ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν
καὶ τῆς Ἀνωτ. Σχολῆς Ἐμπορικῶν καὶ Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν.

ΕΛ[illegible]

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ

ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ, ΤΑ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΑ κλπ.

Ἐγκεκριμένη ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{41062}{31.7.33}$ ἀπόφασιν τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου διὰ τὰ σχολικὰ ἔτη 1933—1938.

Ἔκδοσις δεκάτη τρίτη

Ἀντίτυπα 6000

Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας		$\frac{51131}{26\text{-}9\text{-}33}$
Τιμὴ ἄνευ βιβλιοσήμου	Δρχ.	14,40
Ἀξία βιβλιοσήμου	»	5,80
Προσθ. φόρ. Ἀναγκ. Δανείου	»	1,80
Συνολικὴ τιμὴ Δρχ.		22.—

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ 52
1933

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως

ΤΥΠΟΙΣ, ΑΘΑΝ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
ΟΔΟΣ ΛΕΚΑ—ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περὶ ἀριθμήσεως καὶ ἀριθμῶν.

§ 1. *Ἡ Ἀριθμητικὴ* μᾶς διδάσκει πῶς θὰ λογαριάζωμεν μὲ ἀριθμούς. Διὰ τοῦτο θὰ μάθωμεν πρῶτον πῶς προκύπτουν καὶ πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί.

Ποσὸν λέγεται ὅ,τι εἰμπορεῖ νὰ αὐξηθῇ καὶ νὰ ἐλαττωθῇ. Π.χ. ὅμιλος ἀπὸ παιδιά, ἀγέλη ἀπὸ πρόβατα κλπ.

Πλῆθος καλεῖται ἕνα ποσὸν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη αὐτοτελῆ καὶ καθένα εἰμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ χωριστὰ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Π.χ. ἕνα ποσὸν βιβλία.

Μονὰς λέγεται ἕνα ἀπὸ πολλὰ ὅμοια πράγματα, ἢ πολλὰ ὅμοια τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἕνα. Π. χ. ἕνα μῆλο ἢ ἕνα κιβώτιον μῆλα.

Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον ἀπὸ πολλὰς μονάδας ἢ καὶ μία μονάς.

Ἀρίθμησις πλήθους λέγεται ἡ σύγκρισίς του μὲ τὴν μονάδα του. Ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγομεν ὅτι παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ πλήθους ἢ τὸ πλῆθος αὐτό. Π.χ ἂν ἀπὸ τὴν ἀρίθμησιν πλήθους θρανίων εὕρωμεν 15, ὁ 15 θρανία παριστάνει τὸ πλῆθος τῶν θρανίων αὐτῶν.

Ἀρίθμησις λέγεται ἡ διδασκαλία διὰ τὴν γραφὴν καὶ ἀπαγγελίαν τῶν ἀριθμῶν.

Ἀριθμὸς λέγεται *συγκεκριμένος* μέν, ἂν συνοδεύεται μὲ τὸ ὄνομα τοῦ πλήθους τὸ ὁποῖον παριστάνει, π. χ. οἱ 6 θρανία, 10 παιδιά, *ἀφηρημένος* δέ, ἂν δὲν εἶνε συγκεκριμένος, π. χ. οἱ 5, 7 κλπ.

Ὁμοειδεῖς μὲν λέγονται συγκεκριμένοι ἀριθμοί, ἂν παριστάνουν ποσὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους, π.χ. 15 πρόβατα καὶ 7 πρόβατα, *ἑτεροειδεῖς* δέ, ἂν διαφόρων εἰδῶν, π. χ. οἱ 10 ἄνθρωποι καὶ 12 δραχμαί.

§ 2. ***Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.*** Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἴσοι***, ἂν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων, σημειώνομεν δ' αὐτό, ἂν γράψωμεν μεταξύ των τὸ ***=(ἴσον)***, π.χ. 8=8.

Ἐὰν ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς ὁ ἕνας ἔχῃ περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν ἄλλον λέγεται ***μεγαλύτερος*** αὐτοῦ, ὁ ἄλλος ***μικρότερος*** τοῦ πρώτου, οἱ δύο δ' αὐτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄνισοι***, π.χ. οἱ 3 καὶ 7 εἶνε ἄνισοι, καθὼς καὶ οἱ 12 καὶ 10, σημειώνομεν δ' αὐτὸ οὕτω : $3<7$, $12>10$.

§ 3. Οἱ ἀριθμοὶ ***ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε,....*** λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία δὲν ἔχει τέλος, διότι εἰμποροῦμεν νὰ αὐξάνωμεν καθένα κατὰ μίαν μονάδα καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενόν του.

Διὰ τὴν ὀνομασίαν καὶ ἀπομνημόνευσιν τῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Μὲ δέκα μονάδας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν καὶ ***ἁπλᾶς μονάδας***, σχηματίζομεν μίαν ***δεκάδα*** ἢ ***μονάδα β' τάξεως***· μὲ δέκα δεκάδας σχηματίζομεν μίαν ***ἑκατοντάδα*** ἢ ***μονάδα γ' τάξεως***· μὲ δέκα ἑκατοντάδας μίαν ***χιλιάδα*** ἢ ***μονάδα δ' τάξεως*** κλπ. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν λέγεται ***δεκαδικὸν σύστημα*** τῆς ἀριθμήσεως.

Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ δεκάς, ἑκατοντάς, χιλιάς, δεκὰς χιλιάδων, ἑκατοντὰς χιλιάδων, τὸ ἑκατομμύριον κλπ. λέγονται μονάδες διαφόρων τάξεων.

Κάθε ἀριθμὸς εἰμπορεῖ νὰ χωρισθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ὥστε ἀπὸ κάθε τάξιν νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

Ἀσκήσεις.

1. Πόσας ἑκατοντάδας, πόσας δεκάδας χιλιάδων καὶ πόσας μονάδας ἔχει μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ; Ἓν ἑκατομμύριον πόσας χιλιάδας, πόσας δεκάδας ἔχει ;

2—3. Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει μία δεκὰς χιλιάδων ; μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ;

4—5. Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει τὸ ἑκατομμύριον ; τὸ δισεκατομμύριον πόσας χιλιάδας ἔχει ;

6. Μία μονὰς μιᾶς τάξεως πόσας μονάδας ἔχει τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως ;

7—10. Ποίας τάξεως μονὰς εἶνε ἡ δεκάς; ἡ ἑκατοντὰς τῶν χιλιάδων; τὸ ἑκατομμύριον; τὸ δισεκατομμύριον;

Πῶς γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν τοὺς ἀριθμούς.

§ 4. Διὰ νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμούς, ἔχομεν ἀντὶ τῶν λέξεων ***ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, μηδέν***, τὰ σύμβολα, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 καὶ λέγονται ψηφία ***σημαντικά***, ἐκτὸς τοῦ 0, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν ἔλλειψιν μονάδων, ἀντὶ δὲ τῶν ὀνομάτων τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τὰ Μ, Δ, Ε, Χ, Δχ. Εχ, Με, Δε, κλπ. Μὲ αὐτὰ εἱμποροῦμεν νὰ γράψωμεν π.χ. τὸν ὀκτὼ χιλιάδες τετρακόσια εἴκοσι πέντε οὕτω: 8 Χ4 Ε2Δ5 Μ. Ὁρίζομεν τώρα ὅτι

«κάθε ψηφίον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε δεξιὰ ἄλλου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως»

καὶ παραλείποντες τὰ Μ, Δ, Ε, Χ, κλπ. ἔχομεν π.χ. ἀντὶ τοῦ 8Χ 4Ε 2 Δ 5Μ τὸν 8425. Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν της τὸ 0, π χ. τὸ 8 χιλιάδες πενῆντα ἕξ γράφομεν 8056.

Μονοψήφιος λέγεται ἀριθμός, ἂν ἔχῃ ἕνα ψηφίον, καθὼς οἱ 2, 3, 1, 7, 9· ***διψήφιος***, ἂν ἔχῃ δύο, ***τριψήφιος***, ἂν τρία καὶ πολυψήφιος ἂν ἔχῃ πολλά, π. χ. ὁ 83574.

§ 5. Ἂν ἔχωμεν π.χ. τοὺς 36, 845, 1527 τοὺς ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς: τριάντα ἕξ, ὀκτακόσια σαράντα πέντε, χίλια πεντακόσια εἴκοσι ἑπτά.

Ἔστω ἀκόμη ὁ πολυψήφιος ἀριθμὸς 68542387. Διὰ νὰ τὸν ἀπαγγείλωμεν, τὸν χωρίζομεν εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά· ἤτοι 68 542 387 καὶ λέγομεν· 68 ἑκατομμύρια 542 χιλιάδες 387. Τὸ πρῶτον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ ἀριστερὰ εἱμπορεῖ νὰ εἶνε διψήφιον ἢ μονοψήφιον.

Ὁμοίως πρός τ' ἀνωτέρω ἀπαγγέλλομεν οἱονδήποτε ἀριθμόν.

§ 6. Ἔστω ὁ 143. Αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 ἁπλᾶς μονάδας, 4 δεκάδας καὶ 1 ἑκατοντάδα. Ἐπειδὴ κάθε ἑκατοντὰς ἔχει 10 δεκάδας, τὸ σύνολον τῶν δεκάδων τοῦ 143 εἶνε 14. Ἀλλ' ὁ 14 προκύπτει ἀπὸ τὸν 143 ἂν παραλείψωμεν τὸ 3.

Γενικῶς, « ***τὸ σύνολον τῶν μονάδων ὡρισμένης τάξεως ἀριθμοῦ εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὸν δοθέντα,*** *ἂν παραλείψωμεν τὰ ψηφία κατωτέρας τάξεως τῆς ὡρισμένης».* Π.χ. τοῦ 3547 τὸ σύνολον τῶν δεκάδων του εἶνε 354, τῶν ἑκατοντάδων 35, τῶν χιλιάδων 3, τῶν ἁπλῶν μονάδων 3547.

Ἀσκήσεις.

11—15. Νὰ γραφοῦν μὲ ψηφία οἱ ἀριθμοί:
7Χ 8Μ 3Ε· 7Χ 8Δ 3Ε· 7Χ 8Ε 3Μ· 7Με· 84Μκ.

16—24. Ὁμοίως οἱ: 25Δ, 183Δ, 95Ε, 7Ε, 9Ε 3Μ 2Δ, 4Ε 5Μ 7Δ, 2Μ 6Ε, 2Χ 2Ε 4Δ, 7Ε 3Μ 2Χ.

25—41. Ἀπαγγείλατε τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς κατὰ δύο τρόπους: 245 καὶ 569· 907· 1007· 2635· 7400· 64000· 87000· 147053· 600070· 6375545· 802402· 2000900· 1305262· 9324652· 13005142· 7000000000· 13605962147.

42—46. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κλπ. τῶν 389· 5118930· 6396· 84200· 264800.

47—51. Πόσα κατοστάρικα, χιλιάρικα ἐν ὅλῳ ἔχουν: 1000 δρ. καὶ 10000· 100000· 1000000· 685473 δραχμαί; 834700 δρ;

Ἑλληνικὴ καὶ Ρωμαϊκὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

§ 7. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ὀλίγα ἄλλα σύμβολα. Τοὺς 1,2,3,4,5,6,7,8,9 παρίστανον μὲ τὰ α΄,β΄,γ΄,δ΄,ε΄,στ΄,ζ΄,η΄,θ΄, ὅπου τὸ στ΄ λέγεται *στίγμα*.

Τοὺς 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 παρίστανον μὲ τὰ ι΄, κ΄, λ΄, μ΄, ν΄, ξ΄, ο΄, π΄, ϟ΄, καλεῖται δὲ τὸ ϟ *κόππα*. Τοὺς 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 παρίστανον μὲ τὰ ρ΄, σ΄, τ΄, υ΄, φ΄, χ΄, ψ΄, ω΄, ϡ΄ τὸ δὲ ϡ λέγεται *σαμπί*. Διὰ τὰς χιλιάδας μετεχειρίζοντο τὰ αὐτὰ σύμβολα, ἀλλ' ὁ τόνος ἐτίθετο ἀριστερὰ καὶ κάτω τοῦ συμβόλου, π.χ. τὰ 1000, 2000,.... παρίστανον μὲ ͵α, ͵β,....

Μὲ τὰ σύμβολα αὐτὰ εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν. Π.χ τὸν 1645 γράφομεν ͵αχμε΄, τὸν 68 μὲ ξη΄ κλπ.

Τὴν ἑλληνικὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμεν καὶ τώρα ἐνίοτε, π.χ. διὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν κεφαλαίων καὶ παραγράφων τῶν βιβλίων.

§ 8. Οἱ ἀρχαῖοι Ρωμαῖοι μετεχειρίζοντο ἄλλα σύμβολα διὰ τοὺς ἀριθμούς. Παρίστανον

τοὺς	1,	2,	3,	4	5,	6	7	8		9	10
μὲ	I,	II,	III,	IIII ἢ IV,	V,	VI,	VII,	VIII	ἢ IIX,	IX,	X.

Τὸ 50 μὲ τὸ L, τὸ 100 μὲ τὸ C, τὸ 500 μὲ τὸ D καὶ τὸ 1000 μὲ τὸ M. Μὲ αὐτὰ εἱμποροῦμεν νὰ γράφωμεν διαφόρους ἀριθμούς, π.χ.

τοὺς	11	12	13	14	15	κλπ,
μὲ	XI	XII	XIII	XIV	XV	»
τοὺς	20	21	22	25		κλπ.
μὲ	XX	XXI	XXII	XXV		»
τοὺς	30	40	50	60	70	κλπ.
μὲ	XXX	XL	L	LX	LXX	»
τοὺς	101	102	103	110	κλπ.	
μὲ	CI	CII	CIII	CX	»	
τοὺς	19	35	90	108	κλπ.	
μὲ	IXX	XXXV	XC	CVIII	»	
τοὺς	1821			1933		
μὲ	MDCCCXXI			MCMXXXIII		

Ἡ γραφὴ αὐτὴ τῶν ἀριθμῶν λέγεται ***ῥωμαϊκὴ*** ἢ ***ῥωμαϊκὸν σύστημα*** γραφῆς αὐτῶν καὶ χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε διὰ νὰ παριστάνουν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν εἰς τὰ ὡρολόγια, τῶν κεφαλαίων εἰς τὰ βιβλία, τὴν τάξιν ἑνὸς μηνός, ὅταν ὡς πρῶτος λαμβάνεται ὁ Ἰανουάριος. Π.χ. σημειώνομεν μὲ 14/II τὴν 14 Φεβρουαρίου, μὲ 3/X τὴν 3 Ὀκτωβρίου κλπ.

Ἀσκήσεις.

52—62. Γράψατε τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς μὲ ψηφία:
LIX, LXXV, XLIII, CIII, CXXIII, LXXIIX, XCVII, MMCCCIV, CML, XXIV, CCIXX.

62—81. Γράψατε τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς μὲ τὴν Ἑλληνικὴν καὶ Ρωμαϊκὴν γραφήν: 5, 7, 19, 26, 65, 93, 72, 104, 209, 405, 563, 1800, 1845, 1453, 1927, 1931, 2045.
Τί σημαίνει 4/VII; 11/III; 17/X;

§ 9. **Αἱ κυριώτεραι μονάδες μετρήσεως εἰς τὴν Ἑλλάδα.**

Ἐφαρμογὴν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἔχομεν εἰς τὴν μέτρησιν διαφόρων ποσῶν, εἰς τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν μονάδας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται σύμφωνα μὲ αὐτό Π.χ. διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀποστάσεων ἢ μηκῶν ἔχομεν ὡς μονάδα ***τὸ μέτρον***, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, καὶ καθένα λέγεται ***παλάμη***, Κάθε παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ καθένα λέγεται ***δάκτυλος*** ἢ ***πόντος***. Ὥστε τὸ μέτρον ἔχει 100 πόντους. 1000 μέτρα ἀποτελοῦν 1 ***χιλιόμετρον*** ἢ ***στάδιον***.

Μονὰς τῶν νομισμάτων εἶνε ἡ ***δραχμή***, ἡ ὁποία ἔχει 100 ***λεπτά***. Ἐκτὸς ἀπ' αὐτὴν ἔχομεν τὸ ***δίδραχμον*** (2 δρ.), τὸ ***τάληρον*** (5 δρ.), τὸ ***10δραχμον*** (10 δρ.), τὸ ***20δραχμον*** (20 δρ.), τὸ ***50δραχμον*** (50δρ.), τὸ ***100δραχμον*** ἢ ***κατοστάρικο*** (100 δρ.) τὸ ***500δραχμον*** ἢ ***πεντακοσάρικο*** (500 δρ.), τὸ ***1000δραχμον*** ἢ ***χιλιάρικο*** (1000 δρ.), καὶ τὸ ***5χιλιόδραχμον*** (5 χιλ. δρ.).

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους ἔχομεν μονάδα τὴν ***ὀκᾶν***, ἡ ὁποία ἔχει 400 ***δράμια***· 44 ὀκάδες ἀποτελοῦν ἕνα ***στατῆρα*** (καντάρι).

Διὰ τὴν μέτρησιν ὑφασμάτων ἔχομεν μονάδα τὸν ***πῆχυν***, ὁ ὁποῖος ἔχει 64 πόντους (περίπου) καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ***ρούπια***.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου ἔχομεν μονάδα τὴν ***ἡμέραν***, ἡ ὁποία ἔχει 24 ***ὥρας***· κάθε ὥρα ἔχει ***60 πρῶτα λεπτὰ*** καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν 60 ***δεύτερα λεπτά***. Τὰ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ σημειώνομεν μὲ μικρὸν λ καὶ δ, π.χ. 25^{λ}, 30^{δ}.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οἱ λογαριασμοὶ γίνονται μὲ διαφόρους πράξεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν μὲ τοὺς ἀριθμούς. Διὰ τοῦτο θὰ μάθωμεν πῶς γίνονται αἱ πράξεις αὐταί.

Πρόσθεσις.

§ 10. ***Πρόσθεσις*** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἄλλον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μονάδας αὐτῶν.

Οἱ μὲν ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν λέγονται ***προσθετέοι***, ὁ δὲ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν λέγεται ***ἄθροισμα***.

Τὴν πρόσθεσιν σημειώνομεν μὲ τὸ + ***(σὺν ἢ καὶ ἢ πλέον)*** καὶ τὸ γράφομεν μεταξὺ τῶν προσθετέων. Π. χ. 35+28+42.

Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 35, 28, 42 γράφομεν καὶ οὕτω (35+28+42).

Οἱ προσθετέοι εἰμποροῦν νὰ εἶνε ἀφῃρημένοι ἢ ὅλοι συγκεκριμμένοι ἀλλ' ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶνε ὁμοειδὲς μὲ αὐτούς.

11. ***Θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως.***

Ἂν ζητοῦμεν π.χ. τὸ 25δρ.+30δρ.+40δρ., ***τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν μὲ οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους.*** Π. χ. 25δρ.+30δρ.+40δρ.=30δρ.+40δρ.+25 δρ. Διότι κάθε ἄθροισμα ἀπ' αὐτὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔχουν οἱ προσθετέοι.

12. ***Δοκιμὴ προσθέσεως.***

Ἂν θέλωμεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν μία πρόσθεσις ἔγινε χωρὶς λάθος, ἀλλάζομεν τὰς θέσεις τῶν προσθετέων μεταξύ των, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται ***δοκιμὴ*** τῆς προσθέσεως.

13. Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀριθμὸν ἄλλον μονοψήφιον, προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας του τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου ἀνὰ μίαν.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν μονοψηφίους, προσθέτομεν δύο ἀπ' αὐτούς, εἰς τὸ ἄθροισμά των, ἕνα ἄλλον ἀπὸ τοὺς προσθετέους καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις ὅτου τοὺς πάρωμεν ὅλους. Αὐτὰς τὰς προσθέσεις συνειθίζομεν νὰ ἐκτελοῦμεν ἀπὸ μνήμης.

14. Ἐπειδὴ τὸ 0 παριστάνει τὴν ἔλλειψιν μονάδων, ἕπεται ὅτι ἔχομεν π. χ. 7+0=7, 0+6=6, 0+0=0.
Διατυπώσατε τοῦτο εἰς κανόνα.

15. Εἶνε φανερὸν ὅτι, ***ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθοῦν ἴσοι προκύπτουν ἴσοι.***

Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

§ 16. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα 8 ὀκ.+30 ὀκ.+12 ὀκ.

Ἐπειδὴ 8 ὀκ.+30 ὀκ.+12 ὀκ.=12 ὀκ.+8 ὀκ.+30 ὀκ., ἂν διακόψωμεν τὴν πρόσθεσιν, ἀφοῦ εὕρωμεν τὸ 12ὀκ.+8ὀκ.==20 ὀκ., θὰ ἔχωμεν 20 ὀκ.+30 ὀκ. : ἤτοι

8 ὀκ.+30 ὀκ.+12 ὀκ.=20 ὀκ.+30 ὀκ. Δηλαδή, ***«τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν δύο ἢ περισσοτέρους ἀπ' αὐτοὺς ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ἄθροισμά των»***

Π.χ. 32+5+8=40+5=45.

Ἀντιστρόφως· ἂν ἔχωμεν π. χ. τὸ 23+17+15, εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ 23 π. χ. 20+3, ὅτε

23+17+15=20+3+17+15.

Ὁμοίως ἔχομεν π. χ.

36+43=30+6+40+3=30+40+6+3=79.

Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

§ 17. *Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.*

Εἰμποροῦμεν τώρα νὰ μάθωμεν πῶς γίνεται ἡ πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἂν μία οἰκογένεια ἐξώδευσε τὸν Ἰανουάριον 2417δρ., τὸν Φεβρουάριον 2135 δρ., τὸν Μάρτιον 2509 δρ., τὸν Ἀπρίλιον 1928 δρ., καὶ ζητεῖται πόσα ἐξώδευσε τὸ ὅλον, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ 2417δρ.+2135δρ.+2509 δρ.+1928δρ.

Ἐπειδὴ κάθε προσθετέος ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ ψηφία των, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν χωριστὰ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν ψηφίων κάθε τάξεως καὶ νὰ προσθέσωμεν αὐτά. Δι' εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω τοῦ ἄλλου, ὥστε τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶνε εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἀφοῦ σύρωμεν κάτω ὁριζοντίαν γραμμήν, προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία κάθε στή-

$$\begin{array}{r} 2417 \\ 2135 \\ 2509 \\ 1928 \\ \hline 8989 \end{array}$$

λης ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ γράφομεν κάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα προσθέτομεν, ἀπὸ κάθε μερικὸν ἄθροισμα, μόνον τὸν ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων του, τὰς δὲ δεκάδας του προσθέτομεν μὲ τὰ ψηφία τῆς επομένης στήλης. Οὕτω εὑρίσκομεν ἄθροισμα 8989. Δηλαδὴ ἡ οἰκογένεια ἐξώδευσε τὸ ὅλον 8 989 δρ.

§ 18. *Συντομίαι τῆς προσθέσεως.*

Ἂν οἱ προσθετέοι λήγουν εἰς μηδενικά, ***παραλείπομεν*** ἰσάριθμα 0 (δεξιά), προσθέτομεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι μένουν καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα δεξιὰ γράφομεν ὅσα μηδενικὰ παραλείψαμεν ἀπὸ ἕνα προσθετέον. Π.χ. 800+500=8Ε+5Ε=13Ε=1300. Δηλαδὴ λέγομεν: 8+5=13 καὶ δεξιά του γράφομεν δύο 0, ὅτε ἔχομεν 1300.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀριθμὸν 10, 20, 30,... ἢ 100, 200,.. ἢ 1000, 2000,.., προσθέτομεν εἰς τὸ σύνολον τῶν δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων ἢ τῶν χιλιάδων... του τοὺς 1, 2, 3,.., καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα (δεξιὰ) γράφομεν τὰ ἄλλα πρὸς τὰ (δεξιὰ) ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ. Π.χ. 657+30=650+7+30=650+30+7=680+7=687. Δηλαδὴ λέγομεν: 65+3=68 καὶ γράφομεν δεξιὰ τούτου τὸ 7, ὅτε ἔχομεν τὸ 687.

«Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος». Π.χ. $(35+\overline{40}+12)+\overline{20}=35+60+12$. Ἐπειδὴ $(35+40+12)+20 = 35+40+12+20=35+40+20+12=35+60+12$.

§ 19. *Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.*

Ἐπιδιώκομεν νά κάμνωμεν κάθε πρόσθεσιν ἀπὸ μνήμης ἢ συντόμως, ἐν ὅσῳ εἶνε δυνατόν, ὄχι μόνον ὅταν εἶνε οἱ προσθετέοι διψήφιοι, ἀλλὰ καὶ πολυψήφιοι. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας καὶ συντομίας, ὥστε νὰ εὐκολύνωμεν τὴν πρᾶξιν καί, μόνον ὅταν εἶνε πολὺ δύσκολος ἡ πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης, θὰ γράφωμεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω τοῦ ἄλλου κλπ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

82—89. *Ὁμὰς πρώτη* (ἀπὸ μνήμης).

Εὕρετε τὰ 600+300· 200+500· 400+700· 900+200· 600+400· 3000+5000· 700+300+200· 150+20+30+40.

90—91. Ὁμοίως 2000+5000+4000· 51400+400+800+100.

92—97. 145+30· 237+200· 1563+10000· 3264+7000· 45600+3000· 8600+50+60.

98—100. 85000+4000+3000· 1467+4000+3000+2000· 945+900+1000.

101—104. 70+12+13+27· 900+15+35· 20+32+48+12 650+ +32+240+30+8.

105—108. Εὕρετε πόσαι ἡμέραι εἶνε ἀπὸ 12 Μαρτίου — (μέχρι) 28 Ἰουλίου, 20 Μαΐου — (μέχρι) 24 Σ/βρίου, 26 Ἰανουαρίου — 19 Μαΐου, 23 Ὀκτωβρίου — 13 Ἀπριλίου τοῦ ἑπομένου ἔτους.

109—112. Ὁμοίως ἀπὸ 6/V—12X (ἤτοι ἀπὸ 4 Μαΐου — 12 Ὀκτωβρίου), 13/IV — 23/IX, 3/III — 2/VII, 9/VII — 7/V τοῦ ἑπομένου ἔτους.

113. *Ὁμὰς δευτέρα.* Ἐκτελέσατε τὰς ἑπομένας προσθέσεις ὁριζοντίως καὶ κατακορύφως :

6582 +	42495 +	13201 +	6302	=
19203 +	56870 +	7864 +	17147	=
3957 +	3152 +	12300 +	52307	=
15752 +	142405 +	7905 +	804	=
2804 +	859513 +	141407 +	54919	=
...... +	..... +	..... +	.....	= ...

114. Ἔμπορος πωλεῖ ζάχαρι ἀντὶ 10 783 δρ. μὲ ζημίαν 985 δρ. Πόσον τοῦ ἐκόστιζε ;

115. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ κέρδος.

116. Οἰκογένεια ἐξοδεύει κατὰ μῆνα 2 450 δρ. διὰ νοίκι, 380 δρ. διὰ γάλα, 648 δρ. διὰ ψωμὶ καὶ 2 054 δρ. διὰ ἄλλα ἔξοδα. Πόσα ἐξοδεύει τὸ ὅλον ;

117. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ τὰ ἔξοδα τῆς κοινότητος τῆς τάξεώς σας.

118. Ἕνας ἠγόρασε σπίτι ἀντὶ 350 000 δρ. καὶ ἐξώδευσε δι' ἐπιδιόρθωσίν του 35 725δρ., δι' ἄλλα ἔξοδα 3 542δρ. Πόσον θὰ τὸ πωλήσῃ μὲ κέρδος 32 000 δρ. ;

119. Τέσσαρα χωριὰ Α,Β,Γ,Δ εὑρίσκονται εἰς τὸν ἴδιον δρόμον. Ὁ δρόμος ΑΒ εἶνε 1684 μ., ὁ ΒΓ 7108 μ., ὁ δὲ ΓΔ 7418 μ. Πόσος εἶνε ὁ δρόμος μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ ; Πόσος εἶνε ὁ δρόμος μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ;

§ 20. *Παρατήρησις*. Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς προσθετέους, χωρίζομεν εἰς τμήματα τὴν στήλην τὴν ὁποίαν σχηματίζουν, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων ἀπὸ κάθε τμῆμα καὶ τὸ γράφομεν παραπλεύρως, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, ὡς φαίνεται εἰς τὴν ἀπέναντι πρόσθεσιν.
Διὰ δοκιμὴν τοιαύτης προσθέσεως εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα προσθέτοντες ὅλους τοὺς προσθετέους συγχρόνως ἢ χωρίζοντες τοὺς προσθετέους εἰς ἄλλα τμήματα.

2039	
853	
1467	
905	5264
2037	
14652	
956	17645
1831	
835	
15036	
8732	26434
49343	49343

Ἀσκήσεις.

120. Εὕρετε τὴν παραγωγὴν ἅλατος τῶν ἁλυκῶν τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1925 εἰς χιλιόγραμμα. (τὸ χιλιόγραμμον ἔχει 1000 γραμμάρια, ἡ δὲ ὀκᾶ 1280 γραμμάρια).

Ἁλυκαὶ

			(ἐκ μεταφορᾶς)	
Ἀναβύσσου	χγρ. 7 417 000		Λευκ. Ἀλεξάνδρ.	χγ. 5 874 250
Βόλου	» 2 205 719		» Πόλεως	» 4 736 025
Γαντζοῦς	» 2 048 100		Λεχαινῶν	» 522 582
Ἑλούνδας	» 523 920		Μήλου	» 19 42 000
Ζακύνθου	» 1 767 493		Μεσολογ. Ἄσπρη	» 4 932 500
Καλλονῆς	» 8 873 889		» Τουρλίδος	» 7 873 000
Κοπιανῶν	» 507 688		» Σκοποβολῆς	» 227 000
Καραμπουρνοῦ	» 3 757 000		Νάξου	» 12 36 707
Κίτρου	» 10 870 500		Πολυχνίνου	» 75 46 590
Κοπραίνης	» 1 610 000		Σαγιάδος	» 1 604 000
Λευκίμης	» 2 598 000		Σάμου	» 1 624 718
Εἰς μεταφορὰν			Σύνολον	

121. Εὕρετε κατωτέρω τὴν εἰσαγωγὴν καὶ ἐξαγωγὴν τῶν εἰδῶν ἐμπορίου τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1924.

	Εἰσαγωγὴ	Ἐξαγωγὴ
Ζῶα ἐν γένει	226 732 770	3 800
Κτηνοτροφικὰ προϊόντα	267 819 490	114 120 039
Ἀλιείας »	200 977 847	3 239 579
Γεωργικὰ »	2 525 686 523	1 508 830 375
Ἔλαια καὶ ἐλαιώδ. οὐσίαι	52 661 784	231 453 776
Δασικὰ προϊόντα	293 391 297	49 243 748
Φυτικ. βαφαὶ δεψικ. ὕλαι	15 020 402	3 491 545
ὀρυκτὰ καὶ μέταλλα ἀκατέργαστα	634 835 897	98 649 507
Φαρμ. καὶ χημ. εἴδη	434 359 366	31 594 068
Δέρμ. καὶ ὀστᾶ κατειργασμένα	161 122 599	1 318 439
Ἔπιπλα καὶ εἴδη ἐκ ξύλου	20 800 798	1 318 280
Ζαχαροπλαστ. καὶ φυραματοποιΐας ποτὰ	1 0012 691	139 828 506
Οἰνοπνευματώδη ποτὰ	465 663 133	2 334 336
Νήματα καὶ ὑφάσματα	1 727 854 727	76 965 120
Εἴδη ἐκ σπάρτου κλπ.	106 580 502	1 697 690
Προϊόντα ὑαλουργ. κλπ.	66 751 580	659 640
Ὀρυκτὰ μέταλλα κατεργ.	356 623 706	4 266 642
Μουσικὰ καὶ ἐπιστημονικὰ ὄργανα	48 686 474	923 500
Χαρτοπ. εἴδη κλπ.	139 194 760	1 477 030
Διάφοορα ἄλλα εἴδη	289 906 949	5 556 184
Σύνολον		

Ἀφαίρεσις.

§ 21. ***Ἀφαίρεσις*** δύο ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν ἐλαττώνομεν τὸν ἕνα κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ὁ ἄλλος.

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος θὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ***μειωτέος***, ὁ ἄλλος ***ἀφαιρετέος*** καὶ ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ***διαφορὰ τῶν*** ἀριθμῶν ἢ ***ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως.***

Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, εἶνε τὸ —(*πλὴν* ἢ *μεῖον* ἢ *ἀπὸ*, ὅταν κατὰ τὴν ἀπαγγελίαν προηγεῖται ὁ ἀφαιρετέος).

Ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶνε ἀφηρημένοι ἢ συγκεκριμένοι, ἀλλ' ὁμοειδεῖς, ἡ δὲ διαφορά των ὁμοειδὴς μὲ αὐτούς. Τὴν διαφορὰν π.χ. 15—8 σημειώνομεν καὶ οὕτω (15—8).

Ἐπειδὴ εἶνε π.χ. 15—8=7 καὶ 7+8=15, ἕπεται ὅτι, *«διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον»*.

§ 22. *Διὰ νὰ κάμωμεν δοκιμὴν ἀφαιρέσεως, προσθέτομεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα τὸν μειωτέον, ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὸ ὑπόλοιπον καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον*. Π.χ. διὰ τὴν 8—5=3, ἔχομεν 3+5=8 καὶ 8—3=5.

§ 23. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν μονοψήφιον, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου, συνειθίζομεν δὲ νὰ κάμνωμεν τὰς ἀφαιρέσεις αὐτὰς ἀπὸ μνήμης.

§ 24. Ἂν ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶνε ἴσοι, ἡ διαφορά των εἶνε 0 καὶ διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι τὸ 0 εἶνε ἀριθμός. Π. χ. 5—5=0, 0—0=0.

Ἂν ὁ μειωτέος εἶνε μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ λέγεται *ἀδύνατος*, π.χ. ἡ 3—7 εἶνε ἀδύνατος καθὼς καὶ ὅταν μόνον ὁ μειωτέος εἶνε 0.

Ἂν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε 0, ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὸν μειωτέον. Π.χ. 12—0=12.

§ 25. *«Ἂν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν ἴσους, μένουν ἴσοι»*.

Διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

§ 26. *Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.*

Ἂν π.χ. ἀπὸ 100 δρ. ἐξοδεύσωμεν 60 δρ., μᾶς μένουν 100 δρ.— —60 δρ.=40 δρ. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ (100+25) δρ. ἂν ἐξοδεύσωμεν (60+25) δρ., θὰ μείνουν 40δρ. Ὥστε 100 δρ. — 60 δρ.= =(100+25) δρ.—(60+25) δρ.=40 δρ. Δηλαδή,

«ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται».

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον. Π. χ. 120−30=(120−10)−(30−10). Διότι 120−30=90 καὶ (120−10)−(30−10)=110−20=90.

§ 27. Ἔμπορος εἶχε 100 πήχεις ὕφασμα καὶ ἐπώλησε 10 πήχεις, 15 π., καὶ ἄλλους 5 π. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσοι πήχεις τοῦ ἔμειναν, εἰμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς 100π. τοὺς (10+15+5)π.= =30 π., ὅτε μένουν 100π−30π=70π, ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς 100 π. τοὺς 10π, ὅτε μένουν 90π., ἀπὸ τοὺς 90π. τοὺς 15π., ὅτε μένουν 75π. καὶ ἀπὸ αὐτοὺς 5π. ἀκόμη, ὅτε ἔχομεν τελικὴν διαφορὰν 70 π. Ἄρα,

«ἀφαιροῦμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ αὐτὸν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς προσθετέους, ἀπὸ τὴν μερικὴν διαφορὰν ἕνα ἄλλον κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου».

Τὴν διαφορὰν π. χ. τοῦ 10+15+5 ἀπὸ τοῦ 100 σημειώνομεν οὕτω: 100−(10+15+5)=[(100−10)−15)]−5 καὶ ἐκφράζει τοῦτο τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἕπεται ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἀφαιρετέον μὲ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα. Π.χ. 100−45=100−(40+5)=(100−40)−5=60− −5=55.

§ 28. Ἂν ζητοῦμεν π.χ. τὸ (30+8) — 15, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ 30−15=15 καὶ εἰς αὐτὸ νὰ προσθέσωμεν 8, ὅτε ἔχομεν 23. Διότι (30+8)−15=38−15=23. Ἄρα:

«ἀφαιροῦμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἕνα προσθετέον (ἂν ἀφαιρῆται) καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσομεν τοὺς ἄλλους προσθετέους».

Ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν

§ 29. Ἕνας ἔμπορος ἐπλήρωσε διὰ λάδι 12 625 δρ. καὶ τὸ ἐπώλησε 13 804 δρ. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἐκέρδισε, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 13 804 δρ. — 12 625 δρ.

Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὰς χωριστὰ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτω τοῦ μειωτέου κλπ. (ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν) καὶ λέγομεν· 5 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιρεῖται (αὐξάνομεν τὸν μειωτέον κατὰ 10 καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ 1Δ), 5 ἀπὸ 14 =9, γράφομεν τὸ 9 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· 1 καὶ 2=3 ἀπὸ 10=7

$$\begin{array}{r} 13\,804 \\ 12\,625 \\ \hline 1\,179 \end{array}$$

καὶ προχωροῦντες ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν 1179. Ἄρα ὁ ἔμπορος ἐκέρδισε 1179 δραχμάς.

Συντομίαι ἀφαιρέσεως.

§ 30. Τὰς συντομίας τὰς ὁποίας εἴδομεν διὰ τὴν πρόσθεσιν τὰς ἔχομεν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν. Π.χ. διὰ τὴν 1300—200 λέγομεν: 13—2=11 καὶ γράφομεν δεξιὰ τούτου δύο 0, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν 1100. Διὰ τὴν 358—30 π.χ. λέγομεν : 35—3= =32 καὶ δεξιὰ τούτου γράφομεν τὸ 8, ὅτε ἔχομεν ὡς διαφορὰν 328. Διὰ τὴν 15835—800 λέγομεν: 158—8=150 καὶ τελικὴ διαφορὰ εἶνε 15035.

§ 31. Τὴν ἀφαίρεσιν ἐπιδιώκομεν νὰ κάμνωμεν ἀπὸ μνήμης καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε οἱοιδήποτε, ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς ἄλλους καταλλήλως καὶ ἐφαρμόζοντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας. Π.χ. διὰ τὴν 585—425 λέγομεν : 585—400=185, 185—20=165 καὶ μεῖον 5=160.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν 9 ἢ 99 ἢ 999 κλπ. ἀφαιροῦμεν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ. καὶ εἰς τὴν διαφορὰν προσθέτομεν 1. Π.χ. 857—99=757+1=758. Διατί;

Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ μνήμης ἀπὸ ἀριθμὸν τὸ 98,998 κλπ.;

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

122—129. ***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ διαφοραὶ 900—800. 8 000—3 000· 28 000—7 000· 16 000—8 000· 3 000—500· 13 000—7 000· 273 000—500· 14 500—900.

130—135. 54460—2000· 16543—500· 12657—50· 135+20+5—40. 146—20—26· 138—5—3.

136—139. Εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ x, ὥστε νὰ εἶνε 38—x=12, 605—x=37, 1 564—x=508, 1 454+x=80 454.

140. Ἠγόρασα ἀπὸ τὸν παντοπώλην τυρὶ 25 δρ., ζάχαρι 84 δρ., βούτυρο 92 δρ. καὶ ἄλλα διάφορα 25 δρ. Πόσον ὑπόλοιπον θὰ πάρω ἂν δώσω ἕνα χιλιάρικο ; ἕνα πενντακοσάρικο ;

141. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἀπὸ μνήμης ὅμοιον πρόβλημα μὲ τὸ προηγούμενον καὶ μὲ ἔξοδα ποὺ ἔχετε εἰς τὸ ταμεῖον τῆς σχολικῆς σας κοινότητος.

142. Ἕνας ἐγεννήθη εἰς τὸ τέλος τοῦ 1571 καὶ ἀπέθανεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ 1626· πόσα ἔτη ἔζησε ; Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ χρονολογίαν ἡμερῶν, μηνῶν καὶ ἐτῶν.

143—148. *Ὁμὰς δευτέρα.* Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των. 8 693—5 745, 9 667—8 569, 8 697—3 076, 66 427—42 109, 53 408—9 964, 638 579 547—121 147 872.

149—150. Νὰ εὑρεθοῦν κατὰ δύο τρόπους τὰ 8 963+3 276—5 864, 89 342—(2 532+7 634+5 846).

151. Ἕνας ἔχει 5876 δρ. καὶ ἐξοδεύει 2998 δρ., ἔπειτα εἰσπράττει 896 δρ. καὶ ἐξοδεύει 711 δρ. Πόσαι δρ. τοῦ ἔμειναν ; (Νὰ λυθῇ μὲ δύο τρόπους).

152. Σιδηρόδρομος εἰσπράττει κατὰ Ἰανουάριον, Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον 244516 δρ., 198 213 δρ., 234 787 δρ. Τὰ ἔξοδά του τοὺς μῆνας αὐτοὺς εἶνε 218 415 δρ., 200 816 δρ., 218 793 δρ. Πόσον κέρδος εἶχε ;

153. Ἀπὸ δύο χωριὰ Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸν ἴδιον δρόμον καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 35 χλμ., ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι καὶ διευθύνονται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ δρόμου. Πόσον θ' ἀπέχουν ἂν ἐκεῖνος ποὺ ἀνεχώρησε ἀπὸ τὸ Α διανύσῃ 125 χλμ. καὶ ὁ ἄλλος 327 χλμ. ;

154. Συνθέσατε καταλλήλως ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δύο ἄλλα προβλήματα προσθέσεως καὶ λύσατε αὐτά.

165. Ἀπὸ τρία πρόσωπα Α, Β, Γ ὁ Α ἔχει 4 826 δρ., ὁ Β 625 ὀλιγωτέρας τοῦ Α καὶ ὁ Γ 178 δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ Β. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Γ 48 δρ., ὁ Γ ὅμως δίδει εἰς τὸν Β 243 δρ. Πόσας δρ. θὰ ἔχῃ ὁ καθένας ;

156. Κατὰ τὴν στατιστικὴν τοῦ 1924 ἔγινε ἐξαγωγὴ οἴνων ἀπὸ

τὴν Ἑλλάδα	εἰς	Αἴγυπτον	χλγρ.	657374
	»	Ρουμανίαν	»	733587
	»	Βουλγαρίαν	»	70762
	»	Ἰταλίαν	»	8463809
	»	Ἀμερικὴν	»	3323304
	»	Γερμανίαν	»	1611788
	»	Ἀγγλίαν	»	316879
	»	Γιουγκοσλαβίαν	»	238655
	»	ἄλλας χώρας	»	;
σύνολον				16172456

Πόσα ἐξήχθησαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰς τὰς ἄλλας χώρας;

57. Μετατρέψατε καταλλήλως τὸ ἀνωτέρω εἰς πρόβλημα προσθέσεως καὶ λύσατε αὐτό.

Πολλαπλασιασμός.

32. *Πολλαπλασιασμὸς* λέγεται ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἕνα (ὡς προσθετέον) τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος.

Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἐπαναλαμβάνεται λέγεται ***πολλαπλασιαστέος***, ὁ ἄλλος ***πολλαπλασιαστής***, οἱ δύο μαζὺ ***παράγοντες*** καὶ αὐτὸς ὁ ὁποῖος προκύπτει λέγεται ***γινόμενον.***

Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε τὸ $\times$ ἢ . ***(ἐπί)*** καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν παραγόντων. Π.χ. $7\times4=7+7+7+7=28$.

Ὁ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ἀφῃρημένος, ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε ἀφῃρημένος ἢ συγκεκριμένος, τὸ δὲ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

Τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν συνειθίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν ἀπὸ μνήμης.

33. Ἂν δύο ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν γινόμενα ἴσα.

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στηριζόμεθα εἰς τὰς κατωτέρω ἰδιότητας.

34. Ἂν δώσωμεν π.χ. εἰς 5 πτωχοὺς ἀπὸ 8 δρ. εἰς καθένα, δίδομεν τὸ ὅλον 8 δρ.$\times5=40$ δρ.. Ἀλλ' ἂν δώσωμεν εἰς 8 πτωχοὺς ἀπὸ 5 δρ. εἰς καθένα δίδομεν τὸ ὅλον 5 δρ.$\times8=40$ δρ. Δηλαδὴ $8\times5=5\times8$. Ἤτοι:

«τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν των».

Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἰδιότητα αὐτὴν διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν πρᾶξιν, ἂν δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος εἶνε συγκεκριμένος, τὸν θεωροῦμεν ἀφῃρημένον καὶ κάμνομεν τὴν ἐναλλαγήν, ἀλλὰ τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν ἀρχικὸν πολλαπλασιαστέον. Π.χ. ἂν ἔχωμεν 3δρ.$\times20$ γράφομεν $20\times3=60$ δρ.

35. Διὰ νὰ κάμωμεν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐναλλάσσομεν τοὺς παράγοντας, ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἕνα παράγων εἶνε 1 ἢ 0, παρατηροῦμεν ὅτι: τὸ γινόμενον ἀριθμο ἐπὶ 1 μὲν εἶνε αὐτὸς ὁ ἀριθμός, ἐπὶ 0 δὲ εἶνε ἴσον μὲ 0· π.χ

$1\times2=1+1=2$, $0\times4=0+0+0+0=0$.

$3\times1=1\times3=1+1+1=3$, $4\times0=0\times4=0+0+0+0=0$.

§ 36. *Ἔχομεν τρία εἴδη ἀπὸ ὕφασμα καὶ ἀπὸ κάθε εἶδος τρία τόπια. Τοῦ α' τὸ τόπι ἔχει 5 μέτρα, τοῦ β' 3 μέτρα καὶ τοῦ γ' 2 μέτρα. Πόσα μέτρα ἔχουν ὅλα τὰ τόπια;*

Ἂν πάρωμεν ἕνα τόπι ἀπὸ κάθε εἶδος, θὰ εὕρωμεν 5μ.+3μ.+2μ.=10μ. καὶ ἀπὸ τὰ 3 τόπια θὰ πάρωμεν (5μ. + 3μ. + 2μ.) × 3 = 10μ. × 3 = 30μ. Ἀλλ' ἂν πάρωμεν τὰ 5μ.×3, 3μ.×3, 2μ.×3 καὶ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα, εὑρίσκομεν πάλιν 30μ. Δηλαδὴ $(5+3+2)\times3=5\times3+3\times3+2\times3$.

Ἤτοι, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα»***.

§ 37. Ἂν ζητῆται π. χ. τὸ $4\times(2+5+6)$ καὶ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, θὰ ἔχωμεν

$4\times(2+5+6)=(2+5+6)\times4=2\times4+5\times4+6\times4$.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα;

§ 38. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων εὑρίσκομεν πῶς πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα. Π.χ. εἶνε

$$(3+4)\times(5+2)=(3+4)\times5+(3+4)\times2=$$
$$=3\times5+4\times5+3\times2+4\times2,$$

ἐπειδὴ εἰμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν τὸ (3+4) ὡς ἕνα ἀριθμόν. Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ μὲ μονοψήφιον.

§ 39. *Ἂν ζητῆται πόσον τιμῶνται 496 ὀκ. κρασὶ πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν*, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ 8δρ. × 496 = 496 × 8δρ. Ἐπειδὴ ὅμως 496 = 4Ε + 9Δ + 6Μ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ (4Ε+9Δ+6Μ)×8.

Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τὸ 496, κάτω αὐτοῦ 8, σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ πολλαπλασιάζομεν κάθε ψηφίον τοῦ 496 ἐπὶ 8 καὶ ἀπὸ κάθε μερικὸν γινόμενον

$$\begin{array}{r} 496 \\ 8 \\ \hline 3968 \end{array}$$

γράφομεν κάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην, μόνον τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων του, τὰς δὲ δεκάδας του προσθέτομεν εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.

Ἐνίοτε πρὸς συντομίαν γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον, δεξιά του × ἢ . καὶ ἀκολούθως τὸν πολλαπλασιαστὴν (καὶ ὄχι ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου), τὸ δὲ γινόμενόν των τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω, γράφομεν μετὰ τὸ =. Π.χ.

$60\,307 \times 4 = 241\,228, \quad 20\,435 \times 7 = 143\,045.$

Πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

40. *Ἂν ὁ πῆχυς ὑφάσματος κοστίζῃ 327 δρ., καὶ ζητεῖται πόσον κοστίζουν 1562 πήχεις,* πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ

327 δρ. $\times 1562 = 1562 \times 327$ δρ. $= 1562 \times (7\text{Μ} + 2\Delta + 3\text{Ε})$ δρ.

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν κάτω τοῦ 1562 τὸ 327 καὶ γραμμὴν ὁριζοντίαν ὡς ἀπέναντι. Εὑρίσκομεν τὸ 1562×7=10934 καὶ γράφομεν αὐτὸ κάτω ἀπὸ τὴν γραμμήν, ὥστε τὰ ψηφία του νὰ εἶνε κάτω ἀπὸ τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· εὑρίσκομεν τὸ 1562×2=3124 καὶ (ἐπειδὴ παριστάνει δεκάδας) τὸ γράφομεν, ὥστε τὸ μὲν α΄ (δεξιὰ) ψηφίον του νὰ εἶνε κάτω τοῦ 3 τοῦ προηγουμένου γινομένου, τὰ δὲ ἄλλα ἀριστερὰ τοῦ 4 κατὰ σειράν. Ὁμοίως τὸ 1562×3=4686 (ἐπειδὴ περιστάνει ἑκατοντάδας) τὸ γράφομεν, ὥστε τὸ μὲν α΄ ψηφίον του (δεξιὰ) νὰ εὑρίσκεται κάτω τοῦ 2 τοῦ προηγουμένου γινομένου, τὰ δὲ ἄλλο ἀριστερὰ τοῦ 6 κατὰ σειράν. Προσθέτομεν τὰ (1), (2), (3) καὶ εὑρίσκομεν 510 774δρ. Τὰ (1), (2), (3) λέγονται ***μερικὰ γινόμενα.***

$$\begin{array}{lr} & 1562 \\ & 327 \\ \hline (1)\,\ldots\ldots & 10934 \\ (2)\,\ldots\ldots & 3124 \\ (3)\,\ldots\ldots & 4686 \\ \hline & 510774 \end{array}$$

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα.

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ.

41. Ἂν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (ἐκτὸς τοῦ τελευταίου δεξιὰ) εἶνε 0, παραλείπεται τὸ μερικὸν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ

εἰς αὐτό, ἐπειδὴ εἶνε 0, γράφομεν ὅμως τὸ ἑπόμενον μερικὸν γι-νόμενον, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του (δεξιὰ) νὰ εἶνε κάτω τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ καθὼς π. χ. εἰς τὰ παραδείγματα β′) καὶ γ′).

α′)		β′)	
	23492		2456
	1563		108
	70476		19648
	140952		2456
	117460		265248
	23492		
	36717996		

γ′)		δ′)	
	4063		1650
	8004		32000
	16252		330
	32504		495
	32520252		52800000

Ἂν ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες ἔχουν εἰς τὸ τέλος (δεξιὰ) μηδενικά, τὰ παραλείπομεν κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὰ γράφομεν εἰς τὸ τέλος (δεξιὰ) τοῦ γινομένου, καθὼς εἰς τὸ δ′).

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λαμβάνομεν ὡς πολλαπλασιαστὴν αὐτὸν ὁ ὁποῖος ἔχει ὀλιγώτερα ψηφία, μετὰ τὴν παράλειψιν τῶν εἰς τὸ τέλος μηδενικῶν, καθὼς εἰς τὸ δ′), διὰ νὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα.

§ 42. Σύμφωνα πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν π, χ. $83\times10=830$, $653\times10=6530$, $14\times1000=14000$ κλπ.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100,..;

§ 43. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ $(35-5)\times4$.

Ἔχομεν $(35-5)\times4=30\times4=120$. Ἀλλ᾽ ἂν ἀπὸ τὸ $35\times4=140$ ἀφαιρέσωμεν τὸ $5\times4=20$, εὑρίσκομεν πάλιν 120. Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. $(32-2)\times6=32\times6-2\times6$.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν;

Πολλαπλασιασμὸς ἀπὸ μνήμης.

§ 44. Ἐπιδιώκομεν νὰ κάμνωμεν ἀπὸ μνήμης, κατὰ τὸ δυνατόν, κάθε πολλαπλασιασμὸν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων καὶ συντομιῶν.

Π.χ. διὰ τὸ 38×12 λέγομεν: $38\times10=380$ καὶ 38×2, δηλαδὴ

30×2=60 καὶ 8×2=16, τὸ ὅλον 380+60=440 καὶ 16=456.

Ἔστω τὸ 32×9. Εἶνε 32×9=32×(10—1)=320—32.

Ὁμοίως 62×99=62×(100—1)=6200—62 κλπ.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν 9, 99... κλπ. ;

Ἔστω τὸ 15×11. Ἔχομεν 15×11=15×(10+1)=150+15.

Πῶς πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 11, 101..,; κλπ.

Σημαντικὴ παρατήρησις.

§ 45. *Τὰ προηγούμενα προβλήματα καὶ τὰ ὅμοιά των, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ἢ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον ἑνὸ ἀριθμοῦ, λύονται μὲ πολλαπλασιασμόν· πολλαπλασιαστέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται.*

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

158—169. Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα τοῦ 80 ἐπὶ 10, 100, 1 000· τοῦ 10, 100, 1 000, 10 000 ἐπὶ 15, 25, 35, 480, 456· 3×200, 4×500, 2×3 000, 87 δρ. ×20, 15 ὀκ. ×40, 3 μ.×3000, 74 δρ. × 2 000.

170. Ἕνας οἰκονομεῖ ἕνα κατοστάρικο τὴν ἡμέραν. Πόσο θὰ οἰκονομήσῃ εἰς 7, 15 ἡμ; εἰς ἕνα ἔτος;

171. Μία ὑπηρέτρια πέρνει μισθὸν 400 δρ. τὸν μῆνα. Πόσας δρ. πέρνει εἰς 6, 12, 24, 60 μῆνας;

172. Ἔμπορος ἀγοράζει 6 πήχεις ὕφασμα ἀντὶ 72 δρ. καὶ πωλεῖ αὐτὰ πρὸς 10 δρ. τὸν πῆχυν. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;

173. Ἕνας ἀγοράζει 30 ὀκ. λάδι πρὸς 32 δρ. τὴν ὀκᾶ καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 37 δρ. τὴν ὀκᾶ. Πόσας δρ. κερδίζει;

174. Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω μὲ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας.

175. Εὕρετε τὰ γινόμενα τοῦ 32 ἐπὶ 9,99,999,.... Τῶν 50,80 ἐπὶ 11,101,1 001,...

176—185. Εὕρετε τὰ 36×3+14×3, 87+4+13×4, 46×6+4×6, 37×9+13×9, 96×7+3×7, 92×4+8×4, 38×5+12×5+10×5, 66×5+34×5, 65×8+95×8+50×8, 28×9+32×9+50×9.

186—190. Εὕρετε τὰ $89 \times 4 - 9 \times 4$, $136 \times 5 - 96 \times 5$, $98 \times 5 - 8 \times 5 - 10 \times 5$, $195 \times 7 - 5 \times 7 - 90 \times 7$, $3\,500 \times 6 - 2\,500 \times 6 - 500 \times 6$.

191. Ἂν ἔχωμεν 6 βαρέλια κρασὶ τῶν 485 ὀκάδων, 8 τῶν 285, ὀκ, ποία ἡ ἀξία αὐτοῦ πρὸς 9 δρχ. τὴν ὀκᾶν ;

192. Ἕνα σακκὶ ρύζι ἔχει 62 ὀκάδες. Πόσον ζυγίζουν 8 σακκιά καὶ πόσον τιμῶνται πρὸς 18 δρ. τὴν ὀκᾶν ;

193. Ἂν ἕνα βιβλίον πωλῆται 37 δρ., πόσον πωλοῦνται 152 καὶ 120 καὶ 48 βιβλία ;

194. Εὕρετε τὸ 7465×11, 7465×111, $7565 \times 1\,111$,... καὶ εὕρετε κανόνα πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ 11, 111, 1111....

195. Ἕνας πληρώνει ἕνα ἐργάτην 568 δρ. τὴν ἑβδομάδα. Πόσα θὰ πληρώσῃ εἰς 64 ἐργάτας καὶ διὰ 9 ἑβδομάδας ;

196. Ἐργάτης πέρνει ἡμερομίσθιον 48 δρ. Πόσα θὰ πάρῃ τὴν ἑβδομάδα (ἐργάζεται 6 ἡμ. μόνον) καὶ πόσα εἰς 35 ἑβδομάδας ; Πόσα θὰ τοῦ μείνουν, ἂν ἐξοδεύσῃ 30 δρ. καθ' ἡμέραν;

197. Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύονται μὲ πολλαπλασιασμούς, προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις καὶ μὲ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας.

198. Κάθε φορτάμαξα ἠμπορεῖ νὰ περιλάβῃ 240 σακκιὰ ἀλεύρι. Εἰς ἕνα χωριὸ ἔφθασαν ἕνα μῆνα 648 φορτάμαξαι. Πόσας ὀκ. ἀλεύρι ἐπῆγαν εἰς τὸ χωριὸ καὶ πόσον τιμῶνται πρὸς 14 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἂν κάθε σακκὶ ἔχῃ 78 ὀκάδας ;

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων

§ 46. Καλοῦμεν ***γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἢ παραγόντων*** τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἀπ' αὐτοὺς ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου». Π χ. τὰ $2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24$, $4 \times 2 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5 = 24 \times 5 = 120$.

«Τὸ γινόμενον παραγόντων δὲν μεταβάλλεται μὲ ὁποιανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας»
Π.χ. $3 \times 2 \times 5 = 6 \times 5 = 30$. Ἀλλ' εἶνε καὶ $3 \times 5 \times 2 = 15 \times 2 = 30$.

§ 47. Ἔστω τὸ $6 \times 2 \times 5 = 12 \times 5 = 60$. Ἐπειδὴ $6 \times 2 \times 5 = 6 \times 5 \times 2 = 30 \times 2 = 60$, ἕπεται ὅτι,

«εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους διὰ τοῦ γινομένου των»,

Καὶ ἀντιστρόφως· π. χ. $6 \times 1500 \times 2 = 6 \times 15 \times 100 \times 2 = 90 \times 100 \times 2 = 18000$.

Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτὴν τοῦ γινομένου παραγόντων.

Δύναμις ἀριθμοῦ.

48. «***Δύναμις ἀριθμοῦ*** λέγεται γινόμενον ἴσων παραγόντων μὲ αὐτόν».

Ὁ εἷς τῶν παραγόντων τούτων καλεῖται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων λέγεται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως.

Δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην 2 μὲν λέγεται ***τετράγωνον*** ἢ ***δευτέρα δύναμις***, μὲ 3 ***κύβος*** ἢ ***τρίτη δύναμις*** μὲ 4,5,.... δὲ λέγεται τετάρτη, πέμπτη,... δύναμις αὐτοῦ· π. χ. ὁ κύβος τοῦ 4 εἶνε $4 \times 4 \times 4 = 64$ καὶ σημειώνεται 4^3, ἀπαγγέλλεται δὲ 4 εἰς τὸν κύβον. Τὸ τετράγωνον τοῦ 5 σημειώνεται 5^2 καὶ εἶνε $5^2 = 5 \times 5 = 25$, ἀπαγγέλλεται δὲ 5 εἰς τὸ τετράγωνον κλπ.

Παρατηροῦμεν ὅτι $1^2 = 1 \times 1 = 1$, $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ κλπ. Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Ἔχομεν $10^2 = 10 \times 10 = 100$, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ κλπ. Ποῖον κανόνα συνάγετε;

Ὅταν ἕνας ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τὴν 1. Π. χ. $5 = 5^1$, $7 = 7^1$, ὅταν δ' ἔχῃ τὸ 0, ἀλλ' ἡ βάσις δὲν εἶνε 0, θὰ λέγωμεν ὅτι ἰσοῦται μὲ 1. Π. χ. $7^0 = 1$, $10^0 = 1$ κλπ.

49. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον $6^3 \times 6^2$.

Ἔχομεν $6^3 \times 6^2 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5$.

Ὁμοίως $7^2 \times 7^2 \times 7^5 = 7^9$, $3^2 \times 3 \times 3^4 \times 3^5 = 3^{12}$.

Ἄρα, «***τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων***».

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

(Ἀπὸ μνήμης θὰ γίνωνται αἱ πράξεις)

199—216. Νὰ εὑρεθοῦν τά: $6 \times 8 \times 5$, $4 \times 8 \times 2$, $6 \times 4 \times 3 \times 5$, $8 \times 5 \times 3 \times 9$, $2 \times 2 \times 2 \times 1$, $3 \times 0 \times 4$, $7 \times 7 \times 7 \times 0$, $27 \times 0 \times 8$, 430×20,

$200\times200, 25000\times30, 30\times25\times4\times8, 4\times3\times5\times10, 15\times25\times$ $\times4\times10$, $25\times8\times9\times4, 32\times2\times5\times10\times100$, $(2\times3)^2$, $(2\times5\times 10)^3$. Ποῖον κανόνα συνάγετε ἐκ τῶν δύο τελευταίων ;

217. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν γινόμενον τριῶν ἢ τεσσάρων παραγόντων.

218. Ποία δύναμις τοῦ 10 εἶνε ὁ 100; 1 000; 10 000; 10 0000 ;

219. Τί διαφέρει τὸ 7^2 ἀπὸ τὸ 7×2; Παραστήσατε συντόμως τὸ $8+8+$ $+8$ καὶ τὸ 8.8.8.

220. Εὕρετε τὰ $7^3\times7^2\times7$, $8^0\times8^2\times8^3$, $15^0\times15^1\times15$, $10\times10\times10^3$, $10^5\times10^2\times10^7$, $100\times100^0\times100^3$, $1\,000^0\times1\,000^3\times1\,000^2$.

221. Συνθέσατε καὶ λύσατε πρόβλημα εἰς τὰ ὁποῖον ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον ἢ ἄλλην δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Διαίρεσις.

§ 50. Ἂν μοιράσωμεν ἐξ ἴσου π. χ. 23 δρ. εἰς 5 πτωχούς, θὰ εὕρωμεν πόσα θὰ δώσωμεν εἰς καθένα, ἂν εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 23 δρ. Ἐπειδὴ ὅμως 4 δρ.$\times5=20$ δρ καὶ 5 δρ. $\times5=25$ δρ., ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶνε ὁ 4 δρ.. Δηλαδὴ θὰ δώσωμεν 4 δρ. εἰς καθένα πτωχὸν καὶ θὰ μείνουν 3 δρ.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν π. χ. πόσα δεκάδραχμα κάμνουν 54 δρ., ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πάλιν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 10 δίδει γινόμενον 54 δρ. Ἐπειδὴ ὅμως 10 δρ. $\times5=50$ δρ. καὶ 10 δρ. $\times6=60$ δρ., ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ζητεῖται εἶνε ὁ 5. Δηλαδὴ 54 δρ. κάμνουν 5 δεκάδραχμα καὶ μένουν καὶ 4 δρ.

Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸν 4 δρ. εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα καὶ τὸν 5 εἰς τὸ δεύτερον λέγεται διαίρεσις.

Ἤτοι, «***διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν ὅταν δοθοῦν δύο ἀριθμοί, εὑρίσκομεν τὸ μεγαλύτερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἕνα δίδει γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν ἄλλον***».

Οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι δίδονται εἰς τὴν διαίρεσιν λέγονται ***διαιρετέος*** καὶ ***διαιρέτης***. Ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν καλεῖται ***πηλίκον***, σημειώνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν μὲ τὸ : ***(διὰ*** ἢ ***πρός)***, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου. Π. χ. ἡ διαίρεσις τοῦ 23 διὰ τοῦ 5 σημειώνεται οὕτω ; 23 : 5, δίδει δὲ πηλίκον 4 καὶ μένουν 3 δρ. καὶ λέγεται τοῦτο ***ὑπόλοιπον*** τῆς διαιρέσεως.

Εἰς κάθε διαίρεσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ ἂν μὲν εἶνε 0, ἡ διαίρεσις λέγεται ***τελεία***, ἂν δὲ διάφορον τοῦ 0, ***ἀτελής***. Π. χ. αἱ ἀνωτέρω διαιρέσεις εἶνε ἀτελεῖς, ἐνῶ ἡ 45 : 9=5 εἶνε τελεία.

Εἰς μὲν τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ μὲ τὸ γινόμενον αὐτὸ σὺν τὸ ὑπόλοιπον. Π. χ. εἰς τὴν 45 : 9=5, ἔχομεν 45=9×5, εἰς δὲ τὴν 54 : 10, ἡ ὁποία δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 4, εἶνε 54=10×5+4.

Τὴν σχέσιν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν διὰ νὰ κάμνωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως.

Πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως ;

Ἂν ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶνε ἴσοι, π. χ. εἰς τὴν 7 : 7, τὸ πηλίκον εἶνε 1 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0, διότι 7×1=7.

Τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον τοῦ 0 δι᾽ ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸς) εἶνε 0· π.χ. 0 : 3=0. Διότι 3×0=0, ἐνῶ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 0 λέγομεν ὅτι εἶνε ***ἀδύνατος***, καθὼς καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου. Π. χ. αἱ 3:8, 4:0 εἶνε ἀδύνατοι.

§ 51. ***«Ἂν δύο ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δίδουν πηλίκα ἴσα καὶ ὑπόλοιπα ἴσα».***

§ 52. ***Διαίρεσις μερισμοῦ καὶ μετρήσεως.***

Ἡ διαίρεσις εἰς τὴν ὁποίαν μοιράζομεν τὸν διαιρετέον εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης λέγεται ***μερισμὸς*** ἢ ***διαίρεσις μερισμοῦ***, καθὼς π.χ. ὅταν μοιράζωμεν 35 δρ. εἰς 5 ἄτομα.

Εἰς τὸν μερισμὸν ὁ διαιρέτης θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος, τὸ δὲ πηλίκον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον. Π.χ., ἔχομεν 35 δρ. : 7=5δρ, 24 ὀκ. : 6=4 ὀκ.

Ἡ διαίρεσις εἰς τὴν ὁποίαν μετροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ἢ ἀφαιρεῖται ὁ διαιρέτης ἀπὸ τὸν διαιρετέον λέγεται ***μέτρησις*** ἢ ***διαίρεσις μετρήσεως***.

Εἰς αὐτὴν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ πηλίκον ἀφῃρημένος ἀριθμός. Π.χ. ἂν ζητοῦμεν πόσα τάληρα κάμνουν 40 δρ., ἔχομεν τὴν μέτρησιν 40δρ. : 5δρ.=8, καὶ λέγομεν ὅτι 40 δρ. κάμνουν 8 τάληρα.

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

§ 53. Ἂν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν π. χ. 9δρ.+12δρ.+3δρ. εἰς 3 πτωχούς, θὰ εὕρωμεν πόσας δρ. θὰ δώσωμεν εἰς καθένα, ἂν εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

(9δρ.+12δρ.+3δρ.) : 3=24δρ. : 3, ἤτοι 8δρ.

Ἀλλ' ἂν εὕρωμεν τὰ πηλίκα τῶν 9δρ. : 3, 12δρ. : 3, 3δρ. : 3, δηλαδὴ τὰ 3 δρ. 4 δρ., 1 δρ. καὶ τὰ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν πάλιν 8 δρ.

Ἄρα, (9δρ.+12δρ.+3δρ.) : 3=9δρ. : 3+12δρ.:3+3δρ. : 3.

Πῶς διαιροῦμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἂν κάθε προσθετέος διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ;

Ἂν ὅλαι ἢ μερικαὶ ἀπὸ τὰς διαιρέσεις εἶνε ἀτελεῖς. Π.χ. τῆς (13+5+4) : 3, ὅτε ἔχομεν πηλίκα 4, 1,1 καὶ ὑπόλοιπα 1, 2, 1, διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων 1+2+1=4 διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὅτε τελικὸν πηλίκον εἶνε τὸ 4+1+1+1=7, ὑπόλοιπον δὲ τὸ 1.

§ 54. Ἂν μοιράσωμεν 17δρ. εἰς 5 ἄτομα, θὰ δώσωμεν εἰς καθένα 3δρ. καὶ θὰ μείνουν 2 δρ. Ἀλλ' ἂν μοιράσωμεν 17 δίδραχμα, δηλαδὴ διπλασίας δρ., ἀλλ' εἰς διπλάσια ἄτομα, θὰ δώσωμεν εἰς καθένα πάλιν 3 δρ. καὶ θὰ μείνουν 2 δίδραχμα, δηλαδὴ διπλάσια ἢ πρίν. Ὥστε ἔχομεν

17 : 5	πηλ. 3	καὶ ὑπολ.	2
17×2 : 5×2	» 3	» »	2×2.

Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. ὅτι :

26 : 8	πηλ. 3	καὶ ὑπόλ.	2.
(26 : 2) : (8 : 2)	» 3	» »	2 : 2.

Διότι 13 : 4 δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 1=2 : 2.

Ἄρα, «*ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν*».

Π.χ. 120 : 20=12 : 2=6, 800 : 80=80 : 8=10.

Ποίαν ἰδιότητα συνάγετε διὰ τὴν διαίρεσιν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς μηδενικά;

§ 55. ***Διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.***

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 68 : 32.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶνε ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὰς διὰ 32 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς καθὼς ἀπέναντι καὶ λέγομεν: Ὁ διαιρέτης ἔχει δύο ψηφία, χωρίζομεν καὶ ἀπὸ τὸν διαιρετέον δύο ψηφία ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, τὸ 68. Τὸ 32 εἰς τὸ 68 χωρεῖ περίπου ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 6· ἤτοι 2′ γράφομεν αὐτὸ κάτω τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ 2 ἐπὶ τὸν 32 καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 68· 2×2=4 ἀπὸ 8,4· γράφομεν 4 κάτω τοῦ 8· 2×3=6 ἀπὸ 6=0. Κατεβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου 2 καὶ ἔχομεν τὸ 42. Τὸ 32 εἰς τὸ 42 χωρεῖ περίπου ὅσον τὸ 3 εἰς τὸ 4, ἤτοι 1· γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ 2 τὸ 1 καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν 32, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 42, ὅτε εὑρίσκομεν 10, καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως μέχρις ὅτου κατεβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 213 καὶ ὑπόλοιπον 9.

68′2′5′	32
4 2	213
1 0 5	
0 9	

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει κατὰ τὸν χωρισμὸν εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, χωρίζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὅπως εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα.

Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ γινομένου ψηφίου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον διαιρετέον εἶνε ἀδύνατος, γράφομεν ἀντὶ τοῦ ψηφίου ποὺ εὑρήκαμεν διὰ τὸ πηλίκον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερόν του, μέχρις ὅτου ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατή.

Ἐὰν διαιρετέος, ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ προκύπτουν ὅταν κατεβάζωμεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, κατεβάζομεν ἀμέσως καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ προχωροῦμεν, ὅπως εἰς τὸ α′) κατωτέρω.

α')	12'9'2'3'	16	β')	5892'3'8'	8153
	1 2 3	807 πηλ.		1 8 5 2 8	72 πηλ.
ὑπόλ.	1 1		ὑπόλ.	2 2 2 2	

§ 56. *Συντομίαι τῆς διαιρέσεως.*

1. Ὅταν διαιροῦμεν ἰδίως διὰ μονοψηφίου, παραλείπομεν τὰς γραμμὰς καὶ γράφομεν μετὰ τὸν διαιρετέον τό ; ἀκολούθως τὸν διαιρέτην, ἔπειτα ἀπ' αὐτὸν τὸ = καὶ δεξιὰ τούτου μόνον τὰ διαδοχικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν ὅπως ἀνωτέρω. Π. χ. 537 : 2=268 πηλ., ὑπολ, 1, τὸ 63'4'7': 9=705 πηλ., ὑπόλ. 2, 40584 : 3=13528.

2. Ἂν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά, τὰ παραλείπομεν πρὸ τῆς πράξεως καθὼς καὶ ἰσάριθμα ψηφία ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, ἀλλ' εἰς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον προκύπτει οὕτω, γράφομεν δεξιὰ τὰ ψηφία τὰ ὁποῖα παρελείψαμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καθὼς εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα.

γ')	271'6'7(93	543(00
	00 1 7	50 πηλ.
ὑπόλ.	1 7 93	

3. Σύμφωνα μὲ αὐτὰ π.χ. 854 : 10 δίδει πηλίκον 85 καὶ ὑπόλ. 4, 643 : 100=6 πηλ. καὶ ὑπόλ. 43. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον ἀριθμοῦ διὰ 10, 100....;

§ 57. *Σημαντικὴ παρατήρησις.*

Τὰ μὲν προβλήματα διαιρέσεως εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν ὡρισμένων μονάδων καὶ ζητεῖται τῆς μιᾶς, εἶνε μερισμοῦ καὶ διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων· ἐκεῖνα δὲ εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων ζητεῖται δὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων αὐτῶν εἶνε μετρήσεως καὶ διαιρετέος εἶνε ἡ τιμὴ τῶν μονάδων τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ζητεῖται.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

222—229. Νὰ γίνουν αἱ κατωτέρω διαιρέσεις μὲ τὰς δομικάς των χωρὶς νὰ γράφωνται μερικὰ ὑπόλοιπα.
14853 : 8, 18245 : 6, 651964 : 14, 1478321 : 15, 78542 : 7, 92804 : 16, 1348 : 9, 6873201 : 18.

230—239. Νὰ γίνουν αἱ κατωτέρω διαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαί των·
8965:42, 8930:75, 30078:135, 768832:835, 750000:5800, 9000000:85000, 400000:730, 630720:2700, 604220136:862, 5448248:8002,

240. 375 ὀκάδες ἐμπόρευμα στοιχίζουν 29250 δρ.· πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ ;

241. Τρέψατε τὸ προηγούμενον εἰς πρόβλημα μετρήσεωςκαὶ λύσατε αὐτό.

242. Πόσα καντάρια ἀποτελοῦν 586 ὀκ; 1250 ὀκ; 9740 ὀκ; 17695 ὀκ., 20365 ὀκ; Τί διαιρέσεις εἶνε αὗται καὶ διατί ;

243. Διὰ πόσους πήχεις ἐπληρώθησαν 5544 δρ., ἂν ὁ πῆχυς ἐτιμᾶτο 18 δραχμάς ;

244. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ἐξ αὐτοῦ ἄλλο πρόβλημα μερισμοῦ.

245. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἕνα πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ. Ἔπειτα σχηματίσατε καὶ λύσατε ἀπ' αὐτὸ δύο ἄλλα, ἕνα μερισμοῦ καὶ ἄλλο μετρήσεως.

246. Ἔμπορος ἐπλήρωσε διὰ 318 ὀκ. ἐμπόρευμα 20 988 δρ., ἐπώλησε δὲ 728 ὀκ. ἀντὶ 52 415 δρ. Πόσον ἐκέρδισεν εἰς τὴν ὀκᾶ ;

247. Εἰς πόσα ἄτομα θὰ μοιράσωμεν 4 500 δρ., ὥστε καθὲν νὰ πάρῃ 125 δρ. καὶ νὰ μείνουν 100 δρ.;

248. Ποῖος ἀριθμὸς ἂν διαιρεθῇ διὰ 5 δίδει πηλ. 7 καὶ ὑπόλοιπον 3; Ποῖος ἂν διαιρεθῇ διὰ 45 914 δίδει πηλίκον 65 καὶ ὑπόλοιπον 24;

249. Ἔχομεν μίαν ὁμάδα ἀπὸ 75 ἐργάτας καὶ καθένας πέρνει τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον. Πόσον εἶνε τὸ ἡμερομίσθιον, ἂν εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἑβδομάδος ἐπῆραν 31 500 δρ ;

250. Ἔμπορος ἐπώλησε 1 400 ὀκ. λάδι πρὸς 24 δρ., τὴν ὀκ., 57 ὀκ. ζάχαρι πρὸς 19 δρ. τὴν ὀκ., 32 ὀκ. βούτυρο πρὸς 95 δρ. τὴν ὀκ. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε ἠγόρασε καφὲ πρὸς 84 δρ. τὴν ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασε ;

251. Συνθέσατε καί λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ διαίρεσιν μερισμοῦ.

§ 58. *Διαίρεσις ἀπὸ μνήμης.*

Ἐπιδιώκομεν νὰ κάμνωμεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ μνήμης, ὄχι μόνον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μικροί, ἀλλὰ καὶ εἰς κάθε περίπτωσιν, ἂν εἶνε δυνατόν, ἢ τοὐλάχιστον νὰ τὴν κάμνωμεν ἁπλουστέραν, βοηθούμενοι καὶ ἀπὸ τὰς κατωτέρω ἰδιότητας.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $24:2\times3$, ἤτοι $24:6=4$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $24:2=12$ καὶ $12:3=4$. Ὥστε $24:2\times3=(24:2):3=12:3=4$. Ὁμοίως ἔχομεν $60:2\times3\times5=[(60:2):3]:5=[30:3]:5=10:5=2$.

Πῶς διαιροῦμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου παραγόντων (ἂν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι);

Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν διαιρέτην (τελείας διαιρέσεως) μὲ γινόμενον παραγόντων (οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον).

§ 59. Ἔστω π.χ. ἡ διαίρεσις $5\times7:7$. Τὸ πηλίκον εἶνε 5. Διότι 5×7 εἶνε ὁ διαιρετέος. Ἐπίσης $15\times4\times3:4=15\times3$.

Ὁμοίως π.χ. τὸ $16\times7\times12\times4:12\times16=7\times4$.

Πῶς διαιροῦμεν γινόμενον παραγόντων μὲ ἕνα ἢ μὲ τὸ γινόμενον μερικῶν ἀπὸ αὐτούς;

§ 60. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $7^5:7^3$.

Ἔχομεν $7^5:7^3=7\times7\times7\times7\times7:7\times7\times7=7\times7=7^2=7^{5-3}$.

Ἄρα, ***«τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν»***.

§ 61. Ἔστω ἡ διαίρεσις $8\times5:2$. Ἐπειδὴ $8\times5=40$, ἕπεται ὅτι $8\times5:2=40:2=20$. Ἀλλ' ἂν τὸ πηλίκον $8:2=4$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, εὑρίσκομεν πάλιν 20.

Ἄρα, ***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τοὺς ἄλλους παράγοντας (ἂν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία)»***.

Ὅταν συμφέρῃ τρέπομεν τὸν διαιρετέον εἰς γινόμενον παραγόντων του καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα. Π.χ. $60:12=12\times5:12=1\times5=5$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης)

252—268. Εὕρετε μὲ δύο τρόπους τὰ πηλίκα $80:4\times5\times2$, $50:2\times5$, $1800:2\times5\times10$, $80:4\times2\times10$, $27:3\times3$, $5\times8\times0:4$, $35\times2\times3:7$, $6\times3\times7\times2:3\times7$, $24\times5\times44:5\times2\times4$, $180:10\times9\times2$, $75:5\times3$, $3\times6\times8:3\times6$, $5\times3\times8\times9:4\times9$, $24\times3\times2\times48:2\times3\times24$, $80:4\times2\times5$, $3^2\times5^2\times7^2:5^2\times3^2$, $200\times3^4\times7:3^4\times50\times2$.

269—280. Εὕρετε τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν 43 : 10, 95800 : 100, 147 : 100, 1897 : 1000, 1497 : 100, 63720 : 1000, 140 : 70, 1500 : 500, 160 : 80, 1200 : 600, 18000 : 9000, 6000 :300.

281. Ἔστω ἡ διαίρεσις 35:5=7. Ἔχομεν 35:5=35×2 : 5×2= =70 : 10=7. Ὁμοίως 150 : 50=300 : 100=3, 400 : 25= 400×4 : 25×4=1600 : 100=16. Ποίαν συντομίαν συνάγομεν διὰ τὴν διαίρεσιν ἀριθμοῦ διὰ 5 ἢ 50 ἢ 25 ἢ 125 κλπ.;

Ἂν ἡ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν (μὲ 2, 3,... τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου) διαίρεσις ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, θὰ διαιρεθῇ τοῦτο διὰ 2, 3,... διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς δοθείσης. Διατί

Εὕρετε συντόμως τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν 65:5 125:25, 250:50, 64:5, 160:5, 670:5, 8500:500, 73000:500, 170:25, 140:25, 1800:125, 435:50,1478:500.

Προβλήματα τὰ ὁποῖα λύονται μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

§ 62. *Ἂν 5 πήχεις ὕφασμα ἀξίζουν 60 δρ., πόσον ἀξίζουν 9 πήχεις αὐτοῦ;*

Παριστάνομεν τὸ ζητούμενον ἀριθμὸν μὲ τὸν x καὶ κάμνομεν τὴν (καλουμένην) ***διάταξιν*** ἢ ***κατάστρωσιν*** τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς :

5 πηχ.	ἀξίζουν	60 δρ.
9		x

καὶ λέγομεν :

5	πήχ.	τιμῶνται	60 δρ.
1	»	»	60 δρ. : 5= 12 δρ.
9	»	»	12 δρ.×9=108 δρ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λέγομεν ὅτι ἐλύθη μὲ τὴν *ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα*, ἐπειδὴ διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (5 πήχ.) τὴν τιμὴν ἄλλων πολλῶν (τῶν 9 πήχ.), εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος.

Κατὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων δὲν εἶνε πάντοτε ἀπαραίτητον νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος. Π. χ., ἂν 6 πήχεις ὕφασμα ἀξίζουν 48 δρ., οἱ 18 πήχ. αὐτοῦ, οἱ ὁποῖοι εἶνε τριπλάσιοι τῶν 6 πήχ., θὰ ἀξίζουν 48×3=144 δρ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

282. α΄) Πόσον ἔχουν 600 αὐγὰ πρὸς 3 δρ. τὸ ζευγάρι ;

β΄) Εὕρετε μὲ μίαν πρᾶξιν τὰ 380:5×15, 1480:10×100, 7354:35×105.

γ΄) Σχηματίσατε ὅμοια παραδείγματα μὲ διαιρέτην 5, 8, 10, 20, 30, 25 καὶ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενά των.

283. α΄) Ἂν διὰ φαγητὸν 400 στρατιωτῶν χρειάζωνται 35 ὀκ. φασόλια, πόσας χρειάζονται διὰ 1600 στρατιώτας ;

β΄) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ ἕνα πολλαπλασισμὸν ἢ διαίρεσιν τὰ 128 : 7 × 35, 2000×25:100, 482:100×3000, 240×5 : 10, 120×250:1000.

γ΄) Σχηματίσατε ὅμοια παραδείγματα καὶ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν μὲ μίαν διαίρεσιν, ἢ μὲ ἕνα πολλαπλασιασμόν.

284. Ἂν 100 πήχ. πανὶ τιμῶνται 250 δρ., πόσον τιμῶνται 70 πήχεις;

285. α΄) Ἂν μία οἰκογένεια ἐξοδεύῃ εἰς 10 ἡμ. 1200 δρ., πόσα ἐξοδεύει τὸν μῆνα ; τὸ ἔτος ;

β΄) Πόσον τιμῶνται 14 πήχεις ὕφασμα, ἂν οἱ 25 πήχεις τιμῶνται 2 500 δραχμάς ;

γ΄) Ἐπώλησεν ἕνας 100 ὀκ. λάδι πρὸς 28 δραχ. τὴν ὀκᾶ καὶ μὲ τὰ χρήματα, ποὺ εἰσέπραξε ἠγόρασε ὄσπρια πρὸς 28 δρ. τὰς 2 ὀκ.. Πόσας ὀκ. ἠγόρασε ;

286. α΄) Ἂν 58 ὀκάδες καφὲ τιμῶνται 4756 δρ., πόσον τιμῶνται 2051 ὀκ;

β΄) Ἂν 5 ὀκ. φασόλια κοστίζουν 60 δρ., πόσον κοστίζουν 7 ὀκ.; 35 ὀκ. ; 70 ὀκ.;

287. α΄) Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν μὲ δύο τρόπους τρία προβλήματα καθὼς τ᾽ ἀνωτέρω. (Προσέχετε ὥστε ἡ διαίρεσις μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος νὰ εἶνε τελεία).

β΄) Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν τρία προβλήματα, καθὼς τὰ ἀνωτέρω, ἀλλ᾽ εἰς τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εἶνε ἀπαραίτητον νὰ εὑρίσκετε τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

§ 63. Ἐὰν μία διαίρεσις εἶνε τελεία, π.χ. ἡ 18:3, λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος εἶνε ***πολλαπλάσιον*** τοῦ διαιρέτου, ἢ ὅτι εἶνε ***διαιρετὸς*** ἢ ***διαιρεῖται*** δι᾽ αὐτοῦ, ὁ δὲ διαιρέτης λέγεται ***παράγων*** ἢ ἁπλῶς ***διαιρέτης*** ἢ ***ὑποπολλαπλάσιον*** τοῦ διαιρετέου.

Προφανῶς, «***κάθε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 1 καὶ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του***».

«***Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10,100,.... ἂν λήγῃ εἰς ἕν, δύο,...0***».

§ 64. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 6 543:2.

Ἔχομεν 6543=654Δ+3Μ. Ἐπειδὴ κάθε δεκὰς διαιρεῖται διὰ 2, τὸ 654Δ διαιρεῖται διὰ 2· ἀφοῦ δὲ τὸ 3:2 δίδει ὑπόλοιπον 1, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ 6543:2 δίδει ὑπόλοιπον 1.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ ἂν διαιροῦμεν ἀριθμὸν διὰ 5. Ἄρα,

«***ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων του εἶνε διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5***».

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τελευταῖον (δεξιὰ) ψηφίον 0, 2, 4, 6, 8 εἶνε διαιρετοὶ διὰ 2 καὶ λέγονται ***ἄρτιοι ἢ ζυγοί***, ἐνῶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν 1, 3, 5, 7, 9 ἀφίνουν ὑπόλοιπον 1 καὶ λέγονται ***περιττοὶ ἢ μονοί***.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τελευταῖον ψηφίον 0 ἢ 5, εἶνε διαιρετοὶ διὰ 5.

§ 65. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον π.χ. τοῦ 6543 : 9, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 6543=6Χ+5Ε+4Δ+3Μ. Ἐπειδὴ ἡ 1Δ:9=10Μ:9 δίδει ὑπόλοιπον 1, αἱ 4Δ:9 δίδουν ὑπόλοιπον 4.

Ὁμοίως ἡ διαίρεσις 1Ε:9=100Μ:9 δίδει ὑπόλοιπον 1· ἡ 5Ε:9 δίδει 5 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα τὸ τὸ 6543:9 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ διαίρεσις (6+5+4+3):9.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3. Ὥστε,

«***τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 εἶνε τὸ***

αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9».

Πότε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9;

§ 66. Ἂν ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον π. χ. τοῦ 6543 διὰ τοῦ 4 ἢ 25, παρατηροῦμεν ὅτι 6543=65Ε+43Μ. Ἐπειδὴ ἡ 1Ε:4= =100:4, καθὼς καὶ 100:25, δίδει ὑπόλοιπον 0 καὶ ἡ 65Ε:4, ἢ 65Ε:25 δίδει ὑπόλοιπον 0. Ὥστε,

«τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 4 ἢ 25 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ 25 τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία (δεξιά)».

Πότε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25; Διὰ 50; Διὰ 100;

§ 67. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ὑπόλοιπον π. χ. τοῦ 6543:8.

Παρατηροῦμεν ὅτι 6543=6Χ+543Μ. Ἐπειδὴ δὲ 1Χ:8= =1000:8 δίδει ὑπόλοιπον 0 καὶ αἱ 6Χ:8 δίδουν ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 6543:8 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς 543:8. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως π. χ. 6543:125.

Πότε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125;

§ 68. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 6543:11, τὸν χωρίζομεν εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιά, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ὁρίζουν αὐτὰ καὶ εὑρίσκομεν 43+65=108, καὶ πάλιν 08+1=9, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τοῦ 9:11, δηλαδὴ τὸ 9 εἶνε τὸ ζητούμενον.

Πότε ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 11;

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 6 μέν, ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ 3, π. χ. ὁ 672, διὰ 12, ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ 4, π.χ. ὁ 6312, διὰ 15 δέ, ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ 5, καθὼς ὁ 1935.

Ἀσκήσεις.

288. Ποῖοι ἐκ τῶν 846, 7283, 8421, 9324, 16843, 76224 εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15;

289. Ἀλλάξατε, ἂν εἶνε ἀνάγκη, τὸ τελευταῖον ψηφίον δεξιὰ τῶν 2825, 39894, 386427 διὰ νὰ γίνουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5, τοῦ 3, τοῦ 10, τοῦ 9, τοῦ 11.

290. Ἐὰν ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ 9 καὶ ἀλλάξωμεν τὴν

θέσιν τῶν ψηφίων του, προκύπτει πάλιν διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9. Διατί;

291. α′). Ὅταν ἐξετάζωμεν ἂν ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, εἰμποροῦμεν νὰ παραλείπωμεν τὰ ψηφία ποὺ εἶνε διαιρετὰ διὰ 3 ἢ 9. Διατί; β′) Εὕρετε τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ 6739 διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9.

Περὶ πρώτων ἀριθμῶν.

§ 69. Ἀριθμοί, ἐκτὸς τοῦ 1, διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των, π. χ. οἱ 2, 3, 5, 7, 11, 29 λέγονται **πρῶτοι**, ἐνῶ αὐτοὶ ποὺ ἔχουν καὶ ἄλλους διαιρέτας, (ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ της 1) καθὼς οἱ 4, 8, 15, 21, κλπ., λέγονται *σύνθετοι*.

§ 70. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 2 καὶ ἑξῆς κατὰ σειρὰν μέχρι τινός, π. χ. μέχρι τοῦ 1000. Ὁ 2 εἶνε πρῶτος καὶ διαγράφομεν τὰ πολλαπλάσιά του 4, 6, 8, κλπ. Ὁ πρῶτος κατὰ σειρὰν ποὺ δὲν διεγράφη, ὁ 3, εἶνε πρῶτος. Διαγράφομεν τώρα τὰ πολλαπλάσια τούτου, ὅσα δὲν ἔχουν διαγραφῆ. Ὁ ἀριθμὸς 5 ποὺ ἔμεινε κατὰ σειράν, εἶνε πρῶτος. Ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως διαγράφοντες ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5, ὅσα δὲν ἔχουν διαγραφῆ. ὁ 7, πρῶτος κατὰ σειρὰν ποὺ δὲν διεγράφη καὶ εἶνε πρῶτος. Οὕτω προχωροῦμεν μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὅλους τοὺς πρώτους μέχρι τοῦ 1000.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶνε ***ἄπειρον***, διότι ὅσῳ οὕτω προχωροῦμεν, πέραν παντὸς ἀριθμοῦ, πάντοτε εὑρίσκομεν νέους πρώτους ἀριθμούς, μεγαλυτέρους πάντοτε τῶν εὑρεθέντων.

Ὁ τρόπος αὐτὸς μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς λέγεται κόσκινον τοῦ *Ἐρατοσθένους*.

§ 71. Ἐπειδὴ κάθε σύνθετος ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτας, τρέπεται εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του. Π.χ. ὁ $16=2\times8$. Ἂν ἀριθμὸς σύνθετος ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, εἰμποροῦμεν καθένα ἀπ' αὐτούς, ἂν δὲν εἶνε πρῶτοι, νὰ τρέψωμεν εἰς γινόμενον δύο ἄλλων μικροτέρων του καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτω μέχρις ὅτου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶνε πρῶτοι. Ἤτοι, *«κάθε σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων».*

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 60, εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοὺς πρώτους, διὰ τοῦ ὁποίου διαιρεῖται, τοῦ 2 καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως μὲ τὸ πηλίκον 30 καὶ μὲ τὸ νέον πηλίκον 15 καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐν ὅσω δὲν εὑρίσκομεν πηλίκον πρῶτον ἀριθμόν. Οὕτω ἔχομεν $60=2\times30=2\times2\times15=2\times2\times3\times5$.

Διὰ τὸν 560 π. χ. ἔχομεν

$560:2=280$	$560=2\times280$
$280:2=140$	$280=2\times140$
$140:2=70$	$140=2\times70$
$70:2=35$	$70=2\times35$
$35:5=7$	$35=5\times7$

Ἄρα, $560=2\times280=2\times2\times140=2\times2\times2\times70=2\times2\times2\times2\times35=2\times2\times2\times2\times5\times7=2^4\times5\times7$.

Συνήθως ἡ πρᾶξις τῆς ἀναλύσεως διατάσσεται ὡς κατωτέρω.

διὰ τὸν $60=2^2\times3\times5$		διὰ τὸν $560=2^4\times5\times7$	
60	2	560	2
30	2	280	2
15	3	140	2
5	5	70	2
1		35	5
		7	7
		1	

Ἀσκήσεις.

292. α΄) Ποῖοι ἐκ τῶν 1 ἕως 100 β΄) ἐκ τῶν 100 ἕως 300 εἶνε πρῶτοι; γ΄) Ποῖοι ἐκ τῶν 300 ἕως 500 εἶνε πρῶτοι ;

293. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων οἱ 84, 85, 87, 100, 432, 2145, 700, 828, 5445, 871, 1774, 30286.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀριθμῶν.

§ 72. ***Κοινὸς*** διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος τοὺς διαιρεῖ. Π. χ. τῶν 15, 30 καὶ 60 κοινοὶ διαιρέται εἶνε οἱ 1, 3, 5, 15.

Μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καλοῦμεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας των καὶ τὸν παριστάνομεν μὲ τὸν μ. κ. δ.

Ὅταν ἀριθμοὶ ἔχουν μ. κ. δ τὸν 1 λέγονται ***πρῶτοι μεταξύ των*** ἢ ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους***, καθὼς οἱ 3, 4, 5.

Ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 15, 30, 120, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται διὰ τοῦ μικροτέρου των 15, εἶνε ὁ 15. Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο διὰ δοθέντας ἀριθμοὺς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. των.

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν 810 καὶ 279. Διαιροῦμεν τὸν 810 διὰ τοῦ 279 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 252· τὸν 279 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 252 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 27 τὸν 252 διὰ τοῦ 27 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 9· τέλος τὸν 27· διὰ 9 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0. Ὁ 9 εἶνε ὁ μ. κ. δ. τῶν 810 καὶ 279.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν διατάσσεται ὡς κατωτέρω, γραφομένων τῶν πηλίκων κάθε διαιρέσεως ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου διαιρέτου.

	2	1	9	3
810	279	252	27	9
252	27	9	0	

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Π. χ. διὰ τοὺς 125, 350, 480, 500 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 125 τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν κάτωθεν μὲν καθενὸς τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, κάτω δὲ τοῦ μικροτέρου αὐτὸν τὸν ἴδιον. Εἰς τὴν νέαν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ προχωροῦμεν μέχρις ὅτου ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε 0, ὅτε ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶνε ὁ μ. κ. δ. Οὕτω ἔχομεν

125	350	480	500	μερικὸς διαιρέτης	125
125	100	105	0	»	100
25	100	5	0	μ. κ. δ.	5
0	0	5	0		

§ 73. Τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς, ἀφοῦ τοὺς ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενα, παραγόντων πρώτων.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $32=2^5$, $80=2^4\times5$, $120=2^3\times3\times5$.

Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν πρώτων παρα-

γόντων των, ὅπου καθένας λαμβάνεται μὲ τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν ποὺ ἔχει εἰς τὰ γινόμενα». Ἤτοι τὸ $2^3=2\times2\times2=8$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π.χ. διὰ τοὺς $24=2^3\times3$, $60=2^2\times3\times5$, $600=2^3\times3\times5^2$, ὅτι μ. κ. δ. των εἶνε ὁ $2^2\times3=4\times3=12$.

Ἀσκήσεις.

294. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ δ. τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν διὰ διαιρέσεως καὶ ἀναλύσεως α΄) 12, 20, 30· β΄) 135, 625, 450· γ΄) 140, 360, 781, 3784 δ΄) 1600, 500, 900, 1800, 2840.

295. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. διὰ δύο ἀπ' αὐτούς, ἔπειτα τὸν μ. κ. δ. τούτου καὶ ἑνὸς ἄλλου ἀπὸ τοὺς δοθέντας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου. Δείξατε αὐτὸ μὲ παράδειγμα.

296. Διατὶ ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς ὁ διαιρέτης τῶν ἄλλων εἶνε ὁ μ. κ. δ. των;

297. Εἰς πόσους τὸ πολὺ πτωχοὺς εἰμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου 2400 ὀκ. ἀλεύρι, 720 ὀκ. τυρὶ καὶ 2000 δρ. καὶ πόσας ὀκάδας καὶ δραχμὰς θὰ πάρῃ καθένας;

298. Ἕνα παιδὶ ἔχει 60 ἄσπρους βώλους, 72 κόκκινους καὶ 48 μαύρους. Πόσους σωροὺς τὸ πολὺ εἰμπορεῖ νὰ σχηματίσῃ μὲ αὐτούς, ὥστε ὁ κάθε σωρὸς νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος ἀπὸ κάθε εἶδος καὶ πόσους θὰ πάρῃ ἀπὸ καθένα εἶδος;

299. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἕνα πρόβλημα ὅμοιον διὰ ἀνθοδέσμας ἀπὸ διάφορα ἄνθη καὶ ἄλλο, ἂν μοιρασθοῦν ὡρισμέναι ὀκάδες λάδι, τυρί, σιτάρι καὶ ζάχαρι εἰς πτωχούς.

300. Ἂν δύο ἀριθμοί εἶνε πρῶτοι, π. χ. οἱ 5 καὶ 7, θὰ εἶνε καὶ πρῶτοι μεταξύ των. Διατί; Εὕρετε ἄλλους ἀριθμοὺς πρώτους μεταξύ των

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν.

§ 74. Καλοῦμεν ***ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον*** ἀριθμῶν τὸν μικρότερον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εἶνε πολλαπλάσιον καθενὸς ἀπὸ αὐτούς. Π. χ. τῶν 4, 8, 12, οἱ μὲν 24, 48 κλπ. εἶνε κοινὰ πολλαπλάσια, ὁ δὲ 24 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, θὰ παριστάνωμεν δὲ αὐτὸ ἐν γένει μὲ τὸ ε. κ. π.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ 5, 6, 30, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος 30 διαιρεῖται ἀπὸ τοὺς ἄλλους. Τὸ 30 εἶνε τὸ ε. κ. π. αὐτῶν. Ἂν δι᾽ ἄλλους ἀριθμούς, π. χ. διὰ τοὺς 5, 6, 7, 10, δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, δοκιμάζομεν τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον . . . τοῦ μεγαλυτέρου αὐτῶν 10, μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸν πρῶτον κατὰ σειρὰν 210, ποὺ διαιρεῖται μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντας καὶ ὁ 210 εἶνε τὸ ε. κ. π. τῶν 5, 6, 7, 10.

Ὁ τρόπος αὐτὸς μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. λέγεται ***μέθοδος διὰ πολλαπλασιασμοῦ***.

Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 5, 35, 80, 120, εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἀναλύομεν καθένα ἀπ᾽ αὐτοὺς εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων: $5=5$, $35=5\times7$, $80=2^4\times5$, $120=2^3\times3\times5$ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων τῶν γινομένων τούτων, ὅπου καθένα λαμβάνομεν μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς τοὺς παράγοντας. Οὕτω κοινὸς παράγων εἶνε ὁ 5, μὴ κοινοὶ δὲ οἱ 3, 7, 2 καὶ τὸ ε. κ. π. εἶνε τὸ $5\times2^4\times3\times7=1680$.

Ὁ τρόπος αὐτός, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. λέγεται ***μέθοδος δι᾽ ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας***.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πολὺ μεγάλοι, π. χ. οἱ 3, 5, 9, 12, 16, ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ τοὺς γράψωμεν κατὰ σειράν, διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2, ὁ ὁποῖος εἶνε ὁ μικρότερος πρῶτος ποὺ διαιρεῖ τοὐλάχιστον ***δύο*** ἀπὸ τοὺς δοθέντας: κάτω μὲν ἀπὸ καθένα ποὺ διαιρεῖται γράφομεν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων, κάτω δὲ τῶν ἄλλων τοὺς ἰδίους. Εἰς τοὺς νέους ἀριθμοὺς ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὑπάρχῃ πρῶτος, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον δύο ἀπ᾽ αὐτούς. Τοὺς διαιρέτας ποὺ εὑρίσκομεν κάθε φορὰν καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς, ἐκτὸς τῆς 1, γράφομεν εἰς στήλην ἀριστερὰ τῶν δοθέντων (ἀπὸ τοὺς ὁποίους χωρίζονται μὲ γραμμὴν κατακόρυφον). Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης αὐτῆς εἶνε τὸ ε. κ. π. Οὕτω ἔχομεν π. χ.

διὰ τοὺς 3, 5, 9, 12, 16.

2	3, 5, 9, 12, 16
2	3, 5, 9, 6, 8
3	3, 5, 9, 3, 4
3	1, 5, 3, 1, 4
4	
5	

ε. κ. π. $=2\times2\times3\times3\times4\times5=720$.

διὰ τοὺς 15, 25, 18, 7

3	15, 25, 18, 7
5	5, 25, 6, 7
5	1, 5, 6, 7
6	
7	

ε. κ. π. $=3\times5^2\times6\times7=3150$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

301—310. Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὸ ε. κ. π. τῶν α΄) 7, 21, 74· β΄) 7, 14, 21· γ΄) 10, 15, 20· δ΄) 10, 20, 40, 120·

Ὁμοίως διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἀναλύσεως τῶν: α΄) 8, 9, 12, 15, 20· β΄) 18, 24, 60, 80· γ΄) 50, 65, 16, 6· δ΄) 8, 9, 6, 12, 25, 30· ε΄) 280, 644, 600, 1024, 1800· στ΄) 3700, 72, 130, 366, 770, 2420, 3850.

311. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π. πολλῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π. διὰ δύο ἀπ' αὐτούς, ἔπειτα νὰ εὕρωμεν τὸ ε.κ.π. μεταξὺ αὐτοῦ ποὺ εὑρήκαμεν καὶ ἑνὸς ἄλλου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου πάρωμεν ὅλους τοὺς δοθέντας. Π. χ. διὰ τὸ ε. κ. π. τῶν 2, 6 καὶ 15, εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. τῶν 2 καὶ 6, δηλαδὴ τὸ 6 καὶ ἀκολούθως τὸ ε. κ. π. τῶν 6, 15. Εὕρετε μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὸ ε.κ.π. τῶν α΄) 3, 15, 20, 40· β΄) 4, 5, 16, 35, 60.

312. Ἀπὸ τὸν λιμένα τοῦ Πειραιῶς ἀναχωρεῖ κάθε 7 ἡμέρας ἀτμόπλοιον διὰ Βόλον, ἄλλο κάθε 4 ἡμ. διὰ Σπέτσας καὶ ἄλλο κάθε 2 ἡμ. δι' Ἰτέαν. Ἐὰν μίαν Κυριακὴν συμπέσῃ ἡ ἀναχώρησις 3 ἀτμοπλοίων ἀπὸ Πειραιῶς διὰ Βόλον, Σπέτσας, Ἰτέαν, πότε πάλιν θὰ συμπέσῃ ἡ πρώτη κοινὴ ἀναχώρησις;

313. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἓν ὅμοιον πρόβλημα μὲ τὸ προηγούμενον.

314. Τὸ ε.κ.π. ἀριθμῶν πρώτων π. χ. τῶν 3 καὶ 5 εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί;

315. Τὸ ε.κ.π. δύο ἀριθμῶν πρώτων μεταξύ των εἶνε τὸ γινόμενόν των. Διατί;

316. Διατὶ ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἕνας ποὺ διαιρεῖται ἀπὸ τοὺς ἄλλους εἶνε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν; Εὕρετε τοιούτους ἀριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

75. Διὰ νὰ μοιράσωμεν π. χ. ἕνα οἰκόπεδον εἰς δύο ἄτομα, τὸ χωρίζομεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ δίδομεν ἀπὸ ἕνα εἰς καθένα. Τὸ ἕνα ἀπ᾽ αὐτὰ λέγεται ἓν δεύτερον τοῦ οἰκοπέδου καὶ τὸ παριστάνομεν μὲ $\frac{1}{2}$ οἰκ. Ἂν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 2, 3, 4,.... ἴσα μέρη, τὸ ἕνα ἀπ᾽ αὐτὰ λέγεται ***ἓν δεύτερον***, ***ἓν τρίτον***, ***ἓν τέταρτον***,.. τῆς μονάδος, παριστάνομεν δ᾽ αὐτὰ μὲ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ καὶ καλοῦνται ***κλασματικαὶ μονάδες***, τὴν δὲ 1 καλοῦμεν ***ἀκεραίαν μονάδα***.

Τί καλεῖται κλασματικὴ μονάς ;

Ἐὰν π. χ. τὸ $\frac{1}{7}$ ἐπαναλαμβάνωμεν (ὡς προσθετέον), ἔστω 4 φοράς, ἔχομεν $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ***τέσσαρα ἕβδομα*** καὶ παριστάνεται μὲ τὸ $\frac{4}{7}$. Αὐτὸ φανερώνει ὅτι, διῃρέσαμεν τὴν 1 εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἐπήραμεν τὰ 4. Ὁμοίως ὁρίζομεν π. χ. τὸ $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{10}$ κλπ , λέγονται δὲ ***κλασματικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ***κλάσματα***, ἐνῷ οἱ 1, 2, 3,... λέγονται ***ἀκέραιοι*** ἀριθμοὶ καὶ γίνονται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν τῆς 1.

Ὥστε, ***κλάσμα λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ κλασματικὴν μονάδα, ὅταν τὴν ἐπαναλάβωμεν.***

Εἰς κάθε κλάσμα π.χ. εἰς τὸ $\frac{4}{7}$, τὸ 4 λέγεται ***ἀριθμητής***, τὸ 7 ***παρονομαστὴς*** καὶ οἱ δύο δὲ λέγονται ***ὅροι τοῦ κλάσματος.***

Πῶς γράφομεν ἕνα κλάσμα; Πῶς ἀπαγγέλλομεν ἕνα κλάσμα, π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{25}$; $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{3}$;

§ 76. Ἂν ἔχωμεν π.χ. 4 ὀκ. καὶ $\frac{3}{5}$ ὀκ., γράφομεν αὐτὸν $4+\frac{3}{5}$ ὀκ. ἢ $4\frac{3}{5}$ ὀκ., ἀπαγγέλλεται δὲ *τέσσαρα καὶ τρία πέμπτα* ὀκ. καὶ λέγεται *μικτὸς ἀριθμός*.

Τί καλεῖται μικτὸς ἀριθμός; Γράψατε τρεῖς μικτοὺς ἀριθμούς.

§ 77. Ἂν διαιρέσωμεν τὴν 1 εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ τὰ πάρωμεν ὅλα, ἔχομεν $\frac{4}{4}=1$. Ὁμοίως εἶνε $1=\frac{2}{2}$, $1=\frac{3}{3}$ κλπ., ἐνῷ τὸ $\frac{2}{3}$ π χ. εἶνε μικρότερον τῆς 1, τὰ $\frac{6}{4}$, $\frac{5}{3}$ κλπ. εἶνε μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν 1.

Πότε ἕνα κλάσμα εἶνε μικρότερον, πότε μεγαλύτερον, πότε ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα;

§ 78. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν 6 εἰς ἕκτα. Ἀφοῦ ἡ μονὰς ἔχει 6 ἕκτα, αἱ πέντε μονάδες ἔχουν 5×6 ἕκτα, ἤτοι $5=\frac{5\times6}{6}=\frac{30}{6}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι $4=\frac{4\times3}{3}=\frac{12}{3}$.

Πῶς τρέπομεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστήν;

§ 79. Διὰ νὰ τρέψωμεν π.χ. τὸν $6\frac{1}{4}$ εἰς τέταρτα, παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ἡ μονὰς ἔχει 4 τέταρτα, αἱ 6 μονάδες ἔχουν $4\times6=24$ τέταρτα καὶ ἓν τέταρτον ποὺ ἐδόθη, 25 τέταρτα, ἤτοι ἔχομεν $6\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ. $5\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$, $2\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$ κλπ.

Πῶς τρέπομεν μικτὸν εἰς κλάσμα;

Ἀσκήσεις.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης)

317. Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶνε τὸ λεπτόν; τὸ πενηντάλεπτον; τὸ δεκάλεπτον; τὸ πεντάλεπτον; τὸ εἰκοσάλεπτον;

318. Σχηματίσατε κλάσματα τοῦ 10δράχμου, τοῦ 20δράχμου, τοῦ πήχεως, τῆς ὥρας, τῆς ἡμέρας, τῆς ὀκᾶς.

319. Ἐξηγήσατε τὴν σημασίαν κάθε ἑπομένου ἀριθμοῦ καὶ ἀπεικονίσατέ την μὲ σχῆμα ἐπάνω εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ εἰς ὀρθογώνιον: α΄) $\frac{1}{2}$, β΄) $\frac{5}{2}$, $3\frac{1}{2}$, γ΄) $\frac{3}{3}$, δ΄) $\frac{5}{3}$, ε΄) $2\frac{1}{3}$, στ΄) $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{5}$.

320. Τρέψατε τοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{7}{12}$ τοῦ ἔτους εἰς μῆνας. Τὰ $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{10}$, $4\frac{2}{12}$ τοῦ μηνὸς εἰς ἡμέρας (ἂν ὁ μῆνας λογαριάζεται μὲ 30 ἡμ.), $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια.

321. Τρέψατε τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $2\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς εἰς λεπτά.

322. Τρέψατε τοὺς 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, εἰς δεύτερα, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, εἰκοστά.

323. Τρέψατε εἰς κλάσματα τοὺς $6\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{5}$, $6\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$, $60\frac{4}{9}$, $100\frac{5}{9}$.

324. Πόσα ρούπια εἶνε $7\frac{5}{8}$, $6\frac{1}{8}$, $12\frac{7}{8}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως;

325. Πόσα δράμια εἶνε $1\frac{1}{400}$, $5\frac{100}{400}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς;

326. Σχηματίσατε μικτοὺς ὀκᾶς, δραχμῆς καὶ ὥρας καὶ τρέψατέ τους εἰς κλάσματα.

Θεμελιώδης σημασία τῶν κλασμάτων.

80. Ἂν μοιράσωμεν π. χ. 3 γλυκίσματα εἰς 7 παιδιά, θὰ δώσωμεν εἰς καθένα $\frac{3}{7}$ τοῦ γλ. Διότι, ὅταν κόψωμεν 1 γλ. εἰς 7 ἴσα μέρη, κάθε παιδὶ θὰ πάρῃ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ γλ., καὶ ἀπὸ τὰ 3 γλ. θὰ πάρῃ $\frac{3}{7}$ γλ. Ἀλλ' ὅταν μοιράσωμεν 3 γλ. εἰς 7 ἴσα μέρη, ἔχομεν τὴν διαίρεσιν 3 γλ. : 7. Ἄρα 3 γλ. : $7=\frac{3}{7}$ γλ.

Ὥστε, «*μὲ τὰ κλάσματα κάθε διαίρεσις ἀκεραίων (ἐκτὸς ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε μηδὲν) εἶνε τελεία μὲ πηλίκον κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην*». Π. χ. $1:2=\frac{1}{2}$, $1:5=\frac{1}{5}$, $3:2=\frac{3}{2}$ κλπ.

§ 81. Ἔσιω τὸ $\frac{5}{8}$ πήχ. Ἐπειδὴ τὸ 5 πήχ. : $8=\frac{5}{8}$ πηχ., ἕπεται ὅτι,

«*κάθε κλάσμα εἰμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς τέλειον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του*».

§ 82. Ἐπειδὴ π. χ. $2:3=\frac{2}{3}$, ἂν τὸ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, δίδει γινόμενον τὸν 2. Ἑπομένως,

«*κάθε κλάσμα, ὅταν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν παρονομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του*».

§ 83. Ἐπειδὴ εἶνε π. χ. $7:1=\frac{7}{1}$ καὶ $7:1=7$, ἔχομεν $\frac{7}{1}=7$.

Ὁμοίως ἔχομεν π. χ. $6=\frac{6}{1}$, $12=\frac{12}{1}$, $4=\frac{4}{1}$, $10=\frac{10}{1}$ κλπ.

Πῶς ἕνας ἀκέραιος παριστάνεται ὡς κλάσμα ;

§ 84. Ἔστω π. χ. τὸ $\frac{13}{4}$. Ἐπειδὴ $\frac{13}{4}=13:4$ καὶ δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 1, τὸ δὲ 1, ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4, δίδει τέλειον πηλίκον $\frac{1}{4}$, ἕπεται ὅτι $\frac{13}{4}=3\,\frac{1}{4}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ.

$\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$, $\frac{35}{6}=5\,\frac{5}{6}$, $\frac{9}{2}=4\,\frac{1}{2}$. $\frac{8}{3}=2\,\frac{2}{3}$, $\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

Πῶς ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος καὶ τί ἀριθμὸς προκύπτει ἀπ' αὐτόν ;

Ἀσκήσεις.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

327. Ἂν μὲ 5 πήχ. ὕφασμα κατασκευάζουν 15 μαντήλια, πόσον μέρος τοῦ πήχεως χρειάζεται διὰ καθέν ;

328. Εὕρετε τὰ τέλεια πηλίκα τῶν 5 ὀκ. : 6, 7 ὀκ. : 8, 4 μ. : 9, 25 δρ. : 4, 32 δρ. : 5, 18 : 8, 23 : 5, 164 : 7, 16 : 3.

329. Ἐξαγάγετε τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν

$\frac{103}{10}$ δρ., $\frac{28}{12}$ ἔτ., $\frac{850}{400}$ ὀκ., $\frac{25}{8}$ πήχ., $\frac{11}{6}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{28}{7}$.

330. Γράψατε κλάσματα, τὰ ὁποῖα περιέχουν ἀκεραίας μονάδας καὶ ἐξαγάγετέ τας.

331. Μὲ τί εἶνε ἴσα τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν 1 καὶ ἀριθμητὴν ἀκέραιον ;

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

§ 85. Ἔστω π.χ. τὸ $\frac{3}{8}$ πηχ. καὶ $\frac{3\times2}{8}=\frac{6}{8}$ πηχ. Ἐπειδὴ τὸ μὲν $\frac{3}{8}$ π. $=3$ ρ., τὸ δὲ $\frac{6}{8}$ π. $=6$ ρ., ἕπεται ὅτι τὸ $\frac{6}{8}$ π. εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$ π., καὶ τὸ $\frac{3}{8}$ εἶνε τὸ μισὸ τοῦ $\frac{6}{8}$. Ἄρα,

«ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν κλάσματος μὲ 2, 3,... τὸ κλάσμα γίνεται 2, 3,... φορὰς μεγαλύτερον, ἂν δὲ διαιρέσωμεν αὐτὸν γίνεται 2,3,... φορὰς μικρότερον».

§ 86. Ἔστω π.χ. τὸ $\frac{3}{4}$ δρ. καὶ $\frac{3}{4:2}$ δρ. $=\frac{3}{2}$ δρ. Ἐπειδὴ τὰ μὲν $\frac{3}{4}$ δρ. $=75$λ., τὰ δὲ $\frac{3}{2}$ δρ. $=150$λ. (διότι $\frac{1}{2}$ δρ. $=50$λ.), ἕπεται ὅτι τὸ $\frac{3}{2}$ δρ. εἶνε διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{4}$ δρ., τὸ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶνε τὸ μισὸ τοῦ $\frac{3}{2}$.

Ἤτοι, ***«ἂν μὲν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν κλάσματος μὲ 2, 3,... τὸ κλάσμα γίνεται 2, 3,...φορὰς μικρότερον, ἂν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, γίνεται 2, 3,... φορὰς μεγαλύτερον.***

§ 87. Ἔστω π.χ. τὸ $\frac{5}{8}$. Ἔχομεν $\frac{5}{8}=5:8$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι, $5:8=5\times2:8\times2=\frac{5\times2}{8\times2}$. Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι εἶνε π. χ. $\frac{4}{8}=4:8=(4:2):(8:2)=\frac{4:2}{8:2}$. Ἑπομένως συνάγομεν ὅτι, ***«ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται».***

Ἀσκήσεις.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης).

332. Δύο ἀδελφοὶ θέλουν νὰ μοιράσουν τὰ $\frac{4}{7}$ μιᾶς περιουσίας. Πόσα θὰ πάρῃ καθένας;

333. Μιὰ μητέρα ἔδωκεν εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς θυγατέρας της τὰ $\frac{2}{9}$ γλυκίσματος· τί μέρος τοῦ γλυκίσματος ἔδωκεν εἰς τὰς τρεῖς;

334. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο ὅμοια προβλήματα μὲ τὰ ἀνωτέρω.

335. Γράψατε 4 κλάσματα καὶ μικτοὺς καὶ τρέψατέ τα εἰς ἰσοδύναμά των μὲ παρονομαστὰς 2, 3, 4,... φορὰς μεγαλυτέρους.

336. Πόσας φορὰς εἶνε μεγαλυτέρα ἡ δραχμὴ ἀπὸ τὸ λεπτόν; ἡ ὀκᾶ ἀπὸ τὸ δράμι; ὁ πῆχυς ἀπὸ τὸ ρούπι;

Πῶς συγκρίνομεν μεταξύ των κλάσματα.

§ 88. Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται ***ὁμώνυμα*** μέν, ἂν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καθὼς τὰ $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$, ***ἑτερώνυμα*** δέ, ἂν ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς, καθὼς τὰ $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}$.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{5}{7}, \frac{3}{7}$. Εἶνε φανερὸν ὅτι μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{5}{7}$. Ἀπὸ τὰ $\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{10}{11}, \frac{7}{11}$ π. χ. μεγαλύτερον εἶνε τὸ $\frac{10}{11}$ καὶ μικρότερον τὸ $\frac{2}{11}$.

Ποῖον εἶνε τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον ἀπὸ ὁμώνυμα κλάσματα ;

§ 89. Ἔστωσαν τὰ $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{10}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. Τὸ $\frac{4}{6}$ φανερώνει ὅτι ἐπήραμεν τὰ 4 ἀπὸ τὰ 6 ἴσα μέρη τῆς 1, ἐνῶ τὸ $\frac{4}{10}$ φανερώνει ὅτι ἐπήραμε τὰ 4 ἀπὸ τὰ 10 ἴσα μέρη τῆς 1. Ἀλλὰ αὐτὰ εἶνε μικρότερα ἀπὸ τὰ ἕκτα, ἄρα, τὸ $\frac{4}{6}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{4}{10}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἀπὸ τὰ $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, τὸ $\frac{2}{5}$ εἶνε τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ $\frac{2}{9}$ τὸ μικρότερον.

Ποῖον κανόνα συνάγομεν ἐκ τούτων ;

Ἂν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἢ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, εἶνε ἀνάγκη νὰ τὰ τρέψωμεν προηγουμένως εἰς ὁμώνυμα.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

§ 80. Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἑτερώνυμα κλάσματα, π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$. Εἰμποροῦμεν νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμά των ὁμώνυμα, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους καθενὸς μὲ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, ὥστε νὰ προκύψουν ἄλλα μὲ κοινὸν παρονομαστήν. Ἂν θέλωμεν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶνε τὸ ε.κ.π τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, εὑρίσκομεν τὸ ε.κ.π. τῶν 3,5,6,4, ἤτοι τὸ 60· αὐτὸ διαιροῦμεν μὲ τοὺς 3, 5, 6, 4 καὶ μὲ τὰ πηλίκα κατὰ σειρὰν πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων, ὅτε εὑρίσκομεν τὰ $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{15}{60}$, ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

Συνήθως γράφομεν τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα ὡς κατωτέρω.

20	12	10	15	
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{4}$	ε.κ.π. τὸ 60
$\frac{40}{60}$	$\frac{48}{60}$	$\frac{50}{60}$	$\frac{15}{60}$	

Ἂν θέλωμεν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων νὰ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους καθενὸς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω τρόπων εἶνε προτιμότερος καὶ πότε; Διατί;

Πῶς ἁπλοποιεῖται κλάσμα.

§ 91. *Ἁπλοποίησις* κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου ἰσοδυνάμου μὲ αὐτὸ καὶ μὲ ὅρους ***μικροτέρους***. Τοῦτο γίνεται ἂν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον. Π χ. εἶνε $\frac{15}{25}=\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}$, $\frac{8}{24}=\frac{8:8}{24:8}=\frac{1}{3}$, $\frac{14}{35}=\frac{14:7}{35:7}=\frac{2}{5}$.

Κλάσμα μὲ ὅρους πρώτους μεταξύ των λέγεται ***ἀνάγωγον*** καὶ δὲν ἁπλοποιεῖται. Μὲ τὴν ἁπλοποίησιν ἐπιδιώκομεν συνήθως νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα εἰς ***ἰσοδύναμόν του ἀνάγωγον***. Διὰ νὰ τρέψωμεν ταχύτερον ἕνα κλάσμα εἰς ἀνάγωγον, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του μὲ τὴν μ.κ.δ. των. Π.χ. ἀπὸ τὸ $\frac{594}{1386}$ εὑρίσκομεν τὸ ἀνάγωγον $\frac{3}{7}$, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του μὲ τὸν 198, μ.κ.δ. τῶν 594 καὶ 1386. Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. $\frac{48}{144}=\frac{48:48}{144:48}=\frac{1}{3}$

Ἀσκήσεις.

337—9. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τὰ α') $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}$, β') $\frac{4}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$, γ') $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$.

340. Γράψατε α') δύο, β') τρία ἑτερώνυμα κλάσματα καὶ τρέψατέ τα εἰς ὁμώνυμα μὲ δύο τρόπους.

341—3. Τρέψατε τὰ ἑπόμενα κλάσματα εἰς ἰσοδύναμά των μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. α') $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, β') $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, γ') $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{2}$.
Πῶς γίνεται τοῦτο;

344. Νὰ τραποῦν εἰς ἀνάγωγα τὰ ἑπόμενα κλάσματα.

$\frac{18}{27}$, $\frac{16}{36}$, $\frac{22}{24}$, $\frac{34}{12}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{48}{12}$, $\frac{8\times16}{3\times8}$, $\frac{32\times3}{4\times6}$, $\frac{65}{5\times11}$, $\frac{39}{13\times7}$,

$\frac{200\times4}{10\times8\times5}$, $\frac{300\times7}{150\times3}$ $\frac{159\times9}{3\times9}$, $\frac{4\times100}{8\times100}$, $\frac{9\times4\times25}{2\times100}$, $\frac{4\times11\times6}{6\times40\times7}$.

345. Γράψατε τρία κλάσματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἁπλοποιοῦνται καὶ κάμετε αὐτὰ ἀνάγωγα.

346. Γράψατε πέντε ὁμώνυμα κλάσματα καὶ θέσατέ τα κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὸ μικρότερον.

347. Κάμετε τὸ αὐτὸ διὰ πέντε κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

348. Κάμετε τὸ αὐτὸ διὰ ἑπτὰ κλάσματα ἑτερώνυμα.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων.

§ 92. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, ἂν μὲν εἶνε ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των καὶ γράφομεν τὸ ἄθροισμα ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν αὐτόν· ἂν δὲ εἶνε ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ τὰ προσθέτομεν.***

Π.χ. $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$.

«Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους των καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἀθροίσματα».

Π.χ. $2\frac{1}{4}+5\frac{1}{3}=7+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=7+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=7\frac{7}{12}$.

93. ***«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ μειωτέου, τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν παρονομαστὴν αὐτῶν».***

Π. χ. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{2}{9}$.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτά. Π.χ. $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν $3\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}$. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὅτε ἔχομεν $3\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}=3\frac{2}{4}-1\frac{1}{4}$.

Ἀφαιροῦμεν τώρα τούτων χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ τὰ κλάσματα καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν $2\frac{1}{4}$.

Ἂν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν $12\frac{1}{5}-5\frac{3}{4}$, θὰ ἔχωμεν

$12\frac{1}{5}-5\frac{3}{4}=12\frac{4}{20}-5\frac{15}{20}$. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{15}{20}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ $\frac{4}{20}$, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὰς 12, τὴν τρέπομεν εἰς εἰκοστὰ καὶ τὰ προσθέτομεν εἰς τὸ $\frac{4}{20}$, ὅτε ἔχομεν,

$11\frac{24}{20}-5\frac{15}{20}=6\frac{9}{20}$.

Τὴν τοιαύτην ἀφαίρεσιν ἐκτελοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον $\frac{20}{20}=1$ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἐπίσης 1, καὶ ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν ὅτε ἔχομεν $12\frac{24}{20}-6\frac{15}{20}=6\frac{9}{20}$.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον ἢ μικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον,

Π. χ. $4-\frac{2}{5}=4\frac{5}{5}-1\frac{2}{5}=3\frac{3}{5}$ ἢ $4-\frac{2}{5}=3\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=3\frac{3}{5}$.

Ἀσκήσεις.

349. Γράψατε τρία κλάσματα, τρεῖς μικτοὺς καὶ προσθέσατε αὐτούς.

350 Ἕνας εἰσπράττει $15\frac{3}{4}$ δρ., $85\frac{1}{2}$ δρ., $145\frac{3}{5}$ δρ., 200δρ., καὶ $2\frac{2}{19}$ δρ. Πόσα εἰσπράτιει τὸ ὅλον ;

351. Σχηματίσατε ἀπὸ τὸ προηγούμενον καταλλήλως καὶ λύσατε δύο προβλήματα ἀφαιρέσεως.

352 Ἕνας ἠγόρασε ἐμπόρευμα ἀντὶ $127\frac{3}{5}$ δρ., ἡ φόρτωσις τοῦ ἐστοίχισε $13\frac{9}{20}$ δρ., τὸ ἐπώλησε δὲ μὲ κέρδος $34\frac{3}{4}$ δρ. Πόσον τὸ ἐπώλησε ;

353. Πόσους πήχεις ὕφασμα τὸ ὅλον ἠγόρασε ἔμπορος, ἂν ἐπρομηθεύθη ἀπὸ διαφόρους τὰ ἑξῆς:

$127\frac{5}{8}$ πηχ., $175\frac{1}{2}$ πηχ., $76\frac{3}{4}$ πηχ., $205\frac{1}{2}$ πηχ., $150\frac{1}{2}$ πηχ., $152\frac{3}{8}$ πηχ.;

354. Βαδίζει ἕνας μίαν ἡμέραν ἐπὶ $2\frac{1}{5}$ ὥρ. καὶ εἰς καθεμίαν τῶν ἑπομένων ἡμερῶν $1\frac{1}{4}$ ὥρ. περισσότερον τῆς προηγουμένης. Πόσας ὥρας ἐβάδισεν εἰς 4 ἡμέρας;

355. Νὰ συντεθοῦν καὶ νὰ λυθοῦν δύο ὅμοια προβλήματα πρὸς τὰ ἀνωτέρω προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

356—360. Εὕρετε τὸ x, ὥστε νὰ εἶνε $1\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=x$, $8\frac{1}{2}-x=\frac{3}{4}$, $17-x=1\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{5}-2\frac{7}{8}=x$, $140\frac{3}{20}=95\frac{3}{5}+x$.

361—362. Εὕρετε τὰ $\left(12\frac{3}{5}+1\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{4}{7}+2\frac{1}{3}\right)$, $\left(1\frac{4}{5}+13\frac{5}{12}\right)+\left(18\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)-\left(6\frac{3}{4}+2\frac{5}{8}\right)$.

363. Ἕνας ἠγόρασε λάδι ἀντὶ $38\frac{1}{2}$ δρ., ζάχαρι ἀντὶ $22\frac{1}{2}$ δρ. καὶ καφὲ ἀντὶ $35\frac{7}{20}$ δρ. Ἔδωκεν ἕνα χαρτονόμισμα 100 δρ., πόσα θὰ λάβῃ ὑπόλοιπον;

364. Ἕνας πωλεῖ ἐμπόρευμα $127\frac{11}{12}$ δρ. μὲ κέρδος $43\frac{1}{2}$ δρ. Πόσον τὸ ἠγόρασε;

365. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ ἀνωτέρω, ἀλλὰ τὸ ἕνα μὲ ζημίαν.

366. Ἕνας ἐξώδευσε πρῶτον $18\frac{4}{5}$ δρ. ἐκ τῶν $728\frac{3}{4}$ δρ. τὰς ὁποίας εἶχεν. Ἔπειτα $27\frac{1}{20}$ δρ. καὶ τέλος $54\frac{1}{4}$ δρ. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ μὲ δύο τρόπους).

367. Νὰ συντεθῇ καὶ νὰ λυθῇ ὅμοιον πρόβλημα πρὸς τὰ ἀνωτέρω.

368. Ἕνας ἔχει $36\frac{1}{4}$ δρ., β′ $8\frac{7}{20}$ δρ. ὀλιγωτέρας τοῦ α′, καὶ γ′ $7\frac{1}{5}$ ὀλιγωτέρας τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων. Πόσας δρ. ἔχει καθένας καὶ πόσας οἱ τρεῖς ;

369. Ἕνα ἔργον ἤρχισεν εἰς τὰς $8\frac{3}{4}$ ὥρ. π. μ. καὶ διήρκεσε $10\frac{8}{15}$ ὥρ. Πότε ἐτελείωσε ;

370. Κατὰ τὴν συμφωνίαν τεσσάρων συντρόφων τὰ κέρδη των μοιράζονται μεταξύ των ὡς ἑξῆς : ὁ α′ πέρνει τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ β′ τὰ $\frac{4}{15}$, ὁ γ′ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ δ′ τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον ἦτο τὸ μερίδιον τοῦ δ′ ;

371. Νὰ συντεθοῦν καὶ νὰ λυθοῦν τρία ὅμοια προβλήματα πρὸς τ' ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιασμὸς μὲ κλάσματα.

§ 94. *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀφίνομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν διαιρῆται) καὶ ἀφίνομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν».* Διατί ;

Π.χ. $\frac{3}{4}\times 2=\frac{3\times 2}{4}=\frac{6}{4}$ ἢ $\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{4:2}=\frac{3}{2}$, $\frac{7}{8}:4=\frac{7}{2}$

§ 95. Ἂν ζητοῦμεν π. χ. τὸ $6\frac{3}{4}\times 3$, ἔχομεν $6\frac{3}{4}\times 3=$

$$=\left(6+\frac{3}{4}\right)\times 3=6\times 3+\frac{3}{4}\times 3=18+\frac{9}{4}=18+2\frac{1}{4}=20\frac{1}{4}.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου εἶνε τὸ $6\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$, ἔχομεν

$6\frac{3}{4}\times 3=\frac{27}{4}\times 3=\frac{27\times 3}{4}=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4}$. Ὁμοίως ἔχομεν

$4\frac{2}{7}\times 3=4\times 3+\frac{2}{7}\times 3=12+\frac{6}{7}=12\frac{6}{7}$,

ἢ $4\frac{2}{7}\times 3=\frac{30}{7}\times 3=\frac{90}{7}=12\frac{6}{7}$.

Μὲ πόσους τρόπους πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον καὶ πῶς;

§ 96. ***Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς σταφύλια, ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 8 δρ.;***

Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ὡρισμένου μέρους αὐτῆς. Καθώς, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, οὕτω καὶ ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μέρους τῆς μονάδος ἢ τῶν πολλῶν καὶ μέρους αὐτῆς, θὰ κάμνωμεν πολλαπλασιασμόν.

Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. σταφύλια μὲ τὸν πολαπλασιασμὸν 8 δρ. $\times\frac{3}{4}$. Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ μία ὀκ. τιμᾶται 8 δρ., τὸ τέταρτον τῆς ὀκᾶς θὰ τιμᾶται 4 φορὰς ὀλιγώτερον τοῦ 8, ἤτοι 8 δρ. : $4=\frac{8}{4}$ δρ., τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ ὀκ. θὰ τιμῶνται 3 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{8}{4}$ δρ., ἤτοι $\frac{8}{4}$ δρ. $\times 3=\frac{8\times 3}{4}$ δρ. Παρατηροῦμεν ὅτι καθὼς τὸ $\frac{3}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ τέταρτον τῆς μονάδος, ἀφοῦ τὸ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς, οὕτω καὶ τὸ $8\times\frac{3}{4}$ εὑρίσκεται, ἂν εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ 8 καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς. Ὥστε,

«πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα θὰ σημαίνῃ, νὰ εὕρωμεν μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου (τὸ ὁποῖον ὁρίζει ὁ παρονομαστὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ) καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν τόσας φορὰς ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ».

Π.χ. $5\times\frac{2}{3}$ σημαίνει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ 5, ἤτοι $5:3=\frac{5}{3}$ καὶ αὐτὸ τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2, ὅτε $\frac{5}{3}\times 2=\frac{5\times 2}{3}$. Ἤτοι $5\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{3}$. Ἐπίσης π.χ. $7\times\frac{4}{9}=\frac{7\times 4}{9}$

Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα ;

§ 97. Ἂν ζητῆται π.χ. πόσον τιμῶνται $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχ. ταντέλας, ὅταν ὁ πῆχυς τιμᾶται $\frac{3}{4}$ δρ. πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{3}{4}$ δρ. $\times \frac{5}{8}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ , ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{3}{4}$ δρ. δηλ. τὸ $\frac{3}{4}$ δρ. : $8 = \frac{3}{4 \times 8}$ δρ. Διατί ; Καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχ., ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\frac{3}{4 \times 8}$ δρ. μὲ τὸ 5, ἤτοι $\frac{3}{4 \times 8}$ δρ. $\times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 8}$ δρ. (Διατί ;). Ὥστε $\frac{3}{4}$ δρ. $\times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 5}{4 \times 8}$ δρ.

Ὁμοίως ἔχομεν πχ. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα ;

§ 98. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μικτός, ἢ ἂν καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶνε μικτοί, π. χ $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα.

Π. χ. $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} \times 2 + 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$

$$= \frac{7}{2} \times 2 + \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{2 \cdot 2} + \frac{7}{8} = 7 + \frac{7}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτούς ;

§ 99. Ἐπειδὴ $\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 4}{5 \times 9} = \frac{4 \times 2}{9 \times 5} = \frac{4}{9} \times \frac{2}{5}$, ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἐναλλαγῆς δύο κλασματικῶν παραγόντων,

§ 100. Γινόμενον μὲ πολλοὺς παράγοντας κλάσματα ὁρίζομεν ὅπως καὶ μὲ ἀκεραίους, ἔχομεν δὲ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας καὶ δεικνύονται εὐκόλως. Π. χ. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2\times4\times1\times2}{3\times5\times2\times5}=\frac{16}{150}$.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων;

Εἰς γινόμενον παραγόντων *«εἰμποροῦμεν πρὶν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν νὰ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς οἱουδήποτε ἀπ' αὐτοὺς διὰ κοινοῦ διαιρέτου των».*

Π. χ. $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{4\times3}{9\times8}=\frac{1\times3}{9\times2}=\frac{1\times1}{3\times2}=\frac{1}{6}$.

Συνήθως γράφομεν $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

372—379. Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ $\frac{3}{4}\times2$, $\frac{5}{9}\times3$, $7\times\frac{3}{14}\times$

$\times\frac{4}{9}\times8$, $\frac{4}{15}\times21\times\frac{2}{7}\times8$, $\frac{18}{64}\times32\times\frac{191}{400}\times8$,

$2\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}\times9$, $4\frac{1}{3}\times2\times5\frac{1}{7}\times4$, $8\times3\frac{1}{5}\times\frac{3}{16}$.

380. Ἕνας ἔδωκεν ἀπὸ $10\frac{4}{5}$ δρ. εἰς καθένα ἀπὸ 15 πτωχούς. Πόσας δραχμὰς ἔδωκε τὸ ὅλον;

381. Ἐργάτρια ὑφαίνει $1\frac{1}{4}$ πήχ. τὴν ὥραν. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς 25 ἡμέρας, ἂν ἐργάζεται $9\frac{1}{2}$ ὥρ. καθ' ἡμέραν;

382. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοια προβλήματα πρὸς τὰ ἀνωτέρω.

383—389. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατωτέρω γινόμενα, ἀφοῦ προηγουμένως γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις,

$\frac{45}{56}\times\frac{64}{81}$, $\frac{9}{14}\times\frac{36}{39}$, $8\frac{2}{3}\times\frac{6}{13}$, $2\frac{3}{4}\times81\frac{8}{9}$,

$\frac{8}{11}\times33\times\frac{1}{2}$, $42\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{4}\times2\frac{1}{5}$, $7\times\frac{4}{9}\times5\times\frac{3}{25}$.

390. Γράψατε τέσσαρα κλάσματα καὶ εὕρετε τὸ γινόμενόν των. Ὁμοίως τρεῖς μικτούς.

391. Τί ἐννοοῦμεν μὲ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^5$, καὶ μὲ τί ἰσοῦται καθένα ;

392. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 18000δρ., τῶν 21000δρ., καὶ τὰ $5\frac{1}{2}$ τῶν 44 ὀκ., τῶν 100 ὀκ.

393—396. Ὁ πῆχυς ὕφασμα τιμᾶται 180 δρ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ πηχ. αὐτοῦ ; πόσον οἱ $5\frac{3}{4}$ πήχ., πόσον οἱ $4\frac{1}{2}$ πήχ.; οἱ $7\frac{7}{8}$ πήχ;

397. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας μὲ μικτοὺς ἀριθμούς.

398. Ἕνας ἔχει χρήματα νὰ περάσῃ $18\frac{3}{4}$ ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $10\frac{1}{5}$ δρ. τὴν ἡμέραν· πόσας δρ. ἔχει ;

399. Ἕνας ἀγοράζει $36\frac{1}{5}$ ὀκ. ἐμπόρευμα πρὸς $5\frac{1}{4}$ δρ. τὴν ὀκᾶν, τὸ πωλεῖ δὲ μὲ κέρδος ἢ μὲ ζημίαν $\frac{1}{5}$ δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τὸ ἐπώλησε κάθε φοράν ;

400. Νὰ συντεθοῦν καὶ νὰ λυθοῦν δύο ὅμοια προβλήματα πρὸς τ' ἀνωτέρω.

401. Ἕνας ἔχει $824\frac{1}{4}$ δρ. ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν καὶ τέλος τὰ $\frac{11}{21}$ αὐτῶν. Πόσαι δρ. τοῦ ἔμειναν; (Μὲ δύο τρόπους).

402. Κάποιος ἔχει 855 δρ. καὶ ξοδεύει τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῶν, ἔπειτα τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐκ τοῦ νέου ὑπολοίπου τὰ $\frac{3}{5}$. Τὶ τοῦ ἔμεινε;

403. Ὀπωροπώλης ἔχει 35 μῆλα πωλεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου, ἔπειτα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήλου. Πόσα μῆλα τοῦ ἔμειναν ;

404. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν ὅμοια προβλήματα μὲ τὰ ἀνωτέρω.

Διαίρεσις μὲ κλάσματα.

§ 101. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν (ἂν διαιρῆται) καὶ ἀφίνομεν τὸν αὐτὸν παρανομαστήν, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν καὶ ἀφίνομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Π.χ. $\frac{21}{5}:3=\frac{21:3}{5}=\frac{7}{5}$, ἢ $\frac{21}{5}:3=\frac{12}{5\times3}=\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$. Διατί;

Ἐπίσης ἔχομεν $\frac{15}{8}:2=\frac{15}{8\times2}=\frac{15}{16}$. Διατί;

§ 102. Ἂν ὁ διαιρετέος εἶνε μικτός, π. χ. $8\frac{4}{9}:2$, ἔχομεν

$8\frac{4}{9}:2=\frac{76}{9}:2=\frac{76:2}{9}=\frac{38}{9}=4\frac{2}{9}$. Διατί; Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔχομεν $8\frac{4}{9}:2=8:2+\frac{4}{9}:2=4+\frac{2}{9}=4\frac{2}{9}$. Διατί;

Μὲ πόσους τρόπους διαιροῦμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου καὶ πῶς;

§ 103. *Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.*
Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν τρίτον, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἕνα, δίδει γινόμενον τὸν ἄλλον (τὸν διαιρετέον).

§ 104. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ἂν τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως τιμῶνται $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου;

Δίδεται ἡ τιμὴ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς. Καθώς, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται τῆς μιᾶς, κάμνομεν διαίρεσιν, οὕτω καὶ ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ μέρους, ἢ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ μέρους αὐτῆς καὶ ζητεῖται τῆς μιᾶς θὰ κάμνωμεν διαίρεσιν. Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς μὲ τὴν διαίρεσιν $\frac{3}{4}$ ἑκατ : $\frac{6}{8}$

Ἤτοι ζητεῖται ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{6}{8}$, δίδει γινόμενον $\frac{3}{4}$ ἑκ. Ἀλλ' ἀφοῦ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶνε $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκ., τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4\times6}$ ἑκ. (Διατί;) Καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, δηλαδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θὰ εἶνε 8 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ

$\frac{3}{4\times6}$ ἑκ. ἤτοι $\frac{3\times8}{4\times6}$ ἑκ. Ὥστε $\frac{3}{4}$ ἑκ.: $\frac{6}{8}=\frac{3\times8}{4\times6}$ ἑκ. $=\frac{1\times2}{1\times2}$ ἑκ. $=$

$=1$ ἑκ. $=100$ δρ. Ἤτοι ὁ πῆχυς τιμᾶται 100 δρ.

Τὸ ἐξαγόμενον $\frac{3\times8}{4\times6}$ εὑρίσκομεν, ἂν τὸ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{8}{6}$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὸ $\frac{6}{8}$, ἂν ἀντιστρέψωμεν αὐτό.

Ὁμοίως ἔχομεν π. χ. $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$.

Ἐπίσης ἔχομεν $5:\frac{4}{9}=5\times\frac{9}{4}$, $2\frac{1}{3}:\frac{5}{7}=2\frac{1}{3}\times\frac{7}{5}$ κ.λ.π.

Ἤτοι, ***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».***

Ἂν ὁ διαιρέτης εἶνε μικτός, τὸν τρέπομεν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ. Π.χ. $5:2\frac{1}{3}=5:\frac{7}{3}=5\times\frac{3}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$,

$$\frac{2}{9}:2\frac{1}{3}=\frac{2}{9}:\frac{7}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{21}.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

(Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης)

405-418. Εὕρετε τὰ πηλίκα $\frac{15}{19}:5$, $\frac{16}{7}:8$, $\frac{12}{7}:9$, $\frac{19}{4}:12$, $\frac{6}{7}:5$, $\frac{5}{1}:4$, $\frac{2}{1}:7$, $\frac{8}{1}:4$, $60\frac{1}{4}:5$, $7\frac{2}{5}:4$, $12\frac{1}{2}:25$, $5:9$, $2\frac{3}{5}:15$, $8\frac{2}{15}:4$.

419. Γράψατε καὶ ἐκτελέσατε μὲ τὰς δοκιμάς των διαιρέσεις καθὼς αἱ ἀνωτέρω.

420. Ἂν 25 ὀκ. κάρβουνα τιμῶνται $78\frac{3}{4}$ δρ., πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

421. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα, ὡς τ' ἀνωτέρω, μὲ διάφορα ἐμπορεύματα.

422-431. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαὶ τῶν

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{6},\quad \frac{5}{8}:\frac{3}{4},\quad 10:\frac{3}{5},\quad 7:\frac{2}{9},$$

$$\frac{3}{4}:\frac{4}{5},\quad \frac{35}{12}:\frac{15}{3},\quad 4\frac{1}{2}:\frac{4}{5},\quad 8\frac{5}{6}:\frac{1}{5},\quad 4:3\frac{1}{5},\quad 8:3\frac{1}{2},$$

432. Γράψατε καὶ ἐκτελέσατε ἀπὸ μίαν διαίρεσιν μὲ τὴν δοκιμήν της, μὲ διαιρετέον ἀκέραιον, κλάσμα, μικτὸν καὶ μὲ διαιρέτην α΄) κλάσμα καὶ β΄) μικτόν.

433. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ τὸ ἀντίστροφόν του, τί γινόμενον εὑρίσκομεν καὶ διατί;

434. Μὲ $18\frac{3}{4}$ δρ. ἀγοράζομεν $11\frac{1}{4}$ μ. ὕφασμα. Πόσα μέτρα ἀγοράζομεν μὲ 1 δρ.;

435. Φιλανθρωπικὸν ἵδρυμα ἔλαβε δωρεὰν 42000 δρ., ποὺ εἶνε τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς περιουσίας τοῦ δωρητοῦ. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του;

436. Πόση εἶνε ἡ ταχύτης κινητοῦ, ἂν εἰς $3\frac{1}{4}$ ὥρ. διανύῃ $6\frac{1}{4}$ χιλ.;

437. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ πράγματος, ἂν $5\frac{3}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν $4\frac{3}{10}$ δρχ.;

438. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἀνὰ ἕνα πρόβλημα διαιρέσεως μερισμοῦ καὶ μετρήσεως μὲ ἀριθμοὺς μικτοὺς καὶ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας.

439. Ταχυδρόμος διανύει $37\frac{1}{8}$ χλμ. καθ' ἡμέραν· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ $148\frac{1}{2}$ χλμ;

440. Συνθέσατε καὶ λύσατε πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον καὶ ἄλλο μερισμοῦ.

441. Ἕνας ἔχει χρήματα διὰ νὰ περάσῃ 72 ἡμ., ἐὰν ἐξοδεύῃ $8\frac{1}{2}$ δρ. καθ' ἡμέραν. Πόσα χρήματα ἔχει καὶ πόσας ἡμέρας θὰ περάσῃ μὲ αὐτά, ἂν ἐξοδεύῃ $7\frac{1}{2}$ δρ. καθ' ἡμέραν;

442. Νὰ συντεθῇ καὶ λυθῇ ὅμοιον πρόβλημα πρὸς τ' ἀνωτέρω.

443. Ἀπὸ τὰ κέρδη ἑταιρείας ἐπῆρε ὁ α΄ συνέταιρος τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ β΄ τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπον 1800δρ. Πόσας δρ. ἐπῆρε καθένας;

444. Ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀντὶ $1220\frac{4}{5}$ δρ. καὶ ἔμειναν $56\frac{1}{2}$ πηχ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ πῆχυς;

445. Ἔμπορος ἐξώφλησε τοὺς πιστωτάς του, ἀφοῦ τοὺς ἔδωκε $\frac{2}{3}$ τῶν ὑποχρεώσεών του. Πόσα ὤφειλεν, ἂν κατέβαλε 12500δρ.,

Σύνθετα κλάσματα.

§ 105. *Σύνθετον* καλεῖται ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὸ ὀλιγώτερον ἕνας ὅρος δὲν εἶνε ἀκέραιος. Π.χ. τὰ $\frac{3}{\frac{21}{4}}$, $\frac{5}{\frac{11}{5}}$, ἐνῶ τὰ ἄλλα κλάσματα π. χ. τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ κ.λ.π. θὰ τὰ καλοῦμεν **ἁπλᾶ** κλάσματα.

Τοὺς ὅρους συνθέτου κλάσματος κλείομεν εἰς παρένθεσιν, ἂν εἶνε ἀνάγκη νὰ τοὺς διακρίνωμεν, ἔχει δὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν, ἐπειδὴ θὰ τὸ θεωροῦμεν ὡς πηλίκον διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἔστω π. χ. τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$. Ἔχομεν $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} =$

$$= \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως π.χ. τὸ $\dfrac{\frac{3}{4}}{7} = \frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{28}$.

Ἂν ὁ ἕνας ὅρος ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι συνθέτου κλάσματος εἶνε μικτοί, τοὺς τρέπομεν εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα τρέπομεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν. Π. χ. ἔχομεν

$$\frac{6\frac{1}{2}}{5}=\frac{\frac{13}{2}}{5}=\frac{13}{2}:5=\frac{13}{2\times 5}=\frac{13}{10}=1\frac{3}{10}.$$

Τρέπομεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν του ἢ ἐπὶ τὸ ε.κ.π. αὐτῶν. Π. χ.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{\frac{3}{4}\times 8}{\frac{5}{8}\times 8}=\frac{\frac{3}{1}\times 2}{\frac{5}{1}\times 1}=\frac{\frac{6}{1}}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}.$$

Ἐπειδὴ τὰ σύνθετα κλάσματα ἀνάγονται εἰς ἁπλᾶ, αἱ πράξεις μὲ αὐτὰ ἀνάγονται εἰς τὰς τῶν ἁπλῶν. Π. χ.

$$\frac{5\frac{1}{3}}{6}+\frac{\frac{4}{9}}{1\frac{2}{7}}=5\frac{1}{3}:6+\frac{4}{9}:1\frac{2}{7}=\frac{16}{3}:6+\frac{4}{9}:\frac{9}{7}=$$

$$=\frac{16}{18}+\frac{4}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{16}{18}+\frac{28}{81}\ \kappa\lambda\pi. \qquad \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}}\times\frac{2}{5}=\left(3\frac{1}{2}:\frac{4}{9}\right)\times\frac{2}{5}\ \kappa\lambda\pi$$

Ἀσκήσεις.

446—455. Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ ἑξῆς σύνθετα κλάσματα.

α′) $\cfrac{3}{\cfrac{5}{\cfrac{5}{9}}}$, β′) $\cfrac{7}{\cfrac{5}{8}}$, $\cfrac{6\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\cfrac{5}{6}}$, $\cfrac{2\frac{1}{4}}{\cfrac{4}{9}}$, $\cfrac{\frac{35}{8100}}{\cfrac{1}{5}}$, $\cfrac{3+2\frac{1}{5}}{7\frac{3}{8}}$, $\cfrac{\frac{28}{3}}{\cfrac{2}{\cfrac{3}{4}}}$

$\cfrac{120\frac{3}{8}-2\frac{1}{2}}{17\frac{3}{5}+6\frac{1}{3}}$, $\cfrac{4\cfrac{2}{\cfrac{1}{5}}}{\cfrac{4}{25}}$, $\cfrac{\frac{1}{2}}{\cfrac{3}{8\frac{1}{2}}}$, $\cfrac{2\frac{54}{2100}+\frac{53}{4}-\frac{915}{100}}{8-5\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

456. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία προβλήματα διὰ τὴν λύσιν τῶν ὁποίων, ἂν σημειωθοῦν αἱ πράξεις, προκύπτουν σύνθετα κλάσματα.

Λύσεις προβλημάτων μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

§ 106. *α΄) Πολλαπλασιασμοῦ.*

1) « Ἂν ἡ ὀκᾶ τὸ λάδι τιμᾶται 24 δρ., πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ;» Διὰ τὸν λύσιν αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκ.$=\frac{4}{4}$ ὀκ. τιμῶνται . . . . . . 24 δρ.

τὸ $\frac{1}{4}$ . . . . 24 : 4$=\frac{24}{4}=$6 δρ.

τὰ $\frac{3}{4}$ . . . . 6$\times$3$=$18 δρ.

Αὐτὸ τὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως, μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν

24 δρ.$\times\frac{3}{4}$. Πράγματι 24 δρ. $\times\frac{3}{4}=$6 δρ.$\times\frac{3}{1}=$18δρ.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται ***μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα***. Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{4}$ὀκ. εὑρήκαμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ ἔπειτα τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ.

2) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 48. Λέγομεν:

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ἔχει $\frac{6}{6}$ παρατηροῦμεν ὅτι,

τὰ $\frac{6}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 48

τὸ $\frac{1}{6}$ . . . . 48 : 6$=$8

τὰ $\frac{5}{6}$ . . . . 8$\times$5$=$40.

Αὐτὸ τὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν $48 \times \frac{5}{6}$. Πράγματι $48 \times \frac{5}{6} = 8 \times \frac{5}{1} = 40$.

Μὲ τὴν αὐτὴν μέθοδον γίνεται ἡ λύσις ὁμοίων προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μικτοί, ἂν τοὺς τρέψωμεν εἰς κλάσματα καθὼς τὸ κατωτέρω.

3) «Ὁ 1 πῆχυς ὕφασμα τιμᾶται $15\frac{3}{5}$ δρ. Πόσον τιμῶνται οἱ $4\frac{1}{4}$ πήχ. ;» Ἐν πρώτοις γράφομεν :

1 πῆχ. τιμᾶται $15\frac{3}{5} = \frac{78}{5}$ δρ.

$4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ πηχ. x; καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

ἀφοῦ τὸ $\frac{4}{4}$ (=1πῆχ.) τιμᾶται . . . . $\frac{78}{5}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{4}$ π. . . . . $\frac{78}{5}$ δρ. : $4 = \frac{78}{20}$ δρ.

τὰ $\frac{17}{4}$ π. . . . . $\frac{78}{20}$ δρ. $\times 17 = \frac{1326}{20}$ δρ. =

$= \frac{663}{10}$ δρ. $= 66\frac{3}{10}$ δρ.

Αὐτὸ τὸ εὑρίσκομεν ἀμέσως μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν

$15\frac{3}{5}$ δρ. $\times 4\frac{1}{4} = \frac{78}{5}$ δρ. $\times \frac{17}{4} = \frac{1326}{20}$ δρ $= \frac{663}{10}$ δρ. $= 66\frac{3}{10}$ δρ.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοιά των δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν ἢ καὶ μέρους αὐτῶν, λύονται δὲ καὶ μὲ πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλασιαστέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μονάδος, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς ποὺ παριστάνει τὰς πολλὰς ἢ καὶ μέρος τῆς μονάδος, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ ζητεῖται. Εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ περιλαμβάνονται καὶ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἕνας ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται πολλαπλάσιον ἢ μέρος του

§ 107. β′) *Διαιρέσεως (μερισμοῦ).*

1) «Τὰ $\frac{5}{8}$ πηχ. ὕφασμα τιμῶνται $10\frac{1}{5}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ ἕνας πῆχυς;».

Γράφομεν $\frac{5}{8}$ πήχ. τιμῶνται . . . . $10\frac{1}{2}$ δρ. $=\frac{21}{2}$ δρ.

1 πῆχ. x;

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι :

ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. τιμῶνται . . . $\frac{21}{2}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ πηχ. τιμᾶται . . . $\frac{21}{2}$ δρ:5$=\frac{21}{2\times5}$δρ.$=\frac{21}{10}$δρ.

τὰ $\frac{8}{8}$(=1) πήχ. . . $\frac{21}{10}$δρ.$\times8=\frac{21}{5}$δρ.$\times4=\frac{84}{5}$δρ.$=16\frac{4}{5}$δρ.

2) «Τὸ τριπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν 11. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;». Γράφομεν:

$3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 11

1 x;

καὶ λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

ἀφοῦ τὰ $\frac{11}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 11

τὸ $\frac{1}{3}$ » » » $11:11=1$

τὰ $\frac{3}{3}$ (=1)» » » $1\times3=3$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ μὲ τὴν διαίρεσιν $11:\frac{11}{3}$. Πράγματι, $11:\frac{11}{3}=11\times\frac{3}{11}=3$.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοιά των δίδεται ἡ τιμὴ πολλῶν ἢ καὶ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς. Πρὸς λύσιν αὐτῶν κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμοῦ) καὶ διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν ἢ καὶ τοῦ μέρους τῆς μονάδος, ἡ ὁποία δίδεται, διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμός, ποὺ παριστάνει τὰς πολλὰς ἢ καὶ τὸ μέρος τῆς μονάδος. Ὁμοίως λύονται καὶ τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται πολλαπλάσιον ἢ καὶ μέρος ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖται ὁ ἀριθμός.

108. γ') *Διαιρέσεως (μετρήσεως).*

1) «Μὲ $2\frac{1}{2}$ δρ. ἀγοράζει ἕνας 1 οκ. καρπούζι, μὲ 17 δρ. πόσας οκ. θὰ ἀγοράσῃ»; Γράφομεν:

μὲ $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει 1 ὀκ.

μὲ 17 δρ. » x;

καὶ λύομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς:

μὲ $\frac{5}{2}$ δρ. ἀγοράζει . . . . 1 ὀκ.

μὲ $\frac{1}{2}$ δρ. » . . . . 1 ὀκ.$:5=\frac{1}{5}$ ὀκ.

μὲ $\frac{2}{2}$ (=1) δρ. ἀγοράζει . . . . . . $\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$ ὀκ.

μὲ 17 δρ. » . . . . . . $\frac{2}{5}$ ὀκ. $\times 17=\frac{34}{5}$ ὀκ. $=6\frac{4}{5}$ ὀκ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν διαίρεσιν μετρήσεως 17 δρ.: $2\frac{1}{2}$ δρ. Πράγματι, 17 δρ: $\frac{5}{2}$ δρ. $=17\times\frac{2}{5}=\frac{34}{5}=6\frac{4}{5}$ ὀκ.

2) Ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου εἰς 1 ὥρ.: εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ἔργου;» Γράφομεν:

$\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου τελειώνει εἰς 1 ὥραν

$\frac{7}{10}$ » » » » x;

καὶ λέγομεν:

τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου τελειώνει εἰς 1 ὥρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » » $1:3=\frac{1}{3}$ ὥρ.

τὰ $\frac{8}{8}(=1)$ » » » $\frac{1}{3}$ ὥρ. $\times 8=\frac{8}{3}$ ὥρ.

τὸ $\frac{1}{10}$ » » » $\frac{8}{3}$ ὥρ.: $10=\frac{8}{3\times 10}$ ὥρ.

τὰ $\frac{7}{10}$ » » » $\frac{8}{3\times 10}$ ὥρ. $\times 7=\frac{56}{30}$ ὥρ. $=1\frac{13}{15}$ ὥρ.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν μὲ τὴν διαίρεσιν μετρήσεως $\frac{7}{10}$ ἔργ.: $\frac{3}{8}$ ἔργ. Πράγματι, $\frac{7}{10}$ ἔρ.: $\frac{3}{8}$ ἔρ. $=\frac{7}{10}\times\frac{8}{3}=\frac{56}{30}$ ὥρ. $=1\frac{13}{15}$ ὥρ.

Εἰς καθένα ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα καὶ εἰς τὰ ὅμοιά των δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν ὁμοειδῶν των ἢ καὶ μέρους των καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων αὐτῶν. Λύομεν δ' αὐτὰ μὲ διαίρεσιν (μετρήσεως)· διαιρετέος μὲν εἶνε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

(Νὰ λυθοῦν μὲ δύο τρόπους)

457. Ἂν ἡ ὀκᾶ καφὲ τιμᾶται 80 δρ., πόσον τιμῶνται $10\frac{1}{2}$ ὀκ.;

458. Πόσον εἶνε τὰ $2\frac{1}{4}$ τοῦ $120\frac{2}{5}$; Τὰ $5\frac{1}{3}$ τοῦ $100\frac{3}{7}$;

459. Συνθέσατε καὶ λύσατε, μὲ δύο τρόπους, δύο προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ μὲ κλάσματα καὶ μικτούς.

460 Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. τυρὶ τιμῶνται $30\frac{3}{5}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

461. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ἂν $8\frac{1}{2}$ πήχεις τιμῶνται 85 δραχμάς;

462. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $7\frac{1}{5}$ εἶνε $120\frac{1}{3}$;

463. Συνθέσατε καὶ λύσατε, μὲ δύο τρόπους, δύο προβλήματα μερισμοῦ μὲ κλάσματα καὶ μικτούς.

464. Εἰς $3\frac{1}{5}$ ὥρ. ὑφαίνει ἕνας ἐργάτης 1 πῆχ.· πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς $9\frac{3}{5}$ ὥρ; εἰς 8 ὥρας ; εἰς $7\frac{5}{6}$ ὥρ.;

465. Ἂν $1\frac{1}{4}$ πηχ. τιμῶνται 1 δρ., πόσας δρ. τιμῶνται $25\frac{3}{4}$ πήχ ;

466. Συνθέσατε καὶ λύσατε μὲ δύο τρόπους δύο ὅμοια προβλήματα μὲ κλάσματα μικτοὺς καὶ μὲ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας.

§ 109. δ') ***Προβλήματα χωριζόμενα εἰς δύο ἄλλα.***

«Ἕνας ποδηλάτης εἰς $3\frac{2}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χλμ· πόσα θὰ διανύσῃ εἰς $5\frac{1}{4}$ ὥρ.;». Γράφομεν :

εἰς $3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χλμ.

» $5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$ » » x ;

καὶ λέγομεν :

εἰς $\frac{11}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χλμ.

» $\frac{1}{3}$ » » 44 χλμ : 11= 4 χλμ.

» $\frac{3}{3}$ (=1) » 4χλμ.×3=12 χλμ.

» $\frac{1}{4}$ » » 12 χλμ.: 4= 3 χλμ.

» $\frac{21}{4}$ » » 3χλμ.×21=63 χλμ.

Αὐτὸ τὸ λύομεν καὶ ἂν τὸ χωρίσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς δύο.

α') Εἰς $3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ ὥρ. διανύει 44 χλμ.

» 1 » » x ;

(λύεται μὲ διαίρεσιν μερισμοῦ)

$$44\ \chi\lambda\mu.: \frac{11}{3} = 44\lambda\chi\mu. \times \frac{3}{11} = \frac{4\times 3}{1}\chi\lambda\mu = 12\chi\lambda\mu$$

β΄) Εἰς 1 ὥρ. διανύει 12 χλμ.

» $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$ » » x ;

(λύεται μὲ πολλαπλασιασμὸν)

καὶ εὑρίσκομεν $12\chi\lambda\mu. \times \frac{21}{4} = 3\ \chi\lambda\mu. \times \frac{21}{1} = 63\ \chi\lambda\mu.$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν: α΄) μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα· β΄) μὲ ἀνάλυσιν εἰς δύο προβλήματα· γ΄) μὲ κατ' εὐθεῖαν πράξεις τὰ ἑξῆς προβλήματα.

467. Μὲ 1 δρ. ἀγοράζομεν $1\frac{1}{4}$ πήχ. Πόσας δρ. θὰ δώσωμεν διὰ $18\frac{3}{8}$ πήχ. ; Διὰ 120 $\frac{1}{2}$ πήχ.; Διὰ 250 πήχ.

468. Μὲ $10\frac{1}{2}$ δρ. ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ ὀκ. τυρί. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $19\frac{1}{4}$ δρ. ; Μὲ 31 $\frac{1}{2}$ δρ.; Μὲ 117 δρ. ; Μὲ 48 $\frac{3}{5}$ δρ ;

469. Ἐργάτρια ὑφαίνει ἕνα πῆχυν εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρ., πόσους πήχ. ὑφαίνει εἰς $11\frac{1}{5}$ ὥρ. ; Εἰς 56 ὥρ ; Εἰς 44 $\frac{23}{25}$ ὥρ. ;

470. Ἕνας ὑφαίνει $1\frac{1}{2}$ πήχ. εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρ., πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς $6\frac{3}{4}$ ὥρ. ; Εἰς 3 $\frac{3}{8}$ ὥρ.; Εἰς 27 ὥρ. ; Εἰς 33 $\frac{3}{4}$ ὥρ. ;

471. Πόσον εἶνε τὰ $2\frac{1}{2}$ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὰ $5\frac{1}{5}$ εἶνε 250 ;

472. α΄) Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν κατὰ τρεῖς τρόπους τρία προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ ἀνωτέρω.

β΄) Ἕνας ἐξώδευσε τὰ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων του, τοῦ ἔμειναν δὲ 528 $\frac{11}{20}$ δρ.. Πόσα χρήματα εἶχε καὶ πόσα ἐξώδευσε κάθε φοράν;

γ΄) Πόσα χρήματα ἔχει ἕνας, ἂν τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῶν καὶ 40 δρ. εἶνε 250 $\frac{1}{2}$ δρ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ **110.** ***Δεκαδικοὶ*** ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς ***δεκαδικοὶ*** λέγονται κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν 10, 100, 1000, 10000 κλπ.

Π. χ. οἱ $\frac{3}{10}$, $\frac{18}{100}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{141}{1000}$ κλπ.

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... λέγονται ***δεκαδικαὶ κλασματικαὶ*** ἢ ἁπλῶς ***δεκαδικαὶ*** μονάδες καὶ κατὰ σειρὰν πρώτης, δευτέρας, τρίτης, . . . τάξεως, τὰς παριστάνομεν δὲ μὲ δ, ε, χ, $δ_χ$, $ε_χ$, . . .

«Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀκεραίων ἢ δεκαδικῶν ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως».

Ἔχομεν καθὼς γνωρίζομεν 10Μ=1Δ,10Δ=1Ε, κλπ. καὶ ὁμοίως

$$10δ=1Μ,\quad 10ε=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=1δ,$$

$$10χ=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}=1ε, \text{ κλπ.}$$

Κάθε ἀριθμὸς εἰμπορεῖ νὰ χωρισθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων τῶν ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν, ὥστε ἀπὸ κάθε μίαν νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν 9. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς

$$\frac{3546}{1000}=\frac{3000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{6}{1000}=$$

$$=3+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{6}{1000}=3Μ+5δ+4ε+6χ.$$

Ἔστω π.χ. ὁ δεκαδικὸς $\frac{3546}{1000}=3Μ+5δ+4ε+6χ$. Γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου οὕτω:3,546· δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι, ***«κάθε ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται δεξιὰ ἄλλου παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως»*** καὶ ***«χωρίζομεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀπὸ τὸ ψηφίων τῶν*** *δεκάτων μὲ ἕνα κόμμα, ἐὰν δὲ ἐλλείπουν μονάδες τάξεως θὰ γράφωμεν 0 εἰς τὴν θέσιν των».*

Ἡ ἀνωτέρω μορφὴ τῶν δεκαδικῶν λέγεται ***δεκαδική***, τὸ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος των λέγεται ***ἀκέραιον***, τὸ δεξιὰ ***δεκαδικὸν*** καὶ τὰ ψηφία τούτου ***δεκαδικὰ*** ψηφία αὐτοῦ.

Ἂν δεκαδικὸς δὲν ἔχῃ ἀκέραιον, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν του 0 καὶ δεξιά του τὰ δεκαδικὰ ψηφία του. Π. χ. ὁ δεκαδικὸς $\frac{35}{100}=0+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$ γράφεται: 0,35. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ 0,35 εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἂν γράψωμεν τὸν ἀριθμητὴν 35 τοῦ $\frac{35}{100}$ καὶ χωρίσωμεν μὲ κόμμα ἀπὸ τὰ δεξιὰ τόσα ψηφία, ὅσα 0 ἔχει ὁ παρονομαστής. Ἂν δὲν ἐπαρκοῦν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ, γράφομεν πρὸ αὐτοῦ τόσα 0, ὅσα ψηφία λείπουν καὶ ἕνα ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος. Π.χ. ὁ $\frac{132}{100}$ γράφεται: 0,132· ὁ $\frac{5}{1000}$ οὕτω: 0,005, ὁ $\frac{613}{100}$ οὕτω: 6,13, ὁ $\frac{12}{1000}$ οὕτω:0,012, κλπ.

Ἀντιστρόφως· δεκαδικὸς ἀριθμός, π. χ. ὁ 9,635 γράφεται καὶ οὕτω: $\frac{9635}{1000}$, ὁ 0,47 καὶ οὕτω: $\frac{47}{100}$ κλπ.

Πῶς γράφομεν δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κλάσματος;

Ἔστω ὁ δεκαδικὸς 23,407. Διὰ νὰ τὸν ἀπαγγείλωμεν, λέγομεν: 23 ἀκαίρεος 4δ καὶ 7χ ἢ 23 ἀκέραιος καὶ 407χ ἢ εἴκοσι τρεῖς χιλιάδες τετρακόσια ἑπτὰ χιλιοστά.

Ἔστω ὁ 48,7426289. Τοῦτον ἀπαγγέλλομεν καὶ ὡς ἑξῆς: 48 ἀκέραιος, 742χ,628 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 9 δέκατα τοῦ ἑκατομ.

Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν, ποὺ ἀπαγγέλλεται, γράφομεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὴν ὑποδιαστολήν, ἀκολούθως δὲ τὰ ψηφία τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν κλπ. Ἂν δοθῇ π. χ. ὁ 25 ἀκέραιος καὶ 7χ., γράφομεν: 25,007· δηλαδὴ γράφομεν τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν ἀπὸ 0, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του δεξιὰ νὰ παραστάνῃ μονάδας τῆς τάξεως μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται τὸ δεκαδικὸν μέρος. Ὁ 297χ π. χ. γράφεται: 0,297· ὁ 37 ἀκέραιος 42χ καὶ 3 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ γράφεται: 37,04203.

111. *Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν.*

Ἔστω π.χ. ὁ 8,7. Ἐπειδὴ $8,7=\frac{87}{10}=\frac{870}{100}=8,70$ ἕπεται ὅτι,

«ἡ ἀξία δεκαδικοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν γράψωμεν (ἢ παραλείψωμεν) μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος του (δεξιά)».

Κάθε ἀκέραιος γράφεται καταλλήλως ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός. Π.χ. ὁ 5=5,0=5 00=5,000 κλπ. Διατί;

Ἔστω π.χ ὁ $3,65=\frac{365}{100}$ καὶ ὁ $36,5=\frac{365}{10}$. Ἐπειδὴ ὁ β′ εἶνε 10 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ α′, ἕπεται ὅτι,

«ἂν μεταφέρωμεν τὸ κόμμα δεκαδικοῦ μίαν, δύο, ... θέσεις δεξιὰ μέν, ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10,100,.., ἀριστερὰ δὲ διαιρεῖται διὰ 10, 100, . . .».

Ἀσκήσεις.

473.—477. Γράψατε μὲ δεκαδικὴν μορφὴν τοὺς 7 ἀκέρ. 8δ. 6χ.˙ 162 ἀκ. 5ε 6χ˙ 6ε 9χ 7εχ ˙ 9δ καὶ 3χ˙ 1645χ.

478.—481. Νὰ τραποῦν 9Μ 6δ εἰς ε˙ 9Ε 6δ εἰς δ˙ 6μ 5Δ εἰς δ˙ 8ε 4Μ 3Δ εἰς χ.

482.—487. Ἀπαγγείλατε μὲ τρεῖς τρόπους καὶ ἐξηγήσατε τὴν σημασίαν κάθε ψηφίου ἀπὸ τὴν θέσιν του, τῶν: 0, 385˙ 29, 084. 0,249˙ 3,435˙ 0, 00684˙ 25,08054.

488. Πόσον τιμῶνται 10, 100, 1000 ὀκάδες σταφύλια πρὸς 7,5 δρ. τὴν ὀκ.; Πόσον τὸ 0,1, τὸ 0,01 κλπ. τῆς ὀκᾶς;

489. Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα ὅμοια πρὸς τ᾽ ἀνωτέρω πολλαπλασιασμοῦ μὲ 10˙100˙. . . . . 0,1˙0,01˙. . . .

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις μὲ δεκαδικούς.

§ **112.** Τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν δεκαδικῶν ἐκτελοῦμεν ἀκριβῶς ὅπως καὶ τῶν ἀκεραίων, γράφοντες εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ τὰ κόμματα.

Συνήθως γράφομεν (πρὸς εὐκολίαν) ἐπαρκῆ 0 εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, ὥστε νὰ ἔχουν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία, καθὼς φαίνεται εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα.

Αἱ ἰδιότητες καὶ αἱ δοκιμαὶ τῶν πράξεων αὐτῶν ἰσχύουν καὶ διὰ δεκαδικούς.

Παραδείγματα προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων

α′)	β′)	γ′)	δ′)
63,1400	15,3	813,80	16,357
2,0580	6,47	—32,65	—7,8245
147,5000	0,345	781,15	8,5325
20,0000	1,056	ε′) 38,53	στ′) 68,00
308,1274	1,0031	—27,17	—17,25
540,8254	24,1741	11,36	50,75

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

490. Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπορεύματα ἀντὶ 28426,45 δρ. μὲ ζημίαν 825,15 δρ. Πόσας δρ. τὰ ἠγόρασε;

491. Συνθέσατε ἐκ τοῦ προηγουμένου καὶ λύσατε ἕνα πρόβλημα ἀφαιρέσεως καὶ ἕνα προσθέσεως.

492. Ἔμπορος εἰσπράττει ἕνα ἔτος 36854,20 δρ., τὸ ἑπόμενον 3758,20 δρ. περισσοτέρας, τὸ ἑπόμενον 6815,30 δρ. περισσότερον ἢ ὅσον τὰ α′ καὶ β′ μαζύ. Πόσα εἰσέπραξε τὸ ὅλον; καὶ πόσα τοῦ μένουν, ἂν ὅλα τὰ ἔξοδά του εἶνε 119704,90 δρ.;

493. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ τὰ ἔσοδα καὶ ἔξοδα τοῦ ἔτους τῆς σχολικῆς σας κοινότητος.

494. Τέσσαρα χωριὰ Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται εἰς τὸν ἴδιον δρόμον· ὁ δρόμος ΑΒ εἶνε 3,845 χλμ., ὁ ΒΓ 3,122 χλμ. μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου, ὁ ΓΔ 5,385 χλμ. μεγαλύτερος τοῦ ΑΓ. Πόσος εἶνε ὁ ΑΔ;

495. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια πρὸς τ' ἀνωτέρω.

496—497. Εὕρετε τὰ (278,45+3, 127)—(1,184+264,437—4,853), (83,126—9,1))—(7,14—6, 458) μὲ δύο τρόπους.

498. Ἕνας ἠγόρασε λάδι 23,60 δρ., τυρὶ 16,45 δρ., βούτυρο 46,50 δρ. καὶ ἔδωκεν ἕνα 500δραχμον. Πόσα ἔλαβεν ὑπόλοιπον;

499. Ἕνας εἰσπράττει 7856, 25 δρ. καὶ ἐξοδεύει 487,30 δρ.· πέρνει 4976,35 δρ. καὶ ἐξοδεύει 417,80 δρ. Πόσα τοῦ μένουν; (Νὰ λυθῇ μὲ δύο τρόπους).

500. Ἕνας ἔχει περιουσίαν 26418,50 δρ. καὶ ἐξοδεύει 447,30 δρ., ἔπειτα 5218,90 δρ. καὶ πάλιν 387,50 δρ.· πόσα τοῦ ἔμειναν; (Νὰ λυθῇ μὲ δύο τρόπους).

501. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν δύο προβλήματα, ὅπως τ' ἀνωτέρω.

Πολλαπλασιασμός μὲ δεκαδικούς.

113. α΄) Καθὼς εἴδαμεν (§ 111) εἶνε π. χ.

$64{,}38 \times 10 = 643{,}8$ · $\quad 0{,}374 \times 100 = 37{,}4$ κλπ.

Πῶς πολλαπλασιάζομεν δεκαδικὸν ἐπὶ 10,100,..;

β΄) Ἂν ζητοῦμεν πόσον τιμῶνται π. χ. 3,5 ὀκ. κρέας πρὸς 32,7 δρχ. τὴν ὀκ., πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ 32,7×3,5 δρ. Ἀλλ' ἔχομεν $32{,}7 \times 3{,}5 = \frac{327}{10} \times \frac{35}{10} = \frac{327 \times 35}{100} = \frac{11445}{100} = 114{,}45$.

Ὥστε αἱ 3,5 ὀκ. τιμῶνται 114,45 δρ. Ἄρα,

«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικούς, τοὺς πολλαπλασιάζομεν ὡς νὰ εἶνε ἀκέραιοι καὶ εἰς τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τὰ δεξιά, ὅσα ἔχουν οἱ δεκαδικοί». Ἐὰν δὲν ἐπαρκοῦν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου, γράφομεν 0 πρὸς τ' ἀριστερά, ὅσα ἀπαιτοῦνται καὶ ἕνα διὰ τὸν ἀκέραιον, καθὼς εἰς τὸ β΄) κατωτέρω παράδειγμα.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α.

α΄)
$$\begin{array}{r} 32{,}7 \\ 3{,}5 \\ \hline 1635 \\ 981 \\ \hline 114{,}45 \end{array}$$

β΄)
$$\begin{array}{r} 0{,}67 \\ 0{,}04 \\ \hline 0{,}0268 \end{array}$$

γ΄)
$$\begin{array}{r} 0{,}000578 \\ 13 \\ \hline 1734 \\ 578 \\ \hline 0{,}007514 \end{array}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν μόνον ὁ ἕνας παράγων εἶνε δεκαδικός, ὅπως φαίνεται καὶ εἰς τὸ γ΄) παράδειγμα.

Αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἡ δοκιμή του ἰσχύουν καὶ διὰ παράγοντας (ἐν γένει) δεκαδικούς.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

02. Ἐργοστάσιον πληρώνει εἰς κάθε ἐργάτην 45,60 δρ. ἡμερομίσθιον· πόσα θὰ πληρώσῃ διὰ 26,5 ἡμ. εἰς 97 ἐργάτας;

03. Ἕνας ξενοδόχος ἠγόρασε 35 ὀκ. σταφύλια πρὸς 6,20 δρ. τὴν ὀκᾶν, 23 ὀκ. σῦκα πρὸς 7,85 δρ. τὴν ὀκ., 3,5 ὀκ. κρέας πρὸς 48,60 δρ. τὴν ὀκ. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ καὶ πόσα θὰ πάρῃ ὑπόλοιπον, ἂν δώσῃ ἕνα 1000δραχμον;

504. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τ' ἀνωτέρω.

505. Πόσον εἶνε τὰ 18,25 τῶν 385,50 δρ.; τὸ $0,625^2$; τὸ $148,68 \times 0,3^3$;

506. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἔμπορος νὰ ἀγοράζῃ ἐμπόρευμα καὶ νὰ τὸ πωλῇ μὲ ὡρισμένον α΄) κέρδος, β΄) ζημίαν εἰς τὴν ὀκᾶν.

507. Ἔμπορος ἠγόρασε 318,2 πήχ. ὕφασμα πρὸς 8,50 δρ. τὸν πηχ. καὶ ἔπειτα 131,5 πήχ. πρὸς 1.20 δρ. τὸν πηχ., καὶ 79,8 πήχ. πρὸς 6,50 δρ. τὸν πῆχυν. Ἐπλήρωσε διὰ μεταφορικὰ 0,25 δρ. τὸν πῆχυν καὶ δι' ἀσφάλιστρα 0,1 δρ. τὸν πῆχ. Πόσα ἐπλήρωσε τὸ ὅλον;

508. 712 πρόσωπα ἐμοιράσθησαν ἕνα χρηματικὸν ποσὸν καὶ ἔλαβε καθένας 35,75 δρ., ἐπερίσσευσαν δὲ 413,50 δρ. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματα;

509. Ἕνα ἐμπόρευμα ἔχει μικτὸν βάρος 128,48 ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον εἶνε 3,50 ὀκ. Πόσον ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα, ἐὰν ἡ ὀκᾶ στοιχίζῃ 4,60 δρ., ἔδιδε δὲ κέρδος 0,30 δρ. καθεμία ὀκᾶ;

510. Ἕνα βαρέλι λάδι ζυγίζει 86,40 ὀκ. Πόσον στοιχίζει, ἂν τὸ βαρέλι ἀδειανὸ ζυγίζῃ 7,10 ὀκ. καὶ ἡ ὀκᾶ τὸ λάδι τιμᾶται 38,5δρ.;

511. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν τρία προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ ἀνωτέρω μὲ ἐμπορεύματα τοῦ τόπου σας.

Διαίρεσις δεκαδικοῦ μὲ ἀκέραιον.

§ 114. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ὅταν 7 πήχεις τιμῶνται 162,4 δρ., πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 162,4 δρ. : 7.

Ἐπειδὴ 162,4 δρ.=162 δρ.+4 δέκατα δρ., ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ἀπ' αὐτοὺς διὰ 7 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα. Εὐκόλως ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς:

«Διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ διαιρετέου, γράφομεν εἰς τὸ προκύπτον μερικὸν πηλίκον ἕνα κόμμα δεξιά, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὅπως, ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε ἀκέραιος, ἀλλὰ κατεβάζομεν ἀνὰ ἕνα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου». Οὕτω εὑρίσκομεν 162,4 δρ. : 7=23, 2 δρ.

Παραδείγματα διαιρέσεων.

```
α') 16'2',4' | 7             β')  61,6'3'2' | 856
    2 2      |-----               1 7 1 2  | 0,072
     1, 4    | 23,2                 0 0 0  |
        0    |

γ')  3,5   | 8               δ')  0,800'2'8' | 234
      30   |--------                98 2    | 0,00342
       60  | 0,4375                 4 6 8   |
       40  |                            0   |
        0  |
```

Ἐὰν μετὰ τὴν διαίρεσιν μείνῃ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0, εἰμποροῦμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, ἂν πολλαπλασιάζωμεν τὸ κάθε ὑπόλοιπον ἐπὶ 10, καθὼς εἰς τὸ γ') παράδειγμα.

Ὁμοίως κάμνομεν τὴν διαίρεσιν, καὶ ὅταν ἔχωμεν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου, ἡ ὁποία δὲν εἶνε ἀμέσως τελεία. Π. χ. ἡ διαίρεσις 13 : 4 γίνεται ὡς ἀπέναντι.

```
13,0'0 | 4
 1,0   |-----
   2 0 | 3,25
     0 |
```

115. Διὰ 10, 100,.... διαιρεῖται ἀριθμός, ἂν μεταφέρωμεν τὸ κόμμα του μίαν, δύο.... θέσεις πρὸς τ' ἀριστερά. Διατί;

116. Ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως γίνεται ὅπως καὶ μὲ ἀκεραίους.

Ἀσκήσεις.

512. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαὶ τῶν: 64,8 : 15· 423,876 : 30· 0,0124125 : 125.

513. Γράψατε καὶ ἐκτελέσατε τρεῖς ὁμοίας διαιρέσεις.

514. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τὸ λάδι, ἂν 35 ὀκ. τιμῶνται 717,50 δρ.;

515. Νὰ συντεθῇ καὶ λυθῇ πρόβλημα μετρήσεως μὲ δεκαδικὸν διαιρετέον.

§ 117. ***Ἐξαγόμενον κατὰ προσέγγισιν.***

Ἂν ἔχωμεν π. χ. τὸν 5,428 καὶ πάρωμεν ἀντ' αὐτοῦ τὸν 5,42 μέν, κάμνομεν σφάλμα 8 χιλιοστά, ἐνῶ, ἂν πάρωμεν τὸν 5,43, κάμνομεν σφάλμα 2 χιλιοστά. Ἄρα τὸ 5,43 πλησιάζει περισσότερον εἰς τὴν ἀκρίβειαν ἀπὸ τὸ 5,42. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ ἂν ἔχωμεν τοὺς 5,426· 5,427· 5,428 5,429, ὅτε εἶνε ἀκριβέστερον νὰ πάρωμεν 5,43 καὶ ὄχι τὸ 5,42. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶνε π. χ. 5,425 θὰ πάρωμεν τὸ 5,43. Διότι, ἐὰν ὑπῆρχον σημαντικὰ ψηφία μετὰ τὸ τρίτον δεκαδικὸν καὶ ἐπέρναμεν τὰ 5,42, θὰ ἐγίνετο λάθος 5 χιλιοστῶν τὸ ὀλιγώτερον, ἐνῷ ἂν πάρωμεν 5,43 γίνεται λάθος τὸ πολὺ 5 χιλιοστῶν (ἐπὶ πλέον).

Ὁ ἀριθμὸς 5,43 ποὺ πέρνομεν ἀντὶ τοῦ 5,428 λέγεται ἐξαγόμενον αὐτοῦ κατὰ *προσέγγισιν* ἑκατοστοῦ. Ὁμοίως, ἂν π.χ. ἀντὶ 8,35971 πάρωμεν 8,36, αὐτὸ λέγεται κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (κατὰ ὑπεροχήν). Ἂν π. χ. ἀντὶ τοῦ 2,1374 πάρωμεν τὸ 2,137 αὐτὸ λέγεται κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ (κατ' ἔλλειψιν).

Ὁμοίως συντομεύομεν τὸ δεκαδικὸν πηλίκον διαιρέσεως, ἂν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἔχομεν αὐτὸ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κλπ.

Ἀσκήσεις.

516. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν κατωτέρω διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ· 27 : 21· 124 : 7· 385,72 : 9. 153 : 60.

517. Ἐργασθῆτε ὁμοίως καὶ ἐπὶ τριῶν ἰδικῶν σας παραδειγμάτων.

Διαίρεσις μὲ διαιρέτην δεκαδικόν.

§ 118. ***Ἐὰν 6,5 ὀκ. κάρβουνα τιμῶνται 22,75 δρ., θὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ,*** ἂν εὕρωμεν τὸ πηλίκον 22,75δρ. : 6,5. Ἐπειδή, ἂν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἔχομεν τὸ αὐτὸ πηλίκον μὲ τὴν διαίρεσιν 227,5 : 65 δρ

Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3,5δρ. Ὥστε ἡ ὀκᾶ τὰ κάρβουνα τιμᾶται 3,5 δρ. Ἑπομένως,

«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, 100,...ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνῃ ἀκέραιος καὶ διαιροῦμεν δι' ἀκεραίου».

Παραδείγματα.

```
α') 1,7',6'8' | 3,4            β') 0,05',5'3'5' | 1,23
      0 6 8   | 0,52                  0 6 1 5   | 0,045
        0 0   |                         0 0 0   |

γ') 1,5 4'9',7' | 0,061        δ') 4,6'4,   | 0,32
      3 2 9     | 25,4              1,4 4   | 14,5
        2 4 7   |                     1 6 0 |
          0 3   |                         0 |
ὑπόλοιπον 0,0003
```

Ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτόν, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ δεκαδικοῦ, πρέπει τὸ κατὰ τ' ἀνωτέρω προκύπτον ὑπόλοιπον νὰ διαιρεθῇ διὰ 10, 100,.. μὲ τὸν ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη ὁ διαιρέτης διὰ νὰ γίνῃ ἀκέραιος. Π. χ. τὸ ὑπόλοιπον τῆς γ') διαιρέσεως εἶνε 0,0003 καὶ ὄχι 0,3.

119. *Συντομίαι.* 1. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ὁ ὁποῖος λήγει εἰς μηδενικά, π. χ. τὸν 147 : 700, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ μεταθέτομεν τὸ κόμμα τοῦ διαιρετέου πρὸς τ' ἀριστερὰ τόσας θέσεις, ὅσα 0 παρελείψαμεν καὶ ἀκολούθως διαιροῦμεν· ἤτοι 147 : 700=1,47 : 7=0,21. Διατί;

2. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,5 ἢ 0,25 ἢ 0,125 κτλ. ἀρκεῖ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2 ἢ 4 ἢ 8. Π. χ.

$$47:0{,}5=47\times2=94. \text{ Διότι τὸ } 47:0{,}5=47:\frac{5}{10}=47\times\frac{10}{5}=$$

$$=47\times2\cdot \text{ τὸ } 32{,}8:0{,}25=32{,}8:\frac{25}{100}=32{,}8\times4, \text{ κλπ.}$$

3. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,1· 0,01,..ἀρκεῖ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10,100, .κλπ. Π. χ. $38:0{,}01=38:\frac{1}{100}=38\times100.$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

518. Γράψατε τρία παραδείγματα διαιρέσεως μὲ διαιρέτην δεκαδικὸν καὶ ἐκτελέσατε τὰς πράξεις.

519—528. Εὕρετε συντόμως τὰ πηλίκα τῶν ἑπομένων διαιρέσεων.
684 : 40· 1952 : 800· 49,25 : 500· 9,678 : 300· 496 : 0,5·
477 : 0,25· 49,72 : 500 10 : 0,1· 400 : 0,01· 42 : 0,001.

529. Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα μερισμοῦ μὲ κρασί, κρεμύδια, πήχεις ὕφασμα, ἀλλὰ μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

530. Ἂν ἡ ὀκᾶ τὰ κάρβουνα τιμᾶται 3,2 δρ., πόσας ὀκ. θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 28,80 δρ.;

531. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοια προβλήματα μετρήσεως μὲ ἀριθμοὺς δεκαδικοὺς καὶ σταφύλια, λεμόνια, ὕφασμα.

532. Ἕνας ἐπώλησε 8,5 ὀκ. σταφύλια ἀντὶ 83,65δρ., ἐκέρδισε δὲ 11,50 δρ.· πόσον τοῦ ἐκόστιζεν ἡ ὀκᾶ;

533. Ἕνας ἐπλήρωσε 3571,60 δρ. διὰ 23 ὀκ. βούτυρο πρὸς 70,80 τὴν ὀκ. καὶ λάδι πρὸς 25,60 δρ. τὴν ὀκ. Πόσαι ὀκάδες ἦτο τὸ λάδι ;

534. Ἂν ἕνας οἰκονομῇ 25,45 δρ. τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 763,50 δρ. ; (Νὰ λυθῇ καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα).

535. Μετατρέψατε καταλλήλως τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἰς ἄλλο α') πολλαπλασιασμοῦ, β') μερισμοῦ καὶ λύσατε αὐτά.

Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

§ 120. Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα π. χ. τὸ $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 3 : 8 (ἐπειδὴ $3:8=\frac{3}{8}$) Οὕτω ἔχομεν $3:8=3{,}00...:8=0{,}375$. Ἄρα $=\frac{3}{8}=0{,}375$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ. ὅτι τὸ $\frac{13}{20}=13{,}000...:20=0{,}65$.

Πῶς τρέπομεν κλάσμα εἰς δεκαδικόν ;

Περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

§ 121. Ὅταν τρέπωμεν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, ἢ θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὅτε τὸ κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἢ ἡ διαίρεσις εἰμπορεῖ νὰ ἐξακολουθήσῃ ἐπ' ἄπειρον, ὅτε εὑρίσκομεν ἀναρίθμητα ψηφία τοῦ πηλίκου. Π.χ. $\frac{1}{3}=1{,}000...:3=0{,}333....$, $\frac{2}{7}=2{,}00:7=0{,}285714285...$ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἕνα ἢ περισσότερα ψηφία τοῦ πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, καθὼς ἀνωτέρω τὰ 2, 8, 5, 7, 1, 4. Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται ***περιοδικοὶ*** δεκαδικοί, τὸν δὲ ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον σχηματίζει ἡ ὁμὰς τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται, καλοῦμεν ***περίοδον.*** Οἱ ἄλλοι γνωστοὶ δεκαδικοὶ λέγονται ***κοινοὶ*** δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

§ 122. Οἱ περιοδικοί, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὸ κόμμα, λέγονται ***ἁπλοῖ περιοδικοί,*** π.χ. ὁ 7,242424..., ὁ 4,333..., ἐνῷ οἱ ἄλλοι καθὼς ὁ 2,16535355...., ὁ 0,16763763... λέγονται ***μικτοὶ περιοδικοί.***

Γνωρίσματα τροπῆς κλάσματος εἰς περιοδικόν.

123. Ὅταν κλάσμα ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστήν, ὁ ὁποῖος περιέχει ὡς παράγοντας τὸν 2 καὶ 5 ἢ τὸν ἕνα ἀπ' αὐτούς, ἀλλὰ δὲν περιέχει ἄλλον, τρέπεται εἰς δεκαδικὸν μὲ ὡρισμένον πλῆθος ψηφίων. Π. χ. τὸ $\frac{3}{8}=0{,}375$, τὸ $\frac{1}{5}=0{,}2$ τὸ $\frac{142}{25}=5{,}68$ κλπ.

Ὅταν κλάσμα ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστὴν, ὁ ὁποῖος περιέχει ὡς παράγοντας ἄλλους ἐκτὸς τῶν 2 καὶ 5, τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν. Π. χ. τὸ $\frac{5}{11}=0{,}454545\ldots$, τὸ $\frac{13}{3}=4{,}333\ldots$ κλπ.

Ὅταν ἀνάγωγον κλάσμα ἔχει παρονομαστὴν, ὁ ὁποῖος περιέχει ὡς παράγοντας τὸν 2 καὶ 5 ἢ τὸν ἕνα ἀπ' αὐτούς, ἀλλὰ καὶ ἄλλους διαφόρους ἀπ' αὐτούς, τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν. Π. χ. τὸ $\frac{5}{6}=0{,}83333\ldots$, τὸ $\frac{23}{15}=1{,}5333\ldots$ κλπ.

Τί θὰ κάμωμεν, ὅταν πρόκειται διὰ κλάσμα μὴ ἀνάγωγον, διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς τί τρέπεται;

Ἀσκήσεις.

3—544. Νὰ τραποῦν τὰ ἑπόμενα κλάσματα εἰς δεκαδικούς. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει εἶνε περιοδικός, νὰ διακοπῇ ἡ διαίρεσις μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς περιόδου.

$$\frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{11}{21},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{7}{20},\ \frac{8}{25},\ \frac{7}{12},\ \frac{62}{3}.$$

5—551. Ποῖα ἐκ τῶν $\frac{12}{25},\ \frac{13}{16},\ \frac{5}{11},\ \frac{8}{23},\ \frac{13}{14},\ \frac{132}{55},\ \frac{147}{45}$, τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς ἀκριβῶς, εἰς ἁπλοῦς περιοδικούς, εἰς μικτοὺς περιοδικούς; Εὕρεται αὐτούς.

2. Εὕρετε ἀνὰ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα τρέπονται εἰς ἁπλοῦς, εἰς μικτοὺς περιοδικούς, εἰς δεκαδικοὺς ἀκριβῶς.

Πῶς εὑρίσκομεν κλάσμα ἀπὸ τὸ ὁποῖον προκύπτει δοθεὶς περιοδικός.

124. *Κάθε ἁπλοῦς περιοδικὸς χωρὶς ἀκέραιον προκύπτει ἀπὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν περίοδόν του καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τόσα 9, ὅσα*

ψηφία ἔχει ἡ περίοδος. Π.χ. ὁ 0,243243. προκύπτει ἀπὸ τὸ $\frac{243}{999}$.
Διότι, ἂν τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, εὑρίσκομεν τὸν δοθέντα.

Ἂν ἔχωμεν περιοδικὸν ἁπλοῦν μὲ ἀκέραιον, π. χ. τὸν 6,323232...., παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε 6,3232....$=6+0,3232...=$

$$=6+\frac{32}{99}=\frac{6\times99+32}{99}=\frac{6\times100+32-6}{99}=\frac{632-6}{99}.$$

Ἤτοι προκύπτει ἀπὸ μικτόν, τὸν $6+\frac{32}{99}$, τὸν ὁποῖον εὐκόλως εὑρίσκομεν, ἢ ἀπὸ τὸ τελευταῖον κλάσμα.

Ποῖον κανόνα συνάγομεν ;

Ἔστω μικτὸς περιοδικὸς π.χ. ὁ 0,3171717.... Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον προκύπτει, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$0,31717...=0,31717...\times\frac{10}{10}=3,1717...:\ 10=\frac{317-3}{99}:10=$$

$$=\frac{317-3}{990}.$$ Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ. ὅτι ὁ

$$27,41683683...=\frac{2741683-2741}{999000}.$$

Ποῖον κανόνα συνάγομεν ;

Ἀσκήσεις.

553—357. Εὕρετε τὰ κλάσματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα προκύπτουν οἱ

0,25636363...; 1,3535...; 12,45999...; 1,73535..., 0,51222...

Πράξεις μὲ κλάσματα κοινὰ καὶ δεκαδικούς.

§ 125. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις μὲ κοινὰ κλάσματα καὶ δεκαδικούς, τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἢ τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα ἢ καὶ διατηροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὅπως ἐδόθησαν. Συνήθως γίνεται τὸ πρῶτον, ἀλλ', ἂν τοὐλάχιστον ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, θέλομεν δὲ νὰ ἔχωμεν ἀκριβὲς ἐξαγόμενον, τρέπομεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα. Π. χ. $6,35\times\frac{2}{3}=\frac{635}{100}\times\frac{2}{3}=\frac{1270}{300}=\frac{127}{30}=4\frac{7}{30}$.

Ἀσκήσεις.

558—559 Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κατωτέρω πράξεων κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

$$\left(0{,}75\times2\frac{1}{5}+3{,}1\right)-0{,}831\times\frac{1}{9},\quad \frac{4}{25}\times3{,}12+\frac{2}{5}\times0{,}14:0{,}75.$$

560. Σχηματίσατε τρία παραδείγματα πράξεων μὲ κλάσματα καὶ δεκαδικοὺς καὶ ἐκτελέσατε τὰς πράξεις.

561. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἀνὰ ἕνα πρόβλημα ποὺ νὰ περιέχῃ πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν μὲ κλάσματα καὶ δεκαδικοὺς καὶ μὲ ἐμπορεύματα συνήθη τοῦ τόπου σας.

562. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἀνὰ ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ καὶ μετρήσεως μὲ κλάσματα καὶ δεκαδικοὺς καὶ ἐμπορεύματα τῆς πατρίδος σας. Καθένα νὰ λυθῇ καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

563. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία $25\frac{7}{8}$ πήχ. ἐμπορεύματος πρὸς 16,40 δρ. τὸν πῆχ. Νὰ λυθῇ καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

564. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τυρί, ἂν $7\frac{7}{8}$ ὀκ. τιμῶνται 362,25 δρ.;

565. Συνθέσατε καὶ λύσατε μὲ δύο τρόπους ὅμοιον πρόβλημα μετρήσεως. Ὁμοίως ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ.

566. Πόσον τιμῶνται 7,5 ὀκ. ζάχαρι, ἂν $6\frac{3}{8}$ αὐτῆς τιμῶνται 117,30. (Νὰ λυθῇ μὲ δύο τρόπους).

567. Νὰ συντεθῇ καὶ λυθῇ μὲ δύο τρόπους ἄλλο ὅμοιον πρόβλημα μὲ τὸ προηγούμενον.

Συμβολικὴ παράστασις ἀριθμῶν μὲ γράμματα.

§ 126. Παριστάνομεν μὲ γράμματα ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν ὁποιουσδήποτε μέν, ἀλλ' ὡρισμένους· δηλαδὴ ἕνα γράμμα, ποὺ χρησιμοποιοῦμεν εἰς ἕνα πρόβλημα, παριστάνει ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α μονάδων ἀπὸ ἕνα ἐμπόρευμα τιμᾶται β δρ., ὅπου καθένα ἀπὸ τὰ α καὶ β παριστάνει ἕνα μόνον ἀριθμόν, ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἢ δεκαδικὸν κλπ. Δύο ἀριθμοὶ α καὶ β, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν μονάδα, λέγονται ἴσοι μέν, ἂν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων καὶ γράφομεν $\alpha=\beta$ ἢ $\beta=\alpha$, ἄνισοι δέ, ἂν ὁ ἕνας ὁ α π.χ. ἔχῃ περισσοτέρας μονάδας τοῦ ἄλλου καὶ γράφομεν $\alpha>\beta$ ἢ $\beta<\alpha$.

§ 127. Τὰς πράξεις ἐπὶ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ σημειώνομεν ὅπως μέχρι τώρα, ἰσχύουν δὲ καὶ δι' αὐτοὺς αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων. Π. χ. ἔχομεν:

1) $\alpha+\beta+\gamma=\beta+\alpha+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta=(\beta+\gamma)+\alpha$, κλπ.
Ποίας ἰδιότητας ἐκφράζουν αὗται αἱ ἰσότητες;

2) $\alpha-\beta=\gamma$ καὶ $\alpha=\beta+\gamma$ (ἂν $\alpha>\beta$, διατί;). Τί σημαίνει τοῦτο;

3) $\alpha.\beta=\beta.\alpha$ Τί σημαίνει αὐτό;
$\alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^\nu$ » » (ν ἀκέραιος). Τί σημαίνει καθένα ἀπ' αὐτά ;

Σημειώσατε συμβολικὰ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ.

5) Τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β, ἂν εἶνε τὸ $\beta\neq 0$ (διάφορον τοῦ 0), (διατί ;) σημειώνομεν οὕτω: $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Τί σημαίνει $5\times\alpha$ ἢ 5α ; Τί σημαίνει $3\dfrac{1}{2}\alpha$; $0{,}8\alpha\beta$; $\dfrac{5}{3}\alpha\times\dfrac{2}{5}\beta$;

6) Ποίαν ἰδιότητα ἐκφράζει ἡ ἰσότης; $A-(\beta+\gamma+\delta)=$ $=[(A-\beta)-\gamma]-\delta$;

Ποίας ἰδιότητας ἐκφράζει κάθε ἰσότης ἀπὸ τὰς κατωτέρω ;

7) $(\alpha+\beta+\gamma).\varrho=\alpha.\varrho+\beta.\varrho+\gamma.\varrho$.

8) $(\alpha-\beta).\varrho=\alpha.\varrho-\beta.\varrho$. 9) $\dfrac{\alpha}{\beta}\times\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}:\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha\times\delta}{\beta\times\gamma}$.

§ 128. Συμβολικαὶ γραφαὶ καθὼς αἱ ἀνωτέρω, λέγονται ***τύποι.*** Τὸ ἐξαγόμενον ἑνὸς τύπου, ἂν ἀντικατασταθοῦν τὰ γράμματά του μὲ ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις, ποὺ εἶνε σημειωμέναι, λέγεται ***τιμὴ*** τοῦ τύπου. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστοῦν τὰ γράμματά του λέγονται τιμαὶ τῶν γραμμάτων αὐτῶν. Π χ. ὁ τύπος $\alpha+\beta-\gamma$, ἂν τεθῇ $\alpha=10$, $\beta=8$, $\gamma=4$, ἔχει τὴν τιμὴν $10+8-4=14$. Ὁ $3\alpha\beta$, ὅταν $\alpha=7$, $\beta=4$ ἔχει τὴν τιμὴν $3.7.4=84$.

§ 129. ***Τύποι λύσεως προβλημάτων.***

Ἂν ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος εἶνε α ἄλλαι μονάδες (π. χ. δρ.), ἡ τιμὴ β μονάδων θὰ εἶνε $\alpha.\beta$ δρ. Ἀντιστρόφως ἂν ἡ τιμὴ α μονάδων εἶνε β δρ., ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς θὰ εἶνε $\dfrac{\beta}{\alpha}$ δρ. Ἂν ἡ τιμὴ τῆς μονάδος εἶνε α δρ., εἰς β δρ., θὰ ἔχωμεν β δρ.: α δρ. $=\frac{\beta\ \delta\rho.}{\alpha\ \delta\rho.}$ μονάδας. Ὥστε μὲ τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων, πρὸς παράστασιν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τύπους, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰ γενικὰ ἐξαγόμενα τῆς λύσεως προβλημάτων ποὺ ὑπάγονται εἰς τοὺς αὐτοὺς κανόνας. Π.χ. ὁ τύπος α.β δρ. δίδει τὴν λύσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἀληθεύει, ὅταν τὰ α καὶ β ἔχουν τιμὰς οἱασδήποτε. Διὰ νὰ ἔχωμεν π. χ. τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος «ἂν ἡ μία μονὰς πράγματος τιμᾶται $8\frac{1}{2}$ δρ., πόσον τιμῶνται αἱ 6, 5 μονάδες αὐτοῦ», ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον αβ δρ. τὸ α μὲ τὸ $8\frac{1}{2}$ δρ. καὶ τὸ β μὲ τὸ 6,5, ὅτε ἔχομεν $8\frac{1}{2}$ δρ $\times 6,5=55,25$ δρ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

568. Διατυπώσατε ποῖα γενικὰ προβλήματα λύει καθένας ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων.

569. Εὕρετε τιμὰς τῶν ἀνωτέρω τριῶν τύπων, δίδοντες διαφόρους τιμὰς εἰς τὰ α καὶ β. Διατυπώσατε κάθε φορὰν τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν.

570. Γράψατε τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται ἡ τιμὴ α μονάδων, ἔστω βδρ., καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ γ μονάδων. Ἐφαρμόσατε αὐτὸν εἰς δύο προβλήματα σας μὲ μικτοὺς καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

571. Ἕνας ἔχει α δρ. καὶ ἐξοδεύει τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν. Πόσαι δρ. τοῦ μένουν;

572. Ἂν α παριστάνῃ ἀκέραιον ἀριθμόν, πῶς θὰ παρασταθῇ ὁ κατὰ 1 μεγαλύτερος ἢ μικρότερός του;

573. Εὕρετε τας τιμὰς τῶν τύπων τῆς § 126, ὅταν $\alpha=125\frac{3}{4}$.

$$\beta=\frac{3}{8},\ \gamma=2\frac{1}{2},\ \delta=6\frac{1}{2}\cdot\ \alpha=2,4,\ \beta=\frac{3}{4},\gamma=\frac{5}{8},$$

$$\rho=2\ \ \alpha=3,\ \ \beta=2,5,\ \ \gamma=0,75,\ \ \rho=\frac{3}{5},\ \mathrm{A}=53,4.$$

574. Εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ α^{ν}, ὅταν τεθῇ $\alpha=2,\ \nu=5$· $\alpha=\frac{3}{4}, \nu=3$.

575. Γράψατε τὸν τύπον ποὺ ἐκφράζει τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα.

576. Εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ $3α^2$, ἂν $α=9$, τοῦ $8α^4-6$, ἂν $α=10$.

Περὶ μεταβλητοῦ ποσοῦ.

§ 130. Ἔστω π. χ. ὁ τύπος 5x. Ἂν παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ y, ἔχομεν $y=5x$. Τὸ y πέρνει ὡρισμένην τιμήν, ὅταν τὸ x πάρη ὡρισμένην τιμήν, καὶ ὅταν μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τοῦ x μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ y. Π.χ. διὰ $x=0$, τὸ $y=5.0=0$· ὅταν $x=1$, τὸ $y=5.1=5$ κλπ. Τὰ x καὶ y, τὰ ὁποῖα πέρνουν διαφόρους τιμάς, λέγονται ***μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ***μεταβλητὰ ποσὰ*** ἢ ***μεταβληταὶ ποσότητες*** ἢ ἁπλῶς ***μεταβληταί***. Ἀλλὰ τὸ y εἶνε μεταβλητή, τῆς ὁποίας αἱ τιμαὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς τιμὰς τῆς x, ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῆς x ὑποτίθεται ὅτι δίδονται αὐθαιρέτως. Διὰ τοῦτο ἡ μὲν x λέγεται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, ἡ δὲ y ***συνάρτησις*** τῆς x. Π.χ. ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων πράγματος εἶνε συνάρτησις τοῦ πλήθους των.

Ἂν ἀριθμὸς α ἔχει ὡρισμένην τιμήν, π. χ. 7, καλεῖται ***σταθερὸς*** ἢ ***σταθερὸν*** ποσὸν ἢ ***σταθερὰ*** ποσότης.

Ἀσκήσεις.

577. Εὕρετε τὰς τιμὰς τῆς $y=3x+5$, ὅταν θέσετε τὸ $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$· 0,5· 0,4· 0,2· 0,1· 0,25 κλπ.

578. Ἕνας ἔχει 500 δρ. καὶ οἰκονομεῖ καθ' ἡμ. 30 δρ. Πόσας δρ. θὰ ἔχῃ μετὰ x ἡμέρας καὶ ποία ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $y=500+30x$, ὅταν εἶνε $x=1, 2, 3, 4$.

579. Σχηματίσατε παραδείγματα συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς καὶ εὕρετε τὰ τιμὰς των διὰ πέντε δεκαδικὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Συσχέτισις τῶν πράξεων μεταξύ των.

§ 131. Ἀπὸ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἡ μὲν ἀφαίρεσις εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ τὴν πρόσθεσιν (§ 21), ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται ἐπίσης εἰς τὴν πρόσθεσιν (§ 32), ἐνῶ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν. Διότι, εὑρίσκομεν π. χ. τὸ πηλίκον 24 : 5, ἂν εὕρωμεν πόσας φορὰς ἀφαιρεῖται ὁ 5 ἀπὸ τὸν 24 καὶ ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων αὐτῶν. Βασικὴ πρᾶξις λοιπὸν τῆς Ἀριθμητικῆς εἶνε ἡ πρόσθεσις καὶ μὲ τὴν γνῶσιν αὐτῆς γίνονται καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐπειδὴ αἱ πράξεις μὲ κλάσματα (ἢ δεκαδικοὺς) ἀνάγονται εἰς πράξεις μὲ ἀκεραίους, οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀποτελοῦν τὴν θεμελίωσιν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἡ δὲ σημασία τῶν κλασμάτων ἔγκειται κυρίως εἰς τὸ ὅτι, μὲ αὐτὰ εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ τέλειον πηλίκον οἱασδήποτε διαιρέσεως.

Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων δύο εἶνε αἱ πρωτεύουσαι, ἡ ***τῆς ἐναλλαγῆς*** τῆς τάξεως τῶν προσθετέων καὶ τῶν παραγόντων καὶ ἐκείνη μὲ τὴν ὁποίαν πολλαπλασιάζομεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ὁποία λέγεται ***ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.***

Ἐπειδὴ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες ἀπορρέουν ἀπὸ αὐτάς καλοῦνται αὐταὶ ***ἀρχικαὶ ἰδιότητες*** τῶν πράξεων ἢ ***θεμελειώδεις νόμοι*** τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἐκφράσατε μὲ τύπους τοὺς νόμους αὐτούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ ΣΤΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

§ 132. Ποσά, τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ μέρη αὐτοτελῆ, εἰμποροῦν ὅμως νὰ νοηθοῦν χωρισμένα εἰς μέρη, ποὺ συνέχονται μεταξύ των, λέγονται ***συνεχῆ*** ποσὰ πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰ ***πλήθη***, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ ***ἀσυνεχῆ*** ποσά. Π. χ. μία γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια στερεοῦ σώματος λέγονται συνεχῆ ποσά.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει ἕνα ποσόν, θὰ τὸ συγκρίνωμεν μὲ ἄλλο ὁμοειδές του καὶ ὡρισμένον· δηλαδὴ εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ τὸ β' εἰς τὸ α'. Ἡ σύγκρισις αὐτὴ λέγεται ***μέτρησις*** τοῦ πρώτου ποσοῦ, τὸ δὲ δεύτερον καλεῖται ***μονὰς μετρήσεως.***

§ 133. ***Μονάδες μήκους.*** Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν ἔχομεν ἐκτὸς τοῦ μέτρου (τὸ ὁποῖον εἶνε 1:40000000 περίπου τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς) καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεών του (§9) καὶ τὰς ἑξῆς:

τὸ δεκάμετρον (δμ)=10 μ,

τὸ *ἑκατόμετρον* (εμ.)=100μ,

τὸ *μυριάμετρον*=1000μ,

τὴν *λεύγαν*=4000μ,

τὴν *γραμμὴν* (γρ) ἢ *χιλιοστόμετρον*=0,001 μ,

τὴν *ὀργυιὰν*=1,949 μ, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 6 ***πόδας***, κάθε πόδι εἰς 12 ***δακτύλους*** καὶ κάθε δάκτυλος εἰς 12 ***γραμμάς***.

Τὸ *γεωγραφικὸν μίλιον*=7420μ. καὶ τὸ *ναυτικὸν μίλιον*=1852 μ.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ Ἀμερικὴν μεταχειρίζονται τὴν ***ὑάρδαν*** (yd)=0,914 μ., ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 ***πόδας*** (f) καὶ κάθε f εἰς 12 ***δακτύλους*** (ἴντσας in.),

τὸ *ἀγγλικὸν μίλιον* 1760 yd ἢ 1609 μ.

Λαμβάνομεν συνήθως (μὲ προσέγγισιν) 12 yd=11 μ. καὶ 7 yd=10 πήχ.

§ 134. ***Μονάδες ἐπιφανείας.*** Διὰ τὴν μέτρησιν ἐπιφανείας ἔχομεν μονάδας τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* ($μ^2$), τετράγωνον μὲ πλευρὸν 1 μ.,

τὸ *τετραγ. δεκάμετρον* ($δμ^2$) ἢ *ἄρ* =100 $μ^2$,

τὸ *τετραγ. ἑκατόμετρον* ($εμ^2$) ἢ *ἑκτάριον*=10000 $μ^2$,

τὸ *τετραγ. χιλιόμετρον* ($χμ^2$)=1000000 $μ^2$,

τὴν *τετραγ. παλάμην*=0,01 $μ^2$,

τὸν *τετραγ. δάκτυλον* ($δ^2$)=0,0001$μ^2$

τὴν *τετραγ. γραμμὴν*=0,000001 $μ^2$.

Διὰ τὴν μέτρησιν οἰκοπέδων χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν Ἑλλάδα ὁ *τετράγ. τεκτονικὸς πῆχυς* ($τπχ.^2$), τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,75 μ., εἶνε δὲ ὁ $τπχ^2 = \frac{9}{16}μ^2$.

Τὸ *στρέμμα*=1000 $μ^2$. καὶ τὸ παλαιὸν στρέμμα=1270 $μ^2$.

Ἀσκήσεις.

580—583. Τρέψατε: εἰς χιλιόμ. 25 λεύγας, εἰς λεύγας 1430,16 μ., εἰς μέτρα 138 πήχ., εἰς πηχ. 48,65 μ.

584—585. Πόσον ἀξίζει: ὁ πῆχυς ὕφασμα πρὸς 65,80 δρ. τὸ μ; Τὸ μ. πρὸς 64,80 δρ. τὸν π;

586—587. Τρέψατε εἰς μ. καὶ χλμ. 38 μιλ. ναυτικά, 145,90 μιλ. γεωγραφικά.

588. Σχηματίσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ἀντίστροφα τοῦ προηγουμένου.

589—591. Τρέψατε: εἰς πήχ. 49,5 yd, εἰς yd 72πήχ. 6 ρ., εἰς μ. 240 yd 2f.

592. Πόσον τιμῶνται 16 yd ὕφασμα πρὸς 384,8 δρ. τὸ μ.;

593. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς yd, καὶ ζητεῖται α΄) τοῦ μ., β΄) τοῦ πήχ.

594—595. Τρέψατε: 275 τπχ.^{2} εἰς μ^2, 459 μ^2 εἰς τ πχ.^{2}.

596. Πόσον ἀξίζει τὸ μ^2 οἰκοπέδου πρὸς 1854,6 δρ. τὸν τπχ.^{2}; πόσον τιμᾶται τὸ στρέμμα;

597. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο ἀντίστροφα πρόβληματα.

598. Πόσους τπχ^2 ἔχει τὸ στρέμμα;

599. Εἰς ἔκτασιν 55 στρεμμάτων ἔγιναν 100 ἴσα οἰκόπεδα, πόσοι τπχ^2 ἀναλογοῦν εἰς καθέν, ἄν τὰ 7,2 στρεμ. διετέθησαν διὰ ρυμοτομίαν (δρόμους);

600—601. Πόσα στρέμματα ἀποτελοῦν 27680 τπχ.^{2}; 65 ἐκτάρια καὶ 48 ἄρ;

602. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο ἀντίστροφα προβλήματα·

603. Πόσον ἔρχεται ὁ τπχ.^{2} πρὸς 10000 δρ. τὸ στρέμμα; (Μὲ προσέγγισιν).

604. Συνθέσατε καὶ λύσατε πρόβλημα ποὺ ζητεῖται ἡ τιμὴ κτήματος κατὰ στρέμμα, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τοῦ τπχ^2.

Μονάδες μετρήσεως χώρου, χωρητικότητος καὶ βάρους.

§ 135. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χώρου ἔχομεν μονάδας τὸ ***κυβικὸν μέτρον*** (μ^3), κύβον μὲ ἀκμὰς 1μ.,
τὴν ***κυβ. παλάμην*** (πλ^3)=0,001 μ^3,
τὸν ***κυβ. δάκτυλον*** (δ^3)=0,000001 μ^3,
τὴν ***κυβ. γραμμὴν*** (γρ^3)=0,000000001 μ^3,
τὸ ***κυβ. χιλιόμ.*** (χλμ ^{3})=1000000001 μ^3.

Ὅσον χωρεῖ εἰς μίαν πλ ^{3} λέγεται ***λίτρον*** καὶ εἶνε μονὰς πρὸς μέτρησιν ὑγρῶν, καθὼς καὶ τὸ ***10λιτρον, 100λιτρον, 1000λιτρον, 0,1λιτρον, 0,01λιτρον*** καὶ ***0,001λιτρον.***

Διὰ τὴν μέτρησιν βάρους ἔχομεν μονάδας ἐκτὸς τῆς ὀκᾶς κλπ. (§ 9) καὶ τὸ βάρος ἀπεσταγμένου νεροῦ θερμοκρασίας 4° Κελσίου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα δ³ καὶ λέγεται ***γραμμάριον,***
τὸ ***1000γραμμον*** ἢ ***κοιλὸν***=1000 γραμμάρια.
τὸν ***τόννον***=1000 χγ.,
τὸ ***0,1γραμμον***, τὸ ***0,01γραμμον***, τὸ ***0,001γραμμον.***
Ἡ ὀκᾶ ἔχει 1280 γρμ., 1 δρμ.=3,2 γρ.,
1 χγρ.=312,5 δρμ.,
1 τόννος=781,25 ὀκ.
Τὸ ***καράτιον***=0,2 γρμ. χρησιμεύει νὰ ζυγίζουν τὸ διαμάντι καὶ ἄλλους πολυτίμους λίθους.

Διὰ νὰ ζυγίζουν τὴν σταφίδα ἔχουν τὴν ***Ἐνετικὴν λίτραν*** (ἐν. λ.)=150 δρμ.

Διὰ φαρμακευτικὰς οὐσίας ἔχουν τὴν ***φαρμακ. λίτραν***=360 γρμ.=112,5δρμ. καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 ***οὐγγιὰς*** καὶ κάθε οὐγγιὰ εἰς 480 ***κόκκους*** (περίπου).

Ἀσκήσεις.

605. Πόσον βάρος ἔχουν 16148 λιτ. νερό;

606—614. Νὰ τραποῦν: 76 ὀκ. εἰς χγ., 245 χγ. εἰς ὀκ., 28 τ. εἰς ὀκ., 75 δρμ. εἰς γραμ., 800 γραμ. εἰς δρμ., 65 ὀκ. 300 δρμ. εἰς χγ., 66,235 χγ. εἰς ὀκ., 90 τ. εἰς ὀκ., 7580 ὀκ. εἰς τ.

615. Ἂν ἡ παραγωγὴ τῆς σταφίδος εἶνε 300 ἑκατόλ. ἐν. λ., πόσοι τόννοι εἶνε;

616—617. Ἂν ἡ χιλιάδα (χιλιόλιτρον) τῆς σταφίδος τιμᾶται 3600 δρ., πόσον ἔρχεται ἡ ὀκᾶ; πόσον τὸ χγ.;

618. Ἕνα κουτὶ κινίνο τοῦ Κράτους ἔχει 10 γρ. κινίνο. Πόσους κόκκους ἔχει; πόσους κόκκους ἔχει κάθε σωληνάριον καὶ πόσους κάθε κουφέτο, ἂν τὸ κουτὶ ἔχῃ 5 σωληνάρια καὶ καθένα ἀπ' αὐτὰ 10 κουφέτα;

619—620. Πόσα κοιλὰ εἶνε 1 τ. σιτάρι; Μὲ πόσα χγ. ἰσοδυναμεῖ τὸ καντάρι;

Μονάδες νομισμάτων.

§ 136. Διὰ τὴν μέτρησιν νομισμάτων εἰς τὴν Γαλλίαν, Ἑλβετίαν καὶ Βέλγιον ἔχουν τὸ φράγκον, εἰς τὴν Ἰταλίαν τὴν λιρέττα καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν δραχμὴν (§ 9) καὶ κάθε μία ἀπ' αὐτὰς ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἑκατοστά.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἔχουν τὴν ***λίρα στερλίνα*** (£) καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 ***σελλίνια*** (s), καθένα ἀπ' αὐτὰ εἰς 12 ***πέννες*** (d) καὶ κάθε ***πέννα*** εἰς 4 φυρδίνια (f). Ἡ £ ἰσοδυναμεῖ μὲ 25,22 χρυσᾶς δραχμάς.

Ἂν ἔχωμεν π. χ. 5£ 8s 7d 3f γράφομεν £ 5—8—7—3.

Εἰς τὴν Ἀμερικὴν ἔχουν μονάδα τὸ ***δολλάριον*** ($)=5,18 χρυσᾶς δρ. καὶ ἔχει 100 σέντς.

Εἰς τὴν Γερμανίαν ἔχουν τὸ ***μάρκον*** (RM)=1,23 φρ. χρ. περίπου καὶ ἔχει 100 ***πφένιχ***.

Εἰς τὴν Τουρκίαν ἔχουν τὴν λίραν (£tq)=22,78 φρ. χρ. καὶ ἔχει 100 ***γρόσια***.

Εἰς τὴν Αὐστρίαν ἔχουν τὸ ***σελλίνιον***=0,729 χρ. φρ.
εἰς τὴν Αἴγυπτον τὴν ***λίραν*** (£ Αἰγ.)=25,62 χρ. φρ.,
εἰς τὴν Σερβίαν τὸ ***δηνάριον***,
εἰς τὴν Βουλγαρίαν τὸ ***λέβι***,
εἰς τὴν Ρουμανίαν τὸ ***λέϊ***,
εἰς τὴν Ἱσπανίαν τὴν ***πεσέτα***,
εἰς τὴν Τσεχοσλοβακίαν τὴν ***κορώνα***,
εἰς τὴν Οὐγγαρίαν τὸ ***πέγγο***,
καὶ καθένα ἀπ' αὐτὰ ἔχει 100 ἑκατοστά.

Μονάδες χρόνου καὶ περιφερείας κύκλου.

§ 137. Διὰ τὰς μονάδας χρόνου ἐμάθαμεν εἰς τὴν § 9. Ἐκτὸς ἐκείνων ἔχομεν ἀκόμη ***τὸ ἔτος***, καὶ ἔχει 12 μῆνας, ἢ 365 ἡμ., ἀνὰ 4 ἔτη δὲ ἔχει 366 ἡμ. (ὅτε λέγεται ***δίσεκτον***). 100 ἔτη ἀποτελοῦν ἕνα ***αἰῶνα***.

Διὰ τὴν μέτρησιν κυκλικοῦ τόξου ἔχομεν μονάδα τὸ τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν τῆς περιφερείας του καὶ λέγεται ***μοῖρα*** (°), ὑποδιαιρεῖται δὲ εἰς 60′ (πρῶτα λεπτὰ) καὶ καθὲν τούτων εἰς 60″ (δεύτερα λεπτά).

§ 138. *Παρατήρησις*. Αἱ μονάδες μετρήσεως, αἱ ὁποῖαι σχετίζονται μεταξύ των καθὼς καὶ αἱ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸ ***δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα***. Αὐτὸ ἔχει τὸ προτέρημα ὅτι, τὰ ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων ποσῶν διὰ μονάδων αὐτοῦ γράφονται καὶ ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Π.χ. τὸ 10 μ., 3 πλ., 6 δ., 7 γρ., γράφεται 10,367μ.

Ἀσκήσεις.

621—628. Νὰ τραποῦν εἰς φράγκα 460 £, εἰς δρ., £ 154—10, εἰς £tq 12000 δρ., εἰς δρ. 148 £tq, εἰς δρ. 2300 RM· ὁμοίως 1250 £ Αἰγ. εἰς £ καὶ εἰς RM, 176540δρ. εἰς φρ.· 1400δρ. εἰς $.

629. Τρέψατε 150 £ εἰς δρ. πρὸς 562 δρ. τὴν £.

630—631. Πόσας ἡμέρας ἔχουν 34 συνεχῆ ἔτη; 8,4 μῆνες πρὸς 30 ἡμ ;

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§ 139. *«Συμμιγὴς λέγεται ὁ συγκεκριμμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκεραίους, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουν χωριστὰ ὀνόματα καὶ κάθε μία εἶνε πολλαπλάσιον ἢ ὑπολλαπλάσιον μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος».*

Π. χ. 17 ὥρ. 20^{λ} 16^{δ}, 4 yd 3 f, 9 in λέγονται συμμιγεῖς ἀριθμοί.

Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν 17 ὥρ. εἰς πρῶτα λεπτά, ἔχομεν: $60^{\lambda} \times 17 = 1020^{\lambda}$.

Ὁμοίως π. χ. 60 στ. ἔχουν 44 ὀκ. $\times 60 = 2640$ ὀκ.

Πῶς τρέπομεν ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεώς του;

§ 140. Διὰ νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν 2560 λ. εἰς δρ., πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 2560 λ. : 100 λ., ἤτοι 25,60 δρ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι 13 δρ. ἔχουν $\frac{13\delta\rho.}{5\delta\rho.} = 2{,}6$ τάλ.

Πῶς τρέπομεν ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεώς του;

§ 141. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν π.χ. τὸν 15 ὥρ. 25^{λ} 30^{δ} εἰς δεύτερα λεπτά, ἔχομεν: $60^{\lambda} \times 15 = 900^{\lambda}$ καὶ 25^{λ} ποὺ ἐδόθησαν $= 925^{\lambda}$. Τώρα $60^{\delta} \times 925 = 55500^{\delta}$, καὶ 30^{δ} ποὺ ἐδόθησαν $= 55530^{\delta}$. Ἤτοι, 15 ὥρ. 25^{λ} $30^{\delta} = 55530^{\delta}$.

Πῶς τρέπομεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του;

§ 142. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν π.χ. τὸν 3 στ. 20 ὀκ. 250 δρμ. εἰς ὀκάδας, ἔχομεν: 44 ὀκ $\times 3 = 132$ὀκ., καὶ 20 ὀκ. ποὺ ἐδόθησαν $= 152$ὀκ.

Ἐπειδὴ 250 δρμ. $=\frac{250}{400}$ ὀκ. $=0{,}625$ ὀκ., ἕπεται ὅτι,

3 στ. 20ὀκ. 20 δρμ. $=152{,}625$ ὀκ.

Πῶς τρέπομεν συμμιγῆ εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεώς του;

143. *Παρατήρησις.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶνε ἐν γένει κλάσματα ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων.

144. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν π.χ. τὸν 75325 δρμ. εἰς συμμιγῆ, ἔχομεν : 75325 δρμ. : 400 δρμ. δίδει πηλίκον 188 ὀκ. καὶ ὑπόλ. 125 δρμ.· τὸ 188 ὀκ.: 44 ὀκ. δίδει πηλίκον 4 στ. καὶ ὑπόλοιπον 12 ὀκ. Ἄρα, 75325 δρμ. $=4$στ. 12 ὀκ. 125 δρμ.

Ὁμοίως τρέπομεν π.χ. τὸν 7756^{λ} εἰς συμμιγῆ.

Ἡ σειρὰ τῶν διαιρέσεων διατάσσεται καθὼς φαίνεται κατωτέρω.

753′2′5	400	
353 2	188	44
33 25	12	4
1 25		

4 στ. 12 ὀκ. 125 δρμ.

77′5′6′	60	
17 5	129	24
5 56	09	5
16		

5 ἡμ. 9 ὥρ. 16^{λ}.

145. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν $\frac{47}{8}$ στ. εἰς συμμιγῆ, ἀπὸ τὴν διαίρεσιν 47στ : 8 εὑρίσκομεν 5 στ. καὶ $\frac{7}{8}$ στ. Τὸ $\frac{7}{8}$ στ. τρέπομεν εἰς ὀκ. καὶ ἔχομεν 44 ὀκ. $\times\frac{7}{8}=\frac{308}{8}$ ὀκ. $=38\frac{1}{2}$ ὀκ. Τὸ $\frac{1}{2}$ ὀκ. $=200$ δρμ. καὶ ἔχομεν $\frac{47}{8}$ στ. $=5$ στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.

Ὁμοίως τρέπομεν εἰς συμμιγῆ π. χ. τὸν £ $\frac{13}{15}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς κατωτέρω.

47 στ.	8
7	5 στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.
× 44	
308 ὀκ.	
68	
4	
× 400	
1600	
0	

£ 13	15
× 20	£ 0—17—4
260	
110	
5	
× 12	
60	
0	

Πῶς τρέπομεν εἰς συμμιγῆ κλάσμα συγκεκριμένον, τὸ ὁποῖον παριστάνει μονάδας δοθείσης τάξεως ;

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

632—634. Νὰ τραποῦν 18 ὀκ. εἰς δράμια, 8yd εἰς in, 27 £ εἰς f.

635. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία ὅμοια προβλήματα.

636—637. Πόσας £ κάμνουν 2125 s ; Πόσους πήχ. τὰ 132 ϱ ;

638. Σχηματίσατε καὶ λύσατε τρία ὅμοια προβλήματα.

639. 12 εἰκ. 3 ταλ. 2 δϱ. 35 λ. νὰ τραποῦν εἰς λεπτά, εἰς δϱ., εἰς τάλ., εἰς εἰκ.

640. Λάβετε ἕνα ἀριθμὸν ὀκ. καὶ δρμ. καὶ τρέψατέ τον εἰς ὀκ., εἰς στατῆρας.

641. Ἐργασθῆτε ὁμοίως μὲ πήχ. καὶ ϱ., μὲ μέτρα κλπ., μὲ £ κλπ. μὲ yd κλπ.

642. Νὰ τραποῦν £ 10—10—5—2 εἰς s, εἰς f εἰς £.

643. Λάβετε ἕνα κλασματικὸν ἢ μικτὸν ἀριθμὸν πήχ., £, s., δϱ., καὶ τρέψατε αὐτοὺς εἰς συμμιγεῖς.

644—645. Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς 3,124μ., 29,415 πήχ. καὶ 5,156 στ.

646. Εὕρετε ὅμοια παραδείγματα μὲ yd, RM, £tq, ἔτη κλπ

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις συμμιγῶν.

§ 146. Ἐπειδὴ οἱ συμμιγεῖς εἰμποροῦν νὰ τραποῦν εἰς ἀκεραίους ἢ εἰς κλάσματα, αἱ πράξεις μὲ αὐτοὺς εἰμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς πράξεις ἀκεραίων καὶ κλασμάτων, τρέπομεν δὲ τὸ ἐξαγόμενον, ἂν θέλωμεν, εἰς συμμιγῆ.

§ 147. Συμμιγεῖς προσθέτομεν καὶ ἂν προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Π.χ. διὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν 3 ἔτ. 7 μην. 18 ἡμ. καὶ 4 ἔτ. 9 μην. 17 ἡμ. γράφομεν αὐτοὺς ὡς κατωτέρω καὶ προσθέτομεν συνήθως κατὰ στήλας :

3 ἔτ.	7 μήν.	18 ἡμ.
4 »	9 »	17 »
7 »	16 »	35 »
8 »	5 »	5 »

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 7 ἔτ. 16 μην. 35 ἡμ. Ἐὰν ἀπὸ καθένα τῶν 35 ἡμ. καὶ 16 μηνῶν ἐξάγωμεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, ἐκείνης ποὺ παριστάνει, καὶ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, εὑρίσκομεν 8 ἔτ. 5 μῆν. 5 ἡμ.

§ 148. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Π.χ. διὰ τὴν 134° 59′ 58′′—85° 35′ 48′′ γράφομεν αὐτοὺς ὡς κατωτέρω, καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ στήλας, εὑρίσκομεν διαφορὰν 49° 24′ 10′′.

134°	59′	58′′		4 ἔτ.		3 μῆν.		8 ἡμ.
85°	35′	48′′		2	»	1	»	12	»
49°	24′	10′′		2	»	1	»	26	»

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν π.χ. 4 ἔτ. 3 μῆν. 8 ἡμ. —2ἔτ. 1μ. 12 ἡμ., γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἀνωτέρω καὶ λέγομεν: 12 ἡμ. ἀπὸ 8 ἡμ. δὲν ἀφαιροῦνται· προσθέτομεν 30 ἡμ. εἰς τὰς 8 ἡμ. τοῦ μειωτέου, ὅτε ἔχομεν 38 ἡμ. καὶ ἀφαιροῦμεν 12 ἡμ. ἀπὸ τὰς 38 ἡμ., 26 ἡμ.· προσθέτομεν καὶ 1 μῆν. εἰς τὸν 1μ. τοῦ ἀφαιρετέου ἀντὶ τῶν 30 ἡμ.· 1 μὴν καὶ 1 μὴν=2 μῆν., ἀπὸ 3 μῆν=1 μήν· 2 ἔτη ἀπὸ 4 ἔτη=2 ἔτη. Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 2 ἔτη 1 μὴν 26 ἡμ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

647. Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 9 τάλ. 2 δρ. 25 λ. καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 6 τάλ. 1 δρ. 20 λ. Πόσον τὸ ἐπώλησε;

648. Νὰ τραπῇ αὐτὸ καταλλήλως εἰς πρόβλημα ἀφαιρέσεως καὶ νὰ λυθῇ.

649. Ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 154 εἰκ. 3 τάλ. 4 δρ. 40 λ. μὲ ζημίαν 90 εἰκ. 1 ταλ. 20 λ. Πόσον τὸ εἶχε ἀγοράσει.

650. Σχηματίσατε ἀπ' αὐτὸ καὶ λύσατε πρόβλημα ἀφαιρέσεως.

651. Ἕνα παιδὶ ἐγεννήθη τὴν 8/ΙΙ τοῦ 1925 καὶ ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 2 ἔτ. 2 μην. 28 ἡμ. Πότε ἀπέθανε;

652. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα, καθὼς καὶ ἄλλο ἀφαιρέσεως.

653. Ἔμπορος εἰσπράττει τὴν α′) ἡμέραν 124 εἰκ. 2 ταλ. 25 λ. τὴν β′) 7 ταλ. 30 λ. περισσότερον ἀπὸ τὴν α′), τὴν γ′) 1 ταλ. 1 δρ. 25 λ. περισσότερον τῆς β′ καὶ τὴν δ′) 1 εἰκ. 2 δρ. 40 λ. περισσότερον τῆς γ′. Πόσα εἰσέπραξε τὸ ὅλον;

654. Τρέψατε τὸ προηγούμενον καταλλήλως εἰς πρόβλημα ἀφαιρέσεως καὶ λύσατε αὐτό.

955. Ἀπὸ βαρέλι, τὸ ὁποῖον εἶχε 385 στ. 32 ὀκ. 200 δρμ. κρασί, ἀφηρέσαμεν 30 στ. 40 ὀκ. 100 δρμ., ἔπειτα 12 στ. 43 ὀκ. καὶ τέλος 15 στ. 17 ὀκ. 120 δρμ. Πόσο κρασὶ ἔμεινεν εἰς τὸ βαρέλι;

656. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω μὲ £, μὲ RM, μὲ £tq.

Πολλαπλασιασμὸς καί διαίρεσις συμμιγοῦς μὲ ἀκέραιον ἢ κλάσμα.

§ 149. Ἂν ζητοῦμεν π. χ. τὸ $8^o\ 27'\ 14'' \times 5$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς $14''$, $27'$, 8^o ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν $70''$, $135'$, 40^o. Ἐὰν ἀπὸ τοὺς $70''$, $135'$ ἐξάγωμεν τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεώς των, καὶ τὰς προσθέσωμεν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, εὑρίσκομεν $42^o 16' 10''$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὅπως κατωτέρω:

$$\begin{array}{ccc}
8^o & 27' & 14'' \\
 & & \times 5 \\
\hline
40^o & 135' & 70'' \\
42^o & 16' & 10''
\end{array}$$

§ 150. Ἂν ζητοῦμεν π. χ. τὸ $6^o\ 35'\ 36'' : 6$, διαιροῦμεν τὸ $6^o : 6$ καὶ εὑρίσκομεν 1^o· τὸ $35' : 6$ καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $5'$ καὶ ὑπόλοιπον $5'$· τὰ $5'$ τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτά, ὅτε $60'' \times 5 = 300''$, καὶ $36''$ ποὺ ἐδόθησαν $= 336''$. Διαιροῦμεν τὸ $336'' : 6$ καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $56''$. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε $1^o\ 5'\ 56''$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς κατωτέρω.

$$\begin{array}{ccc|c}
6^o & 35' & 36'' & 6 \\
\cline{4-4}
 & 5 & & 1^o\ 5'\ 56'' \\
 & \times 60'' & & \\
\cline{1-3}
 & 300'' & & \\
 & +\ 36 & & \\
\cline{1-3}
 & 336'' & & \\
 & 36 & & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον δὲν εἶνε 0, γράφομεν τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ διὰ τοῦ διαιρέτου ὑπὸ μορφὴν κλασματικήν. Π. χ. ἂν 2 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν σιτάρι 33 ὀκ. 147 δρμ., ὁ καθένας ἐπῆρε 33 ὀκ. 147 δρμ. : 2=16 ὀκ. $273\frac{1}{2}$ δρμ.

1. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος ἢ δεκαδικός, τρέπομεν ἐνίοτε τὸν διαιρετέον συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον ἢ κλάσμα, ὁ ὁποῖος νὰ παριστάνῃ μονάδας ὡρισμένης τάξεως καὶ τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τρέπομεν, ἂν θέλωμεν, εἰς συμμιγῆ. Π.χ. 25° 27′ 44″ : 0,8=91664″ : 0,8=114580″=31° 49′ 40″. Ὁμοίως εὑρίσκομεν π.χ. 29μ. 4π. 7δ. : 421=2947 δ.:421=7 δ.

52. Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ το γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Π.χ. τὸ 5 στ. 38 ὀκ. 250 δρμ. $\times\frac{3}{4}=\frac{5\text{στ.}38\text{ὀκ.}\ 250\text{δρμ.}\times 3}{4}=$

$=\frac{17\text{στ.}\ 27\text{ὀκ.}\ 350\text{δρμ.}}{4}=4$στ. 17 ὀκ. $387\frac{1}{2}$ δρμ.

153. Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε δεκαδικὸς ἢ μικτός, τὸν τρέπομεν εἰς κλάσμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω, ἤ, ἂν εἶνε εὐκολώτερον, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ μὲ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ μὲ τὸν κλάσμα καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

154. Ὅταν ὁ διαιρέτης (μερισμοῦ) εἶνε κλάσμα, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους του καὶ κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

$$\text{Π.χ.}\quad 18^\circ\,45'\,20'' : \frac{5}{9} = 18^\circ\,45'\,20'' \times \frac{9}{5} =$$

$$= \frac{162^\circ\,405'\,180''}{5} = 32^\circ\,105'\,36'' \text{ κλπ.}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης μερισμοῦ εἶνε μικτὸς ἢ δεκαδικός.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

7. Εὕρετε τὸ 2 ἔτ. 3 μην. 9 ἡμ. × 4 μὲ δύο τρόπους.

8. Σχηματίσατε παραδείγματα ὅπως τὸ ἀνωτέρω μὲ ἡμ. κλπ., yd κλπ., μὲ στατῆρας κλπ.

9. Ἂν ἐργάτης πέρνῃ 50 δρ. 40 λ. τὴν ἡμ., πόσα θὰ πάρῃ εἰς 8,5 ἡμέρας ;

0. Τρέψατε τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἰς ἄλλα μερισμοῦ μὲ διαιρέτην α′) ἀκέραιον, β′) δεκαδικόν.

661. Εὕρετε τὴν διαφορὰν τῶν γινομένων
7 ἡμ. 20 ὥρ. $30^{\lambda}\ 40^{\delta} \times 4$ καὶ 10 ἡμ. 10 ὥρ. $35^{\lambda}\ 50^{\delta} \times 8$.

662. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ὕφασμα, ἂν 25 πηχ. τιμῶνται 15 εἰκ. 3 τάλ. ;

663. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοια προβλήματα μὲ εἰκοσάδραχμα κλπ. καὶ διαιρέτην δεκαδικόν, μὲ £ κλπ., μὲ ὀργ. κλπ.

664—665. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα μὲ τὸν συντομώτερον τρόπον τῶν (12 πηχ. 4 ρ.+6 πηχ. 2 ρ.) : 4, (6 yd 3f 4in—2 yd 5f 7in): 4.

666. Ἂν ἁτμάμαξα διανύῃ 40 χλμ. 200μ. εἰς 8,25ὥρ., πόσον διανύει εἰς 1 ὥραν ;

667. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ἐκ τούτου ἄλλο πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἄλλο μετρήσεως.

668. Πόσον τιμῶνται 14,8 ὀκ. λάδι πρὸς 20 δρ. 80 λ. τὴν ὀκ.

669. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο ὅμοια προβλήματα μὲ πολλαπλασιαστὴν α΄) μικτὸν β΄) κλάσμα.

670. Ἔμπορος ἀγοράζει 3,750 χλγ. ἐμπόρευμα ἀντὶ 9 εἰκ. 1 ταλ. 2δρ. 50λ., πωλεῖ δ' αὐτὸ ἀντὶ 10 εἰκ. 1 ταλ. 1 δρ. 25 λ. Πόσον ἐκέρδισεν εἰς κάθε χγρ. ;

671. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ἄλλο πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

§ 155. *«Ἂν μία ὁμολογία ἑνὸς δανείου τιμᾶται £ 2—15—6, πόσον τιμῶνται 356 ὁμολογίαι ;»*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ £ 2—15—6 ×356, ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς. Τὸ £ 2×356=£712. Τὸ 15s×356=(10s+5s)×356= $\left(\frac{1}{2}£+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}£\right)\times 356=£\ 178+£\ 89$. Διὰ τὸ 6d×356, ἐπειδὴ εἶνε $6d=\frac{1}{2}s=\frac{1\times5}{2\times5}s=\frac{1}{10}\times 5s$, ἔχομεν $6d\times356=\frac{1}{10}89\ £$ =£ 8—18. Οὕτω εὑρήκαμεν

2 £×356	. . . .	= £ 712
15s×356	10s×356=(τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 356)	= » 178
	5s×356=(τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ προηγουμένου)	= » 89
	6d×356 (ἐπειδὴ 6d=$\frac{1}{10}$ τῶν 5s)	= » 8—18
ἤτοι £ 2—15—6×356		= » 987—18

Ὁ τρόπος αὐτὸς μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκουν τὸ γινόμενον λέγεται πολλαπλασιασμὸς μὲ τὴν ***μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν***. Ἐπειδὴ κάθε ἀριθμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀναλύεται εἰς μέρη ἁπλᾶ, τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ ἥμυσι, τὸ τρίτον κλπ. τῆς μιᾶς μονάδος, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ τιμή.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμόζεται ἰδίως ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός.

Ἀσκήσεις.

2. Νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν τά : α') 15 ὀργ. 4. π. 8 δ. 10 γρμ. $\times 64$· β') 25 ταλ. 3 δρ. 60 λ. $\times 148$· γ') 32 στ. 38 ὀκ. 150 δρμ. $\times 682$.

3. Νὰ συντεθοῦν τρία ὅμοια προβλήματα μὲ £ κλπ., μὲ yd κλπ., μὲ στατ. κλπ. καὶ νὰ λυθοῦν μὲ τρεῖς τρόπους.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης ὁρίζεται ἀπὸ συμμιγῆ.

156. ***«Ἂν μία ὀκᾶ ἐμπόρευμα τιμᾶται 2 ταλ. 3 δρ. 60 λ., πόσον τιμῶνται 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ. αὐτοῦ;».***

Ἐπειδὴ 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρμ.$=150\frac{3}{4}$ὀκ., ἔχομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 2ταλ. 3δρ.60λ. $\times 150\frac{3}{4}=$ 2ταλ.3δρ. 60λ. $\times\frac{603}{4}=$ $=$102εἰκ 2ταλ. 20λ.

Ἄρα, ***«ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁρίζεται ἀπὸ συμμιγῆ, τὸν τρέπομεν εἰς ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει μονάδας τῆς τάξεως τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἔχει δοθῆ καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κλάσμα ἢ ἐπὶ ἀκέραιον».***

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ διαιρέτης (μερισμοῦ) ὁρίζεται ἀπὸ συμμιγῆ· δηλαδὴ τὸν τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς τάξεως τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ τιμή. Π. χ. ἂν 30πήχ. 6ρ. ὕφασμα τιμῶνται 19 εἰκ. 1 δρ. 30 λ. καὶ ζητεῖται πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς, ἐπειδὴ οἱ 30 πήχ. 6ρ.$=30\frac{6}{8}=30\frac{3}{4}=\frac{123}{4}$, θὰ ἔχωμεν 19εἰκ.1δρ.30λ. $:\frac{123}{4}=$ 19εἰκ.1δρ.30λ. $\times\frac{4}{123}=$12δρ.40λ.

Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν.

§ 157. *«Ἂν ὁ στατὴρ ἐμπόρευμα τιμᾶται 13 δρ. 20 λ., πόσον τιμῶνται 17 στ. 35 δκ. 200 δρμ. ;»*

Εἰμποροῦμεν νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς :

Ἡ τιμὴ	10στ.	εἶνε	13δρ.20λ. $\times$10=132δρ.
» »	7στ.	»	13δρ.20λ. $\times$ 7= 92δρ.40λ.
» »	22δκ. $=\frac{1}{2}$στ.	»	13δρ.20λ. : 2= 6δρ.60λ.
» »	11δκ. $=\frac{1}{2}$τῶν 22δκ.	»	6δρ.60λ. : 2= 3δρ.30λ.
» »	2δκ. $=\frac{1}{11}$ » 22δκ.	»	6δρ.60λ. : 11= 60λ.
» »	200δρμ.$=\frac{1}{4}$ » 2δκ.	»	60λ. : 4= 15λ.
		Τὸ ὅλον	235 δρ 5λ.

«Ἂν 6 στ. 7 δκ. 350 δρμ. ἐμπόρευμα τιμῶνται 1 χιλιόδραχμον, πόσον τιμῶνται 1 στ. 10 δκ. 150 δρμ. ;»

Προφανῶς πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν μετρήσεως 1στ. 10 δκ. 150 δρμ. : 6 στ. 7δκ. 350 δρμ. Τρέπομεν τοὺς συμμιγεῖς εἰς δράμια καὶ ἔχομεν 21750 : 108750$=\frac{1}{5}$χιλ.$=\frac{1000\text{δρ.}}{5\ \text{δρ.}}$=200δρ.

Ἤτοι, *«ὅταν εἰς διαίρεσιν μετρήσεως ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ὁρίζωνται ἀπὸ συμμιγεῖς, τοὺς τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως (συνήθως κατωτάτης), καὶ διαιροῦμεν ἀκεραίους ἢ κλασματικούς»*.

Ὁμοίως λύονται καὶ τὰ προβλήματα διαιρέσεως μετρήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ διαιρέτης ὁρίζεται ἀπὸ (συγκεκριμένον) ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἢ μικτὸν ἢ δεκαδικόν.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

674. Ἕνας ἀγοράζει 13 δκ. 300 δρμ. ἐμπόρευμα πρὸς 1 ταλ. 1 δρ. 20 λ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα θὰ πληρώση ;

675. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ἀπ' αὐτὸ ὅμοιον πρόβλημα διαιρέσεως μερισμοῦ μὲ συμμιγεῖς.

676. Ἂν 1 yd ὕφασμα τιμᾶται £ 1—4—6—2, πόσον τιμῶνται 5 yd 2 f 6 in ;

677. Ἂν μία ὀκᾶ βούτυρο ἀνταλλάσεται μὲ 40 δκ. 100 δρμ. σα-

ποῦνι, μὲ πόσας ὀκ. σαποῦνι ἀνταλλάσσονται 10 ὀκ. 300 δρμ. βούτυρο ;

3. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία ὅμοια προβλήματα μὲ τὰ ἀνωτέρω.

9 Πόσον τιμᾶται ἡ yd ὕφασμα, ἂν 9 yd 2 f 9 in τιμῶνται £ 11—18.

0 Ἀτμόπλοιον διανύει μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα 794,5 μίλ. εἰς 55 ὥρ. $45^{λ}$. Πόσα μίλ. διανύει τὴν ὥραν ;

1 Ἡ ὀκᾶ ἐμπόρευμα τιμᾶται 3 δρ. 80 λ. Πόσας ὀκ. θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 1 εἰκ. 3 τάλ. 4 δρ. 90 λ. ;

2 Ἂν μὲ 3 ταλ. ἀγοράζῃ ἕνας 1 πῆχ. ὕφασμα· πόσον ἀγοράζει μὲ 8 εἰκ. 4 δρ. 85 λ ;

3. Μὲ 1 δρ. ἀγοράζει ἕνας 1 πῆχ. 2 ρ. ὕφασμα, πόσον ἀγοράζει μὲ 10 δρ. 20 λ. ;

4. Ἕνας οἰκονομεῖ καθ' ἡμ. 12 δρ. 50 λ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ οἰκονομήσῃ 18 εἰκ. 3 ταλ. ;

5. Συνθέσατε καὶ λύσατε μὲ δύο τρόπους τρία προβλήματα μετρήσεως μὲ διαιρέτην κλάσμα, μικτόν, δεκαδικόν.

Περὶ τετραγωνικῆς ρίζης.

158. ***Καλοῦμεν τετραγωνικὴν ρίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος, ὅταν ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, δίδει τὸν δοθέντα.***

Τὴν εὕρεσιν τῆς τετραγ. ρίζης καλοῦμεν ***ἐξαγωγὴν*** αὐτῆς.

Ἡ τετραγ. ρίζα ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 9 σημειώνεται $\sqrt{9}$ καὶ εἶνε $\sqrt{9}=3$, διότι $3^2=9$.

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται ***ριζικὸν*** καὶ ὁ ὑπ' αὐτὸ ἀριθμὸς ***ὑπόριζος ποσότης***.

Καλοῦμεν τετραγ. ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸν μεγαλύτερον, ἀκέραιον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα. Π.χ. $\sqrt{56}=7$ κατὰ (προσέγγισιν μονάδος)· διότι $7^2=49<56$ καὶ $8^2=64>56$. Π. χ. ἡ $\sqrt{18{,}5}=4$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἀκέραιος ἀριθμὸς $A<100$ ἔχει $\sqrt{A}<\sqrt{100}$ ἢ $\sqrt{A}<10$. Ἄρα ἡ $\sqrt{A}$ (κατὰ προσέγγισιν 1) εἶνε ἀριθμὸς μονοψήφιος, εὑρίσκομεν δ' αὐτὸν ἀπὸ μνήμης. Π.χ. $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{32}=5$, $\sqrt{96}=9$, $\sqrt{54}=7$ κλπ. (κατὰ προσέγγισιν 1).

Ἀσκήσεις.

686—688. Εὕρετε τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος. α') 81, 42, 56, 92, 98, 17· β') 34, 5, 47, 93, 75, $18\frac{1}{2}$, 64, 98, 38· γ') $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{185}{251}$.

§ 159. ***Πῶς εὑρίσκομεν τὴν τετραγ. ρίζαν ἀριθμοῦ*** $A > 100$.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγ. ρίζαν ἀκεραίου μεγαλυτέρου τοῦ 100' π.χ. τὴν $\sqrt{654}$. Τὸν χωρίζομεν εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιὰ 6,54, ἐνῶ τὸ β' τμῆμα εἶνε μονοψήφιον (ἐδῶ). Ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ 6 καὶ εἶνε 2 (κατὰ προσέγγισιν 1). Τὸ $2^2=4$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 6 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου $6-4=2$, γράφομεν καὶ τὸ τμῆμα 54, τοῦ δὲ 254 χωρίζομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 4. Τὸ 25 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ρίζης $2\times2=4$ καὶ τὸ ἀκέραιον πηλίκον 6 γράφομεν δεξιὰ τοῦ **4**. Τὸν 46 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν 6. Τὸ γινόμενον $46\times6=276$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 254 καὶ γράφομεν ἀντὶ τοῦ 6 τὸν 5, ὅτε εὑρίσκομεν $45\times5=225$.

$\sqrt{6\,5\,4}$	25 τετρ. ρίζα	
4	46	45
2 5,4	×6	×5
2 2 5	276	225
29 ὑπόλ.		

Ἀφαιρούμενον τοῦτο ἀπὸ τὸ 254 δίδει ὑπόλοιπον 29. Τὸ 5 εἶνε τὸ δεύτερον (δεξιὰ τοῦ 2) ψηφίον τῆς ρίζης. Ἤτοι $\sqrt{654}=25$ κατὰ προσέγγισιν 1, τὸ δὲ 29 λέγεται ***ὑπόλοιπον*** τῆς $\sqrt{654}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἀνωτέρω.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ περισσότερα ψηφία, ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως, μέχρις ὅτου κατεβάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τμήματά του καὶ θὰ διαιροῦμεν κάθε φορὰν τὸ σύνολον τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ κάθε ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ἀπὸ τὸ διψήφιον τμῆμα, τὸ ὁποῖον γράφεται δεξιά του, διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης, ἡ ὁποία εὑρέθη. Π. χ. ἡ $\sqrt{454276}=674$ καὶ εὑρίσκεται ὡς κατωτέρω εἰς τὸ α').

$\sqrt{45'42'76}$	674 ρίζα	
36	127	1344
94,2	×7	×4
88 9	889	5376
5 37,6		
5 37,6		
0		

β')

$\sqrt{9'53'6\,1'53'25}$	30880 ρίζα	
53 6,1	608	6168
48 6 4	8	8
4 9 75,3	4864	49344
4 9 34 7		
ὑπόλ. 40 92 5		

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς πράξεως, ὑψώνομεν τὴν τετραγ. ρίζαν εἰς τὸ τετράγωνον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅτε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Π.χ. $25^2+29=654$. $674^2=454276$, $30880^2+40925=953615325$ εἰς τὸ β').

Κάθε ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν ἀφαιρέσεων δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς εὑρεθείσης ρίζης, διότι ἄλλως ἡ ρίζα θὰ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς εὑρεθείσης.

160. Ἂν τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον εἶνε 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς λέγεται ***τέλειον τετράγωνον*** καὶ ἡ τετραγ. ρίζα του εὑρέθη ἀκριβῶς, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἂν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετραγ. ρίζης ἡ διαίρεσις δίδῃ πηλίκον 0, ὡς π.χ. εἰς τὸ β') παράδειγμα ἀνωτέρω, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῆς ρίζης καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως τὴν πρᾶξιν, ἂν δὲ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τὸ 9.

Ἀσκήσεις.

9—697.. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγ. ρίζαι καὶ νὰ γίνουν δοκιμαί των 144, 165, 125, 561, 56134, 3142859, 15127, 170669, 339889.

8—700. Ὁμοίως αἱ $\sqrt{144^2+1932^2}$, $\sqrt{12595^2-10077^2}$, $\sqrt{110224+576081-65^2}$

Τετραγ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος.

161. Καλεῖται τετραγ. ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001 κλπ. ὁ μεγαλύτερος δεκαδικὸς ὁ ὁποῖος ἔχει ἕνα δύο, τρία κλπ. δεκαδικὰ ψηφία καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα. Π.χ. $\sqrt{20}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1 εἶνε 4,4· διότι $4,4^2=19,36$, ἐνῷ $4,5^2=20,25$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ., τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ 10^2 ἢ τὸ 100^2 κλπ., ἐξάγομεν τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν 1 καὶ αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ 10 ἢ 100 κλπ. Π. χ. ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0001 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν $\sqrt{2 \times 10000^2} = \sqrt{200000000}$ κατὰ προσέγγισιν 1, ἡ ὁποία εἶνε 14142, ἂν τὴν διαιρέσωμεν διὰ 10000, ὅτε $\sqrt{2} = 1,4142$ (κατὰ προσέγγισιν 0,0001).

§ 162. Ἐὰν ζητῆται ἡ τετραγ. ῥίζα κλάσματος, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὅρων του ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν 1, καὶ αὐτὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

§ 163. Ἐὰν ζητῆται ἡ τετραγ. ῥίζα κλάσματος κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 κλπ., τρέπομεν συνήθως τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ μὲ αὐτὸν ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω. Π. χ. διὰ τὴν $\sqrt{\frac{12}{7}}$ ἔχομεν $\frac{12}{7} = 1,7142285$ (κατὰ προσέγγισιν), εὑρίσκομεν δὲ κατὰ προσέγγισιν 1, τὴν $\sqrt{1,714285 \times 1000^2} = \sqrt{1714285} = 1309$, καὶ $\sqrt{\frac{12}{7}} = 1,309$ (κατὰ προσέγγισιν 0,001).

§ 164. Ἡ τετραγ. ῥίζα δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν 1 εὑρίσκεται, ἂν εὑρεθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν 1 τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

Ἀσκήσεις.

701—712. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01, ἡ $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{1543}$. κατὰ προσέγγισιν 1 ἢ 0,01 ἢ 0,001 αἱ $\sqrt{1543}$, $\sqrt{26,853}$, $\sqrt{26,853}$, $\sqrt{9142,23}$.

Κατὰ προσέγγισιν 1 ἢ 0,001 αἱ $\sqrt{\frac{5}{8}}$, $\sqrt{\frac{15}{39}}$, $\sqrt{\frac{7}{8}}$, $\sqrt{14,8}$.

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

§ 165. Ἂν ἔχωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν π. χ. τὸν 5, ὁ ὁποῖος δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, παρατηροῦμεν ὅτι ποτὲ δὲν θὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν του ἀκριβῶς, ὁσαδήποτε ψηφία της καὶ ἂν εὑρίσκωμεν, ἀλλ' ἡ τετραγ. ῥίζα τοιούτου ἀριθμοῦ θὰ εἶνε ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν εἶνε περιοδικά. Διότι, ἂν αὐτὴ ἦτο περιοδικός, θὰ παριστάνετο μὲ ἀνάγωγον κλάσμα. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα αὐτό, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, θὰ εἶνε πάλιν ἀνάγωγον. Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{2}{3}$ εἶνε $\frac{2^2}{3^2}=\frac{2\times2}{3\times3}$, τὸ ὁποῖον εἶνε πάλιν ἀνάγωγον.

Ἀλλ' ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα δὲν εἰμπορεῖ νὰ ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸν 5 π χ..

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγ. ρίζης ἀριθμοῦ, μὴ τελείου τετραγώνου, καλοῦνται ***ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ*** καὶ ἔχουν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν.

Οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ (καὶ οἱ δεκαδικοὶ περιοδικοὶ) καλοῦνται πρὸς διάκρισιν ***σύμμετροι ἀριθμοί***. Π. χ. οἱ 3,2574138604..... καὶ 1,213567218403..... λέγονται ἀσύμμετροι ἀριθμοί, ἂν ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Αἱ πράξεις μὲ ἀσυμμέτρους γίνονται, ἂν ἀπὸ τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία των περιορισθῶμεν εἰς μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ ἐκ τῶν πρώτων κατὰ σειράν· π χ. εἰς τὰ τρία ἢ τέσσαρα πρῶτα, ὅτε θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς (συμμέτρους) κατὰ προσέγγισιν, καὶ μὲ αὐτοὺς ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν ἀσυμμέτρων 2,231876..... καὶ 0,035421804.... κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ (διὰ τὸ ἄθροισμα καὶ δ_χ διὰ τοὺς προσθετέους) εἶνε

$$2{,}2318+0{,}0354=2{,}267.$$

Ἀσκήσεις.

713—715. Νὰ εὑρεθοῦν κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\quad\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\quad\sqrt{10}-\sqrt{5}$, $\quad\sqrt{5}\times\sqrt{2}$,

β') $\sqrt{17}\times\sqrt{3}$, $\quad\sqrt{28}:\sqrt{3}$, $\quad\sqrt{15}:\sqrt{2}$, $\quad\sqrt{14}:\sqrt{4}$,

γ') $\sqrt{142}\times\sqrt{5}$, $\quad\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{4}$, $\quad\sqrt{7}-0{,}63542.....$

716—719 Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα καὶ καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς εἶνε: 153 καὶ ὑπόλ. 15· 454 καὶ ὑπόλ. 42· 567 καὶ ὑπόλ. 10· 454 καὶ ὑπόλ. 5.

720—723 Εὕρετε τὸ x, ὥστε νὰ εἶνε:

$x^2=144$· $\quad x^2=24336$· $\quad x^2=12321$· $\quad x^2=506{,}25$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

§ 166. ***Λόγος*** δύο ὁμοειδῶν ποσῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου.

Καλοῦμεν λόγον δύο ἀριθμῶν (ἀφῃρημένων ἢ συγκεκριμένων ὁμοειδῶν), π. χ. τῶν 12 καὶ 4 τὸ πηλίκον $\frac{12}{4}=3$.

Οἱ ἀριθμοὶ ἑνὸς λόγου λέγονται ***ὅροι*** αὐτοῦ, ὁ α΄ ***ἡγούμενος*** καὶ ὁ β΄ ***ἑπόμενος.***

Ἀντίστροφοι λέγονται δύο λόγοι ἢ δύο ἀριθμοί, ἂν ἔχουν γινόμενον 1. Π. χ. οἱ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{3}$, οἱ 4 καὶ $\frac{1}{4}$, οἱ 6,5 καὶ $\frac{1}{6{,}5}$.

Ἔστω ὅτι ὁ λόγος δύο ποσῶν π. χ. δύο ὑφαμάτων εἶνε 4. Ἂν μετρήσωμεν αὐτὰ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, π. χ. μὲ 1 μ. καὶ εὕρωμεν ὅτι τὸ β΄ ἔχει μῆκος 3 μ., τὸ α΄ θὰ ἔχῃ μῆκος $3μ \times 4 = 12$ μ., ὁ δὲ λόγος τοῦ 12 μ. πρὸς τὸ 3 μ. εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ποσῶν. Ἤτοι,

«ὁ λόγος δύο ποσῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τὰ παριστάνουν, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα».

Π. χ. ἂν οἱ πληθυσμοὶ δύο πόλεων εἶνε 8000 καὶ 12000, ὁ λόγος των ἰσοῦται μὲ $\frac{8000}{12000}=\frac{2}{3}$.

§ 167. Καλοῦμεν ***ἀναλογίαν*** τὴν ἰσότητα δύο λόγων. Π. χ. τὴν $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$, γράφεται δὲ αὕτη καὶ οὕτω $12:3=20:5$ καὶ ἀπαγγέλλεται 12 ***πρὸς*** 3 ***καθὼς*** 20 ***πρὸς*** 5, ἢ καὶ $\frac{12}{3}$ ἴσον μὲ $\frac{20}{5}$.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν ἀναλογίαν λέγονται ***ὅροι*** αὐτῆς, ὁ α΄ καὶ γ΄ ***ἡγούμενοι,*** οἱ δὲ ἄλλοι ***ἑπόμενοι,*** ὁ α΄ καὶ δ΄ ***ἄκροι***, ὁ δὲ β΄ καὶ γ΄ ***μέσοι*** ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

§ **168.** Ἔστω ἡ ἀνσλογία $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος ἐπὶ 9 καὶ τοῦ β΄ ἐπὶ 3, λαμβάνομεν $\frac{2\times9}{3\times9}=\frac{6\times3}{9\times3}$. Ἐπειδὴ τὰ ἴσα αὐτὰ κλάσματα ἔχουν παρονομαστὰς ἴσους, θὰ ἔχουν καὶ ἀριθμητὰς ἴσους, ἤτοι $2\times9=6\times3$. Ἄρα, ***«εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενων τῶν μέσων».***

§ **169.** Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{x}{5}=\frac{3}{7}$ μὲ ἄγνωστον τὸν x. Ἔχομεν $7.x=3.5$ καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ 7, λαμβάνομεν $x=\frac{3.5}{7}$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\frac{3}{4}=\frac{x}{5}$ εὑρίσκομεν $x=\frac{3.5}{4}$.

Πῶς εὑρίσκομεν ἕνα ἄκρον, ἢ ἕνα μέσον ὅρον ἀναλογίας ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων;

Ἀσκήσεις.

724—732. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος: 4 ὥρ. καὶ 45^{λ}· 180 χγ. καὶ 100 ὀκ.· τοῦ χγ. πρὸς τὴν ὀκᾶν· τῆς yd πρὸς τὸν πῆχυν· τοῦ μ^2 πρὸς τὸν τπχ²· τοῦ τπχ² πρὸς τὸ μ²· τῶν $\frac{3}{4}$ πήχ. καὶ 2 πηχ. 3 ρ.· τοῦ $\frac{2}{3}$ καὶ $3\frac{1}{5}$· τῶν ὑψῶν τοῦ Ὑμηττοῦ 1027μ. καὶ τῆς Πάρνηθος 1413μ.

733—739. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος εἰς τὰς ἀναλογίας

$x:5=7:1$· $x:9,3=6:7,5$· $3\frac{1}{4}:6=x:9$·

$x:1\frac{1}{2}=\frac{15}{7}:1\frac{1}{4}$· $100:8=x:7$· $28:x=3:5$· $7,5:4,7=2:x$.

740—742. Ἐλέγξατε, ἐὰν ἀποτελοῦν ἀναλογίαν οἱ $\frac{5}{4}$ καὶ $\frac{12,5}{10}$· οἱ 2,5:4 καὶ 4:8· οἱ 30:100 καὶ 4:20. Μεταβάλλατε ἐν ἀνάγκῃ ἕνα ὅρον ἐκ τῶν προηγουμένων ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀναλογία.

743. Εἰς ἀναλογίαν, ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄκρους ἢ τοὺς μέσους ὅρους, προκύπτει ἀναλογία. Διατί;

Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα.

§ 170. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα,** ἂν τὸ ἓν εἶνε συνάρτησις τοῦ ἄλλου, καὶ ὅταν, ἂν πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρῆται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μὲ τυχόντα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. τὸ βάρος ἐμπορεύματος καὶ ἡ τιμή του εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν π. χ. 3 ὀκ. σταφύλια τιμῶνται 24 δρ., αἱ 6 ὀκ θὰ τιμῶνται 48 δρ. καὶ οἱ λόγοι $\frac{3}{6}$ καὶ $\frac{24}{48}$ εἶνε ἴσοι. Ἤτοι $\frac{3}{6}=\frac{24}{48}$.

Ἄρα, ***«ἐὰν δύο ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν».***

§ 171. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀντίστροφα,** ἂν τὸ ἓν εἶνε συνάρτησις τοῦ ἄλλου, καὶ ἐάν, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μὲ τυχόντα ἀριθμόν, διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. ἂν μερικοὶ ἐργάται τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 10 ἡμ. π.χ., οἱ διπλάσιοι ἐργάται (μὲ τὰς αὐτὰς συνθήκας) τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν.

Ἂν ἕνας ἐξοδεύῃ 8 δρ. καθ' ἡμέραν καὶ περνᾷ μὲ ἕνα χρηματικὸν ποσὸν 30 ἡμ., ὅταν ἐξοδεύῃ 16 δρ., θὰ περάσῃ 15 ἡμ. καὶ οἱ λόγοι $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ κ αἱ $\frac{30}{15}=2$ εἶνε ἀντίστροφοι, ἤτοι ἔχομεν $\frac{16}{8}=\frac{30}{15}$. Ἄρα,

«ἂν δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς καὶ ὁ ἀντίστροφος λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ἀποτελοῦν ἀναλογίαν».

Ἀσκήσεις.

744. Εὕρετε ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἄλλα ἀντίστροφα.

745. Εὕρετε ποσά, τὰ ὁποῖα νὰ εἶνε τὸ ἓν συνάρτησις τοῦ ἄλλου, ἀλλὰ μόνον νὰ συναυξάνωνται, καὶ μόνον νὰ συνελαττοῦνται χωρὶς νὰ εἶνε ἀνάλογα.

Περὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

§ 172. *«Ἂν 8 ὀκ. μῆλα τιμῶνται 60 δρ., πόσον τιμῶνται 20 ὀκ.;»*

Ἂν λύσωμεν τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ἔχομεν:

8 ὀκ. τιμῶνται 60 δρ.
20 ὀκ. » x;

Ἀφοῦ αἱ 8 ὀκ τιμῶνται 60 δρ.

ἡ 1 ὀκ. » 60 δρ. $: 8 = \frac{60}{8}$ δρ.

20 ὀκ » $\frac{60}{8}$ δρ.$\times 20 = 150$ δρ.

Ἀλλ' εἰμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν λύσιν καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ποσὰ τῶν μήλων καὶ τῶν δραχμῶν εἶνε ἀνάλογα ἑπομένως οἱ λόγοι $\frac{8}{20}$ καὶ $\frac{60}{x}$ ἀποτελοῦν τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{20}=\frac{60}{x}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = \frac{60 \times 20}{8}$ δρ.$=150$ δρ.. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου x εὑρίσκεται συντόμως, ἐάν, μετὰ τὴν διάταξιν, ***πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν 60 ἐπὶ τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένον, ἤτοι ἐπὶ $\frac{20}{8}$, (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα).***

«Ἂν 16 ἐργάται τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 28 ἡμ., εἰς πόσας θὰ τὸ τελειώσουν 13 ἐργάται τῆς αὐτῆς ἱκανότητος;

Λύομεν αὐτὸ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ ἔχομεν:

16 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 28 ἡμ.
14 » » x;

Ἀφοῦ 16 ἐργ. τελ. εἰς 28 ἡμ.

1 » » » 28ἡμ $\times 16$

14 » » » $\frac{28\text{ἡμ} \times 16}{14} = 32$ ἡμ.

Ἀλλὰ καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν εἰμπορεῖ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

'Επειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἐργατῶν καὶ ἡμερῶν εἶνε ἀντίστροφα (διατί;), θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{16}{14}=\frac{x}{28}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\frac{16 \times 28}{14}$ ἡμ. = 32 ἡμ.. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x εὑρίσκομεν συντόμως, ἂν μετὰ τὴν διάταξιν, ***πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν 28 ἡμ. ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{16}{14}$ τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα).***

§ 173. Ὁ γενικὸς τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν προβλήματα ἑνὸς εἴδους λέγεται ***μέθοδος***.

'Επειδὴ εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ εἰς τὰ ὅμοιά των δίδονται οἱ τρεῖς ὅροι ἀναλογίας (ἢ τρεῖς ἀριθμοὶ) καὶ εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον, λέγονται προβλήματα τῆς ***ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν***. Ἤτοι,

«ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπ' αὐτὰ καὶ ζητεῖται ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ ἄλλου».

§ 174. Διὰ νὰ λύσωμεν πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν κάμνομεν τὴν διάταξιν αὐτοῦ, παριστάνοντες τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν μὲ τὸ x καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τούτου.

Πῶς εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου; (Συγκρίνατε τοὺς δύο προηγουμένους κανόνας).

Παρατηρήσεις 1. 'Εὰν κατὰ τὴν λύσιν ὑπάρχῃ σύνθετον κλάσμα, τὸ τρέπομεν εἰς ἁπλοῦν, ἢ εἰς δεκαδικόν, ἂν τρέπεται ἀκριβῶς.

2. Αἱ τιμαὶ κάθε ποσοῦ πρέπει νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν αὐτὴν μονάδα, π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα, ***«ὅταν ἕνα ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 5 ρ. ἀπαιτοῦνται 5 πηχ. 6 ρ. δι' ἕνα φόρεμα· πόσοι ἀπαιτοῦνται, ἂν ἔχῃ πλάτος 1 πηχ. 2 ρ.;»*** θὰ τρέψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ρούπια.

3. Μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν δὲν λύονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν ποσά, τοιαῦτα ὥστε, ὅταν αὐξάνεται τὸ ἕνα αὐξάνεται καὶ τὸ ἄλλο, χωρὶς νὰ εἶνε ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

746. *Ὁμὰς πρώτη.* Τὰ 7,2 μ. ὕφασμα τιμῶνται 23,40 δρ., πόσον τιμῶνται 2,4 μ.;

747. Αἱ 3,5 λίτραι κρασὶ τιμῶνται 28 δρ., πόσον τιμῶνται 15,5 λίτραι;

748. Μὲ 350 δρ. ἀγοράζομεν 4 yd 2 f ὕφασμα, πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1225 δρ.;

749. Ἂν 8,640 χγ. ἐμπόρευμα κοστίζουν 180 δρ., πόσον κοστίζουν αἱ 14 ὀκ.;

750. Ἂν 6 ὀκ 150 δρμ. ἐμπόρευμα κοστίζουν 163,20 δρ., πόσον κοστίζουν 13,375 χγ.;

751. Ἂν $7\frac{3}{8}$ πήχ. ὕφασμα κοστίζουν 295 δρ., πόσον κοστίζουν $12\frac{1}{2}$ πήχ.;

752. Συνθέσατε καὶ λύσατε μὲ δύο τρόπους τρία προβλήματα ὅμοια πρὸς τ' ἀνωτέρω.

753. Πόσα μέτρα εἶνε 665 yd, ὅταν τὰ 32 μ. λαμβάνωνται ἴσα μὲ 35 yd;

754. Ἂν διὰ τὰ $567\frac{1}{2}$ ἑλβετικὰ φρ. ἐπληρώθησαν 7235,65 δρ., πόσον κοστίζουν 1702,50 ἑλβ. φρ.;

755. Συνθέσατε καὶ λύσατε μὲ δύο τρόπους δύο προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω.

756. *Ὁμὰς δευτέρα.* Διὰ μεταφορὰν 5290 χγ. εἰς ἀπόστασιν 78 χλμ. ἐπληρώθη ἕνα ποσόν· πόσα χγ. εἰμποροῦμεν νὰ μεταφέρωμεν μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν εἰς ἀπόστασιν 115 χλμ.;

757. Ἂν μὲ μίαν ποσότητα μαλὶ ὑφαίνωνται 76,50 μ. ὕφασμα πλάτους $1\frac{1}{4}$ μ., πόσου μήκους ὕφασμα, πλάτους $1\frac{1}{2}$ μ. θὰ ὑφανθῇ μὲ τὸ αὐτὸ μαλί;

758. Μὲ τὸ κρασὶ ἑνὸς βαρελίου ἐγέμισαν 720 φιάλας μισῆς λίτρας. Πόσαι φιάλαι τῶν 0,75 λιτ. θὰ γεμίσουν;

759. Ἐὰν 18 ἐργάται τελειώσουν ἕνα ἔργον εἰς $10\frac{1}{2}$ ἡμ., πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται τὸ τελειώνουν εἰς 13,5 ἡμ.;

760. Συνθέσατε καὶ λύσατε (μὲ δύο τρόπους) τρία προβλήματα ὅμοια πρὸς τ' ἀνωτέρω.

761. 27 ἄτομα ἔχουν τροφὰς διὰ 4 μῆνας 25 ἡμ.· πόσον χρόνον θὰ περάσουν μὲ αὐτὰς 24 ἄτομα;

762. Ἐὰν 18 ἄνθρωποι ἔχουν τροφὰς διὰ 4 μην. 5 ἡμ., πόσοι ἄνθρωποι θὰ περάσουν μὲ αὐτὰς 1 μην. 15 ἡμ.;

763. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν (μὲ δύο τρόπους) δύο προβλήματα ὅμοια πρὸς τ' ἀνωτέρω.

764. 18 ἐργάται ἐργάζονται 8 ὥρ. καθ' ἡμ. καὶ τελειώνουν ἕνα ἔργον. Πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται, ἂν ἐργάζωνται 9 ὥρ. τὴν ἡμ. τὸ τελειώνουν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

765. Νὰ συντεθοῦν καὶ λυθοῦν (μὲ δύο τρόπους) τρία προβλήματα ὅμοια πρὸς τ' ἀνωτέρω.

Προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστῶν.

§ 175. Ὅταν λέγωμεν ὅτι, ***ὁ ἔμπορος πωλεῖ ἐμπόρευμα μὲ κέρ-8 τοῖς ἑκατὸν*** π.χ., ἐννοοῦμεν ὅτι, ὅταν ἐμπόρευμα τοῦ κοστίζῃ 100 δρ., τὸ πωλεῖ 108 δρ. μὲ τὸ κέρδος 8 δρ., τὰ δὲ ποσὰ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς καὶ τοῦ κέρδους εἶνε ἀνάλογα.

Μεταχειριζόμεθα τὴν ἔκφρασιν ***«τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χιλίοις»*** καὶ τὴν σημειώνομεν μὲ $^{0}/_{0}$ ἢ $^{0}/_{00}$, ὅταν ἔχωμεν ποσὰ ἀνάλογα (ἢ ἀντίστροφα) καὶ δίδεται πόσαι μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς 100 ἢ 1000 τοῦ ἄλλου.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι, ***ὁ τίτλος*** τοῦ ἀργύρου, χρυσοῦ εἶνε 850 χιλιοστὰ π.χ. ἐννοοῦμεν ὅτι, ἀπὸ χίλια χιλιοστὰ αὐτοῦ μόνον τὰ 850 εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, χρυσός,....

Ἐὰν δοθῇ τὸ τόσον $^{0}/_{0}$ ἢ $^{0}/_{00}$ καὶ εὕρωμεν πόσον (κέρδος, ζημία π.χ.) ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθὲν ποσόν, τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ λέγεται συνήθως ***ποσοστόν***, τὸ δὲ ποσὸν εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ποσοστὸν θὰ καλοῦμεν ***ἀρχικὴν τιμὴν*** ἢ ***ἀρχικὸν ποσόν.***

«Πόσον κερδίζει ἔμπορος ἀπὸ ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα τοῦ κοστίζουν 365 δρ. καὶ τὰ πωλεῖ μὲ κέρδος 8 $^{0}/_{0}$».

Λύομεν αὐτὸ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ἢ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς δίδει 8 δρ. κέρδος
365 » » x;

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα, ἔχομεν $x = 8\text{δρ.} \times \frac{365}{100} = 29{,}20$ δρ.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ποσοστὸν ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν ποσὸν καὶ τὸ τόσον τοῖς $^{0}/_{0}$;

176. ***«Πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη μὲ κέρδος 5 $^{0}/_{0}$, ἂν τὸ κέρδος εἶνε 41,10 δρ. ;»***

Λύομεν αὐτὸ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ἢ μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς :

100 δρ. τιμὴ ἀγορᾶς δίδει 5 δρ. κέρδος
x; » » 41,10 »

καὶ ἔχομεν $x = 100 δρ. \times \frac{41,10}{5} = 822$ δρ.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ἀπὸ τὸ ποσοστὸν καὶ τὸ τόσον τοῖς $^{0}/_{0}$;

177. ***«Πόσον ἐστοίχιζεν ἐμπόρευμα, ἂν ἐπωλήθη ἀντὶ 453,60 δρ. μὲ κέρδος 5 $^{0}/_{0}$;»***

Λέγομεν: ἐμπόρευμα 100 δρ. πωλεῖται 105 δρ.
x; » 453,60 δρ.

καὶ $x = 100 δρ. \times \frac{453,60}{105} = 432$ δρ. Ποῖον κανόνα συνάγετε ;

«Ἐμπόρευμα ἀξίας 5632,50 δρ. ἐπωλήθη μὲ κέρδος 450,60 δρ.· πόσον $^{0}/_{0}$ ὑπελογίσθη τὸ κέρδος ;»

Λέγομεν: ἐμπόρευμα 5632,50 δρ. ἔχει κέρδος 450,60 δρ.
» 100 δρ. » » x;

$$\text{καὶ } x = \frac{450,60 δρ. \times 100}{5632,50} = \frac{4506 \times 100}{56325} δρ. = 8 δρ.$$

Ποῖον κανόνα συνάγετε ;

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

766—767. Πόσον εἶνε τὸ ἀπόβαρον ἀπὸ ἐμπόρευμα μικτοῦ βάρους 4760 ὀκ. πρὸς 5 $^{0}/_{0}$; Εὕρετε τὸ 1 $^{0}/_{0}$ τοῦ 4760, ἔπειτα τὸ 5 $^{0}/_{0}$ καὶ ἐξηγήσατε πῶς εὑρίσκομεν τὸ 1 $^{0}/_{0}$ ἑνὸς ποσοῦ καὶ ἀπ' αὐτὸ οἱονδήποτε ποσοστόν του. Ὁμοίως τὸ 6 $^{0}/_{0}$ τῶν 9120 δρ.

768. Ἐφαρμόσατε τὸν προηγούμενον τρόπον εἰς δύο ἰδικά σας προβλήματα.

769. Οἰκία ἠγοράσθη 250000 δρ. καὶ ἐπληρώθη διὰ μεσιτίαν κλπ. 1,5 %. Πόσον ἐκόστισε τὸ ὅλον ;

770. Πῶς εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τὸ ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ τόσον τοῖς ἑκατόν; Εὕρετε αὐτὸ μὲ τρία παραδείγματα σας.

771. Τί ἐπληρώθη δι' ἐμπόρευμα 85740 δρ., ἂν ἐχορηγήθη ἔκπτωσις 4 %;

772. Σχηματίσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα μὲ ὑπερτίμησιν.

773. Πόσος εἶνε ὁ καθαρὸς ἄργυρος εἰς 717 χιλιόγρ. ἀργύρου, ὁ ὁποῖος ἔχει καθαρότητα 0,835 ;

774. Ἀποθηκεύθησαν 156500 ὀκ. σιτάρι. Πόσον θὰ παραδώσῃ ὁ ἀποθηκάριος μετὰ ἕνα χρονικὸν διάστημα, ἂν ἡ φύρα λογαριασθῇ πρὸς $\frac{3}{8}$ %;

775. Τί θὰ πληρωθῇ δι' ἀσφάλιστρον πρὸς $1\frac{1}{2}$ ‰ ἐπὶ £ 764—10 ;

776. Ἡ ἀμοιβή, τὴν ὁποίαν δικαιοῦται νὰ πάρῃ ὅποιος εὕρῃ χαμένα πράγματα, εἶνε κατὰ νόμον 10% ἐπὶ ἀξίας μέχρι 500 δρ.· 5% ἐπὶ τῆς ἄνω τῶν 500—1000 δρ. καὶ 2% ἐπὶ μεγαλυτέρας ἀξίας τούτου. Πόσας θὰ λάβῃ ὅποιος εὕρῃ 15000 δρ. ;

777. Ὑπάλληλος λιανικῆς πωλήσεως πέρνει ἐκτὸς τοῦ μισθοῦ του καὶ 2% ἐπὶ τῶν χονδρικῶν πωλήσεων, τὰς ὁποίας κάμνει αὐτός. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς ποσοστὰ 967 δρ. ;

778. Συνθέσατε καὶ λύσατε τέσσαρα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν ποσόν.

779. Ἠγοράσαμεν ἐμπορεύματα μὲ ἔκπτωσιν 4% καὶ ἐπληρώσαμεν 5376 δρ.· πόσον ἤξιζαν τὰ ἐμπορεύματα ;

780. Ἕνας καρπὸς χάνει κατὰ τὴν ἀποξήρανσιν 17,5 % τοῦ βάρους του. Ποῖον τὸ ἀρχικόν του βάρος, ἂν ζυγίζῃ 3580,5 ὀκ. ;

781. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοιον πρόβλημα.

782. Ἀπὸ μίαν ἐπαρχίαν ἐπιτρέπεται ἡ ἐξαγωγὴ ἐγχωρίου προϊόντος μετὰ παρακράτησιν δι' ἐπιτόπιον κατανάλωσιν 25%. Ποίαν ποσότητα πρέπει νὰ ἔχῃ διὰ νὰ ἐξαγάγῃ 37500 ὀκ. ;

783. Ἕνας παρήγγειλε 480 φιάλας κρασὶ καὶ τοῦ ἔστειλαν ἐπὶ πλέον ὡς δῶρον 36 φιάλας. Πόσον % ἔκπτωσις τοῦ ἔρχεται ;

4. Ἕνας κερδίζει 20% ἐπὶ τῶν εἰσπράξεών του. Πόσον % κερδίζει ἐπὶ τοῦ κόστους;

5. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ ἀνωτέρω.

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

178. *«Ἐργάτης ἐργάζεται 6 ὥρας καθ' ἡμ. καὶ ὑφαίνει 80 μ. ὕφασμα εἰς 25 ἡμ.· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ ὑφάνῃ 120 μ. εἰς 30 ἡμ.;»*

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ κάμνομεν τὴν διάταξιν παριστάνοντες τὸν ἄγνωστον μὲ x, καὶ γράφομεν:

ὕφασμα 80 μ. ὑφαίνει εἰς 25 ἡμ. ἂν ἐργάζεται 6 ὥρ. τὴν ἡμ.
» 120 » » 30 » » x;

Τοῦτο λύομεν ὡς ἑξῆς, χωρίζοντες αὐτὸ εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Πρῶτον θεωροῦμεν τὸ ποσὸν τῶν 25 ἡμ. ἀμετάβλητον καὶ λέγομεν:

ὕφασμα 80 μ. ὑφαίνει εἰς 25 ἡμ. ἂν ἐργάζεται 6 ὥρ. τὴν ἡμ.
» 120 » » » » » x;

Ἔχομεν δὲ $x = 6$ ὥρ. $\times \frac{120}{80}$, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν μέτρων καὶ τῶν ὡρῶν ἐργασίας καθ' ἡμέραν εἶνε ἀνάλογα.

Θεωροῦμεν τώρα τὸ ποσὸν τῶν 120 μ. ἀμετάβλητον καὶ λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Λέγομεν:

120 μ. ὑφαίνει εἰς 25 ἡμ. ἂν ἐργάζεται 6ὥρ.$\times \frac{120}{80}$ τὴν ἡμ.
» » » 30 » » x;

Ἔχομεν $x = 6$ ὥρ. $\times \frac{120}{80} \times \frac{25}{30}$, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν εἰς τὰς ὁποίας θὰ ὑφάνῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν μέτρων καὶ τῶν ὡρῶν ἐργασίας καθ' ἡμέραν εἶνε ἀντίστροφα.

Συνήθως λύομεν τὰ προβλήματα συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

Λέγομεν $x = 6$ ὥρ. $\times$, συγκρίνομεν τὰ ποσὰ τοῦ μήκους καὶ τῶν ὡρῶν: ἀφοῦ τὰ 80 μ. ὑφαίνει, ὅταν ἐργάζεται 6 ὥρ. τὴν ἡμ., τὰ διπλάσια μέτρα θὰ ὑφάνῃ, ἂν ἐργάζεται διπλασίας ὥρας: τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα καὶ ἔχομεν $x = 6$ ὥρ. $\times \frac{120}{80} \times$·

συγκρίνομεν τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ ὡρῶν· ἀφοῦ, ὅταν ἐκτελῇ τὸ ἔργον εἰς 25 ἡμ., ἐργάζεται 6 ὥρ. τὴν ἡμ., ὅταν τὸ ἐκτελῇ εἰς διπλασίας ἡμ., θὰ ἐργάζεται τὸ ἥμισυ τῶν ὡρῶν καθ' ἡμέραν· τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα καὶ γράφομεν

$$x = 6 \text{ ὥρ.} \times \frac{120}{80} \times \frac{25}{30} = 7\frac{1}{2} \text{ ὥρ.}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ τὰ ὅμοια δίδονται αἱ τιμαὶ περισσοτέρων τῶν δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων, ζητεῖται δὲ ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπ' αὐτά, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς νέας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν. Τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγονται τῆς ***συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν***, ἐπειδὴ ἡ λύσις των ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν 6 ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον λόγον τοῦ $\frac{80}{120}$, καὶ ἐπὶ τὸν $\frac{25}{30}$, τοὺς ὁποίους ἀποτελοῦν αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἄλλων ποσῶν. Ἐκ τῶν ποσῶν αὐτῶν τὸ μὲν α' εἶνε ἀνάλογον, τὸ δὲ β' ἀντίστροφον πρὸς τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν.

Λύσατε τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

Διατυπώσατε τὸν κανόνα κατὰ τὸν ὁποῖον λύομεν πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

786. 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. τὴν ἡμ. λαμβάνουν 4116 δρ. εἰς 16 ἡμ.· πόσας δρ. θὰ λάβουν 18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. τὴν ἡμ. ἐπὶ 17 ἡμ. ;

787. Ἐὰν 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. τὴν ἡμ. σκάπτουν τάφρον μήκους 120 μ. εἰς 12 ἡμ., εἰς πόσας ἡμ. 36 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρ. καθ' ἡμ. θὰ σκάψουν τάφρον μήκους 280 μ. ;

788. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ ἀνωτέρω.

789. Λύσατε τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, χωρίζοντες αὐτὰ εἰς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καθὼς καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

790. Τάφρος μήκους 15,25 μ. πλάτους 1,5 μ. καὶ βάθους 0,8 μ.

στοιχίζει 518,40 δρ.· πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ τάφρος πλάτους 2 μ. καὶ βάθους 0,75 μ., ἡ ὁποία στοιχίζει 1036,80 δρ. ;

1. Ἕνα βιβλίον, τοῦ ὁποίου κάθε σελὶς ἔχει 40 στίχους καὶ κάθε στίχος 63 γράμματα, ἀποτελεῖται ἀπὸ 15 τυπογραφ. φύλλα· πόσα τυπογραφ. φύλλα θὰ γίνῃ, ἂν κάθε σελὶς ἔχῃ 45 στίχους καὶ κάθε στίχος 60 γράμματα ;

2. Διὰ τὴν κατασκευὴν δρόμου 50000 μ. μήκους, 6 μ. πλάτους, εἰργάσθησαν 800 ἐργάται ἐπὶ 60 ἡμέρας 10 ὥρ. καθ' ἡμ. Πόσοι τοιοῦτοι ἐργάται θὰ κατασκευάσουν δρόμον 6 χμ. πλάτους 5,4 μ., εἰς 58 ἡμ., ἂν ἐργάζωνται 9 ὥρ. καθ' ἡμέραν μὲ τὰς αὐτὰς συνθήκας ;

3. Ἐὰν μία δεσμίδα χάρτου (δηλαδὴ 500 φύλλα) 78×98 (διαστάσεων 0,78μ. καὶ 0,98μ.) ἔχῃ βάρος 21 κιλῶν, ποῖον βάρος ἔχει μία δεσμίδα χάρτου 70×91 τῆς αὐτῆς ποιότητος ;

4. 8 ἐργάται θὰ ἐκτελέσουν ἕνα ἔργον εἰς 27 ἡμ., ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 7 ἡμ. ἀπεχώρησαν 2 ἐργάται, οἱ δὲ ὑπόλοιποι εἰργάζοντο 1 ὥρ. ἐπὶ πλέον καθ' ἡμέραν. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον ;

Περὶ τόκου.

179. ***Τόκος*** λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει αὐτός, ὁ ὁποῖος δανείζει χρήματα.

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων (συνήθως 100 δρ.) εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (συνήθως εἰς ἓν ἔτος)· αὐτὸ λέγεται καὶ τόσον %.

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον δανείζονται.

Χρόνος καλεῖται ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου.

Ὁ τόκος λέγεται καὶ ***ἁπλοῦς*** μέν, ἂν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ***σύνθετος*** δὲ ἢ ***ἀνατοκισμός***, ἂν εἰς τὸ τέλος κάθε χρονικῆς μονάδος ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ δίδει τόκον εἰς τὰς ἑπομένας χρονικὰς μονάδας. Τότε λέγομεν καὶ ὅτι οἱ τόκοι ***κεφαλαιοποιοῦνται*** ἢ ὅτι τὸ κεφάλαιον ***ἀνατοκίζεται***.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ τόκου παρουσιάζονται ὡς ποσὰ ***τὸ κεφάλαιον, ὁ τόκος, τὸ ἐπιτόκιον*** καὶ ***ὁ χρόνος***, παριστάνομεν δ' αὐτὰ μὲ Κ,Τ,Ε,Χ. Εἰς κάθε πρόβλημα τόκου δίδονται συνήθως τρία ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ καὶ ζητεῖται τὸ τέταρ-

τον. Οὕτω ἔχομεν προβλήματα ἁπλοῦ τόκου τεσσάρων εἰδῶν.
Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς καθὲν τῶν τριῶν ἄλλων Κ, Ε, Χ. Π.χ. ἐὰν ἕνα κεφάλαιον δίδῃ κάποιον τόκον, τὸ διπλάσιον κλπ. κεφάλαιον θὰ δώσῃ διπλάσιον κλπ. τόκον (εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον).

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα· διότι, ἐὰν ἕνα κεφάλαιον δίδῃ κάποιον τόκον πρὸς ἕνα ἐπιτόκιον, διπλάσιον κλπ. κεφάλαιον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸ ἥμισυ κλπ. τοῦ χρόνου.

Ἐπίσης τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ἀντίστροφα. Διότι, ἂν ἕνα κεφάλαιον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον δίδῃ κάποιον τόκον, τὸ διπλάσιον κλπ. κεφάλαιον θὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν τόκον πρὸς τὸ ἥμισυ κλπ. ἐπιτόκιον (εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον).

Ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα. Διατί;

Εὕρεσις τοῦ τόκου.

§ 180. ***«Πόσον τόκον φέρουν 3524 δρ. εἰς 7 ἔτη πρὸς 5%;»***

Λέγομεν 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρουν 5 δρ. τόκ.
3524 » » 7 » x; »

καὶ $x = 5 \text{δρ.} \times \frac{3524 \times 7}{100 \times 1} = 1233{,}40$ δρ.

«Πόσον τόκον φέρουν 3250 δρ. πρὸς 3% εἰς 2 ἔτ. καὶ 6 μῆν.;»

Ἐπειδὴ 2 ἔτ 6 μην. $= 30$ μην. $= \frac{30}{12}$ ἔτ.

λέγομεν: 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρουν 3 δρ. τόκ.
3250 » » » $\frac{30}{12}$ x;

$$x = 3 \text{ δρ.} \times \frac{3250}{100} \times \frac{30}{12} = 243{,}75 \text{ δρ.}$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100».

Οὕτω ἔχομεν τὸν τύπον $T = \frac{K \times E \times X}{100}$ (1), εἰς τὸν ὁποῖον θὰ ἀντικαθιστῶμεν τὰ Κ, Ε, Χ μὲ τὰς τιμάς των, τοῦ χρόνου ἐκφραζομένου εἰς ἔτη.

Ἐὰν ὁ χρόνος εἶνε Μ μῆνες, θὰ ἔχωμεν $X=\frac{M}{12}$ τοῦ ἔτους καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται $T=\frac{K\times E\times M}{1200}$ (2).

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν τόκον, ὅταν δίδεται τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος εἰς μῆνας;

Ἐὰν ὁ χρόνος εἶνε Η ἡμέραι, θὰ ἔχωμεν $X=\frac{H}{360}$ (ἂν τὸ ἔτος λογαριάζεται μὲ 360 ἡμ.), ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ Χ μὲ τὸ $\frac{H}{360}$ εἰς τὴν (1), λαμβάνομεν $T=\frac{K\times E\times H}{36000}$ (3).

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν τόκον, ὅταν δίδεται τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας;

§ 181. Ἂν διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ (3) διὰ τοῦ Ε λαμβάνομεν

$$T=\frac{K\times H}{\frac{36000}{E}} \text{ ἢ } =\frac{K\times H}{\Delta}, \text{ ἐὰν τεθῇ } \frac{36000}{E}=\Delta.$$

Τὸ Κ×Η λέγεται ***τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου***, τὸ δὲ Δ ***σταθερὸς διαιρέτης*** τοῦ ἐπιτοκίου. Ἐπομένως, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον δι' ὡρισμένον ἀριθμὸν ἡμερῶν, διαιροῦμεν τὸν τ·κάριθμον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἐπικίου»***.

Π χ. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸν τόκον 4800 δρ. εἰς 2 μην. καὶ 15 ἡμ. πρὸς 8%, ἐπειδὴ εἶνε 2 μην. 15 ἡμ.=75 ἡμ., ἔχομεν

$$T=\frac{4800\times 75}{4500}=80 \text{ δρ., διότι } \Delta=36000:8=4500.$$

Σημείωσις. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, ἂν τὸ κεφάλαιον ἔχῃ καὶ λεπτά, τὰ παραλείπομεν συνήθως, καὶ αὐξάνομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του κατὰ 1, ἂν τὰ παραλειπόμενα λεπτὰ εἶνε 50 ἢ περισσότερα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

795. ***Ὁμὰς πρώτη***. (Αἱ πράξεις νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης). Πόσον τόκον φέρουν 1000 δρ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 3·4·5·6· 6, 5 %;

795'. Σχηματίσατε καὶ λύσατε τέσσαρα ὅμοια προβλήματα.

796. Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 7 °/₀ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον 70 δρ. ;
797. Σχηματίσατε καὶ λύσατε δύο ὅμοια προβλήματα.
798. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1000 δρ. πρὸς 6 °/₀ φέρει τόκον 120 δρ. ;
799. Σχηματίσατε καὶ λύσατε δύο ὅμοια προβλήματα.
800. Πρὸς πόσον °/₀ εἰς ἕνα ἔτος 1000 δρ. φέρουν τόκον 80 δρ. ;
801. Σχηματίσατε καὶ λύσατε δύο ὅμοια προβλήματα.
802. *Ὁμὰς δευτέρα.* Ποῖον εἶνε τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα ἱδρύματος, τὸ ὁποῖον ἔχει 5000000 δρ. τοποθετημένας εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 4 °/₀ ;
803. Νὰ εὑρεθῇ μὲ τοκαρίθμους πρὸς 6 °/₀ ὁ ὁλικὸς τόκος 3000 δρ. εἰς 45 ἡμ · 5000 δρ. εἰς 62 ἡμ. καὶ 7000 δρ. εἰς 17 ἡμ.
804. Ἕνας ὤφειλε νὰ πληρώσῃ πρὸ 4 ἔτ. 2 μην. 1250 δρ.· πόσα θὰ πληρώσῃ σήμερον, ἐὰν τοῦ λογαριασθῇ τόκος πρὸς 2,40 °/₀ ;
805. Πόσος εἶνε ὁ τόκος 2184 δρ. πρὸς 3,75 °/₀ ἀπὸ 1/V—15/VII τοῦ αὐτοῦ ἔτους καὶ ποῖον ποσὸν θὰ πληρωθῇ τὸ ὅλον ;
806. Σχηματίσατε καὶ λύσατε τρία προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ προηγούμενα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος.

Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου.

§ 182. *«Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4 °/₀ ἐπὶ 6 ἔτη φέρει τόκον 204 δρ. ;»*

Λέγομεν: 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρει 4 δρ. τοκ.
x; » » 6 » » 204 δρ. »

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ἀντίστροφα, τὸ δὲ κεφάλαιον καὶ τόκος ἀνάλογα, ἔχομεν: $x=\frac{100\text{δρ.}\times 204}{4\times 6}=850\text{δρ.}$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ K,E,T,X, τὸ κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, τόκον καὶ χρόνον εἰς ἔτη, ἔχομεν : $K=\frac{T\times 100}{E\times X}$ καὶ ἐκφράζει κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα ποσά. Διατυπώσατε τὸν κανόνα αὐτόν.

§ 183. *«Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 800 δρ. τοκιζόμενον πρὸς 5 °/₀ φέρει τόκον 120 δρ. ;»*

Λέγομεν: 100 δρ. κεφ. εἰς 1 ἔτ. φέρει τόκ. 5 δρ.
800 δρ. » » x; 120 δρ.

καὶ $x = 1 \text{ ἔτ.} \times \frac{100}{800} \times \frac{120}{5} = 3 \text{ ἔτ.}$

Ἂν χρησιμοποιήσωμεν τὰ Κ,Ε,Τ,Χ (εἰς ἔτη) θὰ ἔχωμεν $X = \frac{T \times 100}{K \times E}$ καὶ ἐκφράζει κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), ὅταν δοθοῦν τὰ ἄλλα ποσά. Διατυπώσατε τὸν κανόνα αὐτόν.

184. ***«Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη κεφάλαιον 455 δρ., τὸ ὁποῖον εἰς 3 ἔτη ἔφερε τόκον 54,6 δρ.;»***

Λέγομεν: κεφ. 455 δρ. εἰς 3 ἔτ. φέρει τοκ. 54,6 δρ.
» 100 δρ. » 1 » » x;

καὶ $x = 54{,}6 \text{ δρ} \times \frac{100}{455} \times \frac{1}{3} = 4 \text{ δρ.}$

Ἂν χρησιμοποιήσωμεν τὰ Κ,Ε,Τ,Χ (εἰς ἔτη), ἔχομεν $E = \frac{T \times 100}{K \times X}$ καὶ ἐκφράζει τὸν κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα ποσά. Διατυπώσατε τὸν κανόνα αὐτόν.

§ 185. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου, κεφαλαίου, χρόνου καὶ ἐπιτοκίου ἔχομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα ποσὰ καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα ποσά, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν (τοῦ χρόνου ἐκφραζομένου εἰς ἔτη)».

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

807. Πόσον κεφάλαιον πρὸς 5,5°/₀ εἰς 2 ἔτ. 3 μην. 10 ἡμ. φέρει τόκον 7667 δρ.;

808. Ἕνας ἐξοδεύει διὰ καπνὸν 12,50 δρ. καθ' ἡμέραν. Τίνος κεφαλαίου εἶνε αὐτὰ τόκος πρὸς 5°/₀;

809. Ποῖον κεφάλαιον φέρει εἰς 5 ἔτη πρὸς 4,5°/₀ τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 4812 δρ. πρὸς 5°/₀ εἰς 6 ἔτη;

810. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία διάφορα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

811. Κεφάλαιον 4200 δρ. τοκισθὲν πρὸς 3,5°/₀ ἔγινε μὲ τὸν τόκον του 4273,50 δρ.· ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτοκίσθη;

812—814. Πόσον χρόνον κεφάλαιον 1000 δρ. μένον τοκισμένον πρὸς 3°/₀, 4°/₀, 5°/₀ γίνεται μὲ τὸν τόκον του διπλάσιον ; Πότε θὰ συμβῇ αὐτό, ἂν τὸ κεφάλαιον εἶνε οἱονδήποτε ;

815. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 4250 δρ. φέρει πρὸς 6°/₀ τὸν αὐτὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρουν 3825 δρ. πρὸς 5°/₀ εἰς 4 ἔτη ;

816. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία διάφορα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος.

817. Κεφάλαιον 7000 δρ. ηὐξήθη εἰς 5 μην. καὶ ἔγινεν 7175 δρ.· πρὸς πόσον °/₀ ἐτοκίσθη ;

818—820. Πρὸς πόσον °/₀ πρέπει νὰ τοκισθοῦν 1000 δρ., ὥστε μὲ τοὺς τόκους των εἰς 5 ἔτ., εἰς 10 ἔτ., εἰς 50 ἔτ., νὰ διπλασιασθοῦν;

821. Ἕνας ἔχει δύο κεφάλαια 4200 δρ. καὶ 4800 δρ.· τὸ α′ εἶνε τοκισμένον πρὸς 6°/₀· πρὸς πόσον °/₀ πρέπει νὰ τοκισθῇ τὸ β′ διὰ νὰ δίδῃ ἐτήσιον τόκον ὅσον δίδει καὶ τὸ πρῶτον ;

822. Οἰκία ἀξίας 150 000 δρ. εἶνε βαρυμένη μὲ ἐνυπόθηκον χρέος 45000 δρ. πρὸς 6 °/₀· τὸ ἐτήσιον ἀκαθόριστον εἰσόδημά του εἶνε 11975 δρ. καὶ ἀπαιτοῦνται δι' ἐπισκευὰς ἐτησίως 1125 δρ., διὰ ἄλλα δὲ ἔξοδα 1850 δρ.· πρὸς πόσον °/₀ εἶνε τοποθετημένον τὸ κεφάλαιον ;

823. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία διάφορα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιον.

§ 186. ***«Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5 °/₀ ἐπὶ 3 ἔτη γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 604,90 ;»***

Λέγομεν:	100 δρ.	κεφ.	γίνεται	115 δρ.	μὲ	τὸν	τόκον του
»	x;	»	»	604,90 δρ.	»	»	»

$$\text{καὶ } x = 100\text{δρ.} \times \frac{604,90}{115} = 526 \text{ δρ.}$$

§ 187. ***Ἔντοκα γραμμάτια.*** Ἐνίοτε τὸ Κράτος δανείζεται ἀπὸ τὸ κοινὸν δίδον εἰς τὸν δανειστὴν ***ἔντοκον γραμμάτιον,*** δηλαδὴ ἔγγραφον βεβαίωσιν τῆς ὀφειλῆς του διὰ ποσὸν ἴσον μὲ τὸ δανεισθὲν ηὐξημένον κατὰ τὸν τόκον του δι' ὡρισμένον χρόνον.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

824. Ἕνας ὀφείλει νὰ πληρώσῃ πρὸς 5°/₀ μετὰ 3 ἔτη διὰ τόκον καὶ κεφάλαιον 416,40 δρ.· πόσον θὰ πληρώσῃ σήμερον

825. Ἕνα κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 2 ἔτ. καὶ 3 μην. πρὸς 8 °/₀

καὶ ἔγινε 2950 δρ. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσος ὁ τόκος;

826. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τ' ἀνωτέρω.

827. Ἂν εἰς ἔντοκον γραμμάτιον ἑνὸς ἔτους ἀναγράφεται ποσὸν 1000 δρ., ποῖον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσὸν πρὸς 6 %;

828—830. Ποῖον ποσὸν θὰ καταβάλωμεν σήμερον διὰ νὰ λάβωμεν τρίμηνον γραμμάτιον 1000 δρ., 2500 δρ., 7450 δρ., πρὸς 5 %;

831. Ἕνα ἵδρυμα ἔχει 1000000 δρ. καὶ θέλει νὰ τὰς διαθέσῃ πρὸς ἀγορὰν 50 ἐντόκων ἐτησίων γραμματίων. Ποῖον ποσὸν θὰ φέρουν τὰ γραμμάτια πρὸς 6 %;

832—833. Συνθέσατε καὶ λύσατε προβλήματα καθὼς τὰ ἀνωτέρω μὲ ἔντοκα γραμμάτια ἑξάμηνα καὶ τρίμηνα μὲ ἐπιτόκια 5,5%, 5%.

Περὶ Ὑφαιρέσεως.

§ 188. Ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος δίδει εἰς ἄλλον χρήματα ἢ ἐμπορεύματα μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ τὰ πληρώσῃ μετὰ ὡρισμένον χρόνον λαμβάνει συνήθως ἀπ' αὐτὸν ἔγγραφον, μὲ τὸ ὁποῖον ἐνυπογράφως ὑπόσχεται, ὅτι θὰ πληρώσῃ κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τοῦ δανείου τὸ ἐν λόγῳ ποσὸν καὶ τὸν τόκον του. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ λέγεται ἐν γένει ***γραμμάτιον*** ἢ ***συναλλαγματική***. Τὸ ποσὸν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον λέγεται ***ὀνομαστικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου, ἡ δὲ ἐποχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ πληρωθῇ ἓν γραμμάτιον καλεῖται ***λῆξις τοῦ γραμματίου.***

Ἐὰν ὁ κάτοχος (κομιστὴς) γραμματίου τὸ πωλήσῃ πρὸ τῆς λήξεώς του εἰς ἄλλον, ὁ ὁποῖος λέγομεν ὅτι ***προεξοφλεῖ*** τὸ γραμμάτιον πληρώνεται ποσὸν μικρότερον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας. Τὸ μὲν ποσόν, κατὰ τὸ ὁποῖον ἐλαττώνεται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὅταν προεξοφλῆται, λέγεται ***ὑφαίρεσις***, ἐκεῖνο δὲ μὲ τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον, λέγεται ***παροῦσα*** ἀξία αὐτοῦ. ***Ἡ παροῦσα ἀξία*** διαφέρει ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τὴν ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν πωλεῖται τὸ γραμμάτιον μέχρι τῆς λήξεώς του, καλεῖται ***χρόνος προεξοφλήσεως*** τοῦ γραμματίου.

Ἔχομεν δύο εἰδῶν ὑφαιρέσεις τὴν ***ἐξωτερικὴν*** καὶ ***ἐσωτερικήν***.

§ 189. ***Τύπος γραμματίου καὶ συναλλαγματικῆς.***

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10ῃ Ἰουλίου 1928.

Διὰ δρχ. 1000

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Γ. Βούρβουλη τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν χιλίων (1000), ἀξίαν ληφθεῖσαν τοῖς μετρητοῖς (ἢ εἰς ἐμπορεύματα).

Πρόθυμος

Π. Ἀργυρός.

Ἐν Πειραιεῖ τῇ 10ῃ Μαΐου 1930.

Διὰ δρχ. 1000.

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης μου συναλλαγματικῆς εἰς διαταγὴν τῆς ἐν Ἀθήναις Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος τὰς ἄνω δραχμὰς χιλίας (1000), ἃς παρ' ἐμοῦ ἐλάβατε εἰς μετρητὰ (ἢ εἰς ἐμπορεύματα).

Πρὸς τὸν κ. Γ. Βασιλείου (Ἀθήνας)

Δεκτή, *Γ. Βασιλείου*

Ἐπιταγὴ** ἢ **τσὲκ λέγεται ἔγγραφον, μὲ τὸ ὁποῖον δίδεται ἐντολὴ εἰς ὡρισμένον πρόσωπον ἢ ἵδρυμα νὰ πληρώσῃ ὡρισμένον χρηματικὸν ποσὸν καὶ ὡρισμένην ἡμέραν.

Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

§ 190. ***Ἡ ἐξωτερικὴ*** ὑφαίρεσις ἢ ἁπλῶς ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Εἰς τὰ προβλήματα αὐτῆς παρεμβαίνουν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ὑφαίρεσις καὶ δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, παρὰ μόνον ὅτι, ***ὡς κεφάλαιον λαμβάνεται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ὡς τόκος δὲ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.***

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

834. Μὲ τί ποσὸν καὶ μὲ πόσην ὑφαίρεσιν προεξωφλήθη συναλλαγματικὴ 2700 δρ. πρὸς 5,5% καὶ 64 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς της;

835. Νὰ εὑρεθῇ (μὲ τοκαρίθμους), πόση εἶνε ἡ ὑφαίρεσις γραμ. 7000 δρ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6%.

836. Συνθέσατε καὶ λύσατε ὅμοια προβλήματα μὲ τὰ προηγούμενα.

837. Ποία ἡ παροῦσα ἀξία συναλλαγματικῆς 6000 δρ. τὴν 5/VII λήξεως 11/VIII πρὸς 8%;

838. Ποία ἡ παροῦσα ἀξία συναλ. £144—12—9, ἡ ὁποία προεξωφλήθη 10 μην. πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς 10%;

839. Ποῖον γραμμάτιον προεξωφλήθη 48 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% μὲ ὑφαίρεσιν 56 δρ.;

340. Πρὸς πόσον $^{\circ}/_{\circ}$ προεξωφλήθη 1000 δρ. συναλλ. 2 μην. καὶ 12 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς της ἀντὶ 985 δρ.;

341. Πόσας ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη γραμμάτιον 3000 δρ. πρὸς 6$^{\circ}/_{\circ}$ μὲ ὑφαίρεσιν 30 δρ.;

342. Συνθέσατε καὶ λύσατε ἀνὰ ἕνα πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται ἡ ὑφαίρεσις καὶ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία.

§ 191. *«Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον ἐξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8$^{\circ}/_{\circ}$ ἀντὶ 490 δρ.;»*

Ἐπειδὴ 100 δρ. εἰς 3 μην. φέρουν τόκον 2 δρ.,

λέγομεν: 100 δρ. ὀνομ. ἀξία ἔχουν 98 δρ. παροῦσαν

x; » » 490 »

$$x = \frac{100\text{δρ.} \times 490}{98} = 500 \text{ δρ.}$$ Ἄρα, ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε 10 δρ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρὸς λύσιν.

343. Ποῖον γραμμάτιον προεξωφλήθη 37 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4,5$^{\circ}/_{\circ}$ ἀντὶ 1990,70 δρ.;

344. Ἐὰν ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρας καὶ ὁ σταθερὸς διαιρέτης εἶνε εὔχρηστος, προτιμῶμεν ὡς βοηθητικὴν ὀνομαστικὴ ἀξίαν ἀντὶ τῶν 100 δρ. τὸν σταθερὸν διαιρέτην. Διατί; Ἐφαρμόσατε αὐτὸ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα καὶ εἰς ἄλλο, τὸ ὁποῖον θὰ συνθέσετε καταλλήλως.

345. Γραμμάτιον 9000 δρ. λήγει τὴν 20/VIII. Ὁ ὀφειλέτης τὸ ἀνανεώνει μὲ ἄλλο, τὸ ὁποῖον λήγει τὴν 10/X. Πόση θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία πρὸς 10$^{\circ}/_{\circ}$;

346. Συνθέσατε καὶ λύσατε δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τὰ ἀνωτέρω.

Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

§ 192. *Ἐσωτερικὴ* ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸν χρόνον, ὁ ὁποῖος μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν προεξόφλησιν ἕως τὴν λῆξιν του.

«Γραμμάτιον 416,30 δρ. προεξοφλεῖται 3 ἔτη πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5$^{\circ}/_{\circ}$· πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;»

Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τοῦ γραμματίου ἰσοῦται μὲ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν του. Ὁ τόκος τῶν 100 δρ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 5$^{\circ}/_{\circ}$ εἶνε 15 δρ.

Ἄρα, ἂν γραμμάτιον 115 δρ. προεξοφληθῇ 3 ἔτη πρὸ τῆς λήξεώς του, θὰ ἔχῃ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 15 δρ. Λέγομεν λοιπόν:

115 δρ. ὀν. ἀξία ἔχει ὑφ. ἐσ. 15 δρ.
416,30 δρ. » » x;

$$x = 15\ \delta\varrho. \times \frac{416,30}{115} = 54,30\ \delta\varrho.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν λύομεν ὅμοιον πρόβλημα (ποῖον ;), ἢ τὴν εὑρεθεῖσαν ὑφαίρεσιν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν, ὅτε 416,30δρ.—54,30δρ.=362 δρ.

Τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα παρεμβαίνουν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰ τοῦ τόκου, παρὰ μόνον ὅτι, ***ὡς κεφάλαιον λαμβάνεται ἡ παροῦσα ἀξία καὶ ὡς τόκος ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου.***

§ 193. *Παρατήρησις.* Ἀπὸ τὰς δύο ὑφαιρέσεις ἡ ἐξωτερικὴ εἶνε ἄδικος καὶ πρὸς ὄφελος αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος προεξοφλεῖ. Διότι κρατεῖ τὸν τόκον ὄχι τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πληρώνει καθὼς εἰς τὴν ἐσωτερικήν, ἀλλὰ ὁλοκλήρου τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας. Ἐν τούτοις ἐφαρμόζεται ἡ ἐξωτερική, διότι α΄) ὑπολογίζεται εὐκολώτερον, β΄) ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε μικρὰ (διὰ 3 μῆνας συνήθως), γ΄) ἐπειδὴ τὰς προεξοφλήσεις κάμνουν συνήθως αἱ Τράπεζαι καὶ ἔχουν συμφέρον νὰ τὴν ἐφαρμόζουν.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

847. Μὲ τί ποσὸν προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς γραμμάτιον 12156 δρ. 78 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 %;

848. Ποῖον γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς 45 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4 % ἀντὶ 4000 δρ. ;

849. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη πρὸς 6 % ἐσωτερικῶς γραμμάτιον 404 δρ. μὲ ὑφαίρεσιν 4 δρ. ;

850. Πρὸς πόσον % προεξωφλήθη γραμ. 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 1500 δρ. μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτ. 22,50 δρ. ;

851. Εὕρετε τὴν ἐξωτ. καὶ ἐσωτ. ὑφαίρεσιν γραμμ. 510 δρ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 %. Επαληθεύσατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὑφαιρέσεων εἶνε ὁ τόκος τῆς ἐσωτερι-

κῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπιτόκιον εἰς τὸν χρόνον τὸν μεταξὺ προεξοφλήσεως καὶ λήξεως.

52. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐσωτ. καὶ ἐξωτ. ὑφαιρέσεως γραμματίου, προεξοφληθέντος πρὸς 8 °/₀ 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του εἶνε 2,20 δρ. Εὕρετε τὰς δύο ὑφαιρέσεις του καὶ τὰς παρούσας ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ κάθε ὑφαίρεσιν.

53. Ποία ἐκ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶνε μεγαλυτέρα, διατί, καὶ πόσον;

54. Ποῖον γραμμ. προεξωφλήθη 3 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4 °/₀ ἀντὶ 980,40 μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτ.; Εὕρετε τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν καὶ τὴν ὀνομαστ. ἀξίαν τοῦ γραμμ. δι' αὐτήν.

Περὶ κοινῆς λήξεως γραμματίων.

194. Δύο γραμμάτια λέγονται ***ἰσοδύναμα*** εἰς ὡρισμένην χρονικὴν στιγμήν, ἂν ἔχουν ἴσας παρούσας ἀξίας, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται μὲ τὸ αὐτὸ εἶδος ὑφαιρέσεως.

«Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 75 ἡμ. καὶ εἶνε ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο 3000 δρ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 27 ἡμ. πρὸς 6 °/₀;»

Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν 3000 δρ. ἤτοι 2986,50 δρ. Τόση θὰ εἶνε καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 75 ἡμ. πρὸς 6 °/₀. Ἐπειδὴ ὁ τόκος 100 δρ., εἰς 75 ἡμ. πρὸς 6 °/₀ εἶνε 1,25 δρ., γραμμάτιον 100 δρ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 75 ἡμ., ἔχει παροῦσαν ἀξίαν 98,75 δρ. Ἄρα, ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία εἶνε $\frac{100\text{δρ.}\times 2986{,}50}{98{,}75}=3024{,}30$ δρ.

195. Ἐνίοτε ἀντικαθιστῶμεν δύο ἢ περισσότερα γραμμάτια μὲ ἄλλο ἰσοδύναμόν των, χωρὶς νὰ προκύπτῃ κέρδος ἢ ζημία εἰς τοὺς ἐνδιαφερομένους.

Καλοῦμεν ***κοινὴν λῆξιν*** γραμματίων τὴν λῆξιν τοῦ γραμ., τὸ ὁποῖον εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὰ γραμ., τὰ ὁποῖα ἀντικαθιστᾷ.

«Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 63 ἡμ. καὶ θὰ ἀντικαταστήσῃ τρία ἄλλα, 900 δρ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 40 ἡμ., 1340 δρ. μετὰ 55 ἡμ., 2120 δρ. μετὰ 98 ἡμ. πρὸς 4 °/₀;».

Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν γραμματίων, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε παροῦσα ἀξία τοῦ νέου, εὑρίσκομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν. Τὸν ὑπολογισμὸν κάμνομεν καὶ μὲ τοκαρίθμους ὡς κατωτέρω :

	ποσὰ	ἡμέραι	τοκάριθμοι
	900 δρ.	40	36000
	1340 »	55	73700
	2120 »	98	207760
ἄθροισμα	4360,00 δρ.	ἄθρ.	317460 : 9000=35,27
	—35,27 δρ. ἔξωτ. ὑφαίρ.		
	ὑπόλ. 4324,73 παροῦσα ἀξία		

Τόση θὰ εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου γραμματίου πρὸς τὰ δοθέντα καὶ εὑρίσκομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν του 4355,22 δρ. (περιοριζόμεθα δὲ εἰς τὸν καλούμενον ***στρογγυλὸν*** ἀριθμὸν 4355,20 δρ.).

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

855. Γραμμάτιον 7000 δρ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 24 ἡμ., ἀντικαθίσταται μὲ ἄλλο, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 78 ἡμ. Ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του πρὸς 6°/₀ ;

856. Ἕνας ζητεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ἐκ δρ. 1166 συναλλαγματική του λήξεως 15/III μὲ ἄλλην λήξεως 27/VI. Ποία θὰ εἶνε ἡ ὀνομαστ. ἀξία τῆς νέας συναλλαγματικῆς πρὸς 6°/₀ ;

857. Τὴν 15/VI πρόκειται νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ἕνα γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον λήγει τὴν 3/VIII, δύο γραμμάτια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν λήγει τὴν 20/VII καὶ εἶνε 600 δρ., τὸ δὲ τὴν 23/VIII ἐκ 1050 δρ. Ποία εἶνε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου πρὸς 6°/₀ ;

858. Νὰ ἀντικατασταθοῦν τέσσαρα γραμμάτια μὲ ἕνα, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 73 ἡμ.· τὸ α΄ εἶνε 1000 δρ. καὶ λήγει μετὰ 45 ἡμ., τὸ β΄ 1300 δρ. μετὰ 56 ἡμ., τὸ γ΄ 750 δρ. μετὰ 67 ἡμ. καὶ τὸ δ΄ 1600 δρ. μετὰ 88 ἡμ. Ἡ ὑφαίρεσις θὰ λογαριασθῇ ἐξωτερικῶς πρὸς 5°/₀.

859. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία προβλήματα κοινῆς λήξεως γραμματίων.

Προβλήματα μερισμοῦ καὶ ἑταιρείας.

§ 196. Ἀριθμοὶ π.χ. οἱ 2, 6, 8, 10 λέγονται ***ἀνάλογοι*** τῶν 1, 3, 4, 5, ἐπειδὴ προκύπτουν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ 2, ὅτε καὶ οἱ 1, 3, 4, 5 εἶνε ἀνάλογοι τῶν 2, 6, 8, 10, ἐπειδὴ γίνονται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{2}$. Οἱ λόγοι καθενὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῆς μιᾶς σειρᾶς πρὸς τὸν ἀντίστοιχόν του τῆς ἄλλης εἶνε ἴσοι· ἤτοι $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$ καὶ $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$. Ἀριθμοί, π. χ. οἱ 10, 14, 12, λέγονται ***ἀντιστρόφως ἀνάλογοι*** τῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, ἐπειδὴ εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστρόφων τούτων 5, 7, 6.

197. ***Μερισμὸς*** ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 1800, εἰς μέρη ἀνάλογα π. χ. τῶν 2, 3, 5 λέγεται νὰ χωρισθῇ ὁ 1800 εἰς τόσα μέρη τὸ πλῆθος, ὅσοι εἶνε οἱ δοθέντες, καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο ἀντὶ τοῦ 1800 ὁ $2+3+5=10$, τὰ μέρη θὰ ἦσαν 2, 3, 5. Ἂν ὁ μεριστέος ἦτο διπλάσιος, τριπλάσιος κλπ. τοῦ 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, τριπλάσια κλπ. τῶν 2, 3, 5. Ἑπομένως, ἐπειδὴ ὁ μεριστέος 1800 προκύπτει ἐκ τοῦ 10, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{1800}{10}$, τὰ μερίδια θὰ προκύψουν ἀπὸ τοὺς 2, 3, 5, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $\frac{1800}{10}$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$2\times\frac{1800}{10}=360,\ 3\times\frac{1800}{10}=540,\ 5\times\frac{1800}{10}=900.$$

Ἄρα, ***διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ καθένα τῶν δοθέντων καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν μὲ τὸ ἄθροισμά των.***

Οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν εἰμποροῦν νὰ πολλαπλασιασθοῦν ἢ νὰ διαιρεθοῦν ὅλοι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς νὰ μεταβληθοῦν τὰ μέρη.

Διατί ; Ἐξηγήσατε τοῦτο εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 355, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{4}$, τοὺς τρέπομεν εἰς ὁμωνύμους $\frac{8}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{3}{12}$ καὶ ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ 355 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν 8, 60, 3. Διατί ; Ἐκτελέσατε τὸν μερισμὸν αὐτόν.

198. Μερισμὸς π. χ. τοῦ 600 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα π. χ. τῶν 2, 3, $\frac{2}{5}$, λέγεται ὁ μερισμὸς τοῦ 600 εἰς μέρη ἀνάλογα, τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων, ἤτοι τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$. Διὰ νὰ κάμωμεν τὸν μερισμὸν αὐτόν, τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{15}{6}$ καὶ μερίζομεν τὸν 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3, 2, 15, ὅτε εὑρίσκομεν $600\times\frac{3}{20}=90$, $600\times\frac{2}{20}=60$, $600\times\frac{15}{20}=450$.

«Δύο ἁμαξηλάται ἀνέλαβον ἀντὶ 3260 δρ. νὰ μετακομίσουν σιτάρι εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ ἕνα σταθμόν, τὸ μὲν 75 χμ., τὸ δὲ 55 χμ.· ὁ μὲν μετέφερε 2000 ὀκ. εἰς τὸ α΄, ὁ δὲ 3200 ὀκ. εἰς τὸ β΄ μέρος. Πόσα δρ. θὰ λάβῃ καθένας, ἂν ἡ πληρωμὴ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ὀκάδων καὶ τῶν ἀποστάσεων ;»

Κάθε ἁμαξηλάτης θὰ πάρῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν χρήματα, καὶ ἂν μετέφερεν ὁ μὲν 2000×75 ὀκ., ὁ δὲ 3200×55 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν 1 χμ. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸν 3260 δρ. ἀναλόγως τῶν $2000\times75=150000$ καὶ $3200\times55=1760000$ ἢ ἀναλόγως τῶν 15 καὶ 176. Ἐκτελέσατε τὸν μερισμὸν αὐτόν.

§ 199. *Προβλήματα ἑταιρείας* καλοῦνται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ διανεμηθῇ τὸ κέρδος ἢ ζημία ἀπὸ ἐπιχείρησιν εἰς τοὺς συνεταίρους, οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον. Καὶ τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

860—861. Νὰ μερισθῇ ὁ 357 ἀναλόγως τῶν 2, 5, $6\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{8}$. Ὁ 6740 ἀναλόγως τῶν 5, $7\frac{1}{5}$, $8\frac{5}{7}$, 12,5.

862. Διὰ τρία ἐμπορεύματα ἐπληρώθη ναῦλος 5092,50 δρ.· πόσον θὰ ἐπιβαρυνθῇ καθένα, ἂν τὰ βάρη ἦσαν 375 χγ., 596 χγ., 753,5 χγ. ;

863. Μία οἰκία ἠσφαλίσθη διὰ 350000 δρ. Μετὰ πυρκαϊὰν ἡ ζημία ἐξετιμήθη εἰς 180000 δρ., ἡ δὲ πρὸ τῆς πυρκαϊᾶς ἀξία εἰς 420000 δρ.· πόσην ἀποζημίωσιν θὰ πάρῃ ὁ ἰδιοκτήτης;

864. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα κλασματικῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

865. Νὰ μερισθῇ κληρονομία 194200 δρ. εἰς τρία παιδιά, τὰ ὁποῖα

ἔχουν ἡλικίας 13, 17, 25 ἔτ., ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν ἡλικιῶν των.

Τρεῖς καραγωγεῖς μετέφεραν σιτάρι, ὁ α΄ 5 τόννους εἰς ἀπόστασιν 10 χμ., ὁ β΄ 7 τόννους εἰς ἀπόστασιν $8\frac{1}{2}$ χμ., ὁ γ΄ 13 τόν. εἰς ἀπόστασιν $6\frac{1}{2}$ χμ. Νὰ διανεμηθοῦν εἰς αὐτοὺς 1940 δρ. ὡς μεταφορικά.

Νὰ μερισθοῦν 1240 δρ. εἰς τέσσαρας ἐργάτας ἀπὸ τοὺς ὁποίους, ὁ α΄ εἰργάσθη 4 ἡμ., ὁ β΄ 6 ἡμ. καὶ 2 ὥρ., ὁ γ΄ 2 ἡμ. 8 ὥρ., καὶ ὁ δ΄ 18 ὥρ. (ἡ ἐργάσιμος ἡμ. λογαριάζεται πρὸς 10 ὥρ.).

8. Νὰ μοιρασθοῦν 1140 δρ. εἰς τέσσαρα ἄτομα, ὥστε ὁ β΄ νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ α΄, ὁ γ΄ τριπλάσια τοῦ α΄, καὶ ὁ δ΄ τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ γ΄.

9. Νὰ μοιρασθοῦν 50000 δρ. εἰς 4 μέρη α΄, β΄, δ΄, ὥστε νὰ εἶνε $α΄ : β΄ = \frac{3}{4}$, $β΄ : γ΄ = \frac{2}{3}$, $α΄ : δ΄ = \frac{7}{3}$.

0. Νὰ μοιρασθῇ κληρονομία 351000 δρ. εἰς τέσσαρα παιδιὰ ὥστε, τὸ α΄ νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ β΄, τὸ γ΄ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ β΄ καὶ τὸ δ΄ τὰ διπλάσια τοῦ α΄.

1. Τρεῖς συνέταιροι κατέθεσαν συγχρόνως 4000 δρ., 6000 δρ., 5000 δρ. καὶ ἐζημιώθησαν τὰ 0,4 τῶν κατατεθέντων· πόσον ἐζημιώθη ὁ καθένας;

2. Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν μαζὺ ἕνα λιβάδι ἀντὶ 800 δρ. Ὁ α΄ ἔθρεψεν ἐκεῖ 60 πρόβατα ἐπὶ 4 μῆνας, ὁ β΄ 80 πρόβατα ἐπὶ 3 μῆνας· πόσον θὰ πληρώσῃ ὁ καθένας;

3. Νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος 3300 δρ. εἰς τέσσαρας συνεταίρους, ἂν ἡ κατάθεσις τοῦ β΄ ἦτο 0,75 τῆς τοῦ α΄, ἡ τοῦ γ΄ 0,25 τῆς τοῦ β΄ καὶ ἡ τοῦ δ΄ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς τοῦ γ΄.

4. Εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ἔχουν καταβάλει, ὁ α΄ συνέταιρος 50000 δρ.· ὁ β΄ 45800 δρ. καὶ ὁ γ΄ 38400 δρ.· κατὰ πόσον θὰ ἐλαττωθοῦν τὰ κεφάλαιά των, ἂν ζημιωθοῦν 13420 δρ.;

5. Ἀπὸ τρεῖς συνεταίρους κατέθεσαν, ὁ α΄ 25000 δρ., ὁ β΄ 28000 δρ., ὁ γ΄ 22000 δρ.· ἐκ τῶν κερδῶν λαμβάνει ὁ α΄ 10 % ὡς ἱδρυτὴς τῆς ἐπιχειρήσεως, ὁ β΄ 15 % ὡς διευθυντὴς αὐτῆς, τὰ δὲ

λοιπὰ κέρδη διανέμονται ἀναλόγως τῶν καταθέσεων. Πόσας δρ. θὰ λάβῃ καθένας, ἂν κερδίσουν 100000 δρ. ;

876. Ἀπὸ 4 συμπλοιοκτήτας, ὁ α' καταθέτει 40%, ὁ β' 30%, ὁ γ' 18% καὶ ὁ δ' 12% τῆς ἀξίας τοῦ πλοίου. Νὰ διανεμηθῇ μεταξύ των κέρδος 175800 δρ. ἀναλόγως τῆς συμμετοχῆς των.

877. Ἡ μεταφορὰ ἐμπορεύματος ἠσφαλίσθη εἰς τρεῖς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας, αἱ ὁποῖαι ἀνέλαβον 50%, 30%, 20% τοῦ κινδύνου. Τί θὰ καταβάλῃ καθεμία διὰ ζημίαν 75000 δρ. ;

878. Τρεῖς συνέταιροι καταθέτουν, ὁ α' 70000 δρ., ὁ β' 50000 δρ. καὶ ὁ γ' 30000 δρ.· πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον, ἐὰν ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 45000 δρ. ;

879. Τρεῖς ἔμποροι ἐμοιράσθησαν τὰ κέρδη μιᾶς ἐπιχειρήσεως καὶ ἔλαβον ὁ α' 5000 δρ., ὁ β' 3000 δρ. καὶ ὁ γ' 9000 δρ.· ἐὰν τὰ κεφάλαια, τὰ ὁποῖα εἶχαν διαθέσει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἦσαν 34000 δρ., πόσας δρ. εἶχε διαθέσει ἕκαστος ;

880. Τέσσαρες κεφαλαιοῦχοι διέθεσαν ἕκαστος τὸ αὐτὸ ποσὸν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν, ἀλλὰ τοῦ α' τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 10 μην., τοῦ β' 5 μην. καὶ τοῦ γ' 3 μην καὶ 15 ἡμ. Ἐὰν ἐκέρδισαν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 74000 δρ., πόσας δρ. ἔλαβεν ὁ καθένας ;

881. Εἰς μίαν ἑταιρείαν ἐξημιώθη ἕκαστος τῶν τριῶν συνεταίρων 2327,60 δρ., 1396,55 δρ., 775,85 δρ. Ἐὰν ἕκαστος εἶχε καταβάλει τὸ αὐτὸ κεφάλαιον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν καὶ ἐὰν αὕτη διήρκεσεν 29 μην., ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον ἑκάστου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ;

882. Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν 1400,60 δρ.· ὁ α' εἶχε διαθέσει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 4006,40 δρ. διὰ 10 μην.· ὁ β' 7006,50 δρ. διὰ 15 μην, ὁ γ' 6000,75 δρ. διὰ 17 μην. 20 ἡμ.· πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

883. Ἔμπορος ἀρχίζει ἐπιχείρησιν καὶ μετὰ 6 μην. προσλαμβάνει συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλε τὸ αὐτὸ ποσόν, μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ β' προσλαμβάνει γ', ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Μετὰ 2 ἔτη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 104000 δρ.· πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ;

884. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν 60000 δρ. διὰ μίαν ἐπιχείρησιν. Τὸ μερίδιον τὸ α' εἶνε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ β'· τούτου εἶνε τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ'. Ὁ α' κατέβαλε τὸ κεφάλαιόν του ἀμέσως, ὁ β' μετὰ 6 μην. καὶ ὁ γ' 5 μην. μετὰ τὸν β'. Μετὰ 3 ἔτη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχει-

ρήσεως ἐκέρδισαν 21312 δρ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καταθέσεις καὶ τὸ κέρδος ἑκάστου.

5. Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν τὴν 15/III τοῦ ἔτους 1932 μὲ 150000 δρ. Τὴν 20/V προσλαμβάνει συνέταιρον, ὁ ὁποῖος κατέβαλεν 80000 δρ. Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις ἔληξεν τὴν 30/VIII τοῦ ἔτους 1933 μὲ κέρδη 231100, πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

6. Δύο ἔμποροι κατέβαλαν διὰ μίαν ἐπιχείρησιν, ὁ α΄ 80000 δρ. τὴν 10 Μαρτίου καὶ ὁ β΄ 50000 δρ. τὴν 20 Ἀπριλίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Ἀλλ' ὁ α΄ ἀπέσυρε τὴν 15 Ἰουνίου 20000 δρ. καὶ ὁ β΄ τὴν 5 Ἰουλίου 10000 δρ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ κέρδος 300500, τὸ ὁποῖον θὰ μοιρασθοῦν τὴν 30 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους;

Περὶ μέσου ὅρου καὶ τιμαρίθμου ζωῆς.

00. Καλοῦμεν *μέσον ὅρον* ἀριθμῶν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός των διὰ τοῦ πλήθους των. Π. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν 5, 6, 12, 8 εἶνε $(5+6+12+8):4=\frac{31}{4}=7{,}75$.

«Ἐργάτης ἔλαβεν ὡς ἡμερομίσθιον τὴν α΄ ἡμ. 60 δρ., τὴν β΄ 84 δρ. καὶ τὴν γ΄ 66 δρ.· πόσον τοῦ ἔρχεται τὸ ἡμερομίσθιον κατὰ μέσον ὅρον τὰς ἡμέρας αὐτάς;»

Ἀφοῦ εἰς τὰς 3 ἡμ. ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 60δρ. +84δρ.+66δρ = =210 δρ.,ὁ μέσος ὅρος αὐτῶν εἶνε 210 δρ.: 3 = 70 δρ.

01. Καλοῦμεν *τιμάριθμον ἀκριβείας τῆς ζωῆς* τὴν μέσην ἀπαιτουμένην δαπάνην διὰ τὴν ζωὴν μιᾶς οἰκογενείας π.χ., ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένα ἄτομα (6 συνήθως).

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ τιμαρίθμου γίνεται ἐν συγκρίσει πρὸς ὡρισμένην ἐποχήν, π. χ. τοῦ ἔτους 1914. Αἱ δαπάναι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τιμαρίθμου λογαριάζονται συνήθως διὰ 52 διάφορα εἴδη διατροφῆς, 16 εἴδη ἐνδυμασίας, 6 θερμάνσεως, διὰ κατοικίαν καὶ 6 διάφορα ἔξοδα ἄλλων δαπανῶν. Συνήθως παριστάνεται ὁ τιμάριθμος τῆς σταθερᾶς ἐποχῆς μὲ 100, μιᾶς ἄλλης δ' ἐποχῆς εἶνε συνάρτησις τῶν δαπανῶν, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν. Ἂν π. χ. ἡ μέση τιμὴ τῶν δαπανῶν διὰ τὸν Ἰανουάριον τοῦ 1930 εἶνε 1940, 4 δρ., αὐτὸς θὰ εἶνε ὁ τιμάριθμος διὰ τὸν μῆνα τοῦτον, ἐὰν ὁ τοῦ 1914 εἶνε ὁ 100.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

887. Ἐργάτης εἰργάσθη μὲ ἡμερομίσθιον 60 δρχ. τὰς τέσσαρας πρώτας ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος, τὴν ε΄ ἡμέραν μὲ 67 δρ. καὶ τὴν στ΄ μὲ 41,60 δρ. Πόσον εἶνε τὸ μέσον ἡμερομίσθιον; Ποίαν ἡμερησίαν δαπάνην τοῦ ἐπιτρέπει τὸ εἰσόδημά του αὐτό; Ποίαν ἡμερησίαν δαπάνην πρέπει νὰ καθορίσῃ, ἂν θέλῃ νὰ ἀποταμιεύῃ 33,60 δρ. τὴν ἑβδομάδα;

888 Ἐργοστάσιον κατηνάλωσε κατὰ τοὺς τελευταίους μῆνας τοῦ ἔτους 27·28·25,5·23·28,5·27,45 τόννους γαιάνθρακα. Ποία εἶνε ἡ μέση μηνιαία κατανάλωσις τῶν μηνῶν αὐτῶν;

889. Εἰς τὴν Ἀγγλίαν εἰσήχθη τὸ 1921 κορινθιακὴ σταφὶς 60,077 τόννοι ἀγγλικοὶ (καθένας=739 ὀκ. περίπου), τὸ 1922 τον. 27,520, τὸ 1923 τόν. 65,295, τὸ 1924 τόν. 57,550 καὶ τὸ 1925 τόν. 55,200. Ποία ἦτο ἡ μέση ἐτησία εἰσαγωγὴ σταφίδος εἰς Ἀγγλίαν κατὰ τὴν πενταετίαν;

890. Μίαν ἡμέραν ἐπωλήθησαν £ 350 πρὸς 400 δρ., £ 100 πρὸς 422 δρ. καὶ £ 400 πρὸς 320 δρ. πόσον ἐπωλήθη ἡ £ κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν ἐκείνην;

891. Συνθέσατε καὶ λύσατε τρία προβλήματα μέσου ὅρου.

Προβλήματα μίξεως.

§ 202. Καλοῦμεν προβλήματα ***α΄ εἴδους μίξεως*** ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος ἢ κράματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα εἴδη, καὶ διὰ καθένα γνωρίζομεν τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν θέτομεν εἰς τὸ μῖγμα καὶ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος του.

1. ***Ἀναμιγνύομεν 100 ὀκ. κρασὶ τῶν 8,30 δρ. τὴν ὀκ., 65 ὀκ., τῶν 7 δρ. καὶ 35 ὀκ. τῶν 9 δρ. Πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ κράματος;***

Ἔχομεν :	100 ὀκ. πρὸς 8,30 τὴν ὀκ.	τιμ.	8,30δρ. × 100 = 830δρ.
	65 » » 7	» »	» 7 δρ. × 65 = 455 »
	35 » » 9	» »	» 35 × 9 = 315 »
Σύνολον	200 ὀκ.	θὰ τιμῶνται	1600 »

ἄρα ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος τιμᾶται 1600δρ. : 200=8 δρ.

Ἂν τὸ πωλήσωμεν 8 δρ. τὴν ὀκᾶν, δὲν θὰ ἔχωμεν οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν, καὶ τὴν τιμὴν αὐτὴν καλοῦμεν ***μέσην τιμὴν*** τῆς μονάδος τοῦ κράματος.

Ἂν θελήσωμεν νὰ ἔχωμεν κέρδος π.χ. 20 % ἐπὶ τῆς μέσης τιμῆς, εὑρίσκομεν τὸ 20% τῶν 8 δρ., τὸ ὁποῖον εἶνε 1,60 δρ., ὁπότε ἔχομεν τιμὴν πωλήσεως 8 δρ. + 1,60 δρ. = 9,60 δρ.

2. *«Ποῖος εἶνε ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος 150 δρμ. ἀργύρου, καθαρότητος 0,950 καὶ ἄλλου 50 δρμ. καθαρότητος 075,0 ;».*

Τὰ	150 δρμ.	ἔχουν	ἀργ.	150δρμ. × 0,950 =	142,50 δρμ.
»	50 »	»	»	50δρμ. × 0,750 =	37,50 »
κρᾶμα	200 »	»	»		180 »

ἄρα ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶνε 180 : 200 = 0,900.

203. Καλοῦμεν προβλήματα *μίξεως β΄ εἴδους* ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ἀναλογία (ἀκριβέστερον ὁ λόγος) κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν ποσότητας ἀπὸ δύο εἴδη, τῶν ὁποίων ἔχουν δοθῇ αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ μῖγμα, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος.

α΄) «Ἀπὸ δύο εἴδη κρασὶ τὸ α΄ κοστίζῃ 6 δρ. καὶ τὸ β΄ 8 δρ. ἡ ὀκᾶ. 1) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θὰ πάρωμεν διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα, τὸ ὁποῖον θὰ κοστίζῃ 7,20 δρ. ἡ ὀκ.; 2) Πόσας ὀκ. θὰ πάρωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ κρᾶμα 500 ὀκ. ; 3) Πόσον πρέπει νὰ πάρωμεν ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος ἂν ἀπὸ τὸ α΄ πάρωμεν 600 ὀκ., χωρὶς νὰ προκύπτῃ κέρδος ἢ ζημία (διὰ κάθε περίπτωσιν);»

1) Κάθε ὀκ. τοῦ α΄ εἴδους κοστίζει 6 δρ., εἰς δὲ τὸ κρᾶμα θὰ πωλῆται 7,20 δρ., ἤτοι θὰ φέρῃ κέρδος 1,20 δρ. ἢ 120 λεπτά. Κάθε ὀκᾶ τοῦ β΄ κοστίζει 8 δρ. καὶ εἰς τὸ κρᾶμα θὰ πωλῆται 7,20 δρ., ἤτοι θὰ φέρῃ ζημίαν 0,80 δρ. ἢ 80 λ..

Ἐὰν πάρωμεν 80 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 120 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ α΄ κέρδος 120×80 λ., ἀπὸ δὲ τὸ β΄ ζημίαν 80×120 λ. Ἄρα δὲν ὑπάρχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημία.

Ἑπομένως, ὅταν ἐκ τοῦ α΄ πάρωμεν 80 ὀκ., ἐκ τοῦ β΄ πρέπει νὰ πάρωμεν 120 ὀκ. Ὁ λόγος λοιπὸν τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ πέρνωμεν ἐκ τοῦ α΄ καὶ τοῦ β΄ εἶνε 80 : 120 ἢ 8 : 12 = 2 : 3· ἤτοι εἰς 2 ὀκ. τοῦ α΄ θὰ θέτωμεν 3 ὀκ. τοῦ β΄ εἴδους.

2) Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκ. θὰ πάρωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ κρᾶμα 500 ὀκ., θὰ μερίσωμεν τὸν 500 μέρη ἀνάλογα τῶν 2 καὶ 3, ὅτε ἔχομεν

ἐκ τοῦ α΄ 500 ὀκ. $\times \frac{2}{5} = 200$ ὀκ., ἐκ τοῦ β΄ 500 ὀκ. $\times \frac{3}{5} = 300$ ὀκ.

Ἐπαληθεύσατε ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ κράματος αὐτοῦ εἶνε ἡ δοθεῖσα.

3) Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀκ. θὰ πάρωμεν ἐκ τοῦ β΄, ὅταν θέσωμεν 600 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄, λέγομεν :

εἰς 2 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄ θέτομεν 3 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄
» 640 » » » x ; » »

$$x = 3 \text{ ὀκ.} \times \frac{600}{2} = 900 \text{ ὀκ.}$$

Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν τὸ κάτωθι σχῆμα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ πάρωμεν ἀπὸ τὰ δύο εἴδη.

α΄ 6 δρ.		0,80	
	7,20		$\frac{0,80}{1,20} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} = 2:3.$
β΄ 8 δρ.		1,20	

β΄) «Πόσον νερὸ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς 140 ὀκ. κρασὶ τῶν 8,60 δρ. τὴν ὀκᾶν, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος νὰ τιμᾶται 7 δρ. ;»

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ νεροῦ ὑποτίθεται 0, ἔχομεν νὰ λύσωμεν πρόβλημα ὅπως τὸ προηγούμενον. Λύσατε αὐτό.

γ΄) «Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θὰ ἀναμίξωμεν κρασὶ τῶν 5,40 δρ., μὲ ἄλλο τῶν 7,60 δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῆται μὲ κέρδος 10% πρὸς 6,60 δρ. τὴν ὀκ ;»

Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι τὸ κρασὶ κάθε εἴδους μὲ τὸ κέρδος 10% θὰ τιμᾶται 5,40δρ.+0,54δρ.=5,94δρ. καὶ 7,60δρ.+0,76δρ. =8,36 δρ. Ἀκολούθως λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀνωτέρω καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀναλογία εἶνε 8 : 3.

Εἰμποροῦμεν νὰ διατηρήσωμεν τὰς τιμὰς τῆς ὀκᾶς 5,40 δρ. καὶ 7,60 δρ. τῶν δύο εἰδῶν καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς τοῦ κράματος ἄνευ τοῦ κέρδους 10%, ἡ ὁποία εἶνε 6 δρ. κλπ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

892. Ἕνας ἀνέμιξε 200 ὀκ. κρασὶ τῶν 7,20 δρ. τὴν ὀκ. μὲ 300 ὀκ. τῶν 5,60 δρ. καὶ μὲ 100 ὀκ. νερό. Πόσον θὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν α΄) χωρὶς νὰ ἔχῃ κέρδος ἢ ζημίαν ; β΄) ἂν θέλῃ νὰ κερδίζῃ 2 δρ. εἰς τὴν ὀκ. ἢ 12,5% ;

893. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕνας ὁμολογίας ἐθνικοῦ δανείου, διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ, ἂν ἔχῃ ἀγοράσει 200 πρὸς 73,50 δρ. καθεμίαν, 420 πρὸς 71,25 δρ. καὶ 275 πρὸς 75,50 δρ. ;

894. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα ἀπὸ κρασὶ τῶν 8 δρ. τὴν ὀκ. ἀνεμίξαμεν 12 ὀκ. κρασὶ τῶν 7,50δρ., 16,5 ὀκ. τῶν 6 δρ., 32 ὀκ. τῶν 9,50δρ. καὶ 9 ὀκ. ἀγνώστου ἀξίας. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ τελευταίου;

895. Ἀνέμιξεν ἕνας κρασὶ τριῶν ποιοτήτων κατὰ τὴν ἀναλογίαν 20, 10, 10 ὀκ. καὶ ἐτιμῶντο κατὰ σειρὰν 4 δρ., 6 δρ., 5 δρ. ἡ ὀκᾶ. Πόση εἶνε ἡ μέση τιμὴ τοῦ κράματος;

896. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θὰ ἀναμίξωμεν λάδι τῶν 37 δρ. ἡ ὀκᾶ μὲ ἄλλο τῶν 32δρ., διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα τῶν 35δρ.; Πόσας ὀκάδας θὰ πάρωμεν ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος, ἂν ἀπὸ τὸ β΄ πάρωμεν 180 ὀκ.;

897. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμίξωμεν κρασὶ τῶν 8 δρ. τὴν ὀκ. μὲ νερό, διὰ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκ. τοῦ κράματος 5 δρ.;

898. Πόσον νερὸ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς 40 γρμ. οἰνόπνευμα καθαρότητος 90°, ὥστε νὰ ἔχωμεν κρᾶμα 75°;

899. Ἕνας ἔχει 150 ὁμολογίας δανείου πρὸς 285 δρ. τὴν μίαν, 100 πρὸς 280 δρ. καὶ 300 πρὸς 260 δρ. Πόσας ὁμολογίας τῶν 230 δρ. πρέπει ν' ἀγοράση διὰ νὰ ἔχη μέσην τιμὴν 250 δρ.;

900. Πόσον βάρος ἀργύρου καθαρότητος 0,700 θὰ λυώσωμεν μὲ 30 γρμ. καθαρότητος 0,900 καὶ 20 γρμ. τῶν 0,880 διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ κρᾶμα τῶν 0,800;

901. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν ἀναμιγνύεται κρασὶ τῶν 8,20 δρ. τὴν ὀκ. μὲ ἄλλο τῶν 7,20 δρ., ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος πωλῆται πρὸς 8 δρ. καὶ ἀφίνει κέρδος 5 %;

902. Πόσας ὀκ. νερὸ θὰ ρίψωμεν εἰς 68 ὀκ. κρασὶ τῶν 7,40 δρ. διὰ νὰ ὑποβιβασθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἰς 6,80 δρ.;

903. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν εἰμπορεῖ ἕνας νὰ ἀναμίξῃ τρία εἴδη καφέ, τῶν 61 δρ., 69 δρ. καὶ 75 δρ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα τῶν 72,90 δρ., τὸ ὁποῖον νὰ ἀφίνῃ κέρδος 8 %;

904. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ λυώσῃ ἕνας μὲ 15 χλγ. καθαρότητος 0,800, διὰ νὰ ἀναβιβάσῃ τὴν καθαρότητα εἰς 0,900;

905. Πόσων βαθμῶν εἶνε τὸ οἰνόπνευμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνάμιξιν 5 λίτρων τῶν 75°, 6 λίτ. τῶν 72° καὶ 16 λίτ. τῶν 92°;

906. Ἕνας ἔχει κριθάρι καὶ σιτάρι καὶ τιμῶνται 5 καὶ 7 δρ. ἡ ὀκᾶ. Πόσας ὀκ. πρέπει νὰ βάλῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 3500 ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ πωλῆται πρὸς 6,20 δρ. ἡ ὀκ. χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν;

907. Ἀνέμιξεν ἕνας 24 ὀκ. βούτυρο τῶν 100 δρ. κατ' ὀκᾶν μὲ 360 ὀκ. ἄλλου τῶν 90 δρ. Τὸ μῖγμα ἐπωλήθη πρὸς 117,50 δρ. Πόσον % ἐκέρδισε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

§ 204. *Ἰδιότης τῆς ἀλλαγῆς τῆς τάξεως τῶν προσθετέων.*

«Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθοῦν».

Π. χ. λέγω ὅτι $3+5+7=5+7+3$.

Διότι καθὲν ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας καὶ εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος, ἐπειδὴ εἶνε ὡρισμέναι αἱ μονάδες τῶν προσθετέων του. Ἀλλ' ἀφοῦ κατὰ τὴν πρόσθεσιν λαμβάνονται ὅλαι αἱ μονάδες τῶν προσθετέων, τὸ ἄθροισμα θὰ εἶνε τὸ αὐτό, εἴτε εἰς τὰς μονάδας τοῦ 3 προσθέσωμεν τὰς τοῦ 5 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὰς μονάδας τοῦ 7, εἴτε εἰς τὰς τοῦ 5 τὰς μονάδας τοῦ 7 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὰς τοῦ 3.

Ἐν γένει, ἂν α, β, γ, δ εἶνε δοθέντες ἀριθμοί, ἔχομεν

$$α+β+γ+δ=β+δ+γ+α=β+δ+α+γ, \text{ κλπ.}$$

§ 205. ***«Εἰς ἄθροισμα ἀριθμῶν εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των».***

Λέγω π. χ. ὅτι εἶνε $3+5+2+7=3+(5+7)+2$.

Διότι $3+5+2+7=5+7+3+2$, ἂν δ' ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν 5 καὶ 7, ἔχομεν $5+7+3+2=(5+7)+3+2=3+$ $+(5+7)+2$.

Ἀντιστρόφως· π.χ. $24+8+30+6=24+8+(25+5)+6=$ $24+8+25+5+6$. Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Ἐν γένει ἔχομεν, $α+β+γ=α+(β+γ)=β+(α+γ)=γ+(α+β)$.

§ 206. ***«Διὰ νὰ προστεθῇ ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προστεθῇ εἰς ἕνα ἀπὸ τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος».***

Λέγω π χ. ὅτι $(3+5+6)+15=3+(5+15)+6$.

Διότι $(3+5+6)+15=3+5+6+15=3+(5+15)+6$.

Ἐν γένει ἔχομεν $(α+β+γ)+ρ=(α+ρ)+β+γ=α+(β+ρ)+γ$ κλπ.

§ 207. *«Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους αὐτῶν».*

Λέγω π.χ. ὅτι $(3+5+7)+(8+4+6)=3+5+7+8+4+6$.

Διότι $(3+5+7)+(8+4+6)=(3+5+7)+8+4+6=$ $=3+5+7+8+4+6$.

Ἐν γένει $(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta'+\gamma')=\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'$.

Ποία εἶνε ἡ πρακτικὴ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων;

§ 208. *«Ἂν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, προκύπτουν ὁμοίως ἄνισοι».*

Π.χ. $8>5$ καὶ $8+4>5+4$. Διότι τὸ $12>9$.

Ἐν γένει, ἂν εἶνε $\alpha>\beta$, θὰ ἔχωμεν καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$. Ἐνῶ, ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτὴν καὶ τὴν προηγουμένην.

§ 209. *«Ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται».*

Π.χ. λέγω ὅτι $25-7=(25+5)-(7+5)$.

Διότι αἱ 5 μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν προστεθῆ εἰς τὸν μειωτέον 25, θὰ ἀφαιρεθοῦν, ἐπειδὴ ἔχουν προστεθῆ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 7. Ἄρα $25-7$ καὶ $(25+5)-(7+5)$ εἶνε ἴσα.

Ἐν γένει $\alpha-\beta=(\alpha+\rho)-(\beta+\rho)$.

Δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης ἰσχύει καὶ ἂν ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ μὲ ποῖον περιορισμόν;

§ 210. *«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα τῶν προσθετέων».*

Π.χ. λέγω ὅτι εἶνε

$$(27+6+3)-7=(27-7)+6+3=20+6+3.$$

Διότι, ἂν εἰς τὸν $20+6+3$ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον 7, θὰ ἔχωμεν $(20+6+3)+7=(20+7)+6+3=27+6+3$· ἤτοι εὑρήκαμεν τὸν μειωτέον.

Ἐν γένει ἔχομεν $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=(\alpha-\delta)+\beta+\gamma=\alpha+(\beta-\delta)+$ $+\gamma$ κλπ., ἂν $\alpha\geqq\delta$ ἢ $\beta\geqq\delta$ ($\geqq$ μεγαλύτερον ἢ ἴσον). Διατί;

§ 211. *«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τὸν ἀριθμόν· ἀπὸ τὴν διαφορὰν αὐτὴν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἄλλον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, καὶ οὕτω καθεξῆς,* *μέχρις ὅτου ἀφαιρέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος».*

Π.χ. λέγω ὅτι εἶνε $50-(5+3+10)=[(50-5)-3]-10$, τὸ ὁποῖον γράφομεν καὶ οὕτω: $50-(5+3+10)=50-5-3-10$.

Διότι, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 50 τὸ $5+3+10=18$, ἤτοι ἀνὰ μίαν τὰς μονάδας τῶν 18, εἰμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 5, ἐκ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς τὰς μονάδας τοῦ 3 καὶ ἐκ τῆς νέας διαφορᾶς τὰς μονάδας τοῦ 10, ἀφοῦ αἱ μονάδες τῶν 5, 3 καὶ 10 ἀποτελοῦν τὸν 18.

Ἐν γένει ἔχομεν $A-(\alpha+\beta+\gamma)=[(A-\alpha)-\beta]-\gamma$, ἂν εἶνε $A\geqq\alpha+\beta+\gamma$. Διατί.

§ 212. *«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον της».*

Π. χ. λέγω ὅτι ἔχομεν $35-(16-3)=35+3-16$.

Διότι, ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς προσθέσωμεν τὸν 3, θὰ ἔχωμεν

$$35-(16-3)=35+3-(16-3+3)=35+3-16.$$

Ἐν γένει ἔχομεν $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta$, ἂν $\gamma\leqq\beta$, $\alpha\geqq\beta-\gamma$. Διατί;

Ποία εἶνε ἡ πρακτικὴ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων;

§ 213. *«Ἂν ἀπὸ ἀνίσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν ἴσους, προκύπτουν ὁμοίως ἄνισοι».*

Π. χ. $8>5$ καὶ $8-2>5-2$, ἢ $6>3$.

Ἐν γένει, ἂν $\alpha>\beta$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, ὅπου $\gamma\leqq\beta$. Ἐνῷ ἂν $\alpha=\beta$. εἶνε καὶ $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$, ἂν $\alpha\geqq\gamma$. Διατί;

Ἡ σημασία τῶν παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν.

§ 214. Καθὼς εἴδομεν (§ 211) εἶνε π. χ.

$$50-(5+3+10)=50-5-3-10.$$

Ὁμοίως ἔχομεν π. χ. (§ 212)

$$35-(16-3)=35+3-16=35-16+3.$$

Ἀντιστρόφως, π χ. ἀντὶ τοῦ $50-5-3-10$ εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν $50-(5+3+10)$ ἤτοι:

$$50-5-3-10=50-(5+3+10).$$

Ἐπίσης, ἀντὶ τοῦ $35-16+3$ εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν $35-(16-3)$, ἤτοι: $35-16+3=35-(16-3)$.

Ἀντιστρόφως, ἔχομεν π.χ. $120-2-5-10=120-(2+5+10)$· $75-20+10-5=75-(20-10+5)$. Διατί;

Ἑπομένως, ἐὰν πρὸ παρενθέσεως ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον — καὶ ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι συνδέονται ἕκαστος μὲ τὸν ἑπόμενόν του μὲ τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —, εἰμποροῦμεν νὰ παραλείπωμεν τὴν παρένθεσιν, γράφομεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμόν, τὸν ἐντὸς αὐτῆς μὲ τὸ — πρὸ αὐτοῦ, καθένα δὲ τῶν ἄλλων (τῆς παρενθέσεως) μὲ τὸ + μὲν πρὸ αὐτοῦ, ἂν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἔχῃ τὸ —, μὲ τὸ — δέ, ἂν ἐντὸς αὐτῆς ἔχῃ τὸ +.

Π.χ. $200-(50-20)=200-50+20=150+20=170$.

$140-(30+10+2)=140-30-10-2=110-10-2=100-2=98$·

$450-(50-20+10)=450-50+20-10=$

$=400+20-10=420-10=410$

Ἂν πρὸ παρενθέσεως ὑπάρχῃ τὸ +, γράφομεν τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν τὸν ἐντὸς αὐτῆς μὲ τὸ +, καθένα δὲ τῶν ἄλλων μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον. Π.χ. $100+(5-3)=100+5-3$. Διατί;

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν σημασίαν ἀγκυλῶν, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἔχομεν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —. Π. χ. ἔχομεν

$360-[100+25-(30-5)+6]=360-100-25+(30-5)+6=$

$=360-100-25+30-5+6=260-25+30-5+6=$

$=235+30-5+6=265-5+6=260+6=266$.

Ἐν γένει ἔχομεν π.χ. $A-\beta+\gamma=A-(\beta-\gamma)$,

$A-\alpha+\beta-\gamma=A-(\alpha-\beta+\gamma)$ κλπ.

Ἀσκήσεις.

908. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν:

α') $125-10-(35-7)$· $400+125-(32-40+20)$·

$250+40-[80-35+(25-10)-4]$.

909. Γράψατε τὸ $130-4-2-5+7$, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς νὰ εἶνε ἐντὸς παρενθέσεως α') μὲ τὸ — πρὸ αὐτῆς, β') μὲ τὸ + πρὸ αὐτῆς. Ὁμοίως διὰ τὸ

$450+200-100-50+40$ καὶ διὰ τὸ $A+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§ 215. ***Νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.***

«Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων».

Λέγω π. χ. ὅτι, ἂν α, β εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἔχομεν $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$.

Διότι τὸ $\alpha=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\alpha\ \text{φορὰς}}$, $\beta=\underbrace{1+1+1\ldots+1}_{\beta\ \text{φορὰς}}$

Ἑπομένως $\alpha\times\beta$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν β φορὰς τὰς μονάδας τοῦ α καὶ νὰ προθέσωμεν ὅλας τὰς μονάδας αὐτάς. Οὕτω ἔχομεν

$$\alpha\times\beta=\quad \beta\ \text{φορὰς}\left\{\begin{array}{ll} 1+1+1\ldots+1 & \alpha\ \text{φορὰς} \\ 1+1+1\ldots+1 & \text{»}\quad\text{»} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{»}\quad\text{»} \\ 1+1+1\ldots+1 & \text{»}\quad\text{»} \end{array}\right.$$

Ἂν τὰς μονάδας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ σειράς, θὰ εὕρωμεν $\underbrace{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{\beta\ \text{φορὰς}}=\alpha\times\beta$, ἂν δὲ κατὰ στήλας εὑρίσκομεν

$$\underbrace{\beta+\beta+\ldots+\beta}_{\alpha\ \text{φορὰς}}=\beta\times\alpha.$$

Ἀλλ' ἀφοῦ προσθέτομεν καὶ κατὰ τὰς δύο προσθέσεις τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων, θὰ ἔχωμεν $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$.

Πότε κυρίως χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα;

Δείξατε τὴν ἰδιότητα, ὅταν οἱ α, β ἢ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶνε κλάσμα.

§ 216. ***«Εἰς γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων) εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο διαδοχικοὺς ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ γινομένου των».***

Λέγω π.χ. ὅτι $3\times5\times4=(3\times5)\times4=3\times(5\times4)$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν γινομένου παραγόντων ἔχομεν

$$3\times5\times4=(3\times5)\times4.$$

Διὰ νὰ δείξωμεν τώρα ὅτι $3\times5\times4=3\times(5\times4)$, παρατηροῦμεν ὅτι, $3\times5=3+3+3+3+3$,

$$\begin{aligned}\text{τὸ δὲ }\ 3\times5\times4 &= 3+3+3+3+3\\ &+3+3+3+3+3\\ &+3+3+3+3+3\\ &+3+3+3+3+3\\ &=3\times20=3\times(5\times4).\end{aligned}$$

Δείξατε τὴν ἰδιότητα δι' ὁποιουσδήποτε παράγοντας.

Ἐν γένει ἔχομεν $\alpha\times\beta\times\gamma=(\alpha\times\beta)\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$.

Δείξατε ὅτι εἰς γινόμενον ἀριθμῶν εἰμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.

§ 217. *«Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν (ἀκεραίων) δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν δύο διαδοχικῶν παραγόντων».*

Π. χ. εἶνε $3\times8\times7\times12\times2=3\times8\times12\times7\times2$.

Διότι $3\times8\times7\times12\times2=(3\times8)\times7\times12\times2$

$$=(3\times8)\times(7\times12)\times2$$
$$=(3\times8)\times(12\times7)\times2$$
$$=3\times8\times12\times7\times2.$$

Δείξατε τὴν ἰδιότητα δι' οἱουσδήποτε παράγοντας.

Ἐν γένει ἔχομεν π. χ. $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\gamma\times\beta)\times\delta=\alpha\times\gamma\times\beta\times\delta$.

§ 218. *«Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθοῦν οἱ παράγοντες».*

Π. χ. ἔχομεν $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\gamma\times\alpha\times\delta\times\beta$.

Διότι δι' ἐπανειλημμένης ἐναλλαγῆς τῆς θέσεως δύο διαδοχικῶν παραγόντων ἔχομεν $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times\gamma\times\beta\times\delta=\gamma\times\alpha\times\beta\times\delta=\gamma\times\alpha\times\delta\times\beta$.

§ 219. *«Εἰς γινόμενον παραγόντων εἰμποροῦμεν ν' ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των».*

Π. χ. εἶνε $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

Διότι, ἂν τοὺς β καὶ δ καταστήσωμεν διαδοχικούς, εἰμποροῦμεν ἀκολούθως νὰ τοὺς ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ γινόμενόν των. Ἤτοι $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times\beta\times\delta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

Διατυπώσατε καὶ δείξατε τὴν ἀντίστροφον ἰδιότητα.

§ 220. *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τοὺς ἄλλους παράγοντας».*

Π. χ. ἔχομεν $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\varrho=(\beta\times\varrho)\times\alpha\times\gamma$.

Διότι $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\varrho=\alpha\times\beta\times\gamma\times\varrho=\alpha\times\beta\times\varrho\times\gamma=$

$$=\alpha\times(\beta\times\varrho)\times\gamma=(\beta\times\varrho)\times\alpha\times\gamma.$$

§ 221. *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα παραγόντων, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων».*

Π.χ. ἔχομεν $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\alpha'\times\beta'\times\gamma')=\alpha\times\beta\times\gamma\times\alpha'\times\beta'\times\gamma'$.

Διότι $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\alpha'\times\beta'\times\gamma')=\alpha\times\beta\times\gamma\times(\alpha'\times\beta'\times\gamma')=$
$=\alpha\times\beta\times\gamma\times\alpha'\times\beta'\times\gamma'$.

§ 222. *«Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».*

Ἔχομεν π. χ. $\alpha^3\times\alpha^2\times\alpha^4=\alpha^{3+2+4}=\alpha^9$.

Διότι $\alpha^3 \times \alpha^2 \times \alpha^4 = (\alpha.\ \alpha.\ \alpha).(\alpha.\ \alpha).(\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha) =$
$=\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha=\alpha^9=\alpha^{2+3+4}$.

Πῶς ὑψώνομεν γινόμενον εἰς δύναμιν καὶ δείξατε τοῦτο.

Ἐπιμεριστικὸς νόμος.

§ 223. *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κάθε προσθετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα».*

Ἔστω π.χ. τὸ $(5+4+7)\times3$. Λέγω ὅτι εἶνε
$$(5+4+7)\times3=5\times3+4\times3+7\times3.$$

Διότι $(5+4+7)\times3=(5+4+7)+(5+4+7)+(5+4+7)=$
$=5+4+7+5+4+7+5+4+7=(5+5+5)+(4+4+4)+$
$+(7+7+7)=5\times3+4\times3+7\times3$.

Ἐν γένει ἔχομεν π.χ. $(\alpha+\beta+\gamma)\times\rho=\alpha\times\rho+\beta\times\rho+\gamma\times\rho$.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ ἄθροισμα; Δείξατε τοῦτο.
Πῶς πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα; Δείξατε αὐτό.
Ποῦ κυρίως χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἰδιότητας αὐτάς; Δείξατε πῶς πολλαπλασιάζομεν συντόμως ἀκέραιον ἐπὶ 10 ἢ 100, 1000...

§ 224. *«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον».*

Λέγω π.χ. ὅτι $(15-7)\times3=15\times3-7\times3$.

Διότι $(15-7)\times3=(15-7)+(15-7)+(15-7)$. Ἂν εἰς καθένα ἐκ τῶν $(15-7)=15-7$ προσθέσωμεν τὸν 7, θὰ γίνῃ τοῦτο 15 καὶ το $(15-7)+(15-7)+(15-7)$ γίνεται $15+15+15=$

$=15\times3$· ἄρα πρὶν προσθέσωμεν τὸ $7+7+7=7\times3$, ἤτο 7×3 ὀλιγώτερον, δηλαδὴ $15\times3-7\times3$, ἤτοι

$$(15-7)\times3=15\times3-7\times3.$$

Ἐν γένει $(\alpha-\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma-\beta\times\gamma$, ἂν $\alpha\geqq\beta$. διατί;

Ποῦ χρησιμοποιοῦμεν κυρίως τὴν ἰδιότητα αὐτήν;

225. ***«Ἂν ἄνισοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν ὁμοίως ἄνισοι».***

Π.χ. εἶνε $8>3$ καὶ $8\times2>3\times2$.

Ἐν γένει, ἂν $\alpha>\beta$ εἶνε καὶ $\alpha.\varrho>\beta.\varrho$, ἂν $\varrho\neq0$, ἐνῶ ἄν $\alpha=\beta$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha.\varrho=\beta.\varrho$. Διατί;

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

226. ***«Ἂν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».***

Ἔστω π.χ. ἡ διαίρεσις $14:4$ μὲ πηλ. 3 καὶ ὑπόλ. 2.

Λέγω ὅτι, $14\times5:4\times5$ δίδει πηλ. 3 καὶ ὑπόλ. 2×5.

Διότι $14=4\times3+2$, καὶ ἂν τὰ ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5, ἔχομεν $14\times5=(4\times3+2)\times5=(4\times3)\times5+2\times5$

ἢ $\qquad 14\times5=(4\times5)\times3+2\times5.$

Ἐπειδὴ τῆς διαιρέσεως $14:4$ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $2<4$ (τοῦ διαιρέτου), θὰ εἶνε καὶ τὸ $2\times5<4\times5$. Ἑπομένως τὸ 2×5 εἶνε ὑπόλοιπον τῆς $14\times5:4\times5$, τῆς ὁποίας πηλίκον εἶνε 3.

Ἐν γένει, ἄν ἡ $\alpha:\beta$ δίδῃ πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ καὶ ἡ $\alpha\times\varrho:\beta\times\varrho$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon\times\varrho$.

Δείξατε τοῦτο.

Ἂν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὶ συμβαίνει; Διατί;

Ποῦ χρησιμοποιεῖται ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης εἰς τοὺς δεκαδικούς;

227. ***«Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα παράγοντά του μὲ αὐτὸν (ἂν διαιρῆται) καὶ τὸ πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τοὺς ἄλλους παράγοντας».***

Λέγω π. χ. ὅτι $(15\times4\times8):5=(15:5)\times4\times8=3\times4\times8$.

Διότι, ἂν τὸ $3\times4\times8$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, θὰ ἔχωμεν $(3\times4\times8)\times5=(3\times5)\times4\times8=15\times4\times8$, δηλαδὴ τὸν διαιρετέον. Ἑπομένως τὸ $3\times4\times8$ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(15\times4\times8):5$

Πῶς διαιρεῖται γινόμενον μὲ ἕνα παράγοντά του; Διατί; Πότε κυρίως χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἰδιότητα αὐτήν;

§ 228. ***«Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ τὸν διαιρέσωμεν μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου, τὸ πηλίκον αὐτὸ μὲ ἕνα ἄλλον παράγοντα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου (ἄν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι)».***

Λέγω π.χ. ὅτι $240:(2\times3\times5)=[(240:2):3]:5$.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον τῆς (τελείας) διαιρέσεως $240:(2\times3\times5)$ μὲ π, θὰ ἔχωμεν

$$240=(2\times3\times5)\times\pi=2\times3\times5\times\pi.$$

Διαιροῦμεν τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ 2, ὅτε $240:2=3\times5\times\pi$· τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ 3, ὅτε $(240:2):3=5\times\pi$ καὶ πάλιν τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ 5, ὅτε $[(240:2):3]:5=\pi$. Ἤτοι,

$$240:(2\times3\times5)=[(240:2):3]:5.$$

Ἐν γένει ἔχομεν $\alpha:(\beta\times\gamma\times\delta)=[(\alpha:\beta):\gamma]:\delta$, ἂν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι.

§ 229. ***«Τὸ πηλίκον δυνάμεων ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου».***

Π. χ. λέγω ὅτι ἔχομεν $\alpha^5:\alpha^2=\alpha^{5-2}=\alpha^3$.

Διότι, ἂν τὸ α^3 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην α^2, εὑρίσκομεν $\alpha^3.\ \alpha^2=\alpha^5$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

§ 230. ***«Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν κάθε προσθετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα (ἂν αἱ διαιρέσεις εἶνε τέλειαι)».***

Λέγω π.χ. ὅτι $(35+40+15):5=(35:5)+(40:5)+(15:5)=$
$=7+8+3$.

Διότι, ἂν τὸ $7+8+3$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, εὑρίσκομεν, $(7+8+3)\times5=7\times5+8\times5+3\times5=35+40+15$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

Ἐν γένει ἔχομεν $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$.

Ποῦ χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα; Ἂν αἱ διαιρέσεις δὲν εἶνε τέλειαι, πῶς εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

§ 231. *«Ἂν ἄνισοι ἀριθμοὶ διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν ὁμοίως ἄνισοι».*

Π. χ. $28>16$ καὶ $18:2>16:2$. Διατί; Γενικεύσατε αὐτό.

Ἰδιότητες τῆς διαιρετότητος.

§ 232. *«Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά των».*

Π.χ. ὁ 5, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τοὺς 25,30,45, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά των $25+30+45$.

Διότι $25=5\times5$, $30=6\times5$, $45=9\times5$, καὶ

$25+30+45=5\times5+6\times5+9\times5=(5+6+9)\times5$.

Ἤτοι τὸ $25+30+45$ διαιρεῖται διὰ 5.

Δείξατε ὅτι, *«ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, π. χ. ὁ 5 τὸν 15, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσιά του, 15×2, 15×3 κλπ.».*

§ 233. *«Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφοράν των».*

Π. χ. ὁ 7, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τοὺς 35 καὶ 21, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν $35-21$.

Διότι, $35=5\times7$, $21=3\times7$, καὶ $35-21=5\times7-3\times7=$ $=(5-3)\times7=2\times7$· ἤτοι τὸ $35-21$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 7.

§ 234. *«Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην (διαιρέσεως), διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς».*

Π χ. ὁ 2, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸν 24 καὶ 56, λέγω ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 8 τῆς διαιρέσεως $56:24$.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ $56:24$ ἔχει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλ. 8, εἶνε $56=24\times2+8$. Ἄρα $56-24\times2=8$. Τὸ 2 διαιρεῖ τὸ 24, ἄρα καὶ τὸ 24×2· ἀλλὰ διαιρεῖ καὶ τὸ 56 (ὡς ἐδόθη), ἑπομένως θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφοράν των $56-24\times2$, ἤτοι τὸν 8.

§ 235. *«Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην των».*

Διότι ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶνε ἢ ὁ μικρότερος ἀπ' αὐτούς, ἢ τὸ προτελευταῖον ὑπόλοιπον τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν διὰ νὰ τὸν εὕρωμεν.

Λάβετε δύο ἀριθμοὺς π χ. τοὺς 24 καὶ 100 καὶ δείξατε τὴν ἰδιότητα.

Διατυπώσατε καὶ δείξατε τὴν αὐτὴν ἰδιότητα δι' ὁσουσδήποτε ἀριθμούς.

13657

§ 236. *«Ἂν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ὁ μ. κ. δ. των πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ 60 καὶ 8 καὶ μ.κ.δ. αὐτῶν ὁ 4. Λέγω ὅτι οἱ 60×3 καὶ 8×3 ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 4×3.

Διότι κάθε ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον προκύπτει κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν 60 καὶ 8, πολλασιάζεται ἐπὶ 3, ὅταν αὐτοὶ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 3· ἄρα καὶ ὁ μ.κ.δ. (ποὺ εἶνε τὸ προτελευταῖον ὑπόλοιπον) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 3.

Δείξατε τὴν ἰδιότητα διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς.

Δείξατε ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν ἀριθμοὺς π. χ. τοὺς 125, 350, 480, 500 διὰ κοινοῦ διαιρέτου των, τοῦ 5 π χ., καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν (ποῖος εἶνε ;) διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ 5.

Δείξατε ὅτι τὰ πηλίκα ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 810 καὶ 279, διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν 9 ἔχουν μ.κ.δ. τὴν 1.

Τί ἀριθμοὶ εἶνε τὰ πηλίκα αὐτά ;

Περὶ τῶν διαιρετῶν γινομένου.

§ 237. *«Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο (ἀκεραίων) παραγόντων καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ τὸν ἄλλον».*

Ἔστω π.χ. ὅτι ὁ Α διαιρεῖ τὸ γινόμενον Β×Γ καὶ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν Β. Λέγω ὅτι ὁ Α διαιρεῖ τὸν Γ.

Διότι, ἀφοῦ ὁ Α καὶ ὁ Β ἔχουν μ.κ.δ. τὴν 1 (διατί ;), ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ Γ, ὁ μ.κ.δ. τῶν Α×Γ καὶ Β×Γ θὰ εἶνε ὁ 1×Γ=Γ. Ἀλλ' ὁ Α διαιρῶν τὸν Α×Γ (ὡς πολλαπλάσιόν του) καὶ τὸν Β×Γ (διότι ὑπετέθη τοῦτο), θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ.κ.δ. των, τὸν Γ.

Εἰμπορεῖ ἕνας ἀριθμὸς νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων χωρὶς νὰ διαιρῇ κανένα ἀπὸ τοὺς παράγοντας ; Πότε καὶ διατί;

§ 238. *«Ἂν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων, διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἀπὸ αὐτούς».*

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ πρῶτος Α διαιρεῖ τὸ γινόμενον Β×Γ.

Λέγω ὅτι ὁ Α διαιρεῖ ἢ τὸν Β ἢ τὸν Γ.

Διότι, ἂν ὁ Α δὲν διαιρῇ τὸν Γ, θὰ εἶνε πρῶτος πρὸς αὐτόν, ἐπειδὴ οἱ μὲν διαιρέται τοῦ Α (ὡς πρώτου) εἶνε 1 καὶ Α, ὁ δὲ κοινὸς διαιρέτης τῶν Α καὶ Γ εἶνε 1. Ἀλλὰ τότε ὁ Α (ὡς πρῶτος πρὸς τὸν Γ) θὰ διαιρῇ τὸν Β.

Ἂν ὁ πρῶτος Α διαιρῇ τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων $B\times\Gamma\times\Delta$, ἐπειδὴ τοῦτο γράφεται $(B\times\Gamma)\times\Delta$, ὁ Α θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο $(B\times\Gamma)$ καὶ Δ. Ἄρα ὁ Α θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν Β, Γ καὶ Δ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ ὅταν ἔχωμεν γινόμενον μὲ περισσοτέρους παράγοντας. Δείξατε αὐτήν.

§ 239. ***«Ἂν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον πρώτων παραγόντων, εἶνε ἴσος (τοὐλάχιστον) μὲ ἕνα ἀπὸ αὐτούς».***

Π. χ. ἂν ὁ πρῶτος Α διαιρῇ τὸ γινόμενον $B\times\Gamma\times\Delta$ τῶν πρώτων Β,Γ,Δ, λέγω ὅτι ὁ Α εἶνε ἴσος (τοὐλάχιστον) μὲ ἕνα ἀπὸ αὐτούς.

Διότι, ὁ Α θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντας Β,Γ,Δ. Ἀλλὰ πρῶτος δὲν διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ ($\neq 1$) παρὰ μόνον, ὅταν εἶνε ἴσος μὲ αὐτόν. Ἤτοι ὁ Α εἶνε ἴσος (τοὐλάχιστον) μὲ ἕνα ἐκ τῶν Β,Γ,Δ.

Δείξατε ὅτι, ***«ἂν γινόμενον πρώτων παραγόντων, π.χ. τὸ $\alpha\times\beta\times\gamma$ (τῶν πρώτων α,β,γ), διαιρῆται διὰ δυνάμεως ἀριθμοῦ πρώτου, π. χ. διὰ τοῦ 7^3, τὸ γινόμενον περιέχει τὸν πρῶτον αὐτὸν μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον».***

Διότι, θὰ ἔχωμεν $\alpha\times\beta\times\gamma=7^3\times\pi$ (ὅπου π παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha\times\beta\times\gamma$: 7^3). Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ 7 διαιρεῖ τὸ $7^3\times\pi$ (διατί ;) θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον του $\alpha\times\beta\times\gamma$· ἤτοι ἕνας ἐκ τῶν α, β, γ εἶνε ἴσος μὲ 7, κλπ.

Δείξατε ὅτι, ***«ἂν δύο γινόμενα ἀπὸ πρώτους παράγοντας εἶνε ἴσα, ἔχουν τοὺς αὐτοὺς παράγοντας καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας».***

Διότι, ἂν εἶνε π. χ. $\alpha\times\beta\times\gamma=3\times5\times7$ (ὅπου α, β, γ εἶνε πρῶτοι), τὸ 3 θὰ διαιρῇ τὸ $\alpha\times\beta\times\gamma$ (διατί) ; ἄρα ἓν ἐκ τῶν α, β, γ ἰσοῦται μὲ 3· π.χ. $\alpha=3$, κλπ.

Ἂν τώρα τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα γινόμενα ἔχῃ τὸν 2^3 π. χ., θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο γινόμενον τὸν 2^3. Διότι θὰ διαιροῦνται καὶ τὰ δύο γινόμενα διὰ τοῦ $2\times2\times2$ (ἀφοῦ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ), κλπ.

Δείξατε ὅτι, ***«μὲ οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε πάντοτε τὸ αὐτό».***

Ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν γινόμενα ἴσα τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς παράγοντας πρώτους ἀριθμούς.

§ **240**. ***«Διὰ νὰ εἶνε ἕνας ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου, ὅταν εἶνε ἀναλυμένοι εἰς πρώτους παράγοντας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον».***

Ἔστωσαν π.χ. οἱ $37800=2^3\times3^3\times5^2\times7$ καὶ $756=2^2\times3^3\times7$. Ἐπειδὴ ὁ 37800 διαιρεῖται διὰ τοῦ 756, ὁ 37800 θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ 756 ἐπὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν. Ἄρα ὁ 37800 θὰ περιέχῃ τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 756 καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι καθένα πρῶτον παράγοντα τοῦ $2^2\times3^3\times7$ μὲ ἐκθέτην τὸν αὐτὸν ἢ μεγαλύτερον. Πράγματι, τὸ $2^3\times3^3\times5^2\times7$ περιέχει τοὺς πρώτους παράγοντας 2, 3, 7 τοῦ 756 καὶ τὸν μὲν 2 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοὺς δὲ ἄλλους μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Ἀντιστρόφως· ἐπειδὴ ὁ $2^3\times3^3\times5^2\times7$ περιέχει τοὺς πρώπρώτους παράγοντας τοῦ $2^2\times3^3\times7$ μὲ ἐκθέτας τοὐλάχιστον σους, διαιρεῖται δι' αὐτοῦ. Διότι εἰμποροῦμεν νὰ τρέψωμεν τὸ $2^3\times3^3\times5^2\times7$ εἰς γινόμενον τοῦ $2^2\times3^3\times7$ ἐπὶ ἕνα ἄλλο γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας αὐτούς, οἱ ὁποῖοι μένουν, ἀπὸ τὸ $2^3\times3^3\times5^2\times7$, ἂν παραλείψωμεν τοὺς 2^2, 3^3, 7, ἤτοι ἐπὶ τὸ 2×5^2. Δηλαδὴ ἔχομεν $2^3\times3^3\times5^2\times7=(2^2\times3^3\times7)\times2\times5^2$.

Ἄρα ὁ 378000 διαιρεῖται διὰ 756 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ $2\times5^2=2\times25=50$.

Δείξατε τὸν κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀριθμῶν ἀναλυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων (§ 73 σελὶς 39), ἔστω τῶν $24=2^3\times3$, $120=2^3\times3\times5$, $40=2^3\times5$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξετε ὅτι ὁ 2^3 εἶνε α΄) κοινὸς διαιρέτης τῶν 24, 120 καὶ 40 καὶ β΄) μ.κ.δ. αὐτῶν, ἐπειδὴ ὁ μ.κ.δ. των δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶνε ἄλλος ἀριθμὸς οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 2^3. Διατί ;

Δείξατε τὸν κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. ἀριθμῶν ἀναλυμένων εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων (§ 74, σελὶς 41), ἔστω τῶν $24=2^3\times3$, $120=2^3\times3\times5$, $40=2^3\times5$.

Ἀρκεῖ νὰ δείξετε ὅτι ὁ $2^3\times3\times5$ εἶνε α΄) κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 24, 120, 40 καὶ β΄) εἶνε καὶ τὸ ε.κ.π. αὐτῶν, διότι τοῦτο δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶνε ἀριθμὸς οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν $2^3\times3\times5$. Διατί ;

Ἰδιότητες ἴσων κλασμάτων.

241. *«Ἐὰν ἕνα κλάσμα εἶνε ἀνάγωγον, κάθε ἄλλο κλάσμα ἴσον μὲ αὐτὸ ἔχει ὅρους, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ὁμωνύμους ὅρους τοῦ ἀναγώγου, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν».*

Ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{9}$ καὶ ἄλλο κλάσμα ἴσον του $\frac{\alpha}{\beta}$. Λέγω ὅτι οἱ α καὶ β εἶνε ἰσοπολλαπλάσια τῶν 5 καὶ 9, δηλαδὴ γίνονται, ἂν οἱ 5 καὶ 9 πολλαπλασιασθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.

Διότι, ἀφοῦ εἶνε $\frac{5}{9}=\frac{\alpha}{\beta}$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ α´ κλάσματος ἐπὶ β καὶ τοῦ β´ ἐπὶ 9 εὑρίσκομεν

$$\frac{5\times\beta}{9\times\beta}=\frac{\alpha\times 9}{\beta\times 9}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ ἴσα αὐτὰ κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, θὰ ἔχουν καὶ ἀριθμητὰς ἴσους. Ἤτοι ἔχομεν

$$5\times\beta=\alpha\times 9.$$

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τὸ $5\times\beta$ (διατί ;), θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον του $\alpha\times 9$, ἀλλ' ὡς πρῶτος πρὸς τὸν 9, διαιρεῖ τὸν α. Ἔστω λοιπὸν ρ τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\alpha:5$, ὅτε εἶνε $\alpha=5\times\rho$.

Θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $5\times\beta=\alpha\times 9$ ἀντὶ τοῦ α τὸ ἴσον αὐτοῦ $5\times\rho$, ὅτε εὑρίσκομεν $5\times\beta=5\times\rho\times 9$ καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 5, ἔχομεν $\beta=\rho\times 9=9\times\rho$. Οὕτω εὑρήκαμεν ὅτι $\alpha=5\times\rho$, $\beta=9\times\rho$.

Δείξατε ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν κλάσματα ἴσα μὲ δοθὲν ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους του ἐπὶ 2, 3, 4,..

Διατί, ὅταν ἕνα κλάσμα ἔχῃ ὅρους πρώτους μεταξύ των, εἶνε ἀνάγωγον ;

Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, θὰ ἔχουν ὁμωνύμους ὅρους ἴσους. Διατί ;

§ 242. Ἔστω ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$. Λέγω ὅτι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha'+\beta'}$.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους μὲ ρ,

θὰ ἔχωμεν $\alpha=\alpha'\times\rho$
$\beta=\beta'\times\rho$.

Προσθέτοντες εἰς ἴσους ἴσα, λαμβάνομεν

$$\alpha+\beta=\alpha'\times\rho+\beta'\times\rho=(\alpha'+\beta')\times\rho$$

καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha'+\beta'$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha'+\beta'}=\rho=\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Δείξατε ὅτι, ἂν ἔχωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, εἶνε καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha'-\beta'}$

(ἂν εἶνε $\alpha>\beta$ καὶ $\alpha'>\beta'$, διατί ;). Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Δείξατε γενικώτερον ὅτι, ἂν ἔχωμεν

$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\ldots$ οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶνε ἴσοι μὲ $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots}{\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots\ldots}$.

Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Ἐὰν εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha'}=\frac{\beta+\beta'}{\beta'}$, ὡς φαίνεται, ἂν εἰς τὰ ἴσα δοθέντα κλάσματα προστεθῇ 1. Δείξατε τοῦτο.

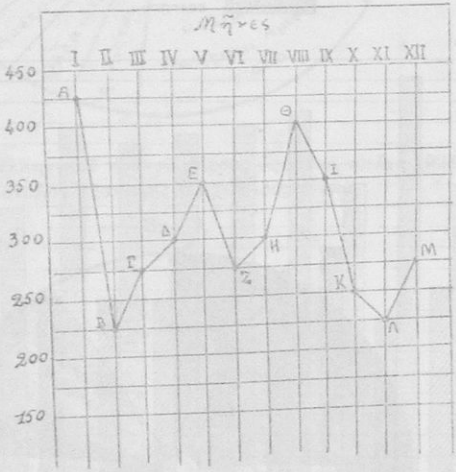
Δείξατε ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha'}=\frac{\beta-\beta'}{\beta'}$ (ἂν εἶνε $\alpha>\alpha'$ καὶ $\beta>\beta'$, διατί;).

Δείξατε ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, θὰ εἶνε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'}$ (ἂν $\alpha>\beta$, καὶ $\alpha'>\beta'$, διατί ;).

Γραφικὴ παράστασις τῶν τιμῶν ποσοῦ.

§ **243.** Αἱ εἰσπράξεις τοῦ ταμείου σχολικῆς κοινότητος ἦσαν αἱ ἑξῆς κατὰ μῆνα ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου μέχρι Δεκεμβρίου ἑνὸς ἔτους: 425 δρ., 225 δρ., 275 δρ., 300 δρ., 350 δρ., 275 δρ., 300 δρ., 400 δρ., 350 δρ., 250 δρ., 225 δρ., 275 δρ.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν σχηματίζομεν ἰδέαν τῶν διαφόρων εἰσπράξεων τοῦ ταμείου. Ἀλλὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν κάμνομεν ἁπλουστέραν μὲ τὴν καλουμένην *γραφικὴν παράστασίν των*. Αὐτὴ γίνεται συνήθως εἰς

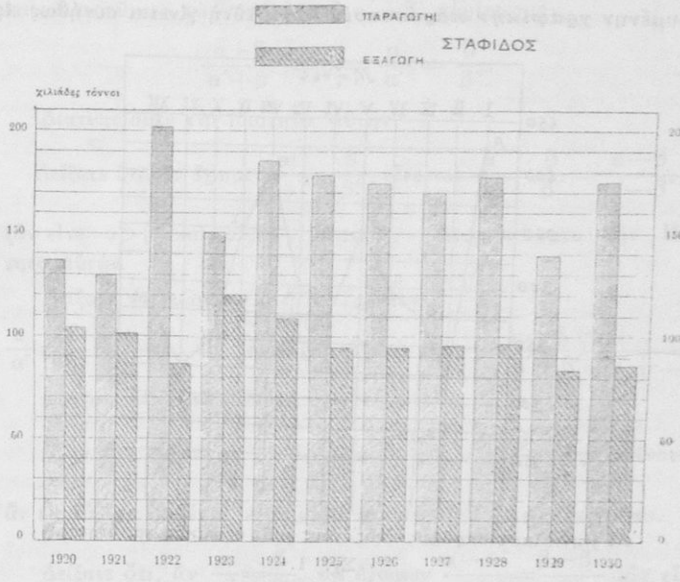


Αἱ μηνιαῖαι εἰσπράξεις ἑνὸς ἔτους μιᾶς σχολικῆς κοινότητος.

Σχ. 1.

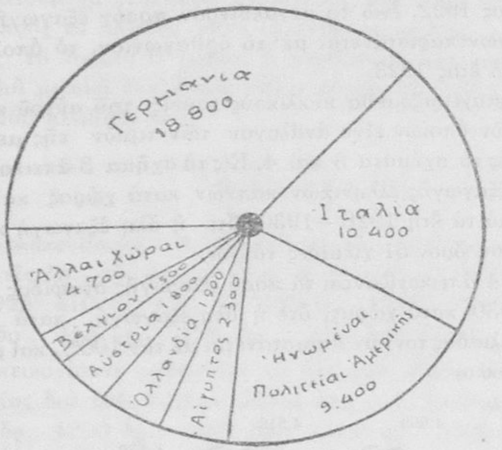
τετραγωνισμένον φύλλον χάρτου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁρίζομεν μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν πρώτην ὁριζοντίαν (ἄνω) εἰς τὸ σχῆμα 1 καὶ ἄλλην κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἔστω τὴν πρώτην (ἀριστερὰ) εἰς τὸ σχῆμα 1. Αἱ μὲν ὑποδιαιρέσεις τῆς πρώτης, ἀπέχουσαι ἰσάκις καθεμία ἀπὸ τὴν ἑπομένην της, παριστάνουν τοὺς μῆνας, αἱ δὲ τῆς δευτέρας τὰ ποσὰ 150 δρ., 175 δρ. κλπ. (ἀνὰ 25 δρ. π.χ.). Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ ποσὸν 425 δρ. τοῦ Ἰανουαρίου, ἀκολουθοῦμεν τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν πρώτην ὁριζοντίαν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν Ἰανουάριον καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν της μὲ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν δευτέραν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 425 δρ. Ἡ τομὴ Α παριστάνει τὴν εἴσπραξιν 425 δρ. τοῦ Ἰανουαρίου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε,... κλπ. καὶ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜ παριστάνει τὴν μεταβολὴν τῶν εἰσπράξεων (σχ. 1).

Ὁμοίως κάμνομεν τὴν παράστασιν τῶν τιμῶν συναρτήσεως ἐν γένει, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ μίαν μεταβλητήν, ἡ δὲ γραμμή, ἡ ὁποία τὴν παριστάνει λέγεται ***παραστατικὴ*** γραμμὴ ἢ ***διάγραμμα*** τῆς συναρτήσεως.



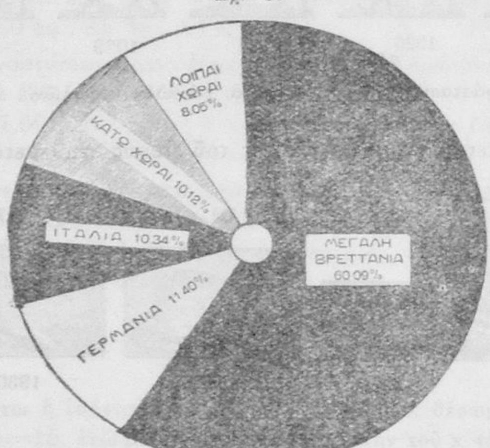
Σχ. 2.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν τιμῶν μεταβλητῆς γίνεται καὶ μὲ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν π. χ. καὶ ὕψη ἀνάλογα πρὸς τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς. Π. χ. εἰς τὸ σχῆμα 2 ἔχομεν τὴν εἰκόνα τῆς παραγωγῆς καὶ ἐξαγωγῆς σταφίδος κατὰ χιλιάδας τόννων εἰς τὰ ἔτη 1920 μέχρι 1930. Παρατηροῦμεν ὅτι μεγαλύτερον ποσὸν παραγωγῆς σταφίδος 200 χιλιάδων τόνων π.χ. παριστάνεται μὲ τὸ μεγαλύτερον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοι-



Χῶραι ἐξαγωγῆς ἑλληνικοῦ καπνοῦ. Μέσος ὅρος διὰ τὰ ἔτη 1928–1930.
Σύνολον ἐξαγωγῆς 51 χιλιάδες τόννοι.

Σχ. 3.



Χῶραι ἐξαγωγῆς σταφίδος. Μέσος ὅρος διὰ τὰ ἔτη 1928–1930
87 χιλιάδες τόννοι παριστάνεται μὲ 100 %.

Σχ. 4.

εἶ εἰς τὸ ἔτος 1922, ἐνῶ τὸ μεγαλύτερον ποσὸν ἐξαγωγῆς 120 χιλιάδων τόννων παριστάνεται μὲ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἔτος 1923.

Ἐνίοτε μεταχειριζόμεθα κυκλικοὺς τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὸ μέγεθος τῶν ὁποίων εἶνε ἀνάλογον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, καθὼς εἰς τὰ σχήματα 3 καὶ 4. Εἰς τὸ σχῆμα 3 ἀπεικονείζονται τὰ ποσὰ ἐξαγωγῆς ἑλληνικῶν καπνῶν κατὰ χώρας καὶ κατὰ μέσον ὅρον διὰ τὰ ἔτη 1928—1930, ὅτε ἡ ὅλη ἐξαγωγὴ καπνοῦ ἦτο κατὰ μέσον ὅρον 51 χιλιάδες τόννοι.
Εἰς τὸ σχῆμα 4 ἀπεικονίζονται τὰ ποσὰ ἐξαγωγῆς σταφίδος διὰ τὰ ἔτη 1928—1930 κατὰ χώρας, ὅτε ἡ ὅλη ἐξαγωγή, κατὰ μέσον ὅρον ἀπὸ 87 χιλιάδας τόννων παριστάνεται μὲ τὸν 100°/₀ καὶ μὲ ὁλόκληρον τὸν κύκλον.

Παράστασις ποσοῦ αἰγῶν κατὰ χιλιάδας κεφαλῶν.
Σχ. 5.

Ἐπίσης μεταχειριζόμεθα εἰκόνας τοῦ εἴδους τοῦ μεταβαλλο-

Παράστασις μεταβολῆς ποσοῦ κονίκλων κατὰ χιλιάδας κεφαλῶν.
Σχ. 6.

μένου ποσοῦ, τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος εἶνε ἀνάλογον τῶν τιμῶν αὐτοῦ, ὅπως εἶνε τὰ σχήματα 5 καὶ 6.
Εἰς τὸ σχῆμα 5 γίνεται ἡ ἀπεικόνισις τῶν ποσῶν τῶν αἰγῶν διὰ

τὰ σημειούμενα ἔτη, ἐνῶ τὸ μέγεθος τῶν ζώων αὐτῶν εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ πλῆθος κατὰ τὸ ἀντίστοιχον ἔτος.

Εἰς τὸ σχῆμα 6 γίνεται ἡ παράστασις τῶν ποσῶν τῶν κονίκλων διὰ μερικὰ ἔτη, ὅπου πάλιν τὸ μέγεθος τοῦ ζώου εἶνε ἀνάλογον τοῦ πλήθους του.

Ἀσκήσεις.

0. Κατασκευάσατε τὴν παραστατικὴν γραμμὴν τῶν ἑπομένων τιμῶν εἰς δρ., τὰς ὁποίας εἶχε ἡ £ κατὰ τοὺς δώδεκα μῆνας τοῦ 1925· 410 δρ. 430 δρ., 435 δρ., 438 δρ, 440 δρ., 442 δρ., 450 δρ., 455 δρ., 458 δρ., 432 δρ., 425 δρ., καὶ 410 δρ.

1. Ἀπεικονίσατε γραφικῶς τὰ ἑπόμενα ἔξοδα συντηρήσεως οἰκογενείας διὰ τοὺς δώδεκα μῆνας ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου καὶ ἑξῆς· 5000 δρ, 4200 δρ., 5100 δρ, 6400 δρ., 5500 δρ. 5100 δρ. 5000 δρ., 5600 δρ., 5800 δρ., 5100 δρ., 4850 δρ., 5300 δρ.

2. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἑπομένων τιμῶν εἰς δραχμὰς τῶν ὁμολογιῶν τοῦ ἀναγκαστικοῦ δανείου τοῦ Κράτους ἀπὸ τοῦ 1922 καὶ ἑξῆς κατὰ σειρὰν τῶν ἑπομένων αὐτοῦ ἐτῶν· 38 δρ., 52δρ., 80 δρ., 85 δρ, 88 δρ., 92 δρ.

3. Ἐργοστάσιον κατηνάλωσε κατὰ τοὺς ἓξ πρώτους μῆνας ἑνὸς ἔτους τὰ ἑξῆς ποσὰ γαιανθράκων εἰς τόννους 29· 32,5 30· 25· 28,5· 27,50. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν τιμῶν τούτων καὶ τῆς μέσης τιμῆς των.

4. Εὕρετε τρία παραδείγματα καθὼς τὰ προηγούμενα μὲ τὰ ἔξοδα τῆς οἰκογενείας σας, τῆς σχολικῆς σας κοινότητος, τοῦ πυρετοῦ ἑνὸς ἀσθενοῦς κατὰ τὰς ἡμέρας μιᾶς ἑβδομάδος π. χ. καὶ ἐκτελέσατε τὰς ἀπεικονίσεις.

Περὶ ἐξισώσεων.

244. Ἔστω ἡ ἰσότης $3.x=15$. Ἂν ἀντὶ τοῦ x θέσωμεν τὸ 5, ἔχομεν $3.5=15$, ἐνῶ δι' οὐδεμίαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x τὸ 3. x γίνεται ἴσον μὲ 15. Ἡ ἰσότης $3.x=15$, ἡ ὁποία ἀληθεύει, ἂν ὁ x ἀντικατασταθῇ μόνον μὲ 5 λέγεται ***ἐξίσωσις***.

Ἐν γένει, «***ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει***

δι' ἁρμοδίαν τιμὴν ὡρισμένου γράμματος αὐτῆς», τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἄγνωστος*** τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ μὲν εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου ἐξισώσεως, τὴν ὁποίαν ἀληθεύει, λέγεται ***λύσις***, ἡ δὲ τιμὴ αὐτὴ τοῦ ἀγνώστου ***ῥίζα*** τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x+7=45$. Ἂν ἀπὸ τὰ ἴσα ἀφαιρέσωμεν τὸν 7, λαμβάνομεν $x=45-7=38$· ἤτοι ἡ ῥίζα εἶνε 38

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{8}=3$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ 8, λαμβάνομεν $x=3.8=24$, ἤτοι ἡ ῥίζα εἶνε 24.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2}-\frac{4x}{9}=5$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ τὸ ε.κ.π. 2×9 τῶν 2 καὶ 9 καὶ ἁπλοποιοῦντες, λαμβάνομεν, $9x-8x=5.18$ ἢ $x=90$· ἄρα ἡ ῥίζα εἶνε 90.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+1}{2}+\frac{3x-4}{5}+\frac{1}{8}=\frac{6x+7}{40}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ἐπὶ 40, ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, καὶ ἁπλοποιοῦντες, εὑρίσκομεν $20.(x+1)+8(3x-4)+5=6x+7$. Ἐκτελοῦντες τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἔχομεν

$20x+20+24x-32+5=6x+7$ ἢ $44x+25-32=6x+7$.

Προσθέτομεν εἰς τὰ ἴσα 32, ἀφαιροῦμεν 25 ἀπὸ τὰ προκύπτοντα ἴσα καθὼς καὶ 6x, ὅτε εὑρίσκομεν $44x-6x=7+32-25$ ἢ $38x=14$. Διαιροῦμεν τὰ ἴσα διὰ 38 καὶ ἔχομεν ὡς ῥίζαν τὴν

$$x=\frac{14}{38}=\frac{7}{19}.$$

Ἀσκήσεις.

915—928. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις $x-105=240$, $75-x=34$·

$10x+6-3x=26$· $29x-12=15-x$· $\frac{14}{x}-3=23$· $\frac{3x}{4}-\frac{2x}{7}=43$·

$\frac{x}{6}+\frac{3x}{7}-\frac{x}{5}=8$· $13x-\frac{8x}{9}=\frac{7}{2}x-12x+22$.

$0{,}1x+3$, $4x-12=6{,}82$· $1{,}111x-0{,}1111x=5{,}333$,

$$\frac{2(7x-10)}{3}-20=\frac{50-x}{2}, \quad \frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=6,$$

$$\frac{5}{6}(3x-7)=\frac{3}{4}x+x+4\frac{1}{2}, \quad 3(3x-5)=0,1x+3,5.$$

Λύσις προβλημάτων μὲ ἐξισώσεις.

245. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων εἰμποροῦμεν νὰ λύσωμεν πολλὰ προβλήματα, καθὼς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω.

1) ***Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον εἶνε 60;***

Ἂν παραστήσωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν μὲ τὸ x, τὸ τριπλάσιόν του θὰ εἶνε 3.x καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε 60, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $3x=60$. Ταύτην λύοντες εὑρίσκομεν $x=20$.

2) ***Ἡ ἡλικία παιδίου εἶνε τριπλασία τῆς ἡλικίας τῆς ἀδελφῆς του· αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν δύο εἶνε 16 ἔτη· ποῖαι εἶνε αἱ ἡλικίαι των;***

Ἂν ἡ ἡλικία τῆς κόρης παρασταθῇ μὲ τὸ x, ἡ τοῦ παιδίου θὰ εἶνε 3x, ως τριπλασία. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 16 ἔτη, ἔχομεν $3x+x=16$. Λύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=4$. Ἄρα ἡ ἡλικία τῆς κόρης εἶνε 4, τοῦ δὲ παιδίου $4.3=12$.

3) ***Ἀπὸ δύο ὑφάσματα τὸ ἕνα εἶνε 5μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Πόσον εἶνε καθέν, ἂν καὶ τὰ δύο ἔχουν μῆκος 67μ.;***

Ἂν x παριστάνῃ τὸ μῆκος τοῦ ὀλιγωτέρου, τὸ ἄλλο θὰ παριστάνεται μὲ $x+5$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμά των εἶνε 67μ., ἔχομεν $x+5+x=67$. Λύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=31$. Ἄρα τὰ μήκη τῶν ὑφασμάτων ἦσαν 31 μ. καὶ 36 μ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

929. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμὸς εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ ὁποίου, ἂν προστεθῇ 8, προκύπτει 46;

930. Οἰκία μὲ κῆπον κοστίζει 86000 δρ. Ἂν ἡ ἀξία τῆς οἰκίας εἶνε ἐννεαπλασία τῆς ἀξίας τοῦ κήπου, πόσον ἐκόστισε ἡ οἰκία καὶ πόσον ὁ κῆπος;

931. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ διπλάσιον ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίτον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ δίδουν τὸν ἀριθμὸν 3700 ;

932. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός τοῦ ὁποίου τὸ πενταπλάσιον ὑπερβαίνει τὸ τριπλάσιον κατὰ 28 ;

933. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον ἐλαττούμενον κατὰ 24 δίδει τὸν 18 ;

934. Τρία τεμάχια ὕφασμα ἐπωλήθησαν ἀντὶ 76 δρ. Τὸ ἓν ἐπωλήθη εἰς πενταπλασίαν τιμὴν ἑνὸς τῶν ἄλλων, καὶ τοῦτο εἰς τριπλασίαν τοῦ τρίτου. Πόσον ἐπωλήθη καθέν ;

935. Δύο μικροπωληταὶ Α καὶ Β ἔχουν 220 αὐγά. Ἐὰν ὁ Α δώσῃ 14 εἰς τὸν Β, θὰ ἔχουν ἴσον ἀριθμόν. Πόσα ἔχῃ καθένας ;

936. Ἕνας ἠγόρασε τρεῖς τόμους ἑνὸς βιβλίου, 5 τόμους ἄλλου εἰς διπλασίαν τιμὴν καὶ 4 ἄλλου εἰς τριπλασίαν τιμὴν καθένα. Πόσον ἠγόρασε κάθε τόμον, ἂν ἐπλήρωσε τὸ ὅλον 750 δρ. ;

937. Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου εἶνε κατὰ 10 ἔτη μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ἀνεψιοῦ του. Πρὸ 15 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ θείου ἦτο διπλασία τῆς τοῦ ἀνεψιοῦ. Ποῖαι εἶνε αἱ ἡλικίαι των ;

938. Πόση εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς πράγματος, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ τρίτου τῆς ὀκᾶς ηὐξημένη κατὰ 2 δρ. εἶνε 23 δρ. ;

939. Πόσα μέτρα εἶνε ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον καὶ τὸ ἥμισυ εἶνε 65 μ. ;

940. Ἀπὸ ὕφασμα ἐκόψαμεν τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ πέμπτον καὶ ἔμειναν 24 μ. Πόσα μέτρα ἦτο ;

941. Ἡ περίμετρος τριγώνου εἶνε 75 μ. Ἡ μία τῶν πλευρῶν του εἶνε δύο τρίτα μιᾶς τῶν ἄλλων καὶ ἡ τρίτη τὰ πέντε ἕβδομα τῆς πρώτης. Πόσα μέτρα εἶνε καθεμία ;

942. Ἕνας ἄφησε μὲ διαθήκην τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας του εἰς τὴν σύζυγόν του, τὸ δέκατον εἰς πτωχοκομεῖον, τὰ τρία ὄγδοα εἰς τὰ παιδιά του καὶ 2000 δρ. εἰς τὴν ὑπηρέτριάν του. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του καὶ πόσας δρ. ἐπῆρε καθένας ;

943. Ἂν εἰς τὰ μῆλα ἑνὸς καλαθίου προστεθοῦν 27, θὰ προκύψουν τὰ τετραπλάσια. Πόσα μῆλα ἔχει τὸ καλάθι ;

944. Ἕνα βιβλίο ἔχει 350 σελίδας. Ὁ ἀδελφός μου ἀνέγνωσε 10

σελίδας ἐπὶ πλέον ἢ ἐγώ. Ἂν ἀναγνώση ἀκόμη 30 σελίδας, θὰ ἔχη ἀναγνώσει ὁλόκληρον τὸ βιβλίον. Πόσας σελίδας ἀνέγνωσε καθένας ;

Διάφορα προβλήματα πρὸς λύσιν.

945. Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας ἐξώδευσεν ἕνας 365400 δρ. Πόσον πρέπει νὰ τὴν ἐνοικιάση τὸν μῆνα διὰ νὰ τοῦ φέρουν τὰ χρήματά του 9,5% ;

946. Τρία ἄτομα ἐμοιράσθησαν 10451,20 δρ. Ἀπὸ τὰ μερίδιά των ὁ α΄ ἐξώδευσε τὰ δύο ἔννατα καὶ ὁ β΄ τὸ πέμπτον, τότε δὲ καὶ οἱ τρεῖς εἶχαν τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσα ἦσαν τὰ μερίδιά των ;

947. Νὰ μερισθοῦν 40000 δρ. εἰς τρία μερίδια, ὥστε τὸ α΄ διαιρούμενον διὰ τοῦ 2, τὸ β΄ διὰ τοῦ 3 καὶ τὸ γ΄ διὰ τοῦ 5 νὰ δίδουν ἴσα πηλίκα.

948. Ἕνα ἐργοστάσιον πληρώνει 456000 δρ. τὴν ἑβδομάδα διὰ ἡμερομίσθια τῶν ἐργατῶν του, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τρεῖς κατηγορίας. Κάθε ἐργάτης τῆς πρώτης κατηγορίας λαμβάνει 600 δρ. τὴν ἑβδομάδα, καθένας τῆς β΄ 700 δρ. καὶ καθένας τῆς γ΄ 800 δρ. Πόσους ἐργάτας ἔχει κάθε κατηγορία, ἄν, ὅταν ἔχωμεν 4 τῆς α΄, ἔχομεν 12 τῆς β΄, καὶ ὅταν 4 τῆς β΄, ἔχομεν 5 τῆς γ΄ ;

949. Ἕνας ἔχει δύο κεφάλαια καὶ τὰ ἐτόκισε διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον καθένα, τὸ α΄ πρὸς 5,5% καὶ τὸ β΄ πρὸς 6,5%. Τὸ α΄ ἔδωκε τόκον 6378,75 δρ.· τὸ β΄ τὸ ὁποῖον ἦτο περισσότερον τοῦ πρώτου κατὰ 8100 δρ. ἔδωκε τόκον 11846,35 δρ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον ἔμειναν εἰς τὸν τόκον.

950. Ἡ ἡλικία μιᾶς κόρης εἶνε τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ἡλικίας τῆς μητέρας της, τὰ δὲ πέντε ἕκτα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν των ἀποτελοῦν τὴν ἡλικίαν τοῦ πατέρα της. Ἂν αὐτὸς εἶνε 50 ἐτῶν, πόσων εἶνε ἡ κόρη καὶ πόσων ἡ μητέρα της;

951. Ἕνας εἶχε τρία καλάθια μὲ 540 αὐγά. Ἐπῆρε ἀπὸ τὸ α΄ καὶ ἔβαλε εἰς τὸ β΄ 20 καὶ εἰς τὸ γ΄ 28, ἔπειτα ἀπὸ τὸ β΄ εἰς τὸ α΄ 18 καὶ εἰς τὸ γ΄ 20· ἔπειτα ἀπὸ τὸ γ΄ εἰς τὸ α΄ 20 καὶ εἰς τὸ β΄ 16. Ἀλλὰ τότε καὶ τὰ τρία καλάθια εἶχαν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν αὐγά· Πόσα αὐγὰ εἶχε καθένα ἐξ ἀρχῆς ;

952. Πόσοι περιττοὶ ἀριθμοὶ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν 9341 καὶ 15457;

953. Εὕρετε τὸ γινόμενον τοῦ 853746 ἐπὶ 999 μὲ μίαν ἀφαίρεσιν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν (ποῖον) ;

954. Τὸ κλάσμα $\frac{275}{279}$ νὰ γίνῃ μικρότερον κατὰ τὰ $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμητής του.

955. Ἕνας ἔκαμε λάθος εἰς μίαν διαίρεσιν· ἐπῆρε τὸν διαιρέτην ὡς διαιρετέον καὶ εὑρῆκε πηλίκον 0,658. Ποῖον εἶνε τὸ ἀληθινὸν πηλίκον;

956. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸν σταθμὸν Α, ἡ μία τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥρ. καὶ ἡ ἄλλη τὴν 11ην ὥρ., διευθύνονται δὲ πρὸς τὸν σταθμὸν Β, ὁ ὁποῖος ἀπέχει ἀπὸ τὸν Α 857 χμ. Ἡ α΄ διατρέχει 35 χμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ β΄ 48 χμ. Μετὰ πόσον χρόνον καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν Β θὰ συναντηθοῦν;

957. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἔργου εἰργάσθησαν τρεῖς ἐργάται. Ὁ α΄ καὶ β΄ ἐργαζόμενοι μαζὺ τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 24 ἡμέρας· ὁ β΄ καὶ γ΄ εἰς 50 ἡμ. καὶ ὁ α΄ καὶ γ΄ εἰς 30 ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας καθένας μόνος του τελειώνει τὸ ἔργον ;

958. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον, μὲ τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη γραμμ. 6 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 63 δρ. καὶ ἐσωτερικὴν 60 δρ.

959. Ἕνας εἶχε 1000000 δρ. καὶ τὰ διέθεσεν ὡς ἑξῆς. Ἕνα μέρος ἔδωκε διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἕνα κτῆμα, τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὑπολοίπου ἐτόκισε πρὸς 8% ἐπὶ 3 μην. καὶ ἐπῆρε τόκον 3200 δρ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐτόκισε 5 μην. πρὸς 10% καὶ ἐπῆρε τόκον 100000 δρ. Ποῖα ποσὰ διέθεσε διὰ τὸ κτῆμα καὶ εἰς τὸν τόκον ;

960. Ἕνας ἠγόρασε 2 στ. 33 ὀκ. 200 δρμ. λάδι πρὸς 22 δρ. 40 λ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 607,50 δρ. Πόσον τὸ ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν ;

961. Ἂν ἡ ὀκᾶ ἐμπόρευμα τιμᾶται 48 δρ. 40 λ., πόσον ἀξίζουν τὰ πέντε ὄγδοα τοῦ στατῆρος ;

962. Ἕνα κιβώτιον μὲ μῆκος 1,2 μ. ὕψος 1,5 μ. καὶ πλάτος 0,8μ. εἶνε πλῆρες ἀπὸ πλάκας σαπούνι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 0,06μ., πλάτος 0,05μ. καὶ πάχος 0,04μ.. Πόσας πλάκας ἔχει τὸ κιβώτιον ;

963. Μία ἀποθήκη μὲ μῆκος 8 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 6 μ. χω-

ρεῖ 2400 κιλὰ σιτάρι. Πόσον σιτάρι χωρεῖ ἄλλη ἀποθήκη μὲ 3,5 μ. μῆκος 6μ. ὕψος καὶ 8μ. πλάτος ;

964. Ἔμπορος ἐπτώχευσε καὶ συμβιβάζεται νὰ πληρώσῃ 60% τῶν χρεῶν του ὡς ἑξῆς. 10% ἀμέσως· 20% μετὰ 1 μῆν. 15% μετὰ 2 μῆν., 10% μετὰ 4 μῆν. καὶ τὰ ὑπόλοιπα μετὰ 6 μῆν. Συμφωνεῖ ἔπειτα μὲ τοὺς πιστωτάς του καὶ καταβάλλει 12% ἀμέσως καὶ 25% μετὰ 1 μῆν. Πότε πρέπει νὰ καταβάλῃ τὸ ὑπόλοιπον ;

965. Ἕνας ὀφείλει 6000 δρ. διὰ τὴν 24/IV καὶ πληρώνει 4000 δρ. τὴν 7/III. Πότε πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ ὑπόλοιπον ;

966. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\dfrac{\alpha : \beta}{\gamma + \delta + \varepsilon}$, ὅταν τεθῇ $\alpha = 0{,}004$, $\beta = 0{,}0005$, $\gamma = 2{,}4\overline{23}\overline{23}\ldots\ldots$, $\delta = 3{,}\overline{576}\overline{576}\ldots$, $\varepsilon = 2{,}00019110001911\ldots\ldots$

967. Εἰς 40 χγρ. ἁλμυροῦ νεροῦ περιέχονται 3,5 χγρ. ἁλάτι. Πόσον νερὸ πρέπει νὰ ρίψωμεν, ὥστε εἰς 30 χγρ. τοῦ νέου κράματος νὰ περιέχεται 1 χγρ ἁλάτι ;

968. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶνε 14250. Ὁ α΄ ἔχει λόγον πρὸς τὸν β΄ καθὼς ὁ 11 πρὸς τὸν 3 καὶ διαφέρουν οἱ δύο αὐτοὶ κατὰ 600. Ποῖοι εἶνε οἱ τρεῖς ἀριθμοί ;

969. Ἐτοκίσθη κεφάλαιον 30000 δρ. πρὸς 5% καὶ εἰς τὸ τέλος κάθε ἔτους πληρώνεται τὸ ἕκτον τοῦ κεφαλαίου καὶ οἱ ὀφειλόμενοι τόκοι. Ποῖα ποσὰ θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος κάθε ἔτους μέχρις ἐξοφλήσεως ;

970. Πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκισθῇ ἕνα ποσὸν πρὸς 6%, ὥστε οἱ τόκοι νὰ εἶνε τὰ τρία τέταρτα τοῦ κεφαλαίου ;

971. Ποῖον εἶνε προτιμότερον, νὰ τοκισθοῦν 16800 δρ. πρὸς 5% ἢ 9500 δρ. πρὸς 4,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5,75% ;

972. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον ἐπὶ 15 μῆν. καὶ ηὐξήθη μὲ τοὺς τόκους του κατὰ τὸ 0,1 αὐτοῦ ;

973. Ποῖον κεφάλαιον μὲ τοὺς τόκους του πρὸς 4,5% γίνεται εἰς 27 ἡμ. 41350 δρ ;

974. Ἕνας ἔκαμε ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ ἐκέρδισε τὰ πέντε ὄγδοα τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον διέθεσε. Μὲ τὸ ὅλον αὐτὸ ποσὸν ἔκαμε νέαν ἐπιχείρησιν καὶ ἐζημιώθη τὸ τρίτον τοῦ νέου

αὐτοῦ κεφαλαίου, τοῦ ἔμειναν δὲ 52000 δρ. Πόσον ποσὸν διέθεσεν ἐξ ἀρχῆς ;

975. Ἕνας ἠρωτήθη ἀπὸ ἄλλον πόσα χρήματα ἔχει καὶ ἀπήντησε. Ἂν μοῦ δώσῃς 220 δρ. θὰ ἔχω ὅσα ἔχεις καὶ σύ. Ὁ ἄλλος τοῦ ἀπήντησε. Δόσε μου σὺ 220 δρ. διὰ νὰ ἔχω διπλάσια ἀπὸ ὅσα ἔχεις τώρα. Πόσας δρ. εἶχε καθένας ;

976. Ἐκ δύο ἀτόμων ὁ μὲν ἕνας ἔχει 120000 δρ., ὁ δὲ ἄλλος 288000 δρ. Ὁ α′ αὐξάνει κατ᾽ ἔτος τὰ χρήματά του κατὰ 6000 δρ. καὶ ὁ β′ τὰς ἐλαττώνει κατὰ 8000 δρ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχουν ἴσα ποσά ;

977. Τέσσαρες συνέταιροι ἐμοίρασαν τὰ κέρδη των καὶ ἐπῆραν οἱ τρεῖς πρῶτοι μαζὺ 22400 δρ., ὁ γ′ καὶ ὁ δ′ μαζὺ 15720 δρ., ὁ β′ καὶ ὁ γ′ καὶ δ′ μαζὺ 19450 δρ. Πόσα ἐπῆρε καθένας ;

978. Ἂν τὰ χρήματα ἑνὸς ἀτόμου αὐξηθοῦν κατὰ τὸ τέταρτον καὶ τὰ δύο πέμπτα των θὰ γίνουν 29700 δρ. Πόσα ἦσαν ;

979. Ἕνας μαθητής, τὸν ὁποῖον ἠρώτησαν πόσοι εἶνε οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς του, ἀπήντησε. Τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, τὸ πέμπτον καὶ τὸ ἕκτον τῶν μαθητῶν καὶ 33 μαθηταὶ ἀκόμη δίδουν ἄθροισμα τὸ διπλάσιον τῶν μαθητῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί ;

980. Τί ὥρα εἶνε, ἂν πρὸ ἑνὸς τετάρτου ἦτο τὸ ἥμισυ τῶν δύο τρίτων τοῦ τετάρτου τοῦ ἡμερονυκτίου ;

981. Ἕνα δωμάτιον μὲ 6,1 μ. μῆκος καὶ 4,25μ. πλάτος πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τάπητα πλάτους 0,8. Πόσον μῆκος χρειάζεται ;

982. Τρεῖς συνέταιροι ἐφόρτωσαν 1200 πρόβατα εἰς ἕνα πλοῖον, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 400 διὰ τὸν α′, 500 διὰ τὸν β′ καὶ τὰ ἄλλα διὰ τὸν γ′. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ ταξεῖδι συνήντησε μεγάλην τρικυμίαν τὸ πλοῖον, ἐπνίγησαν 300 πρόβατα. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς καθένα ;

983. Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἀπεικόνισις τοῦ τιμαρίθμου ζωῆς διὰ τὰ ἔτη 1924—1932, ἂν ἦτο 1980· 1900· 1850· 1740· 1760· 1700· 1680· 1720· 1890 (τὸ δὲ 1914 ὁ 100).

984. Διὰ ἔντοκον ἑξάμηνον γραμ. 5000 δρ. ἐπληρώσαμεν 4842,60 δρ.· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐδανείσθη τὸ Κράτος;

985. Ἕνας ἐδανείσθη 600 δρ. πρὸς 6%, 5000 δρ. πρὸς 7% καὶ

9000 δρ. πρὸς 8°/ₒ. Πρὸς πόσον °/ₒ ἔπρεπε νὰ δανεισθῇ τὸ ὅλον ποσόν, διὰ νὰ πληρώσῃ κάθε ἔτος τὸν αὐτὸν τόκον ;

986. Ἕνας εἰμπορεῖ νὰ πωλήσῃ σήμερον σῦκα πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 4 μῆν. πρὸς 8,50 δρ. Τί εἶνε συμφερώτερον, νὰ κάμῃ τὴν πώλησιν σήμερον καὶ νὰ τοκίσῃ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ πάρῃ πρὸς 12°/ₒ ἢ νὰ κάμῃ τὴν πώλησιν μετὰ 4 μῆν.;

987. Ἕνας ἀντὶ νὰ πωλήσῃ ἐμπόρευμα πρὸς 72 δρ. τὴν ὀκᾶν τὸ ἐπώλησε 9 μῆν. ἀργότερα πρὸς 84 δρ. Πρὸς πόσον °/ₒ ἔρχεται τοκισμένη ἡ ἀρχικὴ τιμή ;

988. Ἕνα ἐμπόρευμα πωλεῖται τοῖς μετρητοῖς 62,50 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ μὲ προθεσμίαν πληρωμῆς ἑνὸς μηνὸς πρὸς 12°/ₒ ;

989. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὅταν διαιρεθῇ μὲ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{36}{65}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{48}{55}$, $\frac{6}{12}$ δίδει πηλίκα ἀκεραίους ἀριθμούς.

990. Δείξατε ὅτι κάθε κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον $\frac{5}{8}$ ἔχει ὅρους οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ τοὺς ὅρους τούτου ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2, 3, 4,..

991. Ἂν δύο κλάσματα εἶνε ἀνάγωγα π. χ. τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{4}{9}$ καὶ ἴσα, ἔχουν ὁμωνύμους ὅρους ἴσους, ἤτοι $\alpha=4$, $\beta=9$.

992. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 5 εἶνε πρῶτοι μεταξύ των καὶ κάθε δύναμίς των π. χ. οἱ 7^5 καὶ 5^4 εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των. Δείξατε αὐτὸ καὶ διὰ δύο ἄλλους ἀριθμοὺς δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας.

993. Ἂν ἕνα κλάσμα π. χ. τὸ $\frac{2}{9}$ εἶνε ἀνάγωγον καὶ κάθε δύναμίς του π. χ. τὸ $\left(\frac{2}{9}\right)^4$ εἶνε κλάσμα ἀνάγωγον.

994. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ πόλεως Α διὰ τὴν Β, ἡ α' εἰς τὰς 8 ὥρ. π. μ. καὶ ἡ β' εἰς τὰς 11 ὥρ.· ἡ πρώτη διανύει 36 χμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ β' 48χμ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῆς Α θὰ συναντηθοῦν ; Ἡ ἀπόστασις τῆς Α καὶ Β εἶνε 650 χμ.

995. Ἕνας ἠγόρασε τὰ $\frac{11}{12}$ ἀπὸ ἕνα τεμάχιον ὕφασμα ἀντὶ 30 δρ. τὸ μέτρον. Κατόπιν μεταπωλεῖ τὰ $\frac{20}{21}$ ἀπ' αὐτό, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε καὶ λαμβάνει 7140 δρ., ἐκέρδισε δὲ 210 δρ. καὶ τὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον εἶχε μείνει. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα ἦτο τὸ ἀρχικὸν τεμάχιον καὶ πόσας δρ. ἐκέρδισε.

996. Ἔμπορος ἐπώλησε τὰ 0,25 ἀπὸ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 5°/₀ τὰ ἄλλα 0, 25 μὲ κέρδος 15°/₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἥμισυ μὲ ζημίαν 6°/₀. Ἐὰν ἐκέρδισεν τὸ ὅλον 316 δρ., πόσον εἶχε ἀγορασθῇ τὰ ἐμπορεύματα ;

997. Τοκίζει κάποιος τὰ χρήματά του, ἀφοῦ τὰ ἐχώρησεν εἰς τρία μέρη. Τὸ α΄ τοκίζει πρὸς 4,5°/₀ ἐπὶ 3 ἔτ. καὶ 8 μῆν τὸ β΄, τὸ ὁποῖον εἶνε διπλάσιον τοῦ α΄, ἐπὶ 3 ἔτ. 6 μῆν. τὸ γ΄, τὸ ὁποῖον εἶνε τριπλάσιον τοῦ δευτέρου πρὸς 4°/₀ ἐπὶ 3 ἔτ. 9 μῆν. Οἱ τόκοι εἶνε 14150 δρ. Ποῖα τὰ μέρη ;

998. Τὰ δύο τρίτα κεφαλαίου τοκίζονται πρὸς 4°/₀, τὸ ἓν ἕκτον πρὸς 4,5°/₀, τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5°/₀. Μετὰ 16 μῆν. ἔλαβε διὰ τόκους καὶ κεφάλαιον 38991 δρ. Εὕρετε α΄) ποῖον τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον· β΄) πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔπρεπε νὰ τοκισθῇ τὸ κεφάλαιον διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ ποσὸν μετὰ ἓν ἔτος ;

999. Τρεῖς ἔμποροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν εἰς δύο ἔτη τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν καταθέσεών των. Εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, ὁ α΄ ἔλαβε διὰ μερίδιόν του τὰ $\frac{17}{65}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν καταθέσεων καὶ τῶν κερδῶν, ὁ β΄ τὰ $\frac{23}{65}$ καὶ ὁ γ΄ 20160 δρ. Ποῖον τὸ κέρδος καὶ ἡ κατάθεσις ἑκάστου ;

1000. Μὲ 1210 δρ. ἀγοράζει κάποιος πρόβατα· τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν πρὸς 180 δρ. ἕκαστον· τὸ $\frac{1}{4}$ πρὸς 200 δρ. καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 220 δρ.· πόσα πρόβατα ἠγόρασε ;

1001. Ποίαν πρωϊνὴν ὥραν ἔχομεν, ἐὰν τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὡρῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπέρασαν ἀπὸ τὸ μεσονύκτιον εἶνε τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὡρῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ περάσουν μέχρι τῆς μεσημβρίας ;

1002. Ἀπὸ δύο εἴδη ὑφάσματα, ἐὰν λάβωμεν 5 πήχ. ἀπὸ τὸ α′ καὶ 6 πήχ. ἀπὸ τὸ β′ δίδομεν 94 δρ. Ἐὰν λάβωμεν 10 πήχ. ἀπὸ τὸ α′ καὶ 15 πήχ. ἀπὸ τὸ β′ δίδομεν 215 δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς διὰ κάθε εἶδος ;

1003. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς χρηματικοῦ ποσοῦ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ ἄλλου εἶνε 280 δρ. τὸ διπλάσιον τοῦ α′ καὶ τὰ $1\frac{2}{3}$ τοῦ β′ εἶνε 1550 δρ.· ποῖα τὰ ποσά ;

1004. Ἐὰν τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ἀξίας μιᾶς οἰκίας ἰσοῦνται μὲ τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἀξίας ἄλλης, πόσον ἀξίζει κάθε μία, ὅταν καὶ αἱ δύο ἀξίζουν 280000 δρ.;

1005. Νὰ μερισμοῦν 4500 δρ. μεταξὺ ἑνὸς ἀνδρός, τριῶν γυναικῶν καὶ 5 παιδίων, ὥστε ἑκάστη γυναῖκα νά λάβῃ τὰ $2\frac{1}{2}$ τοῦ μεριδίου, τοῦ παιδίου καὶ ὁ ἄνδρας τὰ $\frac{5}{3}$ τοῦ τῆς γυναικός.

1006. Ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 καὶ κατόπιν ἐπὶ 5 δίδει ἀριθμοὺς ἔχοντας γινόμενον 19440· Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός ;

1007. Δύο κεφάλαια τοκίζονται τὸ α′ πρὸς 4,5°/₀, τὸ β′ πρὸς 5°/₀· τὸ β′ κεφάλαιον εἶνε τὰ $\frac{2}{11}$ τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια, ἐὰν τὰ εἰς 12 ἔτ. καὶ 7 μῆν. ἀνῆλθον μὲ τοὺς τόκους εἰς 38000 δρ. ;

1008. Ἡ διαφορὰ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφερέσεως εἶνε 0,50 δρ.· ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ἐὰν ἡ προεξόφλησις ἔγινεν 180 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 6°/₀ ;

1009. Νὰ μερισθοῦν 21500 δρ. μεταξὺ τριῶν προσώπων, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ τοῦ β′ 3 : 5 καὶ τὸ τοῦ β′ πρὸ τὸ τοῦ γ′ 7 : 8.

1010. Ἕνας ἔχει χρυσὸν 50 γρμ. καθαρότητος 0,900 καὶ 80 γρμ. καθαρότητος 0,800· πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ λάβῃ διὰ νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῶν προηγουμένων κρᾶμα καθαρότητος 0,950 ;

1011. Ἕνα δοχεῖον περιέχει μῖγμα ἀπὸ κρασὶ καὶ νερό. Ἀφαιροῦμεν τὰ $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὸ μῖγμα καὶ τὸ συμπληρώνομεν μὲ νερό. Μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὸ αὐτὸ διὰ δευτέραν καὶ τρίτην φοράν, καὶ μένει 3,42 λίτρ. κρασί. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ποσότης κρασί, τὸ ὁποῖον περιείχετο εἰς τὸ δοχεῖον.

1012. Τὰ 20 °/₀ ἀπὸ γάλα ἀποτελοῦν κρέμα καὶ τὰ 20 °/₀ τῆς κρέμας ἀποτελοῦν βούτυρον. Ποία ποσότης γάλατος ἀπαιτεῖται διὰ 150 ὀκ. βούτυρο ;

1013. Ἕνας ἔμπορος ἔχει κρασὶ τῶν 11,10 δρ. καὶ τῶν 10,80 δρ. Πόσας ὀκ. πρέπει νὰ ἀναμίξῃ ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα μὲ 24 ὀκ. τῆς α΄, ἂν ἀφοῦ προσθέσῃ καὶ 20 °/₀ νερό, προκύπτῃ μῖγμα, τὸ ὁποῖον τιμᾶται 10,60 δρ. ἡ ὀκᾶ.

1014. Μία λίτρα ἀπὸ ἕνα μῖγμα, ἡ ὁποία περιέχει 75 °/₀ οἰνόπνευμα καὶ 25 °/₀ νερό, ζυγίζει 960 γρμ. Εὕρετε τὸ βάρος τῆς λίτρας ἀπὸ μῖγμα, τὸ ὁποῖον περιέχει 48 °/₀ οἰνόπνευμα καὶ 52 °/₀ νερό.

1015. Τοκίζει κάποιος ἕνα κεφάλαιον πρὸς 5 °/₀. Μετὰ 3 ἔτ. 4 μῆν. λαμβάνει τοὺς τόκους καὶ τὸ κεφάλαιον καὶ τὰ τοκίζει πρὸς 6 °/₀ καὶ λαμβάνει μετὰ 2 ἔτ. καὶ 3 μῆν. τὸ ὅλον 3500 δρ.· ποῖον τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον ;

1016. Διατὶ $\frac{25}{99}=\frac{2525}{9999}$; $\frac{24572-24}{99900}=\frac{24572572-24}{99999900}$;

1017. Τὰ κλάσματα $\frac{25}{99}, \frac{2525}{9999}, \frac{252525}{999999}, \ldots$ εἶνε ἴσα. Διατί ;

Βιβλίον μαθηματικῶν τοῦ Μαθητοῦ

Ε. Λεοντάρης

ΒΙΒΛΙΑ ΥΠΟ ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝ. ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α΄. ΣΧΟΛΙΚΑ

Ἐγκεκριμένα ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας.

Ἀριθμητική ἔκδ. 13η
Πρακτικὴ Γεωμετρία ἔκδ. 6η
Ἄλγεβρα ἔκδ. 6η

Διὰ τὰ Ἡμιγυμνάσια, Ἀνώτ. Παρθεναγωγεῖα, τὰς τρεῖς κατωτέρας τάξεις τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων κλπ.

Θεωρητικὴ Γεωμετρία ἔκδ. 5η
Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία ἔκδ. 3η

Διὰ τὰ Γυμνάσια, τὰ Λύκεια, τὰ Διδασκαλεῖα κλπ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 22/8/1933

Ἀριθ. πρωτ. 41062

Πρὸς
τὸν κ. Νεῖλον Σακελλαρίου
Καθηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου
Ἐνταῦθα

1017

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ ταὐταρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, ἐκδοθείσης τὴν 31 Ἰουλίου 1933 καὶ δημοσιευθείσης τὴν 4 - 8 - 1933 εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 77 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, στηριζομένης δὲ εἰς τὸ ἄρθρ. 3 τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 48 πρακτικὸν ταύτης, ἐνεκρίθη ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **«Ἀριθμητική»** βιβλίον σας ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἐν ταῖς εἰσηγήσεσιν ἀναφερομένας παρατηρήσεις.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Τμηματάρχης
Ν. Σμυρνῆς

Ἄρθρον 6 τοῦ ἀπὸ 21ης Σεπτεμβρίου 1932 Προεδρικοῦ Διατάγματος

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15% τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος καθορισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς, πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τῆς τελευταίας σελίδος τοῦ ἐξωφύλλου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.