰς ἀπόστασιν 6120 μέτρων, μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀκούσωμεν τὸν ἦχον ;

§ 70. **Γ'. Διαίρεσις μὲ ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 9.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 167945 δραχμὰς εἰς 99 ἀνθρώπους. Ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν 100, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος ἀπὸ 1679 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον 45 δραχ. Ἂν τώρα λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ 1679 δραχ. θὰ περισσεύσωσι 45 δραχ. καὶ τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι 45+1679=1724 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς ἀπὸ 17 δραχ. καὶ θὰ μείνωσιν 17+24=41 δραχ.

Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ τὸ ὅλον 1679+17=1696 καὶ θὰ μείνωσι 41 δραχ.

Διάταξις τῆς πράξεως

1679(45	99
45	1679
17(24	17
24	1696
41	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 131) Ἐννέα ἐργάται ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον καὶ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 742 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

132) Ἔμπορος ἠγόρασε τεμάχιον ὑφάσματος ὡς ἀποτελούμενον ἐξ 100 πήχεων πρὸς 198 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ὅταν ὅμως βραδύτερον ἐμέτρησεν αὐτό, εὗρεν ὅτι εἶχε μόνον 99 πήχεις. Πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ πήχεως ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐξήγησις τοῦ κανόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις.

§ 71. **Α΄. Εὕρεσις μονοψηφίου πηλίκου.** Ἐμάθομεν ἤδη (§ 62) πῶς εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 58 δραχ. εἰς 27 πτωχούς, ἤτοι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 58 : 27. Τὸ μερίδιον ἑκάστου δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μερίδιον ἑκάστου πτωχοῦ, ἂν οὗτοι ἦσαν 20. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως 58 : 27 δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 58 : 20 ἢ (§ 69) ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 2. Δι' αὐτὸ διαιροῦμεν τὸν 5 διὰ 2 καὶ δοκιμάζομεν, ἂν τὸ πηλίκον 2 εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ δὲ $27 \times 2 = 54 < 58$, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 2 καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $58 - 54 = 4$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα πρόβατα δύναται νὰ ἀγοράσῃ χωρικὸς μὲ 1725 δραχμάς, ἂν κάθε πρόβατον τιμᾶται 253 δραχμάς. Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μὲ 1725 δραχμὰς ἀγοράζει τόσα πρόβατα, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 253 δραχ. εἰς τὰς 1725 δραχ., ἤτοι ὅσον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1725 : 253.

Ἐπειδὴ δέ, ἂν ἕκαστον πρόβατον ἐτιμᾶτο 200 δραχμάς, θὰ ἠγόραζεν ἢ ὅσα τώρα ἢ καὶ περισσότερα πρόβατα, τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 1725 : 200 ἢ 17 : 2 δηλ. 8. Δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι

$253 \times 8 = 2024$ δρχ. > 1725, $253 \times 7 = 1771 > 1725$ καὶ $253 \times 6 = 1518 < 1725$. Ἀγοράζει λοιπὸν 6 πρόβατα καὶ περισσεύουσιν $1725 - 1518 = 207$ δραχ.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον διαιροῦμεν τὸν 17 διὰ 2 κ.τ.λ.

§ 72. **Β΄. Εὕρεσις πολυψηφίου πηλίκου.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν εἰς 15 πτωχοὺς 3255 δραχμάς, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3255 δραχ. διὰ 15. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι 3255 δραχ. = 32 ἑκατοντάδραχμα + 5 δεκάδραχμα + 5 δραχ.

Ἀπὸ τὰ 32 ἑκ. λαμβάνει ὁ καθεὶς 32 : 15 ἤτοι 2 ἑκ. περισσεύουσι δὲ καὶ 2 ἑκ. Αὐτὰ μὲ τὰ 5 δεκάδραχμα ἀποτελοῦσι 25 δεκ. Ἀπὸ αὐτὰ λαμβάνει ὁ καθεὶς 25 : 15 ἤτοι 1 δεκ. περισσεύ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ουσι δὲ καὶ 10 δεκ. Ταῦτα μαζὶ μὲ τὰς 5 δραχμὰς ἀποτελοῦσι 105 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ὁ καθεὶς 105 : 15 ἤτοι 7 δραχ.

Ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 2 ἑκατ. + 1 δεκ. + 7 δραχ, ἤτοι 217 δραχμαί.

Διάταξις τῆς πράξεως

325̸5̸	15
25	217
105	
0	

Β'. Ἂν μὲ 45 δραχ. ἀγοράζωμεν 1 πῆχυν ὑφάσματος, μὲ 1248 δραχ. θὰ ἀγοράσωμεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 45 δραχ. εἰς τὰς 1248 δραχ. Πρέπει δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν 1248 διὰ 45. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι μὲ 124 δραχμὰς ἀγοράζομεν 124 : 45 ἤτοι 2 πήχεις καὶ περισσεύουσι 34 δραχμαί. Μὲ 124×10 δραχμὰς ἢ 124 δεκάδραχμα ἀγοράζομεν 2×10 πήχεις=20 πήχεις ἢ 2 δεκάδας πήχεων· περισσεύουσι δὲ καὶ 124×10−45×2×10=(124−45×2)×10=34×10 ἤτοι 34 δεκάδραχμα. Αὐτὰ μὲ τὰς 8 δραχμὰς τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 348 δραχ, μὲ τὰς ὁποίας ἀγοράζομεν 7 πήχεις καὶ περισσεύουσι 33 δραχμαί. Ὥστε ἀγοράζομεν τὸ ὅλον 27 πήχεις, περισσεύουσι δὲ καὶ 33 δραχμαί. Οὕτως ἐξηγεῖται διατὶ χωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ διαιρετέου, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν περισσότερον, ἂν εἶναι ἀνάγκη, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς μὴ μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Διαιροῦμεν τὸν οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου κ.τ.λ.

Διάταξις τῆς πράξεως

1248̸	45
348	27
33	

Χρῆσις τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

§ 73. **Πρόβλημα Ι.** *Ἑκάστη δωδεκὰς μανδηλίων τιμᾶται 96 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται ἕκαστον μανδήλιον ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ τὰ 12 μανδήλια τιμῶνται 96 δραχ, τὸ 1 μανδήλιον θὰ τιμᾶται 12 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι

96 δραχ. : 12=8 δραχ.

§ 74. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἀμαξοστοιχία χρειάζεται 16 ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ πόλεως εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία ἀπέχει 192 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διανύει τὴν ὥραν ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ εἰς 16 ὥρας διανύει 192 χιλ, εἰς μίαν ὥραν διανύει 192 : 16=12 χιλιόμετρα.

Εἰς καθ' ἓν ἀπὸ τὰ προβλήματα ταῦτα δίδεται ἡ τιμὴ (§ 53)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι ;

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀπὸ αὐτάς, διαιροῦμεν (μερίζομεν) τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τούτων.

Ὥστε, ἂν α εἶναι ἡ τιμὴ β μονάδων, ἡ τιμὴ χ μιᾶς μονάδος ἀπὸ αὐτὰς εἶναι α : β, ἤτοι $\chi = \alpha : \beta$.

§ 75. **Πρόβλημα ΙΙΙ**. *Μὲ τρεῖς πήχεις ὑφάσματος κάμνομεν μίαν ἐνδυμασίαν. Πόσας τοιαύτας ἐνδυμασίας κάμνομεν μὲ 75 πήχεις ;*

Λύσις. Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ κάμωμεν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν οἱ 3 πήχεις εἰς τοὺς 75 πήχεις, ἤτοι

75 πήχ. : 3 πήχ. = 25 ἐνδυμασίας.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ τιμὴ (3 πήχεις) μιᾶς μονάδος (1 ἐνδ.) καὶ ἡ τιμὴ (75 πήχ.) πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς τὴν μίαν ἐκείνην μονάδα. Ζητεῖται δὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι .

Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν τούτων μονάδων, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος.

Ὥστε, ἂν β εἶναι ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ α ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, τὸ πλῆθος χ τῶν μονάδων τούτων εἶνει α:β, ἤτοι $\chi = \alpha : \beta$

Κατὰ τὴν α′ περίπτωσιν (μερισμὸς) τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον. Κατὰ δὲ τὴν β′ (μέτρησις), τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 133) Ἐργάτης ἐργασθεὶς 17 ἡμέρας ἔλαβεν 1241 δραχμάς. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιόν του ;

134) Παντοπώλης ἐπώλησε μίαν ἡμέραν 127 ὀκάδας ζακχάρεως καὶ ἔλαβε 2667 δραχ. Πρὸς πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν ;

135) Παρατηρητὴς εὑρισκόμενος 5100 μέτρα μακρὰν πυροβόλου παρετήρησεν ὅτι ἐπέρασαν 15 δευτερόλεπτα ἀπὸ τὴν στιγμὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶδε τὴν λάμψιν, μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἤκουσε τὸν κρότον τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως τοῦ πυροβόλου. Πόσα μέτρα διήνυεν ὁ ἦχος κατὰ δευτερόλεπτον ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

136) Ἀτμομηχανὴ ἔκαυσεν εἰς 25 ὥρας 600 ὀκάδας ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας καίει τὴν ὥραν ;

137) Ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς εἶναι 150000000 χιλιόμετρα περίπου, τὸ δὲ φῶς διανύει 300000 χιλιόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται τὸ φῶς, διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὸν Ἥλιον εἰς τὴν Γῆν ;

Περὶ τῶν δυνάμεων.

§ 76. **Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα δυνάμεως**. Πᾶς παράγων τοῦ γινομένου $3\times3\times3\times3$ εἶναι 3 Τοῦτο καλεῖται ***δύναμις*** τοῦ 3.

Γενικῶς: *Δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται πᾶν γινόμενον, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες εἶναι ὅλοι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ***δευτέρα***, ***τρίτη*** κτλ, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι 2, 3 κτλ.

ΣΗΜ. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***τετράγωνον***, ἡ δὲ τρίτη λέγεται καὶ ***κύβος*** αὐτοῦ.

Ἕκαστος τῶν ἴσων παραγόντων δυνάμεως λέγεται ***βάσις*** αὐτῆς. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δυνάμεως, καλεῖται ***ἐκθέτης*** αὐτῆς.

Χάριν συντομίας γράφομεν μόνον τὴν βάσιν, δεξιὰ καὶ ὑπεράνω αὐτῆς τὸν ἐκθέτην μὲ μικρότερον ψηφίον. Οὕτω 5×5 γράφεται 5^2 (5 εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὴν δευτέραν), $4\times4\times4$ γράφεται 4^3 (4 εἰς τὸν κύβον ἢ 4 εἰς τὴν τρίτην).

Ἡ εὕρεσις δυνάμεως ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***ὕψωσις*** τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Ἀξιοπαρατήρητον ὅτι $10^2=10\times10=100$,

$10^3=10\times10\times10=1000$, $10^4=10000$, κτλ. ἤτοι :

Ἑκάστη δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ ἡ 1 ἀκολουθουμένη ἀπὸ μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰς μονάδας τοῦ ἐκθέτου.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

§ 77. **Α΄. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $5^3\times5^2$. Ἐπειδὴ $5^3=5\times5\times5$ καὶ $5^2=5\times5$, ἕπεται ὅτι $5^3\times5^2=(5\times5\times5)\times(5\times5)$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 59) $(5\times5\times5)\times(5\times5)=5\times5\times5\times5\times5=5^5$, ἕπεται ὅτι $5^3\times5^2=5^5$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $3^2 \times 3^4 \times 3^5 = 3^{11}$ καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu \times \alpha^\nu \times \ldots\ldots\ldots \times \alpha^\varrho = \alpha^{\mu+\nu+\ldots\ldots+\varrho}.$$

Ἤτοι: *Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.*

§ 78. **Β΄. Δύναμις ἄλλης δυνάμεως.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ 4^2, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν $(4^2)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων εἶναι $(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 77 Α΄.), $4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2\times 3}$, ἕπεται ὅτι

$$(4^2)^3 = 4^{2\times 3}$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $(5^3)^4 = 5^{3\times 4}$ καὶ γενικῶς

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\times\nu}.$$

Ἤτοι: *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἥτις ἔχει ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τούτων.*

§ 79. **Γ΄. Δύναμις γινομένου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν 2αν δύναμιν τοῦ γινομένου $2\times 3\times 5$, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν $(2\times 3\times 5)^2$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $(2\times 3\times 5)^2 = (2\times 3\times 5)\times(2\times 3\times 5)$ (§ 76), $(2\times 3\times 5)\times(2\times 3\times 5) = 2\times 3\times 5\times 2\times 3\times 5 = (2\times 2)\times(3\times 3)\times(5\times 5)$ (§ 59, 56) ἕπεται ὅτι $(2\times 3\times 5)^2 = 2^2\times 3^2\times 5^2$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $(5\times 3\times 7\times 4)^3 = 5^3\times 3^3\times 7^3\times 4^3$ καὶ γενικῶς $(\alpha\times\beta\times\gamma\times,\ldots\ldots\times\pi)^\nu = \alpha^\nu\times\beta^\nu\times\gamma^\nu\times\ldots\ldots\times\pi^\nu$.

Ἤτοι: *Διὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολ)σωμεν τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι οὕτως εὑρίσκονται,*

§ 80. **Δ΄. Πηλίκον δυνάμεως δι' ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $7^5 : 7^3$.

Ἐπειδὴ $5 = 3+2$, ἕπεται ὅτι $7^5 = 7^{3+2} = 7^3\times 7^2$. Ἑπομένως

$$7^5 : 7^3 = (7^3\times 7^2) : 7^2 = 7^3 \text{ (§ 65 Δ΄.)}.$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $5^7 : 5^3 = 5^4$ καὶ γενικῶς

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}, \ (\text{ἂν } \mu > \nu).$$

Ἤτοι: *Τὸ πηλίκον δυνάμεως δι' ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔχει δὲ ἡ δύναμις αὕτη ἐκθέτην τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου.

ΣΗΜ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ τὸ πηλίκον $4^3 : 4^3$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^1$.

Ἐπειδὴ ὅμως $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 4^2 \times 4$, ἕπεται ὅτι

$$4^3 : 4^2 = (4^2 \times 4) : 4^2 = 4$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι καὶ $4^1 = 4$.

Γενικῶς $a^1 = a$.

Τὸ σύμβολον a^1 καλοῦμεν πρώτην δύναμιν τοῦ a. Ἑπομένως:

Πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ ἡ αὐτὴ ἰδιότης καὶ διὰ τὸ πηλίκον $4^5 : 4^5$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $4^5 : 4^5 = 4^0$.

Ἐπειδὴ $4^5 : 4^5 = 1$, συμπεραίνομεν ὅτι πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸ σύμβολον 4^0 ἴσον πρὸς 1.

Γενικῶς $a^0 = 1$, ἤτοι

Μηδενικὴ δύναμις ἀριθμοῦ ($\neq 0$) καλεῖται ἡ μονάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 138) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως τὸ τετράγωνον τοῦ 3, τοῦ 4, τοῦ 6, τοῦ 8, ὁ κύβος τοῦ 2, τοῦ 3, τοῦ 6 καὶ ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 4 καὶ τοῦ 7.

139) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη καὶ ἡ ἐννάτη δύναμις τοῦ 10.

140) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1000, 10 000, 1 000 000 ὡς δυνάμεις τοῦ 10.

141) Νὰ γραφῇ ὡς μία δύναμις ἕκαστον ἀπὸ τὰ γινόμενα

$$2^2 \times 2^3,\ 2^3 \times 2^4 \times 2^5,\ 6^2 \times 6^3 \times 6^4 \times 6^5.$$

142) Νὰ γείνῃ γινόμενον δύο δυνάμεων ἕκαστον ἀπὸ τὰ γινόμενα $2^2 \times 5^3 \times 5^3$, $3^2 \times 5^4 \times 3^4 \times 5^3$, $7^2 \times 2^3 \times 7^3 \times 2^5 \times 2^4$.

143) Νὰ τραπῇ ἡ δύναμις 4^3 εἰς δύναμιν τοῦ 2.

144) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον τετραγώνου εἶναι τετράγωνον καὶ τὸ ὀκταπλάσιον κύβου εἶναι κύβος.

145) Νὰ γραφῇ τὸ γινόμενον $2^2 \times 4^5$ ὡς μία δύναμις.

146) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(7^3 \times 3^2 \times 5^3) : 9 = 35^2$.

147) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον $(10 \times 10)^4 : (2^2 \times 5^2)$ εἶναι δύναμις τοῦ 10.

Προβλήματα ἐπὶ τῶν 4 πράξεων.

√ 148) Μικρέμπορος ἠγόρασε 10 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 36 δραχ. τὴν δωδεκάδα. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἕκαστον μανδήλιον, διὰ νὰ κερδίζῃ ἀπὸ καθ' ἓν 1 δραχμήν;

149) Ἔμπορος ἠγόρασε 5 τεμάχια ὑφάσματος ἀντὶ 15750

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δραχμῶν. Ἐὰν ἕκαστον τεμάχιον εἶχεν 70 πήχεις, πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;

150) Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν ὁμοῦ ἓν ἔργον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔλαβον ἀμοιβὴν 6400 δραχμάς. Ἐδαπάνησαν δὲ διὰ τὸ κοινὸν συσσίτιον κατὰ τὰς ἡμέρας τῆς ἐργασίας 1800 δραχμάς. Πόσην καθαρὰν ἀμοιβὴν ἔλαβεν ἕκαστος ;

151) Γυνὴ ἠγόρασε ραπτομηχανὴν ἀντὶ 3400 δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε μόνον 400 δραχμάς. Ὑπεσχέθη δὲ νὰ πληρώνῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου μηνὸς 200 δραχμάς, ἕως ὅτου ἀποπληρώσῃ αὐτήν. Μετὰ πόσους μῆνας θὰ ἀποπληρώσῃ αὐτήν ;

152) Νὰ μοιρασθῶσι 10840 δραχ. εἰς δύο ἀνθρώπους, οὕτως ὥστε ὁ εἷς νὰ λάβῃ 1460 δραχ. περισσοτέρας τοῦ ἄλλου.

153) Ἔδωκέ τις 1388 δραχμὰς διὰ 44 πήχεις ὑφάσματος δύο εἰδῶν. Τὸ α΄ εἶδος ἠγόρασε πρὸς 25 δραχ, τὸ δὲ β΄ πρὸς 37 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος ;

154) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 600 δραχ. μὲ δεκάδραχμα καὶ εἰκοσιπεντάδραχμα τὸ ὅλον 45. Πόσα θὰ δώσῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

155) Τρεῖς ἀδελφοὶ εἶχον 174 πρόβατα. Ἕκαστον πρόβατον ἔδωκεν ἔτος τι 2 ὀκάδας μαλλίων, τὰ ὁποῖα ἐπώλησαν πρὸς 48 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

156) Ἔμπορος ἠγόρασε 40 δωδεκάδας ζεύγη χειροκτίων, τὰ ὁποῖα ἐκόστισαν 115200 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ ζεῦγος διὰ νὰ κερδίσῃ 10 δραχμὰς ἀπὸ ἕκαστον ζεῦγος ;

157) Δύο ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ 1610 δραχμὰς διὰ 10 ἡμερομίσθια τοῦ α΄ καὶ 20 ἡμερομίσθια τοῦ β΄. Βραδύτερον ἔλαβον 1320 δραχμὰς διὰ 10 ἡμερομίσθια τοῦ α΄ καὶ 15 τοῦ β΄. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ;

158) Μικροπωλητὴς ἠγόρασεν 115 ποτήρια πρὸς 8 δραχμὰς ἕκαστον, ἀλλ' ἔσπασαν τρία ἐξ αὐτῶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ καθ' ἕν ἀπὸ τὰ ἄλλα διὰ νὰ κερδίσῃ 300 δραχμάς ;

159) Παντοπώλης ἠγόρασε ζάκχαριν, ὄρυζαν καὶ μακαρόνια εἰς ἴσην ποσότητα καὶ ἔδωκεν δι' ὅλα 3220 δραχμ. Ἠγόρασε δὲ τὴν μὲν ζάκχαριν πρὸς 19 δραχμάς, τὴν ὄρυζαν πρὸς 15 δραχμὰς καὶ τὰ μακαρόνια πρὸς 12 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος ;

160) Δύο σιδηροδρομικοὶ σταθμοὶ ἀπέχουσιν 220 χιλιόμε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρα. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀναχωροῦσιν ἀπὸ αὐτοὺς δύο ἁμαξοστοιχίαι κατευθυνόμεναι πρὸς ἀλλήλας καὶ διανύουσαι 20 χιλ. ἡ μία καὶ 24 χιλ. ἡ ἄλλη τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθῶσι καὶ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀνεχώρησεν ἡ πρώτη ἁμαξοστοιχία ;

161) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 760 ὀκ. οἴνου, ὅστις ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τούτων τὰς μὲν 500 ὀκάδας ἐπώλησε πρὸς 7 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ἄλλας, ἐπειδὴ ὑπέστησαν μικρὰν βλάβην, ἐπώλησε πρὸς 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐκέρδισε ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον ;

162) Ἔμπορος ἠγόρασε 50 ἀλεξιβρόχια πρὸς 125 δραχμὰς ἕκαστον. Ἐκ τῆς πωλήσεως δὲ αὐτῶν εἰσέπραξεν 7900 δραχμάς. Πόσον ἐκέρδισεν ἀπὸ καθ' ἕν ;

163) Ἀμπελουργὸς ἐτρύγησε 20796 ὀκάδας σταφυλῶν. Ἀπὸ 6 ὀκάδας σταφυλῶν ἔκαμεν 1 ὀκᾶν οἴνου, τὸν ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, ἀπὸ δὲ τὰ στέμφυλλα παρήγαγε 100 ὀκάδας οἰνοπνεύματος, τὸ ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὸ ὅλον ;

164) Ἐργάτης λαμβάνει 456 δραχμὰς εἰς 6 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 760 δραχμάς ;

165) Χωρικὸς ἐπώλησε τρία καλάθια ᾠῶν πρὸς 2 δραχ. τὸ καθ' ἕν. Τὸ α' καλάθιον περιεῖχε 54 ᾠά, τὸ β' 17 ὀλιγώτερα καὶ τὸ γ' ὅσα καὶ τὰ δύο πρῶτα ὁμοῦ. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ;

166) Ἀμπελουργὸς θέλει νὰ ἀγοράσῃ ἀγρὸν μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ οἴνου του. Ὑπολογίζει δὲ ὅτι, ἂν πωλήσῃ τὸν οἶνον πρὸς 750 δραχμὰς τὸ βαρέλιον, θὰ περισσεύσωσι 500 δραχμαί· ἂν δὲ πωλήσῃ αὐτὸν πρὸς 600 δραχμὰς τὸ βαρέλιον, θὰ τῷ λείψωσι 400 δραχμαί Πόσα βαρέλια οἴνου εἶχε καὶ πόση ἡ τιμὴ τοῦ ἀγροῦ ;

167) Οἰκογενειάρχης παρετήρησεν ὅτι ἐχρειάζετο 300 δράμια ζαχχάρεως κάθε 12 ἡμέρας. Θέλων νὰ κάμῃ οἰκονομίαν περιώρισε τὴν καθημερινὴν δαπάνην, οὕτως ὥστε νὰ περνᾷ 15 ἡμέρας μὲ 300 δράμια. Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ζαχχάρεως εἶναι 20 δραχμαὶ τὴν ὀκᾶν, πόσα λεπτὰ οἰκονομεῖ τὴν ἡμέραν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

§ 81. **Ὁρισμοί**. Ὁ ἀριθμὸς 16 διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2 λέγεται *διαιρετὸς* διὰ τοῦ 2, ὁ δὲ 2 *διαιρέτης* τοῦ 16.

Γενικῶς: *Ἀριθμὸς λέγεται διαιρετὸς δι' ἄλλου, ἂν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς.*

Διαιρέτης ἀριθμοῦ λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Ἐπειδὴ 16:2=8, ἕπεται ὅτι 16=2×8, ἤτοι ὁ 16 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἀντιστρόφως, ἂν α=2×β, θὰ εἶναι α:2=β, ἤτοι ὁ α διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

Ἄρα: *Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς ὑπὸ ἄλλου εἶναι πολ)σιον αὐτοῦ. Καὶ πᾶν πολ)σιον ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς ὑπ' αὐτοῦ.*

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας 2×5=10, 4×25=100, 8×125=1000 ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 10 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 5, ὁ 100 διὰ 4 καὶ 25, ὁ 1000 διὰ 8 καὶ 125.

§ 82. **Κοινοὶ διαιρέται ἀριθμῶν. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.** Ὁ 3 διαιρῶν τοὺς 12, 20, 36 καλεῖται ***κοινὸς διαιρέτης*** αὐτῶν.

Γενικῶς: *Κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς.*

Τῶν ἀριθμῶν 16, 24, 32, 40 κ.δ. εἶναι οἱ 1, 2, 4, 8, Ὁ μεγαλύτερος τούτων 8 λέγεται μέγιστος ***κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν***.

Γενικῶς: *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς κ. δ. αὐτῶν.*

Οἱ ἀριθμοὶ 4, 8, 9, ἔχουσι κ. δ. μόνον τὴν 1, λέγονται δὲ ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.***

Γενικῶς: *Ἀριθμοί τινες λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν ἔχωσι κ. δ. μόνον τὴν 1.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 168) Ποῖος ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους; Ἂν δὲ ἀριθμοὶ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν 1, εἶναι ἢ ὄχι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους;

169) Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι ἢ ὄχι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ διατί;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 83. **Ἰδιότητες τῶν κοινῶν διαιρετῶν ἀριθμῶν.**

Α'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 20 καὶ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης ὁ 4.

Ἐπειδὴ $8 : 2 = 2$, $12 : 4 = 3$, $20 : 4 = 5$, ἕπεται ὅτι $8 = 4 \times 2$, $12 = 4 \times 3$ καὶ $20 = 4 \times 5$, ἄρα

$$8 + 12 + 20 = (4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 5).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 45 Γ') $4 \times (2 + 3 + 5) = 4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 5)$, ἕπεται ὅτι $8 + 12 + 20 = 4 \times (2 + 3 + 5)$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $8 + 12 + 20$ εἶναι πολ)σιον τοῦ 4· κατ' ἀκολουθίαν (§ 81) ὁ 4 εἶναι εἶναι διαιρέτης τοῦ $8 + 12 + 20$,

Γενικῶς Ἂν $\alpha = \text{πολ.}\delta$, $\beta = \text{πολ.}\delta$, $\gamma = \text{πολ.}\delta$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{πολ.}\ \delta.$$

Ἄρα ; *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Β'. Ἐκ τῆς ἰσότητος $8 \times 3 = 8 + 8 + 8$, ἕπεται ὅτι ὁ 4 διαιρῶν τὸν 8 καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα $8 + 8 + 8$ διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον 8×3.

Ἄρα. *Ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλον διαιρεῖ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ.*

Γ'. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $20 = 4 \times 5$, $8 = 4 \times 2$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$20 - 8 = (4 \times 5) - (4 \times 2).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 46) $4 \times (5 - 2) = (4 \times 5) - (4 \times 2)$, ἕπεται ὅτι

$$20 - 8 = 4 \times (5 - 2),$$

ἤτοι ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τῆς διαφορᾶς $20 - 8$.

Γενικῶς : Ἂν $\alpha = \text{πολ.}\ \delta$, $\beta = \text{πολ.}\ \delta$. θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha - \beta = \text{πολ.}\ \delta.$$ Ἄρα :

Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Δ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 264 καὶ 40 καὶ κ.δ. αὐτῶν ὁ 8. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 264 διὰ 40, εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 24· εἶναι ἄρα $264 = (40 \times 6) + 24$ καὶ ἑπομένως

$$264 - (40 \times 6) = 24$$

Ὁ 8 διαιρῶν τὸν 264 καὶ τὸν (40×6) (§ 83 Β'), θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $264 - (40 \times 6)$ ἤτοι τὸν 24. (83 Γ').

Γενικῶς : Ἂν εἶναι $\alpha = (\beta \times \pi) + \upsilon$ καὶ $\alpha = \text{πολ.}\delta$, $\beta = \text{πολ.}\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\upsilon = \text{πολ.}\delta$.

Ἄρα : *Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου τούτων.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ε'. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι 264=(40×6)+24. Ἔστω ἤδη 4 κοινὸς διαιρέτης τοῦ 40 καὶ τοῦ 24.

Ἐπειδὴ ὁ 4 διαιρεῖ τὸν (40×6) (§ 83 Β') καὶ τὸν 24, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 264.

Γενικῶς: Ἂν α=(β×π)+υ, β=πολ.δ, καὶ υ=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ α=πολ.δ.

Ἄρα: *Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ διαιρέτην καὶ ὑπόλοιπον ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον τῆς διαιρέσεως ταύτης.*

ΣΤ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 60 καὶ 4 κ. δ. αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 60 : 16 εἶναι 12, ὁ 4 θὰ διαιρῇ (§ 83 Δ') τὸν 12. Εἶναι ἄρα ὁ 4 κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 16,24,12.

Ἀντιστρόφως. Τυχὼν κ.δ. τῶν 16,24, 12 π. χ. ὁ 2 διαιρῶν τὸν 16 καὶ 12 θὰ διαιρῇ (§ 83 Ε') καὶ τὸν 60. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ 2 κ.δ. τῶν 16, 24, 60. Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 60 καὶ οἱ 16, 24, 12 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. διαιρέτας. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 16, 8, 12 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. διαιρέτας μὲ τοὺς προηγουμένους.

Ἄρα: *Οἱ κ. διαιρέται ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν εἷς ἢ περισσότεροι ἀπὸ αὐτοὺς ἀντικατασταθῶσι ἕκαστος μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' ἄλλου ἀπὸ αὐτούς.*

Ζ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 6, 18, 24. Ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτοὺς 6 διαιρεῖ ὅλους τοὺς ἄλλους· ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν 6, εἶναι κ.δ. αὐτῶν. Ἄλλον δὲ μεγαλύτερον τοῦ 6 κ. δ. δὲν ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 6 διαιρεῖ τὸν 6. Εἶναι λοιπὸν ὁ 6 μ. κ, δ. τῶν ἀριθμῶν 6, 18, 24.

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ μικρότερος ἀπὸ δοθέντας ἀριθμοὺς διαιρῇ τοὺς ἄλλους, οὗτος εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων τούτων ἀριθμῶν.*

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

§ 84. **Θεμελιώδης ἰδιότης**. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμὸς Α εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἡ διαφορὰ Α—60 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8, ἤτοι εἶναι Α—60=πολ. 8, ὅθεν Α=60+πολ. 8. (1).

Ἐπειδὴ δὲ 60=(7×8)+4=πολ.8+4, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

Α=πολ.8+πολ. 8+4=πολ.8+4.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν Α διαιρούμενος διὰ τοῦ 8 ἀφήνει ὑπόλοιπον 4, ὅσον δηλ. καὶ ὁ 60.

Ὥστε: *Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι πολ)σιον ἄλλου,*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀμφότεροι διαιρούμενοι διὰ τοῦ ἄλλου ἀφήνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

§ 85. **Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000** κτλ. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κτλ. (§ 68) ἐννοοῦμεν ὅτι: *Διὰ τοῦ 10, 100, 1000 κτλ. διαιροῦνται, ὅσοι ἀριθμοὶ λήγουσιν ἀντιστοίχως εἰς 1, 2, 3 κτλ. τοὐλάχιστον μηδενικά.*

§ 86. **Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2 καὶ 5. Πρόβλημα.** *Πληρώνονται 18 ἢ 65 δραχμαὶ μόνον μὲ δίδραχμα ἢ μόνον μὲ πεντάδραχμα;*

Παρατηροῦμεν ὅτι 18=10+8=(10×1)+8. Ἐπομένως αἱ 18 δραχμαὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ 1 δεκάδραχμα καὶ ἀπὸ 8 δραχμάς.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 1 δεκάδραχμα ἔχουσι 5×1 ἢ 5 δίδραχμα καὶ 8 δραχ.=4 δίδραχμα, ἔπεται ὅτι 18 δραχ.=9 δίδραχμα. Πληρώνονται λοιπὸν αἱ 18 δραχμαὶ μὲ δίδραχμα μόνον καὶ τὸ ὅλον 9.

Ὁμοίως 65 δραχ=6 δεκάδραχμα+5 δραχ=30 δίδρ.+2 δίδρ+1 δραχ.=32 δίδρ+1 δραχ. Ἤτοι αἱ 65 δραχμαὶ δὲν πληρώνονται μὲ δίδραχμα μόνον ἀλλὰ χρειάζεται καὶ μία δραχμή.

Ἐὰν τρέψωμεν τὰ δεκάδραχμα εἰς πεντάδραχμα εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι 16 δραχ.=(2×1) πεντάδρ.+8 δραχ=14 πεν.+1πεν. +3 δραχμ. Καὶ 65 δραχμ.=(2×6) πεν.+5 δραχ.=12 πεντ.+1 πεντ.=13 πεντ.

Ἄρα: Αἱ μὲν 65 δραχμ. πληρώνονται μὲ πεντάδραχμα μόνον καὶ τὸ ὅλον 13· αἱ δὲ 18 δραχμαὶ δὲν πληρώνονται μὲ πεντάδραχμα μόνον, ἀλλὰ χρειάζονται καὶ 3 δραχμαί.

Ἀπὸ τὴν προσεκτικὴν ἐξέτασιν τούτων συμπεραίνομεν ὅτι:

α') *Διὰ τοῦ 2 ἢ 5 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5.*

ΣΗΜ. Εἰς τούτους κατατάσσονται καὶ οἱ λήγοντες εἰς 0.

β') *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 2 ἢ 5 διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ.*

* Περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἰδιοτήτων τούτων βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς:

α') Ἔστω ἀριθμός τις 67· ἐπειδὴ 67=60+7 καὶ 60=6×10=6×2×5, ἔπεται ὅτι 67=(6×2×5)+7 καὶ ἑπομένως 67−7=6×2×5.

Εἶναι λοιπὸν ἡ διαφορὰ 67−7 πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Ἄρα (§ 84) οἱ ἀριθμοὶ 67 καὶ 7 διαιρούμενοι διὰ 2 ἀφήνουσι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον· ὁμοίως δὲ καὶ ἂν διαιρεθῶσι διὰ 5 ἀφήνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

β) Κατὰ ταῦτα, ἂν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5, ἤτοι ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 5 θὰ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον 0· θὰ διαιρῆται ἄρα καὶ οὗτος διὰ 2 ἢ 5.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 2 ἢ 5 θὰ εἶναι μηδέν. Καὶ τὸ τελευταῖον ἄρα ψηφίον αὐτοῦ διαιρούμενον διὰ 2 ἢ 5 θὰ ἀφήνῃ ὑπόλοιπον μηδὲν (§ 84). Θὰ διαιρῆται λοιπὸν καὶ τοῦτο διὰ 2 ἢ 5.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καλεῖται **ἄρτιος** ἢ **ζυγός**. Πᾶς δὲ ἀριθμὸς μὴ διαιρετὸς διὰ 2 καλεῖται ***περιττός***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 170) Ὁρίσατε ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ 104 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 10. Ἔπειτα ὅλους τοὺς μεταξὺ 243 καὶ 794 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 100.

171) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 568 δραχ. 940 δραχ. 45680 δραχ. 79324 δραχ. 6514000 δραχ. 1849 δραχ. 72300 δραχ. δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μὲ δεκάδραχμα μόνον καὶ μὲ πόσα δεκάδραχμα ἕκαστον;

172) Ἀναγράψατε δεξιὰ τοῦ 35 ἓν ψηφίον, ὥστε νὰ προκύψῃ ἄρτιος ἀριθμός. Πόσους τοιούτους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον;

173) Ἀπαγγείλατε ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ 21 ἀρτίους ἀριθμοὺς καὶ ἔπειτα τοὺς περιττούς.

174) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 160 δραχ. 375 δραχ. 463 δραχ. 1462 δραχ. 7846 δραχ. δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μόνον μὲ δίδραχμα καὶ μόνον μὲ πεντάδραχμα;

175) Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 2 ἢ 5 διαιρέσεως ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 18, 45, 163, 785, 870, 1436;

176) Γράψατε τοὺς μικροτέρους τοῦ 20 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διὰ 5 ἀφήνουσιν ὑπόλοιπον 3.

§ 87. **Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25.**

Πρόβλημα. *Μοιράζονται ἀκριβῶς 3436 δραχμαὶ εἰς 4 ἢ 25 ἀνθρώπους;*

Α'. Παρατηροῦμεν ὅτι 3436 δραχ.=34 ἑκατοντάδ.+36 δραχ. Ἐπειδὴ 100 δραχ : 4=25 δραχμαὶ καὶ 36 δραχ: 4=9 δραχ, ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς 4 ἀνθρώπους λαμβάνει 33 εἰκοσπ.+9 δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'. Ἐπειδὴ 100 δραχ : 25—4 δραχ, ἡ δὲ διαίρεσις 36 : 25 εἶναι ἀτελὴς (πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 11), ὁ καθεὶς ἀπὸ τοὺς 25 ἀνθρώπους θὰ λάβῃ (4×34) δραχ.+1 δραχ, θὰ περισσεύσωσι δὲ 11 δραχ. ἀπὸ τὰς 36 δρ. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 650 διαιρεῖται διὰ 25· ἂν δὲ διαιρεθῇ διὰ 4 ἀφήνει ὑπόλοιπον 2, ἤτοι ὅσον καὶ ὁ 50,

Ἄρα : α') *Διὰ 4 ἢ 25 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα, ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.*

β') *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 4 ἢ 25 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα.*

* Στηριζόμενοι εἰς τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα (§ 84) δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἰδιοτήτων τούτων, ἂν ἐργασθῶμεν, ὅπως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 5 (§ 86*).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 177) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 127, 216, 450, 875, 1032, 467, 9840, 12400 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4 καὶ ποῖοι διὰ 25 ; Ποῖον δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων ἀκριβῶς ;

178) Ἀναγράψατε δεξιὰ τοῦ 243 ἓν ψηφίον, τοιοῦτον ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4. Πόσους τοιούτους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ;

179) Ποῖα ἀπὸ τὰ ποσὰ 1780 δραχ, 3450 δραχ, 16940 δραχ, 64975 δραχ. δύνανται νὰ πληρωθῶσι μόνον μὲ εἰκοσιπεντάδραχμα ;

§ 88. **Ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 3 ἢ 9.**

Πρόβλημα. *Μοιράζονται ἀκριβῶς εἰς 9 ἢ 3 ἀνθρώπους 873 ἢ 1973 δραχμαί ;*

Λύσις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας 10=9+1, 100=99+1, 1000=999+1 κτλ. καὶ 10=(3×3)+1, 100=(3×33)+1, 1000=(3×333)+1 κτλ. συμπεραίνομεν ὅτι :

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 10, 100, 1000 κτλ. διὰ 3 ἢ 9 εἶναι 1.

Α'). Αἱ 873 δραχ=8 ἑκ+7 δεκ+3 δραχ. Ἀπὸ κάθε ἑκατοντάδραχμον ἢ δεκάδραχμον, ὅταν μοιρασθῇ εἰς 3 ἢ 9 ἀνθρώπους περισσεύει 1 δραχμή. Ἄρα ἀπὸ τὰ 8 ἑκ. καὶ τὰ 7 δεκ. περισσεύουσι (8+7) δραχ. ὥστε μένει νὰ μοιράσωμεν (8+7+3) δραχ=18 δραχ, ἀπὸ τὰς ὁποίας δὲν περισσεύει τίποτε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'). Αἱ 1673 δραχ=1 χιλ+6 ἑκ+7 δεκ+3 δρ. Ἂν μοιράσωμεν τὰ χιλιόδραχμα, ἑκατοντάδραχμα καὶ δεκάδραχμα, μένουσι πρὸς διανομὴν (1+6+7+3)=17 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς μένουσι 2 ἢ 8, ἂν ἡ διανομὴ γίνηται εἰς 3 ἢ 9 ἀνθρώπους.

Ἄρα: α') *Διὰ τοῦ 3 ἢ 9 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.*

β') *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 3 ἢ 9 διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 180) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 162, 543, 1462, 7803, 13893, 8964 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 καὶ ποῖοι διὰ 9; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρετῶν διὰ 3 ἢ 9 ;

182) Σχολεῖον ἔχει 388 μαθητάς. Εἶναι δυνατὸν οὗτοι νὰ παραταχθῶσιν εἰς τριάδας ἢ ἐννεάδας ἢ ὄχι ; Ἂν ὄχι, πόσοι θὰ περισσεύωσιν εἰς κάθε περίστασιν ;

§ 89. **Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 150 καὶ 25. Ἐπειδὴ ὁ 25 διαιρεῖ τὸν 150, ἔπεται (§ 83 Ζ') ὅτι ὁ 25 εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 18. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 120 : 18, ἵνα ἴδωμεν μήπως ὁ μικρότερος διαιρῇ τὸν ἄλλον (§ 83 Ζ'), εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 12. Δὲν εἶναι λοιπὸν ὁ 18 κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 120 καὶ 18.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ 120 καὶ 18 ἔχουσι (§ 83 ΣΤ') τοὺς αὐτοὺς κ. δ. μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 18, ἔπεται ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου μ. κ. δ. ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν 12 καὶ 18. Διαιροῦντες τὸν 18 διὰ 12 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 6 καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν 6 καὶ 12.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 6 διαιρεῖ τὸν 12, ἔπεται ὅτι οὗτοι ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 6. Οὗτος ἄρα εἶναι καὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν μ.κ.δ.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· τοῦτον διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τὸν νέον διαιρέτην διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.*

Γράφοντες ἕκαστον πηλίκον ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου διαιρέτου διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀκολούθως :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

	6	1	2
120	18	12	6
12	6	0	

Β'. Τῶν ἀριθμῶν 9, 27, 63, μ.κ.δ. εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτούς, δηλ. ὁ 9, διότι οὗτος διαιρεῖ ὅλους τοὺς ἄλλους (§ 83 Ζ'.).

Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 132, 48, 18. Ὁ μικρότερος 18, δὲν διαιρεῖ τοὺς ἄλλους, διότι ὁ 132 διαιρούμενος διὰ 18 ἀφήνει ὑπόλοιπον 6, ὁ δὲ 48 ἀφήνει 12.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 83 ΣΤ') οἱ ἀριθμοὶ 132, 48, 18, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. δ. μὲ τοὺς 6, 12, 18, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 6, 12, 18. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ μικρότερος 6 διαιρεῖ τοὺς ἄλλους· ἄρα ὁ 6 εἶναι μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ ἑπομένως καὶ τῶν δοθέντων.

Διάταξις τῆς πράξεως

132	48	18
6	12	18
6	0	0

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς· ὑποκάτω τοῦ μικροτέρου γράφομεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ὑποκάτω δὲ ἑκάστου τῶν ἄλλων γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἐργασίαν ταύτην καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς σειρὰν ἀριθμῶν, ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους. Ὁ μικρότερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Ἂν ὁ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι 1, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 183) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 64· ἔπειτα τῶν 74 καὶ 423.

184) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 90, 120 καὶ 300 καὶ τῶν ἀριθμῶν 90, 330, 420, 1050.

185) Εἰς πόσας τὸ πολὺ μπομπονιέρας εἶναι δυνατὸν νὰ διανεμηθῶσιν ὁμοίως 105 κουφέτα λευκά, 60 ροδόχροα καὶ 45 κόκκινα ; Πόσα δὲ κουφέτα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ περιέχῃ ἑκάστη ;

186) Χορῳδία ἀποτελεῖται ἀπὸ 35 ὑψιφώνους, 63 μέσους καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

84 βαθυφώνους. Πόσαι τὸ πολὺ ὅμοιαι κατὰ τὴν σύνθεσιν ὁμάδες δύνανται νὰ σχηματισθῶσιν ἀπὸ αὐτούς ;

187) Ἀξιωματικὸς ἔχει ὑπὸ τὰς διαταγάς του 3000 πεζούς, 850 ἱππεῖς καὶ 24 πυροβόλα. Πόσας τὸ πολὺ θέσεις δύναται νὰ ὑποστηρίξῃ ὁμοιομόρφως μὲ τὴν δύναμιν ταύτην; Πόσους πεζούς, ἱππεῖς καὶ πυροβόλα θὰ ἔχῃ κάθε θέσις ;

* § 90 **Ἰδιότητες τοῦ μ. κ. διαιρέτου δοθέντων ἀριθμῶν.** Α'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 132, 48, 18, ὧν μ.κ.δ. εἶναι ὁ 6 (§ 89). Ἐὰν ἀριθμός τις δ εἶναι κ.δ. τούτων, οὗτος θὰ εἶναι (§ 83 ΣΤ') κ.δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων σειρῶν τῆς (ἐν § 89) διατάξεως τῆς πράξεως. Θὰ διαιρῇ λοιπὸν ὁ δ καὶ τὸν 6, ὁ ὁποῖος ἀνήκει εἰς τὴν τρίτην σειράν.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀριθμός τις δ διαιρῇ τὸν 6, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολ)σια αὐτοῦ 132, 48, 18,

Ἄρα : *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν. Καὶ ἀντιστρόφως : Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.*

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

Β'. *Κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν καὶ μόνον αὐτοί.*

Γ'. Εὕρομεν προηγουμένως (§ 89 διάταξις πράξεως) ὅτι μ. κ.δ. τῶν 132, 48, 18 εἶναι ὁ 6. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $132\times\lambda$, $48\times\lambda$, $18\times\lambda$, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ $18<48<132$, ἕπεται ὅτι $18\times\lambda<48\times\lambda<132\times\lambda$ (§ 38), ἤτοι ὁ $18\times\lambda$ εἶναι ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἕκαστος λοιπὸν ἀπὸ τοὺς ἄλλους θὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσως αὐτοῦ διὰ τοῦ $18\times\lambda$.

Διάταξις τῆς πράξεως	
$132\times\lambda$, $48\times\lambda$, $18\times\lambda$,	μ.κ.δ.$=6\times\lambda$
$6\times\lambda$, $12\times\lambda$, $18\times\lambda$,	
$6\times\lambda$, 0 0	

Ἐπειδὴ δὲ οἱ 132, 48 διαιρούμενοι διὰ 18 δίδουσιν ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 6 καὶ 12, οἱ ἀριθμοὶ $132\times\lambda$ καὶ $48\times\lambda$ διαιρούμενοι διὰ $18\times\lambda$ θὰ ἀφήνωσιν ὑπόλοιπα $6\times\lambda$ καὶ $12\times\lambda$ (§ 66 ΣΤ'). Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $6\times\lambda$, $12\times\lambda$, $18\times\lambda$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ μικρότερος $6\times\lambda$ ἀπὸ αὐτοὺς διαιρεῖ τοὺς ἄλλους, ἕπεται ὅτι οὗτος εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν $132\times\lambda$, $48\times\lambda$, $18\times\lambda$. Ἄρα:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ πολ)σθῶσιν πάντες ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν πολ)ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Δ'. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 400, 1030, 1310, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 10. Ἂν διαιρέσωμεν αὐτοὺς διά τινος κ.δ. αὐτῶν π.χ. διὰ τοῦ 5, εὑρίσκομεν πηλίκα 80, 206, 262.

Τὸν μ.κ.δ. τούτων εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἂν οὗτος εἶναι Δ, οἱ ἀριθμοὶ $80\times5=400$, $206\times5=1030$, $262\times5=1310$ θὰ ἔχωσι μ.κ.δ. τὸν $\Delta\times5$.

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἕνα μόνον ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 10, πρέπει νὰ εἶναι $\Delta\times5=10$, ὅθεν $\Delta=10:5=2$. Ἄρα:

Ἐάν δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ κ.δ. αὐτῶν καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα ταύτην προκύπτουσιν εὐκόλως καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες:

Ε'. *Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ.κ.δ, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

ΣΤ'. *Ἐὰν τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δοθέντων ἀριθμῶν διά τινος κ.δ. αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ κοινὸς οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 188) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 30, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ 3 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

189) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν $2\times\lambda$, $3\times\lambda$, $5\times\lambda$.

190) Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 127, ὁ δὲ μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι 1524. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος;

* § 91. **Ἰδιότητες τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν. Α'.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον $17\times A$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 6, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 17. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ὁ 6 διαιρῇ ἢ οὔ τὸν Α. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 6 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔχουσι μ.κ.δ. τὴν 1· οἱ δὲ ἀριθμοὶ $17\times A$ καὶ $6\times A$ θὰ ἔχωσι (§ 90 Γ') μ.κ.δ. $1\times A=A$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 6 διαιρεῖ τὸν $17\times A$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν $6\times A$ ὡς πολ)σιόν του, ἕπεται (§ 90 Α') ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν Α.

Ἄρα: *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα ἀπὸ αὐτούς, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν, 2, 3, 5, οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ὁ Α διαιρῆται ἢ οὔ ὑπὸ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν Α : 2=Π, θὰ εἶναι καὶ $A=2\times\Pi$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 3 διαιρεῖ τὸν Α, ἤτοι τὸν $2\times\Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2, θὰ διαιρῇ τὸν Π. Ἂν δὲ εἶναι Π : 3=Π', θὰ εἶναι καὶ $\Pi=3\times\Pi'$. (2)

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν Α ἢ $2\times\Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς 2 θὰ διαιρῇ τὸν Π ἢ τὸν $3\times\Pi'$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 3, θα διαιρῇ τὸν Π'. Ἂν δὲ εἶναι Π' : 5=Π'', θὰ εἶναι καὶ $\Pi'=5\times\Pi''$. (3)

Ἐάν πολ)σωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν ὅτι $A\times\Pi\times\Pi'=2\times3\times5\times\Pi\times\Pi'\times\Pi''$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $A=(2\times3\times5)\times\Pi''$. Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ Α εἶναι πολ)σιον τοῦ $2\times3\times5$ καὶ ἑπομένως διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

Ἄρα: *Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἐφαρμογαί. Ἐπειδὴ 6=2×3 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἕπεται ὅτι : *πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 2 καὶ 3 διαιρεῖται καὶ διὰ 6.* Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι καὶ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 6 ἔχει τὴν μορφὴν $6\times\Pi$ ἢ $2\times3\times\Pi$. Εἶναι ἄρα οὗτος διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 3. Ὥστε :

Ἵνα ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 6, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ διὰ 3.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι : *Ἵνα ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 30, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ 3 καὶ 5.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 191) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 12 ;

192) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 18 ;

193) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 20 ;

194) Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 90 ;

§ 92. **Κοινὰ πολ)σια ἀριθμῶν.** Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ὑπὸ τῶν 2, 3 καὶ 4, ἤτοι εἶναι πολ]σιον ἑκάστου τούτων. Διὰ τοῦτο ὁ 12 λέγεται ***κοινὸν πολ]σιον*** τῶν 2, 3 καὶ 4. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ $12\times2=24$, $12\times3=36$ κτλ, εἶναι κοινὰ πολ]σια τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Γενικῶς : *Κοινὸν πολ]σιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12 εἶναι κοινὸν πολ)σιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4, ὁ 12 λέγεται **ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον** τῶν 2, 3 καὶ 4.

Γενικῶς: *Ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ μικρότερον ἀπὸ τὰ κοινὰ πολ]σια αὐτῶν.*

§ 93. **Εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ. πολ. δοθέντων ἀριθμῶν.**

Πρόβλημα. *Εἰς πλατεῖαν πόλεως καταλήγουσι τρεῖς γραμμαὶ ἠλεκτροκινήτων ὀχημάτων (τραμ). Ἀπὸ τὴν α΄ φθάνει ὄχημα κάθε 4 λεπτά, ἀπὸ τὴν β΄ κάθε 6 λεπτὰ καὶ ἀπὸ τὴν γ΄ κάθε 9 λεπτά. Ἐὰν μίαν στιγμὴν φθάσωσι συγχρόνως ὀχήματα καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς γραμμάς, μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσωσιν ἐκ νέου ὀχήματα καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς ταύτας γραμμάς;*

Λύσις. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς συγχρόνου ἀφίξεως θὰ φθάνωσιν ὀχήματα ἀπὸ τὴν α΄ γραμμὴν μετὰ 4, 8, 12... ἤτοι μετὰ χρόνον, ὁ ὁποῖος εἶναι πολ]σιον τοῦ 4. Ἀπὸ τὴν β΄ γραμμὴν μετὰ 6, 12, 18,... ἤτοι μετὰ πολ]σιον 6 χρόνον· καὶ ἀπὸ τὴν γ΄ γραμμὴν μετὰ 9, 18, 27... ἤτοι μετὰ πολ]σιον 9 χρόνον. Καὶ ἀπὸ τὰς ἑπομένως γραμμὰς θὰ φθάνωσι συγχρόνως ὀχήματα μετὰ χρόνον, ὅστις εἶναι κ.π. τῶν 4, 6, 9. Ὁ δὲ χρόνος μέχρι τῆς πρώτης νέας συγχρόνου ἀφίξεως θὰ εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Τὸ ζητούμενον ἐλ. κ. πολ. θὰ εἶναι εἷς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $9\times1=9$, $9\times2=18$, $9\times3=27$, $9\times4=36$, $9\times5=45$, κτλ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ 9, 18 καὶ 27 δὲν διαιροῦνται καὶ ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων 4, 6, ὁ δὲ μετ' αὐτοὺς 36 διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν, ἔπεται ὅτι ὁ 36 εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν 4, 6, 9.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. πολ. δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεγαλύτερον ἐπὶ 1, 2, 3 κτλ., μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον διαιρετὸν ὑπὸ ὅλων τῶν ἄλλων. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον ἐλ. κ. πολ)σιον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 195) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 9, καὶ τῶν ἀριθμῶν 15, 12, 30.

196) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 8, 25, 50, 100.

197) Κώδων κτυπᾷ κάθε 8 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἄλλος κάθε 18 πρῶτα λεπτά. Κατά τινα δὲ στιγμὴν ἐκτύπησαν συγχρόνως. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ κτυπήσωσι πάλιν συγχρόνως;

198) Παιδίον εἶχε βόλους ὀλιγωτέρους τῶν 20. Ἐὰν ἐμέτρα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτοὺς ἀνὰ 2 ἢ ἀνὰ 3 ἢ ἀνὰ 4 ἐπερίσσευε πάντοτε 1. Πόσους βόλους εἶχε ;

§ 94. **Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί**. Ὁ ἀριθμὸς 5 διαιρεῖται μόνον διὰ 5 καὶ 1, λέγεται δὲ πρῶτος ἀριθμός.

Γενικῶς : *Πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς 1.*

Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται σύνθετος, ὡς 8, 9, 15 κτλ.

§ 95. **Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους**. Οἱ μικρότεροι π. χ τοῦ 100 πρῶτοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 100 κατὰ τάξιν μεγέθους. Ἔπειτα μετροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ 2 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 3 καὶ διαγράφομεν πάντα δεύτερον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 9 ἤτοι 3^2 καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 10 μετροῦμεν αὐτοὺς ἀνὰ 3 καὶ διαγράφομεν πάντα τρίτον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 5^2 ἤτοι 25 καὶ μετροῦντες ἀπὸ τοῦ 26 ἀνὰ 5 διαγράφομεν πάντα πέμπτον. Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 7^2 ἤτοι 49 καὶ πάντα ζ΄ ἀπὸ τοῦ 50. Οὕτω διεγράφησαν τὰ πολ)σια τῶν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Τὸ α΄ μὴ διαγραφὲν πολ)σιον τοῦ 11 εἶναι $11^2=121$, ὅπερ δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ πίνακα. Ἔληξε λοιπὸν ἡ ἐργασία καὶ ὅσοι ἀριθμοὶ ἔμειναν εἶναι ὅλοι πρῶτοι.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται ***κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 199) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 18, 23, 37, 39, 42 εἶναι πρῶτοι καὶ ποῖοι σύνθετοι ;

200) Ποῖος ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος ;

201) Εἰς πρῶτον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 2 προσθέτομεν 1. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμὸς καὶ διατί ;

202) Τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος ἀριθμοῦ διαφόρου τῆς 1 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος καὶ διατί ;

§ 96. **Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ**. Τοῦ ἀριθμοῦ 12 διαιρέται εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ἀπὸ αὐτοὺς ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος εἶναι ὁ 2· οὗτος καλεῖται ***δεύτερος διαιρέτης*** τοῦ 12.

Γενικῶς : *Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος διαιρέτης αὐτοῦ.*

Ὁ δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ Α δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς π. χ. 4.

Διότι ὁ 4 ὡς σύνθετος ἀριθμὸς ἔχει διαιρέτην διάφορον τοῦ 4

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ μεγαλύτερον τῆς μονάδος, τὸν 2. Ἂν δὲ ἦτο Α=πολ. 4, ὁ 2 θὰ διήρει τὸν Α (§ 83 Β΄) καὶ δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ 4 δεύτερος διαιρέτης τοῦ Α.

Ἄρα: *Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.*

§ 97. **Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.** Α΄. Ὁ σύνθετος ἀριθμὸς π. χ. 360 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 2.

Ἐπειδὴ δὲ 360 : 2=180, ἕπεται ὅτι 360=2×180.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

180=2×90, 90=2×45, 45=3×15,

15=3×5, 5=5×1.

Εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας ὁ α΄ παράγων τοῦ β΄ μέλους εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, διότι εἶναι δεύτερος διαιρέτης ἄλλου ἀριθμοῦ. Ὁ δὲ δ΄ παράγων βαίνει ἐλατούμενος καὶ ἐπὶ τέλους γίνεται 1. Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας πολ)σωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

Διάταξις τῆς πράξεως

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$300 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$$360\times(180\times90\times45\times15\times5)=$$
$$2\times2\times2\times3\times3\times5\times(180\times90\times45\times15\times5\times1),$$

ὅθεν $360=2\times2\times2\times3\times3\times5$ ἢ $360=2^3\times3^2\times5$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου αὐτοῦ. Τὸ πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου αὐτοῦ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον 1. Τέλος σημειοῦμεν τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας μόνον τοὺς διαιρέτας τῶν διαιρέσεων τούτων.*

Β΄. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἀναλύηται εὐκόλως εἰς γινόμενον ἄλλων παραγόντων, ἡ ἀνωτέρω ἐργασία γίνεται ἁπλούστερον, ἂν κάθε παράγων ἀναλυθῇ χωριστὰ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Οὕτως εἶναι $720=72\times10=8\times9\times10$.

Ἐπειδὴ δὲ $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\times5$, ἕπεται ὅτι

$$720=2^3\times3^2\times2\times5=2^4\times3^2\times5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 203) Νὰ ἀναλυθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6, 12, 15, 25, 140, 280, 1650, 3375, 8346 εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

204) Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον $2^2 \times 3 \times 5$, καὶ ποῖος μὲ τὸ $2^3 \times 3^2 \times 7$;

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

§ 98. **Α΄. Γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἂν $A=2^3 \times 3^2 \times 7$, $B=2^2 \times 3 \times 5$,

$$\Gamma=2 \times 3^2 \times 5^3,$$ θὰ εἶναι (§ 59) καὶ

$$A \times B \times \Gamma = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3^2 \times 5^3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $2^3 \times 2^2 \times 2 = 2^6$, $3^2 \times 3 \times 3^2 = 3^5$, $5 \times 5^3 = 5^4$, ἔπεται (§ 56) ὅτι $A \times B \times \Gamma = 2^6 \times 3^5 \times 5^4 \times 7$.

Ἄρα : *Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς, ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην, ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ὁ παράγων οὗτος ἔχει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.*

§ 99. **Β΄. Δυνάμεις ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἐὰν $A=2^3 \times 3^3 \times 5$, θὰ εἶναι

$$A^2=(2^3 \times 3^3 \times 5) \times (2^3 \times 3^3 \times 5) = 2^{3+3} \times 3^{3+3} \times 5^{1+1} = 2^{3 \times 2} \times 3^{3 \times 2} \times 5^{1 \times 2}$$

$$A^3=(2^3 \times 3^3 \times 5) \times (2^3 \times 3^3 \times 5) \times (2^3 \times 3^3 \times 5) = 2^{3 \times 3} \times 3^{3 \times 3} \times 5^{1 \times 3}$$

$$A^\nu=(2^3 \times 3^3 \times 5) \times (2^3 \times 3^3 \times 5) \times \ldots\ldots \times (2^3 \times 3^3 \times 5) = 2^{3 \times \nu} \times 3^{3 \times \nu} \times 5^{1 \times \nu}.$$

Ἄρα: *Ἄρα διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς πρώτους παράγοντας εἰς τὴν νην δύναμιν, πολ)ζομεν τοὺς ἐκθέτας πάντων τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ ν.*

§ 100. **Γ΄. Ρίζαι ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἐπειδὴ $5^2=25$, ὁ 5 λέγεται ***τετραγωνικὴ ρίζα ἢ δευτέρα ρίζα*** τοῦ 25.

Ὥστε : *Τετρ. ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον.*

Ἐπειδὴ $2^3=8$, ὁ 2 λέγεται ***κυβικὴ ἢ τρίτη*** ρίζα τοῦ 8.

Ὥστε : *Κυβικὴ ἢ τρίτη ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς κύβον.*

Γενικῶς : *Ἂν $a^\nu = \beta$, ὁ α λέγεται νυοστὴ ρίζα τοῦ β καὶ σημειώνεται οὕτω* $\sqrt[\nu]{\beta}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ λέγεται **ριζικόν,** ὁ ὑποκάτω αὐτοῦ ἀριθμὸς λέγεται **ὑπόρριζον** καὶ ὁ ἐντὸς τῆς γωνίας του ἀριθμὸς λέγεται **δείκτης** τῆς ρίζης. Ὁ δείκτης 2 οὐδέποτε γράφεται.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $(2^2\times3^3\times5)^\nu = 2^{2\times\nu}\times3^{3\times\nu}\times5^{1\times\nu}$ προκύπτει ὅτι $\sqrt[\nu]{2^{2\times\nu}\times3^{3\times\nu}\times5^\nu} = 2^2\times3^3\times5$.

Ἄρα: *Ἐὰν οἱ ἐκθέται ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων ἀριθμοῦ διαιροῦνται διὰ ν, εὑρίσκομεν τὴν νην ρίζαν αὐτοῦ, ἂν διαιρέσωμεν διὰ ν τοὺς ἐκθέτας ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 205) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν 144, 324, 441, 5184, 2000.

206) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν 216, 1620, 1000.

207) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 1296 καὶ τοῦ 20736.

§ 101. **Δ΄. Γενικὸς χαρακτὴρ διαιρετότητος.** Τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ 18 π.χ. 18×180 ἢ 3240 διαιρεῖται διὰ 18.

Ἐπειδὴ δὲ $18=2\times3^2$, $180=2^2\times3^2\times5$, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης

$$3240=18\times180 \text{ γίνεται (§ 57 Γ΄)}$$

$$3240=(2\times3^2)\times(2^2\times3^2\times5)=2^3\times3^4\times5.$$

Περιέχει ἄρα ὁ 3240 ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 18 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἔστωσαν τώρα οἱ ἀριθμοὶ 504 ἢ $(2^3\times3^2\times7)$ καὶ 28 ἢ $(2^2\times7)$. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ 504 ἔχει τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 28 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἐπειδὴ $2^3 : 2^2=2$, ἕπεται ὅτι $2^3=2^2\times2$ καὶ ἑπομένως.

$504=2^2\times3^2\times2\times7=(2\times3^2)\times(2^2\times7)$ ἢ $504=18\times28$ καὶ ἑπομένως $504 : 28=18$, ἤτοι ὁ 504 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 28.

Ἄρα: *Διὰ νὰ διαιρῆται ἀριθμὸς δι' ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ πρῶτος νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.*

Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι $504=(2\times3^2)\times(2^2\times7)$ ἢ

$$2^3\times3^2\times7=(2\times3^2)\times(2^2\times7), \text{ ὅθεν}$$

$$(2^3\times3^2\times7) : (2^3\times3^2)=2^2\times7.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$(2^5\times3^4\times5^2\times11^2) : (2^3\times3\times11)=2^2\times3^3\times5^2\times11.$$

Ἄρα: *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας διαιρῆται δι' ἄλλου τοιούτου, τὸ πηλίκον ἔχει πάντας τοὺς παρά-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γοντας τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρέτην, ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρετέον.

ΣΗΜ. Ἐὰν πρῶτος παράγων ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, εἰς τὸ πηλίκον θὰ ἔχῃ οὗτος ἐκθέτην μηδὲν καὶ θὰ ἰσοῦται ἑπομένως (§ 80) πρὸς τὴν μονάδα, ἥτις παραλείπεται.

Οὕτω $(2^3\times3^2\times5^3) : (3^2\times5)=2^3\times3^0\times5^2=2^3\times5^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 208) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2^2\times5^3\times7^3\times11$, $2^3\times5^2\times7^3\times11$, $2^3\times5^4\times7^2\times11^2\times13$, $5^3\times7^4\times11^2\times13$ διαιροῦνται διὰ τοῦ $2^3\times5^2\times7$ καὶ ποῖα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα;

209) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2^5\times5^2\times7^3\times17^2$, $2^4\times5^3\times13^3\times17^3$ καὶ $2^6\times3^4\times5^3\times13^3\times17^5$ διαιροῦνται διὰ τοῦ $2^3\times5^2\times13^2\times17$ καὶ ποῖα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα;

210) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ γινόμενον $2^4\times3^3\times5^3$ διαιρεῖται διὰ $2\times3\times5^\lambda$;

§ 102. **Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $A=2^4\times3^2\times5$, $B=2^3\times3^4\times7^2$, $\Gamma=2^5\times3^3\times11$. Τυχὼν κ. δ. αὐτῶν Δ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους ἀπὸ τοὺς κοινοὺς αὐτῶν παράγοντας 2 καὶ 3. Διότι, ἂν ὁ Δ εἶχε π. χ. τὸν 11, δὲν θὰ διῄρει τοὺς ἀριθμοὺς A καὶ B (§ 101).

Δὲν δύναται δὲ ὁ Δ νὰ ἔχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 3 οὐδὲ τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 2. Διότι ἂν π. χ. εἶχε τὸν 2 μὲ ἐκθέτην τὸν 4, δὲν θὰ διῄρει τὸν B.

Κατὰ ταῦτα πᾶς κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν A, B, Γ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2^\mu\times3^\nu$, ἔνθα μ εἶναι 0, ἢ 1, ἢ 2 ἢ 3 καὶ ν εἶναι 0 ἢ 1 ἢ 2. Ἑπομένως μ.κ.δ. εἶναι ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ ἐκθέται μ καὶ ν ἔχουσι τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τιμήν, ἤτοι ὁ $2^3\times3^2$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλους τοὺς κοινοὺς μόνον παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.*

§ 103. **ΣΤ΄. Εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ.π. ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἔστωσαν οἱ ἀνωτέρω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμοὶ Α, Β, Γ. Τυχὸν κ.π. αὐτῶν Π πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν· διότι, ἂν δὲν περιεῖχε π.χ. τὸν 11, δὲν θὰ διηρεῖτο διὰ τοῦ Γ.

Δὲν δύναται δὲ ὁ Π νὰ περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 5, τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 4 καὶ τὸν 7 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 2. Διότι ἂν εἶχε π.χ. τὸν 3 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διηρεῖτο ὑπὸ τοῦ Β (§ 101). Δύναται ὅμως ὁ Π νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλους ἀκόμη πρώτους παράγοντας, οἱ ὁποῖοι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουσι γινόμενον Λ.

Κατὰ ταῦτα πᾶν κ.π. τῶν Α. Β, Γ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2^{\alpha}\times3^{\nu}\times5^{\lambda}\times7^{\rho}\times11^{\tau}\times\Lambda$ ἔνθα εἶναι

$$\mu\geqq5,\ \nu\geqq4,\ \lambda\geqq1,\ \rho\geqq2,\ \tau\geqq1.$$

Ἐπομένως ἐλ.κ.π. εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας μ, ν, λ, ρ, τ ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν καὶ $\Lambda=1$, ἤτοι ὁ $2^5\times3^4\times5\times7^2\times11$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν μέγιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.*

ΣΗΜ. Οἱ ἀριθμοὶ $2^2\times5$, $3^3\times7^2$, 11×13^2 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Οὐδένα ἐπομένως ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐλ. κ. π. αὐτῶν εἶναι
$2^2\times5\times3^3\times7^2\times11\times13^2$, ἤτοι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 211) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 504 καὶ 720.

212) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ κ.δ καὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 150, 540, 7875.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 104. **Κλασματικαὶ μονάδες.** Ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς δύο πτωχοὺς μίαν μεταλλικὴν δραχμήν, δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ πράξωμεν. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ διαίρεσις 1 διὰ 2 εἶναι ***ἀδύνατος***. Ὁμοίως αἱ διαιρέσεις 2 διὰ 3, 5 διὰ 8 κτλ. εἶναι ἀδύνατοι.

Ἐὰν ὅμως τὴν δραχμὴν ἀνταλλάξωμεν μὲ 2 πεντηκοντάλεπτα, κατορθώνομεν νὰ μοιράσωμεν αὐτὴν εἰς τοὺς δύο πτωχούς, ἂν δώσωμεν εἰς τὸν καθ' ἕνα ἀπὸ ἕνα πεντηκοντάλεπτον.

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ λέγεται ***ἥμισυ*** ἢ ***ἓν δεύτερον*** τῆς δραχμῆς καὶ γράφεται οὕτω $\frac{1}{2}$. Ὁμοίως ἐὰν χωρίσωμεν μίαν ὀκᾶν εἰς 3 ἴσα μέρη, τὸ καθ' ἓν καλεῖται ***ἓν τρίτον*** τῆς ὀκᾶς καὶ γράφεται $\frac{1}{3}$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται τὸ ***ἓν τέταρτον*** $\left(\frac{1}{4}\right)$ ἀμπέλου, ***ἓν πέμπτον*** $\left(\frac{1}{5}\right)$ πήχεως κτλ.

Ὥστε $1 : 2 = \frac{1}{2}$, $1 : 3 = \frac{1}{3}$, $1 : 4 = \frac{1}{4}$ κτλ.

Τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κτλ, λέγονται ***κλασματικαὶ μονάδες***.

Γενικῶς: *Κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.*

§ 105. **Κλασματικοὶ ἀριθμοί.** Ἂν μοιράσωμεν ἐξ ἴσου μίαν, μίαν, 3 ὀκάδας ζακχάρεως εἰς 4 πτωχούς, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀποτελεῖται ἀπὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. λαμβανόμενον 3 φοράς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ μερίδιον τοῦτο ὀνομάζομεν τρία τέταρτα $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Ὥστε 3 ὀκ. : 4 = $\frac{3}{4}$ ὀκ. Ἂν μοιράσωμεν 5 πήχεις εἰς 8 ἀνθρώπους, θὰ δόσωμεν εἰς καθ' ἕνα πέντε φορὰς τὸ $\frac{1}{8}$ πηχ. ἤτοι πέντε ὄγδοα $\left(\frac{5}{8}\right)$ πηχ. Ὥστε 5 πηχ. : 8 = $\frac{5}{8}$ πήχ.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ λέγονται **κλάσματα ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.**

Καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Γενικῶς : *Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἂν ληφθῇ ἅπαξ, δίς, τρὶς κ.λ. κλασματική τις μονάς.*

Κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους· ὁ εἷς γράφεται ὑποκάτω τοῦ ἄλλου καὶ χωρίζονται μὲ εὐθεῖαν γραμμήν. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γράφεται κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴν λέγεται **παρονομαστὴς** καὶ φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὁ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς λέγεται: **ἀριθμητὴς** καὶ φανερώνει πόσα ἀπὸ ταῦτα ἐλήφθησαν.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς λέγονται μαζὶ **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Ἀναγινώσκονται δὲ ὁ μὲν ἀριθμητὴς ὡς ἀπόλυτον, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸν ἀριθμητικόν.

Ἀπὸ ὅσα προηγουμένως εἴπομεν προκύπτει ὅτι :

Κάθε κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Διὰ τῆς ἐπινοήσεως ἑπομένως τῶν κλασμάτων **πᾶσα διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία.**

Π.χ. 7 : 9 = $\frac{7}{9}$, 17 : 4 = $\frac{17}{4}$ κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 213) Πόσον μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι 1, 2, 3, 4, 5 δεκάρες ; ἢ 1, 5, 8, 12, 26 λεπτά ;

214) Πόσον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι 1, 8, 17, 23, 142 δράμια ;

215) Πόσον μέρος τοῦ πήχεως εἶναι 1, 3, 6, 7 ρούπια ;

216) Πόσον μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι 1, 3, 15, 19, 36 ὀκάδες ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

217) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκια τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων 3 : 12, 5 : 7, 23 : 37, 32 : 50.

§ 106. **Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.** Ἂς διαιρέσωμεν δύο ὅμοια μῆλα εἰς 4 ἴσα μέρη τὸ καθ' ἕν. Τρία ἀπὸ αὐτὰ ἀποτελοῦσι μέρος μικρότερον ἑνὸς μήλου, 4 ἀποτελοῦσιν ἓν μῆλον καὶ 7 ἀποτελοῦσι μέρος μεγαλύτερον μήλου. Ὥστε $\frac{3}{4}<1$, $\frac{4}{4}=1$, $\frac{7}{4}>1$.

Ἄρα : *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος εἶναι μικρότερος, ἴσος ἢ μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν 1.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀγράφως) 218) Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν 5, εἶναι μικρότερα ὑπὸ τὴν 1 ; Ποῖον ἰσοῦται πρὸς 1 ; Ὀνομάσατε δύο μεγαλύτερα τῆς 1.

219) Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀριθμητὴν 7, εἶναι μεγαλύτερα τῆς 1 ; Ποῖον ἰσοῦται πρὸς 1 ; Ὀνομάσατε τρία μικρότερα τῆς 1.

220) Ποῖα ἀπὸ τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{8}{8}$ εἶναι ἴσα, ποῖα μικρότερα καὶ ποῖα μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν 1 ;

221) Πόσα δωδέκατα, ἔννατα, εἰκοστὰ ἔχει ἡ 1 ;

§ 107. **Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.** Γνωρίζομεν ὅτι 5 πήχ. ἔχουσιν $8\times5=40$ ῥοῦπια· ἄρα 5 πήχ. $=\frac{40}{8}$ πήχ. Ὁμοίως 15 δραχ. $=10\times15=150$ δεκάρες $=\frac{150}{10}$ δραχμῆς.

Ἄρα : *Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστήν, πολ)ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, (ἀγράφως) 222) Πόσα ὄγδοα ἔχουσιν 7, 4, 12 πήχεις ;

223) Πόσα δέκατα ἢ ἑκατοστὰ ἔχουσι 18, 23, 165 δραχμαί ;

224) Πόσα τρίτα καὶ πόσα δωδέκατα ἔχει ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 8, 6, 20 ;

225) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸν 3 καὶ νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 15.

226) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν 12 ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3, ποῖον πρὸς τὸν 5 καὶ ποῖον πρὸς τὸν 12 ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 108. **Μικτοὶ ἀριθμοί.** Ἂν μοιράσωμεν 17 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους, θὰ δόσωμεν εἰς καθένα ἀπὸ 5 δραχμὰς καὶ θὰ μείνωσι καὶ 2 δραχ. Ἂν δὲ μοιράσωμεν καὶ αὐτάς, θὰ δόσωμεν εἰς καθ' ἕνα ἀπὸ $\frac{2}{3}$ δραχ. Ὥστε τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι

5 δραχ $+\frac{2}{3}$ δραχ. ἢ $5\frac{2}{3}$ δραχμαί. Ὁ ἀριθμὸς $5\frac{2}{3}$ καλεῖται **μικτός**.

Γενικῶς: *Μικτὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα.*

Ἐπειδὴ ὁ 5 ἔχει (5×3) τρίτα, ὁ $5\frac{2}{3}$ ἔχει τὸ ὅλον $(5\times3)+2=17$ τρίτα, καὶ γράφεται $\frac{17}{3}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλάσμα, πολ)ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος. Ὑπὸ τὸ ἄθροισμα δὲ γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀγράφως καὶ γραπτῶς) 227) Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ $3\frac{1}{5}$, $7\frac{2}{3}$, $6\frac{4}{5}$, $8\frac{1}{5}$, $9\frac{4}{7}$, $2\frac{3}{11}$,

$5\frac{7}{15}$, $7\frac{1}{30}$, $9\frac{3}{40}$, $25\frac{4}{5}$, $120\frac{1}{4}$.

228) Ἠγόρασέ τις $4\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματος. Πόσα ὄγδοα ἠγόρασε τὸ ὅλον;

229) Πόσα τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς ἔχουσι $5\frac{23}{400}$ ὀκάδες καὶ πόσα $10\frac{37}{400}$ ὀκ;

230) Πόσα δέκατα τῆς δραχμῆς ἔχουσι $16\frac{7}{10}$ δραχμαὶ καὶ πόσα $25\frac{9}{10}$ δραχμαί;

§ 109. **Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.** Ἂν 38 δραχ. μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου εἰς 4 πτωχούς, λαμβάνει ἕκαστος $\frac{38}{4}$ δραχ. (§ 105). Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν $38:4$ εὑρί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σκομεν ὅτι κάθε μερίδιον εἶναι 9 δραχ. μένουσι δὲ 2 δραχμαί. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ὁ καθεὶς $\frac{2}{4}$ δραχ. Ὅλον λοιπὸν τὸ μερίδιον εἶναι $9\frac{2}{4}$ δραχ. Εἶναι ἑπομένως $\frac{38}{4} = 9\frac{2}{4}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον φανερώνει τὰς περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ἀκόμη.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 231) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τῶν κλασμάτων $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{64}{8}$, $\frac{28}{14}$, $\frac{79}{12}$, $\frac{124}{35}$, $\frac{267}{100}$, $\frac{485}{200}$.

232) Εἰς τίνος εἴδους ἀριθμὸν τρέπεται μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων καθ' ἓν ἀπὸ τὰ κλάσματα.

$$\frac{105}{2}, \frac{224}{4}, \frac{307}{3}, \frac{123}{3}, \frac{400}{5}, \frac{1031}{5};$$

Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως.

§ 110. **Πρόβλημα I.** *Τὸ ρούπιον ὑφάσματος τιμᾶται* $\frac{3}{4}$ *δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 4 ἢ 8 ρούπια ἐξ αὐτοῦ;*

Λύσις Α') Ἀφ' οὗ 1 ρούπ. τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δραχ, τὰ 4 ρούπ. τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δραχ $\times$ 4.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, ἔπεται ὅτι:

$$\frac{3}{4} \times 4 = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \overline{1 + 1 + 1} = 3 \text{ δραχ.} \end{array} \right.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα: *Ἐὰν κλάσμα πολ)σθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

Β'. Τὰ 8 ρούπια τιμῶνται $\frac{3}{4}$ δραχ.$\times 8$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ 4 ρούπια τιμῶνται 3 δραχάς, τὰ 8 ρούπια τιμῶνται 6 δραχμάς.

Ὥστε $\frac{3}{4}\times 8=6$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{4}\times 12=9$.

Ἄρα: *Ἐὰν κλάσμα πολ)σθῇ ἐπὶ πολ)σιον τοῦ παρονομαστοῦ, δίδει γινόμενον τὸ ἰσοπλ)σιον τοῦ ἀριθμητοῦ.*

§ 111. **Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.** Ἐπειδὴ

$$\frac{3}{4}=3:4 \text{ καὶ } \frac{3}{4}\times 4=3,$$

ἔπεται ὅτι:

Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον, ὁ ὁποῖος πολ)ζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Κατὰ ταῦτα, ἂν $\alpha\times\beta=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\gamma:\alpha=\beta$, $\gamma:\beta=\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀγράφως) 233). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$$\frac{2}{7}\times 7,\ \frac{9}{12}\times 12,\ \frac{2}{5}\times 10,\ \frac{7}{9}\times 27,\ \frac{3}{4}\times 16,\ \frac{5}{4}\times 12,$$

$$\frac{4}{5}\times 20,\ \frac{9}{12}\times 60,\ \frac{7}{20}\times 20,\ \frac{1}{8}\times 72.$$

234) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολ)σωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 2 ἢ 4 ἢ 16;

235) Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἅλατος τιμᾶται $\frac{2}{3}$ δραχ. πόσον τιμῶνται 8 ὀκ. ἅλατος;

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα.

§ 112. **Ἴσα καὶ ἄνισα κλάσματα.** Α') Ἂν 8 πτωχοὶ ἐμοίρασαν ἐξ ἴσου ποσὸν χρημάτων καὶ ἔλαβον ἀπὸ $\frac{6}{8}$ δρ. τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἦτο $\frac{6}{8}\times 8=6$ δραχ. Ἂν δὲ ἔλαβεν ἕκαστος ἀπὸ $\frac{3}{4}$ δραχ. τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἦτο $\frac{3}{4}\times 8=6$ δραχ.

Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐμοιράσθη εἰς τὸ αὐτὸ πλῆθος μεριδίων, ἔπεται ὅτι τὸ μερίδιον εἶναι τὸ αὐτό, ἤτοι $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα : *Δύο κλάσματα λέγονται ἴσα, ἂν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι.*

Β') Ἐπειδὴ $\frac{3}{4}\times 12=9$, $\frac{4}{6}\times 12=8$, ἔπεται ὅτι $\frac{4}{6}<\frac{3}{4}$.

Ἄρα : *Δύο κλάσματα λέγονται ἄνισα, ἂν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι. Μεγαλύτερον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται μεγαλύτερος ἀκέραιος.*

Συνήθως πολλαπλασιάζομεν τὰ πρὸς σύγκρισιν κλάσματα ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν.

Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{4}{6}\times 18=12$, $\frac{6}{9}\times 18=12$, $\frac{2}{3}\times 18=12$,

ἔπεται ὅτι $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων δὲ ἐξάγονται εὐκόλως καὶ τὰ ἑξῆς ἄμεσα γνωρίσματα,

α') Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

β') Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ διαφόρους ἀριθμητὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

γ') Κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ διαφόρους παρονομαστὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 236) Νὰ τεθῶσι κατὰ τὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$ καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{15}$.

237) Νὰ συγκριθῶσι τὰ κλάσμα $\frac{3}{4}$, καὶ $\frac{9}{12}$, ἔπειτα δὲ τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ $\frac{6}{21}$.

238) Νὰ συγκριθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{6}{8}$, ἔπειτα δὲ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

239) Νὰ τεθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα.

$$\frac{4}{7},\quad \frac{9}{13},\quad \frac{8}{21}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως τὰ $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$.

240) Εἰς τοὺς δύο ὅρους τυχόντος κλάσματος μικροτέρου τοῦ 1 προσθέσατε τὸν αὐτὸν ἀκέραιον καὶ συγκρίνατε τὸ νέον κλάσμα μὲ τὸ πρῶτον. Ἐπαναλάβατε τὰ αὐτὰ μὲ κλάσμα μεγαλύτερον τοῦ 1.

§ 113. **Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.** Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{3}{8}$ πήχ.=3 ρούπια, $\frac{6}{8}$ πήχ.=6 ρούπια, τὰ δὲ 6 ρούπια εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ 3 ρούπια.

Ἄρα $\frac{6}{8}$ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, τοῦτο δὲ εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{6}{8}$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ $\frac{9}{8}$ εἶναι τριπλάσιον ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{9}{8}$.

Ἄρα: *Α΄) Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολ)ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.*

Β΄) Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος διαιρεθῇ μὲ ἕνα διαιρέτην αὐτοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀγράφως) 241) Νὰ εὑρεθῇ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, πενταπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων.

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{9}{23},\ \frac{12}{37},\ \frac{15}{40}$$

242) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἥμισυ ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{6},\ \frac{4}{9},\ \frac{6}{10},\ \frac{10}{11},\ \frac{14}{29},\ \frac{40}{53},\ \frac{184}{83}.$$

243) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τρίτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{3}{4},\ \frac{6}{11},\ \frac{9}{12},\ \frac{15}{26},\ \frac{21}{38},\ \frac{33}{45},\ \frac{45}{57},$$

244) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τέταρτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{4}{7},\ \frac{8}{15},\ \frac{12}{31},\ \frac{20}{47},\ \frac{28}{55},\ \frac{60}{73}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

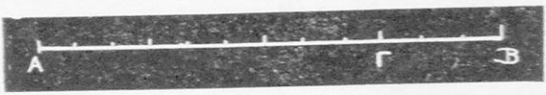
Γ'). Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{7}{10}$ δραχ.=7 δεκάρες=14 πεντάρες καὶ $\frac{7}{20}$ δραχ.=7 πεντάρας. Εἶναι λοιπὸν $\frac{7}{10}$ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{20}$, τοῦτο δὲ εἶναι ἥμισυ τοῦ $\frac{7}{10}$.

Ἄρα: *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολ)σθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμαι διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Δ'. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος διαιρεθῇ διὰ διαιρέτου αὐτοῦ, τὸ κλάσμα πολ)ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν:*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀγράφως). 245) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{26}$, $\frac{13}{20}$.

246) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{9}{16}$ χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμητής.



(Σχ. 1)

Ε'). Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ $\frac{9}{12}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τριπλασίους ἀντιστοίχους ὅρους. Ἐὰν πολ)σωμεν ταῦτα ἐπὶ 12, εὑρίσκομεν $\frac{3}{4}\times 12=9$, $\frac{9}{12}\times 12=9$. Ἄρα $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$.

Περὶ τούτου βεβαιούμεθα καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ΑΒ (Σχ. 1) παριστᾷ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, $\frac{3}{4}$ αὐτῆς εἶναι τὸ ΑΓ. Ἀλλὰ καὶ $\frac{9}{12}$ εἶναι πάλιν τὸ ΑΓ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10},\quad \frac{3}{7}=\frac{12}{28}\ \text{κ.λ.π.}$$

Ἄρα: *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος πολ)σθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 247) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἰς τέταρτα, τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς δέκατα καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ εἰς δέκατα τέταρτα.

248) Νὰ τραπῶσι τὰ κλάσματα $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, εἰς τρίτα χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου.

249) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀριθμητὴν 7, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{21}{24}$;

§ 114. **Ἁπλοποίησις κλάσματος.** Ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος π.χ. τοῦ $\frac{4}{6}$ διὰ τοῦ κ.δ. αὐτῶν 2, εὑρίσκομεν $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται **ἁπλοποίησις τοῦ** $\frac{4}{6}$.

Γενικῶς: *Ἁπλοποίησις δοθέντος κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν καὶ ἔχον μικροτέρους ἀντιστοίχους ὅρους.*

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν δὲ δοθὲν κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι: *Α΄) Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοῦτο δὲν ἁπλοποιεῖται.*

Πᾶν τοιοῦτον κλάσμα καλεῖται **ἀνάγωγον.** Π.χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ εἶναι ἀνάγωγα.

Β΄). Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν προκύπτει κλάσμα ἀνάγωγον (§ 90 Ε΄).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 250) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{8}, \frac{10}{12}, \frac{3}{9}, \frac{6}{15}, \frac{18}{8}, \frac{25}{15}, \frac{8}{12}, \frac{6}{18}, \frac{9}{21}, \frac{19}{38}, \frac{15}{35}.$$

251) Νὰ καταστῇ ἀνάγωγον διὰ μιᾶς ἁπλοποιήσεως ἕκαστον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{12}{18}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{18}{46}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{33}{12}$, $\frac{45}{25}$.

252) Ποῖον κλάσμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$, οἱ δὲ ὅροι του ἔχουσι μ.κ.δ. τὸν 5;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 115. **Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.** Τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται δὲ **ὁμώνυμα** κλάσματα. Τὰ δὲ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{10}$ ἔχουσι διαφόρους παρονομαστὰς καὶ λέγονται **ἑτερώνυμα** κλάσματα.

Γενικῶς: *Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα μέν, ἂν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἑτερώνυμα δέ, ἂν ἔχωσι διαφόρους παρονομαστάς.*

Α΄) Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{16}$, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ ἔχουσι ἐ.κ.π. 32. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ α΄ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 8 (δηλ. 32 : 4), τοῦ β΄ ἐπὶ 4 (δηλ. 32 : 8) καὶ τοῦ γ΄ ἐπὶ 2 (δηλ. 32 : 16), προκύπτουσι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{32}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{16}{32}$, τὰ ὁποῖα εἶναι (§ 113 Ε΄) ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ἄρα: *Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διαιροῦμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ καὶ πολ)ζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.*

Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ κάμωμεν κοινὸν παρονομαστὴν οἱονδήποτε κοινὸν πολ)σιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων. Ἂν π. χ. θέλωμεν νὰ κάμωμεν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$ τὸ γινόμενον 8×20, παρατηροῦμεν ὅτι $(8\times20) : 8 = 20$ καὶ $(8\times20) : 20 = 8$. Ἔπειτα δὲ πολ)ζομεν τοὺς ὅρους τοῦ α΄ ἐπὶ 20 καὶ τοὺς ὅρους τοῦ β΄ ἐπὶ 8 καὶ εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{60}{160}$, $\frac{56}{160}$.

Ὁμοίως προκειμένου περὶ τῶν κλασμάτων $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{9}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{4}{5}=\frac{4\times6\times9}{5\times6\times9}=\frac{216}{270}$, $\frac{3}{6}=\frac{3\times5\times9}{5\times6\times9}=\frac{135}{270}$,

$$\frac{2}{9}=\frac{2\times5\times6}{5\times6\times9}=\frac{60}{270}.$$

Ἄρα: *Β΄) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Γ') Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ὅλαι αἱ μέθοδοι αὗται ἄγουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (§ 103 Σημ.). Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις πρέπει νὰ προτιμᾶται ἡ Α' μέθοδος. (Διατί ;)

ΣΗΜ. Ἐνίοτε δι' ἁπλοποιήσεως τῶν δοθέντων κλασμάτων ἢ τινῶν ἐξ αὐτῶν γίνονται ταῦτα ὁμώνυμα. Οὕτως, ἂν ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{16}$ ἁπλοποιηθῶσι τὰ δύο τελευταῖα προκύπτουσι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$.

Διὰ τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα ἀνάγεται ἡ σύγκρισις αὐτῶν εἰς σύγκρισιν τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν (§ 112).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 253) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

α') $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$, β) τὰ $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$, γ') τὰ $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{18}$,

δ') $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{8}$, ε') τὰ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{1}{3}$, στ') τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{7}{6}$.

254) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

α') $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, β') $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{15}$,

δ') $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{24}$, ε') $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$.

255) Νὰ ταχθῶσιν κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$\frac{2}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ καὶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$.

256) Νὰ τραπῇ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν λ.

257) Νὰ τραπῇ ὁ μικτὸς $2\frac{3}{\lambda}$ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

258) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{2\times\lambda}{3\times\lambda}$ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{3\alpha}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

259) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\frac{\alpha}{\beta}\times\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}\times(2\beta)$, $\frac{\alpha}{9\beta}\times 3$, $\frac{5\alpha}{3\times\beta^2}\times 9\beta^2$ καὶ τὰ πηλίκα $\frac{\mu}{3\lambda} : 3$, $\frac{3\mu}{\nu} : 6$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

§ 116. **Ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως.—Πρόσθεσις κλασμάτων.** *Πρόσθεσις οἱωνδήποτε δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλας τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.*

Οἱ προστιθέμενοι ἀριθμοὶ λέγονται **προσθετέοι,** τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται **ἄθροισμα.**

Οὕτως, ἂν πτωχὸς ἔλαβε παρὰ διαβάτου $\frac{5}{20}$ δραχμῆς, παρ' ἄλλου $\frac{3}{20}$ δραχ. καὶ παρὰ τρίτου $\frac{6}{20}$ δραχμῆς, ἔλαβε τὸ ὅλον $5+3+6=14$ εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς.

Ἄρα : $$\frac{5}{20}+\frac{3}{20}+\frac{6}{20}=\frac{14}{20}.$$

Ἂν δὲ ἔμπορος ἐπώλησε κατὰ σειρὰν τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{20}$ τεμαχίου ὑφάσματος, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐπώλησε τὸ ὅλον $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{1}{20}\right)$ τοῦ ὑφάσματος. Ἐὰν τρέψωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{1}{20}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}+\frac{2}{40}=\frac{33}{40}.$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δοθέντα κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (ἂν εἶναι ἑτερώνυμα) καὶ προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων, ὑποκάτω δὲ ἀπὸ τὸ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄθροισμα γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.260) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα α') $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$, β') $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$, γ') $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}$, δ') $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}$,

261) Νά εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα α') $\frac{2}{6}+\frac{3}{9}$.

β') $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{7}{15}$. γ') $\frac{2}{7}+\frac{3}{15}+\frac{5}{21}+\frac{1}{42}$.

δ') $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$,

262) Μικροπωλητὴς ἐπώλησεν ἐκ τεμαχίου κορδέλας κατὰ σειρὰν $\frac{3}{8}$ πήχ, $\frac{15}{4}$ πήχ, $\frac{17}{2}$ πήχ. Παρετήρησε δὲ ὅτι ἔμειναν καὶ $\frac{5}{8}$ πήχ. Πόσους πήχεις εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ τεμάχιον τοῦτο;

263) Μία πλευρὰ τετραδίου εἶναι $\frac{8}{100}$ μ, ἡ ἄλλη $\frac{12}{100}$ μ. καὶ ἡ ἀπέναντι ἑκάστης τούτων εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν. Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραδίου τούτου;

364) Ὑπάλληλος δαπανᾷ τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ ἡμερομισθίου του διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{8}$ δι' ἐνοίκιον καὶ τὸ $\frac{3}{8}$ διὰ τὰς ἄλλας αὐτοῦ ἀνάγκας. Πόσον μέρος τοῦ ἡμερομισθίου του ἀπανᾷ;

§ 117. **Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.** α') Ἐὰν παντοπώλης πωλήσῃ εἰς ἕνα 3 ὀκ. βουτύρου, εἰς ἄλλον $\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ εἰς τρίτον $1\frac{1}{8}$ ὀκ, θὰ πωλήσῃ τὸ ὅλον

$$3 \text{ ὀκ} + \frac{1}{4} \text{ ὀκ} + 1\frac{1}{8} \text{ ὀκ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ $3 \text{ ὀκ.} = \frac{24}{8}$ ὀκ, $\frac{1}{4}$ ὀκ. $= \frac{2}{8}$ καὶ $1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ ὀκ, ἔπεται ὅτι

$$3 \text{ ὀκ.} + \frac{1}{4} \text{ ὀκ} + 1\frac{1}{8} \text{ ὀκ.} = \frac{24}{8} \text{ ὀκ.} + \frac{2}{8} \text{ ὀκ.} + \frac{9}{8} \text{ ὀκ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$=\frac{35}{8} \text{ ὀκ.} = 4\frac{3}{8} \text{ ὀκ.}$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ προσθέτομεν ταῦτα.*

β') Τὸ προηγούμενον ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ ἂν προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς ἀκεραίας ὀκάδας καὶ χωριστὰ τὰ μέρη αὐτῆς, ἔπειτα δὲ ἑνώσωμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα. Οὕτως ἐπειδὴ $3+1=4$ καὶ $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ ἔπεται ὅτι $3+\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}=4\frac{3}{8}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἔπειτα δὲ ἑνώνομεν τὰ ἐξαγόμενα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 265) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα α') $\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}$,

β') $\frac{5}{8}+4+1\frac{7}{12}$, γ') $2\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{3}{16}+1+3\frac{5}{32}$,

δ') $3\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}+\frac{7}{20}+4\frac{1}{8}$, ε') $14\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+3\frac{1}{15}+1\frac{3}{45}$,

στ') $3\frac{1}{4}+7\frac{2}{6}+4\frac{1}{2}+1\frac{3}{8}$.

266) Οἰκογενειάρχης ἔδωκε μίαν ἡμέριν $45\frac{2}{5}$ δραχ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ κρέας, $23\frac{1}{10}$ δραχ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἄρτον καὶ 8 δραχμὰς διὰ χόρτα. Πόσα χρήματα ἐδαπάνησε τὴν ἡμέραν ἐκείνην ;

267) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος $4\frac{3}{8}$ πήχ. ἔπειτα ἄλλα $\frac{5}{8}$ καὶ ἔπειτα ἄλλους 5 πήχεις καὶ ἔμειναν ἀκόμη 25 πήχεις. Πόσους πήχεις ἐπώλησε τὸ ὅλον καὶ πόσους εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ τεμάχιον τοῦτο ;

268) Ἐπλήρωσέ τις $265\frac{3}{4}$ δραχ. ἀπέναντι χρέους καὶ χρεωστεῖ ἀκόμη $108\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν χρέος ;

269) Παντοπώλης ἐπώλησε $\frac{3}{4}$ ὀκ. ζαχχάρεως καὶ ἔλαβε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$16\frac{1}{2}$ δραχ. Ἔπειτα ἐπώλησεν ἄλλα $\frac{5}{8}$ ὀκάδος καὶ ἔλαβε $13\frac{3}{4}$ δραχ. Πόσην ζάχαριν ἐπώλησε καὶ πόσα χρήματα ἔλαβε τὸ ὅλον;

270) Ἐργάτης σκάπτει ἄμπελον εἰς 4 ἡμέρας, ἄλλος σκάπτει αὐτὴν εἰς 3 ἡμέρας καὶ γ΄ εἰς 5 ἡμέρας Πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου σκάπτουσι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς μίαν ἡμέραν;

271) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζεται πατήρ, μήτηρ καὶ υἱός. Τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ υἱοῦ εἶναι $23\frac{3}{4}$ δραχ., τῆς μητρὸς εἶναι μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ $12\frac{5}{8}$ δραχ., τοῦ δὲ πατρὸς εἶναι ὅσον τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμερομισθίων τῆς μητρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον τῆς μητρὸς καὶ τοῦ πατρὸς καὶ πόσον λαμβάνουσιν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ τὴν ἡμέραν.

272) Ἀπὸ βαρέλιον οἴνου ἀφῃρέθησαν μίαν ἡμέραν $35\frac{5}{6}$ ὀκ., τὴν ἄλλην $72\frac{8}{12}$ ὀκ. τὴν τρίτην 100 ὀκ. καὶ τὴν δ΄ ὅσαι τὴν α΄ καὶ τὴν γ΄. Οὕτω δὲ ἔμειναν εἰς αὐτὸ ἀκόμη $55\frac{2}{3}$ ὀκ. Πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀρχικῶς τὸ βαρέλιον τοῦτο;

Β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

§ 118. **Ὁρισμὸς ἀφαιρέσεως.** *Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον γ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει τὸν α.*

Ἂν μαθητὴς εἶχε $\frac{7}{10}$ δραχμῆς καὶ ἐδαπάνησε δι' ἀγοράν του $\frac{3}{10}$ δρχ. ἔμειναν εἰς αὐτὸν $\left(\frac{7}{10}-\frac{3}{10}\right)$ δραχ. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{7}{10}$ δραχ. $=7$ δεκάρες, $\frac{3}{10}$ δραχ$=3$ δεκάρες, ἔπεται ὅτι

$$\frac{7}{10}\text{ δραχ.}-\frac{3}{10}\text{ δραχ.}=7\text{ δεκ.}-3\text{ δεκ.}=4\text{ δεκάρες.}$$

Καὶ ἐπειδὴ 4 δεκάρες$=\frac{4}{10}$ δραχ, ἔπεται ὅτι

$$\frac{7}{10}\text{ δραχ.}-\frac{3}{10}\text{ δραχ.}=\frac{4}{10}\text{ δραχ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πράγματι δὲ $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.

Ὁμοίως εἶναι $\frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$ καὶ γενικῶς

$$\frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = \frac{\alpha - \beta}{\mu}.$$

Ἂν ὁ μαθητὴς ἐκεῖνος ἐδαπάνα $\frac{2}{5}$ δραχ. θὰ τοῦ ἔμειναν

$\frac{7}{10}$ δραχ$-\frac{2}{5}$ δραχ ἢ $\frac{7}{10}$ δραχ $-\frac{4}{10}$ δραχ $= \frac{3}{10}$ δραχ.

Ὥστε $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, (ἂν εἶναι ἑτερώνυμα) καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου, ὑποκάτω δὲ ἀπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 273) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α΄) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$, β΄) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$, γ΄) $\frac{9}{17} - \frac{3}{17}$.

274) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α΄) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$, β΄) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$, γ΄) $\frac{9}{17} - \frac{3}{17}$.

275) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως αἱ διαφοραὶ

α΄) $\frac{3}{4} - \frac{3}{8}$, β΄) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$, γ΄) $\frac{8}{10} - \frac{1}{5}$.

276) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαφοραὶ

α΄) $\frac{7}{6} - \frac{5}{8}$, β΄) $\frac{9}{12} - \frac{1}{8}$, γ΄) $\frac{15}{25} - \frac{4}{15}$, δ΄) $\frac{17}{20} - \frac{13}{30}$.

277) Κιβώτιον πλῆρες ἐμπορεύματος ἔχει βάρος $\frac{11}{12}$ στατῆ-

ρος, κενὸν δὲ $\frac{2}{44}$ στ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐμπορεύματος;

278) Τὰ $\frac{8}{9}$ δεξαμενῆς περιέχουσιν ὕδωρ· ἔπειτα ἀνοίγει δ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χρουνὸς αὐτῆς, μέχρις οὗ κενωθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς ἔχει τότε ὕδωρ ;

§ 119. **Ἀφαίρεσις μικτοῦ ἀπὸ μικτοῦ.** Ἐὰν εἶχέ τις $15\frac{3}{5}$ δραχ. καὶ ἐδαπάνησε $7\frac{1}{3}$ δραχ., ἔμειναν εἰς αὐτὸν $15\frac{3}{5}$ δραχ.—$7\frac{1}{3}$ δραχ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

α΄) Ἐὰν ἐδαπάνα πρῶτον τὰς 7 δραχ, αὐτὰς θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὰς 15 δραχ, θὰ ἔμειναν δὲ εἰς αὐτὸν 8 δραχ., καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ δραχ. Ἐὰν δὲ νοήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ δραχ., τὸ ὁποῖον ἐδαπάνησε κατόπιν, ἔβγαλεν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{5}$ δραχ, ἔμειναν εἰς αὐτὸν αἱ 8 δραχ. καὶ ἀκόμη $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$ δραχ. Ἤτοι τοῦ ἔμειναν τὸ ὅλον $8\frac{4}{15}$ δραχ.

Γενικῶς : $\left(\alpha+\frac{\beta}{\mu}\right)-\left(\delta+\frac{\gamma}{\nu}\right)=(\alpha-\delta)+\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{\gamma}{\nu}\right)$, ἂν $\frac{\beta}{\mu}>\frac{\gamma}{\nu}$.

β΄) Ἐπειδὴ $15\frac{3}{5}$ δραχ $=\frac{78}{5}$ δραχ. καὶ $7\frac{1}{3}$ δραχ.$=\frac{22}{3}$ δραχ. ἕπεται ὅτι $15\frac{3}{5}-7\frac{1}{3}=\frac{78}{5}-\frac{22}{3}=\frac{124}{15}=8\frac{4}{15}$ δραχ.

Γενικῶς $\left(\alpha+\frac{\beta}{\mu}\right)-\left(\delta+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{\alpha.\mu+\beta}{\mu}-\frac{\delta.\nu+\gamma}{\nu}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτὸν ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα. Ἢ τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.*

Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὸν α΄

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρόπον, αὐξάνομεν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου.

Οὕτω $6\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}=5\frac{7}{5}-3\frac{4}{5}=2\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξηγοῦνται καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἀφαιρέσεις.

α') $15\frac{3}{4}-5=10\frac{3}{4}$ ἢ $15\frac{3}{4}-5=\frac{63}{4}-\frac{20}{4}=\frac{43}{4}=10\frac{3}{4}$.

β') $8\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=8\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=8\frac{1}{12}$ ἢ

$8\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{106}{12}-\frac{9}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$.

γ') $12\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=11\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=11\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=11\frac{7}{12}$ ἢ

$12\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{49}{4}-\frac{2}{3}=\frac{147}{12}-\frac{8}{12}=\frac{139}{12}=11\frac{7}{12}$.

δ') $8-\frac{2}{5}=7\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=7\frac{3}{5}$ ἢ $8-\frac{2}{5}=\frac{40}{5}-\frac{2}{5}=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 279) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀγράφως αἱ ἀφαιρέσεις

α') $8\frac{3}{5}-6$, β') $5\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$, γ') $7-\frac{3}{5}$, δ') $10\frac{4}{7}-2\frac{3}{7}$,

ε') $6-3\frac{4}{7}$, στ') $12\frac{1}{8}-\frac{5}{8}$.

280) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις α') $24\frac{3}{8}-10\frac{5}{8}$,

β') $2\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$, γ') $48\frac{1}{4}-\frac{5}{8}$, δ') $19\frac{2}{3}-12\frac{4}{10}$,

ε') $46\frac{1}{5}-25\frac{2}{9}$, στ') $86-40\frac{3}{17}$.

281) Οἰκογένεια εἰσέπραξε μίαν ἑβδομάδα $968\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ ἐδαπάνησε $785\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσον περίσσευμα εἶχε τὴν ἑβδομάδα ταύτην;

282) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $5\frac{1}{4}$ ὥρ. π.μ. μέχρι τῆς $11\frac{3}{5}$ ὥρας π. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

283) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $7\frac{2}{5}$ ὥρας π. μ. μέχρι τῆς 12 ὥρας τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

284) Δοχεῖον γεμᾶτον βούτυρον ἔχει βάρος $5\frac{3}{8}$ ὀκάδας, κενὸν δὲ ἔχει βάρος $\frac{1}{4}$ ὀκᾶς. Πόσον βούτυρον περιέχει ;

285) Ἠγόρασέ τις $2\frac{1}{2}$ ὀκάδας βουτύρου. Ἀφ' οὗ δὲ ἐκαθάρισεν αὐτὸ εὗρεν ὅτι περιεῖχε $\frac{3}{5}$ ὀκᾶς ξένας οὐσίας. Πόσον καθαρὸν βούτυρον ἠγόρασεν ;

286) Εἰς 3 ὀκάδας θαλασσίου ὕδατος περιέχονται $\frac{3}{10}$ ὀκάδος ἅλατος. Πόσον ὕδωρ μόνον περιέχεται εἰς αὐτάς ;

Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

287) Τεμάχιον ὑφάσματος εἶχε 50 πήχεις. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπωλήθησαν $8\frac{5}{8}$ πήχεις καὶ ἔπειτα $12\frac{1}{4}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις ἔμειναν ;

288) Οἰκογενειάρχης ἠγόρασε καφὲν ἀξίας $11\frac{2}{5}$ δραχ., ζάκχαριν ἀξίας $45\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ ὄρυζαν ἀξίας $56\frac{3}{18}$ δραχ. Ἔδωκε δὲ εἰς τὸν παντοπώλην δύο ἑκατοντάδραχμα. Ὀφείλει ἀκόμη ἢ πρέπει νὰ λάβῃ ὑπόλοιπον καὶ ποσόν ;

289) Λόχος στρατιωτῶν διετάχθη νὰ κάμῃ εἰς τρεῖς ἡμέρας πορείαν $80\frac{3}{5}$ χιλιομέτρων. Τὴν α΄ ἡμέραν διήνυσε $35\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα καὶ τὴν β΄ $31\frac{2}{5}$ χιλ. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ τὴν γ΄ ἡμέραν ;

290) Χρυσοχόος ἀνέμιξε χαλκὸν μὲ $18\frac{7}{9}$ δράμια χρυσοῦ καὶ $56\frac{5}{18}$ δράμια ἀργύρου καὶ ἔκαμε κρᾶμα $147\frac{2}{3}$ δραμίων. Πόσον χαλκὸν ἔθεσεν εἰς τὸ κρᾶμα ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

291) Ἐργάτης ἐξετέλεσεν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{8}$ ἔργου τινός, τὴν ἑπομένην τὰ $\frac{5}{12}$ καὶ τὴν γ΄ τὰ $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου τούτου ἔχει νὰ ἐκτελέσῃ ;

292) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς $6\ \frac{1}{4}$ π.μ. μέχρι τῆς $4\ \frac{1}{2}$ μ.μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

293) Ἐργάτης ἀρχίζει τὴν ἐργασίαν του εἰς τὰς $7\ \frac{3}{4}$ π. μ. καὶ διακόπτει αὐτὴν τὴν μεσημβρίαν. Ἔπειτα ἀρχίζει πάλιν αὐτὴν τὴν $2\ \frac{1}{4}$ μ. μ. καὶ διακόπτει τὴν 6 ὥραν μ.μ. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν ;

294) Μικρέμπορος εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως ποτηρίων $165\ \frac{3}{4}$ δραχμὰς καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως φλυτζανίων $48\ \frac{2}{5}$ δραχμάς. Ἐκόστιζον δὲ εἰς αὐτὸν τὰ μὲν ποτήρια $130\ \frac{1}{5}$ δραχ. τὰ δὲ φλυζάνια $38\ \frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐκέρδισεν ;

Γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

§ 120. **Α΄. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.**

Ἐὰν μὲ 1 δραχ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ πήχεως κορδέλλας, μὲ 4 δραχ. ἀγοράζομεν $\left(\frac{3}{8}\times 4\right)$ πήχεις,

α) Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{8}$ πήχ$=3$ ρούπια, ἕπεται ὅτι

$$\left(\frac{3}{8}\ \text{πήχ}\right)\times 4 = (3\ \text{ρούπια})\times 4 = 12\ \text{ρούπια}.$$

Καὶ ἐπειδὴ 12 ρούπια$=\frac{12}{8}$ πήχ, ἕπεται ὅτι $\frac{3}{8}\times 4=\frac{12}{8}$.

Γενικῶς : $$\frac{\alpha}{\beta}\times\mu=\frac{\alpha\times\mu}{\beta}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β') $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ πήχ.

Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta} \times \mu = \frac{\alpha}{\beta : \mu}$, ἂν β=πολ. μ.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον. Ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς καὶ ἀριθμητὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. (καὶ ἀγράφως) 295) Πόσον εἶναι τὸ τριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{12}$;

296) Πόσον εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{24}$ καὶ τὸ δεκαπλάσιον ἑκάστου τῶν

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{3}{21}, \quad \frac{7}{30}, \quad \frac{17}{50}, \quad \frac{42}{90}, \quad \frac{56}{100};$$

297) Κρήνη παρέχει $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ὕδατος εἰς κάθε πρῶτον λεπτόν. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἡ κρήνη αὕτη γεμίζει εἰς 10 πρῶτα λεπτά ;

§ **121. Β΄. Πολ]σμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.** Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $65\frac{1}{2}$ δραχ, 6 πήχεις ἀπὸ αὐτὸ θὰ τιμῶνται $65\frac{1}{2}$ δραχ $\times$ 6.

α') Ἐπειδὴ δὲ $65\frac{1}{2}$ δραχ $= \frac{131}{2}$ δραχ, ἔπεται ὅτι

$$65\frac{1}{2} \times 6 = \frac{131}{2} \times 6 = 393 \text{ δραχ.}$$

Γενικῶς : $\left(\alpha + \frac{\beta}{\nu}\right) \times \mu = \frac{\alpha.\nu + \beta}{\nu} \times \mu$,

β') Οἱ 6 πήχεις ἀπὸ 65 δραχμὰς ἕκαστος τιμῶνται 65 δραχ $\times$ 6 = 390 δρ. Οἱ 6 πήχεις ἀπὸ $\frac{1}{2}$ δραχ, ἕκαστος τιμῶνται $\frac{1}{2} \times 6 = 3$ δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε $65\frac{1}{2}\times 6=(65\times 6)+\left(\frac{1}{2}\times 6\right)=390+3=393.$

Γενικῶς : $\left(\alpha+\frac{\beta}{\nu}\right)\times\mu=(\alpha\times\mu)+\left(\frac{\beta}{\nu}\times\mu\right).$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ)ζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον. Ἢ πολ)ζομεν χωριστὰ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 298) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ γινόμενα

$3\frac{2}{5}\times 5,\quad 7\frac{1}{8}\times 8,\quad 3\frac{1}{10}\times 10,\quad 4\frac{3}{5}\times 10,\quad 6\frac{1}{9}\times 18,\quad 3\frac{4}{7}21.$

299) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$2\frac{1}{3}\times 28,\quad 8\frac{5}{6}\times 15,\quad 4\frac{2}{7}\times 23,\quad 10\frac{1}{3}\times 35,\quad 15\frac{2}{3}\times 12.$

300) Ἀμαξοστοιχία διανύει $24\frac{3}{5}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ χρειάζεται 4 ὥρας διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Κόρινθον. Πόσον ἀπέχει ἡ Κόρινθος τοῦ Πειραιῶς ;

301) Ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας ὀρύζης πρὸς $15\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ 4 ὀκάδας ζακχάρεως πρὸς $21\frac{3}{4}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

302) Ἀπὸ μίαν πηγὴν ρέουσι $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες ὕδατος τὴν ὥραν. Δύναται δὲ αὕτη εἰς 100 ὥρας νὰ γεμίσῃ μίαν δεξαμενήν. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ αὕτη ;

§ 122. **Πολ]σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα. Πρόβλημα.** *Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ 1 πῆχυς τιμᾶται α δραχ, τὸ $\frac{1}{8}$ πηχ. θὰ τιμᾶται 8 φορὰς ὀλιγώτερον ἤτοι $\frac{\alpha}{8}$ δραχ. καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ πηχ. θὰ τιμῶνται $\frac{\alpha}{8}$. δραχ$\times 5$. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον διαι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ροῦμεν τὰς α δραχμὰς διὰ 8 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{8}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, ἤτοι λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον τοῦ α πέντε φοράς.

Τὰς δύο ταύτας πράξεις καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα ***πολλαπλασιασμὸν*** τοῦ α ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Ὥστε $\alpha \times \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{8} \times 5$.

Γενικώτερον $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} \times \mu$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι :

α΄) *Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος, πολ)ζομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀκεραίας μονάδος ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος τοῦτο τῆς μονάδος.*

β΄) *Διὰ νὰ εὕρωμεν μέρος δοθέντος ἀριθμοῦ, πολ)ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος τοῦτο.*

Τώρα διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ πολ)στέος α εἶναι ἀκέραιος, κλάσμα ἢ μικτός.

Α΄) Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι π.χ.

$$20 \times \frac{4}{5} = \frac{20}{5} \times 4 = \frac{20 \times 4}{8} = 16.$$

Γενικῶς : $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha \times \mu}{\nu}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολ)ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

Β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον π.χ. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{3}$ καὶ νὰ τὸ πολ)σωμεν ἐπὶ 5.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 113 Γ΄) τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{2}{3 \times 8}$, ἕπεται ὅτι $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{3 \times 8} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3 \times 8} = \frac{10}{24}$.

Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολ)ζομεν*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Γράφομεν δὲ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.

Γ'). Ἂν $\alpha=21\frac{1}{5}$ δραχ. $=\frac{106}{5}$ δραχ., ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ. θὰ εἶναι $21\frac{1}{5}$ δραχ. $\times\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{106}{5}$ δραχ. $\times\frac{3}{5}$. Ὥστε

$$21\frac{1}{5}\text{ δραχ.}\times\frac{3}{4}=\frac{106}{5}\text{ δραχ.}\times\frac{3}{4}=\frac{318}{20}\text{δραχ.}=15\frac{18}{20}\text{δραχ.}$$

Γενικῶς: $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha\times\gamma+\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}$.

Τὸ ζητούμενον εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀπὸ 21 δραχ. τὴν ὀκᾶν τιμῶνται $21\text{ δραχ.}\times\frac{3}{4}=15\frac{3}{4}$ δραχ. Ἀπὸ δὲ $\frac{1}{5}$ δραχ. τὴν ὀκᾶν τιμῶνται $\frac{1}{5}\text{ δραχ.}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$ δραχ.

Ὥστε ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἶναι

$$\left(21\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)=15\frac{18}{20}\text{ δραχ.}$$

Κατὰ ταῦτα $21\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\left(21\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)$.

Γενικῶς: $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\frac{\mu}{\nu}=\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}\right)$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ)σωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ)ζομεν τοῦτο ἐπὶ τὸ δοθὲν κλάσμα. Ἢ πολ)ζομεν χωριστὰ ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 303) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ 10, τοῦ 20, τοῦ 30. Ὁμοίως τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 16, 24, 40, 60, 100.

304) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως πόσα δράμια ἔχουσι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, πόσα ρούπια ἔχουσι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, πόσα λεπτὰ ἔχουσι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς, πόσας ὀκάδας ἔχουσι τὰ $\frac{7}{22}$ τοῦ στατῆρος, πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουσι τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς ὥρας.

305) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

α') $15\times\frac{2}{7}$, $8\times\frac{5}{9}$, $65\times\frac{4}{10}$, β') $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}\times\frac{2}{8}$, $\frac{28}{50}\times\frac{9}{14}$, γ') $5\frac{1}{6}\times\frac{6}{7}$, $36\frac{1}{8}\times\frac{5}{9}$, $103\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$.

306) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{6}{7}$, τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{5}{6}$ καὶ τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ $\frac{2}{9}$.

307) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{7}$ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{6}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν $7\frac{1}{8}$, $9\frac{4}{7}$, $248\frac{3}{4}$.

308) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$19\frac{2}{7}\times\frac{7}{9}$, $68\frac{2}{5}\times\frac{36}{24}$, $581\frac{1}{12}\times\frac{66}{24}$, $283\frac{1}{15}\times\frac{72}{95}$.

309) Ἡ ὀκὰ τοῦ καφὲ τιμᾶται 80 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ πόσον τὰ $\frac{13}{20}$ τῆς ὀκᾶς;

310) Ἐργάτης λαμβάνει 80 δραχμὰς ἡμερομίσθιον καὶ δαπανᾷ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ κάθε ἡμέραν. Πόσον περίσσευμα ἔχει κάθε ἐργάσιμον ἡμέραν;

311) Ὑπάλληλος ἔχει μηνιαῖον μισθὸν 4000 δραχμάς, δαπανᾷ δὲ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τροφὴν καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ διὰ τὰς ἄλλας ἀνάγκας του. Πόσας δραχμὰς δαπανᾷ τὸν μῆνα;

312) Δοχεῖον περιέχει βούτυρον καὶ λίπος τὸ ὅλον $15\frac{3}{4}$ ὀκάδας. Εἶναι δὲ τὸ βάρος τοῦ λίπους τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ ὁλικοῦ βάρους. Πόσον καθαρὸν βούτυρον καὶ πόσον λίπος περιέχει τοῦτο;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 123. **Πολ)σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ μικτόν. Πρόβλημα.** *Ἡ δκᾶ πράγματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον τιμῶνται* $5\frac{3}{4}$ *δκάδες ἐξ αὐτοῦ ;*

Λύσις. α′) Αἱ 5 δκάδες τιμῶνται α δραχ$\times$5, τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ δκ. τιμῶνται $\alpha\times\frac{3}{4}$. Ὥστε αἱ $5\frac{3}{4}$ δκ. τιμῶνται

$$\left(\alpha\times 5\right)+\left(\alpha\times\frac{3}{4}\right)\ \text{δραχ.}$$

Τὰς πράξεις ταύτας ὀνομάζομεν μὲ ἓν ὄνομα πολ)σμὸν τοῦ α ἐπὶ $5\frac{3}{4}$. Ἄρα : $\alpha\times 5\frac{3}{4}=(\alpha\times 5)+\left(\alpha\times\frac{3}{4}\right)$.

Γενικώτερον $\alpha\times\left(\beta+\frac{\gamma}{\delta}\right)=\left(\alpha\times\beta\right)+\left(\alpha\times\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

β′) Ἐπειδὴ $5\frac{3}{4}$ δκ$=\frac{23}{4}$ δκ, ἕπεται ὅτι (§ 122) ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\alpha\times\frac{23}{4}$ δραχ ἤτοι $\alpha\times 5\frac{3}{4}=\alpha\times\frac{23}{4}$.

Γενικώτερον $\alpha\times\left(\beta+\frac{\gamma}{\delta}\right)=\alpha\times\frac{\beta\times\delta+\gamma}{\delta}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ)σωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, πολ)ζομεν τὸν ἀριθμὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα. Ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ)μεν τὸν ἀριθμὸν ἐπ' αὐτό.*

Κατὰ ταῦτα $4\frac{2}{7}\times 3\frac{5}{6}=\left(4\frac{2}{7}\times 3\right)+\left(4\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right)=$

$$=\left(4\times 3\right)+\left(\frac{2}{7}\times 3\right)+\left(4\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right).$$

Ἄρα : *Διὰ νὰ πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτὸν ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἄλλου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

§ 124. **Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολ]σμοῦ.**

Ἐμάθομεν ὅτι α′) $\alpha\times 3=\alpha+\alpha+\alpha$, εἶναι δὲ καὶ $3=1+1+1$.

β′) $\alpha\times\frac{3}{4}=\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{4}$, εἶναι δὲ καὶ $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ') $\alpha \times 2\frac{3}{4} = \left(\alpha \times 2\right) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right) = \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}$,

εἶναι δὲ καὶ $2\frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$,

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ.

Πολ]σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον καλεῖται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν πολ]στέον καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ, ὅπως ὁ πολ]στὴς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 312) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$$5 \times 2\frac{1}{5},\quad 64 \times 8\frac{7}{8},\quad 65 \times 15\frac{3}{25},\quad 183 \times 2\frac{1}{4},$$

$$506 \times 1\frac{1}{2},\quad 999 \times 99\frac{1}{9}.$$

314) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 80 δραχ. Πόσον τιμῶνται $4\frac{3}{8}$ πήχεις αὐτοῦ ;

315) Πόσα δράμια ἔχουσι $7\frac{2}{5}$ ὀκάδες ;

316) Ἐμπορικὴ ἁμαξοστοιχία διανύουσα 22 χιλιόμετρα τὴν ὥραν χρειάζεται $7\frac{1}{4}$ ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Θεσσαλονίκης εἰς Σέρρας. Πόσον ἀπέχουσιν αἱ πόλεις αὗται ;

517) Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουσι $8\frac{5}{6}$ ὧραι ;

318) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα.

$$\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3},\quad \frac{7}{8} \times 9\frac{1}{7},\quad \frac{12}{15} \times 1\frac{1}{12},\quad \frac{8}{9} \times 18\frac{9}{16},\quad \frac{6}{18} \times 14\frac{5}{18}.$$

319) Εἰς ἑκάστην ὀκᾶν οἴνου περιέχεται $\frac{1}{8}$ ὀκᾶς ρητίνης. Πόσην ρητίνην περιέχουσι $265\frac{3}{4}$ ὀκάδες τοιούτου οἴνου;

320) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $3\frac{3}{4} \times 8\frac{4}{9}$, $1\frac{1}{3} \times 3\frac{2}{5}$,

$7\frac{2}{3} \times 8\frac{5}{4}$, $12\frac{3}{8} \times 8\frac{24}{27}$, $100\frac{3}{4} \times 25\frac{7}{9}$, $254\frac{2}{5} \times 160\frac{5}{6}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

321) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $156\frac{5}{10}$ δραχ. Πόσον τιμῶνται $4\frac{2}{8}$ πήχεις ἀπὸ τὸ ὕφασμα τοῦτο ;

322) Ἠγόρασέ τις $75\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἀνθράκων πρὸς $3\frac{1}{5}$ δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἔδωκε δὲ ἓν πεντακοσιόδραχμον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ ὀπίσω ;

§ 125. **Ἀντίστροφοι ἀριθμοί.** Ἐὰν ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{2}{5}$, προκύπτει ὁ $\frac{5}{2}$. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{5}{2}$ λέγονται ἀντίστροφοι ἀριθμοί. Ὁμοίως ἐπειδὴ $6=\frac{6}{1}$, οἱ ἀριθμοὶ 6 καὶ $\frac{1}{6}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$, $\quad 6\times\frac{1}{6}=1$ κ.τ.λ, ἕπεται ὅτι :

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίστροφοι, ἐὰν ἔχωσι γινόμενον 1.

Τοῦ $3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$ ἀντίστροφος εἶναι ὁ $\frac{5}{17}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 323) Ὀνομάσατε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8, 25, 100, $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{65}{42}$, $4\frac{1}{5}$, $15\frac{3}{4}$, $19\frac{7}{9}$.

324) Ὁρίσατε τυχὸν κλάσμα μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ συγκρίνατε τὸν ἀντίστροφον αὐτοῦ ἀριθμὸν πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Προσπαθήσατε δὲ νὰ δικαιολογήσητε τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ταύτης. Ὁρίσατε τυχόντα μικτὸν ἀριθμὸν καὶ ἐργασθῆτε ὁμοίως.

325) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀντίστροφος ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $5+3\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$, $7\frac{5}{6}+9\frac{1}{2}$, ἑκάστης τῶν διαφορῶν $8-\frac{1}{5}$, $5\frac{2}{5}-4$, $12\frac{3}{7}-8\frac{4}{9}$ καὶ ἑκάστου τῶν γινομένων

$$5\times\frac{2}{3},\quad \frac{3}{7}\times\frac{2}{5},\quad 7\frac{1}{3}\times\frac{5}{6},\quad 8\frac{3}{4}\times 10\frac{1}{2}.$$

§ 126. **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Πρόβλημα.** *Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκεν 60000 δραχ, ὅπως μοιρασθῶσιν ὡς*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξῆς. Ἡ κόρη του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ ποσοῦ τούτου, ὁ υἱός του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς κόρης καὶ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ δοθῇ εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον τῆς πατρίδος του. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε κάθε κληρονόμος;

Λύσις. Ἡ κόρη θὰ λάβῃ $60000 \times \frac{4}{10} = 24000$ δρχ (§ 122β'), ὁ υἱὸς $24000 \times \frac{2}{3} = 16000$ δραχ, ἡ δὲ σύζυγος θὰ λάβῃ $16000 \times \frac{3}{4} = 12000$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ὀνομάζομεν γινόμενον τῶν $60000, \frac{4}{10}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ καὶ σημειοῦμεν οὕτω $60000 \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. Ὁρίζεται λοιπὸν καὶ σημειώνεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ὅπως (§ 54) διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Οὕτω $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 6 \times 8}$.

Γενικῶς. $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha \times \gamma \times \varepsilon}{\beta \times \delta \times \zeta}$.

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.*

ΣΗΜ. Τοὺς ἀκεραίους ἢ μικτοὺς παράγοντας τρέπομεν, ἂν θέλωμεν εἰς κλάσματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 326) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$$\frac{2}{5} \times \frac{9}{8} \times \frac{1}{4}, \quad \frac{5}{6} \times \frac{15}{18} \times \frac{3}{5} \times \frac{12}{25}, \quad 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{3},$$

$$8 \times \frac{2}{3} \times 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}, \quad 2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{7} \times 8\frac{3}{5},$$

$$6\frac{3}{5} \times 8\frac{1}{27} \times 12\frac{7}{9} \times 20\frac{1}{5}.$$

327) Ἐρωτηθείς τις τὶ ὥρα εἶναι ἀπήντησεν. Εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τῶν 20 ὡρῶν. Τὶ ὥρα ἦτο;

328) Ὁδοιπόρος ἦτο ὑποχρεωμένος νὰ διατρέξῃ 60 χιλιόμε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρα. Κατὰ τὴν α΄ ἡμέραν διέτρεξε τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν, κατὰ τὴν β΄ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν προηγουμένως διανυθέντων καὶ κατὰ τὴν γ΄ ἡμέραν τὰ $\frac{4}{7}$ τῶν διανυθέντων κατὰ τὴν δευτέραν ἡμέραν. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε κατὰ τὴν γ΄ ἡμέραν;

329) Τρεῖς φίλοι ἔκαμον ἐκδρομήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐδαπάνησαν ὁ α΄ 345 $\frac{3}{4}$ δρχ., ὁ β΄ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς δαπάνης τοῦ α΄ καὶ ὁ γ΄ τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς δαπάνης τοῦ β΄. Πόσας δραχμὰς ἐδαπάνησεν ὁ γ΄;

§ **127. Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.** Ὁ γνωστὸς (§ 76) ὁρισμὸς δυνάμεως ἀριθμοῦ διατηρεῖται καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς (ἡ βάσις) εἶναι κλάσμα. Ὁμοίως διατηροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν στοιχείων (βάσις, ἐκθέτης) καὶ ὁ τρόπος τῆς συντόμου γραφῆς ἑκάστης δυνάμεως. Οὕτω

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}, \quad \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι

$$\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{5^3}{7^3}$$

συμπεραίνομεν ὅτι $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$.

Γενικῶς $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$.

Ἄρα: *Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 330) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{10}.$$

331) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4, \left(\frac{2}{5}\right)^5, \left(\frac{4}{7}\right)^3, \left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(3\frac{1}{5}\right)^3, \left(2\frac{1}{2}\right)^4.$$

332) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἀπὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ ὁποῖον πίπτει. Ἐὰν ἀρχικῶς ἀφεθῇ ἀπὸ ὕψους $\frac{2}{3}$ μέτρου, εἰς πόσον ὕψος νὰ ὑψωθῇ κατὰ τὴν γ′ ἀναπήδησιν;

333) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$,

$5^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(3\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(5\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4$.

Α′. ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΥΟΜΕΝΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

§ 128. **Πρόβλημα Ι.** *Ἀμαξοστοιχία διανύει 40 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα διανύει εἰς* $\frac{5}{8}$ *τῆς ὥρας;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ εἰς $\frac{8}{8}$ ὥρας (=1 ὥρ.) διανύει 40 χιλ.

εἰς $\frac{1}{8}$ » διανύει 8 φορὰς ὀλιγώτερον,

ἤτοι $\frac{40}{8}$ χιλ.

καὶ εἰς $\frac{5}{8}$ » διανύει 5 φορὰς περισσότερον

ἤτοι $\frac{40}{8} \times 5 = 5 \times 5 = 25$ χιλ.

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως καὶ ἀγράφως τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 40 καὶ νὰ πολ]σωμεν αὐτὸ ἐπὶ 5.

§ 129. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Νὰ εὑρεθῶσι τὰ* $\frac{4}{5}$ *τοῦ 30.*

Λύσις. Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι 30, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{30}{5}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{30}{5} \times 4 = 6 \times 4 = 24$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΗΜ. Ἀγράφως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον λέγοντες: τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 30 εἶναι 6, ἄρα τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $6 \times 4 = 24$.

§ 130. **Πρόβλημα III.** *Μηχανὴ πλέκει εἰς 1 ὥραν* $3\frac{1}{5}$ *ὀκάδας νήματος. Πόσον νῆμα πλέκει εἰς* $5\frac{1}{4}$ *ὥρας;*

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι $5\frac{1}{4}$ ὥραι $= \frac{21}{4}$ ὥρας καὶ $3\frac{1}{5}$ ὀκ. $= \frac{16}{5}$ ὀκ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ εἰς $\frac{4}{4}$ ὥρ. (=1 ὥρα) πλέκει $\frac{16}{5}$ ὀκ.

εἰς $\frac{1}{4}$ » πλέκει 4 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{16}{5 \times 4}$

καὶ εἰς $\frac{21}{4}$ » » 21 » περισσότερον ἤτοι

$$\frac{16}{5 \times 4} \times 21 = 16\frac{4}{5} \text{ ὀκ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 334) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ἀριθμῶν 10, 20, 25, 40, καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 12, 20, 32.

335) Εἶχέ τις 260 δραχ. καὶ ἔδωκε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν πρὸς ἀγορὰν τροφίμων. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

336) Νὰ εὑρεθῶσι διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ἀριθμῶν 27, 36, 44, τὰ $\frac{7}{9}$ τῶν ἀριθμῶν $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{8}$, $11\frac{3}{9}$ καὶ τὰ $\frac{5}{9}$ τῶν ἀριθμῶν 29, 38, $\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{5}$, $12\frac{3}{4}$.

337) Τὸ εἰσιτήριον Γ' θέσεως τῶν Ἑλληνικῶν σιδηροδρόμων ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λαρίσσης εἶναι $226\frac{1}{2}$ δραχ. Ὅταν οἱ στρατιῶται ταξειδεύωσι, πληρώνουσι τὰ $\frac{50}{100}$ τοῦ κανονικοῦ εἰσιτηρίου,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πόσον θὰ πληρώσῃ στρατιώτης διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς Λάρισσαν ;

Διάφορα προβλήματα.

338) Δύο συνέταιροι κατέθεσαν δι' ἐπιχείρησιν ὁ μὲν α' 37600 δροχμάς, ὁ δὲ β' τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς καταθέσεως τοῦ α' καὶ ἀκόμη 1000 δραχ. Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ὁ β' καὶ πόσον τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπιχειρήσεως ;

339) Ποιμὴν ἠγόρασε 80 πρόβατα πρὸς 150 δραχμὰς ἕκαστον καὶ ἐδαπάνησε διὰ τὴν συντήρησιν ἑκάστου τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐπώλησε τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ τῶν προβάτων πρὸς $247\frac{2}{5}$ δραχμάς, τὰ δὲ ἄλλα πρὸς $210\frac{3}{4}$ δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ;

340) Οἰκία ἔχει 3 πατώματα. Ἀπὸ τὸ α' πάτωμα ὁ ἰδιοκτήτης λαμβάνει ἐνοίκιον 3200 δραχ. τὸν μῆνα, ἀπὸ τὸ β' τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ α' πατώματος καὶ ἀπὸ τὸ γ' τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ β' πατώματος. Πόσον ἐνοίκιον λαμβάνει τὸ ὅλον τὸν μῆνα ;

341) Βαρέλιον περιεῖχε 360 ὀκάδας οἴνου. Ἐξ αὐτοῦ ἐλήφθησαν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ οἴνου καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου οἴνου. Πόσος οἶνος ἔμεινεν εἰς αὐτό ;

342) Δοχεῖον κενὸν ἔχει βάρος $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς καὶ γεμᾶτο μὲ ὕδωρ $2\frac{3}{4}$ ὀχ. Ἐὰν ἐξαχθῶσι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ περιεχομένου ὕδατος, πόσον βάρος θὰ ἔχῃ τὸ δοχεῖον ;

Δ.' ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

§ 131. **Διαίρεσις κλάσματος καὶ μικτοῦ δι' ἀκεραίου.** Α' Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὰς ἰδιότητας (Β'. Γ'. § 110 συμπεραίνομεν ὅτι :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, ἢ πολ)ζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Οὕτω $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$, $\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{16}$.

Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta} : \mu = \frac{\alpha : \mu}{\beta}$, ἂν α=πολ.μ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} : \mu = \frac{\alpha}{\beta \times \mu}$

Β'. Ἐὰν ὁ πῆχυς μεταξωτῆς κορδέλλας τιμᾶται 8 δραχ, μὲ $42\frac{3}{4}$ δραχμὰς ἀγοράζομεν τόσους πήχεις, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 8 δραχμαὶ εἰς τὰς $42\frac{3}{4}$ δραχ, ἤτοι $42\ \frac{3}{4} : 8$. Τὸ πηλίκον τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

α') Ἐπειδὴ $42\ \frac{3}{4} = \frac{171}{4}$ ἔπεται ὅτι $42\ \frac{3}{4}$ δρ. : $8^{\delta\varrho}$

$$= \frac{171^{\delta\varrho}}{4} : 8^{\delta\varrho} = \frac{171}{32} = 5\ \frac{11}{32}\ \text{πήχ.}$$

Γενικῶς : $\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\right) : \mu = \frac{\alpha.\gamma + \beta}{\gamma} : \mu.$

β') Μὲ τὰς 42 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{42}{8}$ πήχεις καὶ μὲ $\frac{3}{4}$ δρχ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$ πήχ. Ὥστε μὲ $42\ \frac{3}{4}$ δρχ. ἀγοράζομεν

$$\frac{42}{8} + \frac{3}{4 \times 8} = 5\ \frac{11}{32}\ \text{πήχ.}$$

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι $42\ \frac{3}{4} : 8 = (42 : 8) + \left(\frac{3}{4} : 8\right)$.

Γενικῶς : $\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\right) : \mu = (\alpha : \mu) + \left(\frac{\beta}{\gamma} : \mu\right)$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου. Ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 343) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα $\frac{3}{4} : 3$, $\frac{9}{11} : 3$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{1}{2} : 3,\ \frac{3}{7} : 5,\ \frac{17}{27} : 9,\ 4\frac{2}{5} : 2,\ 15\frac{6}{7} : 3,\ 3\frac{1}{4} : 2$

$10\frac{3}{7} : 6.\ \ 164\frac{2}{3} : 75.$

344) Ποῖος ἀριθμὸς τριπλασιαζόμενος γίνεται $\frac{6}{9}$ καὶ ποῖος γίνεται $\frac{5}{7}$;

345) Αὐτοκίνητον διατρέχει 24 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου ;

346) Ἠγόρασέ τις 5 ὀκάδας βουτύρου καὶ ἔδωσε $366\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

347) Ἡ ὀκᾶ σάπωνος τιμᾶται 23 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας σάπωτος ἀγοράζομεν μὲ $57\frac{1}{2}$ δραχμάς ;

348) Γυνὴ ἐπώλησε 85 ὀκάδας σίτου πρὸς $5\frac{3}{4}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν, ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 5 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσον ὕφασμα ἠγόρασεν ;

349) Ἀμαξοστοιχία ὑποχρεοῦται εἰς 7 ὥρας νὰ διατρέξῃ 196 χιλιόμετρα. Ἂν εἰς τὰς 2 πρώτας ὥρας ἔχῃ ταχύτητα $23\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν, μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ τρέχῃ τὰς ἄλλας ὥρας ;

§ 132. **Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος. Πρόβλημα.** *Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν* $\frac{3}{4}$ *ὀκ. ἐμπορεύματος ἐδόσαμεν α δραχμάς. Πρὸς πόσον ἠγοράσαμεν αὐτὸ τὴν ὀκᾶν ;*

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον α, ἕπεται ὅτι (§ 111) ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι α δρ : $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὴν τιμὴν ταύτην εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται α δραχμαί,

τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. τιμᾶται $\frac{\alpha}{3}$ δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατὰ τὰ $\frac{4}{4}$ ὁκ. τιμῶνται $\frac{\alpha}{3}$ δραχ. $\times 4$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{3}\times 4=\alpha\times\frac{4}{3}$ ἕπεται ὅτι $\alpha:\frac{3}{4}=\alpha\times\frac{4}{3}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.*

Οὕτω $12:\frac{3}{4}=12\times\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}:\frac{3}{7}=\frac{5}{6}\times\frac{7}{3}$.

Γενικῶς, $\alpha:\frac{\mu}{\nu}=\alpha\times\frac{\nu}{\mu}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 350) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα

$$35:\frac{5}{7},\quad 42:\frac{4}{9},\quad 102:\frac{6}{7},\quad \frac{2}{3}:\frac{5}{6},\quad \frac{3}{17}:\frac{5}{34},$$
$$2\frac{1}{3}:\frac{2}{5},\quad 10\frac{1}{5}:\frac{4}{5},\quad 44\frac{2}{7}:\frac{4}{7}.$$

351) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\frac{2}{3}$ διὰ νὰ γείνῃ 8 ἢ νὰ γείνῃ $1\frac{1}{5}$;

352) Αὐτοκίνητον εἷς $\frac{3}{4}$ ὥρας διέτρεξε 30 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τὴν ὥραν ;

353) Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ὑφάσματος τιμῶνται $120\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου ;

354) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι 33 καὶ τίνος $36\frac{1}{2}$;

355) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ εἶναι $12\frac{1}{4}$;

§ 133. **Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ μικτοῦ ἀριθμοῦ.**

Πρόβλημα. Ἠγόρασέ τις $6\frac{4}{5}$ ὁκ. ζακχάρεως μὲ α δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

Λύσις. Ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ὀκᾶς πολ)ζομένη ἐπὶ $6\frac{4}{5}$ πρέπει νὰ δίδει α δραχμάς. Εἶναι ἄρα (§ 111) αὕτη $\alpha:6\frac{4}{5}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ $6\frac{4}{5}=\frac{34}{5}$, ἔπεται ὅτι $\alpha : 6\frac{4}{5}=\alpha:\frac{34}{5}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον.*

Οὕτω $6 : 5\frac{1}{3}=6:\frac{16}{3}=6\times\frac{3}{16}=\frac{18}{16}$,

$$\frac{2}{5} : 2\frac{3}{4}=\frac{2}{5} : \frac{11}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{55}$$

Γενικῶς $\alpha : \left(\beta+\frac{\mu}{\nu}\right)=\alpha:\frac{\nu\times\beta+\mu}{\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 356) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις $20 : 3\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5} : 3\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8} : 1\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{8} : 2\frac{3}{8}$, $23\frac{1}{5} : 7\frac{2}{10}$.

357) Ἠγόρασέ τις $12\frac{4}{5}$ ὀκάδας ἀνθράκων καὶ ἔδωκε 40 δρ. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

358) Ὡρολόγιον προπορεύεται $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας. Πόσον προπορεύεται τὴν ὥραν ;

359) Κρεοπώλης ἠγόρασεν ἀρνία πρὸς $180\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸ καθὲν καὶ ἔδωκε $9566\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσα ἀρνία ἠγόρασεν ;

360) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολ)σωμεν τὸν $8\frac{2}{5}$ διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 20 ἢ $16\frac{4}{5}$;

361) Ἁμαξοστοιχία διήνυσεν εἰς $12\frac{3}{4}$ ὥρας $261\frac{3}{8}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε τὴν ὥραν ;

362) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς $245\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ἔδωκε δὲ ἓν χιλιόδραχμον καὶ ἓν πεντακοσιόδραχμον καὶ ἔλαβεν ὑπόλοιπον $272\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 134. **Σύνθετα κλάσματα.** Ἐμάθομεν ὅτι $5 : 6 = \frac{5}{6}$, $7 : 8 = \frac{7}{8}$ κλπ. Κατ' ἀναλογίαν τὸ πηλίκον $2 : \frac{1}{5}$ παριστάνομεν οὕτω $\frac{2}{\frac{1}{5}}$, τὸ $3\frac{1}{5} : \frac{5}{7}$ οὕτω $\frac{3\frac{1}{5}}{\frac{5}{7}}$ κτλ. Αἱ κλασματικαὶ μορφαὶ $\frac{2}{\frac{1}{5}}$ $\frac{3\frac{1}{5}}{\frac{5}{7}}$ κτλ. λέγονται **σύνθετα** κλάσματα.

Πρὸς διάκρισιν δὲ τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ κλάσματα καλοῦμεν **ἁπλᾶ** κλάσματα.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι εἰς κάθε σύνθετον κλάσμα διαιρετέος, λέγεται **ἀριθμητὴς** αὐτοῦ. Ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρέτης, λέγεται **παρονομαστὴς** αὐτοῦ. Οἱ δύο μαζὶ λέγονται **ὅροι** τοῦ συνθέτου κλάσματος.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ συνθέτου κλάσματος, τρέπεται τοῦτο εἰς ἁπλοῦν κλάσμα ἢ ἀκέραιον.

Οὕτω $\frac{\frac{4}{2}}{5} = 4 \times \frac{5}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10.$

$$6\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = 6\frac{1}{8} : \frac{3}{4} = \frac{49}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{49}{6} \text{ κτλ.}$$

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνονται κατὰ τοὺς κανόνας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Εὐκολώτερον ὅμως εἶναι νὰ τρέπωνται ταῦτα εἰς ἁπλᾶ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελῶνται αὐταί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 363) Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ σύνθετα κλάσματα

$$\frac{\frac{5}{3}}{5}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{4}, \quad \frac{\frac{9}{11}}{3}, \quad \frac{24}{\frac{35}{8}}, \quad 3\frac{6}{\frac{1}{4}}, \quad \frac{41}{8\frac{1}{2}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{15\frac{3}{8}}{12},\quad \frac{\frac{2}{3}}{4\frac{1}{5}},\quad \frac{\frac{3}{5}}{6\frac{7}{10}},\quad \frac{9\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}},\quad \frac{6\frac{1}{4}}{5\frac{3}{4}},\quad \frac{12\frac{1}{2}}{3\frac{2}{6}},\quad \frac{10\frac{3}{7}}{2\frac{4}{5}}.$$

364) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

$$\frac{\frac{7}{5}}{12}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}},\quad \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{4}}-\frac{2\frac{3}{5}}{4},\quad \frac{\frac{5}{9}}{3\frac{1}{4}}\times\frac{4\frac{2}{7}}{1\frac{1}{14}},\quad \frac{2\frac{3}{4}}{5\frac{1}{3}}:\frac{6}{3\frac{1}{4}}.$$

365) Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ παραστάσεις

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{14}},\quad \frac{2\frac{3}{4}-1}{2\frac{3}{4}+1},\quad \frac{6\frac{2}{5}-\frac{5}{8}}{6\frac{2}{5}+\frac{5}{8}}.$$

Β΄. ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΥΟΜΕΝΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

§ 135. **Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις* $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς καφὲ καὶ ἔδωκε 48 δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;*

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τιμῶνται 48 δρ, τὸ $\frac{1}{4}$ τιμᾶται $\frac{48}{3}$ δραχ. καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. (=1 ὀκ) τιμῶνται $\frac{48}{3}$ δρ$\times$4=64 δραχ.

§ 136. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Τίνος ἀριθμοῦ τὰ* $\frac{5}{6}$ *εἶναι* $\frac{7}{8}$*;*

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{7}{8}$, τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{7}{8\times5}$, καὶ τὰ $\frac{6}{6}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{7}{8\times5}\times6=\frac{21}{20}$.

§ 137. **Πρόβλημα ΙΙΙ.** Τὰ $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς βουτύρου τιμῶνται* 61 $\frac{1}{2}$ *δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ* $\frac{5}{6}$ *τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ ;*

Λύσις. Τρέπομεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἰς ὁμώνυμα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς.

Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{9}{12}$ ὀκᾶς τιμῶνται $61\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{123}{2}$ δραχ., τὸ $\frac{1}{12}$ ὀκᾶς θὰ τιμᾶται $\frac{123}{2\times 9}$ καὶ τὰ $\frac{10}{12}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{123}{2\times 9} \times 10 = 68\frac{1}{3}$ δραχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 366) Αὐτοκίνητον διήνυσεν εἰς $\frac{3}{4}$ ὥρας $22\frac{7}{8}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε τὴν ὥραν;

367) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{9}{10}$ εἶναι $2\frac{1}{4}$;

368) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 22;

369) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{1}{2}$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ.

370) Τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν βόλων παιδίου εἶναι λευκοί, τὸ $\frac{1}{4}$ κόκκινοι, τὸ $\frac{1}{5}$ πράσινοι καὶ οἱ λοιποὶ 13 εἶναι μαῦροι. Πόσους βόλους ἔχει τὸ ὅλον καὶ πόσοι εἶναι ἀπὸ κάθε χρῶμα;

371) Ἐὰν εἰς τὰ $\frac{3}{10}$ ἀριθμοῦ προσθέσωμεν τὸν 3, εὑρίσκομεν $4\frac{1}{4}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

372) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς $8\frac{1}{4}$ ὥρας. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελεῖ εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας;

373) Ἐργάτης χρειάζεται $8\frac{2}{4}$ ὥρας, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{4}$ ἔργου. Εἰς πόσας ὥρας δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον διπλάσιον τοῦ ἔργου τούτου;

374) Ἔμπορος ἐκέρδισεν ἐξ ἐπιχειρήσεως τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

των, τὰ ὁποῖα δι' αὐτὴν διέθεσε εἶχε δὲ μετὰ ταῦτα ἓν ὅλῳ 20000 δραχμάς. Πόσα χρήματα διέθεσε δι' αὐτήν ;

√ 375) Ἐὰν ποιμὴν εἶχε τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν προβάτων του, θὰ εἶχε 30 πρόβατα περισσότερα. Πόσα πρόβατα εἶχεν ;

√ 376) Κρήνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρας καὶ ἄλλη γεμίζει αὐτὴν εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον αἱ δύο κρῆναι ὁμοῦ γεμίζουσι τὴν δεξαμενὴν ταύτην ;

√ 377) Κατὰ τὸν περὶ χαρτοσήμου νόμον, εἰς τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἑκάστου χαρτοσήμου προστίθενται τὰ $\frac{30}{100}$ τῆς ἀξίας ταύτης. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δόσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ χαρτόσημον ὀνομαστικῆς ἀξίας 200 δραχμῶν ;

√ 378) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἀγορὰν χαρτοσήμου 195 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ ;

§ 138. **Γενίκευσις καὶ χρησιμότης αὐτῆς**. Διὰ νὰ μάθωμεν (§ 132) πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ κλάσματος, ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ὡς διαιρετέον ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ νὰ κάμωμεν τοὺς ἀναγκαίους συλλογισμούς, ἵνα φθάσωμεν καὶ διατυπώσωμεν τὸ συμπέρασμα. Ἔπειτα ἔπρεπε νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν μὲ διαιρετέον κλάσμα καὶ ἔπειτα πάλιν μὲ διαιρετέον μικτὸν καὶ νὰ διατυπώσωμεν κάθε φορὰν τὸ ἀντίστοιχον συμπέρασμα. Ἀντὶ τούτων παρεστήσαμεν τὸν διαιρετέον μὲ τὸ γράμμα α καὶ ἐκάμαμεν ἅπαξ τοὺς συλλογισμούς μας χωρὶς νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τίνος εἴδους ἀριθμὸς εἶναι ὁ α. Κατελήξαμεν δὲ εἰς συμπέρασμα γενικὸν καὶ συντόμως διατυπωθέν.

Ὁμοίαν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ εἰς πρόβλημά τι, τοῦ ὁποίου διατηροῦμεν κατὰ τὰ ἄλλα τὴν αὐτὴν διατύπωσιν.

Οὕτω προκύπτει πρόβλημα, τὸ ὁποῖον λέγεται *γενικόν*.

Γενικὸν π.χ. εἶναι τὸ ἑξῆς πρόβλημα. *Ἐπώλησέ τις 6 ὀκάδας οἴνου πρὸς α δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ τὰ ληφθέντα χρήματα ἠγόρασε ὕφασμα πρὸς γ δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ;*

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτὸ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ ἐπωλήθη α δραχ, αἱ 2 ὀκ. ἐπωλήθησαν α×2 καὶ αἱ 6 ὀκάδες ἐπωλήθησαν α×6 δραχ. Ἀφοῦ δὲ μὲ γ δραχ. ἀγοράζει 1

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πῆχυν, μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{1}{\gamma}$ πήχ. καὶ μὲ $\alpha\times\beta$ ἀγοράζει $\frac{1}{\gamma}\times(\alpha\times\beta)=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma}$ πήχεις. Ἂν δὲ χάριν συντομίας παραστήσωμεν τοὺς ἀγνώστους πήχεις μὲ τὸ χ, θὰ

εἶναι $\chi=\frac{\alpha\times\beta}{\gamma}$ (1).

Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται τύπος. Κατ' αὐτὸν λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον, ἂν μόνον θέσωμεν ἀντὶ τῶν α, β, γ τοὺς δεδομένους ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις. Οὕτως ἂν ἡ τιμὴ τοῦ οἴνου $\alpha=5$ δραχ., αἱ πωληθεῖσαι ὀκάδες $\beta=15$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ὑφάσματος $\gamma=25$ δραχ., ὁ τύπος (1) δίδει $\gamma=\frac{5\times15}{25}=3$ πήχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 379) Δαπανήσας τις τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν χρημάτων του ἔχει α δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς; Ἐφαρμογή, ὅταν $\mu=3$, $\nu=7$, $\alpha=5600$

380) Εἶχέ τις α πήχεις ὑφάσματος καὶ ἐπώλησε β πήχεις ἀπὸ αὐτὰς πρὸς γ δραχμὰς τὸν πῆχυν, τοὺς δὲ ἄλλους πρὸς δ δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν; Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=80$ πήχεις, $\beta=32\frac{3}{8}$ πήχ, $\gamma=65\frac{1}{4}$ δραχ., $\delta=70$ δραχμάς.

381) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α' ἀναγκαστικοῦ δανείου (1922) ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 100 δραχ., ἔχασε δὲ τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς ἀξίας της. Πόση εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία της;

Ἐφαρμογὴ διὰ $\mu=2$ καὶ $\nu=5$

382) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ τύπος $\chi=\frac{(\alpha+\beta).\mu}{\nu}$, ἂν $\alpha=5$, $\beta=3$, $\mu=2$, $\nu=10$.

383) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ, ἂν $\chi=\frac{(\alpha-\beta):2}{3\alpha\beta}$ καὶ $\alpha=7$, $\beta=2$.

Προβλήματα διάφορα.

384) Κτηματίας εἶναι κύριος τῶν $\frac{5}{8}$ κτήματος, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 480000 δραχμάς. Πόσον μέρος τῆς περιουσίας του ταύτης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρέπει νὰ πωλήσῃ διὰ νὰ λάβῃ 30000 δραχμάς, τὰς ὁποίας χρειάζεται ;

385) Πατὴρ παρήγγειλεν, ὅπως τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του λάβῃ ἡ σύζυγός του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου οἱ τρεῖς υἱοί του. Οὕτω δὲ ἕκαστος υἱὸς ἔλαβε 50000 δραχμάς. Πόση ἦτο ὅλη ἡ περιουσία καὶ πόσα ἔλαβεν ἡ σύζυγος ;

386) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου (1922) τιμᾶται $61\frac{1}{2}$ δραχμάς, ἑκάστη δὲ τοῦ β΄ ἀναγκαστικοῦ (1926) τιμᾶται $51\frac{3}{5}$ δραχ. Ἐάν τις δόσῃ 100 ὁμολογίας τοῦ β΄ καὶ ἀκόμη $1051\frac{1}{2}$ δραχμάς πόσας ὁμολογίας τοῦ α΄ δύναται νὰ ἀγοράσῃ ;

387) Ἐὰν ποιμὴν εἶχε τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν προβάτων του, θὰ εἶχε 35 πρόβατα περισσότερα. Πόσα πρόβατα εἶχεν ;

388) Δεξαμενὴ περιέχει 200 ὀκάδας ὕδατος, ὅταν δὲ εἶναι γεμάτη, χωρεῖ $983\frac{3}{12}$ ὀκάδας. Μία κρήνη ρίπτει εἰς αὐτὴν $15\frac{1}{4}$ ὀκ. τὴν ὥραν, ἐν ᾧ ἀπὸ κρουνὸν αὐτῆς χύνονται $8\frac{2}{12}$ ὀκάδες. Ἐὰν συγχρόνως ἀνοιχθῇ ἡ κρήνη καὶ ὁ κρουνός, εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ;

389) Χωρικὸς διέθεσεν ὡς ἑξῆς τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβε κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ καπνοῦ του. Τὸ ἥμισυ καὶ 1200 δραχ. ἀκόμη κατέθεσεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ 3800 δραχ. ἔδωκε δι' ἀγορὰν ἀγροῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\frac{1}{8}$ ἐδαπάνησε διὰ τὰς οἰκογενειακὰς ἀνάγκας του. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἀπὸ τὸν καπνόν του ;

390) Δύο κυρίαι ἠγόρασαν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πήχεων ὑφάσματος διὰ νὰ κάμωσι παραπετάσματα. Ἡ μία ἔκαμε τὰ παραπετάσματά της $2\frac{1}{5}$ πήχεων ἕκαστον, ἡ δὲ ἄλλη $3\frac{3}{10}$ πήχ. ἕκα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στον. Οὕτω δὲ ἡ α΄ κυρία ἔκαμε 2 παραπετάσματα περισσότερα ἀπὸ τὴν β΄. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ἑκάστη ;

391) Ὁ σιδηρόδρομος Ἀθηνῶν—Πειραιῶς εἷς τινα διαδρομὴν ἀφῆκεν εἰς Φάληρον τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ἐπιβατῶν, τοὺς ὁποίους ἔφερεν ἐξ Ἀθηνῶν καὶ παρέλαβεν ἀπὸ ἐκεῖ ἄλλους 80. Οὕτω δὲ ἔφθασεν εἰς Πειραιᾶ μὲ 380 ἐπιβάτας. Πόσους ἐπιβάτας ἔφερεν ἐξ Ἀθηνῶν ἀρχικῶς ;

392) Διευθυντὴς ἐστιατορίου ἠγόρασε παρὰ κρεοπώλου 30 ὀκάδας κρέατος ἀπὸ βοῦν καὶ ἀρνίον. Καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἠγόρασε πρὸς $31\frac{2}{5}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ β΄ πρὸς $44\frac{1}{4}$ δραχμάς· ἔδωκε δὲ ἐν ὅλῳ 1199 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος ;

393) Χρηματικὸν ποσὸν διενεμήθη εἰς 4 ἀνθρώπους ὡς ἑξῆς. Ὁ α΄ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ὁ β΄ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α΄, ὁ γ΄ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ β΄ καὶ ὁ δ΄ τὰς ὑπολειφθείσας 100 δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ διανεμηθέντα χρήματα καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν πρώτων ;

394) Εἶχέ τις α δραχμάς, ἐκέρδισε δὲ ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς περιουσίας ταύτης. Τὸ $\frac{1}{\lambda}$ ὅλων τῶν χρημάτων τούτων διέθεσε πρὸς ἀγορὰν κτήματος. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν καὶ πόσας δραχμὰς ἔδωκε διὰ τὸ κτῆμα ;

Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=500000$, $\mu=3$, $\nu=20$, $\lambda=15$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 139. **Δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες — Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.** Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ. ὀνομάζονται **δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες**.

Γενικῶς: *Δεκαδικὴ μονὰς καλεῖται πᾶσα κλασματικὴ μονάς, ἡ ὁποία ἔχει παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά.*

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{1}{100}\times 10=\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}\times 10=1$, $1\times 10=10$, κτλ. Ἑπομένως κάθε μία ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς σειρᾶς

$$\ldots\ldots\frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100\ldots\ldots, \qquad (\alpha)$$

λαμβανομένη δέκα φορὰς κάμνει μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{10}$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$, ἤτοι γίνεται ἀπὸ τὴν δεκαδικὴν μονάδα $\frac{1}{10}$ ἂν ἐπαναληφθῇ τρεῖς φοράς. Καλεῖται δὲ οὗτος **δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς** ἢ ἁπλῶς **δεκαδικὸς ἀριθμός.** Ὁμοίως $\frac{23}{100}$, $\frac{1875}{10000}$ εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Γενικῶς: *Δεκαδικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος.*

Τυχὸν δεκαδικὸς ἀριθμὸς π.χ. ὁ $\frac{475}{100}=\frac{400+70+5}{100}=4+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$, *ἤτοι ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων τῆς σειρᾶς (α) καὶ ἀπὸ οὐδεμίαν περιέχει περισσοτέρας τῶν ἐννέα.*

Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν (§ 9) συμφωνίαν, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς χωρὶς παρονομαστάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς τοῦτο δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων γράφομεν ὑποδιαστολὴν (,), δεξιὰ ταύτης τὰ δέκατα, ἔπειτα τὰ ἑκατοστὰ κτλ. Ἐὰν δὲν ὑπάρχωσιν ἀκέραιαι μονάδες ἢ ἄλλη δεκαδικὴ μονὰς ἀνωτέρα τῆς τελευταίας, θέτομεν 0 εἰς τὴν θέσιν της.

Οὕτως ὁ $\frac{475}{100}$ γράφεται 4,75, ὁ $\frac{468}{10000}$ γράφεται 0,0468.

Ἡ τοιαύτη μορφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καλεῖται **δεκαδικὴ** μορφή.

Ὥστε : *Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίζομεν μὲ ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὸ τέλος τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχει ἀρκετὰ πρὸς τοῦτο ψηφία, γράφομεν πρὸ αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται μηδενικά.*

Κατὰ ταῦτα αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τῆς σειρᾶς (α) γράφονται οὕτω : 0,1 0,01 0,001 0,0001 κ. λ. π.

Τὰ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ἀκέραιον μέρος, τὰ δὲ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἀποτελοῦσι τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ λέγονται **δεκαδικὰ** ψηφία.

Ἐπειδὴ ὡς εἴπομεν $0,53=\frac{53}{100}$, $14,2=\frac{142}{10}$ ἔπεται ὅτι :

Ἐὰν δοθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, διὰ νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς κοινὸν κλάσμα, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰ δεκαδικὰ ψηφία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 395) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα $\frac{25}{10}$, $\frac{18431}{1000}$, $\frac{167}{10000}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{48}{1000}$, $\frac{373}{10000}$, $\frac{35}{100}$.

396) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ ἐὰν ἐπαναληφθῇ 5 ἢ 12 ἢ 84 ἢ 204 φοράς.

§ 140. **Ἀπαγγελία δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Ἐπειδὴ $5,67=\frac{567}{100}$, οὗτος ἀπαγγέλλεται : *πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτὰ ἑκατοστά, ἤτοι ἀναγινώσκομεν τὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἀποτε-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λούμενον ἀκέραιον, ὡς νὰ μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ προσαρτῶμεν εἰς τὸ τέλος τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

6') Ἐπειδὴ $5,67=5+\frac{6}{10}+\frac{7}{100}$, ὁ 5,67 ἀναγινώσκεται καὶ οὕτω: 5 ἁπλαῖ μονάδες, 6 δέκατα καὶ 7 ἑκατοστά, ἤτοι: *ἀναγινώσκομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ προσαρτῶμεν ἀμέσως τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ.*

γ') Ὁ ἀριθμὸς π.χ. $43,56104=43+\frac{56}{100}+\frac{104}{100000}$ καὶ ἀπαγγέλλεται οὕτω: 43 ἀκέραιαι μονάδες, 56 ἑκατοστὰ καὶ 104 ἑκατοντάκις χιλιοστά.

Ἐπειδὴ δὲ $43,56104=43+\frac{56104}{100000}$, ἀπαγγέλλεται καὶ οὕτω: 43 ἀκ. μονάδες καὶ 56104 ἑκατοντάκις χιλιοστά. Ἤτοι:

Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα καὶ ἀναγινώσκομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ψηφία ἑκάστου τμήματος, προσαρτῶμεν δὲ ἀμέσως καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 397) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1,3 0,7 46,7 0,23 0,504 34,67 0,068 0,005 0,0604 1763,43 1048,0051.

398) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 303,00709 0,17894, 378,62501 10,041004.

§ 141. **Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.** Α') Γνωρίζομεν ὅτι 230 λεπτὰ$=\frac{230}{100}$ δρ.$=2,30$ δρ. ἢ 230λ $=230:10=$ 23 δεκάρες$=\frac{23}{10}$ δρ.$=2,3$ δραχ.

Ἄρα: $2,3=2,30$. Εὐνόητον δὲ ὅτι $4,35=04,35=004,35$κτλ.

Ἄρα: *Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν βλάπτεται, ἂν γράψωμεν, ὅσα θέλομεν, μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

Β'). Ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 84,65 δραχ, 10 πήχεις ἀπὸ αὐτὸ τιμῶνται $84,65$ δραχ$\times 10=\frac{8465}{100}\times 10=\frac{8465}{10}=$ 846,5 δρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 17,635×100=1763,5 κτλ.

Ἄρα: *Διὰ νὰ πολ]σωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολ)στής.*

Γ'. Ἐπειδὴ 84,65×10=846,5, ἕπεται ὅτι 846,5 : 10=84,65· ἐπειδὴ δὲ 17,635×100=1763,5 ἕπεται ὅτι 1763,5 : 100=17,635.

Ἄρα: *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης.*

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν εἰς τὸ τέλος ἢ τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται μηδενικά. Π. χ. 1,34×1000 = 1,340×1000=1340 15,68:100=015,68:100=0,1568.

Ὁμοίως 5×10=5,0×10=50 37:10=37,0:10=3,7 κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 399) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀγράφως τὰ γινόμενα 0,3×10 0,35×10 7,32×10 1,582×100 6,93×1000, 0,2347×1000 καὶ τὰ πηλίκα 56,3:10 0,6:10 0,05:10 534,7:100 62,3:100.

400) Ἓν πορτοκάλλιον τιμᾶται 1,80 δραχ. Πόσον τιμῶνται 100 καὶ πόσον 1000 πορτοκάλλια;

401) Ἠγόρασέ τις 100 ὀκάδας ὀρύζης πρὸς 17,40 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ 100 ὀκάδας καφὲ πρὸς 84,30 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἔδωκε δὲ 3 χιλιόδραχμα. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ;

402) Ἡ χιλιὰς τῶν λεμονίων τιμᾶται 750 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ ἕν;

403) Πόσα λεπτὰ ἔχουσιν αἱ 367,45 δραχμαί;

404) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι τὰ 79635 λεπτά;

405) Πόσας δραχμὰς ἀποτελοῦσι 35,4 δεκάρες;

406) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις

$$3,45\times100-045\times100,\quad \frac{0,31\times10}{31},\quad (1+0,98)\times100,$$

$$(1-0,99)\times110\quad \frac{(2-0,98)\times100}{(0,99\times100)+1}.$$

Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

§ 142. **Πρόσθεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν**. Ἐὰν δαπανήσῃ τις 87,3 δραχ. τὴν ἄλλην ἡμέραν 95,65 καὶ τὴν γ' 90,4 δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θὰ δαπανήσῃ τὸ ὅλον
87,3 δρ+95,65 δρ+90,4 δρ. ἢ
8730 λεπ+9565+λεπ+9040 λεπ=
27335 λεπ=273,35 δραχ. Ἤτοι
86,3+95,65+90,4=273,35 δραχ

Διάταξις τῆς πράξεως

87,3
95,65
90,40
273,35

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανὼν τῆς προσθέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜ. Ἐὰν μερικοὶ ἀπὸ τοὺς προσθετέους εἶναι ἀκέραιοι, ἡ πρόσθεσις γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 407) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα 1,45+25,60 +31,75+67,18 56,17+48,5+106,3+363,34+706,34, 4,783+25+0,357+1,6+70 038+100,64+2,0004+0,000008

408) Πατὴρ ἔλαβε δι' ἐργασίαν μιᾶς ἑβδομάδος 452,10 δραχ. ὁ υἱός του 374,40 δραχ. καὶ ἡ θυγάτηρ του 310,20 δραχ. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ἡ οἰκογένεια αὕτη ;

409) Ἐργάτης κατέθεσεν εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τὸ α΄ Σάββατον μηνός τινος 167,30 δραχ. τὸ β΄ Σάββατον 208,45 δραχ., τὸ γ΄ 210,75 δραχ. καὶ τὸ δ΄ 225,65 δραχ. Πόσα χρήματα κατέθεσεν ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον ;

410) Οἰκοδεσπότης λαμβάνει μηνιαῖον ἐνοίκιον ἀπὸ μὲν τὸ ἰσόγειον 1735,40 δραχ., ἀπὸ δὲ τὸ ἄνω πάτωμα 2472,35 δραχ. περισσοτέρας. Πόσον ἐνοίκιον λαμβάνει τὸ ὅλον ;

§ 143. **Ἀφαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον.** Ἐὰν ἔχῃ τις 48,75 δραχ, καὶ δαπανήσῃ 23,4 δραχ, θὰ μείνωσιν εἰς αὐτὸν 48,75 δραχ—23,4=4875λ—2340λ=2535λ=25,35 δραχ. Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον καθιστῶμεν ἰσοπληθῆ τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν κλπ.

Διάταξις τῆς πράξεως

48,75
23,40
25,35

ΣΗΜ. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἶναι ἀκέραιος.

Οὕτω 20,35—18=20,35—18,00=2,35.
5—2,25=5,00—2,25=2,75.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 411) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀφαιρέσεις
54,65—34,15 142,35—81,60 863,80—658,95
597,8—267,875 3025,75—2901,167 7,2—3 8—6,35
9—7,125 410—9,002.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

412) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις,

$85,35-(12,5+31,45+15)$ $(7,25+3,75)-(1,05+2,35+5,45)$

$103-(0,95\times100)$, $(67,85+35,40+21,25)-(0,99\times100)$,

$(0,35\times10)-1,25$ $(57,3\times100)-(2,815\times10)$.

413) Ἠγόρασέ τις ζάχαριν ἀξίας 37,75 δραχ. καὶ ἔδοσεν εἰς τὸν παντοπώλην ἓν πεντηκοντάδραχμον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ ὀπίσω ;

414) Τὸ εἰσιτήριον α΄ θέσεως τῶν Ἑλληνικῶν Σιδηροδρόμων ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης εἶναι 649,40 δραχ., τὸ δὲ εἰσιτήριον β΄ θέσεως εἶναι 544,50 δραχ. Πόσον εἶναι ἀκριβότερον τὸ α΄ εἰσιτήριον ἀπὸ τὸ β΄ ;

415) Μαθητὴς ἐπήδησεν ἅλμα εἰς ὕψος 2,20 μ., ἄλλος 1,85 μ. Πόσον ὑψηλότερον ἅλμα ἔκαμεν ὁ α΄ ἀπὸ τὸν β΄ ;

416) Γεωργὸς εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως σίτου 8940,80 δραχ., ἐκ τῆς πωλήσεως κριθῆς 3981,75 δραχμὰς καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως καπνοῦ 38940 δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐπλήρωσε χρέος εἰς τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν ἐκ 12567,35 δραχμῶν, ἔδωκε 5300 δραχ. δι' ἀγορὰν ἵππου καὶ ἐπλήρωσεν εἰς τὸν παντοπώλην χρέος ἀπὸ 2347,60 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔμειναν εἰς αὐτόν ;

§ 144. **Πολ]σμὸς δεκαδικοῦ ἐπὶ ἀκέραιον ἢ δεκαδικόν.** Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τῆς ζακχάρεως τιμᾶται 21,75 δραχμάς, αἱ 3 ὀκάδες θὰ τιμῶνται

$$21,75 \text{ δραχ.} \times 3 = \frac{2175}{100} \times 3 = \frac{2175 \times 3}{100} = \frac{6525}{100} = 65,25 \text{ δραχ.}$$

Ἐὰν ἠγόραζέ τις 2,5 ὀκάδας, θὰ ἔδιδε

$$21,75 \text{ δραχ.} \times 2,5 = \frac{2175}{100} \times \frac{25}{10} = \frac{54375}{1000} = 54,375 \text{ δραχ.}$$

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον πολ]ζομεν αὐτοὺς ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι καὶ χωρίζομεν μὲ ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τόσα ψηφία. ὅσα δεκαδικὰ ἔχουσι καὶ οἱ δύο παράγοντες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 417) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $5,40\times4$, $41,05\times18,1$ $4,62\times1,04$ $2,35\times1,4$ $37,40\times8,9$ $4,537\times232,56$ $350,004\times0,124$ $3,004\times0,07$.

418) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

$(2,45+3,68+15,75)\times3$, $(81,45-48,51)\times9$

419) $(21,4+19,75+38,83)\times12,5$ $(68,75\times13,42)-(27,75\times10)$

$21000-(31,05+7,006+0,0063)\times100$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

420) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ, ἂν $\chi=(\alpha\times10-\beta\times100)\times\frac{5}{3}$αβ καὶ $\alpha=23,75 \quad \beta=1,05$.

421) Αὐτοκίνητον διανύον 35,3 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἐχρειάσθη 4 ὥρας, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Λεβάδειαν. Πόσον ἀπέχουσιν αἱ δύο αὗται πόλεις ;

422) Ἠγόρασέ τις 4,2 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 245,30 δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

423) Ἠγόρασέ τις 6 μανδήλια πρὸς 12,60 δραχ. ἕκαστον καὶ 15,50 μέτρα χασὲ πρὸς 10,50 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ ἔδωκεν ἓν πεντακοσιόδραχμον. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ ὀπίσω ;

§ 145. **Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.** Ἐὰν ἀμαξοστοιχία εἰς 8 ὥρας διατρέχῃ 154,80 χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν θὰ διατρέχῃ προφανῶς 154,80:8 ἢ $\frac{15480}{100} : 8 = \frac{15480 : 8}{100} =$

$$\frac{1935}{100} = 19,35 \text{ χιλ.}$$

Ὁμοίως $4,152:12 = \frac{4152 : 12}{1000} = \frac{346}{1000} = 0,346$. Ἄρα:

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς νὰ ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος καὶ γράφομεν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

Διάταξις τῶν πράξεων

154,80	8	4,152	12
74	19,35	55	0,346
28		72	
40		0	
0			

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦτον εἰς τὴν διαίρεσιν 13,47:20 εὑρίσκομεν πηλίκον 0,67, ἐν ᾧ τὸ ἀληθὲς εἶναι 0,67 καὶ $\frac{6}{20}$ τοῦ $\frac{1}{100}$. Ἐὰν ὅμως νοήσωμεν ἓν 0 δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καταβιβάσωμεν δὲ αὐτὸ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0 καὶ ἀκριβὲς πηλίκον 0,673. Ἐὰν διαιρέσωμεν ὁμοίως τὸν 1,7 διὰ 3 βλέπομεν ὅτι μένει πάντοτε ὑπόλοιπον 2. Ἐὰν διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστῶν, τὸ πηλίκον 0,566 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς ὀλιγότε-

13,46	20	
149	0,673	
60		
0		

1,7	3	
20	0,566	
20		
2		

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρον τοῦ $\frac{1}{1000}$. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι πηλίκον εἶναι 0,566 *κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.*

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρι τῆς εὑρέσεως καὶ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὁρίζομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$.

Ὥστε, ἐὰν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος μένῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν. Τοιουτοτρόπως ἢ θὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἢ θὰ ὁρίσωμεν αὐτό, μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

ΣΗΜ. Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ὡς παραπλεύρως φαίνεται.

17,00	4	3,0	5
10	4,25	0	0,6
20			
0			

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 424) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις 6,8 : 2, 8,64:3 56,77:7 29,233:31 488,38:62 0,805:23 0,002456:173

425) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $(2,35+0,95\times10) : 5.$

$(37,658\times100-126,476\times10) : 151.$

426) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἂν

$$\chi=\left(\frac{\alpha+3\beta}{\gamma}\right)\times\left(\frac{\alpha-3\beta}{2.\gamma}\right) \text{ καὶ } \alpha=18,75 \quad \beta=5,4 \quad \gamma=5.$$

427) Δέκα πέντε ἐπιβάται γ' θέσεως τῶν Ἑλλ. Σιδηροδρόμων ἐπλήρωσαν διὰ νὰ μεταβῶσιν ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Θήβας 1837,50 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου εἰσιτηρίου ;

428) Διὰ νὰ λιπάνῃ τις ἀγρὸν 12 στρεμμάτων ἔρριψεν εἰς αὐτὸν 427,2 ὀκάδας λιπάσματος. Πόσον λίπασμα ἔρριψε κατὰ στρέμμα ;

429) Ἡ Λάρισα ἀπέχει ἀπὸ τὸν Βόλον 59,4 χιλιόμετρα. Εἰς πόσον χρόνον μεταβαίνει ἀπὸ Βόλον εἰς Λάρισαν ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία διανύει 20 χιλ. τὴν ὥραν καὶ παραμένει εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμοὺς 1 ὥραν ;

§ 146. **Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικοῦ.** Ἐὰν μὲ 4,23 μέτρα ὑφάσματος κάμνωμεν μίαν ἐνδυμασίαν μὲ 29,61 μέτρα θὰ κάμωμεν τόσας ἐνδυμασίας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 4,23 μ, εἰς τὰ 29,61 ἤτοι $29,61 : 4,23 = \frac{2961}{100} : \frac{423}{100} = \frac{2961}{423}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $122,8 : 15,35 = 12280 : 1535 = 8$ καὶ $63 : 15,75 = 63 : \frac{1575}{100} = \frac{6300}{1575} = 4$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμφοτέρων πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ γείνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος. Ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου τούτου διαιρέτου κατὰ τὰ γνωστά.*

ΣΗΜ. α΄) Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἐπαρκῆ δεκαδικὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν ὅσα χρειάζονται μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος.

ΣΗΜ. β΄) Τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, μὲ τὸν ὁποῖον ἐπολ]σαμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως δηλοῖ μονάδας τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ πηλίκου. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου $26,8 : 3,5$ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν $268 : 35$, τῆς ὁποίας πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 23. Τῆς διαιρέσεως ἄρα $26,8 : 3,5$ πηλίκον εἶναι 7 καὶ ὑπόλοιπον 2,3.

Ἐὰν ὅμως προχωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν $268 : 35$, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον 7,65 τὸ μένον ὑπόλοιπον 25 δηλοῖ ἑκατοστά, ἤτοι εἶναι 0,25· τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς $26,8 : 3,5$ εἶναι

$$0,25 : 10 = 0,025$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 430) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις.

$27,69 : 2,13$ $537,66 ; 6,18$ $104,175 : 23,15$ $6 : 0,02$

$174 : 3,48$ $83,146 : 0,006$.

431) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις

$(273 \times 7 \times 32,65 \times 6) : 2,5$ $(0,99 \times 10 \times 0,09 \times 100) : 4,5$.

432) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἂν εἶναι

$$\chi = \left(\frac{\alpha + 3\beta - 2\mu}{\mu + \alpha} \times \frac{3\alpha}{\beta} \right) : 5\alpha$$ καὶ $\alpha = 10,35$ $\beta = 0,06$ $\mu = 2,1$.

433) Αὐτοκίνητον διανύει 32,5 χιλ. τὴν ὥραν. Εἰς πόσον χρόνον θὰ μεταβῇ ἀπὸ Πειραιῶς εἰς Λάρισαν, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι 348,795 χιλιόμετρα, ἂν δαπανήσῃ διὰ τὰς διαφόρους στάσεις του 3 ὥρας ;

434) Τὸ εἰσιτήριον α΄ θέσεως τοῦ σιδηροδρόμου Π—Α—Π ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Καλαμῶν εἶναι 522,50 δραχμαί. Εἷς τι ταξείδιον ὁ σταθμάρχης Ἀθηνῶν εἰσέπραξεν ἐξ εἰσιτηρίων α΄ θέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεως διὰ Καλάμας 12017,50 δραχ. Πόσοι ἐπιβαίται α΄ θέσεως ἐταξείδευον ἐξ Ἀθηνῶν διὰ Καλάμας ;

435) Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου τιμᾶται 64,75 δραχμάς, τοῦ δὲ β΄ 51,80. Ἐὰν πωλήσῃ τις 50 ὁμολογίας τοῦ β΄, πόσας ὁμολογίας τοῦ α΄ δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐκ τῆς πωλήσεως θὰ λάβῃ ;

§ 147. **Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.** Γνωρίζομεν ὅτι $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Ἐὰν ὅμως ἐκτελέσωμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 145 Σημ.) τὴν διαίρεσιν $3 : 4$, εὑρίσκομεν πηλίκον 0,75.

Ἄρα $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται τροπὴ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως διὰ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$, βλέπομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀκριβῶς ἴσος μὲ αὐτό, διότι ἡ διαίρεσις 5 : 6 οὐδέποτε περατοῦται. Ἂν δὲ σταματήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐθὺς ὡς εὕρωμεν π. χ. τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, λέγομεν ὅτι τὸ $\frac{5}{6}$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ 0,833 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$

Διάταξις πράξεως	
50	6
20	0,833
20	
2	

Ἄρα : *Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ θέτοντες ἀνὰ ἓν 0 δεξιὰ ἑκάστου τῶν ἀναφαινομένων ὑπολοίπων μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ἢ μέχρις οὗ ὁρίσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.*

Ἀπὸ ὅσα εἴπομεν προηγουμένως προκύπτει ὅτι ἄλλα κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἄλλα μὲ προσέγγισιν.

Τὰ εἴδη ταῦτα διακρίνομεν ἀπ' ἀλλήλων ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π.χ. τὸ κοινὸν ἀνάγωγον $\frac{7}{40}$. Ἐπειδὴ $40 = 2^3 \times 5$, ἔπεται ὅτι $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5}$. Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺς ὅρους τοῦ β΄ μέλους ἐπὶ 5^3, εὑρίσκομεν ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{7}{40}=\frac{7\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{175}{10^3}=\frac{175}{1000}=0{,}175.$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\frac{6}{25}=\frac{6}{5^2}=\frac{6\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{24}{(5\times2)^2}=\frac{24}{10^2}=\frac{24}{100}=0{,}24,$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{(2\times5)^3}=\frac{375}{10^3}=0{,}375.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἐννοοῦμεν ὅτι: *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.*

Ἀποδεικνύει δὲ ἡ κυρίως Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ ὅτι τὰ ἀνάγωγα κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα ἀπὸ αὐτά, τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ προσέγγισιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 436) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{8},\ \frac{21}{24},\ \frac{24}{40}.$$

437) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις

$$\frac{14}{16}+0{,}35\quad\frac{15}{20}-0{,}485\quad\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)-0{,}356.$$

438) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{3},\ \frac{13}{17},\ \frac{7}{13},\ \frac{5}{7}\ \text{κατὰ προσέγγισιν}\ \frac{1}{1000}.$$

439) Νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν τὸ κλάσμα $\frac{23}{99}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, εἶτα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10000}$ καὶ τέλος κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$. Τί ἀξιοσημείωτον παρατηρεῖται εἰς τὸν δεκαδικὸν τοῦτον ἀριθμόν;

§ 148. **Πολ)σμὸς καὶ διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.** Αἱ ἰσότητες

$$\alpha\times\frac{3}{4}=\frac{\alpha\times3}{4},\quad\alpha\times5\,\frac{2}{3}=\alpha\times\frac{17}{3}$$

$$\text{ἢ}\ \alpha\times5\,\frac{2}{3}=(\alpha\times5)+\left(\alpha\times\frac{2}{5}\right),\quad\alpha:\frac{3}{4}=\alpha\times\frac{4}{3},$$

$$\alpha:5\,\frac{2}{3}=\alpha:\frac{17}{3}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀληθεύουσι καὶ ὅταν ὁ α εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός. Ἀποδεικνύονται δὲ ὅπως καὶ ὅταν ὁ α εἶναι ἀκέραιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 440) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 98,40 δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ;

441) Ἡ ὀκᾶ τῆς ὀρύζης τιμᾶται 18,20 δραχ. Πόσον τιμῶνται $3\frac{3}{4}$ ὀκ. αὐτῆς ;

442) Ἠγόρασέ τις $\frac{5}{8}$ πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 80,50 δραχ. Πόσον ἠγόρασεν τὸν πῆχυν ;

443) Ἀμαξοστοιχία εἰς $4\frac{2}{5}$ ὥρας διέτρεξε 184,8 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τὴν ὥραν ;

§ 149. **Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα**. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ τὸ $\frac{4}{7}$.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 7 \\ 50 & \hline & 0,5714285\ldots \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \end{array}$$

Ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου ἀπὸ μίαν τάξιν καὶ ἑξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτήν σειράν. Αἰτία τούτου εἶναι ἡ ἑξῆς.

Κατὰ τὴν τροπὴν π. χ. τοῦ $\frac{4}{7}$ τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ἐπομένως μετὰ 6 τὸ πολὺ διαιρέσεις θὰ ἐμφανισθῇ ἕνα ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα· ἀπὸ τὴν στιγμὴν δὲ ταύτην θὰ ἐκτελῶμεν προηγουμένας μερικὰς διαιρέσεις καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Θὰ εὑρίσκωμεν ἄρα τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ διαίρεσις συνεχίζηται ἐπ' ἄπειρον, προκύπτει πηλίκον 0,571428571428571428... Τούτου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ὅσα θέλομεν δεκαδικὰ ψηφία· ἂν δὲ ἀναγράψωμεν ὡρισμένον πλῆθος ἀπὸ τὰ ψηφία ταῦτα, προκύπτει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μεγαλύτερος· π. χ. $0,57<1$, $0,57428<1$ κλπ. Διὰ αὐτοὺς τοὺς λόγους δεχόμεθα ὅτι 0,571428571428571428... εἶναι ἀριθμός.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦτον ὀνομάζομεν **δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.**

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ 0,833..., 1,54167167... εἶναι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα.

Ἄρα : *Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπὸ μίαν τάξιν καὶ ἑξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.*

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, καλεῖται **περίοδος.** Οὕτω τοῦ 0,833... ἡ περίοδος εἶναι 3, τοῦ 1,54167167... περίοδος εἶναι 167.

Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται **ἁπλοῦν** μέν, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, μικτὸν δέ, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ μετὰ ἓν ἢ περισσότερα ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Π. χ. τὸ 0,737373... εἶναι ἁπλοῦν, τὸ δὲ 0,8565656..., εἶναι μικτὸν περιοδικόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 444) Ποῖα ἀπὸ τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα 1,3585858..., 0,671671671..., 4,060606..., 12,3104104 .. εἶναι ἁπλᾶ καὶ ποῖα μικτά ; Ποῖα μεγαλύτερα καὶ ποῖα μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος ;

445) Γράψατε ἓν ἁπλοῦν καὶ ἓν μικτὸν περιοδικὸν μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ περίοδος νὰ ἔχῃ ἓν ψηφίον. Γράψατε ἐπίσης ἓν ἁπλοῦν καὶ ἓν μικτὸν περιοδικὸν μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ περίοδος νὰ ἔχῃ τοῦ μὲν ἁπλοῦ 3 ψηφία τοῦ δὲ μικτοῦ 2.

§ 150. **Κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν περιοδικόν.** Α΄) Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,571428571428... παράγεται ἀπὸ τὸ $\frac{4}{7}$.

Ἐὰν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτου πολ)σωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον 571428 :4 δηλαδὴ ἐπὶ 142857, εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{4}{7}=\frac{571428}{999999}.$$

Ἑπομένως $0,571428571428...=\frac{571428}{999999}$. Ἐκ τούτου ἀγόμεθα νὰ ἐξετάσωμεν μήπως καὶ τὸ 0,3737... γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{37}{99}$. Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς : Γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον 0 ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 37 τρέπομεν εἰς 3700 ἑκατοστά. Ταῦτα διαιροῦμεν, ὡς ἐν

$$\begin{array}{r|l} 3700 & 90 \\ 3700 & \overline{0,373737...} \\ 3700 & \end{array}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(§ 70) εἴδομεν, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 37 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 ἑκατοστά, Ταῦτα τρέπομεν εἰς δεκάκις χιλιοστὰ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν πηλίκον 37 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 δεκάκις χιλιοστά.

Οὕτως ἐξακολουθοῦντες βλέπομεν ὅτι πράγματι ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{37}{99}$ προκύπτει τὸ δεκ. περιοδικὸν 0,373737.....

Ἄρα : *Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν χωρὶς ἀκέραιον μέρος ἔχει ἀριθμητὴν τὴν περίοδον αὐτοῦ καὶ παρονομαστὴν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία εἶναι ὅλα 9 καὶ ἰσάριθμα πρὸς τὰ ψηφία τῆς περιόδου.*

ΣΗΜ. Τὸ 0,99..... κατὰ ταῦτα ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{9}$ ἤτοι πρὸς 1.

Τὸ ἁπλοῦν 2,454545 ..=2+0,454545...=$2\frac{45}{99}=\frac{2\times 99+45}{99}$.

ΣΗΜ. Τὸ περ. δεκαδικὸν 4,999.. =4+0,999...=5.

Β') Τὸ μικτὸν περιοδικὸν π.χ. 2,35173173... ἐπὶ 100 πολ)ζόμενον γίνεται 235, 173173...=$235+\frac{173}{999}=\frac{234938}{999}$.

Ἑπομένως 2,35173173...=$\frac{234938}{99900}$, Ἤτοι :

Φέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἔμπροσθεν τῆς α΄ περιόδου καὶ ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ προκῦπτον ἁπλοῦν περιοδικόν, γράφομεν δεξιὰ τοῦ παρονομαστοῦ τόσα 0, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 446) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἕκαστον ἀπὸ τὰ περιοδικὰ 0,8181. ., 0,777..., 0,305305305..., 2,393939..., 10,045045..., 23,10891089... 4,3515151..., 8,205858.. , 0,4666..., 0,41050505....

447) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 0,5656..... +0,321321... +0,1717... καὶ ἡ διαφορὰ $\frac{3}{4}$ —0,555...

448) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 0,353535...×99 καὶ τὸ 1,37171...×990.

449) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 0,2121... καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 0,1818...

450) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{4}{9}$ εἶναι 0,888 ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

§ 151. **Ποσόν**. Εἶναι φανερὸν ὅτι ποίμνη προβάτων ὑφίσταται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν· καλεῖται δὲ αὕτη ***ποσόν***. Ὁμοίως τὸ βάρος σώματος, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, ὁ χρόνος εἶναι ποσά.

Γενικῶς: *Ποσὸν καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.*

Κατὰ ταῦτα πᾶν πλῆθος (§ 1) εἶναι ποσόν.

Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν ὑπάρχουσιν καὶ ποσά, ***τῶν ὁποίων τὰ μέρη συνέχονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ὅλον***. Ταῦτα ὀνομάζονται ***συνεχῆ ποσά***. Αἱ γραμμαὶ π. χ. αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, τὰ βάρη, ὁ χρόνος εἶναι συνεχῆ ποσά.

Ἐμάθομεν (§ 2) ὅτι ἓν πλῆθος δύναται νὰ μετρηθῇ. Οὕτω καὶ ἓν συνεχὲς ποσὸν δύναται νὰ μετρηθῇ, δηλ. νὰ συγκριθῇ πρὸς ἓν ὡρισμένον καὶ ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς. Ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης εὑρίσκεται ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται ***μέτρον*** ἢ ***τιμή***. τοῦ ποσοῦ καὶ δηλοῖ ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκεῖνο.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν συνεχῶν ποσῶν γίνεται χρῆσις διαφόρων μονάδων, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράψωμεν, ὅσας συχνότερον μεταχειριζόμεθα.

§ 152. **Μονάδες μήκους**. Ἐὰν τὸ πρὸς μέτρησιν ποσὸν εἶναι γραμμή, ἡ τιμὴ αὐτοῦ καλεῖται ἰδιαιτέρως ***μῆκος*** τῆς γραμμῆς ταύτης. Αἱ δὲ μονάδες, τὰς ὁποίας μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν, λέγονται ***μονάδες μήκους***.

Τούτων συνηθέστεραι εἶναι αἱ ἑξῆς.

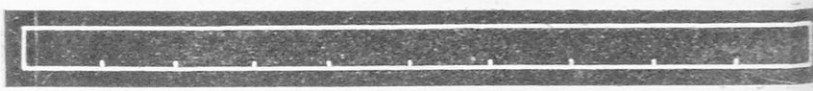
Α΄) Τὸ ***μέτρον***, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς ὀνομάζομεν καὶ ***Βασιλικὸν πῆχυν***.

Τὸ μέτρον ὡρίσθη ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ γηΐνου μεσημ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θρινοῦ. Διαιρεῖται δὲ εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **παλάμαι**. Ἑκάστη παλάμη (Σχ. 2) διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **δάκτυλοι** καὶ ἕκαστος δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 10 **γραμμάς**.

Β΄) **Ὁ μικρὸς πῆχυς Κων)πόλεως** διὰ τὴν μέτρησιν τῶν



(Σχ. 2)

ὑφασμάτων. Οὗτος ἰσοῦται πρὸς 0,648 τοῦ μέτρου καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ **ρούπια**.

Γ΄) **Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς**, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 0,75 μέτρου.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μεταχειρίζονται τὴν ὑάρδαν=0,914 μ. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 3 πόδας, ὁ δὲ πούς διαιρεῖται εἰς 12 δακτύλους (ἴντσες).

Δ΄) Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειρίζονται συνήθως τὰς ἑξῆς μονάδας. Τὸ **χιλιόμετρον** ἢ στάδιον=1000 μέτρα, τὸ μυριάμετρον=10000 μέτρα, τὸ ναυτικὸν μίλιον 1852,22 μέτρα.

Ἐνίοτε γίνεται χρῆσις καὶ τῆς γεωργ. λεύγας, ἥτις ἰσοῦται πρὸς 4444,44 μ. ὡς καὶ τῆς ναυτικῆς λεύγας, ἥτις ἰσοῦται πρὸς 5555,55 μ.

ΣΗΜ. Τὴν ταχύτητα τῶν πλοίων οἱ ναυτικοὶ εὑρίσκουσιν εἰς **κόμβους** ἀνὰ 30 δευτερόλεπτα. Εἶναι δὲ ὁ κόμβος τὸ $\frac{1}{120}$ τοῦ ναυτικοῦ μιλίου καὶ ἔχει 15,43 μέτρα. Ὥστε, ἂν πλοῖον εἰς $30^{δ}$ διανύῃ κ κόμβους, εἰς 1 ὥραν, ἤτοι εἰς χρόνον 120 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ $30^{δ}$, θὰ διανύσῃ (κ×120) κόμβους, ἤτοι κ ναυτικὰ μίλια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 451) Πόσους μ. π. Κ)πόλεως ἔχει τὸ μέτρον; Πόσους δὲ τὰ 80 μέτρα;

452) Πόσον μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ἓν ρούπιον; Πόσα ρούπια ἔχει ἓν μέτρον;

453) Πόσους τεκ. πήχεις ἔχει ἓν μέτρον; Πόσους δὲ τὰ 11,475 μέτρα;

454) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσιν οἱ 10 ἢ 100 ἢ 32,5 μ. π. Κ)πόλεως;

455) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 50,6 τεκ. πήχεις;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

456) Πόσα μέτρα (μ) ἔχουσι π μικροὶ πήχεις Κ)πόλεως ; Πόσοι δὲ μικροὶ πήχεις Κ/πόλεως (π) ἰσοδυναμοῦσι πρὸς μ μέτρα ;

457) Πρὸς πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 24,4 ὑάρδαι καὶ πρὸς πόσας ὑάρδας ἰσοδυναμοῦσι 91,4 μέτρα ;

458) Πόσον μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ὁ ποὺς τῆς ὑάρδας καὶ πόσον ὁ δάκτυλος αὐτῆς ;

459) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 100 δρχ. τὸ μέτρον καὶ ἔδωκε 352,88 δραχμάς. Ἀπὸ πόσους μ. π. Κ)πόλεως ἀπετελεῖτο τοῦτο ;

460) Δέκα ὑάρδαι ὑφάσματος τιμῶνται 1828 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον αὐτοῦ ;

§ 153. **Μονάδες ἐπιφανειῶν.** Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν, εἶναι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς.

Καλοῦνται δὲ ταῦτα κατὰ σειρὰν *τετραγωνικὸν μέτρον, τετραγωνικὴ παλάμη, τετραγωνικὸς δάκτυλος, τετραγωνικὴ γραμμή.*

Εἶναι δὲ 1 τετρ. μέτρον=100 τετρ. παλάμαι=10000 τετρ. δάκτυλοι=1000000 τετρ. γραμμαί.

Ἐὰν μονὰς μήκους ληφθῇ ὁ τεκτ. πῆχυς, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ὁ ***τεκτονικὸς τετραγωνικὸς*** πῆχυς, ὅστις ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{16}$ τετρ. μέτρου καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Ἐὰν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ χιλιόμετρον, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ ***τετραγωνικὸν χιλιόμετρον***, τὸ ὁποῖον ἔχει 1 000 000 τετρ. μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν καὶ ἀμπέλων γίνεται παρ' ἡμῖν χρῆσις : α') ***Τοῦ βασιλικοῦ στρέμματος,*** ὅπερ ἔχει 1000 τετρ. μέτρα καὶ β') ***Τοῦ παλαιοῦ στρέμματος***, ὅπερ ἔχει 1270 τετρ. μέτρα.

Ἐν Γαλλίᾳ διὰ τὸν αὐτὸν σκοπὸν μεταχειρίζονται τὸ ἄρ (are) =100 τ. μ. καὶ τὸ ἑκτάριον (hectare)=100 ἄρ=10000 τ. μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 461) Πρὸς πόσα τετρ. μέτρα ἰσοδυναμοῦσι 32 τεκτονικοὶ τετρ. πήχεις ;

462) Πόσους τεκτονικοὺς τετρ. πήχεις ἔχει τὸ τετρ. μέτρον ; Καὶ πόσους τὰ 26,1 τετρ. μέτρα ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

463) Πόσα βασ. στρέμματα ἔχει τὸ παλαιὸν στρέμμα ; Κα πόσα τὰ 100 παλαιὰ στρέμματα ;

464) Πόσον μέρος τοῦ παλαιοῦ στρέμματος εἶναι τὸ βασιλ στρέμμα ; Καὶ πρὸς πόσα παλαιὰ στρέμματα ἰσοδυναμοῦσι 35,3 βασ. στρέμματα ;

465) Πόσα τετρ. μέτρα ἔχουσι σ παλαιὰ στρέμματα ; Πόσ δὲ παλαιὰ στρέμματα ἀποτελοῦσι μ τετρ. μέτρα ;

466) Πόσα ἄρ. ἔχει τὸ βασ. στρέμμα ;

467) Πόσα βασ. στρέμματα ἔχει τὸ ἑκτάριον ;

468) Ἠγόρασέ τις ἀγρὸν πρὸς 3,7 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον κα ἔδωκε 18500 δραχμάς. Ἀπὸ πόσα βασ. στρέμματα ἀπετελεῖτ οὗτος ;

469) Οἰκόπεδον ἠγοράσθη πρὸς 40 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο ἀντὶ 1126 δρχ. Ἀπὸ πόσους τετρ. πήχεις ἀπετελεῖτο τοῦτο

470. Ἀγρὸς 8 παλαιῶν στρεμμάτων ἐπωλήθη ἀντὶ 2500 δραχμῶν. Πόσον ἐπωλήθη κατὰ βασ. στρέμμα ;

§ 154. **Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.** Ὡς μονὰ ὄγκου λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἰσοῦται πρὸ τὴν μονάδα μήκους. Οὕτως, ἂν μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, ἡ παλάμη, ὁ δάκτυλος, ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς ὄγκου εἶναι τ *κυβικὸν μέτρον, ἡ κυβ. παλάμη, ὁ κυβ. δάκτυλος, ἡ κυβ. γραμμή.*

Εἶναι δὲ 1 κυβ. μέτρον=1000 κυβ. παλ.=1000 000 κυβ. δ =1 000 000 000 κυβ. γραμμαί.

Μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν δοχείων εἶναι αἱ ἑξῆς :

Ἡ ***λίτρα,*** ἧς ὁ χῶρος ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβ. παλάμης.

Τὸ ***ἑκατόλιτρον*** ἢ ***μετρικὸν κοιλὸν***=100 λίτρας.

Τὸ τουρκικὸν κοιλὸν (σταμπόλι)=35,37 λίτρας.

Ἡ μετρικὴ ὀκᾶ, ἡ ὁποία χωρεῖ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4°Κ βά ρους μιᾶς ὀκᾶς. Ἔχει δὲ αὕτη 1,28 λίτρας.

ΣΗΜ. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων μετα χειρίζονται τὸν ***τόννον*** τῶν πλοίων ἢ ***κόρον***, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς 2,85 κυβ. μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 471) Πόσας λίτρας ἔχει χῶρος, ὁ ὁποῖος ἔχε ὄγκον 2,28 κυβ. μέτρα ;

472) Τὸ ἐσωτερικὸν δοχείου ἔχει ὄγκον 267 κυβ δακτύλων. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἰς λίτρ ς ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

473) Πρὸς πόσας λίτρας ἰσοδυναμοῦσι 7,6 σταμπόλια ; Καὶ πρὸς πόσα σταμπόλια ἰσοδυναμοῦσι 466,814 λίτραι ;

474) Πρὸς πόσας λίτρας ἰσοδυναμοῦσι 20,4 μετρικαὶ ὀκάδες; Καὶ πρὸς πόσας μετρικὰς ὀκάδας ἰσοδυναμοῦσι 128 λίτραι ;

475) Πόσων τόννων εἶναι πλοῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐσωτερικὸν ἔχει ὄγκον 905,60 κυβ μέτρα ;

§ 155. **Μονάδες βάρους.** Τὰ πλεῖστα τῶν πεπολιτισμένων κρατῶν λαμβάνουσιν ὡς μονάδας βάρους τὸ *γραμμάριον*, τὸ *χιλιόγραμμον* καὶ τὸν *τόννον*.

Γραμμάριον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυδ. δακτύλου.

Χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυδ. παλάμης.

Ἕκαστον χιλιόγραμμον ἔχει 1000 γραμμάρια.

Τόννος εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ καὶ ὄγκου 1 κυδ. μέτρου. Εἶναι δὲ 1 τον.=1000 χιλιόγρ.=1000000 γραμμάρια.

Ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα ἀκόμη καὶ τὰς ἀκολούθους μονάδας. Τὴν ***ὀκᾶν***, ἥτις ἔχει 1280 γραμμάρια καὶ διαιρεῖται εἰς 400 δράμια καὶ τὸν ***στατῆρα***, ὅστις ἔχει 44 ὀκάδας.

Ἐν Πελοποννήσῳ διὰ τὸ βάρος τῆς σταφίδος μεταχειρίζονται τὸ ***χιλιόλιτρον***, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ πρὸς 375 ὀκάδας. Ἐν δὲ τῇ Ἑπτανήσῳ μεταχειρίζονται τὴν ***ἀγγλικὴν λίτραν***, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς 453,55 γραμμάρια.

ΣΗΜ. Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους λαμβάνεται ὡς μονὰς βάρους τὸ ***καράτιον***, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 0,205 ἢ 0,2 γραμμ. περίπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 476) Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει ἡ ὀκᾶ καὶ πόσα ὁ στατήρ ;

477) Πόσον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ χιλιόγραμμον ;

478) Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ δράμιον καὶ πόσον μέρος τοῦ δραμίου εἶναι ἓν γραμμάριον ;

479) Πόσα δράμια ἔχει τὸ χιλιόγραμμον ;

480) Πρὸς πόσα χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦσι 456,3 ὀκάδες ;

481) Πόσας ὀκάδας ἔχουσι χ χιλιόγραμμα ; Πόσα δὲ χιλιόγραμμα ἔχουσιν α ὀκάδες ;

482) Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 46 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ χιλιόγραμμον αὐτοῦ ;

483) Τὸ χιλιόγραμμον ζαχχάρεως κοστίζει εἰς παντοπώλην

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

15 δραχμάς. Ἐὰν οὗτος πωλῇ αὐτὴν πρὸς 21,5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, κερδίζει ἢ ζημιώνεται καὶ πόσον τὴν ὀκᾶν ;

484) Τέσσαρα κιβώτια γεμάτα ἀπὸ ἐμπορεύματα ἔχουσι βάρος 3 τόννων. Ἕκαστον δὲ κενὸν ἔχει βάρος 23 ὀκάδων. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐμπορεύματος ;

§ 156. **Μονάδες χρόνου**. Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ***ἡμέρα*** (ἡμερονύκτιον), ἤτοι ὁ ***χρόνος μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της.***

Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (π) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (δ).

Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας εἶναι τὸ ***πολιτικὸν ἔτος***, ὁ ***μὴν*** καὶ ἡ ***ἑβδομάς***.

Τὸ πολιτικὸν ἔτος εἶναι ***κοινὸν*** καὶ ***δίσεκτον***. Ἕκαστον κοινὸν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας, ἕκαστον δὲ δίσεκτον 366 ἡμέρας.

Δίσεκτα εἶναι τὰ ἔτη, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται καὶ διὰ 100 εἶναι δίσεκτον, ἂν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ διαιρεῖται διὰ 4.

Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας, ὧν ἄλλοι ἔχουσι ἀπὸ 30 ἄλλοι ἀπὸ 31 ἡμέρας, ὁ δὲ Φεβρουάριος τῶν μὲν κοινῶν ἐτῶν ἔχει 28, τῶν δὲ δισέκτων 29 ἡμέρας. Εἰς τὰς ἐμπορικὰς ὅμως συναλλαγὰς ὅλοι οἱ μῆνες λογίζονται ἔχοντες ἀπὸ 30 ἡμέρας ἕκαστος· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐμπορικὸν ἔτος θεωρεῖται ἔχον 360 ἡμέρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 485) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ ὥρα καὶ πόσα ἡ ἡμέρα ;

486) Πόσας ὥρας ἔχει ἡ ἑβδομάς ; Πόσας δὲ ἑβδομάδας ἀποτελοῦσι 504 ὧραι ;

487) Πόσας ἡμέρας ἔχουσι 3 κοιναὶ καὶ ἓν δίσεκτον ἔτος ;

488) Πόσας ἑβδομάδας ἔχουσι 7 ἢ 14 ἢ 21 ἐμπορικὰ ἔτη ;

§ 157. **Μονάδες τόξων**. Συνήθης μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων εἶναι ἡ ***μοῖρα*** (°), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (″).

ΣΗΜ. Ἀπό τινων ἐτῶν γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ βαθμοῦ (ᵍ), ἤτοι τοῦ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 489) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ μοῖρα ; Πόσον δὲ μέρος τῆς μοίρας εἶναι τὸ δεύτερον λεπτόν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

490) Πόσον μοιρῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ περιφερείας ;

491) Πόσον μέρος τῆς μοίρας εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ μοίρας καὶ βαθμοῦ ;

492) Πόσον μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον 100^{γ} ; Πόσον δὲ βαθμῶν εἶναι τόξον 270° ;

§ 158. **Μονάδες νομισμάτων.** Ἡ Ἑλλὰς προσχωρήσασα (1868) εἰς τὴν λατινικὴν Νομισματικὴν Ἕνωσιν, ἣν ἀρχικῶς (1865) ἀπετέλεσαν ἡ Γαλλία, Ἰταλία, Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλγιον, παρεδέχθη ὡς ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων τὸ ***φράγκον***, τὸ ὁποῖον καλεῖται παρ' ἡμῖν ***δραχμή***. Αὕτη εἶναι νόμισμα βάρους 5 γραμμαρίων καὶ ἀποτελεῖται κατὰ τὰ 0,835 ἐξ ἀργύρου, κατὰ δὲ 0,165 ἐκ χαλκοῦ, ἤτοι ἔχει βαθμὸν καθαρότητος 0,835 (1).

Πλὴν ταύτης τὰ κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ἔκοψαν καὶ τὰ ἑξῆς ἀκόμη νομίσματα.

Α') ***Χρυσᾶ*** : 5δραχμον, 10δραχμον, εἰκοσάδραχμον, πεντηκοντάδραχμον, ἑκατοντάδραχμον. Πάντα ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ κράματος χρυσοῦ καὶ ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,900.

Β') ***Ἀργυρᾶ*** : 5δραχμον, δίδραχμον, 50λεπτον, εἰκοσάλεπτον, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐκ κράματος ἀργύρου καὶ χαλκοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,835 πλὴν τοῦ πενταδράχμου, οὗ ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900.

Γ') ***Χαλκᾶ*** : Διώδολον (δεκάρα), ὀβολὸς (πεντάρα), δίλεπτον, μονόλεπτον ἀποτελούμενα ἐξ 95 μερῶν χαλκοῦ, 4 μερῶν κασσιτέρου καὶ ἑνὸς μέρους ἀντιμονίου.

Ἐκ τούτων οὐδὲν ἤδη κυκλοφορεῖ παρ' ἡμῖν.

Ἀντ' αὐτῶν κυκλοφοροῦσι χαρτονομίσματα τῶν 50, 100, 500, 1000, 5000 δραχμῶν, δεκάλεπτα καὶ εἰκοσάλεπτα κέρματα ἐξ ἀλουμινίου καὶ κέρματα τῶν 50 λεπτῶν, 1 δραχ. καὶ 2 δραχμῶν ἐκ κράματος νικελίου καὶ χαλκοῦ. Τελευταίως ἐτέθησαν εἰς κυκλοφορίαν ἀργυρᾶ νομίσματα τῶν 20 δρ. καὶ 10 δρ., ὡς καὶ νικέλινα πεντάδραχμα. Ἐκ τούτων τὰ ἀργυρᾶ εἶναι κρᾶμα ἀργύρου 500 ‰, χαλκοῦ 400 ‰, νικελίου 50 ‰ καὶ ψευδαργύρου 50 ‰. Τὰ πεντάδραχμα εἶναι ἐκ καθαροῦ νικελίου.

Τὰ ἄλλα κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως, εἰς ἃ βραδύτερον προσεχώρησαν ἡ Σερβία, Ρουμανία, Βουλγαρία, Ἱσπανία κτλ.,

1. Γενικῶς τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητος κράματος καλεῖται τὸ εἰς ἑκάστην μονάδα βάρους περιεχόμενον βάρος τοῦ πολυτίμου μετάλλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Α΄. ΠΙΝΑΞ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Μονὰς μήκους	Μονάδες ἐπιφανειῶν	Μονάδες ὄγκου	Μονάδες χωρητικότητος
μέτρον (ἀρχ. μονὰς)	τετραγων. μέτρον (ἀρχ. μονὰς).	κυβικὸν μέτρον (ἀρχ. μονὰς)	λίτρα (ἀρχ. μονὰς)
(παλάμη=0,1 μέτρ.).	τετραγων. παλάμη=0,01 τ. μ.		ἑκατόλιτρον=100λ
(δάκτυλος=0,01 μ)	» δάκτυλος=0,0001 τ. μ.	κυβ. παλάμη= 0,001 κ. μ.	Τουρκικὸν κοιλὸν=35,37λ
(γραμμὴ=0,001 μ)	» γραμμὴ=0,000001 τ. μ.	κυβ. δάκτυλος= 0,000001 κ. μ.	μετρικὴ ὀκᾶ=1,28λ.
χιλιόμετρον=1000 μ.	» χιλιόμετρον=1000000τ.μ.	κυβ. γραμμὴ= 0,000000001 κ. μ.	
μυριάμετρον=10000 μ.	βασ. στρέμμα=1000 τ. μ.		
μ.π.Κ)πόλεως=0,648μ.	παλ. στρέμμα=1270 τ. μ.		
ρούπιον=$\frac{1}{8}$ π= 0,081 μ.	τεκτ. τετρ. πῆχυς=$\frac{9}{16}$ τ μ.		
τεκτ. πῆχυς=0,75μ.	ἄρ.=100 τ. μ.		
Γεωγ. λεύγα=4444,44μ	ἑκτάριον=10000 τ. μ.		
Ναυτικὴ λεύγα= 5555,55μ.			
Ναυτικὸν μίλιον= 1852,22μ.			
κόμβος=15,435μ.			
ὑάρδα=0,914μ.			
ποὺς=$\frac{1}{3}$ ὑαρ.= 0,3046μ.			
δάκτυλος=$\frac{1}{12}$ ποδ.=			

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'. ΠΙΝΑΞ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Μονάδες βάρους	Μονάδες τόξων	Μονάδες χρόνου
γραμμάριον (ἀρχ. μονὰς)	μοῖρα $=\frac{1}{360}$ περιφερείας	ἡμέρα (ἀρχ. μονὰς)
χιλιόγραμμον=1000 γρ.	$1' = \frac{1}{60}$ μοίρας	ὥρα $=\frac{1}{24}$ ἡμέρας
Τόννος 1000 χιλιόγρ.=1000000 γραμ.	$1'' = \frac{1}{60}$ π.	$1^{\pi} = \frac{1}{60}$ ὥρ.
ὀκᾶ=1280 γρ.	βαθμὸς $=\frac{1}{400}$ περιφ.	$1^{\delta} = \frac{1}{60}$ π.
δράμιον=3,2 γρ.	1′=0,01 βαθμοῦ	πολ. ἔτος κοινὸν=365 ἡμ.
στατὴρ=44 ὀκ.	1″=0,01 τοῦ 1′	πολ. ἔτος δίσεκτον=366 ἡμ.
χιλιόλιτρον Πελ.=375 ὀκ.		ἐμπορικὸν ἔτος=360 ἡμ.
ἀγγλικὴ λίτρα=453,25 γραμ.		ἐμπορικὸς μὴν=30 ἡμ.

Γ'. ΠΙΝΑΞ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

Κράτος Λ. Ἑνώσεως	Ἀρχικὴ μονὰς	Ἀγγλία	Γερμανία	Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι	Τουρκία
Ἑλλὰς	δραχμὴ=100 λεπτ.	Λίρ. στελ.=25,22 φρ.	Μάρκον=1,23 φρ.	δολλάριον=5,18 φρ.	Λίρα Τουρκίας 22,80 φρ.
Γαλλία	φράγκον			σέντς $=\frac{1}{100}$ δολ.	γρόσιον=0,01 λίρας
Βέλγιον	φράγκον	σελήνιον $=\frac{1}{20}$ λ.			Παρᾶς $=\frac{1}{40}$ γρ.
Ἑλβετία	φράγκον				
Ἰταλία	λιρέττα	πέννα $=\frac{1}{12}$ σ.			
Ρουμανία	λέϊ				
Σερβία	δινάριον	φαρδίνιον $=\frac{1}{4}$ π.			
Βουλγαρία	λέβι				

Ν. Δ. Νικολάου. Ἀριθμητική. Ἔκδοσις Δ'. 26/6/37
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχουσιν ἀρχικὴν μονάδα τὸ φράγκον, ὃ ἕκαστον ἔθνος ὀνομάζει μὲ ἴδιον ὄνομα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ ***Λίρα στερλίνα,*** ἡ ὁποία ἔχει 25,22 χρυσᾶ φράγκα. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 20 ***σελίνια,*** ἕκαστον σελίνιον διαιρεῖται εἰς 12 ***πέννας*** καὶ ἑκάστη πέννα εἰς 4 ***φαρδίνια.***

Πρὸ ὀλίγου χρόνου ἡ τιμὴ τῆς στερλίνας παρ' ἡμῖν ἦτο διὰ νόμου ὡρισμένη εἰς 375 δραχμάς. Ἤδη κατηργήθη ὁ νόμος οὗτος καὶ ἡ τιμὴ αὐτῆς κυμαίνεται ἀναλόγως τῆς προσφορᾶς καὶ ζητήσεως.

Εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ ***δολλάριον,*** τὸ ὁποῖον τιμᾶται 5,1825 χρυσᾶ φράγκα. Τὸ δολλάριον διαιρεῖται εἰς 100 ***σέντς.***

Εἰς τὴν Τουρκίαν ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ ***Τουρκικὴ λίρα*** (χρυσῆ) ἔχουσα 22,80 χρυσᾶ φράγκα. Αὕτη διαιρεῖται εἰς 100 ***γρόσια,*** ἕκαστον δὲ γρόσιον εἰς 40 ***παράδες.***

Ἐν Γερμανίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ ***μάρκον,*** ὅπερ ἔχει 1,23 φράγκα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 493) Πόσας δραχμὰς ἔχουσι 8,4 στερλίναι, ἐὰν ἑκάστη στερλίνα ἔχῃ 570,50 δραχμάς ;

494) Πόσας στερλίνας ἀποτελοῦσιν αἱ 2557,35 δραχμαὶ πρὸς 568,30 δραχ. τὴν στερλίναν ;

495) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 8 σελίνια. Πόσας δραχμὰς θὰ δόσωμεν διὰ 4 πήχεις ἀπὸ τὸ ὕφασμα τοῦτο μὲ τιμὴν τῆς στερλίνας 570 δραχμάς ;

496) Πόσας δραχμὰς ἔχει μία πέννα καὶ πόσα λεπτὰ τὸ ἓν φαρδίνιον μὲ τιμὴν στερλίνας 568,60 δραχμῶν ;

497) Πόσα μάρκα ἀγοράζομεν μὲ 236 χρυσᾶ φράγκα ;

498) Τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λ.Ν.Σ. ἐκανονίσθη οὕτως ὥστε εἰς ἀξίαν 1 φράγκου ἀντιστοιχεῖ βάρος 5 γραμμαρίων. Πόσον βάρος ἔχει τὸ ἀργυροῦν πεντάδραχμον, καὶ πόσον τὸ ἀργυροῦν δίδραχμον τῆς συμβάσεως ταύτης ;

499) Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 10 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα καὶ 20 ἀργυρᾶ δίδραχμα, πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ κράματος αὐτῶν ; Πόσον δὲ θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, τὸν ὁποῖον θὰ περιέχῃ τοῦτο ;

500) Ἕκαστον ἀργυροῦν εἰκοσάδραχμον ἀπὸ τὰ τελευταίως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τεθέντα εἰς κυκλοφορίαν ἔχει βάρος $11\frac{1}{3}$ γραμμάρια. Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 5 τοιαῦτα, πόσον καθαρὸν ἄργυρον θὰ περιέχῃ τὸ κράμα ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΟΙ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 159. **Ὁρισμὸς συμμιγοῦς ἀριθμοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐμετρήσαμεν μὲ τὸν μικρὸν πῆχυν Κ)πόλεως μίαν πλευρὰν τοῦ πατώματος δωματίου καὶ εὕρομεν ὅτι ὁ μ. π. Κ. χωρεῖ εἰς αὐτὴν 4 φοράς, περισεύει δὲ καὶ ἓν μέρος ταύτης, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ρούπιον χωρεῖ 3 φοράς. Τὸ μῆκος λοιπὸν τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι 4 πήχεις καὶ 3 ρούπια. Ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶναι ἀριθμὸς συγκείμενος ἀπὸ δύο μέρη· ἕκαστος τούτων γίνεται ἀπὸ ἰδιαιτέραν μονάδα, ἡ μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς εἶναι πολ)σιον τῆς ἄλλης καὶ ἑκάστη ἔχει ἴδιον ὄνομα.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος 4 πήχ. 3 ρούπ. λέγεται ***συμμιγὴς ἀριθμός***.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 3 στατ. 12 ὀκ. 150 δράμ. καὶ 3 ὧραι 12 π. 20 δ. εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοί.

Γενικῶς : *Συμμιγὴς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς συγκεκριμένος ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολ)σια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος, ἑκάστη δὲ ἔχει ἴδιον ὄνομα.*

Πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συμμιγῶν οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν μονάδα ἢ καὶ μέρη αὐτῆς, λέγονται ***ἁπλοῖ*** ἀριθμοί. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 15 λίραι, $7\frac{3}{8}$ πήχεις, 5,35 δραχμαὶ εἶναι ἁπλοῖ ἀριθμοί.

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν καὶ τἀνάπαλιν.

§ 160. **Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τελευταίας τάξεως.** Βάρος 2 στατ, 7 ὀκ, 150 δραμίων ἐκτιμῶμεν εἰς δράμια ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 2 στ. ἔχουσι $44 \times 2 = 88$ ὀκ, τὸ βάρος εἶναι $(88+7)$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὀκ. καὶ 150 δράμια ἢ 95 ὀκ. καὶ 150δ ράμια.

Ἐπειδὴ δὲ 95 ὀκάδες ἔχουσι 400×95=38000 δραμ, ἔπεται ὅτι 95 ὀκ, 150 δραμ.=38000+150= 38150 δράμια.

Ἀπὸ ταῦτα ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ συμμιγὴς γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.

Διάταξις τῆς πράξεως

2 στ. 7 ὀκ. 150 δράμ.

44 ὀκ.

88

7

95

400

38000 δράμ.

150

38150 δράμ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 501) Πόσα δράμια ἔχουσι 12 ὀκ. καὶ 180 δράμια ;

502) Πόσα ρούπια ἔχουσιν 20 πήχεις καὶ 2 ρούπια ;

503) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχουσι 2 ὧραι, 10^{π}, 42^{δ} ;

504) Πόσα δεύτερα λεπτὰ περιέχουσι $3^{o}40'15''$;

505) Πόσα φαρδίνια ἔχουσι 3 στερλ 10 σελ. 5 πεν. 2 φαρδίνια ;

506) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχουσι 3 ἡμ. 11 ὥρ, 17^{π}, 23^{δ} ;

§ 161. **Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν μονάδων τάξεως διαφόρου τῆς τελευταίας.** Ὁ χρόνος $2^{\text{ὥρ}}\cdot 15^{\pi}\,20^{\delta}=8120^{\delta}$. Ἵνα ἐκτιμήσωμεν αὐτὸν εἰς πρῶτα λεπτὰ ἢ εἰς ὥρας σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

α') Ἐπειδὴ $1^{\delta}=\frac{1^{\pi}}{60}$, ἔπεται ὅτι $8120^{\delta}=\frac{8120^{\pi}}{60}$.

β') Ἐπειδὴ 1 ὥρα=60×60=3600^{δ}, εὑρίσκομεν ὅτι

$$8120^{\delta}=\frac{8120}{3600}\ \text{ὥρας}.$$

Ὥστε $2^{\text{ὥρ}}\cdot 15^{\pi}\,20^{\delta}=8100^{\delta}=\frac{8120^{\pi}}{60}=\frac{8120}{3600}$ ὥρας

Ἄρα : *Ἕκαστος συμμιγὴς τρέπεται εἰς κλάσμα μονάδων πάσης τάξεως, πλὴν τῆς τελευταίας. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχει ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν τῶν μονάδων τελευταίας τάξεως, εἰς ὃν τρέπεται ὁ συμμιγής, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δηλοῖ πόσαι μονάδες τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ὁρισθείσης τάξεως.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ κλάσμα περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, ἐξάγομεν αὐτάς, ἂν θέλωμεν νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς εἰς μικτὸν ἁπλοῦν ἀριθμόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 507) Πόσους πήχεις ἀποτελοῦσι 7 πήχεις καὶ 5 ρούπια ;

508) Πόσσς ὀκάδας καὶ πόσους στατῆρας ἀποτελοῦσι 6 στατ. 20 ὀκ. 200 δράμια ;

509) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον 50′ 35″ ἢ τόξον 25° 35′ 45″ ;

510) Ὁ συμμιγὴς 5 στερ, 15 σελ, 10 πεν, 2 φαρ, νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα πέννας, σελινίου, λίρας.

511) Ὁ συμμιγὴς 2 ἡμ, 10 ὥρ, 20ˣ, 30ˢ νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τῆς ὥρας καὶ τῆς ἡμέρας.

§ 162. **Τροπὴ συγκεκριμένου ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.** Ἐὰν φιλόπτωχος ἀδελφότης διανείμῃ ἀπὸ 300 δράμια ὀρύζης εἰς ἑκάστην ἀπὸ τὰς 105 πτωχὰς οἰκογενείας συνοικισμοῦ, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ διανείμῃ τὸ ὅλον 300×105=31500 δράμια. Ταῦτα ἀποτελοῦσι τόσας ἀκεραίας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωροῦσι τὰ 400 δράμια εἰς τὰ 31500 δράμια, ἤτοι 78 ὀκάδας, περισσεύουσι δὲ καὶ 300 δράμια. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι 78 ὀκ.=1 στατ. καὶ 34 ὀκάδες. Ὥστε 31500 δράμ.=1 στατ. 34 ὀκ. 300 δράμ.

Διάταξις τῆς πράξεως

31500 δρ.	400
3500	78 ὀκ. | 44
300 δρ.	34 ὀκ. 1 στ.

Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν τὸν σχετικὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 512) Πόσους πήχεις καὶ ρούπια ἀποτελοῦσι τὰ 141 ρούπια ;

513) Πόσας μοίρας, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἀποτελοῦσι 18737″ ;

514) Πόσας ἡμέρας, ὥρας πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ ἀποτελοῦσι 297618ˢ ;

515) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν 8945 φαρδίνια.

§ 163. **Τροπὴ συγκεκριμένου κλάσματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.** Ἐὰν πέντε οἰκογενειάρχαι ἀγοράσωσιν 17 στατῆρας ἀλεύρου καὶ μοιράσωσιν αὐτὸ ἐξ ἴσου, θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς $17 \text{ στ} : 5 = \frac{17}{5}$ στ. Ἐὰν ὅμως διαιρέσωμεν τοὺς 17 στ. διὰ 5, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος λαμβάνει 3 στατῆρας, περισσεύουσι δὲ καὶ 2 στατ.=44 ὀκ ×2=88 ὀκ. Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνει ἕκαστος ἀπὸ 17 ὀκ. περισσεύουσι δὲ καὶ 3 ὀκάδες=400 δράμ.×3=1200 δρά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μια. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ λαμβάνει ἕκαστος ἀπὸ 1200 : 5 = 240 δράμια.

Ἑπομένως $\frac{17}{5}$ στατ. = 3 στατ, 17 ὀκ. 240 δράμ.

Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 516) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{13}{5}$ ἡμέρας καὶ ὁ ἀριθμὸς $7\frac{5}{8}$ ἡμέραι.

517) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{5}$ στερλίνας καὶ ὁ $3\frac{7}{8}$ στερλίναι.

Διάταξις τῆς πράξεως

17 στ.	5
2 στ.	3στ.17ὀκ. 240δρ.
44	
88 ὀκ.	
38	
3 ὀκ.	
400	
1200	
0	

518) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ὁ ἀριθμὸς $1\frac{1}{3}$ ὑάρδαι.

Πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν.

§ 164. **Α΄. Πρόσθεσις.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία οἰκογένεια ἔκαυσε τὴν α΄ τριμηνίαν ἑνὸς ἔτους 4 στατ. 15 ὀκ. 200 δράμ. ἀνθράκων, τὴν β΄ 3 στ. 20 ὀκ. 100 δράμ., τὴν γ΄ 1 στατ. 25 ὀκ. 150 δρ. καὶ τὴν δ΄ 5 στ. 18 ὀκ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλον τὸ ἔτος τοῦτο ἔκαυσεν.

$$(4^{\text{στ.}}15^{\text{ὀκ.}}200^{\text{δραμ.}})+(3^{\text{στ.}}20^{\text{ὀκ.}}100^{\text{δρ.}})+(1^{\text{στ.}}25^{\text{ὀκ.}}150^{\text{δρ.}})+(1^{\text{στ.}}8^{\text{ὀκ.}}).$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ

(4+3+1+5) στατ,
(15+20+25+18) ὀκ,
καὶ (200+100+150) δράμ.
ἢ $13^{\text{στ.}}\ 78^{\text{ὀκ.}}\ 450^{\text{δράμ.}}$

Διάταξις τῆς πράξεως

4 στ. 15 ὀκ. 200 δραμ.
3 στ. 20 ὀκ. 100 δραμ.
1 στ. 25 ὀκ. 150 δραμ.
5 στ. 18 ὀκ.
13 στ. 78 ὀκ. 450 δράμ.
13 στ. 79 ὀκ. 50 δράμ.
14 στ. 35 ὀκ. 50 δράμ.

Ἐπειδὴ δὲ 450 δρ. = 1 ὀκ, καὶ 50 δράμ, ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς γίνεται 13 στ. 79 ὀκ. 50 δρ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ 79 ὀκ = 1 στ, 35 ὀκ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος γίνεται 14 στ. 35 ὀκ. 50 δράμ. Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 519) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος ἔμπορος ἐπώλησε μίαν ἡμέραν 12 πήχ. 6 ρούπ, τὴν ἄλλην 15 π. 7 ρ. τὴν ἄλλην 27 π. 2 ρ. καὶ τὴν ἑπομένην 30 π, 4 ρ. Οὕτω δὲ ἔμειναν ἀκόμη 6 π, 2 ρ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ τεμάχιον ;

520) Ἠγόρασέ τις 2 στ., 12 ὀκ. καφὲ καὶ ἔδωκε 6490 δραχμὰς καὶ 70 λεπτά· τὴν ἄλλην ἡμέραν ἠγόρασε καὶ ἄλλους 5 στ., 20 ὀκ., 200 δράμ. ἀντὶ 1536 δραχμῶν καὶ 50 λεπ. Πόσον καφὲν ἠγόρασε τὸ ὅλον καὶ πόσα χρήματα ἔδοσε δι' αὐτόν ;

521) Κιβώτιον κενὸν ἔχει βάρος 12 ὀκ. καὶ 150 δράμια· χωρεῖ δὲ ἐμπόρευμα βάρους 1 στατ, 35 ὀκ, 300 δραμ. Πόσον βάρος ἔχει, ὅταν εἶναι πλῆρες ἀπὸ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο ;

§ 165. **Ἀφαίρεσις.** Ἐὰν αὐτοκίνητον ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας τὴν $7^{ώρ.}\ 20^{π.}\ 15^{δ.}$ π. μ. φθάσῃ εἰς Θήβας τὴν $10^{ώρ.}\ 30^{π}\ 20^{δ}$ π. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας, ἐχρειάσθη διὰ τὸ ταξείδιον τοῦτο $(10^{ώρ.}\ 30^{π}\ 20^{δ}) - (7^{ώρ.}\ 20^{π}\ 15^{δ})$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πρῶτον τὰ $15^{δ}$, μένουσι $10^{ώρ}\ 30^{π}\ 5^{δ}$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν τὰ $20^{π}$, μένουσι 10 ὥρ, 10π, 5δ. καὶ ἂν ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν τὰς 7 ὥρας, μένουσι 3 ὥρ, 10 π, 5 δ.

Διάταξις τῆς πράξεως
10 ὥρ, 30 π. 20 δ.
7 ὥρ, 20 π, 15 δ.
3 ὥρ, 10 π. 5 δ.

Ἐὰν ἔφθανεν εἰς τὰς 10ὥρ, 10π, $20^{δ}$, ἐπειδὴ τὰ $20^{π}$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 10 π, αὐξάνομεν ταῦτα κατὰ $60^{π}$ καὶ τὰς 7 ὥρ. κατὰ 1 ὥραν.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $2ὥρ\ 50^{π}, 5^{δ}$. Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Διάταξις τῆς πράξεως
70
$10ὥρ\ 10^{π}\ 20^{δ}$
$8ὥρ\ 20^{π}\ 15^{δ}$
$2ὥρ\ 50^{π}\ 5^{δ}$

ΣΗΜ. Ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰς 10 ὥρας μίαν ὥραν, τὴν ὁποίαν νὰ προσθέσωμεν μὲ τὰ $10^{π}$. Οὕτως ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(9ὥρ\ 70^{π}\ 20^{δ}) - (7ὥρ\ 20^{π}\ 15^{δ})$, ἥτις γίνεται κατὰ τὸ α' παράδειγμα.

Ὁμοίως $5ὥρ. - (3ὥρ\ 20^{π}\ 15^{δ}) = (4ὥρ\ 59^{π}\ 60^{δ}) - (3ὥρ\ 20^{π}\ 15^{δ}) = 1ὥρ\ 39^{π}\ 45^{δ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 522) Κιβώτιον κενὸν μὲν ζυγίζει 5 ὀκ. 250 δρ, πλῆρες δὲ ἐμπορεύματος ζυγίζει 1 στ., 12 ὀκ., 300 δράμ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον περιέχει ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

523) Τρία τόξα περιφερείας εἶναι κατὰ σειρὰν 35°26′40″, 45°18′12″, 7°40′12″. Πόσον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον μέρος τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται ;

524) Ἀπὸ τεμάχιον ὑφάσματος 75 πήχ. ἐπωλήθησαν 12 πήχ. 3 ρ. ἔπειτα 16 πήχ., 4 ρούπ. καὶ τέλος 22 πήχ., 5 ρούπ. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν ;

525) Μαθητὴς ἐγεννήθη τὴν 7 Μαρτίου 1918. Πόσην ἡλικίαν εἶχε τὴν 20ην Μαΐου 1930 ;

526) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς 7ῶρ. 12π. 20δ. π. μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

527) Πόσος χρόνος εἶναι ἀπὸ τῆς 6ῶρ, 40π, 30δ μ. μ. μέχρι τῆς 3ῶρ, 10π, 20δ μ. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

Γ′. ΠΟΛ)ΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

§ 166. **Πολ)σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον. Πρόβλημα.** *Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου καὶ διανύει εἰς 1ᵃ τόξον 12°17′22″. Πόσον τόξον διανύει εἰς 3ᵃ ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ εἰς 1ᵃ διατρέχει 12°17′22″, εἰς 3ᵃ θὰ διατρέχῃ (12° 17′ 22″)×3=(12° 17′ 22″)+(12° 17′ 22″)+(12° 17′ 22″) = (12°+12°+12°)+(17′+17′+17′)+(22″+22″+22″)

ἢ (12°17′22″)×3=(12°×3)+(17′×3)+(22″×3)=36°51′66″

=36°52′6″.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

Διάταξις τῆς πράξεως		
12°	17′	22″
		3
36°	51′	66″
36°	52′	6″

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 528) Μία οἰκογένεια χρειάζεται 2 στατ, 12δκ, 300 δράμια ἀλεύρου τὸν μῆνα. Πόσον ἄλευρον χρειάζεται τὸ ἔτος ;

529) Ἀμαξοστοιχία διανύει 1 χιλιόμετρον εἰς 2π. 30δ. Εἰς πόσον χρόνον διανύει 18 χιλιόμετρα ;

530) Ἐργάτης λαμβάνει 15 πεντάδρ, 2 δραχ, 60 λεπτ. τὴν ἡμέραν. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 12 ἡμέρας ;

§ 167. **Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου** (μερισμός). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 3 πτωχὰς οἰκογενείας 7 στατ, 16 δκ. 300 δράμ. ἀλεύρου. Ἂν μοιράσωμεν πρῶτον τοὺς 7 στατῆρας, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 2 στατῆρας καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ 1 στατήρ, ὁ ὁποῖος μὲ τὰς 16δκ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀποτελεῖ 44+16=60 ὀκ. Ἂν μοιράσωμεν καὶ αὐτάς, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 20 ὀκ. ἀκριβῶς. Ἂν δὲ τέλος μοιράσωμεν καὶ τὰ 300 δράμια, θὰ δόσωμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ 100 δράμια. Ὥστε κάθε μία οἰκογένεια θὰ λάβῃ ἀπὸ 2 στατ, 20 ὀκ, 100 δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως.

7 στατ. 16 ὀκ. 300 δρ. | 3

1 στ. — 2 στ. 20 ὀκ. 100 δρ.

44

44 ὀκ.

16

60 ὀκ.

300 δρ.

0

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι διατυπώνομεν εὐκόλως τὸν σχετικὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 531) Οἰκογένεια τρώγει 29 ὀκ, 225 δράμ. ἄρτου εἰς μίαν ἑβδομάδα. Πόσου ἄρτον τρώγει τὴν ἡμέραν ;

532) Ὡρολόγιον εἰς 12 ὥρας ἔμεινεν ὀπίσω 25 π. 46 δ. Πόσον μένει ὀπίσω τὴν ὥραν ;

533) Οἰκογένεια ἔκαυσε κατὰ τοὺς 3 μῆνας τοῦ χειμῶνος 4 στατ., 3 ὀκ , 100 δρ. ἀνθράκων. Πόσοι ἄνθρακες ἀντιστοιχοῦσι κατὰ μῆνα ;

534) Πατὴρ ἀφῆκεν εἰς τοὺς 2 υἱούς του καὶ τὴν θυγατέρα του 1560 λίρας καὶ 12 σελ. Παρήγγειλε δὲ διὰ τῆς διαθήκης του νὰ λάβῃ ἡ θυγάτηρ του 50 λίρας περισσότερον ἀπὸ κάθε υἱόν. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον ;

§ 168. **Πολ)σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα. Πρόβλημα.** *Ἀποθήκη δυναμένη νὰ περιλάβῃ τὸ ὅλον 40 στατ, 25 ὀκ. περιέχει σῖτον μέχρι τῶν* $\frac{3}{4}$ *αὐτῆς. Πόσον σῖτον περιέχει ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ ὅλη ἡ ἀποθήκη χωρεῖ 40 στατ, 25 ὀκ, τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς χωρῇ (40 στατ, 25 ὀκ.) : 4 ἢ $\frac{40 \text{ στατ, } 25 \text{ ὀκ.}}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς θὰ χωρῶσι $\frac{4 \text{ στατ, } 25 \text{ ὀκ.}}{4} \times 3$. Τὴν πρᾶξιν ταύτην καλοῦμεν, (§ 122) πολ)σμὸν τοῦ (40 στατ, 25 ὀκ.) ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε (40 στατ, 25 ὀκ)$\times \frac{3}{4} = \frac{40 \text{ στατ. } 25 \text{ ὀκ.}}{4} \times 3 =$

$\frac{40 \text{ στ, } 25 \text{ ὀκ.}}{4} + \frac{40 \text{ στ, } 25 \text{ ὀκ.}}{4} + \frac{40 \text{ στ, } 25 \text{ ὀκ.}}{4} =$

$\frac{(40 \text{ στ. } 25 \text{ ὀκ.}) \times 3}{4} =$ 30 στατ, 18 ὀκ, 300 δράμια.

Ἄρα : Ἡ ἰσότης $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha \times \mu}{\nu}$ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ πολ)στέος α εἶναι τυχὸν συμμιγής. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὸν σχετικὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 535) Δι' ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 4 πήχ. 2 ρούπ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, διὰ δὲ παιδικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ τὴν παιδικὴν ἐνδυμασίαν ;

536) Τόξον περιφερείας εἶναι 119° 39′ 12″. Πόσον εἶναι τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ ;

537) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς 8 ὥρ., 15′, 20″. Εἰς πόσον χρόνον ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ ;

538) Οἰκογένεια εἰς ἕνα μῆνα ἔκαυσε 1 στ. 26ὀκ., 200 δράμ. ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσεν εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μηνός ;

539) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος 158 ὑαρδῶν ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{7}{21}$. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν ;

540) Ἠγόρασέ τις 3 στατ, 20 ὀκάδ. ἀνθράκων· τὸ $\frac{1}{8}$ τούτων ἦτο κόνις. Πόσον ἦτο τὸ βάρος τῶν καθαρῶν ἀνθράκων;

§ 169. **Πολ)σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ μικρόν. Πρόβλημα.** Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 10 σελ, 8 πεν, 2 φαρδ. Πόσον τιμῶνται 4 $\frac{3}{8}$ πήχεις ἀπὸ αὐτό ;

Λύσις. Α′). Ἀφ' οὗ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχ. εἶναι 10 σελ. 8 πεν, 2 φ, ἡ τιμὴ τῶν 4 $\frac{3}{8}$ πήχ. θὰ εἶναι (10 σελ, 8 πεν, 2φ)$\times 4\frac{3}{8}$ =(10 σελ, 8 πεν, 2 φαρδ.)$\times \frac{35}{8}$ =2 λίρ, 6 σελ, 10 πεν, $\frac{3}{4}$ φ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Β'). Οἱ 4 πήχεις τιμῶνται (10 σελ, 8 πεν, 2 φ)×4=2 λίρ, 2 σελ, 10 πεν. Τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ πήχ. τιμῶνται

(10σ, 8π, 2φ) × $\frac{3}{8}$=4 σελ, 0π, $\frac{3}{4}$φ. Ἄρα οἱ $4\frac{3}{8}$ πήχεις τιμῶνται 2λ, 2σ, 10π,+4σ, 0π, $\frac{3}{4}$ φ,=2 λ, 6 σελ, 10π,$\frac{3}{4}$ φαρ.

Κατὰ ταῦτα (10 σελ, 8 πεν, 2 φαρδ.) ×$4\frac{3}{8}$ =10 σελ, 8π, 2φ,)×4+(10 σελ, 8 πεν, 2 φ,)× $\frac{3}{8}$.

Ἄρα: Αἱ ἰσότητες $\alpha\times\left(\delta+\frac{\mu}{\nu}\right)=\alpha\times\frac{\nu\times\delta+\mu}{\nu}$

καὶ $\alpha\times\left(\delta+\frac{\mu}{\nu}\right)=(\alpha\times\delta)+\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right)$ ἰσχύουσι καὶ ὅταν ὁ α εἶναι τυχὸν συμμιγής. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ τὸν σχετικὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 541) Κιβώτιον περιέχει 34 ὀκ. 250 δράμ. σάπωνος. Πόσον σάπωνα περιέχουσι 5 τοιαῦτα κιβώτια γεμάτα καὶ ἓν γεμάτον κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ;

542) Εἰς κάθε στρέμμα ἀγροῦ εἶναι ἀνάγκη νὰ ριφθῇ λίπασμα 20 ὀκ, 300 δραμίων. Πόσον λίπασμα χρειάζεται δι' ἀγρὸν $8\frac{5}{6}$ στρεμάτων;

543) Διὰ τὴν καλλιέργειαν 1 στρέμματος ἀμπέλου πρέπει νὰ ἐργασθῶσιν ἐργάται τινὲς 2 ἡμ, 6 ὥρ. Εἰς πόσον χρόνον οὗτοι δύνανται νὰ καλλιεργήσωσιν ἄμπελον $12\frac{3}{4}$ στρεμμάτων; (1 ἐργάσιμος ἡμέρα ἔχει 8 ὥρας).

544) Κινητὸν ἐπὶ περιφερείας κινούμενον διανύει εἰς ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας τόξον 20° 18' 30''. Πόσον τόξον διανύει εἰς $3\frac{5}{8}$ πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας;

§ 170. **Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.** (μερισμός).

Πρόβλημα. *Τὰ* $\frac{3}{4}$ *τῆς ἀποστάσεως τῆς Κορίνθου ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν διατρέχει αὐτοκίνητον εἰς 2ὥρ 15π. 21 δ. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει ὅλην τὴν ἀπόστασιν ταύτην;*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις. Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὸν χρόνον τοῦτον καὶ ἐπολαπ]μεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν 2 ὥρ, 15π, 21δ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν χρόνος εἶναι (2 ὥρ, 15π, 21 δ) : $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὸν χρόνον τοῦτον εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἴσον πρὸς $\frac{2\text{ὥρ, }15\pi\text{, }21\delta.}{3}\times 4$ ἢ (2 ὥρ. 15π. 21δ)$\times\frac{4}{3}$. Ὀφείλομεν λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι

$$(2\text{ὥρ. }15\pi\text{, }21\delta) : \frac{3}{4}=(2\text{ὥρ }15\pi\text{, }21\delta)\times\frac{4}{3}=3\text{ ὥρ, }0\pi\text{, }28\delta.$$

Ἄρα : Ἡ ἰσότης $\alpha : \frac{\mu}{\nu}=\alpha\times\frac{\nu}{\mu}$ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ α εἶναι συμμιγής. Ὁ δὲ σχετικὸς κανὼν διατυποῦται εὐκόλως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 545) Τὰ $\frac{5}{8}$ σώματος ἔχουσι βάρος 10δκ, 100 δράμ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου ;

546) Τὰ $\frac{5}{8}$ τεμαχίου ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος 26 ὑάρ, 2 ποδ. 10 δακ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ὅλου τοῦ τεμαχίου τούτου ;

547) Τὰ $\frac{4}{9}$ τόξου εἶναι 20°32′40″. Πόσον εἶναι ὅλον τὸ τόξον τοῦτο ;

§ 171. **Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ μικτοῦ** (μερισμός). **Πρόβλημα.** *Ἠγόρασέ τις ἐν Λονδίνῳ* $3\frac{5}{8}$ *πήχεις ὑφάσματος καὶ ἔδωκε* 1 *στερλ,* 6 *πέν,* 2*φ. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;*

Λύσις. Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ 1 πήχεως καὶ ἐπολ]ζομεν αὐτὴν ἐπὶ $3\frac{5}{8}$, ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν 1 στερ. 6 πέν, 2 φ. Ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι λοιπὸν (1 στ, 6 π, 2 φ,) : $3\frac{5}{8}$. Ἐπειδὴ δὲ $3\frac{5}{8}$ πήχ, $=\frac{29}{8}$ πήχ, ὁ πῆχυς τιμᾶται

$$(1\text{ στ. }6\text{ πέν. }2\text{ φ}) : \frac{29}{8}=5\text{ στερ. }8\text{ πέν.}$$

Ἄρα : Ἡ ἰσότης $\alpha : (\delta+\frac{\mu}{\nu})=\alpha : \frac{\delta.\nu+\mu}{\nu}$ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ α εἶναι συμμιγής. Ὁ σχετικὸς δὲ κανὼν διατυποῦται εὐκόλως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΗΜ. Κάθε μία ἀπὸ τὰς προηγουμένας διαιρέσεις (§ 167, 170, 171) εἶναι μερισμὸς καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 548) Διὰ $2\frac{3}{4}$ ὀκάδας τυροῦ ἔδωκέ τις 100 δρ. καὶ 65 λεπ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

549) Ὡρολόγιον εἰς $5\frac{4}{8}$ ὥρας ὑστέρησε $12^{\text{λ}}$ καὶ $6^{\text{δ}}$. Πόσον ὑστέρησε τὴν ὥραν ;

550) Κινητὸν εἰς $7\frac{1}{4}$ ὥρας διέτρεξε τόξον $60^{\circ}\ 28'\ 52''$. Πόσον τόξον διατρέχει τὴν ὥραν ;

551) Μὲ $2\frac{1}{2}$ στερλίνας ἠγόρασέ τις ἐν Λονδίνῳ 6 ὑάρ, 1π, 6 δ. ὑφάσματος. Πόσον ὕφασμα ἀγοράζει μὲ μίαν στερλίναν ;

552) Οἰκογένεια εἰς $2\frac{3}{5}$ μῆνας ἔκαυσε 9 στ, 3ὀκ, 150 δράμ. ἀνθράκων. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσε κατὰ μῆνα ;

Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.

α') Πολ]σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

§ 172. **Πρόβλημα.** *Ἀρτοποιὸς διαθέτει διὰ τὴν κατασκευὴν ἄρτου 2 στατ, 33 ὀκ, 350 δράμ, ἀλεύρου τὴν ἡμέραν. Πόσον ἄλευρον διαθέτει τὸν μῆνα ;*

Λύσις. Ἀφ' οὗ εἰς 1 ἡμ. διαθέτει 2 στατ, 33 ὀκ, 350 δράμ,
εἰς 30 ἡμ. » (2στατ, 33ὀκ, 350δράμ)×30.

Τὸ γινόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 166) τρόπον καὶ ὡς ἑξῆς ἀκόμη.

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἄλευρον διαθέτει εἰς 30 ἡμέρας, ἂν διέθετε μόνον 2 στατ. τὴν ἡμέραν, ἤτοι 2 στατ.×30=60 στατ.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν πόσον ἄλευρον διαθέτει τὸν μῆνα πρὸς 33 ὀκ. τὴν ἡμέραν. Πρὸς τοῦτο, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν διὰ μιᾶς τὸ γινόμενον 33 ὀκ.×30 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Χωρίζομεν τὰς 33 ὀκ. εἰς 22 ὀκ.$=\frac{1}{2}$ στατ. καὶ εἰς 11 ὀκ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 22 ὀκ. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν διέθετε 1 στατ. τὴν ἡμέραν, εἰς τὰς 30 ἡμέρας θὰ διέθετε 30 στατ. Ἐὰν δὲ διαθέτῃ 22 ὀκ. ἢ $\frac{1}{2}$ στατ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὰς 30 ἡμέρας θὰ διαθέτῃ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 30 στατ, ἤτοι 15 στατ.

Πρὸς 11 ὀκ. δὲ τὴν ἡμέραν θὰ διαθέτῃ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 15 στατ, ἤτοι 7 στατ. καὶ 22 ὀκ.

Ἔπειτα θὰ εὕρωμεν πόσον ἄλευρον διαθέτει εἰς τὰς 30 ἡμέρας πρὸς 350 δράμια τὴν ἡμέραν.

Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν τὰ 350 δράμ. εἰς 200 δράμ.$=\frac{1}{2}$ ὀκ. εἰς 100 δράμ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμίων καὶ εἰς 50 δράμ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμίων. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εἰς 30 ἡμέρας ἀπὸ 1 ὀκ. τὴν ἡμέραν θὰ διέθετε 30 ὀκ, ἄρα ἀπὸ 200 δράμ. ἤ $\frac{1}{2}$ ὀκ. θὰ διαθέτῃ $\frac{30 \text{ ὀκ.}}{2}=15$ ὀκ.

Ἀπὸ 100 δράμ. ἤ $\frac{1}{2}$ τῶν 200 δρ. τὴν ἡμέραν, θὰ διαθέτῃ εἰς 30 ἡμ. τὸ 1]2 τῶν 15 ὀκ. ἤτοι 7 ὀκ, 200 δράμ.

Καὶ ἀπὸ 50 δράμια τὴν ἡμέραν θὰ διαθέτῃ εἰς 30 ἡμέρας τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 7 ὀκ. 200 δρ. ἤτοι 3 ὀκ. 300 δρ.

Τέλος προσθέτομεν ἕλα τὰ εὑρεθέντα βάρη καὶ εὑρίσκομεν ὅτι διαθέτει εἰς 30 ἡμέρας ἄλευρον 83 στατ, 4 ὀκ. καὶ 100 δράμ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	30	2 στατ.	33 ὀκ.	350 δράμ.
ἀπὸ 2 στατ. τὴν ἡμέραν	60			
ἀπὸ 33 ὀκ. 22 ὀκ $=\frac{1}{2}$ στατ.	15			
11 ὀκ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 22 ὀκ.	7	22 ὀκ.		
ἀπὸ 350 δράμ. 200 δράμ.$=\frac{1}{2}$ ὀκ.	0	15 ὀκ.		
100 δράμ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ.	0	7	200 δρ.	
50 δράμ.$=\frac{1}{2}$ τῶν 100 δράμ.	0	3	300	
		83 στατ.	4 ὀκ.	100 δραμ.

Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ πολ)σμοῦ προτιμᾶται ἰδίᾳ, ὅταν ὁ πολ)στὴς εἶναι μέγας ἀριθμός.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ τὰ διάφορα μέρη τοῦ πολ)στέου χωρίζονται εἰς ἁπλᾶ μέρη (ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον κτλ.) μονάδος ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὁ τρόπος οὗτος λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν***.

β΄. Πολ)σμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

§ 173. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ σάπωνος τιμᾶται 24 δρ. καὶ 60 λεπ. Πόσον τιμῶνται 10 ὀκ, 300 δράμια ἀπὸ αὐτόν ;*

Λύσις. Α΄) Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν 10 ὀκ. πρὸς 24 δρ. καὶ 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον. Ἔπειτα διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 300 δραμίων, χωρίζομεν αὐτὰ εἰς 200 δράμια$=\frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ εἰς 100 δράμια$=\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφ' οὗ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 24 δραχ, 60 λεπ, τὰ 200 δραμ ἤ $\frac{1}{2}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται (24 δ, 60 λ.) : 2=12 δρ. 30 λ, τὰ δὲ 100 δράμ$=\frac{1}{4}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται (24 δραχ, 60 λεπ) : 4=6 δρ. 15 λεπ.

Τέλος προσθέτομεν ὅλας τὰς μερικὰς ταύτας τιμὰς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 10 ὀκ. 300 δράμ. τιμῶνται 264 δραχ, 45 λεπτά.

Καὶ ὁ τρόπος οὗτος, κατὰ τὸν ὁποῖον εὕρομεν τὸ ζητούμενον καλεῖται πολ)σμὸς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Διάταξις τῆς πράξεως

	24 δρ. 10 ὀκ.	60 λεπ. 300 δράμ.
πρὸς 24 δραχ.	240 δραχ.	
» 50 λ.$=\frac{1}{2}$ δραχ.	5	
» 10 $=\frac{1}{10}$ δραχ.	1	
τῶν 200 δράμ.$=\frac{1}{2}$ ὀκ.	12	30 λεπ.
» 100 » $=\frac{1}{4}$ ὀκ.	6	15
ἀξία 300 δρ. ἀξία 10 ὀκ.	264 δραχ.	45 λεπ.

Β΄) Ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 24 δραχ. 60 λεπ, αἱ δὲ 10 ὀκ. 300 δρ.$=10\frac{3}{4}$ ὀκ, τὸ ζητούμενον εἶναι (24 δραχ, 60 λεπ.)$\times 10\frac{3}{4}$ =264 δραχ. 45 λεπτά.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε : Διὰ νὰ πολ)σωμεν συμμιγῆ ἐπὶ συμμιγῆ, ἐκτελοῦμεν τὸν πολ)σμὸν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ἢ τρέπομεν τὸν πολ)στὴν εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τῆς τάξεως, τῆς ὁποίας μία μονὰς ἀντιστοιχεῖ πρὸς ὅλον τὸν πολ)στέον. Ἔπειτα δὲ πολ)ζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἁπλοῦν τοῦτον ἀριθμόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 553) Γεωργὸς ἐπώλησε 564 ὀκάδας σίτου πρὸς 6 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ;

554) Ἡ ὀκᾶ καφὲ τιμᾶται 64 δραχ, 80 λεπ. Πόσον τιμῶνται 5 ὀκ, 300 δράμια καφέ ;

555) Ὁ στατὴρ τῆς ζαχχάρεως τιμᾶται 880 δραχ. Πόσον τιμῶνται 33 ὀκάδες καὶ 300 δράμια ζαχχάρεως ;

556) Εἰς 1π. κινητὸν διανύει τοξον 20° 3′ 15″. Πόσον τόξον διανύει εἰς 8π. 2δ ;

ΣΗΜ. Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις θὰ λυθῶσι πρῶτον ἀγράφως καὶ ἔπειτα θὰ γίνῃ διάταξις τῶν πράξεων.

557) Ἡ ὀκᾶ τοῦ βουτύρου τιμᾶται 80 δραχ. 60 λεπ. Πόσον τιμῶνται τὰ 300 δράμια ἐξ αὐτοῦ ;

558) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 120 δραχ. Πόσον τιμῶνται 6 ρούπια ἐξ αὐτοῦ ;

559) Δι' ἐργασίαν μιᾶς ὥρας ἐργάτης λαμβάνει 10,40 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ, ἐὰν ἐργασθῇ 45 π.

560) Ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 36 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ δόσῃ τις, ἂν ἀγοράσῃ 250 δράμια ;

561) Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 24 δραχ. Πόσον τιμῶνται 350 δράμια αὐτοῦ ;

Διαίρεσις δι' ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς δοθέντα συμμιγῆ ἀριθμόν.

α'. *Μερισμὸς*

§ 174. **Πρόβλημα I.** *Ἠγόρασέ τις 4 πήχεις καὶ 2 ρούπια ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 258 δραχ, 40 λεπ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;*

Λύσις. Ἐπειδὴ 4 πήχ. 2 ρ $= \frac{17}{4}$ πήχ, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{17}{4}$ πρέπει νὰ γίνηται 258 δρ. 40 λεπ. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι (258 δραχ, 40λ) : $\frac{17}{4}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

=60 δραχ. 80 λεπ (§ 110). Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῆς τροπῆς τοῦ συμμιγοῦς 4 πήχ. 2 ρούπια εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν πήχεων ἀνήχθη τὸ ζήτημα εἰς μερισμὸν δι' ἁπλοῦ ἀριθμοῦ.

β'. Μέτρησις.

§ 175. **Πρόβλημα II.** *Ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς 2 ὥρ. 20 π. ἕνα πῆχυν ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου θὰ ὑφάνῃ εἰς 12 ὥρ. καὶ 15 π ;*

Ἐπειδὴ εἰς 2 ὥρ. 20π. ἢ 140π. ὑφαίνει 1 πῆχυν, εἰς 12 ὥρ. 15 π. ἢ εἰς 735 π. θὰ ὑφάνῃ $\frac{735}{140}$ πήχ=5 πήχ. 2 ρούπ.

β') Ἐπειδὴ 2 ὥρ. 20π=2 $\frac{1}{3}$ ὥρ. καὶ 12 ὥρ. 15π=12 $\frac{1}{4}$ ὥραι, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι $\left(12\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}\right)$ πήχ. = 5 $\frac{2}{8}$ πήχ=5 πήχεις καὶ 2 ρούπια.

Ὥστε διὰ τροπῆς τῶν δύο δοθέντων καὶ ὁμοειδῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς τῆς αὐτῆς τάξεως, ἀνήχθη τὸ ζήτημα εἰς μέτρησιν ἁπλοῦ ἀριθμοῦ δι' ἄλλου τοιούτου.

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι οὕτω γίνεται ἡ μέτρησις καὶ ὅταν ἀρχικῶς ὁ εἷς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἁπλοῦς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 562) Διὰ 2 ὀκ. καὶ 100 δράμια ἐλαίου ἔδωκέ τις 49,50 δραχμάς. Πρὸς πόσον τὸ ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν ;

563) Ἠγόρασέ τις 350 δράμια μακαρόνια καὶ ἔδωκε 21 δραχμάς. Πρὸς πόσον ἠγόρασε ταῦτα τὴν ὀκᾶν ;

564) Ἡ ὀκᾶ τῶν ὀσπρίων τιμᾶται 18 δραχ. καὶ 60 λεπτά. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζει τις μὲ 199 δραχ. 60 λεπτά ;

565) Μὲ 8 σελίνια ἀγοράζομεν ἕνα πῆχυν ὑφάσματος. Πόσους πήχεις ἐξ αὐτοῦ ἀγοράζομεν μὲ 2 στερλ. καὶ 12 σελίνια ;

Προβλήματα ἐπὶ συμμιγῶν ἐν γένει.

566) Τρία δοχεῖα ἐντελῶς ὅμοια εἶναι γεμάτα ἀπὸ ἐμπόρευμα τῆς αὐτῆς φύσεως, ἔχουσι δὲ ὁμοῦ βάρος 6 στατ. 38 ὀκ. 100 δραμίων. Ἕκαστον δὲ ἀπὸ αὐτὰ κενὸν ἔχει βάρος 6 ὀκ. 350 δράμ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐντὸς αὐτῶν ἐμπορεύματος καὶ πόσον περιέχει τὸ καθ' ἕν ;

567) Ἔδωκέ τις 744 δραχ. καὶ 65 λεπτὰ καὶ ἠγόρασε 5 πήχεις καὶ 3 ρούπια ὑφάσματος πρὸς 60 δραχ. καὶ 40 λεπ. τὸν πῆ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χυν καὶ β΄ ὕφασμα κατὰ 9 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀκριβώτερον τὸν πῆχυν. Πόσον ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ β΄ τοῦτο ὕφασμα ;

568) Ἁμαξοστοιχία τῶν Ἑλληνικῶν Σιδηροδρόμων διανύουσα 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 7 ὥρ. 15 π. μ. καὶ φθάνει εἰς Λάρισαν τὴν 6 ὥρ. μ. μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας. Παραμένει δὲ εἰς τοὺς διαφόρους σταθμοὺς 2 ὥρ, 27^{π}, 54^{δ}. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς Λαρίσης ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν ;

569) Διευθυντὴς ἑστιατορίου ἠγόρασε 8 ὀκ, 100 δράμ, κρέατος βοείου καὶ ἀρνίου καὶ ἔδωκε 308 δραχμάς. Ἡ τιμὴ τοῦ βοείου εἶναι 36 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ ἀρνίου 40 δρ. Πόσον βόειον καὶ πόσον ἄρνιον κρέας ἠγόρασε ;

570) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἀντὶ 2928 δραχ. Ἔμειναν δὲ 6 ὑάρ, 2 πόδ, 4 δάκ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ ὕφασμα καὶ πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὴν ὑάρδαν ;

571) Διανομεὺς ἔχει νὰ διανείμῃ 62 ἐπιστολὰς καὶ ὑπολογίζει ὅτι ἀντιστοιχεῖ διὰ κάθε μίαν χρόνος 4π. Ἐὰν ἀρχίσῃ τὴν διανομὴν τὴν 8ὥρ, 16π. μετὰ μεσημβρίαν, κατὰ ποίαν ὥραν θὰ λήξῃ ;

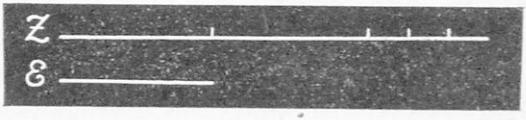
ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

§ 176. **Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον.** Ἔστω εὐθ. τμῆμα Ε καὶ ἄλλο Ζ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 μέρη ἴσα πρὸς τὸ Ε καὶ ἀπὸ 3 μέρη ἴσα πρὸς τὸ



(Σχ. 3)

$\frac{1}{4}$ τοῦ Ε, ἤτοι: $Z = E + E + \frac{E}{4} + \frac{E}{4} + \frac{E}{4}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὸ ποσὸν Ζ ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ Ε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $2\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ δὲ $2\frac{3}{4}=1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, ἕπεται ὅτι :

Γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν καλεῖται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ αὐτὸ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη του, ὅπως ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμὸς $2\frac{3}{4}$ λέγεται λόγος τοῦ ποσοῦ Ζ πρὸς Ε.

Ὁμοίως, ἂν ποσὸν Π εἶναι ἴσον πρὸς Ρ+Ρ+Ρ ἢ Ρ×3, ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται λόγος τοῦ Π πρὸς τὸ Ρ.

Γενικῶς : *Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καλεῖται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ποσόν, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.*

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμούς. Οὕτως, ἐπειδὴ $2\times3\frac{1}{2}=7$, ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{2}$ λέγεται λόγος τοῦ 7 πρὸς τὸν 2.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $7:2=3\frac{1}{2}$, προτιμῶμεν τὸν ἑξῆς συντομώτερον ὁρισμόν.

Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Τὰ ποσὰ ἢ οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουσιν ἕνα λόγον λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ.

Οἱ ὅροι λόγου ἀριθμῶν εἶναι ἀφῃρημένοι καὶ συγκεκριμένοι· εἰς τὴν δ΄ περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Τὸν λόγον ἀριθμοῦ ἢ ποσοῦ α πρὸς ἄλλο δ σημειοῦμεν οὕτω α : δ ἢ $\frac{\alpha}{\delta}$.

Ἐὰν δύο λόγοι ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς ὅρους κατ' ἀντίστροφον τάξιν, λέγονται **ἀντίστροφοι** λόγοι. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{6}{2}$ ὁμοίως οἱ $\frac{\Pi}{\Ρ}$ καὶ $\frac{\Ρ}{\Pi}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Π καὶ Ρ εἶναι δύο ποσὰ ὁμοειδῆ καὶ ὅτι Π : Ρ=2, ἤτοι Π=Ρ+Ρ. Ἐὰν μετρήσωμεν ταῦτα μὲ μίαν μονάδα Μ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ Ρ, εἰς τὸ Ρ+Ρ ἤτοι εἰς τὸ Π θὰ χωρῇ 6 φοράς. Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ μὲν Π θὰ εἶναι 6, τοῦ δὲ Ρ εἶναι 3.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δὲ καὶ 6 : 3=2, συμπεραίνομεν ὅτι Π : Ρ=6 : 3.

Ἄρα : *Ὁ λόγος δύο ποσῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων αὐτῶν, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.*

§ 177. **Ἀναλογίαι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.** Ἐπειδὴ $\frac{6}{2}=3$ καὶ $\frac{12}{4}=3$, ἕπεται ὅτι $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}$. Ἡ ἰσότης αὕτη λέγεται **ἀναλογία**. Ὁμοίως Π : Ρ=Σ : Τ εἶναι ἀναλογία.

Ὥστε : *Ἀναλογία καλεῖται ἰσότης δύο λόγων.*

Οἱ ὅροι τῶν λόγων ἀναλογίας λέγονται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Οἱ προτασσόμενοι ὅροι ἑκάστου λόγου λέγονται **ἡγούμενοι**, οἱ δὲ ἐπιτασσόμενοι λέγονται **ἑπόμενοι**. Ὁ ἡγούμενος τοῦ πρώτου λόγου καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ δευτέρου λέγονται **ἄκροι** ὅροι, οἱ δὲ ἄλλοι λέγονται **μέσοι** ὅροι.

Ἀναλογία τις καλεῖται συνεχής, ἂν οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι·

$$\pi.\ \chi.\quad \alpha : \beta = \beta : \gamma.$$

Ὁ μέσος ὅρος συνεχοῦς ἀναλογίας καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Π : Ρ=Σ : Τ καὶ ὅτι τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἔχουσι μέτρα π καὶ ρ· ἐπίσης τὰ Σ καὶ Τ μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ἂς ἔχωσι μέτρα σ καὶ τ.

Ἐπειδὴ (§ 176) εἶναι Π : Ρ=π : ρ καὶ Σ : Τ=σ : τ, ἕπεται ὅτι π : ρ=σ : τ. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι, ἂν π : ρ=σ : ρ, θὰ εἶναι καὶ Π : Ρ = Σ : Τ.

Ἄρα : *Ἂν 4 ποσὰ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν συνιστῶσιν ἀντίστοιχον ἀναλογίαν, ἀρκεῖ οἱ ὅροι ἑκάστου λόγου νὰ μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον θεωροῦμεν συνήθως ἀναλογίας ἀριθμῶν καὶ τοιούτων ἀναλογιῶν θὰ μάθωμεν τὰς σπουδαιοτέρας ἰδιότητας.

Α΄) Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$. Ἐὰν πολ]σωμεν ἐπὶ 4×2 ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $12\times2=6\times4$.

Γενικῶς : ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Ἄρα : *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων.*

Ἐφαρμογή. Ἂν εἶναι $\frac{6}{4}=\frac{45}{\chi}$, θὰ εἶναι καὶ $6.\chi=180$ καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἑπομένως, $\chi = 180 : 6 = 30$, ἤτοι εὑρέθη ὁ ἄγνωστος ὅρος τῆς ἀναλογίας.

Β') *Εἰς πᾶσαν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.*

Γ') Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 6, 9, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε $2 \times 9 = 3 \times 6$. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα ταῦτα γινόμενα διὰ τοῦ γινομένου 3×9, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα·

$$\frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{3 \times 6}{3 \times 9}, \quad \text{ἔθεν} \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{9}.$$

Γενικῶς : Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Ἄρα : *Ἐὰν 4 ἀριθμοὶ γραμμένοι κατὰ σειρὰν εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν κατὰ τὴν τάξιν, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι γραμμένοι.*

Δ'). Ἐὰν τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας $2 : 3 = 6 : 9$ γράψωμεν κατὰ τὴν τάξιν 2, 6, 3, 9, βλέπομεν ὅτι $2 \times 9 = 6 \times 3$, ἄρα $2 : 6 = 3 : 9$.

Γενικῶς ἂν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : \gamma = \beta : \delta$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\delta : \beta = \gamma : \alpha$.

Ἄρα : *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους, ὁμοίως δὲ καὶ τοὺς ἄκρους ὅρους.*

Ε'). Ἐὰν τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας $4 : 5 = 8 : 10$ γράψωμεν κατὰ τὴν σειρὰν 5, 4, 10, 8, βλέπομεν ὅτι $5 \times 8 = 4 \times 10$,

Ἄρα εἶναι $5 : 4 = 10 : 8$.

Γενικῶς, ἂν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\beta : \alpha = \delta : \gamma$.

Ἄρα : *Ἐὰν δύο λόγοι εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι.*

ΣΤ'). Ἐκ τῆς ἀναλογίας $6 : 4 = 3 : 2$ ἢ $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{6}{4} + 1 = \frac{3}{2} + 1$ ἢ $\frac{6+4}{4} = \frac{3+2}{2}$.

Γενικῶς : *Ἂν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ*

$$(\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta.$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι, ἂν εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $(\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta$.

Ἄρα : *Ἐὰν εἰς καθ' ἕνα ἀπὸ τοὺς ἡγουμένους ἀναλογίας προ-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ ἑπόμενος εἰς αὐτόν, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.

Ζ') Ἐκ τῆς ἀναλογίας $9 : 18 = 5 : 10$, προκύπτει (Ε') ἡ ἀναλογία $18 : 9 = 10 : 5$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἡ $(18+9) : 9 = (10+5) : 5$ (ΣΤ') καὶ ἐκ ταύτης (Ε') προκύπτει ἡ $9 : (18+9) = 5 : (10+5)$.

Γενικῶς: Ἂν εἶναι $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha : (\alpha+\beta) = \gamma : (\gamma+\delta)$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι, ἂν $\delta > \alpha$ καὶ $\alpha : \delta = \gamma : \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : (\delta-\alpha) = \gamma : (\delta-\gamma)$.

Ἄρα: *Ἐὰν εἰς καθ' ἕνα ἀπὸ τοὺς ἑπομένους ἀναλογίας προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 572) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν

$$\frac{24}{6} = \frac{8}{\chi}, \quad \frac{30}{5} = \frac{\chi}{4}, \quad \frac{40}{\chi} = \frac{30}{6}, \quad \frac{\chi}{12} = \frac{8}{4}.$$

573) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν

$$\frac{8}{\chi} = \frac{\chi}{2}, \quad \frac{\chi}{5} = \frac{5}{25}, \quad \frac{\chi}{9} = \frac{9}{8,1}.$$

574) Ὁ λόγος ποσοῦ Α πρὸς ἄλλο Β εἶναι 4 καὶ τὸ μέτρον ποσοῦ Γ εἶναι 8. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέτρον ποσοῦ Δ, ὅταν μετρηθῇ μὲ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ Γ μονάδα διὰ νὰ εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$;

575) Ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\alpha+\beta) : (\alpha-\beta) = (\gamma+\delta) : (\gamma-\delta).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΜΕΘΟΔΟΙ

§ 178. **Συμμεταβλητὰ ποσά.—Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ κρέατος τιμᾶται 40 δραχμάς. Ἂν ἀγοράσωμεν 2 ὀκ, θὰ δόσωμεν 40×2 ἤτοι 80 δραχμάς· ἂν ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας, θὰ δόσωμεν $40 \times 3 = 120$ δραχμὰς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Γενικῶς: *Διὰ χ ὀκάδας θὰ δόσωμεν 40 . χ δραχμάς. Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ ψ τὴν τιμὴν ταύτην, θὰ εἶναι* $\psi = 40.\chi$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς χ τῶν ἀγοραζομένων ὀκάδων μεταβληθῇ καὶ ἡ ἀξία ψ αὐτῶν μεταβάλλεται.

Τὰ δύο ταῦτα ποσὰ χ καὶ ψ λέγονται διὰ τοῦτο ***συμμεταβλητὰ*** ποσά. Τὸ ποσὸν χ, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μάς, λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητή**. Τὸ δὲ ποσὸν ψ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ χ, λέγεται **συνάρτησις** τοῦ χ.

Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν Ε τετραγώνου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πλευρὰν α καὶ μεταβάλλεται, ὅταν ἡ πλευρὰ μεταβληθῇ. Οὕτως, ἂν α=2 μέτρα, θὰ εἶναι Ε=4 τ. μ. Ἂν α=3 μ, θὰ εἶναι Ε=9 τ. μ. κτλ. Εἶναι λοιπὸν τὸ Ε **συνάρτησις** τῆς πλευρᾶς α, ἡ ὁποία λέγεται **ἀνεξάρτητος** μεταβλητή. Τὰ δὲ ποσὰ Ε καὶ α εἶναι **συμμεταβλητά.**

Ὥστε: *Δύο ποσὰ λέγονται συμμεταβλητά, ἂν μεταβαλλομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς μεταβάλληται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου.*

Ἐκ δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς, λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Τὸ δὲ ἄλλο λέγεται συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου ταύτης μεταβλητῆς.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι καὶ συναρτήσεις περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Π. χ. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι συνάρτησις τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

§ 179). **Γραφικὴ παράστασις συναρτήσεως.** Α') Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασια τῆς ἀτμοσφαίρας ἡμέραν τινὰ ἐν Ἀθήναις ἦτο:

τὴν	Μεσημβρίαν	24°	τὴν	7ην μ.μ.	17°
τὴν	1ην μ. μ.	25°	τὴν	8ην μ.μ.	16°
τὴν	2αν μ. μ.	25°,5	τὴν	9ην μ.μ.	15°,5
τὴν	3ην μ. μ.	25°	τὴν	10ην μ.μ.	15°
τὴν	4ην μ. μ.	24°,5	τὴν	11ην μ.μ.	14°,5
τὴν	5ην μ. μ.	23°	τὸ	μεσονύκτιον	14°
τὴν	6ην μ. μ.	20°			

Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας δυνάμεθα νὰ αἰσθητοποιήσωμεν ὡς ἑξῆς:

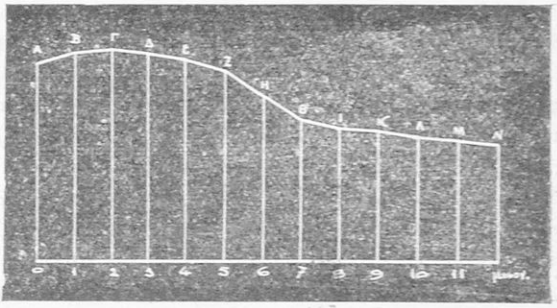
Γράφομεν εὐθεῖαν ΟΧ (Σχ. 4) καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς διαδοχικὰ καὶ ἴσα τμήματα.

Τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς διαδοχικὰς ὥρας τοῦ ἀνωτέρου πίνακος, οἱ ὁποῖοι καὶ ἀναγράφονται πλησίον τῶν ἄκρων τούτων.

Ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἄκρων τούτων ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ. Ἐπὶ τῶν καθέτων δὲ τούτων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΧ ὁρίζομεν τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς θερμοκρασίας τοῦ ἀνωτέρου πίνακος καὶ νὰ ἀρχίζωσι ὅλα ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ΟΧ. Ἐὰν π.χ. ἀπεικονίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν 1° μὲ τμῆμα μήκους 2 χι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

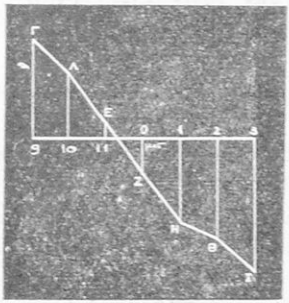
λιοστομέτρων, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Ο θὰ ὁρίσωμεν τμῆμα ΟΑ μή-
κους 2×24=48 χιλιοστομέτρων, ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ 1 θὰ ὁρί-
σωμεν τμῆμα 1Β μήκους 2×25=50 χιλιοστομ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.



(Σχ. 4)

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ,...,Ν. Ἐὰν δὲ χαράξωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ...ΜΝ, σχηματίζομεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ...ΜΝ. Αὕτη λέγομεν ὅτι ἀπεικονίζει τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας, αἱ ὁποῖαι ἀνωτέρω ἐσημειώθησαν. Ἐὰν δὲ ρίψωμεν ἁπλοῦν βλέμμα εἰς αὐτήν, ἀντιλαμβανόμεθα πῶς μετεβλήθη ἡ θερμοκρασία.

Οὕτω παρατηροῦντες ὅτι ΟΑ<1Β<2Γ>3Δ>4Ε κτλ. ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία ἀπὸ τῆς μεσημβρίας ἔβαινεν αὐξανομένη μέχρι τῆς 2ας μ. μ. καὶ ἔπειτα ἠλαττοῦτο.



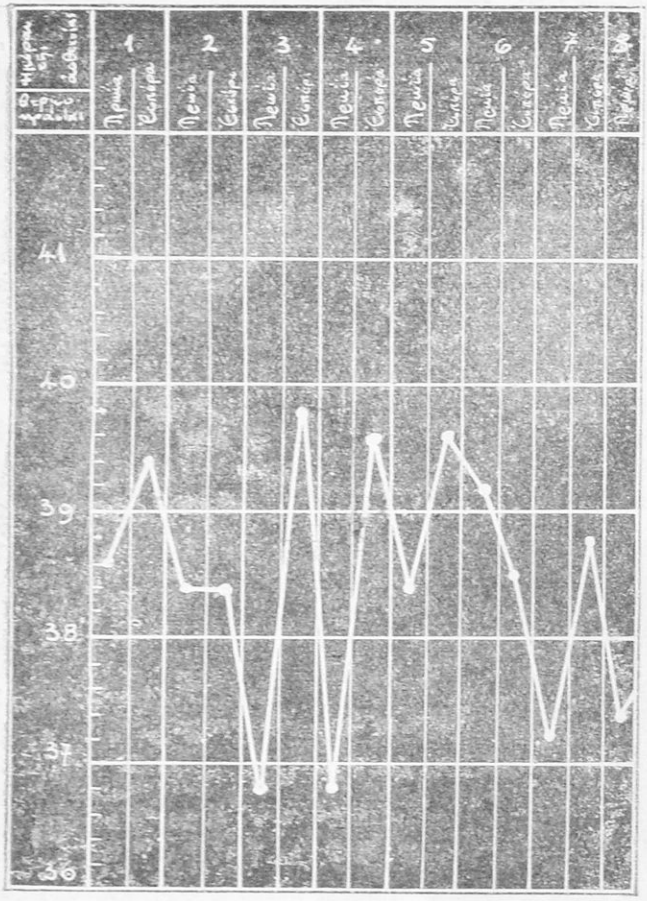
(Σχ. 5)

Ὁμοίως, ἂν, παρατηρήσωμεν ὅτι 5Ζ—6Η>2Γ—3Δ, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία ἠλαττοῦτο ταχύτερον μεταξὺ τῆς 5ης καὶ 6ης μ. μ. παρὰ μεταξὺ 2ας καὶ 3ης μ. μ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐὰν ἐσημειώνομεν τὴν θερμοκρασίαν ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα μικρότερα μιᾶς ὥρας π.χ. ἀνὰ 5 λεπτὰ ἢ 1 λεπτόν, θὰ παριστάνομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὰς μεταβολὰς μὲ γραμμήν, ἡ ὁποία θὰ εἶχε περισσοτέρας πλευρὰς καὶ μὲ περισσοτέραν ἀκρίβειαν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀκριβῆ ἀπεικόνισιν τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας ἐπιτυγχάνουσιν εἰς τοὺς μετεωρολογικοὺς σταθμούς, ἀστεροσκοπεῖα κ.τ.λ. μὲ τὰ **αὐτόγραφα θερμόμετρα**. Εἰς ταῦτα γραφὶς κινουμένη μὲ καταλληλον μηχανισμὸν γράφει ἐπὶ καταλλήλως χαραγμένου χάρ-



(Σχ. 6)

του συνεχῆ γραμμήν. Αὕτη ἀπεικονίζει τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας, κατὰ τὸν χρόνον τῆς λειτουργίας τοῦ ὀργάνου τούτου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν ἡ θερμοκρασία κατέρχηται κάτω τοῦ μηδενός, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα ἐπὶ τῶν καθέτων εἰς τὴν ΟΧ ὁρίζομεν ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος αὐτῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν π χ. ὅτι ἡμέραν τινὰ τοῦ χειμῶνος ἐσημειώθησαν αἱ ἑξῆς θερμοκρασίαι.

τὴν 9ην μ.μ.	3°	τὴν 1ην π.μ.	τῆς ἄλλης ἡμέρας	—2°,5
τὴν 10ην μ.μ.	2°	τὴν 2αν π.μ.	» »	»	—3°
τὴν 11ην μ.μ.	0,5	τὴν 3ην π.μ.	» »	»	—4°

τὸ μεσονύκτιον 1° ὑπὸ τὸ μηδέν.

ἤτοι —1°

Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως προηγουμένως, ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς θερμοκρασίας 3°, 2°, 0°,5 καὶ τὰ σημεῖα Ζ,Η,Θ,Ι. τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς θερμοκρασίας —1° —2°, —3°, —4°. Ἡ δὲ γραμμὴ ΓΔΕΖΗΘΙ (Σχ. 5) ἀπεικονίζει τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας.

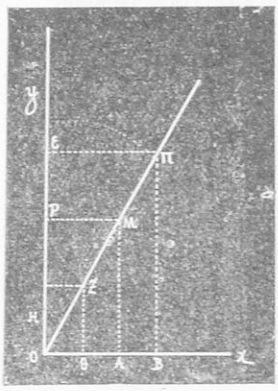
Β'). *Γραφικὴ παράστασις θερμοκρασίας ἀσθενοῦς.* Εἰς τὰ νοσοκομεῖα λαμβάνουσι συνήθως τὴν θερμοκρασίαν ἑκάστου ἀσθενοῦς δύο φορὰς τὴν ἡμέραν, ἤτοι τὴν 9ην π.μ. καὶ τὴν 9ην μ.μ. περίπου.

Σημειοῦσι δὲ ταύτην ἐπὶ φύλλου χάρτου, ὁ ὁποῖος εἶναι διῃρημένος εἰς ἰσομεγέθη ὀρθογώνια, καθ' ὃν τρόπον τὸ σχῆμα (6) δεικνύει. Οὕτω μὲ ἓν βλέμμα ὁ ἰατρὸς διακρίνει τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον μεταβάλλεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς.

Γ') Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = 2\chi$· ἂν θέσωμεν $\psi = 2\chi$, εἰς κάθε τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ψ.

Οὕτω διὰ $\chi = 0, 1, 2, 3, \ldots$

εἶναι $\psi = 0, 2, 4, 6, \ldots$



(Σχ. 7)

Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ψ μετὰ τοῦ χ αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας ψΟχ (Σχ. 7) ὁρίζομεν δύο τμήματα ΟΘ, ΟΗ, ἕκαστον ἀπὸ τὰ ὁποῖα λαμβάνεται ὡς μονὰς καὶ ἔχει ἑπομένως μῆκος 1. Τὰς τιμὰς τοῦ χ θεωροῦμεν ὡς μήκη τμημάτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ, καὶ ἀρχίζουσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν Ο. Τὰς δὲ τιμὰς τοῦ ψ θεωροῦμεν ὡς μήκη τμημάτων τῆς πλευρᾶς Οψ, τὰ ὁποῖα ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὸ Ο. Οὕτως ἡ τιμὴ 2 τοῦ χ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι μῆκος τοῦ τμήματος ΟΑ τῆς πλευρᾶς Οχ, ἡ δὲ ἀντίστοιχος τιμὴ 4 τοῦ ψ εἶναι μῆκος τοῦ τμήματος ΟΡ τῆς πλευρᾶς Οψ.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν Οψ, ἀπὸ δὲ τὸ Ρ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν Οχ, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Μ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται.

Τὸ σημεῖον Μ λοιπὸν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος 2 καὶ 4 τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, εἰς τὸ ζεῦγος 1 καὶ 2 ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Ζ, εἰς τὸ ζεῦγος 0 καὶ 0 ἀντιστοιχεῖ τὸ Ο κ.τ.λ.

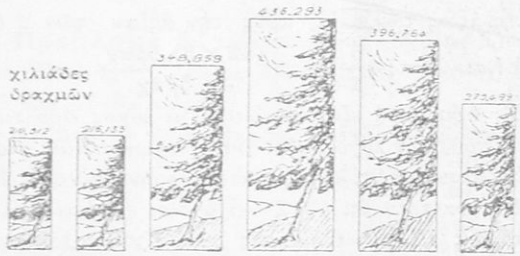
Ἐὰν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὁρίσωμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα καὶ ἑνώσωμεν ταῦτα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, σχηματίζομεν τὴν γραμμὴν ΟΖΜΠ.

Τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΖΘ, ΑΜ, ΒΠ,... εἶναι τιμαὶ τοῦ ψ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκη τῶν τμημάτων ΟΘ, ΟΑ, ΟΒ.,, Ἡ ἁπλῆ ἑπομένως παρατήρησις τοῦ σχήματος δεικνύει ὅτι τοῦ χ αὐξάνοντος καὶ τὸ ψ αὐξάνει καὶ μάλιστα ταχύτερον.

Δ΄.) Ἐνίοτε τὰ δεδομένα τῆς στατιστικῆς καθιστῶμεν περισσότερον νοητά, μὲ εἰκόνας ἀναλόγου μεγέθους.

Οὕτως ἡ Ἀνωτάτη Σχολὴ Οἰκονομικῶν καὶ Ἐμπορικῶν Ἐπιστημῶν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἑλλὰς» ἐδημοσίευσε σειρὰν τοιούτων εἰκόνων, ὡς ἡ τοῦ (Σχ. 8) δι' ἧς παρίσταται γραφικῶς ἡ ἀξία τῶν κατὰ τὰ ἔτη 1925—1930 ἀπολῃφθέντων δασικῶν προϊόντων.

ΔΑΣΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ



(Σχ. 8)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 576) Ἡ μέση θερμοκρασία τόπου ἦτο τὴν Κυριακὴν 12°, τὴν Δευτέραν 11,5°, τὴν Τρίτην 11°, τὴν Τετάρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

την 11,8°, τὴν Πέμπτην 12°, τὴν Παρασκευὴν 12,5°, καὶ τὸ Σάββατον 11°. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὰς ἡμέρας ταύτας.

577) Ἡ ταχύτης ἁμαξοστοιχίας κατὰ τὰς διαφόρους ὥρας ἡμέρας τινὸς ἦτο τὴν μεσημβρίαν 20 χιλ, τὴν 1ην μ, μ 25 χιλ, τὴν 2αν 30 χιλ, τὴν 3ην 28 χιλ, τὴν 4ην μ. μ. 25 χιλ, τὴν 5ην μ. μ. 20 χιλ, τὴν 6ην μ. μ. 25 χιλ, τὴν 7ην μ. μ. 30 χιλ, καὶ τὴν 8ην μ. μ. 35 χιλ. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

578) Τὰ φιλοδωρήματα ὑπαλλήλου ζαχαροπλαστείου κατά τινα ἑβδομάδα ἦσαν. Τὴν Δευτέραν 30 δρχ, τὴν Τρίτην 25 δρχ, τὴν Τετάρτην 20 δραχ, τὴν Πέμπτην 40 δραχ, τὴν Παρασκευὴν 30 δραχ, τὸ Σάββατον 50 δραχ. καὶ τὴν Κυριακὴν 80 δραχμαί. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

579) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $2x+1$ καὶ τῆς $2.x^2$.

§ 180. **Ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα ποσά.** Α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ 2 ὀκάδας ζακχάρεως δίδομεν 42 δραχ. Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ $2\times2=4$ ὀκάδας, θὰ δόσωμεν $42\times2=48$ δραχ., διὰ $2\times3=6$ ὀκ. θὰ δόσωμεν $42\times3=126$ δραχ. κτλ.

Τὸ βάρος τῆς ζακχάρεως καὶ ἡ ἀξία αὐτῆς λέγονται ***ποσὰ ἀνάλογα.***

Γενικῶς : *Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ἐὰν πολ)μένης τιμῆς τινος τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου πολ)ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ὁ λόγος τῶν 6 ὀκ. πρὸς τὰς 2 ὀκ. ζακχάρεως εἶναι $\frac{6\text{ ὀκ.}}{2\text{ ὀκ.}}=3$ ὁ δὲ λόγος τῆς ἀξίας τῶν 6 ὀκ. πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν 2 ὀκ. εἶναι $\frac{42\times3}{42}=3$. Εἶναι λοιπὸν $\frac{6\text{ ὀκ.}}{2\text{ ὀκ.}}=\frac{(42\times3)\text{ δραχ.}}{42\text{ δραχ.}}$.

Ἄρα : *Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.*

Β΄.) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι 4 ἐργάται τελειώνουσιν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Εἶναι φανερὸν ὅτι $4\times2=8$ ὅμοιοι ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον τοῦτο εἰς $12:2=6$ ἡμέρας καὶ $4\times3=12$ ἐργάται τελειώνουσιν αὐτὸ εἰς $12:3=4$ ἡμέρας κτλ.

Τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἡμερῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τελειώνουσιν ἓν ἔργον, λέγονται ποσὰ ***ἀντίστροφα*** ἢ ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Γενικῶς : *Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἂν πολ)μένης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ὁ λόγος τῶν (4×3) ἐργατῶν πρὸς τοὺς (4×2) ἐργάτας εἶναι $\frac{4\times3}{4\times2}=\frac{3}{2}$. Ὁ δὲ λόγος τῶν $12:3=4$ ἡμερῶν πρὸς τὰς $12:2=6$ ἡμέρας εἶναι $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, ἤτοι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{2}$.

Ἄρα : *Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.*

Εἶναι δυνατὸν ἓν ποσὸν νὰ συνδέηται πρὸς πολλὰ ἄλλα ποσὰ καὶ νὰ μεταβάλληται, ὅταν ἐκεῖνα ἢ μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ μεταβάλλωνται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δύο τυχόντα ἀπὸ τὰ ποσὰ ταῦτα λέγονται ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ἂν εἶναι τοιαῦτα καὶ ὅταν τὰ ἄλλα μένωσιν ἀμετάβλητα. Π. χ. τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἀπαιτουμένων ἡμερῶν, ὅπως καλλιεργηθῇ ὑπὸ αὐτῶν ἄμπελος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Διότι, ἂν αἱ ἐργάσιμοι ὧραι ἑκάστης ἡμέρας καὶ ἡ ἔκτασις τῆς ἀμπέλου μείνωσιν ἀμετάβλητα, διπλάσιοι, τριπλάσιοι κτλ. ἐργάται χρειάζονται τὸ ἥμισυ, τρίτον κτλ, τῶν ἡμερῶν. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ ἡ ἔκτασις τῆς ἀμπέλου εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

ΣΗΜ. Εἶναι δυνατὸν δύο ποσὰ συμμεταβλητὰ νὰ μὴ εἶναι ἀνάλογα οὐδὲ ἀντίστροφα. Ἡ ἡλικία π. χ. παιδίου καὶ τὸ ἀνάστημα αὐτοῦ.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

§ 181. **Πρόβλημα Ι.** *Παντοπώλης ἀγοράσας 45 ὀκάδας καφὲ ἔδωκε 2700 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζε 52 ὀκ. ἀπὸ τὸν αὐτὸν καφέ ;*

Λύσις α') Ἀφ' οὗ διὰ 45 ὀκάδας ἔδωκε 2700 δραχ. διὰ 1 ὀκ. θὰ δώσῃ $\frac{2700}{45}$ δραχ. καὶ διὰ 52 ὀκ. θὰ ἔδιδε $\frac{2700}{45}\times52=3120$ δραχμάς.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ (45 ὀκ. καὶ 2700 δραχ.) τῶν ἀναλόγων ποσῶν βάρους καὶ ἀξίας τοῦ καφὲ καὶ μία νέα

Διάταξις

$$\begin{array}{cc} \frac{45}{52}\ \text{ὀκ.} & \frac{2700}{\chi}\ \text{δραχ.} \\ \hline \chi=2700\times\frac{52}{45}=3120\ \text{δραχ.} & \end{array}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τιμὴ (52 ὀκ.) τοῦ βάρους ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ χ τῆς ἀξίας ὁμοειδὴς πρὸς τὴν δοθεῖσαν τιμὴν αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν νέαν τιμὴν τοῦ βάρους. Ἐὰν διατάξωμεν ὡς ἄνω φαίνεται, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι $\frac{2700}{45} \times 52 = 2700 \times \frac{52}{45}$ συμπεραίνομεν ὅτι $\chi = 2700 \times \frac{52}{45}$.

β') Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἀληθεύει (§ 180) ἡ ἀναλογία $45 : 52 = 2700 : \chi$, ὅθεν (§ 177 Α') προκύπτει ὅτι $45.\chi = 2700.52$ καὶ ἑπομένως $\chi = 2700 \times \frac{52}{45}$.

§ 182. **Πρόβλημα ΙΙ**. *Ὅμιλος ἐργατῶν σκάπτει ἄμπελον εἰς 9 ἡμέρας, ἂν ἐργάζηται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Εἰς πόσας ἡμέρας οὗτοι σκάπτουσι τὴν ἄμπελον ταύτην, ἂν ἐργάζωνται 6 ὥρας τὴν τὴν ἡμέραν;*

Λύσις. Ἐὰν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται 9 ἡμέρας· ἂν ἐργάζωνται 1 ὥραν τὴν ἡμέραν, χρειάζονται 9×8 ἡμέρας, καὶ ἂν ἐργάζωνται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται $\frac{9 \times 8}{6} = 12$ ἡμέρας.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἀντιστρόφων ποσῶν καὶ μία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ. Ζητεῖται διὰ ποία τιμὴ χ τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν νέαν ταύτην τιμὴν τοῦ πρώτου. Ἐὰν διατάξωμεν, ὡς ἄνω φαίνεται καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι

Διάταξις τῆς πράξεως

8ὥρ	9ἡμ
6ὥρ	χἡμ.

$\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμ.

$$\frac{9 \times 8}{6} = 9 \times \frac{8}{6}, \text{ συμπεραίνομεν ὅτι:}$$

$$\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12 \text{ ἡμέραι.}$$

β') Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $6 : 8 = 9 : \chi$ καὶ ἑπομένως $\chi = 9 \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμέραι.

Τὰ προβλήματα ταῦτα λέγονται προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γενικῶς: *Προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ἀναλόγων*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἢ ἀντιστρόφων ποσῶν καὶ μία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ. Ζητεῖται δὲ ἡ πρὸς τὴν νέαν ταύτην τιμὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου καὶ ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην αὐτοῦ τιμήν.

Λύονται δὲ ταῦτα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ μετὰ τὴν ὡς ἄνω διάταξιν καὶ ὡς ἑξῆς.

Πολ)ζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου χ ἀριθμὸν μὲ τὸν λόγον τῶν δοθεισῶν τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἀντεστραμμένον, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶναι ἀντίστροφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 580) Ἡγόρασέ τις 12 πήχεις ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 1026 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδεν, ἂν ἠγόραζε 5 πήχεις ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕφασμα ;

581) Διὰ τὴν καλλιέργειαν 8 βασ. στρεμμάτων σταφίδος εἰργάσθησαν 12 ἐργάται. Πόσοι ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον καλλιεργοῦσι 10 βασ. στρέμματα σταφίδος ;

582) Ἀμαξοστοιχία διανύει 160 χιλιόμετρα εἰς 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας διανύει 240 χιλιόμετρα ;

283) Κρήνη παρέχει 42 ὀκ. ὕδατος εἰς 3′. Εἰς πόσον χρόνον γεμίζει αὕτη δοχεῖον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 70 ὀκάδας ;

584) Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου εἰργάσθησαν 12 ἐργάται ἐπὶ 15 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουσι αὐτὸ 9 ἀπὸ τοὺς ἐργάτας τούτους ;

585) Ἂν ἀγοράσῃ τις 12 ὀκ. 300 δράμ. βουτύρου, θὰ δόσῃ 140 δραχ. Πόσον βούτυρον ἀπὸ αὐτὸ δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ 100 δραχμάς ;

586) Ράβδος κατακόρυφος 1,20 μέτρου ρίπτει κατά τινα στιγμὴν σκιὰν 2 μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος δένδρου, τὸ ὁποῖον τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ρίπτει σκιὰν 10 μέτρων ;

587) Διὰ τὴν κατασκευὴν 5 ἐνδυμασιῶν χρειάζονται 21 πήχ. καὶ 2 ρούπια ἀπὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 1 πηχ. καὶ 2 ρούπια. Πόσοι πήχεις χρειάζονται δι' αὐτὰς ἀπὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 1 πῆχυν ;

588) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν αἰθούσης χρειάζονται 25 μέτρα τάπητος πλάτους 1,20 μ. Πόσα μέτρα ἄλλου τάπητος πλάτους 1,50 μ. χρειάζονται διὰ τὴν αὐτὴν αἴθουσαν ;

589) Ἐργάται ἐργαζόμενοι εἰς ὀρεινὴν περιοχὴν ἔχουσι τροφὰς διὰ 15 ἡμέρας. Ἐὰν παραστῇ ἀνάγκη νὰ περάσωσι μὲ αὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὰς 20 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ;

590) Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς ὅτι 100° Κελσίου ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 80° Ρεωμύρου. Πόσοι βαθμοὶ Κελσίου ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 50°,4 Ρεωμύρου ;

591) Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι ὡρισμένη ποσότης ἀερίου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν καταλαμβάνει ὄγκους ἀντιστρόφους πρὸς τὰς πιέσεις, τὰς ὁποίας δέχεται. Ἐὰν ἀέριον ὑπὸ πίεσιν 0,776 ἔχῃ ὄγκον 3 κυβ. παλαμῶν, πόσον ὄγκον λαμβάνει τοῦτο ὑπὸ πίεσιν 0,750 καὶ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν ;

592) Οἱ δύο βραχίονες πρωτογενοῦς μοχλοῦ ἔχουσι λόγον 8 : 2. Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μικροτέρου βραχίονος ἐνεργῇ δύναμις 30 χιλιογράμμων, πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ὅπως ὁ μοχμὸς ἰσορροπῇ ;

ΣΗΜ. Πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ἀπὸ τὴν Φυσικὴν ὅτι : Ὅταν μοχλὸς ἰσορροπῇ, οἱ βραχίονες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

593) Ὡρολόγιον εἰς 8 ὥρ. καὶ 22 π. μένει ὀπίσω 3 π. καὶ 5 δ. Πόσον θὰ μείνῃ ὀπίσω εἰς 2 ἡμέρας ;

Προβλήματα ποσοστῶν.

§ 183. **Ποσοστόν.** Ὅταν ἐργοστάσιον πωλῇ προϊόντα του διὰ τῆς μεσολαβήσεως παραγγελιοδόχου, πληρώνει εἰς τοῦτον ὡς ἀμοιβὴν χρηματικόν τι ποσόν. Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ πωληθέντος ἐμπορεύματος καὶ ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει συμπεφωνημένης ἀμοιβῆς δι' ἀξίαν ἐμπορεύματος 100 δραχμῶν. Ἂν π. χ. ἡ συμφωνηθεῖσα ἀμοιβὴ εἶναι 6 δραχμαὶ δι' ἐμπορεύματα 100 δραχ. (6 °/₀), διὰ παραγγελίαν 200 δραχμῶν θὰ πληρωθῇ 12 δραχ. κτλ. Τὸ ποσὸν τοῦτο λέγεται ***ποσοστόν***.

Οἱ μεσιτεύοντες μεταξὺ πωλητοῦ καὶ ἀγοραστοῦ κτήματος, οἱ εἰσπράκτορες ἑταιρειῶν, καταστημάτων, συλλόγων, τοῦ δημοσίου λαμβάνουσιν ἐπίσης ποσοστὸν διὰ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα εἰσπράττουσι. Τὰ ἀσφάλιστρα οἰκιῶν, καταστημάτων, πλοίων, ἐμπορευμάτων, προϊόντων, τὰ ὁποῖα πληρώνονται εἰς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας εἶναι ποσοστά. Συνήθως τοῦτο ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει συμπεφωνημένων ἀσφαλίστρων δι' ἀξίαν 1000 δραχ. τοῦ ἀσφαλιζομένου ἀντικειμένου π χ. 2 ἐπὶ τοῖς χιλίοις (2 °/₀₀). Τὸ ἀπόβαρον ἐμπορεύματος, ὁσάκις ὑπολογίζεται πρὸς πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸν ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους, δύναται νὰ ὀνομασθῇ ποσοστὸν τοῦ μικτοῦ βάρους. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πωλητὴς ἐκπίπτει ἀπὸ τὴν ἀξίαν πωλουμένου ἐμπορεύματος, λογίζεται συνήθως πρὸς τόσον ἐπὶ τοῖς 100 καὶ εἶναι ποσοστόν. Παρουσιάζονται λοιπὸν εἰς τὸν βίον προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστοῦ ἢ ἄλλου σχετικοῦ ποσοῦ δοθέντος ποσοστοῦ καὶ ἄλλων ἐπαρκῶν στοιχείων. Ὅλα ταῦτα καλοῦνται γενικῶς ***προβλήματα ποσοστῶν***. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς.

§ 184. **Πρόβλημα Ι.** *Μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 °/₀₀. Πόσην μεσιτείαν θὰ λάβῃ διὰ τὴν πώλησιν οἰκίας ἀξίας 356000 δραχμῶν ;*

Λύσις. Δι' ἀξίαν 1000 δραχ. λαμβάνει 2 δραχ.
» » 356000 » » χ »

ὅθεν $\chi = 2 \times \frac{356000}{1000} = 2 \times 356 = 712$ δραχμάς.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 2 πολ]ται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιοδράχμων, τὰ ὁποῖα περιέχουσιν αἱ 356000 δραχμαί. Ἐὰν π. χ. κτῆμα πωληθῇ 28975 δραχμάς, τὸ ποσοστὸν πρὸς 2 °/₀₀ εἶναι

$2 \times 28{,}975 = 57{,}95$ δραχ.

§ 185. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Δι' ἀσφάλιστρα οἰκίας πρὸς 2 °/₀₀ ἐπληρώθησαν 945,50 δραχ. Ἀντὶ πόσου ποσοῦ ἠσφαλίσθη αὕτη ;*

Λύσις Ὅταν τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι 2 δρ, ἡ ἀξία εἶναι 1000 δρ.
τώρα ὅτε » » » 945,50 ἡ ἀξία εἶναι χ

ὅθεν $\chi = 1000 \times \frac{945.50}{2} = \frac{945500}{2} = 472750$ δραχ.

§ 186. **Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ κοστίζει εἰς ἔμπορον 60 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίζῃ 15 °/₀ ἐπὶ τοῦ κόστους ;*

Λύσις. α') Ἀπὸ καφὲν ἀξίας 100 δραχ. κερδίζει 15 δραχ.
» » » 60 » » χ

ὅθεν $\chi = 15 \times \frac{60}{100} = 9$ δραχ. Θὰ πωλῇ λοιπὸν τὴν ὀκᾶν πρὸς $60 + 9 = 69$ δραχ.

β') Ἀπὸ καφὲν κόστους 100 δρ. θὰ λαμβάνῃ 115 δραχ.
» » » 60 » » » χ

ὅθεν $\chi = 115 \times \frac{60}{100} = 69$ δραχμάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 187. **Πρόβλημα IV.** *Παντοπώλης πωλῶν ζάκχαριν πρὸς 22,50 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν κερδίζει 20 % ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ ;*

Λύσις. Ζάκχαρις πωλουμένη 120 δραχ. κοστίζει 100 δραχ.
» » 22,50 » » χ

ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{22,50}{120} = 18,75$ δραχ.

§ 188. **Πρόβλημα V.** *Ἔμπορος ἀγοράσας ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς ἐπλήρωσε 66500 δραχμάς, ἀφ' οὗ ἐγένετο εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων τούτων. Πόση ἦτο ἡ ἀξία αὐτῶν ;*

Λύσις. Ἐὰν ἐπλήρωνεν 95 δρ. ἡ ἀρχικὴ ἀξία θὰ ἦτο 100 δρ.
τώρα, ὅτε πληρώνει 66500 » » » » » » χ

ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{66500}{9} = 70000$ δραχμαί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 594) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ ἀξίας 680000 δραχμῶν πρὸς 2 ‰. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ ;

595) Εἰς ἔμπορον ἀγοράσαντα τοῖς μετρητοῖς ἐμπορεύματα ἀξίας 4850 δραχμῶν ἐγένετο ἔκπτωσις πρὸς 5 %. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσεν ;

596) Ἐπλήρωσέ τις δι' οἰκίαν ἀξίας 180000 δραχμῶν ἀσφάλιστρα 450 δραχμάς. Πρὸς πόσον τοῖς ‰ ὑπελογίσθησαν ταῦτα ;

√596) Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ περιέχει 21 % ὀξυγόνον κατ' ὄγκον. Πόσον ὀξυγόνον περιέχει ὁ ἀὴρ δωματίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 80 κυβ. μέτρων ;

√598) Ἐργαληπτικὴ ἑταιρεία ἀνέλαβε τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου, ὑπεχρεώθη δὲ νὰ καταθέσῃ ὡς ἐγγύησιν 12 % ἐπὶ τῆς προϋπολογισθείσης δαπάνης. Οὕτω δὲ ἡ ἐγγύησις ἀνῆλθεν εἰς 54000 δραχ. Πόση εἶναι ἡ προϋπολογισθεῖσα δαπάνη ;

599) Ἔμπορος πωλῶν ὕφασμα πρὸς 144,60 δραχ. τὸν πῆχυν κερδίζει 20 % ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσον κοστίζει ὁ πῆχυς ;

√600) Κιβώτιον σάπωνος ἔχει βάρος 2 στ. 12 ὀκ. 300 δράμ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος, ἂν τὸ ἀπόβαρον λογισθῇ πρὸς 6 % ;

√601) Τὸ βάρος ἑλαιοκάρπου ἦτο 5 στ. 30 ὀκ. 300 δράμ. Μετά τινα δὲ χρόνον εὑρέθη 5 στ. 20 ὀκ. Πόσον % ἐλάττωσιν (φύραν) ὑπέστη τὸ βάρος τοῦτο ;

602) Παραγγελιοδόχος εὑρισκόμενος εἰς περιοδίαν λαμβάνει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

60 δρ. τὴν ἡμέραν καὶ 3 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, διὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει παραγγελίας. Μετὰ περιοδείαν 40 ἡμερῶν ἔλαβε τὸ ὅλον 3900 δραχ. Πόσην ἀξίαν ἔχουσι τὰ δι' αὐτοῦ παραγγελθέντα ἐμπορεύματα ;

603) Μεταλλουργὸς ἔλιωξε μαζὶ πρὸς ἐξαγωγὴν τοῦ περιεχομένου σιδήρου 470 χιλιόγρ. μεταλλεύματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 80 °/₀ σίδηρον, 750 χιλιόγρ. ἄλλου μεταλλεύματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 78 °/₀ σίδηρον καὶ ἄλλα 500 χιλιόγρ. γ΄ μεταλλεύματος τὸ ὁποῖον περιεῖχεν 75 °/₀ σίδηρον. Πόσον σίδηρον ἐξήγαγεν ;

604) Ἐὰν τὸ γάλα ἀποδίδῃ 4 °/₀ βουτύρου, ἀπὸ πόσας ὀκάδας γάλακτος λαμβάνομεν 2 ὀκ καὶ 350 δράμια βουτύρου ;

605) Ταμιατάρχης λαμβάνει 5500 δραχ. μηνιαίως καὶ ἀφήνει 192 δραχμὰς εἰς τὸ Ταμεῖον Προνοίας. Εἰς πόσον °/₀ ἀνέρχεται ἡ κράτησις αὕτη ;

606) Ὁ προϋπολογισμὸς κοινότητος ἀνέγραψε δι' ἔτος τι ἔσοδα 58600 δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐπραγματοποιήθησαν μόνον 52740 δραχ. Πόσον °/₀ ἐμειώθησαν τὰ προβλεπόμενα ἔσοδα ;

607) Κατὰ τὸ ἔτος 1929—30 τὰ ἔξοδα τοῦ Κράτους ἀνῆλθον εἰς 19354 ἑκατομ. δραχμῶν. Ἐκ τούτων διετέθησαν διὰ τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν ἐκκλησίαν 871,1 ἑκατομ. δραχμῶν. Πόσον °/₀ ποσοστὸν διετέθη διά τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν ἐκκλησίαν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν κρατικῶν ἐξόδων ;

608) Κατὰ τὸ ἔτος 1929—30 τὰ ἐξ ἐμμέσων φόρων ἔσοδα τοῦ κράτους ἀνῆλθον εἰς 4,393 721 000 δραχ. Ἐκ τούτων 29,41 °/₀ προῆλθον ἐκ τῆς φορολογίας τοῦ καπνοῦ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε τὸ κράτος ἐκ τῆς φορολογίας τοῦ καπνοῦ ;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 189. **Πρόβλημα Ι.** *Διὰ τὴν καλλιέργειαν ἀμπέλου 30 βασ. στρεμμάτων εἰργάσθησαν ἐπί τινας ἡμέρας 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν δύνανται νὰ καλλιεργήσωσιν ἄμπελον 60 βασ. στρεμμάτων εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ;*

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν καλλιεργοῦσιν ἄμπελον 30 βασ. στρεμμάτων. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐργάζωνται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

8 ὥρ. τὴν ἡμ. χρειάζονται 15 ἐργάται.
ἐὰν ἐργάζωνται 10 » » » » ψ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, εἶναι $\psi = 15 \times \frac{8}{10}$ ἐργάται.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Διὰ 30 στρέμματα χρειάζονται $\left(15 \times \frac{8}{10}\right)$ ἐργάται
» 40 » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, εἶναι $\chi = 15 \times \frac{8}{10} \times \frac{40}{30} = 16$ ἐργάται.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα ἀνὰ δύο εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, καὶ νέα τιμὴ ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην ἑκατέρου τῶν δύο ποσῶν. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ τοῦ γ′ ποσοῦ ὁμοειδὴς πρὸς τὴν α′ τιμὴν αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰς νέας ταύτας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν. Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτό, τὸ ἐχωρίσαμεν εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον λέγεται πρόβλημα τῆς ***συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.***

Διάταξις			
8 ὥρ.	30	στρέμ.	
χ	10		40

$\chi = 15 \times \frac{8}{10} \times \frac{40}{30} = 16$ ἐργ.

Γενικῶς : *Προβλήματα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων ποσῶν ἀνὰ δύο ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ νέαι ἀντίστοιχοι τιμαὶ ὁμοειδεῖς πρὸς τὰς πρώτας ἑκάστου τούτων πλὴν ἑνός. Ζητεῖται δὲ ποία τιμὴ τούτου ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς νέας ταύτας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν.*

Ἐὰν διατάξωμεν, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται, παρατηροῦμεν ὅτι *ἡ ἄγνωστος τιμὴ χ εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι ὁ ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμός, ἕκαστος δὲ ἀπὸ τοὺς ἄλλους εἶναι λόγος τῶν δύο γνωστῶν τιμῶν ἑκάστου ἀπὸ τὰ ἄλλα ποσὰ λαμβανόμενος, ὅπως ἔχει εἰς τὴν διάταξιν, ἢ ἀντεστραμμένος, καθ' ὅσον τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον ἢ ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν νέαν τιμήν.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 609) Ἓξ ἐργάται εἰς 10 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔλαβον 2000 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῶσι 5 τοιοῦτοι ἐργάται ἐπὶ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν διὰ νὰ λάβωσι 2500 δραχμάς ;

610) Δεξαμενὴ μήκους 5 μέτρων, πλάτους 4 μέτρων καὶ βά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θους 6 μέτρων, χωρεῖ 93750 ὀκάδας ὕδατος. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ χωρέσῃ ἄλλη δεξαμενὴ ἔχουσα μῆκος 6 μ, πλάτους 5 μ. καὶ βάθος 8 μέτρων ;

611) Τρεῖς ἐργάται εἷς 18 ἡμέρας, ἔσκαψαν χάνδακα μήκους 214,50 μέτρων. Πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται εἰς 27 ἡμέρας σκάπτουσι τοιοῦτον χάνδακα μήκους 643,50 μέτρων ;

612) Τέσσαρες ἐργάται ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργου εἰς 3 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν 3 τοιοῦτοι ἐργάται διὰ νὰ ἀποτελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 6 ἡμέρας ;

613) Βιβλίον ἔχει 10 συπογραφικὰ φύλλα· ἔχει δὲ ἑκάστη σελὶς 30 στίχους καὶ κάθε στίχος 25 στοιχεῖα. Τὸ αὐτὸ βιβλίον εἰς 2αν ἔκδοσιν ἐτυπώθη οὕτως ὥστε ἑκάστη σελὶς νὰ ἔχῃ 40 στίχους καὶ κάθε στίχος νὰ ἔχῃ 50 στοιχεῖα. Πόσα τυπογραφικὰ φύλλα ἔχει ἡ 2α ἔκδοσις αὐτοῦ ;

614) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 36 ἡμέρας. Ἐντὸς 24 ἡμερῶν 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ. Ἐὰν ἔπειτα προσληφθῶσιν ἄλλοι 3 τοιοῦτοι ἐργάται, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται ὅλοι τὴν ἡμέραν, ὅπως τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς τὴν ταχθεῖσαν προθεσμίαν ;

615) Δέκα ἐργάται ἀνέλαβον τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινός. Ὑπελόγισαν δὲ ὅτι τελειώνουσι τοῦτο εἰς 20 ἡμέρας, ἂν εἰργάζοντο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν· Μετὰ 12 ὅμως ἡμέρας δύο ἐργάται ἀσθενήσαντες ἔπαυσαν νὰ ἐργάζωνται, οἱ δὲ ἄλλοι ἠναγκάσθησαν νὰ ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον ;

616) Διὰ τὴν κατασκευὴν 5 ἐνδυμασιῶν ἀπαιτοῦνται 21 π. 2ρ. ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 1,5 μ. Πόσον ὕφασμα πλάτους 1,3 μ. χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν 4 τοιούτων ἐνδυμασιῶν ;

Προβλήματα ποσοστῶν ἀναφερόμενα εἰς τὸν χρόνον.

§ 190. **Πρόβλημα Ι.** *Παντοπώλης ἠγόρασεν ἔλαιον, τὸ ὁποῖον ἐκόστισεν εἰς αὐτὸν 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Μετὰ 4 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 20 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσον % ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του ἐτησίως ;*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις. Ἀπὸ 18 δραχ. εἰς 4 μῆνας ἐκέρδισεν 2 δραχ.
100 » » 12 » » χ »

ὅθεν $\chi = 2 \times \frac{100}{18} \times \frac{12}{4} = 33\frac{1}{3}$ %.

§ 191. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἡ ὀκᾶ τοῦ βουτύρου κοστίζει εἰς παντοπώλην 68 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ αὐτὸ μετὰ 6 μῆνας, ὥστε νὰ κερδίσῃ ἐκ τῶν χρημάτων 20 % ἐτησίως ;*

Λύσις. Ἀπὸ 100 δρ. εἰς 12 μην. κερδίζει 20 δραχ.
» 68 » » 6 » » χ »

ὅθεν $\chi = 20 \times \frac{68}{100} \times \frac{6}{12} = 6{,}8$ δραχ. Ἄρα θὰ πωλῇ

$68 + 6{,}8 = 74{,}8$ δραχμάς.

§ 192. **Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Διαθέσας τινὰ ποσὸν χρημάτων εἰς ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ἔλαβε μετὰ 3 μῆνας 83200 δραχμάς. Οὕτω δὲ ἐκέρδισε 16 % ἐτησίως ἐκ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα διέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματα ταῦτα ;*

Λύσις. Αἱ 100 δρ. εἰς τρεῖς μῆνας φέρουσι κέρδος 16 : 4 = 4 δρ. Ἑπομένως μετὰ 3 μῆνας

αἱ 100 δρ. γίνονται 104
χ δρ. » 83200

ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{83200}{104} = 80000$ δρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 617) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 140000 δραχμῶν· ἐξώδευσε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 18000 δραχμὰς καὶ μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς ἐπώλησεν αὐτὴν ἀντὶ 176970 δραχ. Πόσον ἐπὶ τοῖς % ἐκέρδισεν ἐπὶ τῶν χρημάτων του ἐτησίως ;

618) Ἔμπορος διέθεσε διὰ ἐμπορικὰς ἐπιχειρήσεις 200000 δραχμάς· παρετήρησε δὲ ὅτι μετὰ 18 μῆνας εἶχε 245000 δραχμάς. Πόσον % ἐτησίως ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του ;

619) Παντοπώλης ἠγόρασε 3στατ. 12ὀκ. καφὲ πρὸς 50 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐπεβαρύνθη δὲ οὗτος μὲ ἔξοδα μεταφορᾶς καὶ φόρους 4 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Μετὰ 4 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 7987,20 δρχ. Πόσον % ἐτησίως ἐκέρδισεν ἐκ τῶν χρημάτων του ;

620) Καπνέμπορος ἠγόρασε 3000 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 28 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἀφοῦ συνεσκεύασεν αὐτὸν μετὰ 3 μῆνας ἐπώλησεν αὐτὸν ἀντὶ 95272,80 δραχμῶν. Οὕτω δὲ ἐκέρδισεν 24 % ἐπὶ τοῦ κόστους. Πόσα χρήματα ἐξώδευσε διὰ τὴν σκευασίαν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προβλήματα τόκου.

§ 193. **Ὁρισμοί.** Ὅταν δανείζῃ τις εἰς ἄλλον χρήματα, εἶναι δίκαιον νὰ λαμβάνῃ πλὴν τῶν χρημάτων τούτων καὶ ἕνα κέρδος. Τοῦτο λέγεται **τόκος** τῶν δανεισθέντων χρημάτων.

Ὥστε : *Τόκος* (*T*) *λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.*

Τὸ δανειζόμενον χρηματικὸν ποσὸν καλεῖται κεφάλαιον (*K*).

Ὁ τόκος 100 νομισματικῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς τὰς μονάδας τοῦ κεφαλαίου εἰς 1 χρονικὴν μονάδα λέγεται ***ἐπιτόκιον*** ***(E)***.

Τὸ ἐπιτόκιον ὁρίζεται δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ δανείζοντος καὶ δανειζομένου· δὲν πρέπει δὲ κατὰ νόμον νὰ εἶναι τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον ἀνώτερον τοῦ 9.

Ἡ διάρκεια τοῦ δανείου καλεῖται **χρόνος**.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ποσὰ K, T, E, X, δοθῶσιν τρία, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον, ὡς *βλέπομεν* εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

Α'. *Εὕρεσις τοῦ τόκου.*

§ 194. **Πρόβλημα I.** *Πόσον τόκον φέρουσι 3800 δραχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 8 °/₀ ἐτησίως ;*

Λύσις. Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 8 δραχ.

» 3800 » » 3 ἔτη » » χ

Παρατηροῦντες ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi=\frac{8\times3800\times3}{100}=912 \text{ δραχ.}$$

§ 195 **Πρόβλημα II**. *Πόσον τόκον φέρουσι 750 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 10 °/₀ ἐτησίως ;*

Λύσις. Αἱ 100 δρ. εἰς 12 μ. φέρουσιν τόκον 10 δραχ.

750 » » 3 » » χ

ὅθεν $$\chi=\frac{10\times750\times3}{12\times100}=18{,}75 \text{ δραχ.}$$

§ 196. **Πρόβλημα III**. *Πόσον τόκον φέρουσι 1200 δραχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 12 °/₀ ἐτησίως ;*

Λύσις. Αἱ 100 δραχ. εἰς 360 ἡμ. φέρουσι τόκον 12 δραχ.

» 1200 » » 20 » » » χ

ὅθεν $$\chi=\frac{12\times1200\times20}{360\times100}=8 \text{ δραχ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολ)ομεν τὰ τρία δοθέντα ποσὰ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100 ἢ 1200 ἢ 3600, καθ' ὅσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ δὲ ἐπιτόκιον εἶναι ἐτήσιον.*

Παρατηροῦμεν ὅτι (§ 195)

$$\frac{10\times750\times3}{12\times100}=\frac{10\times750\times\frac{3}{12}}{100}$$ καὶ ὅτι $\frac{3}{12}$ ἔτους=3 μῆνες,

Ἐπίσης (§ 196) $\frac{12\times1200\times20}{360\times100}=\frac{12\times120\times\frac{20}{360}}{100}$ καὶ ὅτι $\frac{20}{360}$ ἔτους=20 ἡμέραι. Ἐὰν λοιπὸν ὁ χρόνος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὴν χρονικὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται τὸ ἐπιτόκιον, ἀληθεύει ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολ)ζομεν τὰ τρία δοθέντα ποσὰ καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ 100. Ἤτοι

$$T=\frac{K.E.X.}{100}.$$

ΣΗΜ. Πολλάκις εἶναι εὔκολον καὶ ἀγράψως νὰ εὑρίσκωμεν τὸν τόκον. Οὕτω 600 δραχ. ἢ 6 ἑκατοστάρικα φέρουσι πρὸς 7% εἰς ἓν ἔτος τόκον 7×6=42 δραχ· εἰς 8 ἔτη φέρουσι 42×8=336 δραχ. Εἰς 4 μῆνας φέρουσι 42 : 3=14 δραχ. κτλ.

ΣΗΜ. Ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἀσκήσεις αἱ 5 πρῶται νὰ λυθῶσιν ἀγράψως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 621) Πόσον τόκον φέρουσιν 300 δραχ. εἰς 1 ἔτος πρὸς 8 % ἐτησίως;

622) Πόσον τόκον φέρουσι 300 δραχ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 8 % καὶ πόσον πρὸς 12 % ἐτησίως;

623) Πόσον τόκον φέρουσι 800 δραχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 6 % ἐτησίως;

624) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχ. εἰς 1,2,3,4,5, ἔτη πρὸς 15 % ἐτησίως;

625) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχμαὶ εἰς 6 μῆνας καὶ πόσον εἰς 4 μῆνας πρὸς 9 % ἐτησίως;

626) Πόσον τόκον φέρουσι 2460 δραχμαὶ εἰς 5 ἔτη καὶ 2 μῆνας πρὸς 12 % ἐτησίως;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

627) Πόσον τόκον φέρουσι 8000 δραχ. εἰς 6 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας πρὸς 10 % ἐτησίως ;

628) Ἐδάνεισέ τις 12000 δραχμὰς πρὸς 10 % ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ τὸ ὅλον μετὰ ἓν ἔτος καὶ 3 μῆνας ;

629) Ἔχει τις διαθεσίμους 300000 δραχμάς, μὲ τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἀγοράσῃ οἰκίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ἐνοίκιον καθαρὸν 2000 δραχ. τὸν μῆνα. Τί εἶναι προτιμώτερον νὰ κάμῃ, τὴν ἀγορὰν ταύτην ἢ νά τοκίσῃ τὰ χρήματά του πρὸς $7\frac{1}{2}$ % ἐτησίως ;

630) Τὴν 15 Ἰανουαρίου 1928 ἐδανείσθη τις 15680 δραχ. πρὸς 12 % ἐτησίως καὶ ἐπλήρωσε τὸ χρέος τοῦτο μὲ τὸν τόκον του τὴν 27ην Νοεμβρίου 1930. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον ;

631) Εἶχέ τις κτῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλάμβανε καθαρὸν εἰσόδημα 2800 δραχ. ἐτησίως. Ἔπειτα ἐπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 600000 δραχ., τὰς ὁποίας κατέθεσεν εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν πρὸς 5 % ἐτησίως. Εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶχε περισσότερον ἔσοδον καὶ πόσον ;

Β'. Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.

§ 197. **Πρόβλημα. I.** *Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % ἐτησίως φέρει εἰς 4 ἔτη τόκον 1164,80 δραχμάς ;*

Λύσις. Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 8 δραχ.
» χ » » 4 ἔτη » » 1165,80 δραχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. κεφαλαίου φέρει τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸ ἥμισυ, τρίτον κτλ. τοῦ χρόνου. Ἄρα τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα.

Ὅθεν $\chi = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{1164,80}{8} = \frac{1164,80 \times 100}{4 \times 8} = 3640$ δραχ.

Ἐὰν ὁ χρόνος ἦτο 4 μῆνες, θὰ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi = \frac{1164,80 \times 1200}{4 \times 8} = 43680.$$

Ἐὰν δὲ ἦτο 4 ἡμέραι, θὰ εὑρίσκομεν $\chi = \frac{1164,80 \times 36000}{4 \times 8}$ –

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολ]ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, ἢ 1200, ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ δὲ ἐπιτόκιον εἶναι ἐτήσιον, καὶ τὸ γι-*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $\frac{1164,80\times1200}{4\times8}=\frac{1164,80\times100}{\frac{4}{12}\times8}$

καὶ $\frac{1164,80\times36000}{4\times8}=\frac{1164,80\times100}{\frac{4}{360}\times8}$, βλέπομεν ὅτι, ἂν ὁ χρόνος εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὴν χρονικὴν μονάδα, εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται τὸ ἐπιτόκιον, ἀληθεύει ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολ]ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.

Ἤτοι: $$K=\frac{T.100}{E.X}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 632) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8% ἐτησίως φέρει εἰς 1 ἔτος τόκον 200 δραχμάς ;

633) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % φέρει εἰς 2,5 ἔτη τόκον 200 δραχμάς ;

634) Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσῃ τις εἰς 4 μῆνας πρὸς 5% ἐτησίως, διὰ νὰ λάβῃ τόκον 45 δραχμάς ;

635) Πόσον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % ἐτησίως φέρει εἰς 1 ἔτος καὶ 5 μῆνας τόκον 670 δραχμάς ;

636) Πόσα χρήματα τοκιζόμενα πρὸς 6 % ἐτησίως φέρουσιν εἰς 2 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας τόκον 300 δραχμάς ;

637) Τοκίσας τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 9 % ἐτησίως ἔλαβεν εἰς 5 μῆνας καὶ 13 ἡμέρας τόκον 4 σελίνια καὶ 4 πέννας. Πόσα χρήματα ἐτόκισεν ;

Γ. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

§ 198. **Πρόβλημα Ι**. *Ἐτόκισέ τις 3600 δραχμὰς ἐπὶ 3 ἔτη καὶ ἔλαβε τόκον 864 δραχμάς. Πρὸς πόσον % ἐτησίως ἐτόκισε ταῦτα ;*

Λύσις. Αἱ 3600 δραχ. εἰς 3 ἔτη φέρουσι τόκον 864 δραχ.

» 100 » » 1 ἔτος » » χ »

ἔθεν $\chi=864\times\frac{100}{3600}\times\frac{1}{3}=\frac{864\times100}{3600\times3}=8\ \%$

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον πολ)ζομεν τὸν τόκον ἐπὶ*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.

Ἤτοι: $$E = \frac{T.100}{K.X.}$$

Ἐὰν Χ δηλοῖ ἔτη, μῆνας ἢ ἡμέρας, τὸ Ε θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἐτήσιον, μηνιαῖον ἢ ἡμερήσιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 638) Πρὸς πόσον % ἐτησίως πρέπει νὰ τοκισθῶσιν 4500 δραχ, ὅπως εἰς ἓν ἔτος φέρωσιν τόκον 315 δραχμάς;

639) Ἐτόκισέ τις 15600 δραχμὰς καὶ μετὰ 4 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 18344 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

640) Ἐτόκισέ τις 7200 δραχ. καὶ ἔλαβε μετὰ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας τόκον 170 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

641) Ἐτόκισέ τις 160000 δραχμὰς καὶ μετὰ 15 ἡμέρας ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον 160800 Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

642) Ἐτόκισέ τις 25000 δραχμὰς καὶ ἐκ τῶν τόκων αὐτῶν ἐπὶ 3 ἔτη ἠγόρασεν ἀγρὸν 4 στρεμμάτων πρὸς 1687,50 δραχμὰς τὸ στρέμμα. Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον εἶχε δανείσει τὰ χρήματά του;

643) Πρὸς πόσον % πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιον, ὅπως μετὰ 8 ἔτη διπλασιασθῇ;

644) Κεφάλαιον 12600 δραχ. τοκισθὲν ἀπὸ τῆς 21ης Μαΐου 1929 μέχρι τῆς 2ας Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἔγεινε μετὰ τῶν τόκων του 13062 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐτήσιον ἐπιτόκιον;

645) Εἶχε τις διαθέσιμον κεφάλαιον 60000 δραχ. Τὸ τρίτον τούτων ἐτόκισε πρὸς 8 % ἐπὶ 6 μῆνας, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ 6 μῆνας πρὸς 9 %. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ 4 μῆνας. Οὕτω δὲ ἔλαβε τὸ ὅλον τόκον 3750 δραχ. Πρὸς πόσον % ἐτόκισε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τοῦ κεφαλαίου;

Δ΄. Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

§ 199. **Πρόβλημα.** *Εἰς πόσον χρόνον 1800 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 324 δραχμάς.*

Λύσις. Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 6 δρ.

ἄρα » 1800 » » χ » 1 » » 324 »

ὅθεν $$\chi = 1 \times \frac{100}{1800} \times \frac{324}{6} = \frac{324 \times 100}{1800 \times 6} = 3 \text{ ἔτη.}$$

Ἄρα: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολ)σμεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤτοι $X = \frac{T.100}{K.E.}$.

Ὁ X παριστᾷ ἔτη, ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, καθ' ὅσον τὸ E εἶναι ἀντιστοίχως ἐτήσιον, μηνιαῖον ἢ ἡμερήσιον.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $X = \frac{324 \times 100}{1800 \times 6} = \frac{324}{18 \times 6}$ καὶ ὅτι 18×6 εἶναι ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 1800 δραχμῶν συμπεραίνομεν ὅτι: *Ὁ χρόνος (εἰς ἔτη) εἶναι πηλίκον τοῦ δοθέντος τόκου διὰ τοῦ ἐτησίου τόκου τοῦ δοθέντος κεφαλαίου.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 646) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως καὶ γραπτῶς εἰς πόσον χρόνον 600 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 8 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 48 δραχμάς;

647) Νὰ εὑρεθῇ ἀγράφως καὶ γραπτῶς εἰς πόσον χρόνον 840 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 9 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 151,20 δραχμάς.

648) Εἰς πόσον χρόνον 600 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 8 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 84 δραχμάς;

649) Εἰς πόσον χρόνον 1860 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς $6\frac{1}{2}$ % ἐτησίως γίνονται μετὰ τοῦ τόκου 1960,75 δραχμαί;

650) Ἐδάνεισέ τις 6400 δρχ. ἐπὶ 3 μῆνας πρὸς 8 % ἐτησίως; Ἔπειτα τὸ κεφάλαιον τοῦτο μετὰ τοῦ τόκου ἐδάνεισεν εἰς ἄλλον δανειστὴν πρὸς 10 % ἐτησίως καὶ μετά τινα χρόνον ἔλαβε τὸ ὅλον 7344 δραχ. Πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δεύτερον δάνειον;

651) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸ 15 % ἐτησίως διπλασιάζεται;

652) Τὴν 8ην Σ)βρίου 1929 ἐδάνεισέ τις 4800 δραχμὰς πρὸς 6 % ἐτησίως. Κατὰ δὲ τὴν λῆξιν τῆς προθεσμίας ἔλαβε τὸ ὅλον 5016 δραχμάς. Ποίαν ἡμέραν ἔληξεν ἡ προθεσμία;

§ 200. **Μέθοδος τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσον τόκον φέρουσι K δραχμαὶ εἰς η ἡμέρας πρὸς 9 % ἐτησίως. Κατὰ τὴν ἰσότητα $T = \frac{K.X.E.}{100}$ εἶναι $T = \frac{K.\frac{\eta}{360}.9}{100} = \frac{K.\eta.9.}{36000} = \frac{K.\eta.}{4000}$. Τὸ γινόμενον $K \times \eta$ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας λέγεται **τοκάριθμος**.

Ὁ διαιρέτης $4000 = 36000 : 9$ λέγεται **σταθερὸς διαιρέτης** ἀντιστοίχων εἰς ἐτήσιον ἐπιτόκιον 9 %.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατὰ ταῦτα: *Τὸν εἰς δοθὲν ἐτήσιον ἐπιτόκιον ἀντίστοιχον σταθερὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου τούτου.*

Ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον, ὅταν ὁ χρόνος δηλοῖ ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ ἀντιστοίχου σταθεροῦ διαιρέτου.

Ἤτοι, ἂν 36000 : Ε=Δ, θὰ εἶναι: $T=\frac{K.\eta}{\Delta}$ (1)

Οὕτως 6000 δραχμαὶ εἰς 16 ἡμέρας πρὸς 12 % ἐτησίως φέρουσι τόκον $T=\frac{6000.15}{3000}=32$ δραχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 653) Νὰ εὑρεθῇ ὁ εἰς ἐτήσια ἐπιτόκια 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 ἀντιστοιχῶν σταθερὸς διαιρέτης:

654) Πόσον τόκον φέρουσι 1000 δραχμαὶ εἰς 17 ἡμέρας πρὸς 10 % ἔτησίως;

655) Πόσον τόκον φέρουσι 3850 δραχμαὶ εἰς 23 ἡμέρας πρὸς 9 % ἔτησίως;

656) Πρὸ πόσον % ἐτησίως 500 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς 25 ἡμέρας τόκον 2,5 δραχμάς;

657) Εἰς πόσας ἡμέρας 1700 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 10 % ἐτησίως φέρουσι τόκον 250 δραχμάς;

658) Εἰς πόσας ἡμέρας 750 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 12 % ἐτησίως γίνονται 761,25 δραχμαί;

Χρῆσις βοηθητικῶν ποσῶν.

§ 201. **Πρόβλημα Ι.** *Ἐτόκισέ τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 8 % καὶ μετὰ 3 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 663 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδάνεισεν;*

Λύσις. Αἱ 100 δραχ. εἰς 3 μῆνας φέρουσι τόκον 8 : 4=2 δραχ. Γίνονται ἄρα μὲ τὸν τόκον 102 δρ.

Ὥστε 102 δραχ. τόκος καὶ κεφ. προέρχονται ἀπὸ 100 δρ. κεφ.

663 » » » » » » χ » »

Παρατηροῦμεν ὅτι 200 δραχ. φέρουσαι τόκον 4 δραχ. γίνονται 204· βλέπομεν δηλ. ὅτι διπλάσιον ἄθροισμα κεφαλαίου καὶ τόκου προέρχεται ἀπὸ διπλάσιον κεφάλαιον κλπ.

Ἄρα: $\chi=100\times\frac{663}{102}=650$ δρ.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐφαντάσθημεν ὅτι ὡρισμένον κεφάλαιον (100 δραχ.) ἐτοκίσθη μὲ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἐζητήσαμεν πόσον γίνεται τοῦτο μὲ τὸν τόκον του. Ἔπειτα τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς πρόβλημα ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κεφάλαιον τοῦτο τῶν 100 δραχ. καλοῦμεν **βοηθητικὸν** κεφάλαιον. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ εἶναι οἱονδήποτε. Προτιμᾶται δὲ τοῦτο εἰς παρομοίας περιπτώσεις μόνον χάριν εὐκολίας.

§ 202. **Πρόβλημα II.** *Ἐτόκισέ τις τὸ* $\frac{1}{3}$ *τοῦ κεφαλαίου πρὸς 5 °/₀ ἐτησίως καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6 °/₀ ἐτησίως. Οὕτω λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 1700 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιόν του ;*

Λύσις. Ἂν ἐτόκιζε μὲ τοὺς ὅρους τούτους 300 δραχμάς, θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ μὲν τὰς 100 δραχμὰς τόκον 5, ἀπὸ δὲ τὰς 200 δραχ. τόκον 12 δραχ, ἤτοι τὸ ὅλον 17 δραχ. Ἂν ἐτόκιζεν 600 δραχ. θὰ ἐλάμβανεν τόκον 10+24=34 δραχ. ἤτοι διπλασίας κλπ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀπὸ 300 δραχ. λαμβάνει τόκον 17 δραχ.

» χ » » » 1700 »

ὅθεν $\chi = 300 \times \frac{1700}{17} = 30000$ δραχ.

§ 203. **Πρόβλημα III.** *Ἐτόκισέ τις 1200 δραχμὰς ἐπὶ 60 ἡμέρας καὶ ἄλλας 800 δραχμὰς ἐπὶ 30 ἡμέρας μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἔλαβε δὲ οὕτω ἀπὸ τὸ α΄ κεφάλαιον 8 δραχμὰς περισσότερον τόκον. Πόσον ἦτο τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον ;*

Λύσις. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 10 °/₀ ἐτησίως, ὁ τόκος θὰ ἦτο 20 δραχ. ἀπὸ τὸ α΄ καὶ $\frac{20}{3}$ δραχ. ἀπὸ τὸ β΄, ἡ δὲ διαφορά των θὰ ἦτο $20 - \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$. Ἂν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 20 °/₀, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ θὰ ἦτο $\frac{80}{3}$ δραχ. κτλ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εἰς διαφορὰν $\frac{40}{3}$ ἀντιστοιχεῖ ἐπιτόκιον 10

» » 8 » » χ

ὅθεν $\chi = 10 \times \frac{24}{40} = 6$ °/₀.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 659) Ἐτόκισέ τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 9 °/₀ ἐτησίως καὶ μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 17800 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

660) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 6 %, τὸ δὲ ἄλλο $\frac{1}{2}$ αὐτῶν πρὸς 8 % ἐτησίως. Οὕτω δὲ ἔχει ἐτήσιον τόκον 126 δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ δανεισθέντα χρήματα ;

661) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 5 % τὸ δὲ ἄλλο $\frac{1}{2}$ αὐτῶν πρὸς 4,5 % ἐτησίως. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἀπὸ τὸ α΄ μέρος 80 δραχ. περισσότερον τόκον ἢ ἀπὸ τὸ β΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον.

662) Ἐδάνεισέ τις τὸ $\frac{1}{5}$ κεφαλαίου πρὸς 4 %, ἄλλα $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 6 % καὶ τὰ ἄλλα $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 8% ἐτησίως. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 1312 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον καὶ πόσον τὸ πρὸς 4%, 6% καὶ 8% δανεισθὲν ποσόν ;

663) Ἐδάνεισέ τις 1200 δρχ. πρὸς 8% καὶ ἄλλας 3600 δρχ. πρὸς 6% καὶ ἀμφότερα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Οὕτω δὲ ἔλαβεν ὁλικὸν τόκον 78 δρχ. Πόση εἶναι ἡ διάρκεια τῶν δανείων τούτων;

664) Ἐτόκισέ τις 1700 δραχμὰς ἐπὶ 3 μῆνας καὶ ἄλλας 5100 δραχμὰς ἐπὶ 4 μῆνας πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἔλαβε δὲ τόκον τὸ ὅλον 212,50 δραχ. Πόσον ἦτο τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον ;

Ὑφαίρεσις.

§ 206. **Γραμμάτιον.—Συναλλαγματική.—Ἐπιταγή.—Ὑφαίρεσις.** Ὅταν τις δανείζηται παρ' ἄλλου χρήματα ἢ ἀγοράζῃ ἐμπορεύματα μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ αὐτὰ εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν, ὑπογράφει καὶ παραδίδει εἰς τὸν πιστωτήν του ἔγγραφον ὁμολογίαν τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης. Ὑπάρχουσι δὲ οἱ ἀκόλουθοι δύο τύποι τοιούτων ἐγγράφων.

Α΄) Τὸ ***γραμμάτιον εἰς διαταγὴν*** ἔχον οὕτω.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Σεπτεμβρίου 1933

Διὰ δραχ. 7000

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Νικ. Ἀρχοντίδου τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν (ἑπτὰ χιλιάδων) ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.

Ἀναστ. Δημάδης

Β΄) ***Ἡ Συναλλαγματική***, διὰ τῆς ὁποίας παραγγέλει τις εἰς ἄλλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει συνήθως διαθέσιμα χρήματά του, νὰ με-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρήσῃ διὰ λ)σμόν του εἰς τρίτον πρόσωπον ὡρισμένον ποσόν. Ὁ συνηθέστερος τύπος αὐτῆς εἶναι ὁ ἑξῆς :

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Σεπτεμβρίου 1933

Διὰ δραχ. 7000

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε διὰ ταύτης τῆς μόνης μου συναλλαγματικῆς εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Ἀρχοντίδου τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν (ἑπτὰ χιλιάδων) ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς μετρητὰ καὶ ἐγγράψατε αὐτὴν εἰς λ)σμόν μου, ὡς εἰδοποιεῖσθε.

Ἀναστ. Δημάδης

Πρὸς τὸν κ. Δημ. Λάσκαν

ἔμπορον εἰς Καλάμας

Πλὴν τούτων συχνότατα γίνεται χρῆσις καὶ τῆς **ἐπιταγῆς**, διὰ τῆς ὁποίας παραγγέλλεται Τράπεζα ἢ ταμιευτικὸν γραφεῖον νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν κομιστὴν αὐτῆς ὡρισμένον ποσὸν διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐκδόσαντος αὐτήν.

Ἰδοὺ ἓν ὑπόδειγμα ἐπιταγῆς.

Ἀριθ. 173. Ἐν Ἀθήναις τῇ εἰκοστῇ Σ)βρίου 1930.

ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΠΛΗΡΩΣΑΤΕ εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Νικολ. Ἀρχοντίδου τὸ ποσὸν τῶν (τριῶν χιλιάδων) — Διὰ δραχ. 3000

Πρὸς τὸ Ὑποκατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης εἰς Καρδίτσαν — Ὁ Διευθυντὴς Δροσόπουλος

Συνήθως ὁ κάτοχος γραμματίου ἢ συναλλαγματικῆς π. χ. ὁ κ. Ν. Ἀρχοντίδης δὲν ἀναμένει νὰ ἔλθῃ ἡ προθεσμία διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰς 7000 δραχμάς. Ἀλλὰ πωλεῖ τοῦτο εἰς τράπεζαν. Ὑπογράφων δὲ ὄπισθεν ***(ὀπισθογράφησις)*** μεταβιβάζει τὰ δικαιώματά του εἰς τὴν Τράπεζαν ταύτην.

Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται ***προεξόφλησις*** τοῦ γραμματίου. Ἡ Τράπεζα κρατεῖ ὡς κέρδος ποσόν τι π.χ. 262,50 δραχ., τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ὑφαίρεσις***.

Γενικῶς : *Ὑφαίρεσις καλεῖται ἡ ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται πᾶν χρέος, ὅταν πληρώνηται εἰς τὸν δικαιοῦχον πρὸ τῆς διορίας του.*

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀναγεγραμμένον εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμμάτιον, λέγεται ***ὀνομαστικὴ*** ἢ ***μέλλουσα*** ἀξία αὐτοῦ (Μ). Τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ Μ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑφαιρέσεως (Υ) καλεῖται παροῦσα ἢ **πραγματικὴ** (Π) ἀξία τοῦ γραμματίου, ἤτοι

$$\Pi = M - Υ.$$

Διακρίνομεν δὲ δύο εἴδη ὑφαιρέσεων τὴν **ἐξωτερικὴν** ἢ **ἐμπορικὴν** καὶ τὴν **ἐσωτερικήν.**

§ 205. **Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.** *Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας γραμματίου διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ.*

Ὑπολογίζεται δὲ ὁ τόκος οὗτος πρὸς ἐπιτόκιον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ τοῦ πωλοῦντος καὶ ἀγοράζοντος τὸ γραμμάτιον.

Συνήθως αἱ μεγάλαι Τράπεζαι ἐνεργοῦσι τὰς προεξοφλήσεις μὲ τὸν νόμιμον προεξοφλητικὸν τόκον 9 %.

Κατὰ ταῦτα τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως εἶναι προβλήματα τόκου καὶ λύονται ὡς ἐκεῖνα. Οὕτω τὸ ἄνω γραμμάτιον προεξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 15 % ἐτησίως ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 262,50 δραχ. Ἑπομένως

$$\Pi = 7000 - 262{,}50 = 6737{,}50 \text{ δραχ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 665) Γραμμάτιον 350 δραχμῶν προεξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 5 % ἐτησίως. Πόσην ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

666) Γραμμάτιον 540 δραχμῶν προεξωφλήθη πρὸς 4% ἐτησίως 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

667) Γραμμάτιον 1600 δραχμῶν ἐξωφλήθη 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% ἐτησίως. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

668) Γραμμάτιον 12000 δραχμῶν ἐξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 11800 δραχμῶν. Πρὸς πόσον ἐπὶ τοῖς % ὑπελογίσθη ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις;

669) Γραμμάτιον 5600 δραχμῶν ἐξωφλήθη 26 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 5563,66 δραχ. Πρὸς πόσον % ὑπελογίσθη ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ;

670) Γραμμάτιον 18000 δραχ. προεξωφλήθη πρὸς 6% ἀντὶ 17820 δραχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωφλήθη;

671) Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξωφληθὲν 40 ἡμέρας πρὸς τῆς λήξεώς του πρὸς 12% ἔπαθεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 12 δραχμάς ;

672) Τὴν 16 Ἰανουαρίου 1930 ἐξωφλήθη πρὸς 6% ἀντὶ 1984 δραχμῶν γραμμάτιον 2000 δραχμῶν. Πότε ἔληγεν ἡ προθεσμία αὐτοῦ ;

673) Γραμμάτιον λῆγον τὴν 25 Φεβρουαρίου 1930 ἐξωφλήθη πρὸς 8% τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἀντὶ 3572 δραχ. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ ;

§ 206. **Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις**. Ἡ προεξόφλησις γραμματίου κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον εἶναι ἄδικος εἰς ὄφελος τοῦ ἀγοράζοντος τὸ γραμμάτιον. Ὁ προεξοφλῶν π. χ. γραμμάτιον 7000 δραχ. ἀντὶ 6737,50 δραχ. κερδίζει τὸν τόκον τῶν 7000 δραχ. ἐν ᾧ αὐτὸς διαθέτει διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ γραμματίου μόνον 6737,50 δραχ. Ἡ ἀδικία αὕτη ἀποφεύγεται διὰ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς.

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας γραμματίου διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως αὐτοῦ.

Οὕτω γραμμάτιον 816 δραχ. ἐξοφληθὲν 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % ὑφίσταται ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν (υ), τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 816—υ=Π, ἕπεται ὅτι 816=Π+υ. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, υ εἶναι τόκος τοῦ Π, ἕπεται ὅτι 816 εἶναι ἄθροισμα τοῦ κεφαλαίου Π καὶ τοῦ τόκου του. Εὑρίσκομεν (§ 201) λοιπὸν πρῶτον ὅτι αἱ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς 3 μῆνας τόκον 2 δραχμάς.

Ἑπομένως γραμ. 102 δρ. πάσχει ἐσ. ὑφαίρεσιν 2
» 816 » » » » χ

ὅθεν $\chi=2\times\frac{816}{102}=16$ δραχ. Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία εἶναι 816—16=800.

Ἄρα : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου, πολλμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. διὰ τὸν χρόνον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 674) Γραμμάτιον 1820,70 δραχ. ἐξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12%. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

675) Γραμμάτιον 863,60 δρχ. ἐξωφλήθη 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 9% ἐτησίως. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ ;

676) Γραμμάτιον 2419,20 δραχ. λῆγον τὴν 18 Μαρτίου 1932 ἐξωφλήθη τὴν 12ην Φεβρουαρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς 8%. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ ;

677) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 3 μῆνας πρὸς τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 6% ἐτησίως ἀντὶ 1800 δραχ. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

678) Γραμμάτιον λῆγον τὴν 5ην Ἰουνίου 1932 ἐξωφλήθη τὴν 5ην Ἀπριλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς 12 % ἀντὶ 1500 δραχμῶν. Πόσην ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἔπαθε καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ ;

679) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 % καὶ ἔταθεν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 15 δραχμῶν. Πόση ἡ παροῦσα καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ ;

680) Γραμμάτιον 7904 δράχμῶν ἐξωφλήθη 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 7800 δραχ. Πρὸς πόσον % ἐγένετο ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ ;

681) Γραμμάτιον 24090 δραχ. ἐξωφλήθη ἀντὶ 24000 δρ. πρὸς 9% μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεως ἐγένετο ἡ ἐξόφλησις αὐτοῦ ;

682) Γραμμάτιον 4646 δραχ. λῆγον τὴν 18 Αὐγούστου 1931 ἐξωφλήθη πρὸς 9 % ἀντὶ 4600 δραχμῶν. Ποίαν ἡμερομηνίαν ἔγεινεν ἡ προεξόφλησις ;

683) Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰσότητος Μ=Π+υ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Υ—υ ἰσοῦται μὲ τὸν τόκον τῆς υ διὰ τὸν χρόνον καὶ τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως.

684) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 18 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 12% ἀντὶ 6000 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως αὐτοῦ

685) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμματίου ἐξοφλουμένου 25 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸ 8 % εἶναι 4 δραχμαί. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

Προβλήματα κοινῆς λήξεως γραμματίων.

§ 207. **Πρόβλημα Ι.** *Χρεωστεῖ τις εἰς τράπεζαν 600 δραχ.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον καὶ ἄλλας 800 δραχ. πληρωτέας μετὰ ἕνα μῆνα ἀπὸ σήμερον. Ἐὰν κάμῃ διὰ τὰ χρέη ταῦτα ἓν μόνον γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 2 μῆνας, πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;

Λύσις. Τὸ γραμμάτιον τοῦτο ὀφείλει νὰ ἔχῃ παροῦσαν ἀξίαν, ὅσην τὰ δύο χρέη ὁμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις εἶναι 3 δραχ. διὰ τὸ α΄ καὶ 6 δραχ. διὰ τὸ β΄ χρέος, ἕπεται ὅτι σήμερον χρεωστεῖ 597+794=1391 δραχ.

Θὰ ζητήσωμεν λοιπὸν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 2 μῆνας καὶ ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 1391 δραχ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 100 δραχ. εἰς 2 μῆνας φέρουσι τόκον 1,5 δραχ.

Ἄρα. Γραμμ. παρούσης ἀξίας 98,5 δρ. ἔχει ὀνομ. ἀξ. 100
» » 1391 » » » » χ.

Ὅθεν $\chi = \frac{100 \times 1931}{98,5} = 1412,18$ δραχ. περίπου,

§ 208. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν λήγει μετὰ 30 ἡμέρας· ἄλλο γραμμάτιον 3600 δραχμῶν λήγει μετὰ 20 ἡμέρας καὶ γ΄ γραμμάτιον 6000 δραχμῶν λήγει μετὰ 15 ἡμέρας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ταῦτα μὲ ἓν γραμμάτιον 10800 δραχμῶν, μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;*

Λύσις. Εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὰ τρία γραμμάτια ἔχουσι παροῦσαν ἀξίαν 10747,50 δραχ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ νέον γραμμάτιον πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν παροῦσαν ἀξίαν, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις τούτου εἶναι

10800—10747, 40=52,50 δραχ.

Εὑρίσκομεν ἔπειτα ὅτι αἱ 10800 δραχ. πρὸς 9 % τοκιζόμεναι φέρουσι τόκον 52,50 δραχ. εἰς 58 ἡμέρας. Τὸ νέον λοιπὸν γραμμάτιον θὰ λήγῃ μετὰ 58 ἡμέρας.

ΣΗΜ. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἐλύσαμεν μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, διότι ταύτης γίνεται χρῆσις ἐν τῇ πράξει. Δύνανται ὅμως οἱ μαθηταὶ πρὸς ἄσκησιν νὰ λύσωσι ταῦτα καὶ μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 686) Ὀφείλει τις εἰς τὴν Λαϊκὴν Τράπεζαν 800 δραχ. πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας, 600 δρχ. πληρωτέας μετὰ 25 ἡμέρας καὶ 1000 δρχ. πληρωτέας μετὰ 40 ἡμέρας. Ἐὰν κάμῃ δι' ὅλα τὰ χρέη ταῦτα ἓν χρεωστικὸν γραμμάτιον ἐκ 2412,02 δραχ. μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

687) Χρεωστεῖ τις 2000 δραχ πληρωτέας μετὰ 12 ἡμέρας, 1500 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 20 ἡμέρας καὶ ἄλλας 860 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 36 ἡμέρας. Ἐὰν κάμῃ δι' ὅλα τὰ χρέη ταῦτα ἓν γραμμάτιον λῆγον μετὰ 2 μῆνας, πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %;

688) Χρεωστεῖ τις 2540 δρ. πληρωτέας μετὰ 110 ἡμέρας καὶ 3425 δραχμὰς πληρωτέας μετὰ 84 ἡμέρας, θέλει δὲ νὰ ὑπογράψῃ δι' αὐτὰ ἓν γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 3 μῆνας. Πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5 %;

689) Ἐχρεώστει τις εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν 8400 δραχ. πληρωτέας μετὰ 40 ἡμέρας. Πρὸς ἐξόφλησιν μετεβίβασεν εἰς αὐτὴν δύο γραμμάτια εἰς διαταγήν του ἐκ 4300 δραχμῶν ἕκαστον καὶ πληρωτέα τὸ μὲν ἓν μετὰ 80 ἡμέρας, τὸ δὲ ἄλλο μετὰ 36 ἡμέρας. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 9 %, νὰ εὑρεθῇ, ἂν ἔχῃ νὰ λάβῃ ἢ χρεωστῇ ἀκόμη εἰς τὴν τράπεζαν καὶ πόσα.

Προβλήματα ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως τίτλων.

§ 209. **Ὁμολογίαι καὶ μετοχαί.** Ὅταν ἓν κράτος λάβῃ ἀνάγκην μεγάλου χρηματικοῦ ποσοῦ, δανείζεται τοῦτο ἀπὸ τὸ κοινὸν ὡς ἑξῆς. Διαιρεῖ τοῦτο εἰς μικρὰ τμήματα καὶ ἐκδίδει πρὸς πώλησιν ἐγγράφους τίτλους. Ἕκαστος τοιοῦτος τίτλος ἔχει ὡρισμένην ὀνομαστικὴν ἀξίαν π. χ. 100, 200, 500, κτλ. δραχμῶν· λέγεται δὲ ***ὁμολογία,*** διότι δι' αὐτῆς τὸ κράτος ὁμολογεῖ ὅτι ὀφείλει εἰς τὸν κάτοχον αὐτῆς (ὁμολογιοῦχον) τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν καὶ τοὺς νομίμους τόκους αὐτῆς.

Ἐπίσης αἱ ἀνώνυμοι ἑταιρεῖαι καὶ Τράπεζαι κατὰ τὴν σύστασίν των ἢ καὶ βραδύτερον πρὸς αὔξησιν τῶν ἐργασιῶν των ἐκδίδουσι πρὸς πώλησιν τίτλους, οἱ ὁποῖοι λέγονται ***μετοχαί***, διότι οἱ ἀγορασταὶ αὐτῶν μετέχουσιν εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις ταύτας καὶ εἰς τὰ κέρδη αὐτῶν.

Αἱ ὁμολογίαι καὶ μετοχαὶ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***τίτλοι*** καὶ πωλοῦνται εἰς τὰ χρηματιστήρια διὰ τῆς μεσολαβήσεως τῶν χρηματιστῶν. Ἡ τρέχουσα τιμὴ τῶν τίτλων εἶναι μεταβλητή, ἐπιβαρύνεται δὲ καὶ μὲ μεσιτικὰ δικαιώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα εἰς διαφόρους περιστάσεις (1). Αἱ δὲ μετοχαὶ τῶν ἀνωνύμων ἑται-

1) Διὰ τὰ ἐθνικὰ δάνεια μέχρι 200 δραχ. εἶναι 0,50 δραχ. δι' ἑκάστην ὁμολογίαν. Ἀπὸ 201 μέχρι 500 δραχ. εἶναι 0,75 δραχ. δι' ἑκάστην. Ἀπὸ 501 μέχρι 1000 εἶναι 1 δραχ. δι' ἑκάστην καὶ πέραν 3 %.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρειῶν καὶ Γραπεζῶν ἐπιβαρύνονται καὶ μὲ φόρον ὑπὲρ τοῦ Δημοσίου. Ὁ μεσάζων χρηματιστὴς ἐκδίδει πινάκιον λογαριασμοῦ, τὸ ὁποῖον ὑπογράφων παραδίδει εἰς τὸν ἀγοραστὴν ἢ πωλητὴν τίτλων, ὡς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα προβλήματα θὰ φανῇ :

§ 210. **Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις 100 ὁμολογίας τοῦ Α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου (6,50 %) πρὸς 67,50 δραχ. ἑκάστην. Πόσα ἔδωκεν.*

Πινάκιον λ]σμοῦ

Δι' ἀξίαν 100 ὁμολογιῶν $67,50 \times 100 = 6750$ δραχ.
διὰ μεσιτικὰ πρὸς 0,50 δρ. $= 50$ »
Τὸ ὅλον 6800

§ 211. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἠγόρασέ τις 200 ὁμολογίας τοῦ Β΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου (6 %) πρὸς 52,60 δρ. ἑκάστην. Πόσον % κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐπιτόκιον περιωρίσθη εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ ;*

Πινάκιον λ)σμοῦ

Δι' ἀξίαν 200 ὁμολογιῶν $52,60 \times 200 = 10520$ δραχ.
διὰ μεσιτικὰ πρὸς 0,50 δρ. ἑκάστην $= 100$ »
Τὸ ὅλον 10620 »

Ἀπὸ τὸ ποσὸν τοῦτο λαμβάνει ἐτήσιον τόκον
$4,5 \times 200 = 900$ δραχ. Ἄρα : $E = \frac{900 \times 100}{10620} = 8,47$ % περίπου.

§ 212. **Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Ἑκάστη ὁμολογία τοῦ δανείου τῶν 300 ἑκατομμυρίων (5 %) ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 200 δραχμῶν, ἡ δὲ τρέχουσα σήμερον ἀξία αὐτῶν εἶναι 113,50 δραχ. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ διαθέσῃ τις πρὸς ἀγορὰν τοιούτων ὁμολογιῶν, αἱ ὁποῖαι νὰ τῷ ἀποδίδωσιν ἐτήσιον τόκον 3000 δραχ ;*

Λύσις. Θὰ ἔχῃ τόκον 10 δραχ. ἀπὸ 113,50 δρ.
» » » 3000 » » χ
ὅθεν $\chi = 113,50 \times 300 = 34050$ δραχ.

Πινάκιον

Δι' ἀγορὰν 300 ὁμολογιῶν	34050 δραχ.
διὰ μεσιτικὰ πρὸς 0,50 δρ. ἑκάστην	150
Τὸ ὅλον	34200

§ 213. **Πρόβλημα ΙV.** *Πόσας ὁμολογίας τοῦ Α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ 33100 δρ. πρὸς 65,70 δραχ. ἑκάστην ;*

Λύσις. Διὰ μίαν ὁμολογίαν θὰ δόσῃ ἀξίαν 65,70 καὶ 0,50 δρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ μεσιτείαν ἤτοι 66,20 δραχμάς. Ἄρα θὰ ἀγοράσῃ τὸ ὅλον 33100 : 66,20=500 ὁμολογίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 690) Ἠγόρασέ τις 80 ὁμολογίας τῶν 30 ἑκατ. (2,5%) πρὸς 68,30 δρχ. ἑκάστην. Πόσα χρήματα ἔδωκε τὸ ὅλον;

691) Πόσας ὁμολογίας τοῦ Β΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου (6%) ἀγοράζει τις πρὸς 51,50 δραχ. ἑκάστην μὲ 52000 δραχμάς; Καὶ πόσον % κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του ἀγοράζων τοιαύτας μὲ τὴν ρηθεῖσαν τιμὴν λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον κατεβιβάσθη εἰς 4,5%;

692) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ τόσας ὁμολογίας τοῦ Α΄ Ἀναγκαστικοῦ δανείου (6,5%) πρὸς 65, 10 δραχ. ἑκάστην, ὥστε νὰ ἔχῃ ἀπὸ αὐτὰς ἐτήσιον τόκον 9750 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ διαθέσῃ διὰ τὴν ἀγοράν του λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον ὑπεβιβάσθη εἰς 4,875%;

693) Ἠγόρασέ τις 200 μετοχὰς τῆς ἑταιρείας οἴνων καὶ οἰνοπνευμάτων πρὸς 560 δραχ. ἑκάστην, ἐπλήρωσε δὲ καὶ μεσιτείαν 1 δραχμὴν δι' ἑκάστην. Ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶχεν ὅλα τὰ χρήματα ἐδανείσθη 50000 δραχμὰς πρὸς 12% ἐτησίως. Μετὰ 2 μῆνας ἐπώλησε τὰς μετοχὰς ταύτας πρὸς 592 δραχμὰς ἑκάστην καὶ ἔδωκε πάλιν τὴν ἰδίαν μεσιτείαν. Ἐπλήρωσε δὲ κατὰ τὴν ἀγορὰν καὶ πώλησιν φόρον 400 δραχ. Πόσον ἐκέρδισε;

Προβλήματα μερισμοῦ ἀριθμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς.

§ 214. **Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους.** Οἱ ἀριθμοὶ

$$3\times4=12,\ 5\times4=20,\ 6\times4=24. \qquad (1)$$

γίνονται ἀπὸ τοὺς 3, 5, 6, διὰ πολ)σμοῦ αὐτῶν ἐπὶ 4. Λέγονται δὲ οὗτοι ***ἀνάλογοι*** πρὸς τοὺς 3,5,6,

Ἐπίσης ἐπειδὴ $12\times\frac{1}{4}=3$, $20\times\frac{1}{4}=5$ καὶ $24\times\frac{1}{4}=6$ καὶ οἱ 3,5,6 λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 12, 20, 24.

Γενικῶς: *Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους, ἂν γίνωνται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Οἱ ἐξ ἀλλήλων διὰ πολ)σμοῦ προκύπτοντες ἀριθμοὶ λέγονται ***ὁμόλογοι ἢ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί***. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 3, 20 καὶ 5, 24 καὶ 6 εἶναι ὁμόλογοι.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτουσι αἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$12 : 3 = 4,\ 20 : 5 = 4,\ 24 : 6 = 4 \qquad (2)$$

καὶ ἐκ τῶν (2) προκύπτουσιν αἱ (1), συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἂν ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους, ἰσαρίθμους, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν εἶναι δι' ὅλους ὁ αὐτός. Καὶ ἀντιστρόφως.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους α, β, γ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ὅτι οἱ λόγοι τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι, ἤτοι

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} \qquad \text{ἢ καὶ} \qquad \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\psi} = \frac{\gamma}{\omega}.$$

§ 215. **Πρόβλημα 1**. *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 40 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.*

Λύσις. Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2, 3, 5, ἔχουσιν ἄθροισμα 10. Ἐὰν ἑπομένως μερίσωμεν τὸν 10 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, 3, 5, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$. Ἤδη, ὅτε πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ 40, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$\chi = \frac{2 \times 40}{10} = 8, \qquad \psi = \frac{3 \times 40}{10} = 12, \qquad \omega = \frac{5 \times 40}{10} = 20.$$

Ἂν ἀριθμὸν Α μερίσωμεν εἰς μέρη χ, ψ, ω ἀνάλογα πρὸς τοὺς α, β, γ θὰ εἶναι $\chi = \frac{\text{Α}.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\psi = \frac{\text{Α}.\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\omega = \frac{\text{Α}.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Ἄρα : *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς, πολ]ζομεν τὸν μεριστέον ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἂς μερίσωμεν τώρα τὸν 40 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2×4, 3×4, 5×4. Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα τὰ μέρη αὐτοῦ εἶναι

$$\chi' = \frac{40\times2\times4}{(2\times4)+(3\times4)+(5\times4)} = \frac{40\times2\times4}{(2+3+5)\times4} = \frac{40\times2}{10} = \chi$$

$$\psi' = \frac{40\times3\times4}{(2+3+5)\times4} = \frac{40\times3}{10} = \psi \qquad \text{καὶ} \qquad \omega' = \frac{40\times5\times4}{(2+3+5)\times4} = \omega$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ μέρη τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ δὲν βλάπτονται, ὅταν οἱ ἄλλοι δοθέντες ἀριθμοὶ πολ]σθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἂν θέλωμεν νὰ μερίσωμεν τὸν 45 εἰς ἀνάλογα μέρη πρὸς τοὺς $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, δυνάμεθα νὰ πόλ]σωμεν πάντας ἐπὶ 6 (ἐλ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν) καὶ νὰ μερίσωμεν τὸν 45 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 4, 5, 6. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\chi=\frac{45\times4}{15}=12,\quad \psi=\frac{45\times5}{15}=15,\quad \omega=\frac{45\times6}{15}=18.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 694) Νὰ μερισθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 70, 60, 20, 100 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.

695) Νὰ μερισθῇ ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4}$, 0,5, $\frac{40}{24}$ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 5, 7, 8.

696) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 127 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς ἀριθμοὺς $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{10}$.

697) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 182 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$.

698) Τρία παιδία ἔχουσι κατὰ σειρὰν ἡλικίαν 12, 13, 15 ἐτῶν καὶ πρόκειται νὰ μεταφέρωσι βάρος 10 ὀκάδων ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των. Πόσας ὀκάδας θὰ μεταφέρῃ ἕκαστον;

699) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκε περιουσίαν 513000 δραχμῶν καὶ παρήγγειλε νὰ μοιρασθῇ αὕτη ὡς ἑξῆς. Ἡ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ της, οὗτος δὲ τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ μεριδίου τῆς ἀδελφῆς του. Πόσας δραχ. ἔλαβεν ἕκαστος κληρονόμος;

700) Ποσόν τι ἐμοιράσθη εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τρεῖς ἀριθμούς, ὧν ὁ γ′ εἶναι 6, τὰ δὲ μέρη αὐτοῦ κατὰ σειρὰν 6000, 10000, 12000. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί.

701) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου 1540 δραχμάς. Ὁ α′ εἰργάσθη 5 ἡμέρας, ὁ β′ 7 ἡμέρας, καὶ γ′ 10 ἡμέρας. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

702) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν χειμερινὸν λειβάδιον ἀντὶ 3900 δραχμῶν. Ὁ α′ ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸ 500 πρόβατα, ὁ δὲ β′ 800 πρόβατα. Πόσον ἐνοίκιον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

§ 216. **Ἀριθμοὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους.**

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{4}\times24=6$, $\frac{1}{3}\times24=8$, $\frac{1}{2}\times24=12$ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι εἶναι ἀντίστροφοι τῶν 4, 3, 2, οἱ 6, 8, 12 λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογοι** πρὸς τοὺς 4, 3, 2.

Γενικῶς: *Ἀριθμοί τινες λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους, ἂν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν.*

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 703) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 27 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμούς 2, 3, 4.

704) Νὰ μερισθῇ ὁ 627 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$.

705) Πατὴρ ἀποθανὼν ἀφῆκεν 130000 δραχ. καὶ διέταξε διὰ τῆς διαθήκης νὰ μερισθῶσιν ὡς ἑξῆς. Ἡ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ μερισθῇ εἰς τὰ τρία τέκνα των ἀντιστρόφως ἀναλόγως πρὸς τὰς ἡλικίας των. Τὸ α′ τέκνον των εἶναι 30 ἐτῶν, τὸ β′ 25 καὶ τὸ γ′ 20 ἐτῶν. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος κληρονόμος ;

Προβλήματα ἑταιρείας.

§ 217. **Πρόβλημα I.** *Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον δι' ἐπιχείρησιν ὁ α′ 60000, ὁ β′ 45000 καὶ ὁ γ′ 35000 δραχ. Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις αὕτη ἔδωκε κέρδος 42000 δραχ, πόσον ἀπὸ αὐτὸ θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;*

Λύσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι 1 δραχμὴ ἔφερε κέρδος κ δραχμάς, τὰ κέρδη αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν κ. 60000, κ. 45000, κ 35000 δραχ, ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων. Πρέπει λοιπὸν αἱ 42000 δραχ. νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 60000, 45000, 35000.

Ὥστε τὰ μερίδια α, β, γ τῶν συνεταίρων εἶναι

$$\alpha = \frac{42000 \times 60000}{140000} = 18000 \text{ δραχ, } \beta = 13500 \text{ δραχ. καὶ}$$

$$\gamma = 10500 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα : *Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα, οἱ δὲ χρόνοι ἴσοι, τὸ κέρδος (ἢ ἡ ζημία) μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κεφάλαια.*

§ 218. **Πρόβλημα. II.** *Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 25000 δρ. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 25000 δρ. Μετὰ 2 μῆνας προσέλαβεν καὶ γ′ καταθέσαντα 25000 δρ. Μετὰ ἓν ἔτος εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 22000 δραχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;*

Λύσις. Τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κατὰ σειρὰν 18, 14, 12 μῆνας. Ἐὰν δὲ εἰς ἕνα μῆνα ἕκαστος κερδίζῃ κ δραχμάς, τὰ κέρδη αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν κ.18, κ.14, κ.12 δραχ. Πρέπει λοιπὸν αἱ 22000 δραχ. νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 18, 14, 12. Εἶναι ἑπομένως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\alpha=\frac{22000\times18}{44}=9000$ δραχ. $\beta=7000$ δραχ. καὶ $\gamma=6000$ δραχ.

Ἄρα: *Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα, οἱ δὲ χρόνοι διάφοροι, τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους μετρημένους μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.*

§ 219 **Πρόβλημα ΙΙΙ.** *Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 40000 δραχ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 50000 δραχ. Ἐν ἔτος βραδύτερον εὗρον ζημίαν 22000 δραχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς;*

Λύσις. Τὸ κεφάλαιον τοῦ α΄ ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 18 μῆνας, τοῦ δὲ β΄ 12 μῆνας. Ἐὰν δὲ 1 δραχμὴ κεφαλαίου φέρῃ εἰς 1 μῆνα ζημίαν κ δραχ, αἱ ζημίαι αὐτῶν θὰ εἶναι $\kappa\times40000\times18$ καὶ $\kappa\times50000\times12$ δραχ. Πρέπει λοιπὸν αἱ 22000 νὰ μερισθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 40000×18 καὶ 50000×12.

Διάταξις τῆς πράξεως.

α΄.	$40000\times18=720000$	$\alpha=\frac{22000\times720000}{1320000}=12000$ δρ.
β΄.	$50000\times12=600000$	$\beta=\frac{22000\times600000}{1320000}=10000$ »
	1320000	

Ἄρα: *Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι, τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μερίζεται εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους μετρημένους μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.*

Τὰ προηγούμενα προβλήματα λέγονται ὅλα **προβλήματα ἑταιρείας.**

Γενικῶς: *Προβλήματα ἑταιρείας καλοῦνται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον αὐτήν.*

Τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ μένουσι τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρους χρόνους εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Διʼ αὐτὸ διακρίνονται τὰ προβλήματα ταῦτα εἰς τὰ ἀνωτέρω τρία κυρίως εἴδη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 706) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμον ἑταιρείαν καὶ κατέθεσαν ὁ α΄ 68000 δραχ. ὁ β΄ 82000 καὶ ὁ γ΄ 56000 δραχ. Μετά τινα χρόνον εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 30900 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς;

707) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέβαλον ὁμοῦ 140000 δρ. καὶ ἐκέρδισαν 56000 δραχ. Ἐκ τούτων ὁ α΄ ἔλαβε 12000δρ. ὁ β΄ 17000 δραχ. καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον κεφάλαιον κατέθεσεν ἕκαστος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

708) Δύο συνέταιροι ἵδρυσαν ἐμπορικὸν οἶκον καταθέσαντες ὁ μὲν α΄ 750000 δραχ, ὁ β΄ 500000 δραχ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβον καὶ γ΄ συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 600000 δραχ. Ἐν ἔτος μετὰ ταῦτα εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 250000 δρχ. ἀπὸ τὰς ὁποίας ὁ α΄ λόγῳ διευθύνσεως τῆς ἑταιρείας θὰ λάβῃ πρὸ τῆς διανομῆς 10 %. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;

709) Πτωχεύσας ἔμπορος ἔχει ἐνεργητικὸν 25000 δραχ. καὶ ὀφείλει εἰς τὸν Α΄ πιστωτήν του 15000 δραχ. εἰς τὸν Β΄ 30000 δραχ. καὶ εἰς τὸν Γ΄ 5000 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων ;

710) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 40500 δραχ. Μετὰ 3 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 40500 δραχμάς· μετὰ ἄλλους τρεῖς μῆνας προσέλαβον καὶ γ΄, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 40500 δραχ. Μετὰ ἓξ μῆνας διέλυσαν τὴν ἑταιρίαν μὲ ζημίαν 34000 δραχ. Πόσον ἐζημιώθη ὁ καθείς ;

711) Δύο συνέταιροι ἐκέρδισαν ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως 20 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου των. Ὁ β΄ τούτων καταθέσας τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων τοῦ α΄ ἐκέρδισε 5640 δραχ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ α΄ καὶ πόσον κεφάλαιον κατέθεσεν ἕκαστος ;

712) Τρεῖς ἔμποροι ἔφερον μαζὶ ἀντὶ 150000 δρ. ὑφάσματα ἐξ Ἀγγλίας, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐκέρδισαν 30000 δραχ. Ὁ γ΄ ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους 5000 δραχ. καὶ εἶχε καταβάλει τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων τοῦ β΄, οὗτος δὲ εἶχε καταβάλλει τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων τοῦ α΄. Πόσα χρήματα κατέθεσεν ἕκαστος καὶ πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ α΄ καὶ β΄ ;

713) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 98000 δραχ. Τὰ κεφάλαια αὐτῶν ἦσαν ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3 καὶ οἱ χρόνοι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;

Προβλήματα μέσου ὅρου.

§ 220. **Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις μίαν ὁμολογίαν τοῦ Α΄ ἀναγκαστικοῦ δανείου πρὸς 64 δραχ. Ἔπειτα ἠγόρασεν ἄλλην τοιαύτην πρὸς 62,50 δραχμὰς καὶ βραδύτερον ἄλλην πρὸς 6,10 δραχ. Μὲ ποίαν κοινὴν τιμὴν ἠδύνατο νὰ ἀγοράσῃ αὐτὰς μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ;*

Λύσις. Ἡ ἀξία τῶν τριῶν ὁμολογιῶν εἶναι

$$(64+62,50+60,10) \text{ δραχ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐὰν δὲ ἠγοράζοντο μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν ὅλαι, ἡ τιμὴ ἑκάστης θὰ ἦτο (64+62,50+60,10) : 3=62,20 δραχ.

Ἡ κοινὴ αὕτη τιμὴ καλεῖται **ἀριθμητικὸν μέσον** ἢ **μέσος ὅρος** τῶν 64, 62,50 καὶ 60,10 δραχ.

Γενικῶς : *Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος συγκεκριμένων καὶ ὁμοειδῶν ἢ ἀφηρημένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος δηλοῖ τὸ πλῆθος αὐτῶν.*

Ἡ χρῆσις τοῦ μέσου ὅρου εἶναι συνηθεστάτη εἰς τὴν στατιστικὴν καὶ τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας.

√ ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 714) Γεωργὸς ἔσπειρεν ἔτος τι τρεῖς ἀγροὺς ἐκτάσεως 20 στρεμμάτων τὸ ὅλον. Ὁ α′ ἀπέδωκε 920 ὀκ. σίτου, ὁ β′ 1350 ὀκ. καὶ ὁ γ′ 1410 ὀκάδας. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ κατὰ στρέμμα ἀπόδοσις τῶν ἀγρῶν τούτων ;

√ 715) Διὰ νὰ εὕρῃ Φυσικός τις τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ἔκαμε 5 σχετικὰ πειράματα. Κατὰ τὸ α′ πείραμα εὗρε ταχύτητα 344 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, κατὰ τὸ β′ 338,5 μ, κατὰ τὸ γ′ 342.10 μ, κατὰ τὸ δ′ 338,4μ, καὶ κατὰ τὸ ε′ 337μ. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐν τῷ ἀέρι ;

√716) Εἰς μίαν πόλιν ἀπέθανον τὸν Ἰανουάριον ἔτους τινὸς 25 ἄτομα, τὸν Φεβρουάριον 20, τὸν Μάρτιον 24 καὶ τὸν Ἀπρίλιον 19. Πόσος εἶναι κατὰ τοὺς μῆνας τούτους ὁ μέσος ὅρος τῶν θανάτων κατὰ μῆνα ;

√717) Ἡ θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο 10°Κ τὴν 9ην π. μ. ὥραν, 10°,3 τὴν 10 π. μ., 10°,4 τὴν 11 π. μ, 10°,6 τὴν 12ην, 11° τὴν 1ην μ. μ, 11°,5 τὴν 2αν μ. μ. 11°,4 τὴν 3ην μ.μ. 11°,3 τὴν 4ην μ.μ. καὶ 10°,2 τὴν 5ην μ.μ. Πόση ἦτο κατὰ μέσον ὅρον ἡ θερμοκρασία κατὰ τὰς ὥρας ταύτας τῆς ἡμέρας ἐκείνης ;

710) Τὸ ὕψος τῆς καταπεσούσης βροχῆς εἴς τινα χώραν ἦτο ἔτους τι 0,0599μ, τὸ ἑπόμενον ἔτος 0,0734μ. καὶ τὸ γ′ ἔτος 0,0209μ. Πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ ὕψους τῆς καταπεσούσης βροχῆς κατὰ τὰ τρία ταῦτα ἔτη ;

Προβλήματα μείξεως καὶ κραμμάτων.

§ 221 **Πρόβλημα Ι.** (α′ εἴδους). *Οἰνέμπορος ἀνέμιξε 500 ὀκάδας οἴνου τῶν 5 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν, μὲ 300 ὀκάδας οἴνου τῶν 5,80 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;*

Λύσις. Τὸ α′ εἶδος τιμᾶται 5 δραχ. ×500=2500 δραχ.

» β′ » » 5,80 ×300=1740 »

Ἄρα τὸ μῖγμα τιμᾶται 4240 » καὶ ἑπομένως κάθε ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 4240 : 800=5,30 δραχμάς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται τὸ πλῆθος τῶν ὁμοειδῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἀναμιγνύονται ἀπὸ κάθε εἶδος καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς τοιαύτης μονάδος ἀπὸ κάθε εἶδος. Ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος τοῦ μίγματος ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ταύτην διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 719) Ἀλευρέμπορος ἀνέμιξε 650 ὀκ. ἀλεύρου τῶν 4 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 350 ὀκ. ἄλλου ἀλεύρου τῶν 6,60 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

720) Παντοπώλης ἀνέμιξε 200 ὀκ. ἐλαίου τῶν 24 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 100 ὀκ. τῶν 30 δραχ. καὶ μὲ 150 ὀκ. τῶν 20 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

721) Οἰνοπώλης ἀνέμιξεν 60 ὀκάδας οἴνου τῶν 6 δραχμῶν μὲ 40 ὀκ. τῶν 4 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ταύτην, ὅπως κερδίζῃ 15% ἐπὶ τῆς ἀξίας της;

722) Μὲ 1200 ὀκ οἴνου τῶν 6,20 δραχμῶν ἀνέμιξεν οἰνοπώλης 150 ὀκ. ὕδατος. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

723) Μὲ 800 ὀκ. οἴνου τῶν 4 δραχ. ἀνέμιξέ τις 200 ὀκ. ἄλλου οἴνου καὶ ἀπετέλεσε μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 4,25 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ β΄ εἴδους ;

724) Παντοπώλης εἶχε 1200 ὀκάδας οἴνου, ὅστις ἐκόστιζε 4,80 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἀνέμιξε δὲ μὲ αὐτὸν 200 ὀκ. ὕδατος. Πόσον % κερδίζει, ἂν πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος εἰς τὴν αὐτὴν τιμήν ;

§ 222. **Πρόβλημα ΙΙ**. *Χρυσοχόος συνέτηξε 6 γραμμάρια κράμματος χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,920 μὲ 10 γραμμάρια ἄλλου χρυσοῦ κράμματος βαθμοῦ καθαρότητος 0,840 καὶ 20 γραμμάρια τρίτου εἴδους χρυσοῦ κράμματος βαθμοῦ καθαρότητος 0,834. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράμματος ;*

Λύσις. Τὰ 6 γρ. τοῦ α΄ ἔχουσι $0{,}920 \times 6 = 5{,}52$ γρ. καθ. χρ.
» 10 » » 6΄ » $0{,}840 \times 10 = 8{,}40$ » » »
καὶ τὰ 20 » » γ΄ » $0{,}834 \times 20 = 16{,}68$ » » »
Ἄρα » 36 » » κράμματος ἔχουσι 30,60 » » »

Εἰς κάθε λοιπὸν γραμμάριον τοῦ κράμματος θὰ εἶναι $30{,}60 : 36 = 0{,}850$ γρ. καθαροῦ χρυσοῦ, ἤτοι ὁ τίτλος τοῦ τελικοῦ κράμματος εἶναι 0,850.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 725) Χρυσοχόος συνέτηξε 50 γραμμάρια ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,830 μὲ 10 γραμμάρια ἄλλου ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,878. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ ἐξ αὐτῶν ἀποτελεσθέντος κράμματος;

726) Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως ἀντιστοιχεῖ 5 γραμμάρια πρὸς ἀξίαν ἑνὸς φράγκου. Ἐὰν συντήξωμεν 3 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα, 5 δίδραχμα καὶ 10 φράγκα, πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράμματος αὐτῶν;

727) Χρυσοχόος συνέτηξε 5 χιλιόγραμμα κράμματος χρυσοῦ τίτλου 0,920 μὲ 3 χιλιόγραμμα ἄλλου χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,840 καὶ μὲ 4 χιλιόγραμμα τρίτου χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,750. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράμματος αὐτῶν;

728) Τεμάχιον ἀργυροῦ κράμματος ἔχει βάρος 6,24 χιλ. καὶ τίτλον 0,950· ἕτερον ἔχει βάρος 5,705 χιλ. καὶ τίτλον 0,842 καὶ τρίτον ἔχει βάρος 10,5 χιλ. καὶ τίτλον 0,740. Ἐὰν συντήξωμεν πάντα ταῦτα καὶ μετ' αὐτῶν 1 χιλιόγραμμον καθαροῦ ἀργύρου, πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου αὐτῶν κράμματος;

§ 223. **Πρόβλημα III.** (δ' εἴδους μείξεως). *Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α' ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 6,20 δραχ. τοῦ β' 5,40 δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μίγμα 1600 ὀκ. ἀξίας 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν;*

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους πωλουμένη εἰς τὸ μεῖγμα φέρει ζημίαν 20 λεπ, ἐν ᾧ ἑκάστη τοῦ 6' φέρει κέρδος 60 λ. Ἐὰν ἐλάμβανεν 60 ὀκ. ἐκ τοῦ α' θὰ εἶχε ζημίαν (20×60) λ. Ἐὰν δὲ ἐλάμβανεν 20 ὀκ. ἀπὸ τὸ 6', θὰ εἶχε κέρδος (60×20). Ἐπειδὴ δὲ 20×60=60×20, οὔτε θὰ ἐκέρδιζεν οὔτε θὰ ἐζημιώνετο.

Διὰ μεῖγμα λοιπὸν 80 ὀκ. θὰ λάβῃ 60 ὀκ. ἐκ τοῦ α'
» » 1600 » » » χ » » » »

ἔθεν $\chi=\frac{1600\times 60}{80}=1200$ ὀκ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ τοῦ 6' εἴδους θὰ λάβῃ $\psi=\frac{1600\times 20}{80}=400$ ὀκ.

Διάταξις πράξεως

Τιμὴ 1 ὀκ. α' εἶδ. 6,20 — 60 λ. κέρδ.
» 1 » μίγματ. — 6
» 1 » 6' εἶδ. 5,40 — 20 λ. ζημ.

Ἀναλογία: 60 ὀκ. α' μὲ $\frac{20}{80}$ » 6'

$\chi=\frac{1600\times 60}{80}=1200$ ὀκ., $\psi=\frac{1600\times 20}{80}=400$ ὀκ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ἡ ἀξία ὡρισμένης μονάδος ἑκατέρου τῶν εἰδῶν, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ ἀναμίξωμεν καὶ ἡ ἀξία μιᾶς ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας μονάδος τοῦ μείγματος. Ζητεῖται δὲ πόσας τοιαύτας μονάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν μεῖγμα, τὸ ὁποῖον περιέχει δοθὲν πλῆθος τοιούτων μονάδων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 729) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α΄ ἡ ὀκᾶ κοστίζει 7,40 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ β΄ 6,20 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα 2800 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ κοστίζῃ 7 δραχ. τὴν ὀκᾶν ;

730) Παντοπώλης ἔχει δύο εἴδη ἐλαίου· τοῦ α΄ ἡ ὀκᾶ κοστίζει 24 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τοῦ β΄ 20 δραχ. Πόσας ὀκάδας τοῦ α΄ εἴδους πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ 500 ὀκ. τοῦ β΄, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος νὰ κοστίζῃ 23 δραχμάς ;

731) Παντοπώλης ἔχει ἔλαιον, τὸ ὁποῖον κοστίζει 26 δραχ. καὶ ἄλλο τὸ ὁποῖον κοστίζει 22 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα 1500 ὀκ. τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ 28 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίζῃ 20 % ἐπὶ τοῦ κόστους ;

732) Οἰνοπώλης ἔχει 800 ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος κοστίζει 6,20 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτόν, ὥστε πωλῶν τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος πρὸς 5,50 δραχ. νὰ κερδίζῃ 0,54 δραχ. ἀπὸ κάθε ὀκᾶν τοῦ μείγματος ;

733) Παντοπώλης ἀνέμιξε 600 ὀκ. ἐλαίου τῶν 25 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 200 ὀκ. ἄλλου ἐλαίου. Οὕτω δὲ ἐσχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖον ἐκόστιζε 23,475 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ β΄ εἴδους;

734) Οἰνοπώλης ἐπώλει τὸν οἶνον του πρὸς 5,40 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἄλλος γείτων αὐτοῦ εἶχε 400 ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος τοῦ ἐκόστιζε 5,59 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτόν, ὥστε νὰ πωλῇ καὶ αὐτὸς τὴν ὀκᾶν, ὅσον καὶ ὁ γείτων του καὶ νὰ κερδίζῃ 0,20 δραχ. κατ' ὀκᾶν ;

735) Ἀνέμιξέ τις 250 ὀκ. βουτύρου ἀξίας 90 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ λίπος ἀξίας 40 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πωλήσας δὲ τὸ μεῖγμα πρὸς 100 δραχ. τὴν ὀκᾶν ἐκέρδισε 3700 δρχ. Πόσας ὀκάδας λίπους ἔβαλεν;

736) Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τοῦ α΄ ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 6,10 δρχ. τοῦ δὲ β΄ 5,20 δρχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διὰ νὰ ἀποτελέσῃ μεῖγμα 800δκ. τὸ ὁποῖον νὰ πωλήσῃ χονδρικῶς πρὸς 6,645 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδίσῃ 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

§ 224. **Πρόβλημα IV.** *Χρυσοχόος ἔχει 2 κράμματα χρυσοῦ. Τὸ α΄ ἔχει τίτλον 0,920 καὶ τὸ β΄ 0,880. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ καθ' ἕν, διὰ νὰ κάμῃ νέον κράμμα 50 γραμ. καὶ τίτλου 0,896 ;*

Λύσις. Ἀπὸ 1 γραμμ. τοῦ α΄ εἴδους, ὅταν εἰσαχθῇ εἰς τὸ νέον κράμμα, περισσεύει καθαρὸς χρυσὸς $0,920-0,896=0,024$ γραμ. Ἀπὸ 1 δὲ γραμμάριον τοῦ β΄ λείπει $0,896-0,800=0,016$ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ. Ἂν ἑπομένως λάβῃ 16 γραμ. ἀπὸ τὸ α΄, θὰ περισσεύσῃ χρυσὸς $0,024\times16$ γραμ. Ἂν δὲ λάβῃ 24 γραμ. ἀπὸ τὸ β΄, θὰ λείψωσι $0,016\times24$ γραμ.

Ἐπειδὴ δὲ $0,024\times16=0,016\times24$, ἔπεται ὅτι οὔτε θὰ λείψῃ οὔτε θὰ περισσεύσῃ καθαρὸς χρυσός.

Ὥστε διὰ κράμμα 40 γρ. θὰ θέσῃ 16 γρ. ἀπὸ τὸ α΄

» » 50 » » » χ » » »

Ὅθεν $\chi=16\times\frac{50}{40}=20$ γραμ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὸ β΄ θὰ λάβῃ $24\times\frac{50}{40}=30$γρ.

Διάταξις πράξεως

$$\begin{matrix} 0,920 \\ \\ 0,800 \end{matrix} \diagdown\!\diagup \; 0,896 \; \diagup\!\diagdown \begin{matrix} 0,016 \text{ ἔλ.} \\ \\ 0,024 \text{ περ.} \end{matrix}$$

Ἀναλογία

16 γρ. τοῦ α΄ μὲ

$\frac{24}{40}$ » » β΄

ἄρα $\chi=\frac{50\times16}{40}=20$ γραμ. καὶ $\psi=\frac{50\times24}{40}=30$ γραμ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 737) Χρυσοχόος ἔχει δύο κράμματα ἀργύρου, Τὸ α΄ ἔχει τίτλον 0,900 καὶ τὸ β΄ 0,870. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ καθ' ἕν διὰ νὰ κάμῃ νέον κράμμα βάρους 30 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0,890 ;

738) Χρυσοχόος συνέτηξε 50 γραμ. χρυσοῦ κράμματος τίτλου 0,920 μὲ ἄλλο κράμμα τίτλου 0,900. Οὕτω δὲ ἀπετέλεσε νέον κράμμα τίτλου 0,9125. Πόσον ἔθεσεν ἀπὸ τὸ β΄ κράμμα ;

739) Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως ἀντιστοιχεῖ 5 γραμμάρια εἰς ἀξίαν ἑνὸς φράγκου. Ἐὰν λοιπὸν συντήξωμεν 3 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα καὶ 5 δίδραχμα μὲ τεμάχιον καθαροῦ ἀργύρου, πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τούτου, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ κράμμα τίτλου 0,910 ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

§ 225. **Ὁρισμοί.** Ἐμάθομεν (§ 76) ὅτι $3^2=3\times3=9$, $5^2=5\times5=25$. Ὁ 3 ἔχων τετράγωνον τὸν 9 λέγεται ***τετραγωνικὴ ρίζα*** τοῦ 9 καὶ σημειοῦται οὕτω $\sqrt{9}$.

Ὥστε $\sqrt{9}=3$. Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{81}=9$ κτλ.

Γενικῶς: *Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων, λέγονται ***τέλεια τετράγωνα.*** Τοιοῦτοι π.χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 6, 9, 16 κτλ. Ὁ ἀριθμὸς 42 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τὸ ἀμέσως μικρότερον αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον εἶναι ὁ 36. Οὗτος ἔχει τετρ. ρίζαν 6. Ὁ 6 λέγεται καὶ ***τετρ. ρίζα*** τοῦ 42 ***κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.***

Γενικῶς: *Τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀκεραίου ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀμέσως μικροτέρου αὐτοῦ τελείου τετραγώνου.*

Ἐνθυμούμενοι τὰ τετράγωνα τῶν μικροτέρων τοῦ 10 ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετρ. ρίζαν τῶν μικροτέρων τοῦ 100 ἀριθμῶν.

§ 226. **Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν ***τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν 127449 τετρ. μέτρα.*** Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι χ, τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι χ^2. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $\chi^2=127449$. Ὁ ἀριθμὸς χ ἔχει λοιπὸν τετράγωνον τὸν 127449 καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ $\sqrt{127449}$, ἤτοι πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 127449. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 127449, γίνεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Α΄) Κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 100 Γ΄) κανόνα ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἐκθέτας αὐτῶν διὰ 2, ἂν εἶναι ὅλοι ἄρτιοι. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $127449=3^2\times7^2\times17^2$ καὶ $\sqrt{127449}=3\times7\times17=357$.

Β΄) Χωρίζομεν αὐτὸν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς διψήφια

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τμήματα, (τὸ α΄ πρὸς τὰ ἀριστερὰ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον). Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 12, ἤτις εἶναι 3 (κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μ.). Τὸ εὑρεθὲν ψηφίον 3 εἶναι τὸ α΄ ψηφίον τῆς ζητουμένης τετρ. ρίζης, γράφεται δὲ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 12 τὸν 3^2 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα 74. Τοῦ ἀριθμοῦ 374 χωρίζομεν τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας 37 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ 3 ἤτοι διὰ τοῦ 6. Τὸ πηλίκον 6 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 6, συγχρόνως δὲ καὶ ὑποκάτω καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $66\times6=396$.

Ἐπειδὴ τοῦτο δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 374, δοκιμάζομεν οὕτω τὸν ἀμέσως μικρότερον ἀκέραιον 5· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $65\times5=325$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 374, τὸ ε΄ ψηφίον τῆς τετρ. ρίζης εἶναι 5 καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ α΄, ἤτοι τοῦ 3.

Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον 325 ἀπὸ τοῦ 374 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 49 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα 49· οὕτω δὲ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 4949. Τούτου χωρίζομεν τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας διαιροῦμεν διὰ τοῦ 35×2 ἤτοι διὰ τοῦ 70. Τὸ πηλίκον $496:70$ ἤτοι 7 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 70, συγχρόνως δὲ καὶ ὑποκάτω καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $707\times7=4949$, ὅπερ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 4949 καὶ ἀφήνει ὑπόλοιπον 0.

Τὸ 7 εἶναι λοιπὸν τὸ γ΄ ψηφίον τῆς ρίζης καὶ γράφεται δεξιὰ τοῦ 5. Οὕτως εὑρέθη ὅτι $\sqrt{127449}=357$.

Ἂν ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{127462}$ θὰ εὑρίσκομεν 357 καὶ θὰ ἔμεινεν ὑπόλοιπον 13. Εἶναι λοιπὸν ὁ 357 τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τοῦ 127462.

Διάταξις τῆς πράξεως

$12\|74\|62$	357	
9	65	707
$37\|4$	5	7
325	325	4949
$496\|2$		
4949		
13		

Πρὸς βεβαίωσιν εὑρίσκομεν τὸ $357\times357=127449$ καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον 13, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 127462.

ΣΗΜ. Ἂν πηλίκον τι τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9. Ἂν δὲ πηλίκον τι εἶναι 0, τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι 0.

Ἂν ὑπόλοιπόν τι εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ εὑρεθέντα ψηφία τῆς τετραγ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρίζης, τὸ τελευταῖον ἀπὸ τὰ ψηφία ταῦτα εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς καὶ πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἀνὰ μίαν, μίαν 1, μέχρις οὗ ἐπιτύχωμεν τὸ ἀληθές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 740) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν 729, 3969, 6604, 11286, 82369, 1435104.

741) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετρ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν 372, 2370, 9248, 37102, 4367280.

742) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολ)ζόμενος ἐπὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ δίδει 729.

743) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει πηλίκον 2601.

§ 227. **Τετρ. ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.** Ἔστω π.χ ὁ ἀριθμὸς 2. Ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$,.....$\frac{14}{10}$, $\frac{15}{10}$, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\frac{1}{100}$, $\frac{4}{100}$,.....$\frac{196}{100}$, $\frac{225}{100}$. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ὁ μὲν $\frac{225}{100}=2,25$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2, οἱ δὲ προηγούμενοι ὅλοι εἶναι μικρότεροι τοῦ 2.

Ἀπὸ τούτους δὲ πάλιν μεγαλύτερος εἶναι ὁ $\frac{196}{100}$ ἢ 1,96, ὁ ὁποῖος εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$ ἢ 1, 4. Ὁ ἀριθμὸς 1, 4 λέγεται τετρ. ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Γενικῶς: *Τετρ. ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{10}$, *καλεῖται τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν 10 καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 28 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Πολ)ζομεν αὐτὸν ἐπὶ 10^2 ἢ 100 καὶ τοῦ γινομένου 2800 εὑρίσκομεν τὴν κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μονάδος τετρ. ρίζαν 52. Ταύτην δὲ διαιροῦμεν διὰ 10 καὶ τὸ πηλίκον 5, 2 εἶναι ἡ ζητουμένη τετρ. ρίζα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 744) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 17, 43, 95, 105, 272, 840.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

745) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῶν ἀριθμῶν 1451, 10860, 103608.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΑΠΛΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ

§ 228. **Πρόβλημα Ι.** *Δύο παιδία ἔχουσιν ὁμοῦ 21 βόλους, ἀλλὰ τὸ α΄ ἔχει διπλασίους ἀπὸ τὸ β΄. Πόσους βόλους ἔχει τὸ καθέν:*

Λύσις. Ἂν τὸ β΄ ἔχῃ χ βόλους τὸ α΄ θὰ ἔχῃ χ. 2 ἤ χ+χ βόλους καὶ τὰ δύο ὁμοῦ θὰ ἔχωσι χ+χ+χ ἤ χ. 3.

Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $\chi.3=21$ (1)

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ 3, εὑρίσκομεν (§ 65 Δ΄) ὅτι $\chi=7$. Θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ β΄ παιδίον 7 βόλους, τὸ δὲ α΄ $7\times2=14$ βόλους.

§ 229. **Ἐξίσωσις.** Ἡ προηγουμένη ἰσότης (1) ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἰς τὴν θέσιν τοῦ χ τεθῇ ὁ 7· λέγεται δὲ αὕτη ***ἐξίσωσις.*** Ὁ χ λέγεται ***ἄγνωστος*** τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ ἐργασία, μὲ τὴν ὁποίαν εὕρομεν ὅτι ὁ χ πρέπει νὰ γίνῃ 7, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις, λέγεται ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως. Ὅπως δὲ εἴδομεν μαζὶ μὲ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπετύχομεν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προταθέντος προβλήματος. Εἶναι λοιπὸν σπουδαιοτάτη ἡ γνῶσις τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν δὲ τὸν μηχανισμὸν τῆς λύσεως τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων, θὰ λύσωμεν ἀκόμη τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

§ 230. **Πρόβλημα ΙΙ.** *Τὰ ταμεῖα ἐκδρομῶν τῶν τριῶν κατωτέρων τάξεων γυμνασίου ἔχουσιν ὁμοῦ 1860 δρ. Τὸ ταμεῖον ὅμως τῆς β΄ τάξεως ἔχει 40 δραχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸ ταμεῖον τῆς α΄ καὶ τὸ ταμεῖον τῆς γ΄ τάξεως ἔχει 100 δρ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸ ταμεῖον τῆς β΄. Πόσα χρήματα ἔχει τὸ ταμεῖον ἑκάστης τάξεως;*

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ταμεῖον τῆς α΄ ἔχει χ δραχ. τὸ ταμεῖον τῆς β΄ θὰ ἔχῃ (χ+40) δραχ. καὶ τὸ ταμεῖον τῆς γ΄ θὰ ἔχῃ (χ+40+100) δραχμάς. Ἐπομένως τὰ τρία ὁμοῦ ταμεῖα θὰ ἔχωσι χ.3+180 δραχ. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\chi.3+180=1860$.

Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς τὸν 180 εὑρίσκομεν ὅτι $\chi.3=1680$, ὅθεν $\chi=560$. Ὥστε τὸ ταμεῖον τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α΄ τάξεως ἔχει 560 δραχ, τῆς 6΄ ἔχει: 560+40=600 δραχ. καὶ τῆς γ΄ 600+100=700 δραχ.

§ 231. **Πρόβλημα III.** *Πατὴρ εἶναι 38 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς 6 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία ἀπὸ τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ ;*

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο συμβαίνει μετὰ χ ἔτη. Τότε ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 38+χ ἐτῶν ὁ δὲ υἱὸς 6+χ. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι 38+χ=(6+χ). 3.

Ἐπειδὴ δὲ (6+χ).3=18+χ.3, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται 38+χ=18+χ.3, ὅθεν 20+χ=χ.3 ἢ 20+χ=χ+χ+χ καὶ ἑπομένως 20=χ+χ ἢ 20=χ.2. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν 10=χ. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν θὰ γίνῃ μετὰ 10 ἔτη. Πράγματι δὲ τότε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς 16, εἶναι δὲ 48=16×3.

§ 232. **Πρόβλημα IV.** *Ἐὰν ἀπὸ τὰ πρόβατα ποιμένος ἀφαιρεθῶσι 2 καὶ τετραπλασιασθῶσι τὰ ὑπόλοιπα, γίνονται 292 πρόβατα περισσότερα ἀπὸ ὅσα ἔχει. Πόσα πρόβατα ἔχει ;*

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει χ πρόβατα, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν 2 θὰ μείνωσι χ—2. Ἂν δὲ ταῦτα τετραπλασιασθῶσι, θὰ γίνωσι (χ—2).4. Αὐτὰ πρέπει νὰ εἶναι χ καὶ ἀκόμη 292, ἤτοι :

χ+292.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι (χ—2).4=χ+192.

Ἐπειδὴ δὲ (χ—2).4=χ.4—8, αὕτη γίνεται χ.4—8=χ+292. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μειωτέος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἔπεται ὅτι χ.4=(χ+292)+8 ἢ (§ 21 Δ΄) χ.4=χ+300, ὅθεν χ.3=300 καὶ χ=100.

§ 233. **Πρόβλημα V.** *Οἰκοδεσπότης λαμβάνει ἀπὸ μίαν οἰκίαν 2400 δραχ. ἐνοίκιον τὸν μῆνα. Εἶναι δὲ τὸ ἐνοίκιον τοῦ ἰσογείου τὸ τρίτον τοῦ ἐνοικίου τοῦ ἄνω πατώματος. Πόσον ἐνοίκιον λαμβάνει ἀπὸ κάθε διαμέρισμα ;*

Λύσις. Ἂν ἀπὸ τὸ ἄνω πάτωμα λαμβάνῃ ἐνοίκιον χ δρ, ἀπὸ τὸ ἰσόγειον θὰ λαμβάνει $\frac{\chi}{3}$ δραχ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\chi+\frac{\chi}{3}=2400$.

Ἐὰν τοὺς δύο τούτους ἴσους πολ]σωμεν ἐπὶ 3 εὑρίσκομεν $\left(\chi+\frac{\chi}{3}\right).3=7200$, ὅθεν (§ 44, 121) χ.3+χ=7200 ἢ χ.4=7200 καὶ ἑπομένως χ=1800. Λαμβάνει λοιπὸν ἀπὸ τὸ ἄνω πάτωμα 1800 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ ἰσόγειον $\frac{1800}{3}=600$ δραχ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

§ 234. **Πρόβλημα VI.** *Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἥμισυ ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν 5, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον αὐτοῦ αὐξηθὲν κατὰ 5. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;*

Λύσις. Ἐὰν εἶναι χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$. Ἑπομένως κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{2}-5=\frac{\chi}{4}+5$. Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν $\left(\frac{\chi}{2}-5\right)4=\left(\frac{\chi}{4}+5\right)4$, ἢ $\chi.2-20=\chi+20$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μειωτέος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἔπεται ὅτι $\chi.2=(\chi+20)+20$ ἢ $\chi.2=\chi+40$, ὅθεν $\chi=40$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 746) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $\chi+7=13$, $3\chi+4=\chi+6$, $7\chi+3=3\chi+6$, $5\chi-10=3\chi+10$.

747) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $3(\chi+1)=6$, $5(\chi-2)=3\chi+6$, $24-(\chi+1)=19$, $7\chi-(\chi+1)=17$.

748) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις $\frac{\chi}{2}+1=3$, $\frac{2\chi}{3}-1=5$, $\frac{\chi}{2}+3=\frac{\chi}{3}+5$, $\frac{\chi}{2}-1=\frac{\chi}{5}+5$, $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=\frac{\chi}{2}+2$, $\frac{\chi}{5}-1=\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{2}-23$.

749) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ μὲ δίδραχμα καὶ μονόδραχμα εἰς τὸ αὐτὸ πλῆθος 45 δραχμάς. Πόσα δίδραχμα καὶ πόσα μονόδραχμα θὰ δόσῃ ;

750) Δύο παιδία ἔχουσι 48 βόλους, ἀλλὰ τὸ ἓν ἔχει τριπλασίους ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσους βόλους ἔχει κάθε παιδίον ;

751) Μὲ 436,8 δραχμὰς ἠγόρασέ τις ἰσάριθμα χαρτόσημα τῶν 5, τῶν 8 καὶ τῶν 15 δραχμῶν. Πόσον ἠγόρασε ἀπὸ κάθε εἶδος ; (Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἐπιβαρύνεται μὲ 30 %).

752) Πατὴρ θελήσας νὰ δόσῃ ἀπὸ 4 μῆλα εἰς κάθε τέκνον του εἶδεν ὅτι τοῦ ἔλειπον 4 μῆλα. Ἔπειτα ἔδωκεν ἀπὸ 3 καὶ ἐπερίσσευσεν 1. Πόσα τέκνα εἶχεν ;

753) Ἠγόρασέ τις μῆλα πρὸς 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ κυδώνια πρὸς 5 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκε τὸ ὅλον 170 δραχ. Ἦσαν δὲ τὰ μῆλα καὶ τὰ κυδώνια ὁμοῦ 12 ὀκ. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ μῆλα καὶ πόσα τὰ κυδώνια ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

754) Τοκίσας τις τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του πρὸς 8% καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ πρὸς 10% λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 7200 δραχ. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐτόκισεν ;

755) Ἐτόκισέ τις ποσὸν χρημάτων πρὸς 10% καὶ ἄλλο ποσὸν ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτοῦ πρὸς 8% ἐτησίως. Λαμβάνει δὲ ἀπὸ τὸ α΄ ἐτήσιον τόκον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν τόκον τοῦ β΄ κατὰ 120 δραχ. Πόσα χρήματα ἐτόκισε πρὸς 10% καὶ πόσα πρὸς 8% ;

756) Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἑταιρικὴν ἐπιχείρησιν 27000 δραχ. Τὸ κεφάλαιον δὲ τοῦ β΄ ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ α΄ καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦ γ΄ ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ β΄. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθείς ;

757) Οἰνοπώλης ἔχει 350 ὀκ. οἴνου, ὁ ὁποῖος ἐκόστισεν 6 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ αὐτόν, ὅπως ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος κοστίζῃ 5 δραχμάς ;

758) Ποιμὴν ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα ἔχει ἀπήντησεν. Ἐὰν εἶχον τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον καὶ τὰ τρία πέμπτα τῶν προβάτων μου, θὰ εἶχον 39 περισσότερα, ἀπὸ ὅσα ἔχω. Πόσα πρόβατα εἶχεν;

759) Ἔχει τις 30 γραμμάρια ἀργυροῦ κράμματος τίτλου 0,850. Πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ συντήξῃ μὲ αὐτό, ὅπως τὸ νέον κράμμα ἔχῃ τίτλον 0,900 ;

760) Λαχανοπώλης ἠγόρασε γεώμηλα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐκόστισαν 5 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Πωλήσας δὲ τὸ ἥμισυ αὐτῶν πρὸς 6 δραχ. καὶ τὰ ἄλλα πρὸς 6,50 δραχ. τὴν ὀκᾶν ἐκέρδισεν 623 δραχμάς. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ γεώμηλα ταῦτα ;

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 22 Αὐγούστου 1933

Ἀριθ. Πρωτ. 41062
Διεκπ. . .

Πρὸς

τὸν κ. Ν. Νικολάου καθηγητὴν

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ ταὐτ/ρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, ἐκδοθείσης τὴν 31 Ἰουλίου 1933 καὶ δημοσιευθείσης τὴν 5-8-1933 εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 77 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, στηριζομένης δὲ εἰς τὸ ἄρθρ. 3 τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 41 πρακτικὸν ταύτης, ἐνεκρίθη ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α', Β', Γ', τάξεως τῶν Γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **Ἀριθμητικὴ** βιβλίον σας.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Τμηματάρχης
Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ

«Περὶ τοῦ τρόπου τῆς διατιμήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων».

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεως των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15 % τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτος ἐπὶ τοῦ ἐσωφύλλου μέρους τοῦ ἐξωφύλλου ἢ τῆς τελευταίας σελίδος τούτου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής