ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΛΕΚΟΥ
Τακτικοῦ καθηγητοῦ τῆς Σχολῆς τῶν Ναυτικῶν Δοκίμων

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Α΄ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ
Ἐμπορικῶν καὶ ἐν γένει πρακτικῶν σχολῶν

Ἔκδοσις πέμπτη κατὰ πολὺ βελτιωμένη

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΜΙΧΑΗΛ ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 432 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργ. τῆς Παιδείας τῆς 23 Ἰανουαρίου 1921
(Βιβλιόσημον λεπτὰ 65).
Τιμὴ μετὰ βιβλιοσήμου δραχ 3.25

Ἔκδοσις Α΄.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΣΑΛΙΒΕΡΟΥ
12—Ὁδὸς Σταδίου—12
1921

῾Η μόνη ἐγκεκριμένη ἐπὶ δεκαπενταετίαν ἐν τοῖς γενομένοις διαγωνισμοῖς κατὰ τῶν νόμον ΓΣΑ'.

᾿Ενεκρίθη καὶ αὖθις ὑπὸ τοῦ ἀνωτάτου ᾿Εκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου. Διῃρημένη εἰς τρία μέρη, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τρεῖς τάξεις τοῦ ῾Ελληνικοῦ σχολείου καὶ τοῦ ἀστικοῦ σχολείου θηλέων.

῾Ο συγγραφεὺς συμμορφούμενος ἐν γένει μετ᾿ ἀρκετῆς ἐπιτυχίας πρὸς τὸ ἐπίσημον ἐναλυτικὸν πρόγραμμα δὲν παρέλειψε τὴν ἐποπτικὴν ἐξέτασιν τῶν στερεῶν, πρακτικάς τινας ἀποδείξεις τὰ περὶ πρακτικῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐφαρμογῶν ὡς καὶ τὰ περὶ κατασκευῆς τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἐκ χαρτονίου.

(Εἰσηγητικὴ ἔκθεσις)

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως εἶνε κλεψίτυπον καὶ καταδιωχθήσεται κατὰ τὸν νόμον.

300

ΙΚΗ

ΕΤΡΙΑ

Α΄.

Ἐποπτικὴ ἐξέτασις τῶν ἁπλουστέρων γεωμετρικῶν στερεῶν. (1)

1. Κύβος. — Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα λέγεται *κύβος*, ἀπεικονίζεται δὲ ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου διὰ τοῦ σχήματος 1.

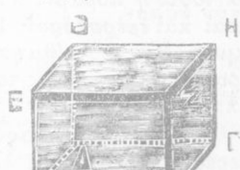
Ὅταν κρατῶμεν εἰς τὰς χεῖράς μας τὸν κύβον ἐγγίζομεν μόνον *τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει.*

Σχ. 1.

Πάντα τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει ὁ κύβος ὁμοῦ λαμβανόμενα ὀνομάζονται ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.

Ἐὰν ὁ κύβος δὲν εἶνε διαφανὴς (ἐὰν π. χ. δὲν εἶνε ἀπὸ ὕαλον, ἀλλ' ἀπὸ ξύλον ἢ κιμωλίαν ἢ ἀπὸ κόκκαλον) βλέπομεν μόνον τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται *ἕδραι* τοῦ κύβου (2).



Σχ. 2.

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται ἀνὰ δύο, τὰ μέρη δὲ αὐτοῦ εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται ἡ συνάντησις δύο ἑδρῶν λέγονται *ἀκμαὶ* τοῦ κύβου. Ἐὰν ἀριθμήσωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει ἐν ὅλῳ *δώδεκα ἀκμάς*.

2. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. — Τὸ στερεὸν τοῦτο λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*, ἀπεικονίζεται δὲ ὑπὸ τοῦ σχ. 2. Τοι-

1) Ὁ διδάσκων παρουσιάζει ταῦτα ἐνώπιον τῶν μαθητῶν.
2) Ὁ διδάσκων δεικνύει τὰς ἕδρας τοῦ κύβου.

οῦτον σχῆμα ἔχουν διάφορα κυτία καὶ κιβώτια, τεμάχια σάπωνος κλπ.

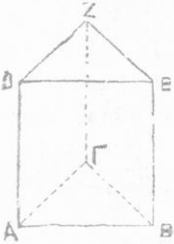
Πάντα τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὁμοῦ λαμβανόμενα, ὀνομάζονται *ἐπιφάνεια* αὐτοῦ.

Ἕδραι αὐτοῦ λέγονται τὰ ἓξ ταῦτα μέρη ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνειά του.

Ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα συναντῶνται αἱ ἕδραι του ἀνὰ δύο.

Ἀρίθμησον τὰς ἀκμάς του.

3. Πρίσμα.—Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα λέγεται ***ὀρθὸν πρίσμα***. Καὶ τὰ σχ. 3 παριστᾷ ὀρθὸν πρίσμα.



Σχ. 3.

Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν ὑάλινοί τινες κρύσταλλοι οἱ ὁποῖοι κρέμανται εἰς τοὺς πολυελαίους τῆς ἐκκλησίας.

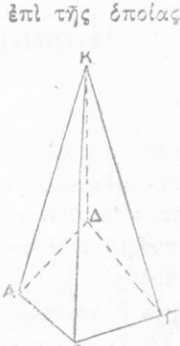
Τί θὰ καλῆται *ἐπιφάνεια* τοῦ πρίσματος; Τί δὲ ἕδραι; Πόσας ἕδρας ἔχει καὶ πόσας ἀκμάς;

4. Πυραμίς.—Τὸ στερεὸν τοῦτο λέγεται ***πυραμὶς*** καὶ τὰ σχ. 4, 5 παριστῶσι πυραμίδας. Τοιαῦτα σχήματα βλέπομεν ἐπὶ τῆς στέγης μερικῶν πύργων ἢ περιπτέρων, εἰς μερικὰ κωδωνοστάσια ἐκκλησιῶν.

Τί καλεῖται ***ἐπιφάνεια*** τῆς πυραμίδος; τί δὲ ἕδραι αὐτῆς;

Ἐὰν στηρίξωμεν τὴν πυραμίδα σχ. 4 ἐπὶ τῆς τραπέζης, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχει μίαν ἕδραν κάτω (δηλ. ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται) καὶ τρεῖς πέριξ, ἤτοι ἐν ὅλῳ ***τέσσαρας*** ἕδρας· διὰ τοῦτο ἡ πυραμὶς αὕτη λέγεται καὶ ***τετράεδρον***. Πόσας ἀκμὰς ἔχει; Ἀρίθμησον τὰς ἕδρας τῆς πυραμίδος τοῦ σχ. 5 καὶ τὰς ἀκμάς.

Σχ. 4.



Σχ. 5.

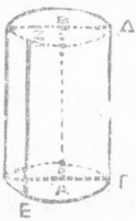
5. Κύλινδρος.—Τὸ στερεὸν τοῦτο σῶμα λέγεται ***κύλινδρος***, ἀπεικονίζεται δὲ διὰ τοῦ σχ. 6.

Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν αἱ καπνοδόχοι τῶν ἀτμοπλοίων, οἱ σωλῆνες τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ φωταερίου, οἱ κορμοὶ δένδρων, τινὰ μολυβδοκόνδυλα, τὰ διάφορα μέτρα μὲ τὰ ὁποῖα μετροῦμεν τὸ γάλα τὸ ἔλαιον κ.λ.π.

Καὶ τοῦ κυλίνδρου *πάντα τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει ὀνομάζονται ἐπιφάνεια αὐτοῦ*· ἀποτελεῖται δὲ αὕτη ἀπὸ τὰ τρία ταῦτα μέρη(1) ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶνε διάφορον τῶν ἄλλων δύο.

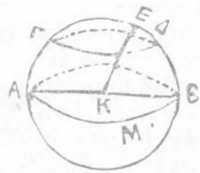
6. Κῶνος.—Τὸ σῶμα τοῦτο λέγεται *κῶνος*, ἀπεικονίζεται δὲ διὰ τοῦ σχ. 7. Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν τὰ χωνία. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διάφορα μέρη(1).

7. Σφαῖρα. — Τὸ σῶμα τοῦτο λέγεται *σφαῖρα*, ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ σχ. 8. Τοιοῦτο σχῆμα ἔχουν τὰ ἐξ ἐλαστικοῦ τόπια καὶ οἱ βῶλοι τῶν παίδων.



Σχ. 6

Σχ. 7.



Σχ. 8.

Τί θὰ ὀνομάζωμεν *ἐπιφάνειαν* τῆς σφαίρας;

Γενικῶς, τί καλεῖται *ἐπιφάνεια* παντὸς σώματος;

Γραμμαὶ εὐθεῖαι, τεθλασμέναι καὶ καμπύλαι.

8. Εὐθεῖα γραμμή. — Πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ πρίσματος καὶ τῆς πυραμίδος ἔχουν τὸ αὐτὸ σχῆμα· τὸ ἴδιον σχῆμα ἔχει καὶ νῆμα καλῶς τεντωμένον. Τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται *εὐθεῖαι γραμμαὶ* ἢ ἁπλῶς εὐθεῖαι. Εὐθείας δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου. Καὶ τὸ σχῆμα 9 παριστᾷ δύο εὐθείας.

Τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας (ἢ μέρους τῆς εὐθείας) λέγονται *σημεῖα*.

Ὅταν ἔχωμεν πολλὰς εὐθείας καὶ θέλωμεν νὰ τὰς διακρίνωμεν γράφομεν πλησίον τῶν ἄκρων αὐτῶν ἀπὸ ἓν γράμμα τῆς ἀλφαβή-

1) Δεικνύει ὁ διδάσκων.

του. Τότε δὲ καθεμία ὀνομάζεται μὲ τὰ δύο γράμματά της· π. χ. εἰς τὸ σχ. 9 ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Σχ. 9

9. Ἰδιότητες τῆς εὐθείας.— α΄) Μεταξὺ δύο σημείων, π. χ. τοῦ Α καὶ τοῦ Β (σχ. 9), μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν· ὥστε, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχουν δύο σημεῖα κοινά, συμπίπτουν.

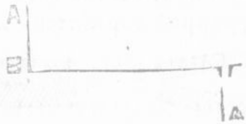
β΄) Εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ αὐξηθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της ὅσον θέλομεν (σχ. 10).

10. Τεθλασμένη γραμμή.— *Τμῆμα εὐθείας* λέγεται μέρος αὐτῆς περιοριζόμενον ὑπὸ δύο σημείων (*ἄκρων* τοῦ τμήματος)· π. χ. τὸ τμῆμα ΑΒ ἢ ΒΑ (σχ. 10). Ἐὰν διατρέξωμεν ἓν τμῆμα, τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως εἶνε ἡ *ἀρχὴ* τοῦ τμήματος, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἀφίξεως εἶνε τὸ *τέλος*.

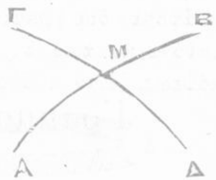
Τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε μὲν εὐθεῖα, ἀποτελεῖται ὅμως ἐκ τμημάτων εὐθείας τοιούτων, ὥστε ἡ ἀρχὴ τοῦ καθενὸς εἶνε τέλος τοῦ προηγουμένου· π. χ. τὸ σχ. 11.

Τὰ μὲν σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶνε αἱ *κορυφαὶ* τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ, τὰ δὲ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ εἶνε αἱ *πλευραὶ* αὐτῆς.

Σχ. 10.



Σχ. 11.



Σχ. 12.

11. Καμπύλη γραμμή. – Εἴδομεν ὅτι τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ πρίσματος καὶ τῆς πυραμίδος (δηλ. αἱ ἕδραι των) τελειώνουν εἰς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀποτελέσουν καὶ τεθλασμένην γραμμὴν ἐὰν τὰς λάβωμεν ὄχι χωριστὰ τὴν καθεμίαν ἀλλὰ ἡ ἀρχὴ τῆς μιᾶς νὰ εἶνε τέλος τῆς προηγουμένης.

Ἐὰν τώρα ἐξετάσωμεν τὴν γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου ἡ ἐπιφάνεια, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὁμοιάζει μὲ τὴν εὐθεῖαν ἢ μὲ τὴν τεθλασμένην γραμμήν, ***διότι κανὲν μέρος αὐτῆς δὲν εἶνε εὐθεῖα γραμμή.***

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς κλωστὴν ἢ λεπτὴν ἅλυσιν ὅταν τὴν κρεμάσωμεν ἐκ τῶν δύο ἄκρων χωρὶς νὰ τὴν τεντώσωμεν. Τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται *καμπύλαι γραμμαί*. Καὶ τὸ σχ. 12 παριστᾷ δύο καμπύλας γραμμάς, τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΓΔ, αἱ ὁποῖαι διὰ τῆς συναντήσεώς των προσδιορίζουν τὸ σημεῖον Μ. Καμπύλας γραμμὰς βλέπομεν εἰς τὴν Ἰχνογραφίαν ὅταν σχεδιάζωμεν φύλλον δένδρου, ἄνθος, στόμα, οὖς, ῥῖνας κ.λ.

12. Πῶς ἄγομεν εὐθεῖαν γραμμήν.— Ἐπὶ χαρτίου ἢ πίνακος μεταχειριζόμεθα *τὸν κανόνα* (κοινῶς ῥίγαν) ἢ νῆμα τεντωμένον τὸ ὁποῖον ἔχομεν τρίψει προηγουμένως διὰ κιμωλίας. Οἱ ξυλουργοὶ διὰ νὰ γράψουν εὐθεῖαν ἐπὶ σανίδος ἢ δοκοῦ, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ σχίσουν διὰ πρίονος, μεταχειρίζονται μακρὸν κανόνα ἢ συνηθέστερον βρέχουν νῆμα μὲ βαφὴν ἐρυθρὰν καὶ τεντώνουσιν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου εἰς τὸ ἄλλο· ἔπειτα λαμβάνοντες τὸ νῆμα ἀπὸ τοῦ μέσου ἀνυψοῦσιν αὐτὸ καὶ ἀφίνουν ἀποτόμως νὰ κτυπήσῃ τὴν σανίδα, ὁπότε ἀποτυπώνει διὰ τῆς βαφῆς εὐθεῖαν γραμμήν. Οἱ κηπουροὶ χαράσσουν εἰς τὸν κῆπον εὐθείας πρὸς τοποθέτησιν φυτῶν, μεταχειριζόμενοι σπάγγον τὸν ὁποῖον τεντώνουν διὰ πασσάλων. Ὁμοίως καὶ οἱ κτίσται. (1)

13. Πῶς ἐξακριβώνομεν τὴν εὐθύτητα τοῦ κανόνος.—Τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε ἡ μία ἀκμὴ ἢ κόψις αὐτοῦ νὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 13) ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα γραμμή, καὶ γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἔπειτα ἀνατρέπομεν τὸν κανόνα κατὰ τὸ σχ. 13 καὶ γράφομεν νέαν εὐθεῖαν διὰ τῆς αὐτῆς κόψεως. Ἐὰν αἱ δύο γραμμαὶ συμπίπτουν καθ' ὅλον τὸ μῆκός των,

Σχ. 13

τότε βεβαιούμεθα ὅτι ὁ κανὼν εἶνε ἀκριβής, δηλ. ἡ δι' αὐτοῦ ἀγομένη γραμμὴ εἶνε ἀκριβῶς εὐθεῖα· (ἐδ. 9α΄). Ἐὰν ὅμως γραφῶσι δύο διάφοροι γραμμαὶ ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ, ὁ κανὼν δὲν εἶνε ἀκριβής. Προχείρως ἐξελέγχομεν τὸν κανόνα διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ.

14. Ἰσότης τμημάτων εὐθείας. Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ τμημάτων. Ἐπιθέτομεν τὸ ἓν τμῆμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ ἄκρα Α καὶ Γ. ἐὰν τότε συμπίπτουν καὶ τὰ δύο ἄλλα ἄκρα Β καὶ Δ, τὰ τμήματα εἶνε ἴσα, δηλ. ΑΒ=ΓΔ·

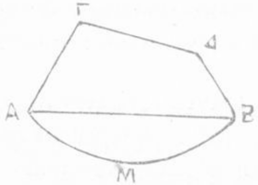
1) Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἀσκηθῶσιν εἰς τὴν γραφὴν εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ ἄνευ ὀργάνου.

εἰ δὲ μή, ἢ τὸ σημεῖον Δ θὰ πέσῃ μεταξὺ Α καὶ Β, ὅτε τὸ ΑΒ θὰ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ ΓΔ (ΑΒ > ΓΔ), ἢ τὸ Δ νὰ μὴ πέσῃ μεταξὺ Α καὶ Β, ὅτε τὸ ΑΒ θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ΓΔ (ΑΒ < ΓΔ).

Ἄθροισμα δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε τὸ τμῆμα ΚΛ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἂν ἐπὶ εὐθείας τινὸς λάβωμεν κατὰ σειρὰν τὰ τμήματα ΚΙ καὶ ΙΛ τὰ ὁποῖα εἶνε ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ περισσότερα τμήματα.

Διαφορὰ δύο τμημάτων ἀνίσων ΓΔ καὶ ΑΒ εἶνε τὸ τμῆμα τὸ ὁποῖον μένει ὅταν ἀπὸ τὸ μεγαλείτερον ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του ἀποκόψωμεν ἓν μέρος ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα.

Μέσον τμήματος ΑΒ εἶνε τὸ σημεῖον Μ διὰ τοῦ ὁποίου τὸ τμῆμα διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἴσα· ἤτοι ΑΜ=ΜΒ.



Σχ. 13'.

14'. Σύγκρισις γραμμῶν. — Ἐὰν μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β γράψωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἄλλας γραμμὰς τεθλασμένας ἢ καμπύλας ΑΓΔΒ, ΑΜΒ (σχ. 13'), *ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε ἡ συντομωτέρα ὅλων τῶν ἄλλων ποὺ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Β*. διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα αὕτη ΑΒ λέγεται ***ἀπόστασις*** τῶν δύο σημείων.

15. Ἐπιφάνειαι ἐπίπεδοι καὶ κυρταί. — Ἐὰν εἰς μίαν ἕδραν τοῦ κύβου ἢ τοῦ παραλληλεπιπέδου τοποθετήσωμεν τὴν κόψιν κανόνος ἢ νῆμα τεντωμένον, παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τοῦ πίνακος, τοῦ πατώματος, τοῦ καθρέπτου, τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος εἰς λεκάνην.

Αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἰς τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ καλοῦνται ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδα.

Ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ κύβου καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου, καθὼς καὶ τοῦ πρίσματος καὶ τῆς πυραμίδος, εἶνε ἐπίπεδα. Τὸ σύνολον δὲ τῶν ἑδρῶν τούτων λέγεται *τεθλασμένη ἐπιφάνεια ἢ πολυεδρική*, δηλ. ἐπιφάνεια ἡ ὁποία δὲν εἶνε μὲν ἐπίπεδος, ἀποτελεῖται ὅμως ἀπὸ ἐπίπεδα συνεχόμενα.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰ δύο μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἓν εἶνε ἐπίπεδον (διότι ἡ εὐθεῖα ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἐπ᾽ αὐτοῦ), τὸ δὲ ἄλλο δὲν εἶνε ἐπίπεδον, καλεῖται δὲ ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κώνου.

Καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη ἐπίπεδα καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε ἐπίπεδον, λέγεται δὲ ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν βλέπομεν εἰς τὰς ὑδροῤῥόας τῶν στεγῶν (κοινῶς λούκια), εἰς τοὺς θόλους τῶν ὑδραγωγείων καὶ μερικῶν γεφυρῶν, λέγεται ***κοίλη ἐπιφάνεια.***

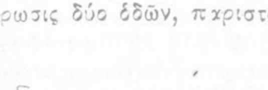
Οἱ ξυλουργοὶ καθιστῶσι τὴν ἐπιφάνειαν ξύλου ἐπίπεδον διὰ τῆς *πλάνης*. Φύλλον χαρτίου λεῖον τεντωμένον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη παριστᾷ ἐπίπεδον. Ἐὰν διπλώσωμεν αὐτό, ἤτοι ἐὰν θλάσωμεν εἰς δύο, τὰ μέρη τοῦ φύλλου εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται ἡ συνάντησις ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν. Ὥστε ἡ γραμμὴ τοῦ εἰς δύο θλωμένου ἐπιπέδου εἶνε εὐθεῖα ἢ *ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶνε εὐθεῖα.* Ἐπίσης τὰ συνεχόμενα ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν.

Ἐν ἐλλείψει ἄρα κανόνος δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν φύλλον χάρτου τεθλασμένον εἰς δύο.

Ἀσκήσεις διὰ τοῦ κανόνος. α᾽) Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ διέλθῃ εὐθεῖα γραμμή. β᾽) Διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου νὰ διέλθουν πέντε εὐθεῖαι. γ᾽) Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ προεκβληθῇ. δ᾽) Δοθέντων τριῶν σημείων, πῶς θὰ διακρίνωμεν ἂν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας;

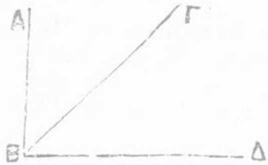
Περὶ γωνιῶν.

16. Ὁρισμοί.—***Γωνία*** λέγεται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἀρχίζουσαι χωρὶς νὰ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν (σχ. 14). Τὰ δύο σκέλη ἀνοικτοῦ διαβήτου ἢ ψαλίδος, δύο δάκτυλοι τῆς χειρός, ἡ διασταύρωσις δύο ὁδῶν, παριστῶσι γωνίας.



Σχ. 14

Τὸ σημεῖον Α ἐκ τοῦ ὁποίου ἀρχίζουν αἱ εὐθεῖαι λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς γωνίας, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ λέγονται ***πλευραὶ*** τῆς γωνίας. Τὴν γωνίαν ὀνομάζομεν ἢ μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς, π. χ. λέγομεν ἡ γωνία Α, ἢ μὲ τρία γράμματα, τῶν ὁποίων τὸ μὲν γράφεται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ τὸ τρίτον ἐπὶ τῆς κορυφῆς· π. χ. λέγομεν ἡ γωνία ΒΑΓ. Προσέχομεν ὅμως ὥστε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ γράφωμεν καὶ νὰ ἀναγινώσκωμεν *μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων*.

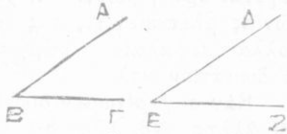


Σχ. 15

Ἡ διὰ τριῶν γραμμάτων ἀνάγνωσις τῆς γωνίας εἶνε ἀπαραίτητος ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν· π.χ. διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχ. 15 λέγομεν, ἡ γωνία ΑΒΓ, ἡ ΓΒΔ, καὶ ἡ ΑΒΔ.

Ἐνίοτε ὀνομάζομεν τὴν γωνίαν δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος τὸ ὁποῖον γράφομεν ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς.

17. Σύγκρισις δύο γωνιῶν.— (Σχ. 16). Ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ Β νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Ε, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΔΕ· ἐὰν τότε καὶ ἡ ΒΓ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΕΖ, αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι, ἤτοι ΑΒΓ=ΔΕΖ. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ΒΓ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΕΖ, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μικροτέρα τῆς ΔΕΖ, ἤτοι ΑΒΓ $<$ ΔΕΖ· ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ΒΓ πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΔΕΖ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ΔΕΖ, ἤτοι ΑΒΓ $>$ ΔΕΖ. Βλέπομεν ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν ἀλλ' ἐκ τοῦ ἀνοίγματος αὐτῶν· π χ. ὅταν δύο ὡρολόγια δεικνύουν τὴν αὐτὴν ὥραν, οἱ δύο δεῖκται ἑκάστου σχηματίζουν ἴσας γωνίας, ἀδιάφορον ἂν οὗτοι δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Οὕτω πᾶσα γωνία αὐξάνει στρεφομένης τῆς μιᾶς πλευρᾶς περὶ τὴν κορυφὴν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· Π. χ. ὅταν ὁ διαβήτης εἶνε κλειστός, γωνία δὲν σχηματίζεται, ἄρχεται δὲ σχηματιζομένη ὅταν τὸ ἓν σκέλος στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν.



Σχ. 16

18. Γωνίαι ἐφεξῆς, γωνίαι διαδοχικαί. Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α μιᾶς γωνίας ΒΑΔ (σχ. 15) φέρωμεν ἐντὸς αὐτῆς οἱανδήποτε εὐθεῖαν ΑΓ, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ κοινήν, τὰς δὲ δύο ἄλλας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς. Αἱ τοιαῦται γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*.

Ὥστε: *ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι ὅταν, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κείμεναι, ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευ-*

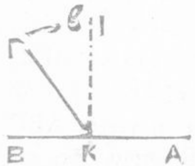
ρὰν κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς. Ἐὰν πλείονες γωνίαι παρατεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε καθεμία νὰ εἶνε ἐφεξῆς καὶ μὲ τὴν προηγουμένην καὶ μὲ τὴν ἑπομένην, λέγομεν ὅτι εἶνε *διαδοχικαί*.

19. Ἄθροισμα δύο γωνιῶν καὶ διαφορά. — Ἐὰν δύο γωνίας καταστήσωμεν ἐφεξῆς, ἐξαλείψωμεν δὲ τὴν κοινὴν πλευράν, προκύπτει γωνία ἡ ὁποία εἶνε *ἄθροισμα* τῶν δύο πρώτων· π. χ. ἡ γωνία ΒΑΔ (σχ. 15) εἶνε ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ, ἤτοι ΒΑΔ=ΒΑΓ+ΓΑΔ.

Ἡ γωνία ΒΑΓ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ΓΑΔ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ΒΑΔ, εἶνε *διαφορὰ* τῶν γωνιῶν ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ, ἤτοι ΒΑΓ=ΒΑΔ—ΓΑΔ.

Ἐὰν πλείονες γωνίαι τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ γίνουν διαδοχικαί, ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς ἐξαλείψεως τῶν ἐνδιαμέσων κοινῶν πλευρῶν εἶνε *ἄθροισμα* τῶν γωνιῶν τούτων.

20. Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι. Γωνίαι ὀρθαί, ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι.— Ἐὰν μία εὐθεῖα ΚΓ ἔχῃ τὸ ἓν ἄκρον της ἐπὶ ἄλλης εὐθείας ΑΒ (σχ. 17), σχηματίζει μετ' αὐτῆς δύο γωνίας ἐφεξῆς ΑΚΓ καὶ ΓΚΒ, αἱ ὁποῖαι ἐν γένει δὲν εἶνε ἴσαι, λέγεται δὲ ἡ ΚΓ *πλαγία* πρὸς τὴν ΑΒ.

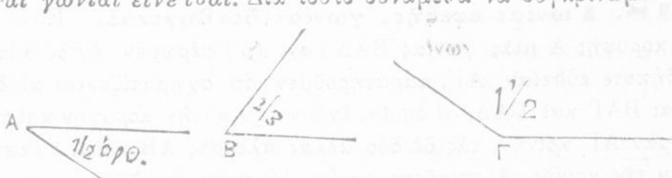


Σχ. 17

Ἐὰν ἡ ΚΓ στρεφομένη περὶ τὸ Κ κατὰ τὸ βέλος β λάβῃ τὴν θέσιν ΚΙ τοιαύτην, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΒΚΙ καὶ ΑΚΙ νὰ εἶνε ἴσαι, τότε ἡ εὐθεῖα ΚΙ λέγεται *κάθετος* ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΙ.

Ἡ γωνία τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην λέγεται *ὀρθὴ γωνία*· π. χ. ἡ γωνία ΙΚΑ ἢ ΙΚΒ (σχ. 17). Ὀρθὰς γωνίας βλέπομεν εἰς τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, εἰς τοὺς σταυρούς, εἰς πολλὰ κεφαλαῖα γράμματα, εἰς τὰ τετράδια καὶ τὰ βιβλία, εἰς τὸ δωμάτιον κτλ.

Ἐὰν συγκρίνωμεν δύο ὀρθὰς γωνίας, ἐπιθέτοντες τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης (ἐδ. 17), θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν. Ἄρα *πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι*. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς



Σχ. 18.

λοιπὰς γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν, λέγοντες π. χ. ὅτι ἡ γωνία Α εἶνε

$^{1}/_{2}$ τῆς ὀρθῆς (σχ. 18), ἡ γωνία Β εἶνε $^{2}/_{3}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἡ Γ εἶνε $1\,^{1}/_{2}$ ὀρθῆς.

Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται *ὀξεῖα*, μεγαλειτέρα δὲ τῆς ὀρθῆς *ἀμβλεῖα*· π. χ. αἱ μὲν γωνίαι Α καὶ Β εἶνε ὀξεῖαι, ἡ δὲ Γ ἀμβλεῖα (σχ. 18). Ἐὰν ὡρολόγιον δεικνύῃ τὴν 3ην ὥραν ἡ γωνία τῶν δύο δεικτῶν εἶνε ὀρθή, ἐὰν δὲ τὴν 2αν ἡ γωνία εἶνε ὀξεῖα καὶ ἐὰν τὴν 4ην ὥραν ἡ γωνία εἶνε ἀμβλεῖα.

21. Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί. — Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθήν, ἡ μία ἐξ αὐτῶν λέγεται *συμπλήρωμα* τῆς ἄλλης, ὁμοῦ δὲ λέγονται *γωνίαι συμπληρωματικαί*· π. χ. αἱ γωνίαι ΒΚΓ καὶ ΓΚΙ (σχ. 17). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, ἡ μία ἐξ αὐτῶν λέγεται *παραπλήρωμα* τῆς ἄλλης, ὁμοῦ δὲ λέγονται *γωνίαι παραπληρωματικαί*· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΚΓ καὶ ΓΚΒ (σχ. 17).

Ἰδιότητες α΄) ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εὐθείας ΑΒ φέρωμεν εὐθείας ὁσασδήποτε ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ (σχ. 19), ἀλλὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, τότε πᾶσαι αἱ διαδοχικαὶ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθάς· ἤτοι:

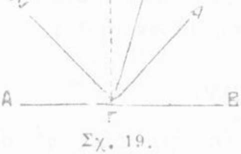
$$\text{ΑΓΖ} + \text{ΖΓΕ} + \text{ΕΓΔ} + \text{ΔΓΒ} = 2 \text{ ὀρθαί}.$$

Τοῦτο ἐννοοῦμεν εὐκόλως ἂν ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι τότε αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΑΓΖ, ΖΓΕ, ΕΓΔ, καὶ ΔΓΒ ἀθροιζόμεναι ἀποτελοῦν τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας ΚΓΑ καὶ ΚΓΒ.

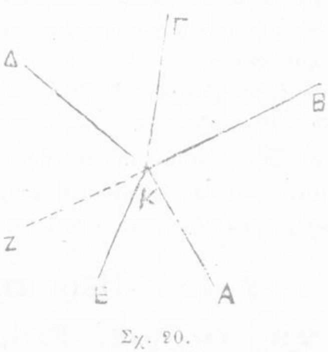
β΄) Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Κ ἑνὸς ἐπιπέδου φέρωμεν ἐπ᾿ αὐτοῦ εὐθείας καθ᾿ ὅλας τὰς διευθύνσεις τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς (σχ. 20), δηλ.

$$\text{ΑΚΒ} + \text{ΒΚΓ} + \text{ΓΚΔ} + \text{ΔΚΕ} + \text{ΕΚΑ} = 4 \text{ ὀρθαί}.$$

Τοῦτο ἐννοοῦμεν εὐκόλως ἂν προσεκβάλωμεν μίαν τῶν εὐθειῶν



Σχ. 19.



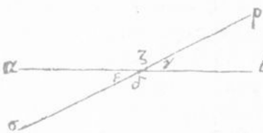
Σχ. 20.

π.χ. τὴν ΒΚ, διότι τότε αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι πρὸς τὸ ἓν μέρος

ΖΒ ὅσον καὶ αἱ κείμεναι πρὸς τὸ ἄλλο θὰ ἔχουν ὡς ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

22. Γωνίαι κατὰ κορυφήν.—Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας πέραν τῆς κορυφῆς σχηματίζεται νέα γωνία (σχ. 21, 22), ἡ ὁποία λέγεται *κατὰ κορυφὴν* αὐτῆς. Ὥστε δύο γωνίαι λέγονται *κατὰ κορυφὴν* ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶνε προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς

Σχ. 21.



Σχ. 22

ἄλλης. Τοῦ σχ. 21 αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι ὡς ὀρθαί· ἡ ἰδιότης αὕτη εἶνε γενική· π. χ. καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ε καὶ γ (σχ. 22) εἶνε ἴσαι. Διότι $\varepsilon+\zeta=2$ ὀρθαί, $\gamma+\zeta=2$ ὀρθαί (ἐδ. 21, σχ. 17). Ὅθεν $\varepsilon+\zeta=\gamma+\zeta$.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ζ, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶνε ἴσα. Ἄρα $\varepsilon=\zeta$. Ἐπίσης $\delta=\zeta$.

Ἀσκήσεις.

1) Διὰ διπλώσεως φύλλου χάρτου νὰ σχηματίσωμεν δύο εὐθείας καθέτους μεταξύ των.

2) Ἐκ τῆς γωνίας ΒΑΓ (σχ. 14) πῶς θὰ σχηματίσῃς ἄλλην ἡ ὁποία νὰ εἶνε παραπλήρωμα ἢ συμπλήρωμα ἐκείνης;

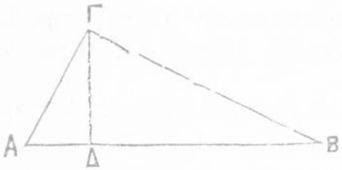
3) Διὰ διπλώσεως φύλλου χάρτου πῶς θὰ σχηματίσωμεν ἓξ διαδοχικὰς γωνίας ἴσας ἔκ τινος σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς; (ἐδ. 21 α΄). Μὲ ποῖον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται καθεμία τῶν γωνιῶν τούτων;

4) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐπιπέδου ἄγομεν τέσσαρας εὐθείας ἐπ' αὐτοῦ, σχηματίζονται δὲ 4 γωνίαι διαδοχικαὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ὀρθή, ἡ ἄλλη 1)4 ὀρθῆς καὶ ἡ τρίτη 1 1)8. Πόση θὰ εἶνε ἡ δ΄;

Περὶ τριγώνων.

23. Ὁρισμοί.—Καθεμία ἕδρα τῆς πυραμίδος τοῦ σχ. 4 εἶνε σχῆμα ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τεθλασμένην γραμμὴν κλειστήν· τὰ τοιαῦτα δὲ σχήματα λέγονται *τρίγωνα*· καὶ τὸ σχ. 23 παριστᾷ τρίγωνον. Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ τρεῖς γωνίας: Α, Β καὶ Γ, λέγονται δὲ ὁμοῦ *στοιχεῖα* τοῦ τριγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ τοῦ τριγώνου λέγεται *περίμετρος* αὐτοῦ.

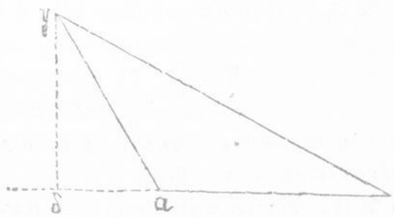
Ἀπόστασις ἑνὸς σημείου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ λέγεται ἡ κάθετος ΓΔ, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (σχ. 23 καὶ 24).



Σχ. 23.

Μία ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου δύναται νὰ ληφθῇ ὡς *βάσις*· ὕψος αὐτοῦ λέγεται ἡ κάθετος ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, δηλ. ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἀπέναντι βάσεως· π. χ. ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 23) ληφθῇ ὡς βάσις, τότε ὕψος εἶνε ἡ ΓΔ.

Τὸ ὕψος τριγώνου δύναται νὰ συναντᾷ τὴν βάσιν κατὰ τὴν προέκτασιν αὐτῆς (σχ. 24). Τοῦτο συμβαίνει ὅταν μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶνε ἀμβλεῖα.



Σχ. 24

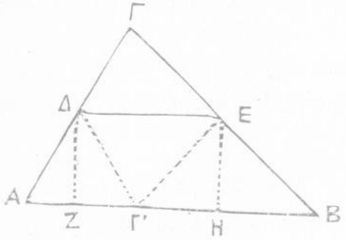
Τὸ ὕψος τριγώνου ἐκ χαρτίου ἔχοντος τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ὀξείας, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἐὰν θλάσωμεν αὐτὸ κατὰ εὐθεῖαν διὰ τοῦ Γ διερχομένην (σχ. 23) οὕτως, ὥστε αἱ γωνίαι ΓΔΑ καὶ ΓΔΒ νὰ εἶνε ἴσαι.

24. Ἰδιότητες τοῦ τριγώνου.—α' *Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων;*

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης ΑΓ + ΓΒ (σχ. 23), συμπεραίνομεν ὅτι *καθεμία πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

ΣΗΜ. Ἐὰν μᾶς δώσουν τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, ἡ τρίτη δὲν προσδιορίζεται μὲν ἐν γένει, ἀλλὰ δὲν εἶνε αὐθαίρετον τὸ μῆκος αὐτῆς. Οὕτω, τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ εἶνε 3 πήχ. καὶ 5 πήχ., ἡ τρίτη δὲν δύναται νὰ εἶνε 9 πήχ.

β') Μὲ πόσας γωνίας ὀρθὰς ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου;

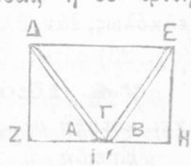


Σχ. 25

Διπλώνομεν χάρτινον τρίγωνον ΑΒΓ. (σχ. 25), κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ· τότε ἡ κορυφὴ Γ θὰ ἔλθῃ εἰς ἓν σημεῖον Γ' τῆς ΑΒ· ἐὰν κατόπιν στρέψωμεν τὴν ΑΔ περὶ τὴν ΔΖ (κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ) ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης ΔΓ' καὶ τὴν ΒΕ περὶ τὴν ΕΗ ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης ΕΓ', τότε τὰ σημεῖα Α καὶ Β θὰ ἔλθουν εἰς τὸ Γ'. Οὕτω τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐτοποθετήσαμεν διαδοχικῶς μὲ κοινὴν κορυφὴν τὸ Γ', κειμένας δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΖΗ (σχ 26). Λοιπὸν ἔχομεν Α+Β+Γ=2 ὀρθαί (ἐδ. 21 α). Ἄρα *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶνε δύο ὀρθαί.*

25. Ἡ γωνία γαδ (σχ. 24), ἡ ὁποία σχηματίζεται ἐὰν μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου προεκβληθῇ, ὀνομάζεται *ἐξωτερικὴ γωνία* τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ δὲ α+β+γ=2 ὀρθαὶ καὶ βαγ+γαδ=2 ὀρθαί, συμπεραίνομεν ὅτι γαδ=β+γ, ἤτοι *ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.*

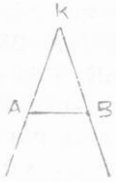
26. Εἴδη τριγώνων.—Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου, ἠμπορεῖ : α') νὰ εἶνε καὶ αἱ 3 ἴσαι· τότε τὸ τρίγωνον λέγεται *ἰσόπλευρον*. β') νὰ εἶνε μόνον δύο ἴσαι, ἡ δὲ τρίτη μεγαλειτέρα· τότε τὸ τρίγωνον λέγεται *ἰσοσκελές*. γ') νὰ εἶνε καὶ αἱ τρεῖς ἄνισοι, ὅτε τὸ τρίγωνον λέγεται *σκαληνόν*. Ἐὰν ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν μιᾶς γωνίας Κ λάβωμεν μήκη ἴσα : ΚΑ=ΚΒ (σχ. 27) καὶ φέρωμεν τὴν ΑΒ' κατασκευάζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΑΒ.



Σχ. 26

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ὡς *βάσις* λαμβάνεται συνήθως ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ ἄνισος πρὸς τὰς δύο ἄλλας, τὸ δὲ σημεῖον Κ λέγεται *κορυφὴ* αὐτοῦ. Ἰσοσκελῆ τρίγωνα βλέπομεν εἰς τὰ ἀετώματα τῶν οἰκιῶν καὶ τῶν παραθύρων (σχ. 28).

27. Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ἡ μία γωνία εἶνε ὀρθή (σχ. 29)· ἡ πλευρὰ ΒΓ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας λέγεται *ὑποτείνουσα*.



Σχ. 27

Σχ. 28.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐὰν ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, π. χ. ἡ ΑΒ, ληφθῇ ὡς βάσις, τότε ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶνε ἡ ἄλλη ΑΓ.

Αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶνε συμπληρωματικαί, ἤτοι Β + Γ = 1 ὀρθή.

Πᾶν τρίγωνον δύναται νὰ θεωρηθῇ ἄθροισμα δύο τριγώνων ὀρθογωνίων ἢ διαφορά, καθόσον τὸ ὕψος πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 23 καὶ 24).

Σχ. 29

28. Ἰδιότητες ἰσοσκελοῦς τριγώνου. α') Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς εὐθείας **ΑΒ** φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν (σχ. 30), ἑνώσωμεν δὲ ὁποιονδήποτε σημεῖον Κ τῆς καθέτου ταύτης μὲ τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΚΑ καὶ ΚΒ, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε ἴσαι καὶ ἑπομένως ***τὸ τρίγωνον ΚΑΒ θὰ εἶνε ἰσοσκελές***· ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΙΑΒ εἶνε ἰσοσκελές.

β') Τὸ ὕψος ΚΗ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου χωρίζει τὴν βάσιν εἰς δύο ἴσα μέρη ἢ πίπτει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως.

Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ ἐκ χαρτίου ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΚ (σχ. 31) περὶ τὸ ὕψος ΚΗ, τὸ μέρος ΒΗ τῆς βάσεως θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ΑΗ, διότι αἱ περὶ τὸ Η γωνίαι εἶνε ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἑπομένως ἡ ΚΒ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΚΑ, συγχρόνως δὲ θὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι, καθὼς καὶ αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Β. Ἄρα:

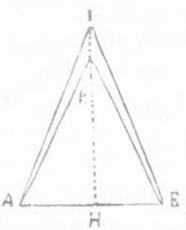
γ') Τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι Α καὶ Β εἶνε ἴσαι.

δ) *Τὸ ὕψος ΚΗ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη*. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διαιρεῖ μίαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας λέγεται *διχοτόμος*.

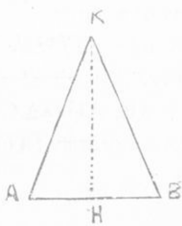
29. Σχήματα ἴσα.—Εἴδομεν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο τμημάτων εὐθείας (ἐδ. 14). Ἐν γένει λέγομεν ὅτι δύο σχήματα εἶνε ἴσα ὅταν ἐφαρμόζωσι δηλ. ὅταν ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου νὰ συμπίπτουν καθ' ὅλα των τὰ μέρη. Τοιαύτην ἐφαρμογὴν ἔχουν π. χ. τὰ ἀχνάρια πρὸς τὰ κοπτόμενα ὑφάσματα ἢ βέλος τι πρὸς τὸ εἴδωλον αὐτοῦ εἰς καθρέπτην.

Ἐὰν γράψωμεν διὰ μελάνης ἓν σχῆμα, π. χ. τὸ Ε καὶ προτοῦ ἡ μελάνη ξηρανθῇ, ἐπιθέσωμεν στυπόχαρτον, θὰ λάβωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ σχῆμα Ǝ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον ἀλλ' *ἀντεστραμμένον*.

30. Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων. Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ἰσότητος δύο σχημάτων ἐπιθέτομεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καὶ ἐξετάζομεν ἂν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν καθ' ὅλα των τὰ σημεῖα. Ἐν τούτοις προκειμένου περὶ τριγώνων ὑπάρχουν μερικαὶ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἐκ τῆς ἰσότητος μερικῶν στοιχείων.



Σχ. 30



Σχ. 31

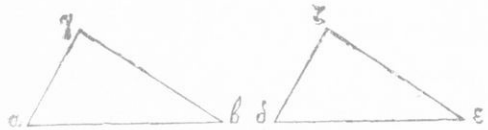
α') περίπτωσις.—***Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς δύο γωνίας αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα των ἴσας***: π. χ. τὰ τρίγωνα αβγ καὶ δεζ (σχ. 32) θὰ εἶνε ἴσα, ἂν ἔχουν αβ=δε καὶ γωνίαν α=γων. δ, γων. β=γων. ε.

β') περίπτωσις. ***Δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, ἐὰν μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση πρὸς μίαν γωνίαν τοῦ ἄλλου, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν τοῦ πρώτου εἶνε ἴσαι πρὸς τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν τοῦ δευτέρου*** (1). π. χ. τὰ τρίγωνα αβγ

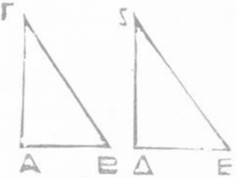
(1) Ἡ α' καὶ β' περίπτωσις δύνανται νὰ ἐξηγηθῶσιν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος διὰ τῆς ἐπιθέσεως τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

καὶ δεζ (σχ. 32) θὰ εἶνε ἴσα ἐὰν γων. α=γων. δ καὶ αβ=δε, αγ=δζ.

γ') **περίπτωσις.**—*Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἄλλου μία πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα θὰ εἶνε ἴσα.* Π. χ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 32) θὰ εἶνε ἴσα ἐὰν εἶνε ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΔ καὶ ΑΓ=ΔΖ.



Σχ. 32



Σχ. 33

31. Ἰσότης ὀρθογωνίων τριγώνων.—Καὶ διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύουν βεβαίως αἱ ἀνωτέρω τρεῖς περιπτώσεις ἰσότητος· ἔχομεν ὅμως καὶ περιπτώσεις εἰδικὰς διὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα.

α') **περίπτωσις.**—*Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 33) εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας (ΒΓ =ΕΖ) καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην Β=Ε.*

β') **περίπτωσις.**—*Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα* εἶνε ἴσα, ἐὰν *ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μία πρὸς μίαν.* Π. χ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 33) θὰ εἶνε ἴσα ἂν ἔχουν ἢ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας : ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, , ἢ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας (ΒΓ=ΕΖ) καὶ μίαν τῶν καθέτων (ΑΓ=ΔΖ).

Ἀσκήσεις

1) Ἐκ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἡ μία εἶνε 6 πήχ., τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων εἶνε εἷς ἀριθμὸς ἀκέραιος μικρότερος τοῦ 10. Ποῖος ἠμπορεῖ νὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;

2) Ἐὰν εἰς τὰς πλευρὰς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι εἶνε 3 πήχ., 4 π , καὶ 5 πήχ., προσθέσωμεν μῆκος α, δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς 3+α, 4+α καὶ 5+α ;

3) Τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶνε 4 πήχ , καὶ 9 πήχ. Ποία θὰ εἶνε ἡ τρίτη ἐὰν εἰξεύρωμεν ὅτι περιέχει ἀκέραιον ἀριθμὸν πήχεων ;

4) Ἐκ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἡ μία εἶνε 3)4 ὀρθῆς, ἡ ἄλλη 13|20 ὀρθ. Πόση εἶνε ἡ τρίτη ;

5) Τριγώνου ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς πόσον εἶνε καθεμία

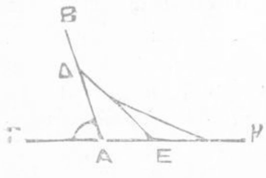
τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὑποτεινούσης ;

6) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶνε 5)9 ὀρθῆς. Πόσον εἶνε καθεμία ἐκ τῶν δύο ἄλλων ;

7) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν περίμετρος εἶνε 26 πήχ., ἡ δὲ βάσις 6 πήχ. Πόσον θὰ εἶνε καθεμία ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν;

8) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς βάσεως εἶνε $\frac{18}{90}$ ὀρθ. Πόσον εἶνε ἡ γωνία τῆς κορυφῆς;

9) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ περίμετρος εἶνε $18 + \frac{6}{8}$ πήχ. Πόσον θὰ εἶνε ἡ καθεμία πλευρά ;



Σχ. 34

10) Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον αἱ τρεῖς γωνίαι εἶνε ἴσαι, διότι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶνε καὶ ἰσοσκελές, ἀδιάφορον ποίαν τῶν πλευρῶν του θὰ λάβωμεν ὡς βάσιν. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία γωνία του;

11) Γωνίας ἐκ χαρτίου νὰ εὕρωμεν τὴν διχοτόμον διὰ διπλώσεως τοῦ χαρτίου.

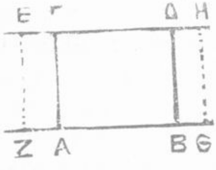
12) Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν μίαν τῶν πλευρῶν γωνίας πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, σχηματίζομεν ἄλλην γωνίαν, ἡ ὁποία εἶνε τὸ παραπλήρωμα (ἐδ. 21) τῆς πρώτης. Ἐὰν φέρωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τούτων, αὗται θὰ εἶνε κάθετοι μεταξύ των, δηλ. ἡ γωνία ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰς τὰς διχοτόμους ταύτας εἶνε ὀρθή. Διὰ ποῖον λόγον;

13) Προκειμένου νὰ στηθῇ εἰς τὸ ἓν τῶν πεζοδρομίων μιᾶς ὁδοῦ φανός, νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ πεζοδρομίου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὥστε νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν θυρῶν δύο οἰκιῶν, κειμένων τῆς μιᾶς εἰς τὸ ἓν πεζοδρόμιον καὶ τῆς ἄλλης εἰς τὸ ἄλλο.

14) Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ τῆς γωνίας ΒΑΓ καὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ἄλλης ΓΑ (σχ. 34) ληφθῶσι μήκη ἴσα ΑΔ καὶ ΑΕ, ἀχθῇ δὲ ἡ ΔΕ, ἡ γωνία ΔΕΑ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ΒΑΓ (ἐδ. 25) ἐπίσης ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προκύπτουσα γωνία ΖΗΕ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς **ΔΕΑ** ἢ τὸ τέταρτον τῆς ΒΑΓ.

Εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ παραλληλόγραμμα

32. Ὁρισμοί. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἀπέναντι ἀκμὰς μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου, τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 35), καὶ μάλιστα ἂς τὰς προεκτείνωμεν ἀπὸ δύο μέρη. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην, δηλ. αἱ ἀποστάσεις ΕΖ, ΓΑ, ΔΒ, ΗΘ κλπ., εἶνε ὅλαι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν θὰ συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν. Αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι ὀνομάζονται *παράλληλοι*, καθεμία δὲ ἐκ τῶν ἴσων καθέτων ΕΖ, ΓΑ, ΔΒ, λέγεται *ἀπόστασις* τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν. Ὥστε :



Σχ. 35

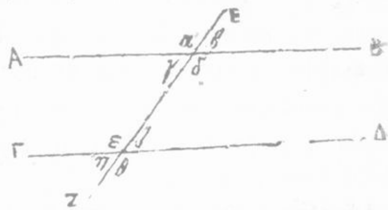
Παράλληλοι *λέγονται δύο εὐθεῖαι ὅταν, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι.*

Αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ πατώματος, τοῦ πίνακος, εἶνε συνήθως παράλληλοι.

Δεῖξε ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἀκμὰς παραλλήλους.

Αἱ εὐθεῖαι τὰς ὁποίας ἔχουν τὰ τετράδια διὰ νὰ ὁδηγοῦν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν γραφὴν εἶνε παράλληλοι.

33. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης. Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένας ὑπὸ τῆς ΕΖ (σχ. 36) τότε αἱ σχηματιζόμεναι περὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς 8 γωνίαι ὀνομάζονται, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, ὡς ἑξῆς ἀναλόγως τῆς θέσεώς των :



Σχ. 36

1) *Γωνίαι ἐντὸς ἐναλλάξ.* Τοιαῦται εἶνε αἱ γ καὶ ζ, αἱ δ καὶ ε· δηλ. κεῖνται ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΕΖ καὶ μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΓΔ.

2) *Γωνίαι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.* Τοιαῦται εἶνε αἱ γ καὶ ε, δ καὶ ζ· δηλ. κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΕΖ καὶ μεταξὺ τῶν ΑΒ, καὶ ΓΔ.

3) *Γωνίαι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.* Τοιαῦται εἶνε αἱ α καὶ ε, β καὶ ζ, η καὶ γ, θ καὶ δ· δηλ. κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέ-

ρος τῆς ΕΖ, ἀλλ' ἡ μὲν μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἡ δὲ ἐκτὸς αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ εἶνε *παράλληλοι*, τότε μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς σχέσεις :

1) *Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

2) *Αἱ ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

3) *Αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαί.*

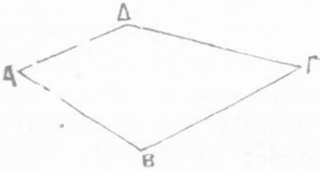
34. Ὁρισμοί. — Ἂς θεωρήσωμεν τὴν πυραμίδα τοῦ σχ. 5. Ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς ὅλαι μὲν αἱ ἄλλαι εἶνε τρίγωνα ἐκτὸς μιᾶς ἡ ὁποία εἶνε ἐπίπεδον σχῆμα, τελειώνει δὲ εἰς τεθλασμένην γραμμὴν κλειστὴν ἔχουσαν *τέσσαρας πλευράς*· διὰ τοῦτο ἡ ἕδρα αὕτη ὀνομάζεται *τετράπλευρον* καὶ λαμβάνεται ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.

Καὶ τὸ σχῆμα 37 παριστᾷ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶνε αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ.

Περίμετρος αὐτοῦ τί θὰ καλῆται;

Διαγώνιος τοῦ τετραπλεύρου λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἄγεται κ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ εἰς τὴν ἀπέναντι (τὴν μὴ διαδοχικήν), π. χ. ἡ ΑΓ.

35. *Μὲ πόσας ὀρθὰς γωνίας ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν 4 γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου;*

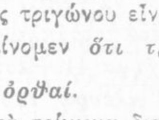


Σχ. 37

Διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ χωρίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 37) εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ καθενὸς τριγώνου εἶνε 2 ὀρθαί, συμπεραίνομεν ὅτι *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶνε 4 ὀρθαί.*

36. Εἴδη τετραπλεύρων. - Καθὼς εἰς τὰ τρίγωνα διεκρίναμεν (ἐδ. 26) διάφορα εἴδη ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν, οὕτω καὶ εἰς τὰ τετράπλευρα διακρίνομεν 5 διάφορα εἴδη :

α') **Τὸ τετράγωνον** *τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας (καὶ ἑπομένως ὀρθὰς) καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας.* Καθεμία ἕδρα τοῦ κύβου εἶνε τετράγωνον· καὶ τὸ σχ. 38 παριστᾷ τετράγωνον (1) μὲ τὰς διαγωνίους του.



Σχ. 38

(1) Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὸ τετράπλευρον ἐν γένει μὲ τὸ τετράγωνον.

β΄) **Τὸ ὀρθογώνιον,** *τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς.* Καθεμία ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 2) εἶνε ὀρθογώνιον· καὶ τὸ σχ. 39 παριστᾷ ὀρθογώνιον. *Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου εἶνε παράλληλοι καὶ ἴσαι· ἐπίσης αἱ ΒΓ καὶ ΑΒ.*

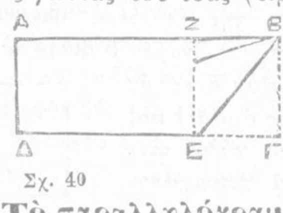
Σχ. 39

Ὀρθογώνια βλέπομεν ὅπου καὶ ἂν στρέψωμεν σχεδὸν τοὺς ὀφθαλμούς μας· π. χ. τὰ φύλλα τῶν τετραδίων, τῶν βιβλίων, μερικαὶ τράπεζαι, πατώματα καὶ τοῖχοι τῶν δωματίων, αἱ θύραι καὶ τὰ παραθυρόφυλλα, τὰ πλαίσια τῶν εἰκόνων, ἔχουν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον σχῆμα ὀρθογωνίου.

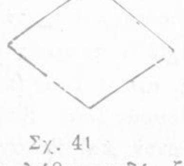
Μία τῶν πλευρῶν του, συνήθως ἡ μεγαλειτέρα, λαμβάνεται ὡς *βάσις*· ὡς ἡ ΑΒ· τότε δὲ ἡ ΒΓ ἢ ἡ ΑΔ (ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν) λέγεται *ὕψος* τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ὀνομάζουν τὴν μὲν βάσιν *μῆκος*, τὸ δὲ ὕψος *πλάτος*, καὶ μὲ ἓν ὄνομα *διαστάσεις* τοῦ ὀρθογωνίου.

ΣΗΜ. Ἐκ φύλλου χάρτου ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 40) κατασκευάζομεν τετράγωνον διπλώνοντες τὸ φύλλον εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΖ πίπτουσα κατὰ τὴν ΒΑ· κατόπιν κόπτομεν τὸ περισσεῦον φύλλον κατὰ τὴν ΕΖ.

γ΄) **Τὸν ῥόμβον.**— Ἂς λάβωμεν τέσσαρα ξυλάρια τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἂς ἀρθρώσωμεν τὰ ἄκρα των ὥστε νὰ ἀποτελέσουν τετράγωνον (*). Ἐὰν μεταβάλωμεν τὰς ὀρθὰς γωνίας του ὥστε αἱ μὲν δύο νὰ γίνουν ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀμβλεῖαι, τότε θὰ προκύψῃ νέον τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον λέγεται *ῥόμβος*. Τοιοῦτον εἶνε καὶ τὸ σχῆμα 41. Ὥστε: *ῥόμβος εἶνε τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς 4 πλευράς του ἴσας καὶ ἀνὰ δύο παραλλήλους, ὄχι ὅμως καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας* (εἰμὴ μόνον τὰς ἀπέναντι).



Σχ. 40

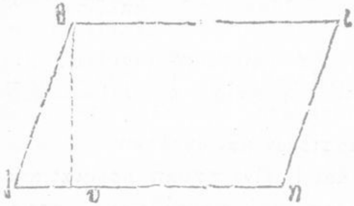


Σχ. 41

δ΄) **Τὸ παραλληλόγραμμον.** — Ἐὰν λάβωμεν δύο ξυλάρια

(*) Τέσσαρες διαδοχικαὶ παλάμαι τοῦ συσπαστοῦ μέτρου τοῦ τεχνίτου δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμεύσουν.

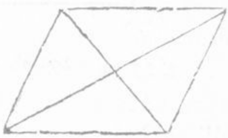
τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἄλλα δύο ἐπίσης τοῦ αὐτοῦ μήκους, ἀρθρώσωμεν δὲ τὰ ἄκρα των εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσωμεν ὀρθογώνιον καὶ μεταβάλωμεν τὰς ὀρθὰς γωνίας του, τότε θὰ προκύψῃ νέον σχῆμα τὸ ὁποῖον λέγεται *παραλληλόγραμμον*. Τοιοῦτον εἶνε καὶ τὸ σχῆμα 42. Ὥστε: *τὸ παραλληλόγραμμον εἶνε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι καὶ ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι*



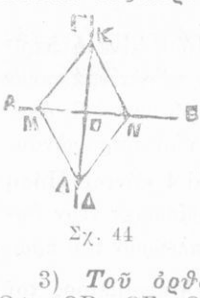
Σχ. 42

Μία τῶν πλευρῶν του συνήθως ἡ μεγαλειτέρα λαμβάνεται ὡς *βάσις* ὡς ἡ ζη· τότε δὲ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ὁποία ἄγεται ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς θι, λέγεται *ὕψος* τοῦ παραλληλογράμμου, π. χ. ἡ θυ.

Ἰδιότητες τῶν διαγωνέων. 1) Τὸ τετράγωνον, τὸ ὀρθογώνιον καὶ ὁ ρόμβος εἶνε μερικαὶ περιπτώσεις τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου τέμνονται, εἶνε τὸ μέσον καὶ τῶν δύο διαγωνίων· δηλ. *παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ τέμνωνται εἰς ἴσα μέρη*, ἤτοι ΚΘ=ΛΘ καὶ ΜΟ=ΝΟ(σχ 44).


Σχ. 43

2) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου ἐκτὸς τοῦ ὅτι τέμνονται εἰς ἴσα μέρη, *εἶνε καὶ κάθετοι μεταξύ των καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων τὰς κορυφὰς ἑνώνουσιν*. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ρόμβον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Λαμβάνομεν δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς σχῆμα σταυροῦ (τεμνομένας εἰς ὀρθὴν γωνίαν)· ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς τομῆς των Ο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας ΓΔ τὰ ἴσα τμήματα ΟΚ καὶ ΟΛ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης δύο ἄλλα ἴσα τμήματα ΟΜ καὶ ΟΝ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΚΜ, ΜΛ, ΛΝ καὶ ΝΚ προκύπτει ὁ ρόμβος.



Σχ. 44

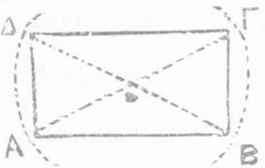
3) *Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶνε ἴσαι·* ἑπομένως ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ (σχ. 45).

4) *Τοῦ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἶνε ἴσαι, κάθετοι μεταξύ των καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων τὰς κορυφὰς ἑνώνουσι* (σχ. 38).

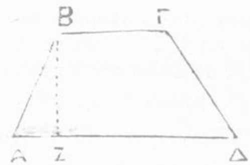
4) *Τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους*· τοιοῦτον εἶνε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 46). Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ λέγονται *βάσεις* τοῦ τραπεζίου, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν ΒΖ *ὕψος*.

Ἐὰν αἱ δύο ἄλλαι πλευραί του ΑΒ καὶ ΓΔ (αἱ μὴ παράλληλοι) εἶναι ἴσαι, τὸ τραπέζιον λέγεται *ἰσοσκελές*. Ἰσοσκελῆ τραπέζια βλέπομεν εἰς τὰ πλευρὰ μερικῶν σκαφιδίων καὶ κιβωτίων.

Εἰς πᾶν τραπέζιον αἱ γωνίαι **Α** καὶ Β εἶνε παραπληρωματικαί, διότι εἶνε ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων βάσεων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ (ἐδ. 33). Ὁμοίως Γ+Δ=2 ὀρθ.



Σχ. 45



Σχ. 46

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς, σχηματίζομεν νέον τρίγωνον. Νὰ ἐξετάσωμεν τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος.

2) Κατασκεύασον ἐκ χαρτονίου ἢ λεπτῆς σανίδος τὰ 5 εἴδη τῶν τετραπλεύρων.

3) Τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶνε 5 πόντοι (*). Πόση εἶνε ἡ περίμετρος αὐτοῦ ; Ἐὰν ἐντὸς αὐτοῦ κατασκευάσωμεν νέον τετράγωνον ἔχον τὰς πλευράς του παραλλήλους τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς πόντου, πόση θὰ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ νέου τετραγώνου ;

4) Ὀρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶνε 6 πόντοι καὶ 4 πόντοι. Πόση εἶνε ἡ περίμετρος αὐτοῦ ; ἐὰν ἐντὸς αὐτοῦ κατασκευάσωμεν νέον ὀρθογώνιον ἔχον τὰς πλευράς του παραλλήλους τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ εἰς ἀπόστασιν $1\frac{1}{2}$ πόντων, πόση θὰ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ νέου ὀρθογωνίου ;

(*) Ὁ διδάσκων ἐξηγεῖ δι' ὀλίγων τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου τὸ ὁποῖον παρουσιάζει ἐνώπιον τῶν μαθητῶν.

5) Κατασκεύασον τετράγωνον ἔχον διαγώνιον 5 πόντων καὶ περὶ αὐτὸ ἄλλο τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 5 πόντους.

6) Ἡ περίμετρος ἀγροῦ τετραγωνικοῦ εἶνε 3840 μέτρα. Πόση εἶνε ἡ πλευρά;

7) Κατασκεύασον ρόμβον ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ διαγωνίους 4 πόντους καὶ 2 $\frac{1}{2}$ πόντους Μέτρησον τὴν πλευράν του.

8) Ἡ περίμετρος ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 12 μέτρων. Ποία θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου ;

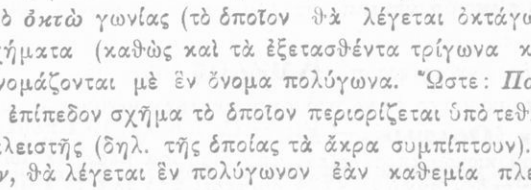
9) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶνε 60 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε τὰ 2]3 τῆς βάσεως. Ζητοῦνται αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

10) Παραλληλογράμμου ἡ μία γωνία εἶνε 1)2 ὀρθῆς αἱ δὲ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ εἶνε 3 $\frac{1}{2}$ πόντοι καὶ 3 πόντοι. Πόση εἶνε ἡ περίμετρος καὶ πόσον εἶνε καθεμία τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

Πολύγωνα ἐν γένει.

37. Ὁρισμοί.—Μερικαὶ πλάκες τῶν ὁποίων γίνεται συχνὴ χρῆσις πρὸς ἐπίστρωσιν ἐκκλησιῶν, διαδρόμων, αὐλῶν κλπ. ἔχουν σχῆμα ἐπίπεδον ἀποτελούμενον ἀπὸ *πέντε* πλευρὰς καὶ *πέντε* γωνίας (τὸ ὁποῖον θὰ λέγεται πεντάγωνον), ἢ ἀπὸ ἓξ πλευρὰς καὶ ἓξ γωνίας (τὸ ὁποῖον θὰ λέγεται ἑξάγωνον), ἢ ἀπὸ *ὀκτὼ* πλευρὰς καὶ ἀπὸ *ὀκτὼ* γωνίας (τὸ ὁποῖον θὰ λέγεται ὀκτάγωνον). Τὰ τοιαῦτα σχήματα (καθὼς καὶ τὰ ἐξετασθέντα τρίγωνα καὶ τετράπλευρα) ὀνομάζονται μὲ ἓν ὄνομα πολύγωνα. Ὥστε: ***Πολύγωνον*** λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ τεθλασμένης γραμμῆς κλειστῆς (δηλ. τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα συμπίπτουν).

Κυρτόν, θὰ λέγεται ἓν πολύγωνον ἐὰν καθεμία πλευρά του προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ ἓν μέρος



Σχ. 47

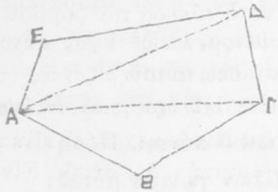
αὐτῆς. Π. χ. τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶνε κυρτόν, ἐνῷ τὸ αβγδε (σχ. 47) δὲν εἶνε, διότι ἡ πλευρὰ βγ (ἢ ἡ δγ) ἐκτεινομένη εἰσέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ.

Εἰς τὰ ἑπόμενα ὅταν λέγωμεν πολύγωνον θὰ ἐννοῶμεν τὸ κυρτόν.

Περίμετρος πολυγώνου τί θὰ καλῆται;

Διαγώνιος πολυγώνου λέγεται κάθε εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς. Φέρε ὅλας τὰς διαγωνίους τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ. 47) καὶ ἀρίθμησον αὐτάς.

38. *Μὲ πόσας ὀρθὰς γωνίας ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου;*



Σχ. 48

Ἐὰν ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ πολυγώνου φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους, διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα (σχ. 48). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων τούτων· ἄρα εἶνε τόσα ζεύγη ὀρθῶν ὅσα εἶνε τὰ τρίγωνα. Τὰ τρίγωνα δὲ εἶνε τόσα ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου πλὴν δύο. Ὥστε : ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τόσα ζεύγη ὀρθῶν ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ πλὴν δύο.***

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶνε $6-2=4$ ζεύγη ὀρθῶν ἢ 8 ὀρθαὶ γωνίαι. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τοῦ πενταγώνου, τοῦ ὀκταγώνου κλπ.

Ἄσκησις. Ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι ἑνὸς δωδεκαγώνου εἶνε ἴσαι, πόσον θὰ εἶνε ἡ καθεμία;

Κύκλος

39. Ὁρισμοί. — Εἰς τὰ ἐδ. 5,6 καὶ 15 εἴπομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ διάφορα μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶνε ἐπίπεδον σχῆμα, ἀλλὰ διαφέρει ἀπὸ ὅλα τὰ ἐπίπεδα σχήματα τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν μέχρι τοῦδε, δηλ. ἀπὸ τὰ πολύγωνα· διότι τὰ μὲν πολύγωνα περιορίζονται εἰς τεθλασμένην γραμμήν, τοῦτο δὲ εἰς καμπύλην.

Τὸ νέον τοῦτο σχῆμα λέγεται *κύκλος*· καὶ τὰ νομίσματα, μερικαὶ τράπεζαι καὶ κομβία κλπ. παριστῶσι κύκλους. Καὶ τὸ σχῆμα παριστᾷ κύκλον καὶ τοῦ κυλίνδρου τὰ δύο ἐπίπεδα μέρη εἶνε κύκλοι.

Ἡ καμπύλη γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος περατοῦται λέγεται *περιφέρεια*.

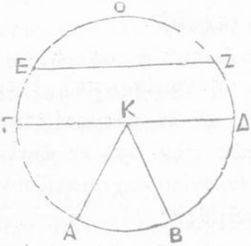
Σχ. 49

Ἐντὸς τοῦ κύκλου ὑπάρχει ἓν σημεῖον Κ (σχ. 49) τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ καλεῖται *κέντρον* τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ καθενὸς σημείου τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ κέντρου καλεῖται *ἀκτίς*. π. χ. τοῦ κύκλου Κ (σχ. 50) ἀκτῖνες εἶνε αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ ΚΔ.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου, *ὅλαι αἱ ἀκτῖνές του εἶνε ἴσαι.*

40. Πῶς γράφομεν περιφέρειαν. — α΄) Λαμβάνομεν νῆμα καὶ προσδένομεν εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ κιμωλίαν, ἔπειτα στηρίζοντες τὸ ἄλλο ἄκρον ἐπὶ τοῦ πίνακος περιστρέφομεν τὸ νῆμα τεντωμένον μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Εἶνε φανερὸν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἡ κιμωλία θὰ γράψῃ περιφέρειαν κύκλου μὲ κέντρον τὸ ἀκίνητον ἄκρον τοῦ νήματος.



Σχ. 50

β΄) Εὐκολώτερος τρόπος εἶνε μὲ τὸν *διαβήτην*, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἐκ δύο σκελῶν τὰ ὁποῖα καταλήγουν εἰς αἰχμὴν καὶ σχηματίζουν γωνίαν μεταβλητήν· γραφὶς στηριζομένη ἐπὶ τῆς μιᾶς αἰχμῆς γράφει περιφέρειαν (ἂν ἡ γωνία τοῦ διαβήτου ἢ τὸ ἄνοιγμα δὲν μετεβλήθη κατὰ τὴν περιστροφήν), τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶνε ἡ ἄλλη αἰχμή.

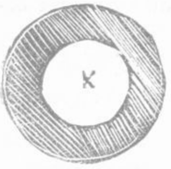
γ΄) Οἱ κηπουροὶ διὰ νὰ χαράξουν περιφέρειαν ἐπὶ ἐδάφους προσδένουν δύο χονδρὰ καρφία εἰς τὰ δύο ἄκρα σχοινίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας τὴν ὁποίαν θέλουν νὰ χαράξουν· τὸ μὲν ἓν καρφίον ἐμπήγουν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (εἰς τὸ κέντρον), τὸ δὲ ἄλλο περιστρέφουν μὲ τὸ σχοινίον τεντωμένον. Οὕτω ἐργάζονται καὶ οἱ ξυλουργοὶ προκειμένου νὰ χαράξωσι περιφέρειαν ἐπὶ σανίδος, ὅταν ὁ διαβήτης δὲν ἐξαρκῇ.

41. Τόξον, χορδή — Μέρος οἱονδήποτε τῆς περιφερείας περιοριζόμενον εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ (σχ. 50) λέγεται *τόξον*· ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται *χορδὴ* αὐτοῦ. Τὸ τόξον ἀπαγγέλλεται διὰ τριῶν γραμμάτων. Π. χ. τὸ τόξον ΕΟΖ τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν ΕΖ.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται κάθε χορδὴ ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. *Αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶνε ὅλαι ἴσαι*, διότι καθεμία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας.

42. Τμῆμα, τομεύς.—Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου ΕΟΖ καὶ τῆς χορδῆς ΕΖ, ἤτοι τὸ ΕΖΟΕ, (σχ. 50) λέγεται *τμῆμα* τοῦ κύκλου.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα του ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, ἤτοι τὸ ΚΑΒΚ, λέγεται *τομεύς* (σχ. 50). Κύκλοι διαφόρου μὲν ἀκτῖνος, τοῦ αὐτοῦ δὲ κέντρου, λέγονται *ὁμόκεντροι*, τὸ δὲ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν μέρος λέγεται *στεφάνη* (σχ. 51).



Σχ. 51

43. Ἐπίκεντρος γωνία καλεῖται ἡ γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της εἶνε ἀκτῖνες, π. χ. ἡ γωνία ΒΚΔ (σχ. 50) πρὸς τὴν ὁποίαν *ἀντιστοιχεῖ* τὸ τόξον ΒΔ. Οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου σχηματίζουν ἐπίκεντρον γωνίαν, ἐπίσης αἱ ἀκτῖνες τροχοῦ ἁμάξης.

44. Ἰδιότητες ἐπὶ τοῦ κύκλου.— α′) *Ἐὰν δύο κύκλοι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας, ἔχουν ἀναγκαίως καὶ τὰς περιφερείας των ἴσας, καὶ ἑπομένως εἶνε ἴσοι*· π. χ. οἱ δύο ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἁμάξης ἢ οἱ δύο ὀπίσθιοι.

β′) *Καθεμία διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμιπεριφερείας) καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμικύκλια).* Περὶ τούτου πειθόμεθα, ἐὰν διπλώσωμεν κύκλον ἀπὸ χαρτίον κατὰ μίαν διάμετρον ΓΔ (σχ. 50) εἰς δύο τεμάχια καὶ περιστρέψωμεν τὸ ἓν περὶ τὴν διάμετρον ταύτην, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου· τότε τὸ τόξον ΓΟΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΑΒΔ, ὅταν δὲ ἐφαρμόσωσι τὰ τόξα, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ τεμάχια τοῦ κύκλου.

γ′) *Τὸ καθὲν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας του ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης εἰς οἱονδήποτε μέρος.* Ἑπομένως βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἰσότητος ἢ ἀνισότητος δύο τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν διὰ τῆς ἐπιθέσεως.

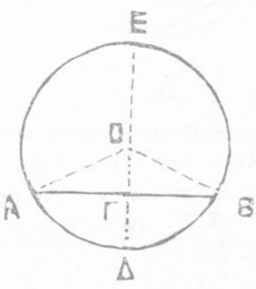
δ′) *Ἐὰν δύο τόξα* (ἢ μικρότερα ἢ μεγαλείτερα τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τὰ δύο) *τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων εἶνε ἴσα καὶ αἱ χορδαί των θὰ εἶνε ἴσαι.* Καὶ ἀντιστρόφως *ἐὰν αἱ χορδαὶ εἶνε ἴσαι καὶ τὰ τόξα θὰ εἶνε ἴσα.* Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ (σχ. 50) ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης τόξον ἴσον μὲ τὸ ΕΟΖ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν χορδὴν ἴσην μὲ τὴν ΕΖ.

ε) Ἐὰν εἰς ἕνα κύκλον θεωρήσωμεν *ἐπικέντρους γωνίας ἴσας* ΑΚΒ, ΒΚΓ καὶ ΓΚΔ (σχ. 52) συμπεραίνομεν ὅτι *καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ θὰ εἶνε* ἴσα. Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἐὰν δύο τόξα ἑνὸς κύκλου* (ἢ ἴσων κύκλων) *εἶνε ἴσα, θὰ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι.*

Σχ. 52

στ') *Ποίας ἰδιότητας ἔχει ἡ διάμετρος ἡ ὁποία ἄγεται κάθετος ἐπὶ μίαν χορδήν;*

Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ διάμετρος ΕΔ(σχ. 53). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶνε ἰσοσκελὲς ἐμάθομεν (ἐδ. 28 β') ὅτι τὸ ὕψος τοῦ ΟΓ πίπτει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως· ἄρα: *ἡ ἐπὶ χορδὴν κάθετος διάμετρος διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.*



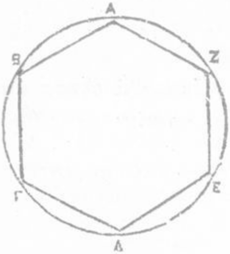
Σχ. 53

Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΟΓ εἶνε καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (ἐδ. 28 δ'), τὸ τόξα ΑΔ καὶ ΔΒ θὰ εἶνε ἴσα, διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι· ἄρα: *ἡ ἐπὶ χορδὴν κάθετος διάμετρος διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.*

43. Ἐγγεγραμμένα πολύγωνα.—Ἐμάθομεν ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶνε ἴσαι, τέμνονται δὲ καὶ εἰς τὸ μέσον των· (ἐδ. 36 δ'), δηλ. ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ (σχ. 45). Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα μίαν ἐξ αὐτῶν γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν 4 κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶνε γεγραμμένον ἐντὸς τοῦ κύκλου οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαί του ὅλαι νὰ ἐγγίζουν τὴν περιφέρειαν, λέγεται δὲ *ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.*

Γενικῶς ἓν πολύγωνον λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον,* ὅταν αἱ μὲν κορυφαί του κεῖνται εἰς τὴν περιφέρειαν, αἱ δὲ πλευραί του εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου. Τοιοῦτον πολύγωνον παριστᾷ καὶ τὸ σχῆμα 54. Ὁ κύκλος **Κ** τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ ἑξαγώνου λέγεται *περιγεγραμμένος* εἰς τὸ ἑξάγωνον.

46. Ἐγγεγραμμέναι γωνίαι. — Καθεμία γωνία τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, π. χ. ἡ ΑΒΓ (σχῆμα 54). λέγεται καὶ αὐτὴ *ἐγγεγραμμένη γωνία*. Γενικῶς *καλεῖται ἐγγεγραμμένη γωνία ἐκείνη ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὰς δὲ πλευράς της χορδὰς τοῦ κύκλου.*



Σχ, 54

Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 45) ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶνε καὶ διάμετρος, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὕτη εἶνε ὀρθή, ὡς γωνία τοῦ ὀρθογωνίου, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐὰν μία γωνία εἶνε ὀρθή, δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον. Καὶ ἀντιστρόφως: *Καθεμία γωνία ποὺ εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶνε ὀρθή.*

47. Κανονικὰ πολύγωνα. — Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (ἐδ. 26) ἔχει ὄχι μόνον τὰς πλευράς του ἴσας ἀλλὰ καὶ τὰς γωνίας του ἴσας (ἐδ. 28 γ΄). Ὁμοίως τὸ τετράγωνον (ἐδ. 36 α΄) ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ἐπίσης ἴσας. Τὰ τοιαῦτα πολύγωνα λέγονται διὰ τοῦτο *κανονικά*.

Γενικῶς ἓν *πολύγωνον λέγεται κανονικὸν ὅταν ἔχῃ τὰς πλευράς του ἴσας* καὶ τὰς γωνίας του ἴσας. Π. χ. ἐὰν τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 54) ἔχῃ καὶ τὰς ἓξ αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ἓξ αὐτοῦ γωνίας ἴσας, θὰ εἶνε *κανονικὸν ἑξάγωνον*.

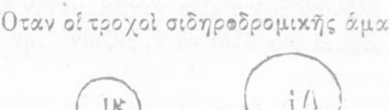
Ἀσκήσεις

1) Τὸ ὀρθογώνιον εἶνε κανονικὸν πολύγωνον καὶ διατί;

2) Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον διατί δὲν εἶνε κανονικόν; ὁ δὲ ῥόμβος;

3) Τοῦ κανονικοῦ (ἰσοπλεύρου) τριγώνου πόση εἶνε κάθε γωνία; τοῦ δὲ κανονικοῦ πενταγώνου;

48. Ἐφαπτομένη. — Ὅταν οἱ τροχοὶ σιδηροδρομικῆς ἁμαξοστοιχίας κυλίωνται ἐπὶ τῶν σιδηρῶν ῥάβδων, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθύγραμμος ῥάβδος ἐγγίζει τὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ εἰς ἓν μόνον σημεῖον (σχ. 55). Ἡ εὐθύγραμμος ῥάβδος λέγεται *ἐφαπτομένη* τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ.



Σχ 55

Γενικῶς ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου λέγεται κάθε εὐθεῖα ποὺ ἐγγίζει τὴν περιφέρειαν εἰς ἓν μόνον σημεῖον, π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 55), ἡ ὁποία ἐγγίζει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου Λ εἰς τὸ σημεῖον Δ, λέγεται ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Κ καὶ Λ· τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ λέγονται *σημεῖα ἐπαφῆς*.

Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας ἔχει τὴν ἀξιοσημείωτον ἰδιότητα *νὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν ἀγομένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς*, π.χ. ἡ ἐφαπτομένη ΑΒ (σχ. 55) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΓ ἢ ΛΔ·

Καὶ ἀντιστρόφως, *ἐὰν μία εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, θὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας*. Ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΓ δίδει τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ

Ἀσκήσεις. 1) Γράψε δύο περιφερείας ὁμοκέντρους, τὴν μίαν μὲ ἀκτῖνα δύο πόντους καὶ τὴν ἄλλην μὲ ἀκτῖνα διπλασίαν.

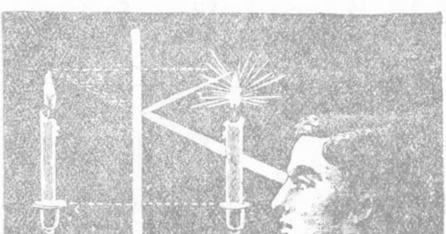
2) Μέτρησον διὰ τοῦ κανόνος τὴν διάμετρον διαφόρων κυκλικῶν σωμάτων (νομισμάτων, πινακίων, δίσκων κλπ.)

3) Πῶς διαιρεῖται μία περιφέρεια εἰς 4 ἴσα τόξα; (44 β')

4) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὐθείας 4 πόντων καὶ μὲ ἀκτῖνα 3 πόντων καὶ 2 πόντων, γράφομεν δύο περιφεερίας. Νὰ μετρηθῇ ἡ κοινὴ χορδὴ αὐτῶν.

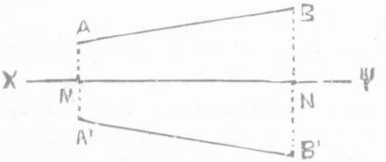
Σχήματα συμμετρικά

49. Ὁρισμοί. — Ἐὰν θέσωμεν ἔμπροσθεν καθρέπτου κηρίον ἀναμμένον θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τοῦ καθρέπτου ἄλλο κηρίον (τὸ εἴδωλον) ἀκριβῶς ἴσον καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν (σχ. 56). Τὸ ἀναμμένον κηρίον καὶ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ λέγονται *σχήματα συμμετρικὰ* ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ καθρέπτου. Ἐπίσης τὸ εἴδωλον δένδρου ἐπὶ λίμνης εἶνε σχῆμα συμμετρικὸν τοῦ δένδρου. Τὰ ἄκρα σημεῖα οἱασδήποτε διαμέτρου ἑνὸς κύκλου εἶνε συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον, διότι ΟΕ=ΟΔ (σχ. 50). Ἐν γένει, ***δύο σημεῖα Α καὶ Β λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἓν σημεῖον Κ, ἐὰν τὸ Κ εἶνε τὸ μέσον τῆς ΑΒ.***



Σχ. 56

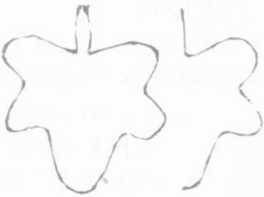
50 Συμμετρία πρὸς εὐθεῖαν. Τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ (σχ. 53) ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΕΔ (ἐδ. 44 Ϛ΄.) λέγονται *συμμετρικὰ* ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΕΔ, διότι ΑΓ=ΓΒ. Ἐν γένει, δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ λέγονται *συμμετρικὰ πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΧΨ* (σχ. 57), ἐὰν ἡ ΧΨ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Β΄ εἶνε συμμετρικὸν τοῦ Β ἐὰν εἶνε ΝΒ΄=ΒΝ. Ἡ εὐθεῖα ΧΨ λέγεται *ἄξων συμμετρίας.* Ὥστε *ἡ διάμετρος εἶνε ἄξων συμμετρίας τῶν σημείων τοῦ κύκλου.*

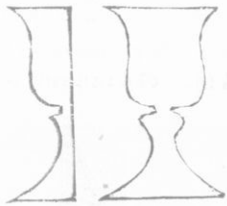


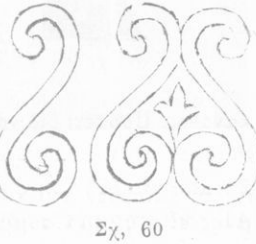
Σχ. 57

Ἐπίσης ἄξονες συμμετρίας εἶνε α΄) τὸ ὕψος ΚΗ τριγώνου ἰσοσκελοῦς (σχ. 31)
β΄) αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνώνουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραγώνου ἢ ὀρθογωνίου.
γ΄) Τὰ φύλλα μερικῶν φυτῶν, π. χ. τῆς ἀκακίας, τῆς συκῆς, ἔχουν ἐν γένει εἰς τὸ μέσον των ἄξονα συμμετρίας.

51. Ἐφαρμογαί. Ὅταν ὁ σχεδιαστὴς ἢ ὁ χαράκτης πρόκειται νὰ κατασκευάσῃ σχῆμα τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας, σχεδιάζει μόνον τὸ ἥμισυ αὐτοῦ (σχ. 58, 59, 60,) ἐνίοτε δὲ τὸ τέταρτον (ὅταν τὸ σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των). Οἱ ῥάπται καὶ αἱ ῥάπτριαι ἐφαρμόζουν τὴν ἰδιότητα τῆς συμμετρίας εἰς τὴν κοπὴν τοῦ ὑφάσματος.


Σχ. 58


Σχ. 59


Σχ. 60

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄.

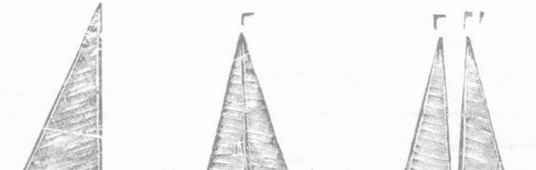
Γεωμετρικὰ προβλήματα κατασκευῆς

52. Πρόβλημα λέγεται μία πρότασις διὰ τῆς ὁποίας ζητεῖται νὰ γίνῃ κάτι ἢ νὰ εὑρεθῇ κάτι ἐξαρτώμενον ἀπὸ ἄλλα δεδομένα. Συνήθως τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις ἐὰν προσδιορισθῇ ἓν σημεῖον τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος (π. χ. τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, ἡ κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου, κλπ.) διὰ τῆς τομῆς δύο γραμμῶν (π. χ. δύο εὐθειῶν ἢ εὐθείας καὶ περιφερείας ἢ δύο περιφερειῶν.

53. Γεωμετρικὰ ὄργανα καὶ χρῆσις αὐτῶν — Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων γεωμετρικῶν χρειαζόμεθα ἁπλᾶ τινα ὄργανα. Εἶνε δὲ ταῦτα *ὁ κανών, ὁ γνώμων ὁ διαβήτης καὶ τὸ μοιρογνωμόνιον.* (1)

α΄) Διὰ τοῦ κανόνος ἄγομεν εὐθείας γραμμάς (ἐδ 12), ἀφοῦ πρότερον βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ κόψις αὐτοῦ εἶνε ἀκριβῶς εὐθεῖα γραμμή (ἐδ. 13).

β΄) *Ὁ γνώμων* ἔχει σχῆμα τριγώνου ὀρθογωνίου (σχ. 61). Τὴν εὐθύτητα τῶν κόψεων τοῦ γνώμονος ἐξακριβώνομεν καθὼς καὶ τοῦ



Σχ. 61 Σχ. 62 Σχ. 63

κανόνος. Προσέτι διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ γωνία Α εἶνε ὀρθή (σχ. 62) θέτομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ γνώμονος κατὰ μῆκος ἑνὸς κανόνος καὶ ἄγομεν τὴν ΑΓ· κατόπιν ἀναστρέφοντες τὸν γνώμονα ἄγομεν τὴν ΑΓ΄ διὰ τῆς αὐτῆς κόψεως. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶνε ὀρθή, αἱ εὐθεῖαι

---

(1) Μὲ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ εἶνε ἐφωδιασμένος ὁ διδάσκων διὰ νὰ τὰ παρουσιάσῃ ἐνώπιον τῶν μαθητῶν.

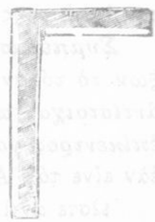
ΑΓ καὶ ΑΓ′ πρέπει νὰ συμπέσουν, εἰ δὲ μὴ (σχ. 63) ὁ γνώμων δὲν εἶνε ἀκριβής.

Ὁ γνώμων χρησιμεύει εἰς τὴν κατασκευὴν καθέτων εὐθειῶν ἢ ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἐνίοτε ὁ γνώμων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κανόνας (ξυλίνους ἢ σιδηροῦς) συνηνωμένους κατ᾽ ὀρθὴν γωνίαν.

Τὸν γνώμονα μεταχειρίζονται συχνὰ οἱ ξυλουργοί, οἱ κτίσται, οἱ λιθοξόοι, οἱ ῥάπται, κτλ.

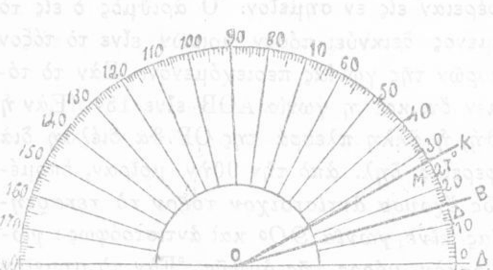
γ′) Διὰ τοῦ διαβήτου γράφομεν περιφερείας (ἐδ. 40)· προσέτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τμῆμα ΑΒ (σχ. 10) ἴσον μὲ γνωστὸν μῆκος, ἐπίσης λαμβάνομεν καὶ τόξον ἴσον μὲ ἄλλο δοθὲν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἄλλου κύκλου ἴσου. (ἐδ. 44δ′)



Σχ. 64

Ὥστε μὲ τὸν διαβήτην ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν (ἐδ. 14), ἐπίσης καὶ τὴν διαφορὰν δύο εὐθειῶν, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

δ′) Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶνε ἓν ἡμικύκλιον ἐκ διαφανοῦς ὄνυχος (ἢ ζελατίνης), ἢ ἐκ μετάλλου, ἢ ἐκ λεπτῆς σανίδος. τὸ τόξον αὐτοῦ, δηλ. ἡ ἡμιπεριφέρεια, εἶνε διῃρημένον εἰς 180 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*· ὥστε ὅλη ἡ περιφέρεια ἔχει 360 μοίρας.



σχ. 65

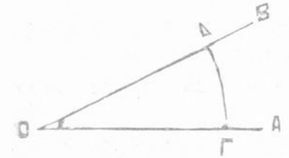
Διὰ νὰ ἀποφύγουν τὰ κλάσματα τῆς μοίρας, διαιροῦν καθεμίαν μοῖραν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ πρῶτα*, ἀλλὰ καὶ κάθε λεπτὸν πρῶτον ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ δεύτερα*. Παριστῶμεν δὲ τὰς μοίρας δι᾽ ἑνὸς μικροῦ μηδενικοῦ γραφομένου δεξιὰ καὶ ἄνω τοῦ ἀριθμοῦ, τὰ πρῶτα λεπτὰ διὰ μιᾶς ὀξείας καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο ὀξειῶν. Οὕτω ἔχομεν π. χ. τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν

$15^0\ 35'\ 27''$ ὁ ὁποῖος φανερώνει 15 μοίρας, 35 λεπτὰ καὶ 27 δεύτερα.

54. Μέτρησις γωνιῶν. Τὸ μοιρογνωμόνιον χρησιμεύει εἰς τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν ἰδοῦ πῶς. Εἰς τὸ ἐδ. 44 ε′. ἐμάθαμεν τι ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ (σχ. 52) εἶνε ἴσα, θὰ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ, ΒΚΓ καὶ ΓΚΔ, ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΑΔ εἶνε τριπλάσιον τοῦ ΑΒ θὰ εἶνε καὶ ἡ γωνία ΑΚΔ τριπλασία τῆς ΑΚΒ.

Συμπέρασμα. ***Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ ΑΚΒ, τότε τὸ τόξον ΑΔ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ***, ἤτοι, ἐὰν εἶνε τόξ. ΑΔ=3, θὰ εἶνε καὶ γωνία ΑΚΔ=3.

Ὥστε ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν γωνίαν τινὰ ΑΟΒ μετροῦμεν τὸ τόξον ΓΔ. Πρὸς τοῦτο ἐπιθέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς μετρητέας γωνίας οὕτως ὥστε τὸ κέντρον του νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Ο τῆς γωνίας καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, π. χ. τὴν ΟΑ τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ ΟΒ τῆς γωνίας θὰ συναντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς ἓν σημεῖον. Ὁ ἀριθμὸς ὁ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο γεγραμμένος δεικνύει πόσον μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον ΓΔ, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον. Ἐὰν τὸ τόξον ΓΔ εἶνε 15°, λέγομεν ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶνε 15°. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ὀρθή, ἡ ἄλλη πλευρά της ΟΒ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου τῆς ἡμιπεριφερείας, δηλ. ἀπὸ τὴν 90ὴν μοῖραν, ἐπομένως *μία ὀρθὴ γωνία ὡς ἔχουσα ἀντίστοιχον τόξον τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας εἶνε γωνία 90°* καὶ ἀντιστρόφως: *γωνία 1° εἶνε τὸ ἐνενηκοστὸν μέρος τῆς ὀρθῆς*. Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ ΟΒ συναντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, πίπτῃ, μεταξὺ τῆς 15ης καὶ 16ης μοίρας, τότε ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ ἰσοῦται πρὸς 15° καὶ ἓν κλάσμα τῆς μοίρας ἢ λεπτά.



Σχ. 61

Σημ. Δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μοιρῶν, λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων εἶνε ἴσα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους· εἰς ἀνίσους κύκλους τὰ τόξα ταῦτα εἶνε ἄνισα, αἱ ἐπίκεντροι ὅμως γωνίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰ τόξα ταῦτα εἶνε πάντοτε ἴσαι.

Ἀσκήσεις

1) Τί μέρος τῆς περιφερείας εἶνε τὸ τόξον 1°; Πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ 1)3 τῆς περιφερείας; τὸ 1)6; τὸ 1)10; τὸ 1)20, τὰ 3)5;

2) Ἡ μὲν γωνία $1 \frac{2}{3}$ ὀρθ. νὰ τραπῇ εἰς μοίρας, ἡ δὲ γωνία 125° 45′ εἰς ὀρθάς.

3) Τῆς μὲν γωνίας 23° 24′ νὰ εὕρῃς τὸ τετραπλάσιον, τῆς δὲ γωνίας 89° τὸ 1)5 καὶ τῆς 107° 25′ τὸ 1)4.

4) Τῆς γωνίας 25° 47′ νὰ εὕρῃς τὸ συμπλήρωμα καὶ τὸ παραπλήρωμα. Τῆς αὐτῆς γωνίας σχημάτισον τὴν κατὰ κορυφὴν καὶ εἰπὲ πόσον εἶνε καθεμία τῶν δύο ἄλλων σχηματιζομένων γωνιῶν.

5) Ἐκ χαρτίου κατασκεύασον γωνίαν ὀρθὴν καὶ διὰ θλάσεως αὐτοῦ γωνίαν 45°.

6) Πόσην γωνίαν σχηματίζουσιν οἱ δύο δεῖκται ὡρολογίου, ὅταν τοῦτο δεικνύῃ τὴν 2αν ὥραν; τὴν 4ην; τὴν 3 καὶ 1)4;

7) Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου κατασκεύασον γωνίας 60°, 120° 30°, 40° καὶ διαίρεσον αὐτὰς εἰς δύο ἴσα μέρη (διχοτόμος).

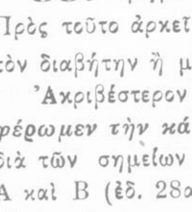
8) Τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε 63° 48′ 25″, ἡ δὲ ἄλλη 46° 19′. Πόση εἶνε ἡ τρίτη;

9) Πόσων μοιρῶν εἶνε καθεμία γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου; τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου; (ἐδ. 47).

Στοιχειώδη προβλήματα.

33. ***Τμῆμα εὐθείας ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἴσα.*** Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον αὐτοῦ **Μ** διὰ δοκιμῶν μὲ τὸν διαβήτην ἢ μὲ ἓν νῆμα.

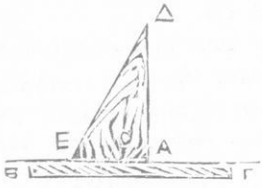
Ἀκριβέστερον ἐπιτυγχάνομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, *ἐὰν* ***φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.*** Αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β (ἐδ. 28α′). Ἑπομένως, ἐὰν μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράψωμεν δύο τόξα (σχ. 67), τὸ σημεῖον Γ ὅπου τέμνονται ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, ἐπίσης καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον τῆς τομῆς, τὸ Δ. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος, τέμνει δὲ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ.



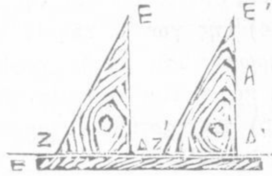
Σχ. 67

Σημ. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα ἐκτείνεται ἄνωθεν μόνον τῆς ΑΒ, ζητοῦμεν μὲ ἑτέραν ἀκτῖνα ἕτερον σημεῖον **Ε,** ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ, κατόπιν δὲ ἄγομεν τὴν ΓΕ.

36. Κατασκευὴ καθέτου. α΄) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς ἓν σημεῖον **Α** τῆς εὐθείας ΒΓ, ἀρκεῖ νὰ τοποθετήσωμεν τὸν γνώμονα ὡς δεικνύει τὸ σχ. 68 καὶ νὰ γράψωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΑ.



Σχ. 68

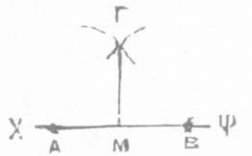


Σχ. 69

β΄) Ἐὰν τὸ σημεῖον **Α** ἐκ τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΒΓ (σχ. 69), ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτῆς τὸν κανόνα καὶ ἐπὶ τοῦ κανόνος τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος· ἔπειτα διατηροῦντες ἀκίνητον τὸν κανόνα σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπ' αὐτοῦ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸ Α. Τότε γράφομεν τὴν κάθετον ΑΔ΄.

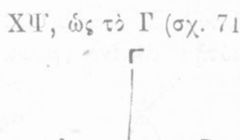
* **37.** Εἰς τὰ σχέδια εἰς τὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖται μεγάλη ἀκρίβεια ἡ κατασκευὴ καθέτων πρέπει νὰ ἐκτελῆται οὐχὶ διὰ τοῦ γνώμονος ἀλλὰ διὰ τοῦ διαβήτου (1) καὶ ἰδοὺ πῶς:

α΄) Ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΨ, ὡς τὸ Μ (σχ. 70), λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο δύο μήκη ἴσα ΜΑ=ΜΒ· κατόπιν μὲ τὸν διαβήτην γράφομεν δύο τόξα μὲ κέντρα **Α** καὶ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, δηλ. εὑρίσκομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (ἐδ. 55).



Σχ. 70

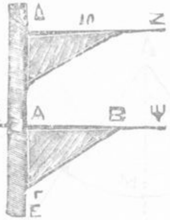
β΄) Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς ΧΨ, ὡς τὸ Γ (σχ. 71), μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ ἄγομεν τὴν ΓΜ, ἡ ὁποία θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος, ἤτοι ἡ **ἀπόστασις** τοῦ Γ ἀπὸ τῆς ΧΨ (ἐδ. 23).



Σχ. 71

(1) Ἡ θερμότης ἢ ἡ ὑγρασία δύνανται νὰ μεταβάλωσι τὸ σχῆμα τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος.

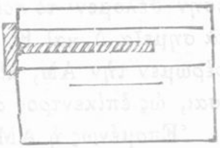
58. Κατασκευὴ παραλλήλων. Ἐὰν θέλωμεν νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΧΨ ἐξ ἑνὸς σημείου Μ (σχ. 72), τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα οὕτως ὥστε μία τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν, ἡ ΑΒ, νὰ ἐφαρμόσῃ κατὰ μῆκος τῆς ΧΨ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ προσαρμόζομεν ἕνα κανόνα. Διατηροῦντες ἀκίνητον τὸν κανόνα μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα μέχρις οὗ ἡ ΑΒ διέλθῃ διὰ τοῦ Μ, ὁπότε ἄγομεν τὴν ΜΖ· αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. (1) Τοῦτο συμπεραίνομεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν παραλλήλων (ἐδ. 32).



Σχ. 72

Ἐὰν ἡ ζητουμένη παράλληλος θέλωμεν νὰ ἔχῃ ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΧΨ, π. χ. δύο πόντους, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΕ, δηλ. ἐπὶ τοῦ κανόνος, μῆκος 2 πόντων ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

Σημ. Διὰ τὴν κατασκευὴν πολλῶν παραλλήλων χρησιμεύει μᾶλλον ὁ *ἡμίσταυρος* ἢ *Ταῦ* ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἐκ δύο κανόνων καθέτων ἐν σχήματι τοῦ γράμματος Τ. Τὴν χρῆσιν δεικνύει τὸ σχῆμα 73.


Σχ. 73.

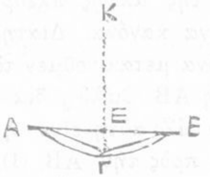
59. Διαίρεσις δοθείσης ΑΒ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, π. χ. εἰς ἑπτὰ (σχ. 74). Διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγομεν ἄλλην εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μὲ τὴν ΑΒ.

Σχ. 74

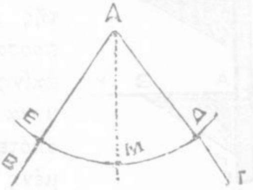
Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου 7 μήκη ἴσα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ Α, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ. Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ι, Θ, Η, Ζ, Ε, Δ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΚΒ (ἐδ. 58), αἱ ὁποῖαι διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς 7 μέρη ΒΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΑ. Εὐκόλως πειθόμεθα διὰ τοῦ διαβήτου ὅτι τὰ μέρη ταῦτα εἶνε ἴσα.

(1) Ἐννοεῖται ὅτι ὁ γνώμων καὶ τὸ σημεῖον πρέπει νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κανόνος.

60. Διχοτομία τόξων καὶ γωνιῶν. α΄) Ὅταν δοθῇ τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 75) καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον του, ἄγομεν τὴν χορδήν του καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Κ τὴν κάθετον ΚΕ ἐπ'



Σχ. 75



Σχ. 76

αὐτὴν (ἐδ. 56 ἢ 57 β΄). Ἡ εὐθεῖα ΚΕ προεκτεινομένη διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ, τὰ ὁποῖα εἶνε ἴσα (ἐδ. 44ϛ΄).

β΄) Ὅταν δοθῇ ἡ γωνία ΒΑΓ (σχ. 76) καὶ θέλωμεν νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς δύο γωνίας ἴσας, δηλ. νὰ φέρωμεν τὴν διχοτόμον της, γράφομεν τόξον μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα ὅσην θέλομεν· τὸ τόξον τοῦτο συναντᾷ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τοῦ τόξου ΔΕ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Μ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΜ, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΔΑΜ καὶ ΜΑΕ εἶνε ἴσαι, ὡς ἐπίκεντροι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἴσα τόξα. (ἐδ. 44ε΄).

Ἐπομένως ἡ ΑΜ εἶνε ἡ ζητουμένη διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

61. Διχοτομία γωνίας διὰ τοῦ γνώμονος. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μήκη ἴσα, ΑΗ καὶ ΑΘ (σχ. 77). Ἄγομεν τὴν ΗΘ καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτήν, τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία θὰ εἶνε διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ (ἐδ. 28δ΄).

Σχ. 77

Σχ. 78

* **62. Ἰδιότης διχοτόμου.** Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Ζ αὐτῆς φέρωμεν τὰς καθέτους ΖΗ καὶ ΖΘ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας (σχ. 78), αἱ κάθετοι αὗται εἶνε ἴσαι. Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΑΘ καὶ ΖΑΗ εἶνε ἴσα (ἐδ. 31α΄). Ὥστε *αἱ ἀποστάσεις*

παντὸς σημείου τῆς διχοτόμου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶνε ἴσαι.

Ἐκ τούτου πορίζόμεθα καὶ ἄλλον τρόπον κατασκευῆς τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μήκη ἴσα, ΑΘ = ΑΗ (σχ. 78). Ἐκ τῶν σημείων Θ καὶ Η φέρομεν ἐπὶ τὰς πλευρὰς καθέτους, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ζ. Ἡ ΑΖ εἶνε ἡ διχοτόμος.

Ἀσκήσεις.

1) Εὐθεῖα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς 4 μέρη ἴσα καὶ κατόπιν εἰς 8 (ἐδ. 55).

2) Εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ΑΒ=0, 035 νὰ ἀχθῶσι διὰ τοῦ γνώμονος κάθετοι ἐπ' αὐτήν, ἡ μὲν 0,015, ἡ δὲ 0,07. Νὰ μετρηθῇ ἡ τὰ ἄκρα τῶν καθέτων ἑνώνουσα εὐθεῖα.

3) Πῶς θὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς δένδρου τοῦ κήπου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιβάλλοντος τοίχου; (διὰ σπάγγου καὶ τοῦ μέτρου, θὰ στηριχθῶμεν δ' ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ἐδ. 28 β' τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου).

4) Δοθὲν τόξον νὰ διαιρεθῇ εἰς 4 μέρη ἴσα· τὸ αὐτὸ διὰ δοθεῖσαν γωνίαν.

5) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία τριπλασία δοθείσης (ἐδ. 63).

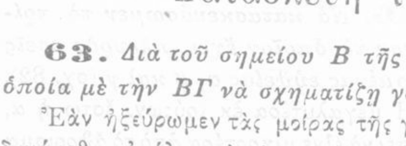
6) Διαίρεσον δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς 10 μέρη ἴσα.

7) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μήκους 14 πόντων καὶ νὰ διαιρεθῇ (μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον) εἰς 20 μέρη ἴσα (ὄχι διὰ τοῦ προβλήματος ἐδ. 59).

Κατασκευὴ τριγώνων.

63. *Διὰ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας ν' ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ὁποία μὲ τὴν ΒΓ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ὡρισμένην.*

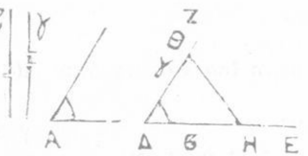
Ἐὰν ἠξεύρωμεν τὰς μοίρας τῆς γωνίας (π. χ. 30°, 45°, κλπ.), δυνάμεθα εὐκόλως νὰ τὴν κατασκευάσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.



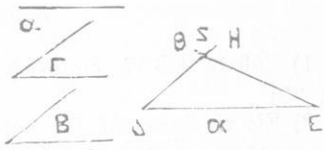
Σχ. 79.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν τὸ σχῆμα τῆς γωνίας, π. χ. τῆς **Α** (σχ. 79), τότε ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Μὲ τὰς κορυφὰς Β καὶ Α ὡς κέντρον γράφομεν τόξα ἴσης ἀκτῖνος, τὰ ὁποῖα συναντῶσι τὰς μὲν πλευρὰς τῆς γωνίας Α εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, τὴν δὲ ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΔΕ γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὸ πρῶτον εἰς τὸ Θ. Οὕτω προσδιωρίσθη τὸ τόξον ΖΘ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ τόξον ΔΕ (ἐδ. 44δ'). Ἄρα αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΖΒΘ καὶ Α εἶνε ἴσαι (ἐδ. 44ε').

64. *Δεδομένων τῶν δύο πλευρῶν β καὶ γ τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Α, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον* (σχ. 80). Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΔΗ ἴσον μὲ



Σχ. 80.



Σχ. 81.

β, ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία μὲ τὴν ΔΗ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Α (ἐδ 63), ἐπὶ δὲ τῆς εὐθείας ταύτης λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΔΘ ἴσον μὲ γ. Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν ΗΘ, κατασκευάζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΗΔΘ.

65. *Νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν μίαν πλευρὰν α καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι εἶνε εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς* (σχ. 81).

Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΔΕ, ἴσον μὲ τὸ α, ἐκ δὲ τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἄγομεν εὐθείας, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν ΔΕ νὰ σχηματίζουν γωνίας ἴσας μὲ τὰς δοθείσας.

Ἐκεῖ ὅπου συναντῶνται αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου.

Σχ. 82.

66. *Νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τρεῖς δεδομένας εὐθείας α, β καὶ γ* (σχ. 82).

Ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τούτων, ἔστω ἡ α, πρέπει νὰ εἶνε μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων (ἐδ. 24α').

Ἐὰν λάβωμεν εὐθεῖαν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν α, ἀπομένει νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου, πρὸς τοῦτο γράφομεν δύο περιφερείας, τὴν μίαν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν γ, τὴν ἄλλην μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν β. Αἱ δύο αὗται περιφέρειαι θὰ συναντῶνται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α'. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα, σχηματίζονται δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ Α' Β' Γ, τὰ ὁποῖα εἶνε ἴσα (ἐδ. 30γ'). Ἐξ αὐτῶν τὸ ἓν εἶνε τὸ ζητούμενον.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκεύασον τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς 24 γρ. καὶ 48 γρ., τὴν δὲ περιεχομένην γωνίαν 60°. Μέτρησον τὰς δύο ἄλλας γωνίας.

2) Κατασκεύασον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶνε 0,054 μ, αἱ δὲ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς γωνίαι 36° 72°. Μέτρησον κατόπιν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς καὶ τὴν τρίτην γωνίαν.

3) Κατασκεύασον διὰ τοῦ διαβήτου τρίγωνον ἰσόπλευρον μὲ πλευρὰς 3 δ. Μέτρησον καθεμίαν γωνίαν του.

4) Ἄνευ μοιρογνωμονίου πῶς θὰ κατασκευάσῃς τὰς γωνίας 60° 120° καὶ 30°; (τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καθεμία γωνία εἶνε 60°).

5) Ὀρθὴ γωνία νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 γωνίας ἴσας.

6) Κατασκεύασον τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 35, 40 καὶ 45 γρ. Μέτρησον τὰς γωνίας του καὶ τὰ ὕψη.

7) Τρίγωνον ἔχον πλευρὰς 5, 10 καὶ 15 δ. δύναται νὰ κατασκευασθῇ; καὶ διατί;

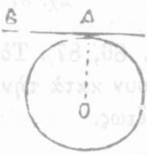
8) Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶνε 3 δ., ἡ δὲ διαγώνιος 4 δ.

9) Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 45) ἔχον ὑποτείνουσαν ὅσην θέλομεν, μία δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν, ἡ ΒΓ, νὰ εἶνε τὸ $^1/_2$ τῆς ὑποτεινούσης.

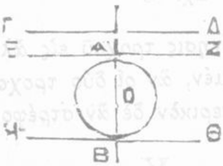
Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν γωνίαν Α τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης, θὰ τὴν εὕρωμεν 30°. Πόσον θὰ εἶνε ἡ ΑΓΒ;

Κατασκευὴ ἐφαπτομένων

*67. **Εἰς δοθὲν σημεῖον Α περιφερείας Ο ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη*** (σχ. 83)



Σχ. 83



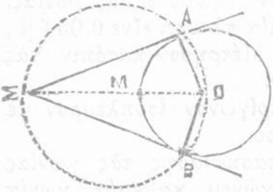
Σχ. 84.

Ἐμάθομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ (ἐδ. 48). Ἀρκεῖ λοιπὸν ἐκ τοῦ Α νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ.

*68. **Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη κύκλου παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΔ.*** (σχ. 84).

Ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐκ δὲ τῶν ἄκρων αὐτῆς Α καὶ Β ἄγομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΓΔ τὰς ΕΖ καὶ ΗΘ (δύο ἐφαπτόμεναι).

69. *Ν' ἀχθῶσιν ἐκ σημείου Σ ἐκτὸς κύκλου Ο κειμένου ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν* (σχ. 85).

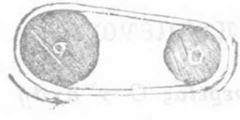


Σχ. 85

Ἄγομεν τὴν ΣΟ καὶ μὲ αὐτὴν ὡς διάμετρον γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Αἱ εὐθεῖαι Σ Α καὶ ΣΒ εἶνε ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν Ο. Διότι ἡ γωνία ΣΒΟ εἶνε ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον (ἐδ. 46) ἐπομένως ἡ ΣΒ, ἀφοῦ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, θὰ εἶνε ἐφαπτομένη.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΟΒ καὶ ΣΟΑ εἶνε ἴσα (ἐδ. 31β΄) ἄρα, ΣΑ=ΣΒ.

70. *Κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς δύο δοθέντας κύκλους.*—Ὅταν ἐκ δύο κύκλων ὁ εἷς δὲν κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου, εἶνε δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη κοινὴ καὶ εἰς τοὺς δύο. Ἡ ἐφαπτομένη αὐτὴ λέγεται *ἐξωτερικὴ* μὲν ὅταν οἱ κύκλοι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, *ἐσωτερικὴ* δὲ ὅταν κεῖνται ὁ εἷς ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ὁ ἄλλος ἀπὸ τὸ ἄλλο. Ἐφαρμογὴν τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων βλέπομεν ἰς διάφορα ἐργοστάσια ὅπου διὰ λωρίων μεταδίδεται ἡ περι-


Σχ. 86


Σχ. 87

στροφικὴ κίνησις τροχοῦ εἰς ἄλλον (σχ. 86, 87). Τὸ λωρίον εἶνε ἐξωτερικὸν μέν, ἂν οἱ δύο τροχοὶ στρέφουν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἐσωτερικὸν δὲ ἂν στρέφουν ἀντιθέτως.

Κατασκευὴ κύκλων

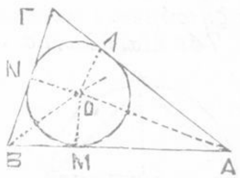
71. *Κύκλος περιγεγραμμένος περὶ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ* (σχ. 88).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ, εὑρίσκομεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἐκ δὲ τῶν μέσων ἄγομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς. Αἱ κάθετοι αὗται τεμνόμεναι προσδιορίζουν τὸ κέντρον Ο. Ἡ ἀπόστασιςτοῦ Ο ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς, π. χ. ἡ ΟΑ, εἶνε ἀκτίς. (ἐδ. 28α') Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α,Β καὶ Γ. Ὁ κύκλος οὗτος λέγεται *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Σχ. 88

72. ***Κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.***—Οὕτω καλεῖται ὁ κύκλος Ο (σχ. 89), τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔχει ἐφαπτομένας τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λέγεται *περιγεγραμμένον* εἰς τὸν κύκλον.

Ἐν γένει, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου εἶνε ἐφαπτόμεναι εἰς κύκλον, τὸ μὲν πολύγωνον λέγεται *περιγεγραμμένον* εἰς τὸν κύκλον, ὁ δὲ κύκλος *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πολύγωνον.



Σχ. 89

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος εἶνε ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, ἄγομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· τὸ σημεῖον Ο ὅπου συναντῶνται εἶνε τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Διότι, ἐὰν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου τὰς ΟΛ, ΟΜ, καὶ ΟΝ, αὗται εἶνε ἴσαι (ἐδ. 62).

Ἀσκήσεις

1) Νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἐφαπτομένας τὰς δύο πλευρὰς δοθείσης γωνίας ΒΑΓ. Μία μόνον τοιαύτη περιφέρεια ὑπάρχει ἢ πολλαί; τὰ κέντρα αὐτῶν ποῦ κεῖνται;

2) Νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἐφαπτομένας δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Μία μόνον τοιαύτη περιφέρεια ὑπάρχει ἢ πολλαί; Τὰ κέντρα αὐτῶν ποῦ κεῖνται;

3) Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα δοθέντος τόξου ἢ δοθείσης περιφερείας; (Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν 3 σημεῖα ἐπ' αὐτοῦ· ἐδ. 71).

4) Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον δίσκου κυκλικοῦ διὰ τοῦ γνώμονος (ἐδ. 46).

5) Μὲ ἀκτῖνα 15 γρ. γράψον περιφέρειαν ἐφαπτομένην εἰς τὰς πλευρὰς γωνίας 43°.

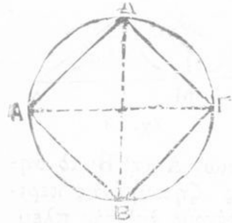
6) Γράψον περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν γωνίας 25° μὲ κέντρον ἀπέχον 3 δακ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας. Μέτρησον τὴν ἀκτῖνα.

Κατασκευὴ κανονικῶν πολυγώνων

73. Εἰς τὸ ἐδ. 47 ἐμάθομεν ποῖα πολύγωνα λέγονται κανονικά. Ἕνεκα δὲ τοῦ σχήματός των εἶνε συνήθως χρήσιμα καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μάθωμεν πῶς κατασκευάζονται τὰ κυριώτερα ἐξ αὐτῶν.

Ὁ εὐκολώτερος τρόπος εἶνε νὰ τὰ κατασκευάζωμεν ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον· πρὸς τοῦτο ἔχομεν τὸν ἑξῆς *κανόνα*: *Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μὲ 3, 4, 5, 6, κλπ. πλευρὰς διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 3, 4, 5, 6 κλπ. ἴσα τόξα· αἱ χορδαὶ τῶν τόξων τούτων ὁρίζουν τὸ ζητούμενον κανονικὸν πολύγωνον.*

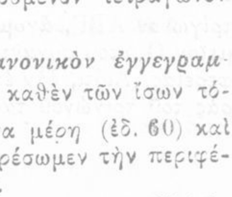
74. Παράδειγμα α') Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς *4* ἴσα μέρη, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 90) καθέτους μεταξύ των. Ἄγοντες τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τετράγωνον ΑΒΓΔ.



Σχ. 90

β') ***Οκτάγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον.*** Διαιροῦμεν τὸ καθὲν τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ (σχ. 90) εἰς δύο ἴσα μέρη (ἐδ. 60) καὶ ἄγομεν τὰς χορδάς. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς *16* ἴσα μέρη, κατόπιν δὲ εἰς 32 κλπ.

γ') ***Ἑξάγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον.*** Ἀρχίζοντες ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς περιφερείας λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου μῆκος (χορδῆς) ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς· ἔπειτα δὲ πάλιν ἀπὸ τοῦ Β (σχ. 91) λαμβάνομεν μῆκος ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ, κ. ο. κ. Οὕτω δὲ προχωροῦντες θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἄκρον τῆς ἕκτης χορδῆς πίπτει ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον Α ἐκ τοῦ ὁποίου ἠρχίσαμεν.



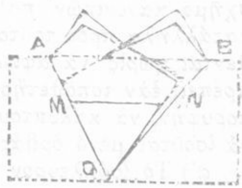
Σχ. 91

Λοιπὸν *κάθε τόξον ποὺ ἔχει χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἶνε τὸ* 1/6 *τῆς περιφερείας, ἤτοι* 60°.

Ἐὰν τὰς κορυφὰς Α, Γ καὶ Ε τοῦ ἑξαγώνου ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν, λαμβάνομεν *ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον* εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (σχ. 91).

Ἐὰν τὸ καθὲν τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ, . . . διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς, θὰ ἔχωμεν *κανονικὸν δωδεκάγωνον ἐγγεγραμμένον.*

75. *Κατασκευὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐκ χαρτίου.* Ἐκ φύλλου χάρτου ὀρθογωνίου κατασκευάζομεν κανονικὸν ἑξάγωνον ὡς ἑξῆς: Διπλώνομεν τὸ φύλλον ὥστε ἡ θλάσις (τσάκισις) νὰ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου. Εἰς ἓν σημεῖον Ο (σχ. 92) τῆς θλάσεως σχηματίζομεν διὰ δύο νέων διπλώσεων τρεῖς διαδοχικὰς γωνίας ἴσας (καθεμία θὰ εἶνε 60°), τὰς ὁποίας ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης εἰς τρόπον ὥστε νὰ φαίνεται μία γωνία, ἡ ΑΟΒ.



Σχ. 92

Ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΒ μήκη ἴσα ΟΜ καὶ ΟΝ. Ἐὰν διὰ ψαλίδος κόψωμεν τὸ διπλωμένον χαρτίον κατὰ τὴν ΜΝ καὶ ἐκτυλίξωμεν αὐτό, λαμβάνομεν ἑξάγωνον τὸ ὁποῖον εἶνε κανονικόν.

76. *Ἄλλοι τρόποι διαιρέσεως τῆς περιφερείας.* Ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς 5, 7, 9, 10, 15, κλπ. ἴσα μέρη, ἡ ὁποία δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἐδ. 74, γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους, οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνουν καὶ τὰς περιπτώσεις τοῦ ἐδ. 74.

α') ***Διὰ τοῦ διαβήτου.*** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς 7 ἴσα μέρη· Ἐκτιμῶμεν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ πόσον πρέπει νὰ εἶνε περίπου τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου καὶ στηρίζομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰς αἰχμὰς αὐτοῦ διαδοχικῶς. Ἐὰν οὕτω χωροῦντες ἴδωμεν ὅτι ἡ μία τῶν αἰχμῶν τοῦ διαβήτου πίπτει ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἠρχίσαμεν, ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη· εἰ δὲ μή, ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἕως οὗ ἐπιτύχωμεν τοῦτο.

β') ***Διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.*** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς 5 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν πεντάγωνον. Ἐπειδὴ τὸ 1)5 τῶν 360° εἶνε 72°, κατασκευάζομεν ἐπίκεντρον γωνίαν 72°, τὸ ἀντίστοιχον δὲ αὐτῆς τόξον θὰ εἶνε τὸ πέμπτον τῆς περιφερείας. Ἀφοῦ εὑρέθῃ τὸ ἓν ἐκ τῶν ἴσων μερῶν, καὶ τὰ λοιπὰ προσδιορίζονται ἢ ὁμοίως ἢ διὰ τοῦ διαβήτου.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκεύασον ἑξάγωνον κανονικὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 15 γρ. Πόση θὰ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ ἑξαγώνου τούτου;

2) Κατασκεύασον ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἐννεάγωνον (διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου).

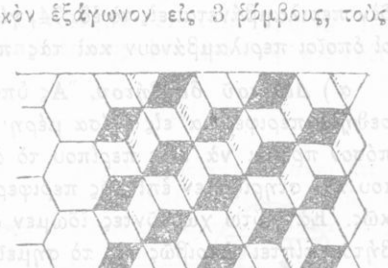
77. *Ἐφαρμογαί.*—Αἱ πλάκες τὰς ὁποίας συχνότατα μεταχειρίζονται πρὸς ἐπίστρωσιν αἰθουσῶν, διαδρόμων, αὐλῶν κλπ. ἔχουν σχῆμα κανονικῶν πολυγώνων. Ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα εἶνε κατάλληλα πρὸς τοῦτο; Ἐκεῖνα μόνον ὅσα δύνανται νὰ παρατίθενται χωρὶς νὰ ἀφίνουν κενὸν μέρος ἐν τῷ μεταξύ. Πρὸς τοῦτο πρέπει, ἐὰν τοποθετήσωμεν γωνίας τινὰς αὐτῶν περὶ μίαν κοινὴν κορυφήν, νὰ καλύπτουν ὅλον τὸ ἐπίπεδον, ἤτοι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθὰς ἢ 360° (ἐδ. 21β΄).

α΄) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἑξάγωνον, τῶν ὁποίων καθεμία γωνία εἶνε 60°, 90° καὶ 120°, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν εἰς πλακόστρωσιν· διότι, ἐὰν λάβωμεν περὶ μίαν κοινὴν κορυφὴν ἓξ τρίγωνα ἰσόπλευρα ($60^0 \times 6 = 360^0$) ἢ τέσσαρα τετράγωνα ($90^0 \times 4 = 360^0$), ἢ τρία ἑξάγωνα ($120^0 \times 3 = 360^0$), ἀποτελοῦνται περὶ αὐτὴν ἀκριβῶς 4 ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως δὲν μένουν κενά (σχ. 93).

Σχ. 93

Ἐνίοτε χωρίζουν τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς 3 ῥόμβους, τοὺς

Σχ. 94

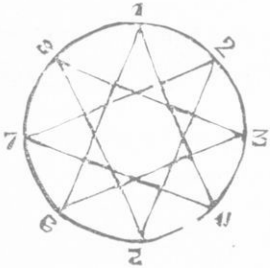


Σχ. 95

ὁποίους βάφουν μὲ διάφορα χρώματα, ὁπότε τὸ ἑξάγωνον φαίνεται ὡς κύβος (σχ. 95). Συνήθως συνδυάζουν κανονικὰ πολύγωνα δύο διαφόρων εἰδῶν, π. χ. ὀκτάγωνα καὶ τετράγωνα (σχ. 94).

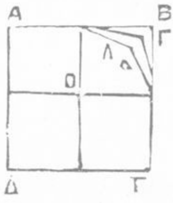
β') Τὸ κανονικὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶνε 108°, δὲν εἶνε κατάλληλον διὰ πλακόστρωσιν, διότι ὁ 360 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 108.

78. ***Πολύγωνα ἀστεροειδῆ.*** — α') Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα μέρη (σχ. 96) καὶ ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ σημεῖα 1 - 4, 2—5, 3—6, 4—7,5—3,6—1,7—2,8—3, προκύπτει πολύγωνον μὴ κυρτὸν (ἐδ. 37) ἔχον τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας· ἄρα εἶνε κανονικόν, λέγεται δὲ *ἀστεροειδὲς ὀκτάγωνον*.

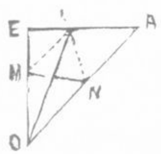


Σχ. 96

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὸ ἐκ χαρτίου ὡς ἑξῆς: Διπλώνομεν εἰς τέσσαρα ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 97). Διπλώνομεν ἐκ νέου τὸ τετράδιπλον χαρτίον κατὰ τὴν διχοτόμον ΟΑ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἔχομεν τὸ σχ. 98. Τέλος διπλώνομεν κατὰ τὴν διχοτόμον ΟΙ τῆς γωνίας ΑΟΕ



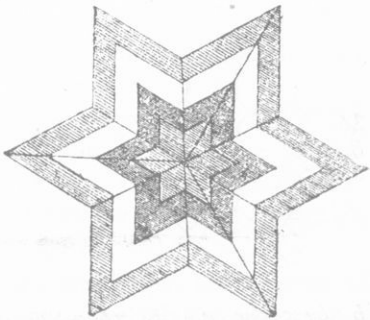
Σχ 97



Σχ, 98

καὶ μεταφέρομεν τὸ σημεῖον Ο εἰς τὸ Ι διὰ τῆς θλάσεως ΜΝ. Ἐὰν διὰ ψαλίδος κόψωμεν τὸ διπλωμένον χαρτίον κατὰ τὴν ΜΙ καὶ


Σχ. 99


Σχ. 100

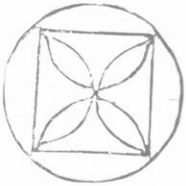
ΝΙ καὶ ἐκτυλίξωμεν, ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἀστεροειδὲς ὀκτάγωνον.

β΄) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 12 μέρη ἴσα καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς 1—6, 2—7, 3—8, κλπ., προκύπτει *κανονικὸν δωδεκάγωνον ἀστεροειδές*.

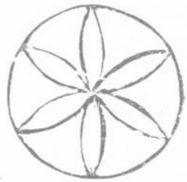
Τὸ ἀστεροειδὲς ἑξάγωνον προκύπτει διὰ τοῦ συνδυασμοῦ διὰ τριγώνων ἰσοπλεύρων (σχ. 99, 100)

γ΄) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 16 μέρη ἴσα καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς 1—8, 2—9, 3—12 κλπ., προκύπτει *δεκαεξάγωνον ἀστεροειδές*.

Ροδοειδῆ. Οὕτω ὀνομάζουν τὰ σχήματα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα



Σχ. 102



Σχ. 103

ἀποτελοῦνται ἐκ τόξων κύκλων διερχομένων ἐν γένει διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε κέντρον τοῦ ῥοδοειδοῦς, καὶ καταληγόντων ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (σχ. 102, 103).

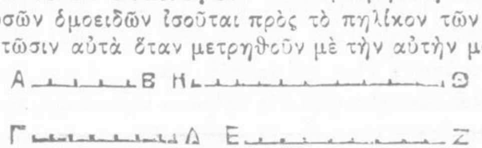
Ἀσκήσεις

1) Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς 5 μέρη ἴσα καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ 1—3, 2—4, 3—5 κλπ.· θὰ προκύψῃ πεντάγωνον ἀστεροειδές.

2) Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς 10 μέρη ἴσα καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ 1—4, 2—5, 3—6 κλπ.· θὰ προκύψῃ δεκάγωνον ἀστεροειδές.

Ἐπίπεδα σχήματα ὅμοια

79. Εὐθεῖαι ἀνάλογοι. Ἡ ἀριθμητικὴ διδάσκει ὅτι ὁ *λόγος* δύο ποσῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστῶσιν αὐτὰ ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα· π. χ.



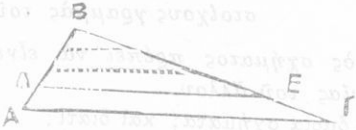
Σχ. 104

ὁ λόγος τῆς εὐθείας γραμμῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ (σχ. 104) εἶνε ὁ ἀριθμὸς $\frac{4}{6}$, ἤτοι $\frac{AB}{ΓΔ}=\frac{4}{6}$.

Ἐπίσης τῶν εὐθειῶν ΕΖ = 10 καὶ ΗΘ = 15 ὁ λόγος εἶνε $\frac{10}{15}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{10}{15}$ εἶνε ἴσα μὲ τὸ $\frac{2}{3}$, εἶνε καὶ μεταξύ των ἴσα. Ὅθεν ἕπεται: $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΕΖ}{ΗΘ}$. Ἡ ἰσότης αὕτη καλεῖται *ἀναλογία*, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΕΖ λέγονται *ἀνάλογοι* πρὸς τὰς ΓΔ καὶ ΗΘ.

Καὶ περισσότεραι εὐθεῖαι α, β, γ λέγονται *ἀνάλογοι* πρὸς ἄλλας ἰσαρίθμους δ, ε, ζ. . . . ἐὰν ὁ λόγος τῆς καθεμίας ἐκ τῶν πρώτων πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐκ τῶν δευτέρων εἶνε ὁ αὐτός, π. χ. ἐὰν εἶνε $\frac{α}{δ} = \frac{β}{ε} = \frac{γ}{ζ} = \frac{1}{3}$ ἢ $\frac{δ}{α} = \frac{ε}{β} = \frac{ζ}{γ} = 3$.

80. Ἀξιόλογον παράδειγμα εὐθειῶν ἀναλόγων εἶνε τὰ τμήματα ΒΔ, ΑΔ καὶ ΒΕ, ΓΕ (σχ. 106) τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τριγώνου τεμνομένων ὑπὸ εὐθείας ΔΕ παραλλήλου πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ ΑΓ, ἤτοι εἶνε



Σχ. 106

$$\frac{ΒΔ}{ΒΕ} = \frac{ΑΔ}{ΓΕ} \text{ ἢ } \frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{ΒΕ}{ΓΕ}$$

Ἀσκήσεις

Τμῆμα εὐθείας ΑΒ νὰ διαιρεθῇ δι' ἑνὸς σημείου Γ εἰς δύο τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ ἔχοντα λόγον 1 ἢ $^1/_2$ ἢ $^1/_3$ ἢ $^1/_4$ ἢ $^2/_3$ ἢ $^3/_5$.

81. Περὶ ὁμοιότητος—α') Θεωρήσωμεν χειρόμακτρον τραπέζης καὶ ῥινόμακτρον, ἀμφότερα σχήματος τετραγώνου, ἔστω δὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου διπλασία τῆς τοῦ 2ου. Τὰ δύο ταῦτα τετράγωνα λέγομεν ὅτι εἶνε ἐντελῶς *ὅμοια*, διότι αἱ πλευραί των εἶνε ἀνάλογοι (ἐδ. 79) καὶ αἱ γωνίαι των ἴσαι ὡς ὀρθαί. Ἐν γένει δύο οἱαδήποτε τετράγωνα εἶνε σχήματα ὅμοια.

β') Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρα, τὸ ἓν μὲ πλευρὰν 3 δακ. καὶ τὸ ἄλλο μὲ πλευρὰν 6 δακ., αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου, αἱ δὲ γωνίαι εἶνε ἴσαι, διότι καθεμία εἶνε 60°. Τὰ τρίγωνα ταῦτα λέγομεν ὅτι εἶνε ὅμοια.

γ') Ἐὰν ὁ ζωγράφος θέλῃ νὰ μεγεθύνῃ μίαν φωτογραφίαν (σχ.

107) πρέπει ὅλας τὰς γραμμὰς αὐτῆς νὰ διπλασιάσῃ ἢ νὰ τριπλασιάσῃ κλπ., τὰς δὲ γωνίας τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ γραμμαὶ αὗται νὰ διατηρήσῃ ἴσας· οὕτω θὰ προκύψῃ τὸ σχ. 108, τὸ ὁποῖον εἶνε μεγαλείτερον ἀλλὰ ἐντελῶς ὅμοιον μὲ τὸ σχ. 107. Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων βλέπομεν ὅτι δύο γνωρίσματα συνιστῶσι τὴν ὁμοιότητα. 1ον *αἱ γραμμαὶ τοῦ ἑνὸς σχήματος πρέπει νὰ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γραμμὰς τοῦ ἄλλου.* 2ον *Αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς σχήματος πρέπει νὰ εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου.*

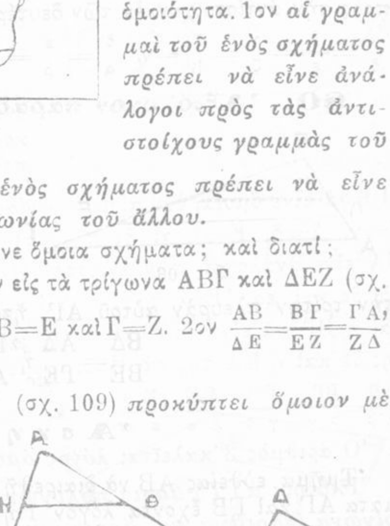
Σχ. 107

Σχ. 108

Δύο οἱαδήποτε ὀρθογώνια εἶνε ὅμοια σχήματα; καὶ διατί;

82. *Τρίγωνα ὅμοια.* Ἐὰν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 109) ὑποθέσωμεν ὅτι 1ον Α=Δ, Β=Ε καὶ Γ=Ζ. 2ον $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΓΑ}{ΖΔ}$, τότε τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια.

Δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 109) *προκύπτει ὅμοιον μὲ αὐτό, τὸ* ΑΗΘ, *ἐὰν ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν πλευράν, τέμνουσα τὰς λοιπὰς δύο.*



Σχ. 109

Τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ ἔχουν 1ον τὰς γωνίας των ἴσας (ἐδ. 33), 2ον μίαν γωνίαν Α ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων ΑΗ, ΑΘ καὶ ΑΒ, ΑΓ (ἐδ. 80), 3ον τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους.

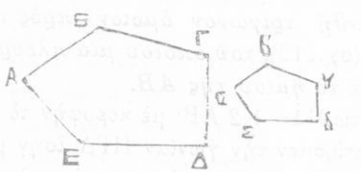
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ἐὰν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἀληθεύῃ μία τῶν συνθηκῶν τούτων, τὰ τρίγωνα θὰ εἶνε ὅμοια, ἤτοι δύο τρίγωνα θὰ εἶνε ὅμοια:

1ον *Ἐὰν αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου μία μὲ μίαν.*

2ον Ἐὰν μία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴση μὲ μίαν γωνίαν τοῦ *ἄλλου καὶ αἱ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν τοῦ πρώτου εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς περιεχούσας τὴν γωνίαν τοῦ δευτέρου.*

3ον *Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἄλλου.* (Παράβαλε τὰς περιπτώσεις ὁμοιότητος μὲ τὰ ἐν ἐδ. 30 περιπτώσεις ἰσότητος).

83. Πολύγωνα ὅμοια. Δύο πολύγωνα, ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν ἔχοντα, εἶνε ὅμοια, ἐὰν αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειρὰν λαμβανόμεναι μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τοῦ ἄλλου· *ἀντιστοίχους* δὲ πλευρὰς θὰ ὀνομάζωμεν τὰς συνδεούσας τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν. Π.χ. τὰ δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε (σχ. 110) θὰ εἶνε ὅμοια, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι των εἶνε ἴσαι, δηλ. Α=α, Β=β, Γ=γ, Δ=δ, Ε=ε, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ καὶ ΕΑ εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τοῦ ἄλλου: αβ, βγ, γδ, δε καὶ εα. Ἐὰν π. χ. ἡ ΑΒ εἶνε τριπλασία τῆς αβ, πρέπει καὶ ἡ ΒΓ νὰ εἶνε τριπλασία τῆς βγ καὶ ἡ ΓΔ τῆς γδ καὶ ἡ ΔΕ τῆς δε καὶ ἡ ΕΑ τῆς εα. Παριστῶμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:



Σχ. 110

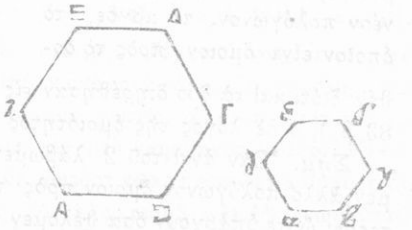
$$\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΓ}{βγ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΕ}{δε}=\frac{ΕΑ}{εα}=3.$$

Ὁ ἀριθμὸς 3 καλεῖται *λόγος ὁμοιότητος.*

Ἰδιότης: α') *Τὰ ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια* (σχ. 113).

β') (Ἀντιστρόφως) *Ἐὰν δύο πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια, τὰ πολύγωνα ταῦτα θὰ εἶνε ὅμοια.*

84. Ἔστωσαν δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ αβγδεζ (σχ. 111), τὸ πρῶτον μὲ πλευρὰν 2 δακ., τὸ δεύτερον μὲ πλευρὰν 1 δακ. Αἱ



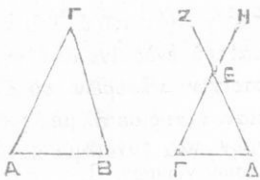
Σχ. 111

μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶνε ἴσαι, διότι καθεμία ἰσοῦται πρὸς 120° καὶ εἰς τὰ δύο ἑξάγωνα, αἱ δὲ πλευραί των εἶνε ἀνάλογοι, διότι ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου εἶνε ὁ αὐτός, δηλ. $\frac{AB}{\alpha\beta} = 2$ καὶ $\frac{B\Gamma}{\beta\gamma} = 2$ κ.τ.λ.

Ὥστε τὰ ἑξάγωνα ταῦτα, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, εἶνε *ὅμοια*.

Ἐν γένει, *δύο πολύγωνα κανονικά, ἔχοντα ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶνε ὅμοια.*

85. Κατασκευὴ ὁμοίων πολυγώνων. α΄) *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ* (σχ. 112), *τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ.*

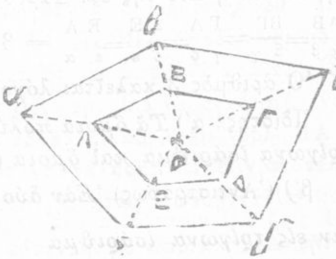


Σχ. 112

Ἔστω ΓΔ=1/2 ΑΒ· μὲ κορυφὴν τὸ Γ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΗΓΔ ἴσην μὲ τὴν Α (ἐδ. 63) καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Δ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΖΔΓ ἴσην πρὸς τὴν Β. Αἱ εὐθεῖαι ΓΗ καὶ ΔΖ τεμνόμεναι προσδιορίζουν τὴν τρίτην κορυφὴν Ε τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Σημ. Ἡ κατασκευὴ τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ ΑΒΓ ἐκτελεῖται διὰ τοῦ διαβήτου.

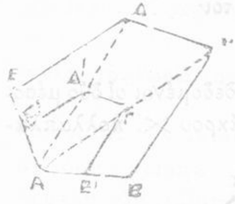
β΄) *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸ τὸ* ΑΒΓΔΕ. Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πολυγώνου (σχ. 113), ἐξ αὐτοῦ δὲ ἄγομεν εἰς τὰς κορυφὰς τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΕ. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ταύτας ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, π. χ. τὸν 2, καὶ ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε καὶ εα, σχηματίζομεν νέον πολύγωνον, τὸ αβγδε, τὸ ὁποῖον εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· διότι καὶ τὰ δύο διῃρέθησαν εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια (ἐδ. 83 β΄.), ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶνε 2.


Σχ. 113

Σημ. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ 2 λάβωμεν ἄλλον ἀριθμόν, κατασκευάζομεν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, μεγαλείτερον ἢ μικρότερον· ὥστε ὑπάρχουν ὅσα θέλομεν πολύγωνα ὅμοια πρὸς τὸ δοθέν.

Ἄσκησις. Νὰ ἐπαναληφθῇ ἡ ἀνωτέρω κατασκευή, ὅταν τὸ σημεῖον Ο τὸ λάβωμεν ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου.

Ἄλλος τρόπος κατασκευῆς: Ἀντὶ τοῦ Ο δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου, π. χ. τὴν Α, ἐκ τῆς ὁποίας φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ (σχ. 114). Ἐὰν θέλωμεν τοῦ

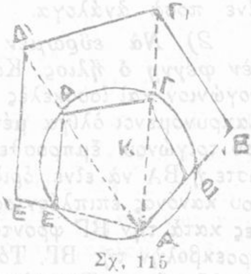


Σχ. 114

νέου πολυγώνου αἱ πλευραὶ νὰ εἶνε τὰ ἡμίση τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν ΑΒ′ = 1|2 ΑΒ, ἐκ δὲ τοῦ Β′ ἄγομεν τὴν Β′Γ′ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ μέχρι συναντήσεως μετὰ τῆς ΑΓ· ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ′ ἄγομεν τὴν Γ′Δ′ παράλληλον τῆς ΓΔ μέχρι συναντήσεως μετὰ τῆς ΑΔ· τέλος ἄγομεν τὴν Δ′Ε′ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ. Οὕτω προκύπτει τὸ πολύγωνον ΑΒ′Γ′Δ′Ε′, τὸ ὁποῖον εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι καὶ τὰ δύο εἶνε διῃρημένα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια (ἐδ. 83β′).

γ′.) Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν πολύγωνον ἔχον πλευρὰν α. Π. χ. Νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὸν πεντάγωνον τοῦ ὁποίου καθεμία πλευρὰ νὰ εἶνε 3 δακ.

Ἐγγράφομεν εἰς οἱονδήποτε κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 115)· πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 5 μέρη ἴσα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου (ἐδ. 76β′.). Τὸ ζητούμενον πεντάγωνον θὰ εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ (ἐδ. 84). Τὸ πρόβλημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον: Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ μῆκος ΑΒ′ ἴσον μὲ 3 δακ., ἐκ δὲ τοῦ Β′ ἄγομεν τὴν Β′Γ′ παράλληλον τῆς ΒΓ μέχρι συναντήσεως μετὰ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΓ· κατόπιν ἄγομεν τὴν Γ′Δ′ παράλληλον τῆς ΓΔ μέχρι συναντήσεως μετὰ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΔ, κλπ.



Σχ. 115

86. Ἐφαρμογαὶ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

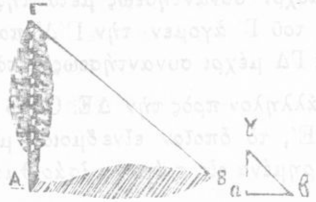
1) Νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος δένδρου ἢ πύργου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ. Ἐὰν φέγγῃ ὁ ἥλιος, μετροῦμεν τὴν σκιὰν ΑΒ τοῦ δένδρου (σχ. 116), ἔστω δὲ αὕτη 12 μέτρα. (1). Τὴν αὐτὴν στιγμὴν στήνομεν ὀρθίαν μίαν ῥάβδον αγ, τῆς ὁποίας τὸ μὲν μῆκος ἔστω 0,90

(1) Πρὸς μέτρησιν μεγάλων εὐθειῶν μεταχειρίζονται ταινίας ἢ ἁλύσεις ἐκ δέκα μέτρων λεγομένας δὲ δεκάμετρα (ἐδ. 95).

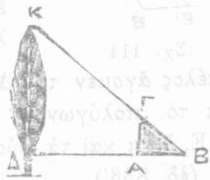
μέτρ. ἡ δὲ σκιὰ αὐτῆς αβ=1μ, 2. Οὕτω ἔχομεν δύο νοητὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια (ἐδ. 82, 1ον)· ἔχουν λοιπὸν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, ἤτοι·

$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\alpha\gamma}{A\Gamma} \quad ἢ \quad \frac{1,2}{12}=\frac{0,90}{\chi}$$

Ἐδῶ ἔχομεν μίαν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας εἶνε δεδομένοι οἱ δύο μέσοι ὅροι καὶ ὁ εἷς ἄκρος· πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἄλλου ἄκρου $\times$. πολλαπλα-



Σχ. 116



Σχ. 117

σιάζομεν τοὺς δύο μέσους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

$$\text{Ἤτοι}: \times=\frac{12\times0,90}{12}=10\times0,90=9 \text{ μέτρα.}$$

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους ΑΓ, διότι τὰ ὕψη καὶ αἱ σκιαὶ αὐτῶν εἶνε ποσὰ ἀνάλογα.

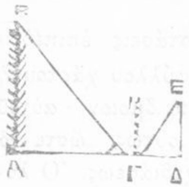
2) Νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος δένδρου ἢ πύργου, ὅταν δὲν φέγγῃ ὁ ἥλιος. Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ (σχ. 117) ἢ γνώμονα ἰσοσκελῆ· ἀπομακρυνόμενοι ὀλίγα μέτρα ἐκ τοῦ δένδρου θέτομεν τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ἔμπροσθεν τοῦ ὀφθαλμοῦ, κρατοῦντες αὐτὸ οὕτως ὥστε ἡ ΒΑ νὰ εἶνε ὁριζοντία (π. χ. νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν ξυλίνου κανόνος ἐπιπλέοντος εἰς τὸ ὕδωρ λεκάνης). Κατόπιν σκοπεύοντες κατὰ τὴν ΒΓ φροντίζομεν ὥστε ἡ κορυφὴ Κ νὰ κεῖται εἰς τὴν προεκβολὴν τῆς ΒΓ. Τότε μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΒΔ ἥτις ἔστω 10, 75 μέτρα. Τὸ τρίγωνον ΚΒΔ εἶνε ὀρθογώνιον (Δ=90ο) καὶ ἰσοσκελές, διότι. ἀφοῦ ἡ Β εἶναι 45ο, θὰ εἶνε καὶ Κ=45ο. Ἄρα ΚΔ=ΒΔ. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εἶνε ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΒΔ ηὐξημένην κατὰ τὸ ἀνάστημα τοῦ σκοπεύοντος 1 μ. 25, ἤτοι 10, 75+1,25=12 μέτρα.

* ***3) Ἄλλος τρόπος:*** Ὁ Εὐκλείδης (1) ὑποδεικνύει τὴν χρῆσιν

---

1) Διάσημος Ἕλλην μαθηματικὸς διδάξας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ εἰς τὰς ἀρχὰς τοῦ 3ου π. Χ. αἰῶνος, πασίγνωστος εἰς τὴν ἀνθρωπότητα ἐκ τοῦ περιφήμου συγγράμματός του, τὸ ὁποῖον μεταφρασθὲν εἰς ὅλας τὰς γλώσσας ἐπὶ 1000 ἔτη ἐχρησίμευσεν ὡς τὸ μόνον διδακτικὸν βιβλίον γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς.

καθρέπτου, τιθεμένου ὁριζοντίως κατὰ τὸ Γ (σχ. 118) Ὁ παρατηρητὴς μετακινεῖται μέχρις οὗ ἴδῃ ἐντὸς τοῦ καθρέπτου τὸ εἴδωλον τοῦ σημείου Β. Αἱ γωνίαι προσπτώσεως καὶ ἀνακλάσεως ΒΓΚ καὶ ΕΓΚ εἶνε ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΒΓΑ καὶ ΕΓΔ εἶνε ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε Α=Δ ὡς ὀρθαί, ἔπεται ὅτι θὰ εἶνε καὶ Β=Ε



Σχ. 118

ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΓΑ καὶ ΕΓΔ εἶνε ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας· λοιπὸν αἱ πλευραί των θὰ εἶνε ἀνάλογοι ἤτοι $\frac{ΓΔ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΑΒ}$.

Ἔστω τὸ ὕψος τοῦ ὀφθαλμοῦ ὑπὲρ τὸ ἔδαφος, δηλ. τὸ ΔΕ ἴσον μὲ 1,25 μέτρ. καὶ ΑΓ = 2,40 καὶ ΔΓ = 0,80. Ὅθεν $\frac{0,80}{2,40}=\frac{1,25}{ΑΒ}$, $ΑΒ=\frac{1,25\times 2,40}{0,80}=1,25\times 3=3,75$.

* 4) *Νὰ εὕρωμεν τὸ πλάτος ποταμοῦ εἰς τοῦ ὁποίου τὴν ἀπέναντι ὄχθην δὲν δυνάμεθα νὰ πλησιάσωμεν.* Πρὸς τοῦτο εἰς ἓν σημεῖον Α (σχ. 119) τῆς ὄχθης ἐπὶ τῆς ὁποίας ἱστάμεθα ἐμπήξωμεν *κατακορύφως* τὴν ῥάβδον ΑΓ (ὀλίγον μικροτέραν τοῦ ἀναστήματος ἡμῶν π. χ. ἑνὸς μέτρου)· ἔπειτα ἀπομακρυνόμεθα ὀλίγον πρὸς τὰ ὄπισθεν τοῦ Α καὶ δοκιμάζομεν ἕως ὅτου εὕρωμεν ἓν σημεῖον Ε ἐκ τοῦ ὁποίου σκοπεύοντες νὰ βλέπωμεν τὰ

Σχ. 119

σημεῖα Γ καὶ Β ἀκριβῶς ἐπὶ εὐθείας, δηλ. ἐπὶ τῆς σκοπευτικῆς ἀκτῖνος τοῦ ὀφθαλμοῦ Ε. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἔχομεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΕ (τὴν πλευρὰν ΔΕ ἀντικαθιστᾷ τὸ σῶμα τοῦ παρατηρητοῦ μέχρι τοῦ ὀφθαλμοῦ), τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι. Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια καὶ αἱ πλευραί των θὰ εἶνε ἀνάλογοι, ἤτοι: $\frac{ΔΒ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ}{ΑΓ}$.

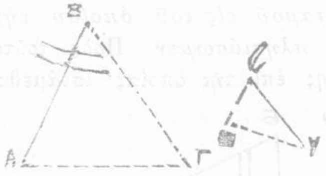
Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα ἐκ τῶν ἴσων λόγων, εὑρίσκομεν $\frac{ΔΑ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ-ΑΓ}{ΑΓ}$.

Τὰ μήκη ΑΓ, ΑΔ καὶ ΔΕ προσδιορίζονται εὐκόλως, ἔστω δὲ ΑΓ=1μ., ΑΔ=0,75 καὶ ΔΕ=1,25. Τότε $ΑΒ=\frac{0,75}{0,25}=3$ μέτρα.

Μεταφορὰ ἐπιπέδων σχημ. ὑπὸ κλίμακα.

87. Κλῖμαξ σχεδίου.—Ὅταν αἱ διαστάσεις ἐπιπέδου σχήματος εἶνε μεγάλαι, ἡ ἀπεικόνισις αὐτοῦ ἐπὶ φύλλου χάρτου ἢ ἐπὶ πίνακος εἶνε ἀδύνατος· τότε σχεδιάζομεν τὸ ὅμοιον αὐτοῦ σχῆμα ἐκλέγοντες τὸν λόγον ὁμοιότητος (ἐδ. 83) οὕτως, ὥστε νὰ δύναται νὰ περιληφθῇ τοῦτο εἰς τὸ φύλλον τῆς σχεδιάσεως. Ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ σχεδίου πρὸς τὸ πραγματικὸν σχῆμα καλεῖται *κλῖμαξ τοῦ σχεδίου*· οὕτω ἂν ἡ κλῖμαξ εἶνε 1 : 100, κάθε μῆκος ἴσον πρὸς 1 μέτρον θὰ παρίσταται ὑπὸ 1 δακτύλου. Ἐὰν ἡ κλῖμαξ εἶνε 10, τὰ μήκη τοῦ σχεδίου θὰ εἶνε δεκαπλάσια τῶν ἀντιστοίχων μηκῶν τοῦ σχήματος.

88. Πρόβλημα. *Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου Α ἀπὸ ἄλλου Β εἰς τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ πλησιάσωμεν.* (σχ. 120). Ἐκλέγομεν ἓν σημεῖον Γ πρὸς τὸ μέρος ὅπου εὑρισκόμεθα, μετροῦμεν δὲ διὰ τοῦ δεκαμέτρου ἐπιμελῶς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία λέγεται *βάσις*· ἐπίσης μετροῦμεν διὰ γωνιομέτρου (1) τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΒΓΑ· ἔστω δὲ ΑΓ=100 μέτρα, ΒΑΓ=80°, ΒΓΑ=35°.

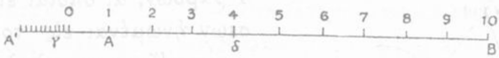


Σχ. 120

Τὸ νοητὸν τρίγωνον ΑΒΓ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν, διότι γνωρίζομεν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι εἶνε εἰς τὰ ἄκρα της (ἐδ. 65), ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ ἐπὶ χάρτου ἢ πίνακος εἶνε ἀδύνατος, παριστάνομεν *τὸ σχέδιον* αὐτοῦ αβγ ὑπὸ κλίμακα ἔστω 1 : 500. Ἐὰν ἡ προσεκτικὴ μέτρησις τῆς αβ δώσῃ 0,125, τότε ΑΒ=0,125×500=62,5 μέτρα.

(1) Κύριον μέρος τοῦ ὀργάνου εἶνε ἡμικύκλιον εἰς μοίρας, καθὼς τὸ μοιρογνωμόνιον. Μία διάμετρος αὐτοῦ εἶνε κινητὴ περὶ τὸ κέντρον. Θέτομεν τὸ κέντρον εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ἔπειτα στρέφομεν τὴν διάμετρον ὥστε νὰ συμπέσῃ διαδοχικῶς μὲ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας. τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ διόπτρας ἢ διὰ δύο σχισμῶν στενωτάτων κατακορύφως κειμένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου.

89. Γραφικὴ κλῖμαξ. Ἀποφεύγομεν τοὺς ἄνω ὑπολογισμοὺς διὰ τῆς *γραφικῆς κλίμακος* (σχ. 121). Ἐὰν ἡ κλῖμαξ

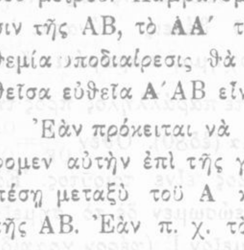


Σχ. 121

εἶνε 1 : 15, γράφομεν εὐθεῖαν ΑΒ μήκους 1)15 τοῦ μέτρου, τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν εἰς 10 μέρη ἴσα· ἕκαστον τούτων θὰ παριστᾷ 0,1 τοῦ μέτρου. Λαμβάνομεν δὲ ἓν τῶν μερῶν τούτων εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ, τὸ **ΑΑ'** τὸ ὁποῖον ὑποδιαιροῦμεν εἰς 10 μέρη ἴσα· καθεμία ὑποδιαίρεσις θὰ παριστάνῃ 0,01 τοῦ μέτρου. Ἡ οὕτω διαιρεθεῖσα εὐθεῖα **Α'**ΑΒ εἶνε *ἡ γραφικὴ κλῖμαξ*.

Ἐὰν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μιᾶς εὐθείας, τῆς γδ, φέρομεν αὐτὴν ἐπὶ τῆς γραφικῆς κλίμακος οὕτως ὥστε τὸ μὲν γ νὰ πέσῃ μεταξὺ τοῦ Α καὶ Α', τὸ δὲ δ νὰ εἶνε σημεῖον διαιρέσεως τῆς ΑΒ. Ἐὰν π. χ. τὸ δ πέσῃ εἰς τὴν διαίρεσιν 4 καὶ τὸ γ εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν ἀριστερὰ τοῦ Α, θὰ εἶνε $\gamma\delta = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = 0{,}43$ μ.

* **90.** Τὴν κατασκευὴν ἀναλόγων εὐθειῶν καὶ ὁμοίων πολυγώνων μεταχειρίζονται πρὸ πάντων οἱ ἀρχιτέκτονες, οἱ μηχανικοὶ καὶ οἱ χαρτογράφοι. Οὗτοι διὰ νὰ παραστήσουν ἐπὶ χάρτου τὸ σχέδιον οἰκίας, μηχανῆς, πόλεως κλπ., εἶνε ὑποχρεωμένοι νὰ ἐλαττώσουν ὅλας τὰς διαστάσεις αὐτῶν καθ' ὡρισμένην ἀναλογίαν.



Σχ. 122

Οἱ σχεδιασταὶ χρησιμοποιοῦν εἰδικοὺς διαβήτας, ὡς τὸν διαβήτην τοῦ σχ. 122 τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη φέρουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων διαιρέσεων.

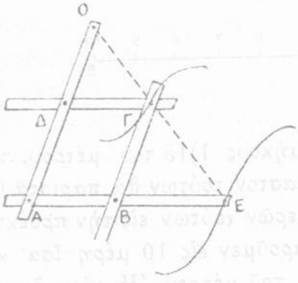
Διὰ τοιούτου διαβήτου δύνανται νὰ λυθῶσι προβλήματα ὡς τὰ ἑξῆς:

α') Τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ λάβωμεν τὰ 5)9.

β') Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4.

γ') Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ διαιρέσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη.

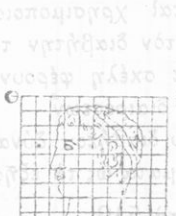
91. Μεταφορὰ σχεδίου ὑπὸ κλίμακα.— Διὰ τὴν σμίκρυνσιν ἢ μεγέθυνσιν σχεδίου ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα ἤτοι διὰ τὴν κατασκευὴν σχήματος ὁμοίου πρὸς ὃ θὲν μὲ ὡρισμένον λόγον ὁμοιότητος χρησιμεύει ὁ *ὁμοιογράφος*, ὄργανον ἀποτελούμενον ἐκ 4 ῥάβδων, αἱ ὁποῖαι εἶνε δι' ἀρθρώσεων ἡνωμέναι εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζουν παραλληλόγραμμον (σχ. 123) αἱ μὲν γωνίαι αὐτοῦ λαμβάνουν διαφόρους τιμάς, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραί του εἶνε πάντοτε ἴσαι ὥστε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὰς διαφόρους αὐτοῦ θέσεις δύναται νὰ μεταβάλῃ σχῆμα, παραμένει ὅμως παραλληλόγραμμον.



Σχ. 123.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶνε πάντοτε παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, τὰ τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΑΕ εἶνε καὶ ὅμοια (ἐδ80). Ὅθεν $\frac{ΟΓ}{ΟΕ}=\frac{ΟΔ}{ΟΑ}$. Ὁ 1ος λόγος εἶνε σταθερὸς διότι καὶ ὁ 2ος εἶνε τοιοῦτος. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ σημεῖον Ο ἀκίνητον, ὑποχρεώσωμεν δὲ τὸ σημεῖον Ε νὰ γράψῃ οἱονδήποτε σχῆμα, τότε τὸ σημεῖον Γ (φέρον γραφίδα) θὰ γράψῃ ὅμοιον σχῆμα μὲ λόγον ὁμοιότητος $\frac{ΟΔ}{ΟΑ}$. Ἡ τιμὴ τοῦ λόγου τούτου δύναται νὰ ἀλλάξῃ τῇ βοηθείᾳ ὀπῶν τὰς ὁποίας φέρουν οἱ κανόνες· οὕτω βραχύνοντες τὴν ΔΓ καὶ αὐξάνοντες τὴν ΑΔ, ἔχομεν τιμὴν τοῦ λόγου μικροτέραν.

Ἐὰν πρόκειται νὰ μεγεθύνωμεν σχέδιόν τι Σ, τότε πρέπει τὸ



Σχ. 124,

Σχ. 125

σημεῖον Γ νὰ ἀκολουθήσῃ τὰς γραμμὰς τοῦ Σ, τὸ δὲ Ε φέρον γραφίδα θὰ χαράξῃ τὸ ἀντίγραφον.

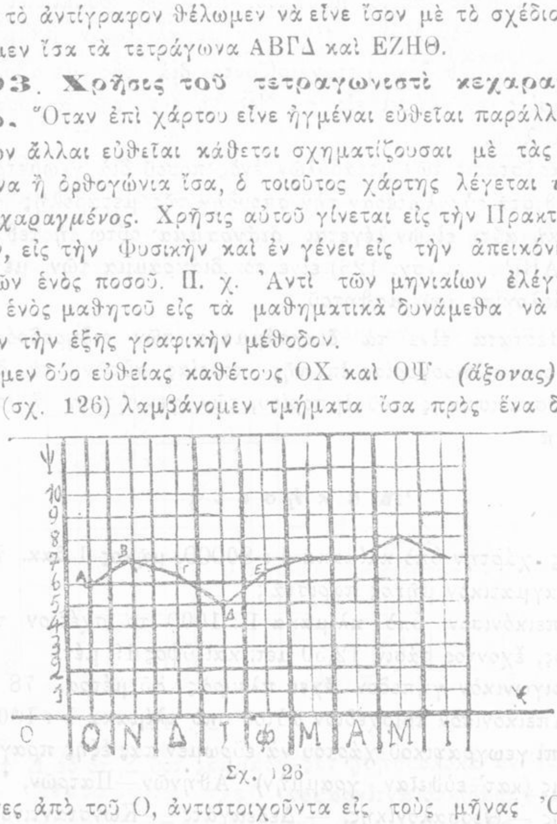
92. Μέθοδος τῶν τετραγωνιδίων. — Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀντιγράψωμεν τὸ πρόσωπον σχ. 108 ὑπὸ κλίμακα 1:2, διαιροῦμεν τὸ τετράγωνον (ἢ τὸ ὀρθογώνιον) ΑΒΓΔ (σχ. 124), τὸ ὁποῖον χρησιμεύει ὡς περιθώριον τῆς εἰκόνος, εἰς τετράγωνα ἴσα δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευράς· ἔπειτα κατασκευάζομεν δεύτερον τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ΕΖ (σχ. 125) ἴσην μὲ τὸ 1|2 τῆς ΑΒ, διαιροῦμεν δὲ αὐτὸ εἰς ἰσάριθμα τετράγωνα· εἰς τὸ καθὲν τετραγωνίδιον ΕΖΗΘ ἀντιγράφομεν σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἀντίστοιχον τετραγωνίδιον τοῦ ΑΒΓΔ, π. χ. τὸν ὀφθαλμὸν εἰς τὸ 4ον τετραγωνίδιον ἐξ ἀριστερῶν καὶ εἰς τὸ 7ον ἐκ τῶν κάτω.

Σημ. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶνε συνήθης καὶ εἰς τὴν κοπτικὴν πρὸς σμίκρυνσιν ἢ μεγέθυνσιν ἀχναρίων.

Ἐὰν τὸ ἀντίγραφον θέλωμεν νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ σχέδιον, κατασκευάζομεν ἴσα τὰ τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ.

* **93. Χρῆσις τοῦ τετραγωνιστὶ κεχαραγμένου χάρτου.** Ὅταν ἐπὶ χάρτου εἶνε ἠγμέναι εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ ἐπ' αὐτῶν ἄλλαι εὐθεῖαι κάθετοι σχηματίζουσαι μὲ τὰς πρώτας τετράγωνα ἢ ὀρθογώνια ἴσα, ὁ τοιοῦτος χάρτης λέγεται *τετραγωνιστὶ κεχαραγμένος*. Χρῆσις αὐτοῦ γίνεται εἰς τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν, εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ ἐν γένει εἰς τὴν ἀπεικόνισιν τῶν μεταβολῶν ἑνὸς ποσοῦ. Π. χ. Ἀντὶ τῶν μηνιαίων ἐλέγχων τῆς προόδου ἑνὸς μαθητοῦ εἰς τὰ μαθηματικὰ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν ἑξῆς γραφικὴν μέθοδον.

Ἄγομεν δύο εὐθείας καθέτους ΟΧ καὶ ΟΨ *(ἄξονας)*· ἐπὶ μὲν τῆς ΟΧ (σχ. 126) λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς ἕνα δάκτυλον,



Σχ. 126

ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ Ο, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς μῆνας Ὀκτώβριον Νοέμβριον κ. λ. π. Ἐπὶ δὲ τῆς ΟΨ λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς ἥμισυν δάκτυλον, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς βαθμοὺς 0,1,2, . . . 10.

Ἔστω ὅτι οἱ μέσοι μηνιαῖοι βαθμοὶ τοῦ μαθητοῦ εἶνε 6, 7 $6\frac{1}{2}$, 5 κ. τ. λ.

Ἐπὶ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΟΧ τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων Ο, Ν, Δ, ... λαμβάνομεν μήκη

$$6\times\frac{1}{2}=3\delta.,\ 7\times\frac{1}{2}=3{,}5\ \ 6\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3\frac{1}{4},$$

$$5\times\frac{1}{2}=2\frac{1}{2},\ \ldots$$

Ἐὰν ἑνώσωμεν διαδοχικῶς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, . . . λαμβάνομεν τεθλασμένην γραμμήν, τῆς ὁποίας αἱ κορυφαὶ δεικνύουν τὴν πορείαν τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ. Εὐκόλως προσπίπτει εἰς τοὺς ὀφθαλμοὺς ὅτι τὸν Μάϊον εἶχε τὸν μεγαλείτερον βαθμὸν κλπ.

Τὴν αὐτὴν μέθοδον μεταχειρίζονται διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας (ἐν χρήσει εἰς τὰ Νοσοκομεῖα, τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως κ. λ. π.

Ἡ παράστασις τῶν μεταβολῶν ἑνὸς ποσοῦ διὰ γεωμετρικῆς εἰκόνος καθιστᾷ εὐκολωτέραν τὴν σπουδὴν τῆς μεταβολῆς αὐτοῦ· ἡ γεωμετρικὴ αὕτη εἰκὼν λέγεται *διάγραμμα*· οὕτω ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓ . . . . (σχ. 126) εἶνε τὸ διάγραμμα τῶν μεταβολῶν τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ.

Συνηθέστατα εἶνε τὰ διαγράμματα τῶν σιδηροδρόμων (τὰ ὁποῖα δίδουσι πληροφορίας ἐπὶ τῆς πορείας αὐτῶν), τὰ διαγράμματα τῆς στατιστικῆς τοῦ ἐμπορίου, τῶν γεννήσεων ἢ τῶν θανάτων κλπ.

Ἀσκήσεις

1) Εἰς χάρτην ὑπὸ κλίμακα 1 : 80000, μῆκος 1 δακ. ἢ 1 παλ. πόσον πραγματικὸν μῆκος παριστᾷ;

2) Ἀπεικόνισον ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 τὸ σχέδιον τριγώνου ἰσοσκελοῦς, ἔχοντος βάσιν 12,50 μέτ. καὶ ὕψος 19 μέτ.

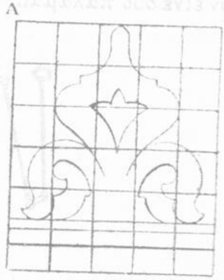
3) Τριγωνικὸν γήπεδον ἔχει πλευρὰς 85 μέτρα, 78 καὶ 37 μέτρα. Ἀπεικόνισον τὸ σχέδιον αὐτοῦ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000.

4) Ἐπὶ γεωγραφικοῦ χάρτου νὰ εὕρωμεν τὰς ἑξῆς πραγματικὰς ἀποστάσεις (κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν) Ἀθηνῶν—Πατρῶν, Ἀθηνῶν—Λαρίσης—Θεσσαλονίκης, —Δεδεαγάτς—Κωνσταντινουπόλεως Βερολίνου—Βιέννης, Βιέννης—Μοναστηρίου.

5) Ἀντίγραφον ὑπὸ κλίμακα 2]3 τὸ σχῆμα 127 διὰ τῆς μεθόδου τῶν τετραγωνιδίων.

6) Ἀντίγραφον ἕνα χάρτην τῆς Ἑλλάδος ὑπὸ κλίμακα 3]4 διὰ τετραγωνιδίων.

7) Σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1: 100 ἀντεγράφη ὑπὸ κλίμακα 1: 10. Ποῖον λόγον ἔχουν αἱ διαστάσεις τοῦ ἀντιγράφου πρὸς τὰς πραγματικάς;



Σχ. 127

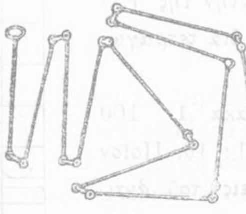
Μέτρησις γραμμῶν.

94. Ὁρισμὸς τῆς μετρήσεως. Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας. Τὰς διαφόρους γραμμὰς συγκρίνομεν πρὸς ἓν γνωστὸν μῆκος, τὸ μέτρον, καὶ εὑρίσκομεν πόσα μέτρα ἢ καὶ μέρη αὐτοῦ περιέχονται εἰς αὐτάς· τὸ αὐτὸ κάμνομεν διὰ τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων καὶ ἐν γένει διὰ κάθε ποσόν. Ἡ τοιαύτη σύγκρισις λέγεται *μέτρησις* τοῦ ποσοῦ, *μονὰς* δὲ τὸ ποσὸν πρὸς τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ σύγκρισις. Ἐννοεῖται ὅτι ἡ μονὰς πρέπει νὰ εἶνε τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸ μετρητέον ποσόν.

Ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τὰς μονάδας μήκους, ἐπιφανείας καὶ ὄγκου. Λέγομεν π. χ. ὅτι ἓν δωμάτιον ἔχει μῆκος 7 μέτρα, τὸ πάτωμα περιέχει 28 τετραγωνικὰ μέτρ., ὁ ὄγκος τοῦ ἐν τῷ δωματίῳ ἀέρος εἶνε 140 κυβ. μέτρα. Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει τὸ σχῆμα τῶν διαφόρων σωμάτων, τὰς ἰδιότητας καὶ τὸν τρόπον τῆς μετρήσεως αὐτῶν (διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς).

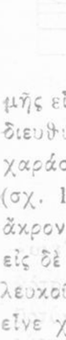
95. Προσδιορισμὸς τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ μέτρησις αὐτῆς. Πρὸς μέτρησιν μικρῶν ἀποστάσεων, π.χ. τοῦ μήκους τῆς αἰθούσης, τοῦ θρανίου, ἑνὸς ὑφάσματος, ἔχομεν τὸ μέτρον ἢ τὸν πῆχυν.

Ἀλλὰ διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλατείας ἢ μιᾶς ὁδοῦ ἔχομεν τὴν μετροταινίαν ἢ τὴν ἅλυσιν (σχ. 130), αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 10 μέτρων. Ἡ μετροταινία περιτυλίσσεται περὶ ἄξονα ἐντὸς θήκης διὰ στροφάλου. Ἡ ἅλυσις ἀποτελεῖται ἐκ 50 τεμαχίων ἡνωμένων διὰ κρίκων, ἑπομένως ἡ ἀπόστασις δύο κρίκων διαδοχικῶν εἶνε δύο παλάμαι. Ὅταν τὸ μῆκος τῆς μετρητέας εὐθείας γραμ-

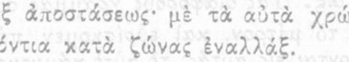


Σχ. 130

μῆς εἶνε μέγα, εἶνε δυνατὸν κατὰ τὴν μέτρησιν νὰ ἐκτραπῶμεν τῆς διευθύνσεως αὐτῆς. Τούτου ἕνεκα, πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν μέτρησιν, χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα *ἀκόντια*. (σχ. 131), τὰ ὁποῖα εἶνε ῥάβδοι ξύλινοι φέρουσαι εἰς μὲν τὸ κάτω ἄκρον σιδηρᾶν αἰχμήν, διὰ νὰ ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος, εἰς δὲ τὸ ἄνω μικρὰν πινακίδα (ἢ σημαίαν) χρώματος ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ, διὰ νὰ διακρίνονται ἐξ ἀποστάσεως· μὲ τὰ αὐτὰ χρώματα εἶνε χρωματισμένα καὶ τὰ ἀκόντια κατὰ ζώνας ἐναλλάξ.



Διὰ νὰ χαράξωμεν μὲ τὰ ἀκόντια μίαν εὐθεῖαν τῆς ὁποίας εἶνε δεδομένα τὰ ἄκρα, ἐμπήγομεν ἓν ἀκόντιον Α καὶ ἓν ἄλλο εἰς τὸ ἄκρον Β (σχ. 132). Διὰ νὰ τοποθετήσωμεν ἐνδιάμεσον ἀκόντιον Γ ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας τῶν σημείων Α καὶ Β, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ὁ μετρητὴς τοποθετούμενος εἰς τὸ σημεῖον Ο (τὸ ὁποῖον νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ, ἀπέχον τοῦ Α δύο περίπου μέτρα) σκοπεύει ἐφαπτομενικῶς πρὸς τὰ ἀκόντια Α καὶ Β· ὁ βοηθὸς αὐτοῦ κρατῶν ἀκόντιον προχωρεῖ πρὸς τὸ σημεῖον Β, καὶ τοποθετεῖ τοῦτο εἰς ἓν σημεῖον Γ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ βοηθός, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, το-



Σχ. 131

Σχ. 132

ποθετεῖ τὸ ἀκόντιον ἐκτὸς τῆς εὐθυγραμμίας, π. χ. εἰς τὸ Γ ἢ εἰς τὸ Γ′, ὁ μετρητὴς χωρὶς νὰ μετακινηθῇ κάμνει νεῦμα εἰς τὸν βοηθὸν νὰ ἐμπήξῃ τὸ ἀκόντιον πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, μέχρις οὗ τὸ ἀκόντιον Γ ἀποκρυβῇ ὑπὸ τοῦ Α. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τοποθετοῦμεν καὶ ἄλλα ἀκόντια ἐπὶ τῆς εὐθυγραμμίας ταύτης.

Μετὰ τὴν χάραξιν τῆς εὐθυγραμμίας προβαίνομεν εἰς τὴν καταμέτρησιν τοῦ μήκους της διὰ τῆς μετροταινίας ἢ τῆς ἁλύσεως.

Ἀσκήσεις

1) Ἐκτίμησον διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ τὸ μῆκος τοῦ πίνακος, τοῦ θρανίου, τῆς αἰθούσης, ἔπειτα δὲ ἐπαλήθευσον διὰ τοῦ μέτρου.

2) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα ἔχουσα μῆκος 15 δακ. καὶ ἄλλη διπλασία.

3) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 15 δακ., 45 γρμ. καὶ 7 $^1/_2$ δακ.

4) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μήκους 14 δακ. καὶ νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον (τὸ ὁποῖον φέρει ὑποδιαιρέσεις εἰς γραμμὰς) εἰς 20 μέρη ἴσα.

5) Ἐκτίμησις μιᾶς ἀποστάσεως διὰ τῶν βημάτων. Ἡ ἄσκησις αὕτη πρέπει νὰ γίνῃ ἐπὶ ἐδάφους ὁριζοντίου καὶ ὁμαλοῦ· ἐν ἐλλείψει τοιούτου μεταβαίνομεν εἰς μίαν ὁδὸν ἔχοντες μαζί μας τὴν μετροταινίαν ἢ τὴν ἅλυσιν καὶ τρία ἕως τέσσαρα ἀκόντια, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· Λαμβάνομεν εἰς εὐθυγραμμίαν μῆκος 50 μέτρων (ἐδ. 95), εἰς δὲ τὴν προεκβολὴν ἄλλο μῆκος ἴσον καὶ ἐμπήγομεν ἀκόντια εἰς ἑκάστην τῶν ἀποστάσεων τούτων. Τούτου γενομένου, οἱ μαθηταὶ ἀναχωροῦν διαδοχικῶς εἰς τρόπον ὥστε ὁ καθεὶς νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν δέκα βημάτων ἀπὸ τοῦ προηγουμένου του, μετροῦσι δὲ τὰ βήματά των ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἀκοντίου εἰς τὸ ἄλλο. Κατόπιν ἐπιστρέφουν, ἀφοῦ κάμουν μικρὰν διακοπὴν διὰ νὰ προσέξουν τὴν ἀπόστασιν πού διήνυσαν καὶ πόσα βήματα ἔκαμαν.

Ἕκαστος μαθητὴς θὰ ἐπαναλάβῃ πολλάκις τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν μέχρις ὅτου συνειθίσῃ νὰ κάμῃ τὸ βῆμά του ἑνὸς μέτρου ἢ ἡμίσεος μέτρου.

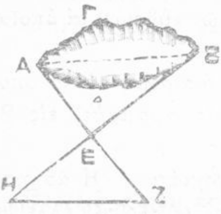
6) Τὸ στρατιωτικὸν βῆμα λογαριάζεται 0,65 μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος πεζοδρομίου τὸ ὁποῖον διὰ νὰ διανύσωμεν κάμνομεν 110 βήματα στρατιωτικά; Πόσα βήματα θὰ κάμωμεν διὰ νὰ διανύσωμεν λεωφόρον 4000 μέτρων;

7) Ἐκτίμησις, κατὰ προσσέγγισιν, τῆς ἀποστάσεως τὴν ὁποίαν διανύομεν ἐκ τοῦ παρερχομένου χρόνου. Κανονίζομεν τὴν πορείαν εἰς τρόπον ὥστε εἰς κάθε πρῶτον λεπτὸν νὰ κάμνωμεν 110 βήματα ἡ συνήθεια αὕτη εἶνε πολὺ σπουδαία ὑπὸ στρατιωτικὴν ἔποψιν

ὅταν δὲν ὑπάρχουν σημεῖα δεικνύοντα τὰ ὅρια ἀνὰ 100 καὶ ἀνὰ 1000 μέτρα.

Π. χ. Ἐὰν ἡ πορεία διήρκεσε μίαν ὥραν, ἔχομεν $110 \times 60 \times 0,65 = 4290$ μέτρα ἢ 4000 μέτρα περίπου. (ἡ πορεία δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ διατηρηθῇ ὁμοιόμορφος ἐπὶ μίαν ὥραν, προσέτι πολλὰ αἴτια ἠμποροῦν νὰ ἀλλάξουν τὸ μῆκος τοῦ βήματος).

8) Νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς λίμνης ΑΓΒΔ, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, δηλ. τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 133).



Σχ. 133

Ἐὰν ἔχωμεν σχοινίον ἀρκετὸν τεντώνομεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α εἰς τὸ Β. Εἰ δὲ μή, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἐκτὸς τῆς λίμνης ἓν σημεῖον Ε καὶ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΕ. καὶ ΕΒ· ἔστω δὲ ΑΕ=33 μετρ., ΕΒ=42 μετρ. Ἔπειτα προεκβάλλομεν αὐτὰς καὶ λαμβάνομεν ΕΖ=ΑΕ καὶ ΕΗ=ΒΕ. Τότε δὲ τὰ δύο τρίγωνα ΕΗΖ καὶ ΕΑΒ εἶνε ἴσα (ἐδ. 30 β.) καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον μῆκος ΑΒ εἶνε ἴσον μὲ τὴν ΗΖ, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἀμέσως καὶ εὐκόλως. Τὸ παρὰ τὴν λίμνην ἔδαφος πρέπει νὰ εἶνε ἐπίπεδον καὶ προέκτασις σχεδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης.

96. Μέτρησις περιφερείας.— (σχ. 49) Ἐὰν διὰ νήματος μετρήσωμεν τὴν περιφέρειαν κυκλικῶν ἀντικειμένων, π. χ. τροχῶν, πινακίων, νομισμάτων, μετρήσωμεν δὲ καὶ τὴν διάμετρον αὐτῶν καὶ διαιρέσωμεν τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους Δ τῆς διαμέτρου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ καθὲν πηλίκον λίαν προσεγγίζει τὸν ἀριθμὸν 3,14 (ἀκριβέστερον 3,1416). Τὸ ἀμετάβλητον τοῦτο πηλίκον παριστάνεται διὰ τοῦ γράμματος π· ὥστε $Γ:Δ = π$ ὅθεν $Γ = Δ \times π$.

Κανὼν α΄. *Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν διάμετρον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.*

Π. χ. ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶνε 3,20 μέτ. Ποία ἡ περιφέρεια αὐτοῦ; Ἡ διάμετρος εἶνε $3,2 \times 2 = 6,4$· ἄρα τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε $Γ = 6,40 \times π = 6,40 \times 3,1416 = 20,10$ μ. Ἐπειδὴ εἶνε $Γ = Δ \times π$ ἕπεται ὅτι $Δ = Γ:π$.

Κανὼν Β΄. *Ἡ διάμετρος εὑρίσκεται ἐκ τῆς περιφερείας, ἐὰν διαιρεθῇ αὕτη διὰ π.*

* *Σημ.* Ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας καλεῖται *ἀνάπτυγμα* αὐτῆς, εὑρίσκεται δὲ κατὰ προσέγγισιν ἐὰν προσθέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τοῦ ἀθροίσματος λάβωμεν τὸ διπλάσιον (ἐδ. 74).

97. Μῆκος τόξου. Ἀνωτέρω εἴπομεν ὅτι, ἐὰν ἑνὸς κύκλου ἡ ἀκτὶς εἶνε 3,20 μετ., ἡ περιφέρειά του θὰ εἶνε $6{,}40\times\pi$.— Ἐπειδὴ ὅλη ἡ περιφέρεια περιέχει 360^o, τόξον 1^o θὰ ἔχῃ μῆκος $6{,}40\times\pi : 360$ καὶ τόξον 36^o π. χ. θὰ εἶνε $6{,}40\times\pi\times36 : 360 =$ 2,01 μέτρα. Τὸ μῆκος τόξου 36^o εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος διπλασίας $(3{,}20\times2)$ θὰ εἶνε διπλάσιον, ἤτοι 4,02μ.

Ἀσκήσεις

1) Ἱπποδρομίου ἡ ἀκτὶς εἶνε 17 μέτρα. Πόσα μέτρα διέτρεξεν ἵππος, ὁ ὁποῖος ἔκαμεν 25 περιστροφάς;

2) Πρόκειται νὰ κατασκευάσῃ ὁ τεχνίτης λουτῆρα τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ εἶνε κυκλικὴ μὲ περιφέρειαν 9 μέτρων.

Πόσην ἀκτῖνα τῆς βάσεως πρέπει νὰ λάβῃ;

3) Πεζὸς καὶ ἱππεὺς ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας διατρέχουν αὐτὴν ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 15 λεπτὰ πρῶτα. Ὁ πεζὸς διανύει 5000 μ. καθ' ὥραν καὶ ὁ ἱππεὺς 15000. Πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας;

4) Ποῖον μῆκος ἔχει τόξον $23^0\ 18'$ εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 δακ.;

5) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2,20 μ. τόξον τι ἔχει μῆκος 3 μέτρων. Πόσων μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον τοῦτο;

6) Ἁμάξης ὁ τροχὸς κάμνει 170 περιστροφὰς διὰ νὰ διανύσῃ ἡ ἅμαξα μίαν ἀπόστασιν. Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ εἶνε 1,10 μ. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις.

7) Πόσα ἄτομα δύνανται νὰ παρακαθίσουν εἰς τράπεζαν στρογγύλην ἀκτῖνος 0,75 μ. ἐὰν τὸ καθὲν καταλαμβάνῃ τόξον μήκους 0,43 μ;

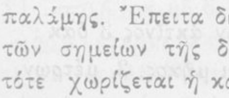
8) Παρήγγειλέ τις τράπεζαν στρογγύλην δι' ἓξ ἄτομα. Πόση πρέπει νὰ εἶνε ἡ περιφέρεια καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς, ἐὰν τὸ καθὲν ἄτομον καταλαμβάνῃ τόξον μήκους 0,45 μ;

Μέτρησις τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τοῦ κύκλου.

98. *Μονάδες ἐπιφανείας.* Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν μεταχειριζόμεθα τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, δηλ. ἓν τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, ἢ τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν, δηλ. ἓν τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 3/4=0,75 μ. Π. χ. λέγομεν ὅτι αὐτὸ τὸ οἰκόπεδον εἶνε 340 πήχεις (τετρ. τεκτ.)

Διὰ τὴν μέτρησιν ἀγρῶν, δασῶν κ.τ.λ. μεταχειριζόμεθα τὸ βασιλικὸν στρέμμα=1000 τετρ. μέτρ. Διὰ μεγαλειτέρας ἐκτάσεις (πόλεις, χώρας...) μεταχειρίζονται οἱ τοπογράφοι τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον, δηλ. ἓν νοητὸν τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 1000 μ. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται *ἐμβαδὸν* αὐτῆς, ἐξαρτᾶται δὲ ἐκ τῆς ἐκλεγῆς τῆς μονάδος (ἐδ. 94).

99. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 134) παριστάνει τὸ τετραγ. μέτρον εἰς τὸ πραγματικὸν μέγεθος. Διαιροῦμεν τὴν πλευρὰν ΑΔ εἰς 10 μέρη ἴσα, δηλ. εἰς παλάμας, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ· τότε σχηματίζονται 10 λωρίδες ὀρθογώνιοι μήκους ἑνὸς μέτρου καὶ πλάτους μιᾶς παλάμης. Ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ τὴν ΑΒ εἰς 10 μέρη ἴσα καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ· τότε χωρίζεται ἡ καθεμία λωρίς, π. χ. ἡ ΑΒΕΖ, εἰς 10 τετράγωνα ἴσα, ἔχοντα πλευρὰν μιᾶς παλάμης καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται τετραγωνικαὶ παλάμαι. Ἐπειδὴ τὸ τετρ. μέτρον ΑΒΓΔ εἶνε ἄθροισμα 10 λωρίδων ἴσων, ἐκ τῶν ὁποίων καθεμία χωρίζεται εἰς 10 τετρ. παλάμας, συμπεραίνομεν ὅτι ἓν τετρ. μέτρον ἔχει 100 τετρ. παλάμας. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι μία τετρ. παλ. ἔχει 100 τετρ. δακτύλους καὶ εἷς τετρ. δάκτυλος ἔχει 100 τετρ. γραμμάς.



Σχ. 134

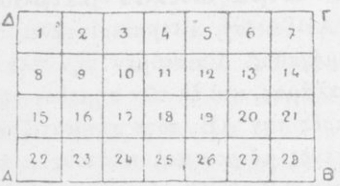
Χάριν συντομίας τῶν λέξεων τετρ. μέτρον, τετρ. παλάμη, τετρ. δάκτυλος, τετρ. γραμμή, γράφομεν: τ. μ., τ. π., τ. δ., τ. γ. Ὥστε: 1 τ. μ. = 100 τ. π. = 10000 τ. δ. = 1.000.000, τ. γ. Δηλ ἡ τ. π. εἶνε τὸ 0,01 τοῦ τ. μ., ὁ τ. δ. εἶνε τὸ 0,0001 καὶ ἡ τ. γ. εἶνε τὸ 0,000001 τοῦ τ. μ.

Ἐὰν εἶνε τὸ ἐμβαδὸν α') τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης 15 τ. μ. 76 τ. π. 25 τ. δ. β') τοῦ πίνακος 1 τ. μ. 4 τ. π. γ') τοῦ τετραδίου 2 τ. π. 9 τ. δ., οἱ συμμιγεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ γράφονται ὡς δεκαδικοὶ οὕτω:

15, 7625 τ. μ. 1 τ. μ., 04 0 τ. μ., 0209.

Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἐμβαδόν, ἀναγινώσκομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τ. μ.) ἔπειτα χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς· τότε τὸ 1ον τμῆμα φανερώνει τ. π., τὸ 2ον τ. δ. καὶ τὸ 3ον τ. γ. Π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 823 τ. μ. 40058 ἀπαγγέλλεται 823 τ. μ. 40 τ. π. 5 τ. δ. 80 τ. γ.

100. Μέτρησις τοῦ ὀρθογωνίου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τετράγωνα ὅπως τὸ τ. μ. (ἐδ. 99). Εἴπομεν ἄλλοτε (ἐδ. 36β) ὅτι διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 39) λέγονται ἡ βάσις ΓΔ (ἢ τὸ μῆκος) καὶ τὸ ὕψος ΑΓ (ἢ τὸ πλάτος) α.' Ἐὰν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἔστω δὲ ΑΒ=7 μέτρα καὶ ΑΔ=4 μ. (σχ. 135) σκεπτόμενοι ὡς ἐν ἐδ. 99, βλέπομεν ὅτι τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον περιέχει 7×4=28 τ.μ.



Σχ 135

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 4 ἦσαν παλάμαι ἢ δάκτυλοι, τότε τὸ ἐμβαδὸν θὰ ἦτο 28 τ. π. ἢ τ. δ.

β' Ἔστωσαν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἀριθμοὶ κλασματικοί π.χ. ΑΒ=1+3/8μ. καὶ ΑΔ=7/12 μ. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔχομεν 33/24 καὶ 14/24.

Ἐὰν ὡς μονάδα μήκους λάβωμεν τὸ 1/24 τοῦ μέτρου, μονὰς ἐπιφανείας θὰ εἶνε τὸ 1 : 24×24=1 : 576 τοῦ τ. μ., διότι τὸ τ. μ. χωρίζεται εἰς 24×24 τετράγωνα ἴσα (ἐδ. 99). Τότε ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ τῶν ἀκεραίων 33 καὶ 14, ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ περιέχῃ 33×14 φορὰς τὸ 1/576 τοῦ τ. μ., δηλ.

$$\frac{33\times14}{576}=\frac{33}{24}\times\frac{14}{24} \quad \text{ἢ} \quad 1+\frac{3}{8} \quad \times\frac{7}{12}$$

Ὥστε, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παρασταθῇ διὰ Ε, ἡ βάσις του διὰ β καὶ τὸ ὕψος διὰ υ, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ὁ τύπος

$$Ε = β \times υ$$

Κανών. *Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος, ἢ τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος.*

101. Ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μίαν πλευρὰν μὲ τὸν ἑαυτόν της, διότι εἰς τὸ τετράγωνον ἡ βάσις εἶνε πάντοτε ἴση μὲ τὸ ὕψος. Ἐὰν ὀνομάσωμεν β τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του εἶνε

$$Ε = β \times β \text{ ἢ } β^2$$

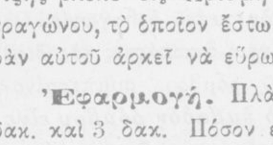
Σημ. Ἡ δευτέρα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ, π. χ. 7×7 ἢ 7^2, λέγεται καὶ τετράγωνον αὐτοῦ, διότι ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν 7 μονάδας μήκους. Ὁ 7 καλεῖται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 49. Τοῦ 18 ἡ τετρ. ῥίζα εἶνε 4 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, τοῦ 150 εἶνε 12. Ἐν γένει τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ μεγαλείτερος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμόν· τὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως τῆς τετρ. ῥίζης βλέπε εἰς Ἀριθμητικήν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔστω α. τ. μ., διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α.

Ἐφαρμογή. Πλὰξ χαλκίνη ὀρθογώνιος ἔχει διαστάσεις 12 δακ. καὶ 3 δακ. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς; Ποία θὰ ἦτο ἡ πλευρὰ πλακὸς τετραγωνικῆς ἐχούσης ἴσον ἐμβαδόν;

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθογωνίου πλακὸς εἶνε 12×3 ἢ 36 τ. δ. Τόσον θὰ εἶνε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς.

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πλευρὰ θὰ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36, ἤτοι 6 δάκ.

102. Μέτρησις τοῦ παραλληλογράμμου. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 136) ἔχον βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΔΘ ἢ ΓΗ (ἐδ. 36δ΄). Ἐὰν ἀντὶ τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου λάβωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΘΗΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΘΗ ἢ ΔΓ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ΔΘ, τὸ ἐμβαδὸν τούτου θὰ εἶνε ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, διότι τὰ τρίγωνα ΔΑΘ, καὶ ΓΒΗ εἶνε ἴσα (ἐδ. 31β΄).



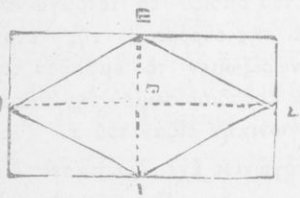
Σχ. 136

Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχομεν τὸν κανόνα ἐδ. 100, ἤτοι *πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν* του ἐπὶ τὸ ὕψος· π. χ. ἐὰν ἀγρὸς σχήματος παραλληλογράμμου ἔχῃ βάσιν 60 μ. καὶ ὕψος 35 μ., τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε 60×35=2100 τ. μ. ἢ 2, 1 στρέμματα.

103. Σχήματα ἰσοδύναμα. Δύο σχήματα τὰ ὁποῖα δὲν εἶνε ἴσα (ἐδ. 29) δύνανται νὰ ἔχουν ἐμβαδὰ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐκφραζόμενα, ὡς τὸ ὀρθογώνιον ΔΘΗΓ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα δὲν ἐφαρμόζουν ἀκέραια ἀλλὰ κατὰ μέρη καλοῦντα *ἰσοδύναμα.*

Ἐὰν δύο φύλλα χάρτου, σχήματος ὀρθογωνίου, διαιρέσωμεν εἰς 3 μέρη ἴσα, τὸ ἓν φύλλον κατὰ μῆκος, τὸ ἄλλο κατὰ πλάτος, ἕκαστον τεμάχιον τοῦ ἑνὸς φύλλου εἶνε ἰσοδύναμον ἀλλ' ὄχι ἴσον πρὸς ἕκαστον τεμάχιον τοῦ ἄλλου.

104. Μέτρησις τοῦ ῥόμβου. Ἐπειδὴ ὁ ῥόμβος εἶνε μερικὴ περίπτωσις τοῦ παραλληλογράμμου, ὁ αὐτὸς κανὼν (ἐδ. 100) ἰσχύει καὶ διὰ τὸν ῥόμβον. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ ὁ ῥόμβος ΕΖΗΘ (σχ. 137) εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου (1) τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις τὰς διαγωνίους τοῦ ῥόμβου, συμπεραίνομεν ὅτι. *Τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.* Π. χ. ἐὰν ἡ μία διαγώνιος εἶνε 4 δακ. καὶ ἡ ἄλλη 3, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου θὰ εἶνε 4×3 : 2 ἢ 6 τ. δ.



Σχ. 137

105. Μέτρησις τοῦ τριγώνου. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 138), τοῦ ὁποίου ἂν ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς βάσις, ὕψος θὰ εἶνε ἡ ΓΗ (ἐδ. 23). Ἔστω δὲ ΑΒ=3μ. καὶ ΓΗ=5μ. Ἐὰν λάβωμεν καὶ ἄλλο τρίγωνον ΒΓΔ ἀκριβῶς ἴσον καὶ τὸ προσθέσωμεν μὲ τὸ ΑΒΓ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, τότε βλέπομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχον βάσιν 3μ. καὶ ὕψος 5 μ. καὶ ἐπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶνε 3×5 τ. μ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε ἀκριβῶς τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε 3×5 : 2. Συμπεραίνομεν λοιπὸν γενικῶς ὅτι :

Σχ. 138

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασι-

1) Διότι τὸ ὀρθογώνιον χωρίζεται εἰς 8 τρίγωνα ἴσα, τέσσαρα δὲ ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἀποτελοῦν τὸν ῥόμβον.

ασθῇ ἡ βάσις ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ε τὸ ἐμβαδόν, β τὴν βάσιν καὶ υ τὸ ὕψος, ἔχομεν τὸν τύπον $Ε = β \times υ : 2$.

Ἐφαρμογή. Ἔλασμα σιδηροῦν ἔχει σχῆμα τριγώνου τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶνε 2,25 μ., τὸ δὲ ἀντίστοιχον ὕψος εἶνε 1,50 μ. Ποῖον εἶνε τὸ βάρος αὐτοῦ, ἐὰν 1 τ. μ. ἐξ αὐτοῦ ἔχῃ βάρος 80 χιλιογράμμων;

ἐμβαδὸν τοῦ ἐλάσματος $= 2,25 \times 1,5 : 2 = 1$ τ. μ. 6875.

Βάρος ἐλάσμ. $= 80 \times 1,6875 = 135$ χιλιογρ.

106. *Παρατ. α'.)* Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ἕπεται ὅτι, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὴν βάσιν, εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαιρέσεως τὸ ὕψος, ἐὰν δὲ γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸ ὕψος, εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαιρέσεως ἐπίσης τὴν βάσιν· ἤτοι $υ = Ε : β$ καὶ $β = Ε : υ$.

β') Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (ἢ τὴν βάσιν) τοῦ τριγώνου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως (ἢ τοῦ ὕψους), ἤτοι $υ = Ε : \frac{β}{2}$ καὶ $β = Ε : \frac{υ}{2}$.

γ'.) Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 29) ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας δύναται νὰ ληφθῇ ὡς βάσις καὶ ἡ ἄλλη ὡς ὕψος. Π. χ. ἐὰν $ΑΒ = 4$ μ καὶ $ΑΓ = 3$ μ., τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $4 \times 3 : 2 = 2 \times 3 = 6$ τ. μ.

* **107. Ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.** Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τριγώνου, π. χ. 12, 15 καὶ 19, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος:

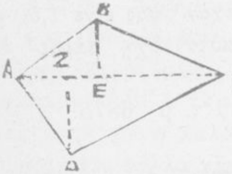
Λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου $12 + 15 + 19$, ἤτοι 23.

Ἐξ αὐτοῦ ἀφαιροῦντες καθεμίαν πλευρὰν εὑρίσκομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 11, 8 καὶ 4. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 23, 11, 8 καὶ 4, καὶ τοῦ γινομένου 8096 εὑρίσκομεν τὴν τετραγ. ῥίζαν 89, 97 τ. μ. ἡ ὁποία παριστᾷ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Πρὸς εὐκολωτέραν ἀπομνημόνευσιν τοῦ κανόνος δίδομεν τὸν τύπον $Ε = \sqrt{τ.(τ-α).(τ-β).(τ-γ)}$, ἔνθα α, β, γ εἶνε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ·

108. Μέτρησις τετραπλεύρου καὶ παντὸς πολυγώνου.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 139) δύναται διὰ μιᾶς διαγωνίου ΑΓ νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο τρίγωνα. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων ἀποτελεῖ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου· πρέπει λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΔΓ· ἔπειτα μετροῦμεν τὴν διαγώνιον καὶ τὰ ὕψη, ἔστωσαν δὲ ΑΓ = 6 μ., ΒΕ = 2 μ. καὶ ΔΖ = 4 μ. Τότε ἐμβ. τρ. γ. ΑΒΓ = 6×2 : 2 = 6 τ. μ., ἐμβ. τριγώνου ΑΔΓ = 6×4 : 2 = 12 τ. μ.

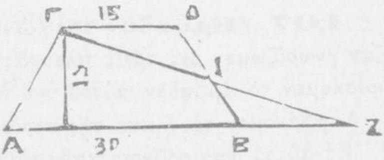


Σχ. 139

Ἐπομένως τοῦ τετραπλεύρου τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 6 + 12 = 18 τ. μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ τετραπλεύρου χωρίζομεν δηλ. αὐτὸ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ μιᾶς κορυφῆς του καὶ ἔπειτα ὑπολογίζομεν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

Ἡ διαίρεσις πολυγώνου εἰς τρίγωνα δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Λαμβάνομεν ἐντὸς αὐτοῦ ἓν σημεῖον καὶ ἐξ αὐτοῦ ἄγομεν εὐθείας εἰς ὅλας τὰς κορυφάς του· τότε σχηματίζονται τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.

109. Μέτρησις τοῦ τραπεζίου. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 140). Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς διαιρέσεως εἰς τρίγωνα· εὐκολώτερον ὅμως εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Προεκβάλλομεν τὴν μίαν βάσιν ΑΒ κατὰ μῆκος ΒΖ ἴσον πρὸς τὴν ἄλλην βάσιν ΔΓ καὶ φέρομεν τὴν ΓΖ.



Σχ. 140

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΑΖ εἶνε:
(30 + 15) ×12 : 2 = 45×6 = 270 τ. γρ. ἢ 2τ.δ., 70.

Τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἔχει καὶ τὸ τραπέζιον, διότι τὰ τρίγωνα ΓΔΙ καὶ ΙΒΖ εἶνε ἴσα (ἐδ. 30 α΄.) Ἄρα ***τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 2.***
Τύπος Ε = (α + β) × υ : 2.

110. Μέτρησις κανονικοῦ πολυγώνου. Κατασκευάζομεν κανονικὸν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον, τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 141) καθὼς ἐμάθομεν εἰς ἐδ. 73 γ΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, . . . χωρίζομεν τὸ ἑξάγωνον εἰς ἓξ τρίγωνα ἴσα.

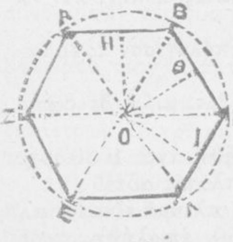
Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τούτων, ὡς τοῦ ΑΟΒ, εἶνε $AB \times OH : 2$ καὶ τῶν ἓξ τριγώνων, ἤτοι τοῦ ἑξαγώνου, θὰ εἶνε ἑξαπλάσιον, ἤτοι $\frac{AB \times OH}{2} \times 6$ ἢ $\frac{AB \times 6 \times OH}{2}$. Ἀλλὰ $AB \times 6$ παριστάνει τὴν περίμετρον Π τοῦ πολυγώνου καὶ ΟΗ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς (ΟΗ=ΟΘ=ΟΙ. . .) Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶνε $\Pi \times (OH) : 2$. Ὁμοίως σκεπτόμεθα διὰ πᾶν πολύγωνον κανονικόν.

Κανών. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2.*

Εἰς τὸ σχῆμα 141, ἐὰν ΑΒ=2 δάκ. καὶ ΟΗ=1,7 δάκ., τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶνε $12 \times 1{,}7 : 2$ ἢ $6 \times 1{,}7 = 10{,}2$ τ. δ.

111. Μέτρησις τοῦ κύκλου. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος α ἐγγράφομεν κανονικὸν ἑξάγωνον, ἔπειτα κανονικὸν δωδεκάγωνον κτλ.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν πολυγώνων τούτων διαρκῶς αὐξάνουν διαφέροντα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ὁλονὲν ὀλιγώτερον, καὶ ἡ μὲν ἀπόστασις ΟΗ (σχ. 141) πλησιάζει πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ περίμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν τὸν **κανόνα**: *Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ περιφέρεια Γ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα α καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2.*, ἤτοι $E = \Gamma \times \alpha : 2$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ Γ θέσωμεν τὸ ἴσον του (ἐδ. 96) $\delta \times \pi$ ἢ $2 \times \alpha \times \pi$, θὰ ἔχωμεν $E = 2 \times \alpha \times \pi \times \alpha : 2$ ἢ ἁπλοποιοῦντες ἔχομεν:



Σχ. 141

$E = \alpha \times \alpha \times \pi$ ἢ $E = \pi \times \alpha^2$. Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἑξῆς εὐκολωτέρου **κανόνος.**

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εὑρίσκεται ἐὰν ἡ ἀκτὶς ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.=3,14.

Ἐφαρμογή. 1) Πόσα τ. μ. ὑφάσματος θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ καλύψωμεν τράπεζαν κυκλικὴν μὲ διάμετρον 2,4 μ.;

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶνε 1,2, τὸ ἐμβαδὸν τῆς τραπέζης θὰ εἶνε $1,2 \times 1,2 \times \pi = 4,5216$ τ. μ.

2) Τὸ ἐμβαδὸν στεφάνης (σχ. 51) ἀκτίνων 8 μ. καὶ 5 μ. εἶνε: $\pi \times 8^2 - \pi \times 5^2 = \pi \times (8^2 - 5^2) = \pi \times (64-25) = \pi \times 39 =$ 122τ. μ., 5224.

112. Ἐμβαδὸν τομέως. (ἐδ. 42). Ἔστω 3,20μ. ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (σχ. 142) καὶ 36° τὸ τόξον AB. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶνε $3,20 \times 3,20 \times \pi$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τομέως 1° θὰ εἶνε: $3,20 \times 3,20 \times \pi : 360$ ἢ $1,60 \times 2 \times 3,20 \times \pi : 360$ ἢ $6,40 \times \pi \times 1,60 : 360$. Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τομέως 36° θὰ εἶνε $6,40 \times \pi \times 36 \times 1,60 : 360$ Ἐὰν παραλείψωμεν τὸν παράγοντα 1,60 (ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος), ἀπομένει $6,40 \times \pi \times 36 : 360$, δηλ. τὸ μῆκος τόξου 36° (ἐδ. 97) εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3,20μ. Ἄρα:

Σχ. 142

Τὸ ἐμβαδὸν τομέως εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ τόξου του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2. Συγκρίνοντες τὸν κανόνα τοῦτον μὲ τὸν τοῦ τριγώνου (ἐδ. 105) συμπεραίνομεν ὅτι ὁ τομεὺς (π. χ. ὁ AOB) δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν τὸ τόξον AB, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα OA.

Ἀσκήσεις

1) Τί καλεῖται τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ἑκατόμμετρον, χιλιόμετρον; ἐκ πόσων τ. μ. ἀποτελεῖται τὸ καθέν;

2) Ὠφέλιμον εἶνε ὁ καθεὶς μαθητὴς νὰ μετρήσῃ τὴν περίμετρον διαφόρων ἀντικειμένων ἐχόντων σχῆμα ὀρθογωνίου, π.χ. φύλλου χάρτου, ὑέλου, παραθύρου, πίνακος, πατώματος, αὐλῆς, καὶ νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἐμβαδόν.

3) Τετραγώνου ἡ περίμετρος εἶνε 38,40μ. Ὑπολόγισον τὸ ἐμβαδὸν εἰς τ. μ. καὶ εἰς τεκτ. τετρ. πήχεις.

4) Ὀρθογωνίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶνε 492972 τ. μ., ἡ δὲ βάσις 372μ,50. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος;

5). Γήπεδον ὀρθογώνιον μήκους 40μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 1030 δρχ. πρὸς 75 λ. τὸν τετρ. τεκτ. πῆχ. Ποῖον εἶνε τὸ πλάτος αὐτοῦ;

6). Χωραφίου τετραγωνικοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶνε 188μ., ἡ δὲ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς κάθετος 90μ,50, ἐπωλήθη πρὸς 41,75 δρχ. τὸ τετρ. δεκάμετρον. Μὲ τὰ χρήματα ταῦτα ἠγοράσθη κῆπος ὀρθογώνιος πλάτους 52μ,50 πρὸς 70 δρχ. τὸ τ. δεκ. Ποῖον εἶνε τὸ μῆκος τοῦ κήπου;

7). Δύο ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν ἐξ ἴσου δύο γήπεδα τετραγωνικὰ ἐκτιμηθέντα πρὸς 7 δρ. τὸ τ. μ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶνε

42,25, τοῦ δὲ ἄλλου 44μ,50. Ἐὰν ὁ πρεσβύτερος ἀδελφὸς λάβῃ τὸ 2ον γήπεδον, πόσας δρχ. πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸν ἀδελφὸν ὥστε ἡ διανομὴ νὰ γίνῃ ἐξ ἴσου;

8). Αἴθουσα ὀρθογώνιος πρόκειται νὰ πατωθῇ διὰ σανίδων μήκους 1μ,5 καὶ πλάτους 0,24. Τῆς αἰθούσης αἱ διαστάσεις εἶνε 6μ, καὶ καὶ 5μ. Πόσαι σανίδες χρειάζονται;

Πόσα μέτρα τάπητος πλάτους 0,75 θὰ χρειασθῶσι διὰ νὰ στρωθῇ ὅλον τὸ πάτωμα;

9). Ὁ Πέτρος ἔχει ἀγρὸν τετραγωνικόν, περιμέτρου 500 μέτρ. Ὁ Ἰωάννης, ἔχων ἀγρὸν ὀρθογώνιον τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, προτείνει ἀνταλλαγήν.

Συμφέρει αὕτη εἰς τὸν Πέτρον;

10). Τράπεζα ὀρθογώνιος ἔχει διαστάσεις 9μ, καὶ 4μ. Ποία θὰ ἦτο ἡ πλευρὰ τραπέζης τετραγωνικῆς ἰσοδυνάμου;

11). Τριγώνου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶνε 68 τ. μ., 45, ἡ δὲ βάσις 12,35. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος;

12). Τριγώνου ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς καθεμία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε 15,25. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν.

13) Ὀρθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶνε 7δ. καὶ 2δ. Ἐὰν διπλασιάσωμεν αὐτάς, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου ὀρθογωνίου τίνα σχέσιν θὰ ἔχῃ πρὸς τὸ τοῦ 1ου;

14). Οἰκόπεδον 72 τ. μ. ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων ἐκτάσεων διαφόρου ἀξίας· τῆς μὲν 1ης τὸ τ. μ. τιμᾶται 30δρχ, τῆς δὲ 2ας 25δρχ. Ζητεῖται α΄) νὰ ἀφαιρεθῇ ἐκ τῆς 1ης τεμάχιον καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὴν 2αν οὕτως ὥστε τὸ γήπεδον νὰ ἀποτελῆται ἐκ δύο ἀνίσων ἐκτάσεων ἴσης ἀξίας. β΄) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις τοῦ ὅλου γηπέδου, ὑποτιθεμένου ὀρθογωνίου, ἐὰν ἡ μία εἶνε διπλασία τῆς ἄλλης.

15). Γήπεδον τριγωνικὸν ΑΒΓ νὰ χωρισθῇ εἰς 5 μέρη ἰσοδύναμα ἔχοντα τὴν κορυφὴν Β κοινήν.

16). Τραπέζιον νὰ χωρισθῇ εἰς 3 μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν συνδεουσῶν τὰς δύο βάσεις.

17). Πόσον μῆκος σιδηροῦ ἐλάσματος χρειαζόμεθα διὰ νὰ περιβάλωμεν τροχὸν ἀκτῖνος 0,95μ;

18). Κυκλικὴ πλὰξ διαμέτρου 120 γρ. φέρει δύο ὀπὰς κυκλικὰς διαμέτρων 75 γρ. καὶ 45 γρ. Ὑπολόγισον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀπομένοντος μέρους τῆς πλακός.

19). Ἡ κυκλικὴ πλὰξ ὡρολογίου περιβάλλεται ὑπὸ τετραγώνου πλευρᾶς 65 δακ. περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον (ἐδ. 72). Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπιχρύσωσις τοῦ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κύκλου μέρους πρὸς 8,50 δρχ. τὴν τετρ. παλ;

20) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως πύργου κυλινδρικοῦ εἶνε 65μ.,94. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

21). Ὑπολόγισον τὸ ἐμβαδὸν τομέως τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶνε 23° 18΄ εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 δακτ.

* 22). Αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου εἶνε $α=3$, $β=2$, $γ=1,5$. ὑπολόγισον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ (ἐδ. 107).

* 23). Τὸ αὐτὸ ζήτημα ἐὰν αἱ πλευραὶ εἶνε 3,4 καὶ 5 ἢ 4,4 καὶ 7 (τρίγωνον ἰσοσκελὲς) ἢ 3, 3 καὶ 3 (ἰσόπλευρον).

Καταμέτρησις ἐπιφανείας (1) ἐπὶ τοῦ ἐδάφους

113. Προσδιορισμὸς καθέτου διευθύνσεως. Εἰς τὸ ἐδ. 95 ἐμάθομεν πῶς χαράσσεται εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ πῶς μετρεῖται αὕτη. Τώρα θὰ μάθωμεν πῶς ἄγεται εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν· ἡ ἐργασία αὕτη εἶνε ἀπαραίτητος διὰ τὴν εὕρεσιν ἐμβαδοῦ ἐπιπέδων σχημάτων, διότι συχνότατα εἶνε ἀνάγκη νὰ καθορίζωμεν μίαν διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ ἄλλην δεδομένην· π.χ. τὸ ὕψος τριγώνου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου. . .

Σχ. 143

Πρὸς τοῦτο, καθὼς ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μεταχειριζόμεθα ἐν γένει τὸν γνώμονα (ἐδ. 56), οὕτω καὶ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν ὄργανον, τὸ ὁποῖον καλεῖται κατ' ἀναλογίαν *Χωρομετρικὸς γνώμων.*

Τὸ ὄργανον τοῦτο (σχ. 143) εἶνε πρίσμα (ἢ κύλινδρος) μὲ βάσεις ὀκτάγωνα κανονικά· δύο ζεύγη ἀντικειμένων ἑδρῶν αὐτοῦ φέρουν κατακορύφως θυρίδας καὶ σχισμὰς ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶνε τοποθετημένον λεπτὸν νῆμα.

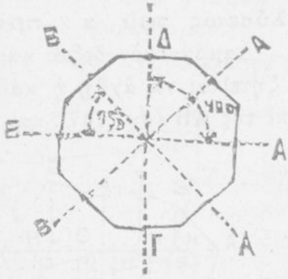
Τὸ ὄργανον στηρίζεται ἐπὶ ἀκοντίου, τὸ ὁποῖον ἐμπήγομεν εἰς τὸ ἔδαφος ὅσον τὸ δυνατὸν κατακορύφως (2).

---

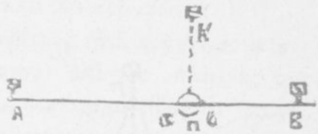
(1) Ἡ καταμετρητέα ἐπιφάνεια ὑποτίθεται εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον (ἐδ 158) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια γηπέδου δὲν εἶνε τοιαύτη, δὲν μᾶς χρησιμεύει τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς της (ἐδ. 176) ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ οἰκόπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἀνεγείρομεν οἰκίαν δὲν εἶνε ὁριζόντιον, τὸ πάτωμα ὅμως, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶνε ὁριζόντιον· ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς τῶν δένδρων τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ φυτεύσωμεν μὲ ὡρισμένας ἀποστάσεις εἰς ἓν χωράφιον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς προβολῆς του.

(2) Ἡ λεπτομερὴς περιγραφὴ παντὸς ἐν γένει ὀργάνου εἶνε ἀνωφελὴς ἐφ' ὅσον οἱ μαθηταὶ δὲν βλέπουν τοῦτο, εἰς τὸ πραγματικόν.

Ἡ χρῆσις τοῦ ὀργάνου στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἰδιότητος: Ἐὰν ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ μέσα Α καὶ Β, Γ καὶ Δ (σχ. 144) τῶν



Σχ. 144

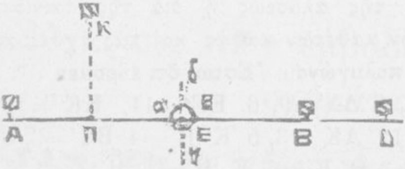


Σχ. 145

ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε κάθετοι μεταξύ των.

114. Πρόβλημα α΄) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς ἓν σημεῖον Π τῆς χαραχθείσης εὐθείας ΑΒ (σχ. 145), τοποθετοῦμεν τὸ ὄργανον ἐπὶ τοῦ σημείου Π καὶ περιστρέφομεν αὐτὸ σιγὰ μέχρις ὅτου, σκοπεύοντες διὰ μέσου τῶν θυρίδων α καὶ β, ἴδωμεν τὰ ἀκόντια Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς χαραχθείσης εὐθείας. Κατόπιν χωρὶς νὰ μετακινήσωμεν τὸ ὄργανον σκοπεύομεν διὰ μέσου τῶν ἄλλων δύο θυρίδων γ καὶ δ, καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τούτων κάμνομεν νεῦμα εἰς τὸν βοηθὸν νὰ τοποθετήσῃ ἀκόντιον Κ, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν εὐθυγραμμίαν ΠΚ, ἡ ὁποία εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος ἐκ τοῦ Π ἐπὶ τὴν ΑΒ

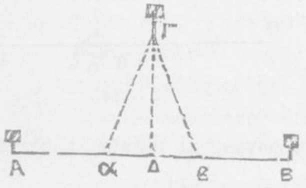
Πρόβλημα β΄.) Ἐὰν τὸ σημεῖον Κ, ἐκ τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 146), κεῖται ἐκτὸς τῆς



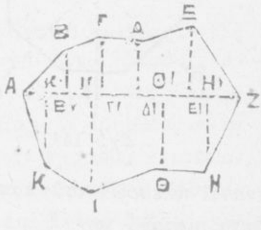
Σχ. 146

ΑΒ, τότε εὑρίσκομεν *τὸν πόδα* τῆς ἐκ τοῦ Κ καθέτου διὰ δοκιμῶν δηλ. ἐκλέγομεν ἓν σημεῖον Ε τῆς ΑΒ, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν μὲ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ ὀφθαλμοῦ μας ὅτι εἶνε ὁ ποὺς τῆς ζητουμένης καθέτου· τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ Ε τὸ ὄργανον καὶ περιστρέφομεν αὐτὸ σιγὰ μέχρις ὅτου, σκοπεύοντες διὰ μέσου τῶν θυρίδων α καὶ β, ἴδωμεν τὰ ἀκόντια Β καὶ Δ. Κατόπιν, χωρὶς νὰ μετακινήσωμεν τὸ ὄργανον, σκοπεύομεν διὰ τῶν θυρίδων γ καὶ δ. Ἐὰν κατὰ τὴν δευτέραν σκόπευσιν διακρίνωμεν τὸ ἐπὶ τοῦ σημείου Κ ἀκόντιον, βεβαιούμεθα ὅτι τὸ σημεῖον Ε εἶνε ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου· εἰ δὲ μή, μετακινοῦμεν τὸ ὄργανον εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ.

115. Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ α΄. προβλ. Διὰ μετροταινίας ἢ λεπτοῦ σχοινίου.—Λαμβάνομεν δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ σημείου Δ, ἐκ τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος, δύο ἴσα τμήματα, τὰ Δα καὶ Δβ, ἐπὶ τῆς ΑΒ (σχ. 147), καὶ δένο-



Σχ. 147



Σχ. 148

μεν τὰ ἄκρα τοῦ σχοινίου εἰς τὰ α καὶ β. Κατόπιν τεντώνομεν τὸ σχοινίον ἀκριβῶς ἐκ τοῦ μέσου του Γ (τὸ ὁποῖον ἔχομεν εὕρει προηγουμένως, καὶ δένομεν ἕνα κόμβον. Οὕτω ἡ ΓΔ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος (ἐδ. 28).

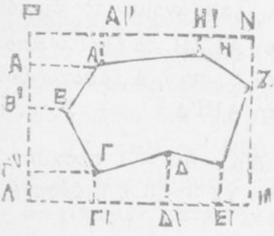
116. Καταμέτρησις πολυγώνου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ πολύγωνον τοῦ σχήματος 148, ἐμπήγομεν πασσάλους εἰς ὅλας τὰς κορυφάς του. Ἔπειτα ἐκλέγομεν τὰς μᾶλλον ἀπομεμακρυσμένας κορυφάς του Α καὶ Ζ καὶ χαράσσομεν τὴν διαγώνιον ΑΖ κατὰ τὸ (ἐδ. 95)· διὰ δὲ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΖ ἀπὸ καθεμίαν τῶν λοιπῶν κορυφῶν· τοὺς πόδας τῶν καθέτων τούτων σημειοῦμεν διὰ πασσάλων. Οὕτω τὸ πολύγωνον ἐχωρίσθη εἰς τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ εἰς τραπέζια ἔχοντα δύο γωνίας ὀρθάς. Μετροῦμεν διὰ τῆς ἁλύσεως ἢ διὰ τῆς ταινίας, τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν καθέτων καθὼς καὶ τὰς ἀχθείσας καθέτους ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου. Ἔστω ὅτι εὕρομεν·

ΒΒ΄. =10, 4 μ. ΓΓ΄=13, 4. ΔΔ΄=9, 6. ΕΕ΄=11. ΚΚ΄=12. ΙΙ΄=15, 3. ΘΘ΄=11,5. ΗΗ΄=12. ΑΚ΄=3, 5. Κ΄ Β΄=4. Β΄Ι΄=3, 8. Ι΄ Γ΄=2, 2. Γ΄ Δ΄=5. Δ΄ Θ΄=3. Θ΄ Ε΄=6. Ε΄ Η΄=3. Η΄ Ζ=4, 7.

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων καὶ τῶν τραπεζίων καὶ προσθέσωμεν αὐτά, θὰ εὕρωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὅλου σχήματος εἶνε 698, 35 τ. μ.

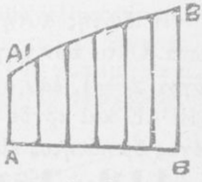
117. *Νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓΔΕΖΗ (σχ. 149), ἡ ὁποία εἶνε ἡ λίμνη ἢ ἕλος ἢ δάσος, ὥστε δὲν εἶνε εὔκολον νὰ εἰσέλθωμεν.*

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς ἓν ὀρθογώνιον ΛΜΝΡ ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ περιέχηται ἡ ἐπιφάνεια· ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν Α. Β. Γ.... ἄγομεν καθέτους (διὰ τοῦ χωρομετρικοῦ γνώμονος) ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, ὅτε σχηματίζονται τραπέζια καὶ ὀρθογώνια. Μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα τμήματα ΛΓ′. Γ′ Δ′. . . ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων καὶ τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦντες ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ ΛΜΝΡ ἔχομεν προφανῶς τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.



Σχ. 149

Σημ. Ἐὰν ἡ μετρητέα ἐπιφάνεια περατοῦται καὶ εἰς καμπύλην γραμμὴν (σχ. 149′), ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς ἴσα μέρη, π. χ. εἰς 6, ἐκ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὴν Α Α′. Οὕτω ἐχωρίσαμεν τὸ σχῆμα ΑΑ′ Β′ Β′ εἰς λωρίδας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς τραπέζια. Τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων τούτων θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχ. μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλειτέραν, ὅσῳ περισσότεραι εἶνε αἱ παράλληλοι.



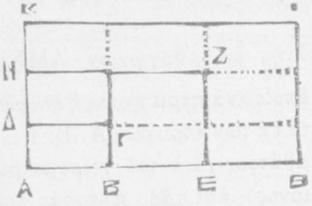
Σχ. 149′

Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων

118. *Ἐὰν δύο σχήματα εἶνε ὅμοια, ποῖον λόγον ἔχουν τὰ ἐμβαδά των;*

Ἐκ τοῦ ἐν ἐδ. 81 ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος εἶνε φανερὸν ὅτι τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουν μὲν τὴν αὐτὴν μορφήν, χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν (δηλ. χωρὶς νὰ εἶνε ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.) Ἐὰν π. χ. γράψωμεν εἰς τὸ χαρτίον τρίγωνον, τετράπλευρον καὶ πεντάγωνον, παρατηρήσωμεν δὲ αὐτὰ μὲ φακὸν μεγενθυτικόν, θὰ τὰ ἴδωμεν ἀρκετὰ μεγαλείτερα ἀλλ' ἐντελῶς ὅμοια.

Ἐδῶ πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων σχημάτων. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 150), λαμβάνομεν τὸ ὅμοιον ὀρθογώνιον ΑΕΖΗ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ 2×2 ἢ 4 ὀρθογωνίων ἴσων μὲ τὸ ΑΒΓΔ.



Σχ. 150

Ὁμοίως, ἐὰν λάβωμεν **ΑΘ**$=$ΑΒ$\times3$ καὶ **ΑΚ**$=$**ΑΔ**$\times3$, προκύπτει τὸ ὁμοιονὀρθογώνιον ΑΘΙΚ, ἀποτελούμενον ἐκ 3×3 ἢ 9 ὀρθογωνίων ἴσων μὲ τὸ ΑΒΓΔ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, *ἐὰν δύο ὀρθογώνια εἶνε ὅμοια, ὁ δὲ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν εἶνε ἀριθμός τις λ, τὰ ἐμβαδά των θὰ ἔχουν λόγον $\lambda\times\lambda$ ἢ λ^2.*

Τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων ΑΘΙΚ καὶ ΑΕΖΗ ὁ λόγος ὁμοιότητος εἶνε $\frac{3}{2}$· διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ **ΑΘΙΚ** εἶνε τὰ $\frac{9}{4}$ τοῦ ΑΕΖΗ.

Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶνε γενική, ἀληθεύουσα δι' ὅλα τὰ ὅμοια πολύγωνα. Οὕτω τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 109) τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον $2^2=4$, ἐὰν ὁ λόγος ὁμοιότητος εἶνε 2, καὶ τῶν πενταγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε (σχ. 110) τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον $3^2=9$, ἐὰν ὁ λόγος ὁμοιότητος εἶνε 3.

119. Ἐφαρμογή. Εἰς τὸ ἐδ. 84 ἐμάθομεν ὅτι δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶνε ὅμοια· ἑπομένως, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν λ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν πρώτων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ λ.

Ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν ἕν μ. εἶνε 1 τ. μ.

»	»	τριγώνου	»	»	»	»	0,4330
»	»	πενταγώνου	»	»	»	»	2,3774
»	»	ἑξαγώνου	»	»	»	»	2,5980
»	»	ὀκταγώνου	»	»	»	»	4,8284
»	»	δεκαγώνου	»	»	»	»	7,6939

κατὰ ταῦτα, τὸ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου κανονικοῦ ἔχοντος πλευρὰν 3 δ. εἶνε $2{,}5980\times(0{,}03)^2$ 0,τ.μ,0023382.

120. Εὕρεσις ἐμβαδοῦ κατὰ προσέγγισιν. Ὅταν δὲν ἔχωμεν ἀνάγκην μεγάλης ἀκριβείας, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σχήματος κατὰ τὸν ἑξῆς πρακτικὸν τρόπον: Σχεδιάζομεν ἐπὶ χαρτονίου σχῆμα ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ζητοῦμεν (οἰκοπέδου, λίμνης, πεδιάδος, κ.τ.λ.) ὑπὸ κλίμακα κατάλληλον, π. χ. 1 : 100. Κατόπιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χαρτονίου καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα, σχεδιάζομεν τετράγωνον τὸ ὁποῖον νὰ παριστάνῃ τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν (τὸ τ. μ.) ἤτοι ἓν τετρ. δάκ. Ἀποκόπτοντες προσεκτικῶς τὰ δύο σχέδια, ζυγίζομεν αὐτά, καὶ διαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ πρώτου διὰ τοῦ βάρους τοῦ δευτέρου (εἰς γραμμάρια).

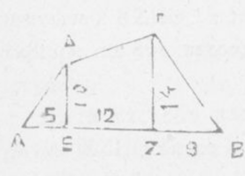
Τὸ πηλίκον δίδει τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἰς τ. μ. Διότι, ἐὰν π. χ. εἶνε τὸ βάρος τοῦ α΄ σχεδίου 150 γραμ. καὶ 0,5 γραμ. τοῦ β΄ θὰ εἴπωμεν, κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν—

0,5 γραμ. παριστῶσι 1 τ. μ
150 » » X »
$X = 150 : 0{,}5 = 300$ τ. μ.

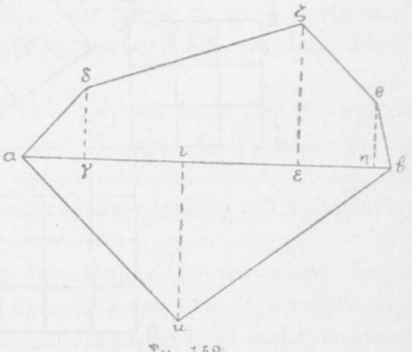
Ἀσκήσεις.

1) Ἔχομεν τὸ σχέδιον ἑνὸς ὀρθογωνίου ὑπὸ κλίμακα 3:50. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐὰν τοῦ σχεδίου αἱ διαστάσεις μετρηθεῖσαι ἔδωκαν 140 γραμμὰς καὶ 80γ.

2) Τὸ σχ. 151 παριστάνει ὑπὸ κλίμακα 1:1000 τὸ σχέδιον γηπέ-



Σχ. 151



Σχ. 152

δου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν. (οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν χιλιοστὰ τοῦ μέτρου).

3) Τὸ σχ. 152 παριστάνει ὑπὸ κλίμακα 1:10.000 τὸ σχέδιον γηπέδου.

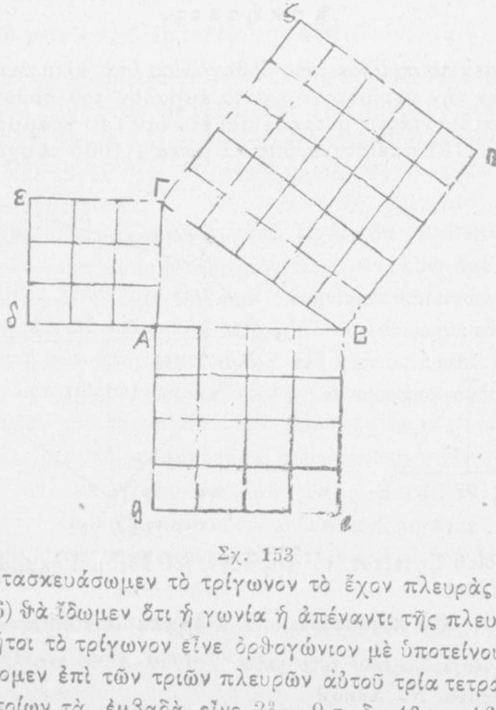
Νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ σχέδιον τοῦτο ὑπὸ κλίμακα 3:10.000, νὰ μετρηθῇ διὰ τοῦ κανόνος ἑκάστη ἐστιγμένη γραμμή, νὰ εὑρεθῇ ποῖον πραγματικὸν μῆκος ἀντιπροσωπεύει, καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γηπέδου.

4). Δοθέντος τριγώνου νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν τετραπλάσιον.

5). Νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 110) νὰ ἔχῃ δὲ ἐμβαδὸν 16 φορὰς μεγαλείτερον.

Ἰσότητες μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τετραγώνων.

121. Ἰδιότητες ὀρθογωνίων τριγώνων. Αἱ πλευραὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχουν θεμελιώδη σχέσιν, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὸν ἐκ Σάμου μαθηματικὸν Πυθαγόραν (6ος αἰὼν π.Χ.).



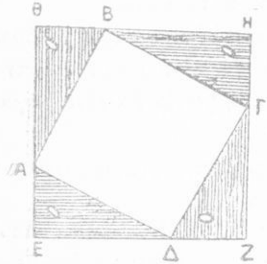
Σχ. 153

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς 3,4 καὶ 5 δακτ. (ἐδ. 66) θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 5 δάκ. εἶνε ὀρθή, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶνε ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν 5 δάκ. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ τρία τετράγωνα (σχ. 153), τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶνε $3^2 = 9$ τ. δ., $4^2 = 16$ τ. δ. καὶ

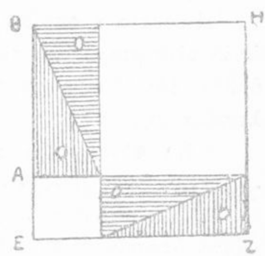
$5^2=25$ τ. δ. Μεταξὺ δὲ αὐτῶν ὑπάρχει ἡ ἰσότης $3^2+4^2=5^2$. *ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

Ἡ σχέσις αὕτη ἀληθεύει ὄχι μόνον εἰς τὸ ἐν λόγῳ τρίγωνον, ἀλλὰ καὶ εἰς κάθε ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 29).

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου κόπτομεν ἐκ χαρτονίου 4 τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα καὶ κατασκευάζομεν τετράγωνον ΕΖΗΘ (σχ. 154) μὲ πλευρὰν τὸ ἄθροισμα ΕΔ+ΔΖ τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρ-



Σχ. 154



Σχ. 155

θῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Τοποθετοῦμεν ἐντὸς αὐτοῦ τὰ 4 τρίγωνα, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 154· τὸ ὑπολειπόμενον χωρίον τὸ ὁποῖον δὲν καλύπτεται ὑπὸ τῶν τριγώνων, ἤτοι τὸ ΑΒΓΔ εἶνε τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης· εἶνε δὲ τετράγωνον διότι ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς· π. χ. ἡ γωνία ΑΔΓ εἶνε ὀρθή, διότι αἱ εἰς τὸ Δ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΔΕ καὶ ΓΔΖ ἀποτελοῦσι μίαν ὀρθήν.

Ἐὰν τώρα τοποθετήσωμεν τὰ 4 τρίγωνα ἐντὸς τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 155, τότε βλέπομεν ὅτι τὰ μέρη τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ τὰ ὁποῖα δὲν καλύπτονται ὑπὸ τῶν τριγώνων, εἶνε ἀκριβῶς τὰ δύο τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἀφηρέσαμεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἐπιφανείας ἴσας, δηλ. τὰ 4 τρίγωνα. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὰ ὑπόλοιπα εἶνε ἰσοδύναμα, δηλ. τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἀφ' ἑνὸς καὶ τὰ δύο τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν ἀφ' ἑτέρου.

122. Προβλήματα. α) **Διὰ τίνος πρακτικοῦ μέσου ἀναγνωρίζομεν ὅτε μία γωνία εἶνε ὀρθή;**

Τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ μὲ οἱανδήποτε μονάδα μετρηθεῖσαι παρίστανται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5, εἴπομεν ὅτι εἶνε ὀρθογώνιον, καλεῖται δὲ Πυθαγόρειον τρίγωνον.

Καὶ πᾶν τρίγωνον ἔχον πλευρὰς ἀναλόγους τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5, εἶνε ὀρθογώνιον, διότι εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ Πυθαγόρειον τρίγωνον (ἐδ. 82,3ον).

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν μία γωνία εἶνε ὀρθή, λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς μήκη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, καὶ 4 (π. χ. 30 δακ. καὶ 40 δακ.).

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τούτων πρέπει νὰ εἶνε 50 δάκ. Ἐὰν εἶνε μικροτέρα τῶν 50 δακ. ἡ γωνία θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς ὀρθῆς· ἐὰν δὲ εἶνε μεγαλειτέρα τῶν 50 δακ. ἡ γωνία θὰ εἶνε μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς.

* **β) Γνωρίζοντες τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου ὀρθογωνίου, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τρίτην.**

1) Ἔστω ΑΒ=32 γρ. ΑΓ=45 γρ. (σχ. 153). Ἐὰν τὴν ζητουμένην ὑποτείνουσαν ΒΓ παραστήσωμεν διὰ χ, πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$\chi^2 = 32^2 + 45^2 \text{ ἢ } \chi^2 = 3049 \text{ ὅθεν}$$

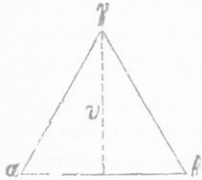
$$\chi = \sqrt{3049} \text{ ἢ } \chi = 55{,}5 \text{ γρ.}$$

2) Ἔστω ΑΒ=12 καὶ ΒΓ=21. Ἐὰν τὴν ζητουμένην πλευρὰν ΑΓ παραστήσωμεν διὰ χ, πρέπει νὰ ἔχωμεν

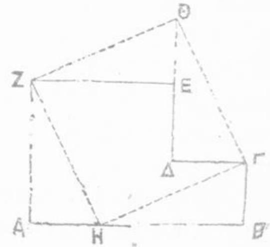
$$\chi^2 + 12^2 = 21^2 \text{ ἢ } \chi^2 = 21^2 - 12^2,\ \chi^2 = 297 \text{ ὅθεν}$$

$$\chi = \sqrt{297} = 17{,}2$$

* *γ)* **Ἰσοπλεύρου τριγώνου αβγ** (σχ. 156) **ἡ πλευρὰ**



Σχ. 156



Σχ. 157

εἶνε 50 γρ. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος υ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου αγδ προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\upsilon^2 + 25^2 = 50^2 \text{ ἢ } \upsilon^2 = 50^2 - 25^2,\ \upsilon^2 = 1875 \text{ ὅθεν}$$

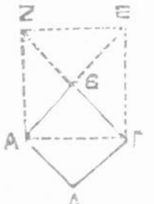
$$\upsilon = \sqrt{1875}, \text{ ἢ } \upsilon = 43.$$

δ) Ἐκ δύο δοθέντων τετραγώνων νὰ συντεθῇ νέον τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Παραθέτομεν τὰ δύο τετράγωνα ΑΖΕ καὶ ΒΓΔ ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 157· κατόπιν λαμβάνομεν τὸ μῆκος ΕΘ ἴσον μὲ τὴν ΒΓ ἄγομεν δὲ τὰς ΖΘ καὶ ΗΖ. τότε σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΖ καὶ ΗΒΓ, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτομεν καὶ θέτομεν τὸ ἓν εἰς τὸ ΖΕΘ καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸ ΔΘΓ. Οὕτως ἀποτελεῖται τὸ σχῆμα ΖΗΓΘ τὸ ὁποῖον εἶνε τετράγωνον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθέντων τετραγώνων. (Διατί;)

* Τὸ πρόβλ. τοῦτο λύεται καὶ ἀριθμητικῶς ἐὰν μετρηθῶσιν αἱ πλευραὶ ΖΕ καὶ ΔΓ· ἔστω δὲ ΖΕ=3 δάκτ. καὶ ΔΓ=1 δάκτ. Ἐὰν τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ὀνομάσωμεν χ, πρέπει νὰ ἔχωμεν: $\chi^2 = 3^2 + 1^2$ ἢ $\chi^2 = 10$ ὅθεν $\chi = \sqrt{10} = 3,16$.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων ἢ καὶ περισσοτέρων.



Σχ. 158

ε) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 158).

Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶνε ἡ διαγώνιος **ΑΓ** τοῦ δοθέντος· πράγματι, κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Πυθαγόρα ἔχομεν: τετράγ. τῆς ΑΓ = τετράγ. τῆς ΑΔ + τετράγ. τῆς ΔΓ. ἢ (ΑΓΕΖ)=(ΑΒΓΔ)+(ΑΒΓΔ).

Σημ. Λύομεν τὸ πρόβλ. καὶ ἂν ἐπαναλάβωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ σχ. 157.

Ἀσκήσεις.

1) Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μὲν βάσις εἶνε 12μ., ἡ δὲ διαγώνιος 21μ., Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδόν.

2) Τραπεζίου σχ. 46, αἱ βάσεις εἶνε 10μ. καὶ 6μ. ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἡ μία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις, ἡ δὲ ἄλλη ἰσοῦται πρὸς 5μ. Ποῖον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου;

3) Ἐὰν περιβάλωμεν τὴν περίμετρον τοῦ προηγουμένου τραπεζίου διὰ διπλῆς σειρᾶς σύρματος, πόσα χιλιόγραμμα θὰ χρειασθῶμεν ἐξ αὐτοῦ γνωστοῦ ὄντος ὅτι 10 μέτρα ἔχουν βάρος 1200 γρμ.

4) Δοθὲν τετράγωνον νὰ διαιρεθῇ εἰς 9 ἴσα τετράγωνα

5) Δίδονται 9 τετράγωνα ἴσα· νὰ συντεθῇ νέον τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

6) Ἐκ δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ α) τὸ ἥμισυ αὐτοῦ β) τὸ τριπλάσιον γ) τὸ ἓν τρίτον.

*7) Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχοντ ς διαγώνιον 1 παλ.; (71γρ.,).

* 8) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶνε 3 δάκ. Πόσον εἶνε τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδόν;

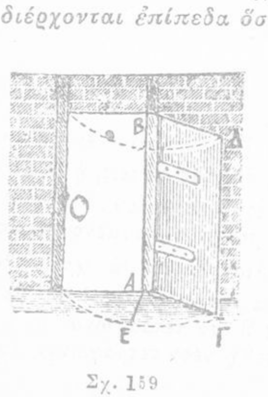
9) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 δακ. νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον κανονικόν, νὰ ὑπολογισθῇ δὲ ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

* 10) Πόσαι πλάκες σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου μὲ πλευρὰν 1 παλ. χρειάζονται πρὸς ἐπίστρωσιν αἰθούσης ὀρθογωνίου μήκους 8 μ. καὶ πλάτους 6,50 μ

Σημ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἰς τὰς ἀσκήσεις 9 καὶ 10 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἐκ τοῦ ἐδ. 119.

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ Γ

123. Προσδιορισμὸς τοῦ ἐπιπέδου. Εἰς τὸ ἐδ. 15 διευκρινίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐπιπέδου λέγοντες ὅτι ἐὰν λάβωμεν δύο σημεῖα αὐτοῦ, ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει ταῦτα ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ καθ' ὅλα τὰ σημεῖά της. Ἄλλαι ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου εἶνε αἱ ἑξῆς: α) *Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β, ἤτοι διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ διέρχονται ἐπίπεδα ὅσα θέλομεν.* Π.χ. ὅταν ἀνοίγωμεν ἢ κλείωμεν τὴν θύραν, δίδομεν εἰς αὐτὴν πολλὰς θέσεις. (σχ. 159). β) Ὅταν κλείωμεν τὴν θύραν διὰ τοῦ σύρτου, ὑποχρεοῦμεν αὐτὴν στρεφομένην νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ· τότε τὸ ἐπίπεδον εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένον, εἶνε δηλ. τὸ ἐπίπεδον τοῦ τοίχου εἰς τὸ ὁποῖον στηρίζεται ἡ θύρα. Ἄρα, *διὰ μιᾶς εὐθείας ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου Ο ἐκτὸς αὐτῆς, διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον.*



Σχ. 159

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β μίαν μόνον εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (ἐδ. 9α), ἡ ἄνω ἰδιότης τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἢ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον.*

Ὅσα σχήματα ἐφαρμόζουν καθ' ὅλα τὰ μέρη των ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καλοῦνται *ἐπίπεδα σχήματα* (τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλοι).

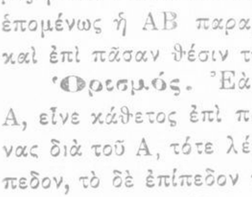
124. Διάφοροι θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Εἴδομεν ἄλλοτε ὅτι αἱ θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας εἶνε τρεῖς. δηλ. δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ εἶνε ἢ κάθετοι ἢ πλάγιαι (ἐδ. 20) ἢ παράλληλοι (ἐδ. 32).

Καὶ αἱ θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον εἶνε τρεῖς καὶ ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀνωτέρω:

*α) **Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.*** Ὅταν ἀνοίγωμεν ἢ κλείωμεν τὴν θύραν δωματίου, ἡ μὲν ΑΒ (σχ. 159) παραμένει ἀκίνητος, ἡ δὲ ΑΓ κατὰ τὴν κίνησίν της παράγει τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος· ἡ γωνία ΒΑΓ εἶνε ὀρθή, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πλευρῶν της προσδιοριζόμενον ἐπίπεδον ΒΑΓΔ στρέφει περὶ τὴν ἀκίνητον εὐθεῖαν ΑΒ. ἑπομένως ἡ ΑΒ παραμένει κάθετος ὄχι μόνον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ πᾶσαν θέσιν τῆς ΑΓ, ὡς τὴν ΑΕ.

Ὁρισμός. Ἐὰν εὐθεῖα, συναντῶσα ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον Α, εἶνε κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Α, τότε λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα εἶνε *κάθετος* ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ δὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Π. χ. οἱ πόδες τῆς τραπέζης εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸ πάτωμα, τὰ καρφία θέτομεν συνήθως κάθετα ἐπὶ τὸν τοῖχον.

*β) **Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον.*** Ἐὰν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον διευθύνωνται κατὰ τρόπον ὥστε νὰ μὴ συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι, τότε ἡ εὐθεῖα λέγεται *παράλληλος* πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Π. χ. τὸ νῆμα τῆς στάθμης ἐὰν τὸ κρεμάσωμεν πλησίον τοίχου παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τοίχου.



Σχ. 160

*γ) **Εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον.*** Μία εὐθεῖα καλεῖται πλαγία πρὸς ἐπίπεδον ὅταν δὲν εἶνε οὔτε κάθετος οὔτε παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Π. χ. ἡ θέσις τῆς γραφίδος ὅταν γράφωμεν εἶνε πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου.

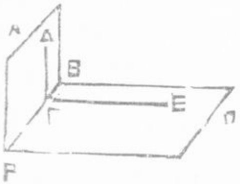
Τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε (σχ. 160) εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κάθετος ΑΒ καὶ αἱ πλάγιαι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον Μ καλοῦνται *πόδες* ἢ *ἴχνη* τούτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

125. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου. Ἐὰν λάβωμεν γνώμονα ΑΒΓ (σχ. 160) καὶ στρέψωμεν αὐτὸν περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του, τὴν ΑΒ, ἡ ἄλλη πλευρά του ΒΓ, παραμένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ προσδιορίσῃ ἐπίπεδον Μ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ εἶνε πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Μ εἶνε μικροτέρα τῆς ΑΓ καὶ ἐν γένει πάσης πλαγίας ΑΕ ἐκ τοῦ Α ἀγομένης· διὰ τοῦτο ἡ ΑΒ λέγεται *ἀπόστασις* τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Μ.

Ὥστε: *ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου καλεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης καθέτου.* Τὰ σημεῖα Γ,Δ,Ζ,.... κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ, διότι ἀπέχουν ἐκ τοῦ Β ἴσον μὲ τὴν ΒΓ.

126. Διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον. Καὶ αἱ θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα εἶνε τρεῖς· δηλ. δύο ἐπίπεδα δύνανται νὰ εἶνε ἢ κάθετα ἢ παράλληλα ἢ πλάγια.

α΄.) Ἐπίπεδα κάθετα. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν τοῖχον Ρ τοῦ δωματίου καὶ τὸ πάτωμα Π (σχ. 161) ἔχομεν τὴν εἰκόνα δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συναντῶνται· (ἐδ. 15). Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι καλεῖται *δίεδρος γωνία*, ἤτοι γωνία μὲ δύο ἕδρας· ἐπίσης δύο φύλλα βιβλίου, δύο ἕδραι συνεχόμεναι τοῦ κύβου, τῆς πυραμίδος, ἀποτελοῦν δίεδρον γωνίαν· ἡ τομὴ ΑΒ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε ἡ *ἀκμὴ* (ἐδ. 1,2). Ἐξ ἑνὸς σημείου Γ τῆς ἀκμῆς φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ καὶ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία ΔΓΕ· ἐὰν ἡ γωνία αὕτη εἶνε ὀρθή, τοὐθ᾿ ὅπερ διακρίνομεν διὰ τοῦ γνώμονος, ἢ διὰ τοῦ ἐδ. 122, τότε τὸ ἐπίπεδον Ρ λέγεται κάθετον ἐπὶ τὸ Π. (παράβαλε ἐδ. 20).



Σχ. 161

Ἰδιότητες *1). Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶνε κάθετα ἐπὶ τρίτον καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶνε κάθετος ἐπ᾿ αὐτό.* Π. χ. ἡ ἀκμὴ δύο τοίχων τοῦ δωματίου εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ πάτωμα.

2) Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π, οἱονδήποτε ἐπίπεδον περιέχον τὴν ΑΒ θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

β΄.) **Ἐπίπεδα παράλληλα.** Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πάτωμα καὶ τὴν ὀροφὴν τοῦ δωματίου, προεκτείνωμεν δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν συναντῶνται· Τὰ τοιαῦτα ἐπίπεδα ὀνομάζονται παράλληλα. (παράβ. ἐδ. 32). Παράλληλα ἐπίπεδα παριστάνουν καὶ οἱ ἀπέναντοι τοῖχοι δωματίου, δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου κ.τ.λ.

Ἰδιότητες *1).* Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ εἶνε ἐπίπεδα κάθετα τὸ καθὲν εἰς μίαν ἀκμὴν τοῦ τοίχου, συμπεραίνομεν ὅτι: *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶνε παράλληλα.*

2) *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα* (π. χ. ἡ ὀροφὴ καὶ τὸ πάτωμα), *τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα συναντῶνται ὑπὸ τρίτου ἐπιπέδου* (π. χ. ἑνὸς τοίχου) *εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι.*

3) *Ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου.*

Διὰ τοῦτο καλεῖται *ἀπόστασις* δύο ἐπιπέδων παραλλήλων, ἡ ἀπόστασις οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ ἄλλου.

127. *Πολύεδροι γωνίαι.* Ὅταν βλέπωμεν ἑνὸς δωματίου μίαν γωνίαν, ἔχομεν τὸ σχῆμα τριῶν ἐπιπέδων (δύο τοίχων συνεχομένων καὶ τοῦ πατώματος ἢ τῆς ὀροφῆς) τὰ ὁποῖα συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν καλεῖται *τρίεδρος γωνία.* (σχ. 162) ἤτοι γωνία μὲ τρεῖς ἕδρας. ἐπίσης βλέπομεν τρίεδρον γωνίαν εἰς τὸν κύβον, εἰς τὸ κυτίον τῶν πυρείων, εἰς τὸ πρίσμα. Αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν ΟΧ, ΟΨ καὶ ΟΖ εἶνε αἱ ἀκμαὶ τῆς τριέδρου γωνίας.

Σχ. 162

Ὑπάρχουν καὶ γωνίαι πολύεδροι, ἤτοι ὑπὸ περισσοτέρων ἐπιπέδων σχηματιζόμεναι, λέγονται δὲ καὶ στερεαὶ γωνίαι. π. χ. εἰς ἕνα ἀδάμαντα, εἰς διαφόρους κρυστάλλους.

128. *Πολύεδρα.* Τὰ σώματα τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰ ἐδ. 1,2,3 καὶ 4 λέγονται πολύεδρα. Ἐν γένει σῶμά τι καλεῖται *πολύεδρον* ἐὰν περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ πολυγώνων, τὰ ὁποῖα εἶνε αἱ ἕδραι τοῦ σώματος.

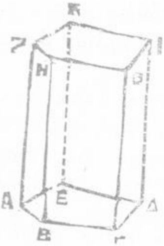
Ἓν πολύεδρον ἔχει τὸ ὀλιγώτερον 4 ἕδρας (σχ. 4), τὰς ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ καὶ ΔΓΑ, ὀνομάζεται δὲ διὰ τοῦτο *τετράεδρον.*

Καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ ἡ πυραμὶς τοῦ σχ. 5, ὡς ἔχουσα 5 ἕδρας, θὰ καλεῖται πεντάεδρον· καὶ τὸ πρίσμα τοῦ σχ. 3 εἶνε πεντάεδρον· ὁ κύβος εἶνε ἑξάεδρον κτλ. Τὰ σπουδαιότερα πολύεδρα εἶνε *τὸ πρίσμα καὶ ἡ πυραμίς.*

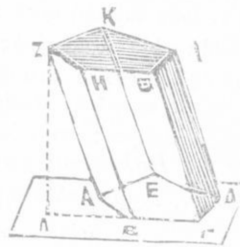
Πρίσμα.

129. *Γνωρίσματα τοῦ πρίσματος ἢ ὁρισμὸς αὐτοῦ.* Τὸ πρίσμα εἶνε πολύεδρον, ἐκ τῶν ἑδρῶν δὲ αὐτοῦ αἱ δύο, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἀλλήλων καὶ εἶνε ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα (τρίγωνα κ.τ.λ.) λέγονται *βάσεις* τοῦ πρίσματος. Αἱ δὲ ἄλλαι αἱ ὁποῖαι κεῖνται πέριξ καὶ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίων ἢ παραλληλογράμμων ἀποτελοῦσι τὴν *παράπλευρον ἐπιφάνειαν* αὐτοῦ.

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν ἓν πρίσμα μὲ βάσιν τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ



Σχ. 163



Σχ. 164

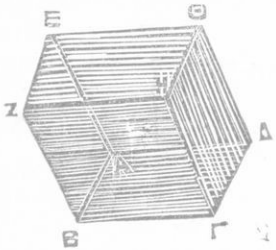
(σχ. 163, 164), ἄγομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας παραλλήλους ἴσας καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς: ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ καὶ ΕΚ, μὴ κειμένας δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πολυγώνου. Ἐὰν κατόπιν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τούτων διὰ τῶν εὐθειῶν ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ καὶ ΚΖ, προκύπτει τὸ πρίσμα.

Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ΑΖ, ΒΗ, . . . εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων (ἐδ. 124 α'.) ὅτε αἱ πέριξ ἕδραι εἶνε ὀρθογώνια, τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθὸν* (σχ. 163), εἰ δὲ μή, λέγεται *πλάγιον* (σχ. 164).

Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶνε πολύγωνα κανονικὰ (ἐδ. 47), τὸ πρίσμα λέγεται *κανονικόν*.

Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πορίσματος εἶνε τρίγωνα, πενταγωνα, κ.τ.λ. τὸ πρίσμα λέγεται *τετραγωνικὸν* σχ· 3), πενταγωνικὸν (σχ. 163, 164). *Ὕψος* πρίσματος εἶνε ἡ κάθετος ΖΛ (σχ. 164) ἡ ἀγομένη ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄλλης· τῶν ὀρθῶν πρισμάτων ὕψος εἶνε μία τῶν πέριξ ἀκμῶν, ἡ ΖΑ (σχ. 163). Ἡ κηρήθρα ἡ ὁποία κατασκευάζεται ὑπὸ τῶν μελισσῶν ἀποτελεῖται ἐκ πρισμάτων ἑξαγωνικῶν.

130. Γνωρίσματα τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ κύβου. Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε μερικὴ τοῦ πρίσματος περίπτωσις δηλ. ἂν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶνε καὶ αὐταὶ παραλληλόγραμμα, ὁπότε ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶνε παραλληλόγραμμα, λέγεται παραλληλεπίπεδον· τοιοῦτον εἶνε τὸ στερεὸν σχ. 165. Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε ἑξάεδρον· ἐὰν μὲν αἱ ἓξ ἕδραι του εἶνε ὀρθογώνια, λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 2) ἐὰν δὲ αἱ ἓξ ἕδραι του εἶνε τετράγωνα ἴσα, τότε λέγεται κύβος (σχ. 1).



Σχ. 165

Τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν ΔΓ, ΔΑ καὶ ΔΘ (σχ. 2) τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καλοῦνται *διαστάσεις* αὐτοῦ (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος). Τὸ ὕψος ΔΘ καλεῖται ἐνίοτε καὶ βάθος ἢ πάχος π. χ. τὸ βάθος τάφρου, τὸ πάχος χαρτονίου.

131. Μέτρησις τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος. Παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν πέριξ ὀρθογωνίων ΑΒΗΖ, ΒΓΗΘ,... (σχ. 163). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος ἐπὶ τὸ ὕψος π.χ. (ΑΒΗΖ)=ΑΒ×ΑΖ· ἑπομένως, ἐὰν ὀνομάσωμεν α, β, γ, δ καὶ ε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος ΑΖ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος θὰ εἶνε:

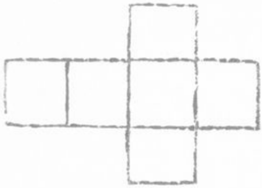
$$\alpha\times\upsilon+\beta\times\upsilon+\gamma\times\upsilon+\delta\times\upsilon+\varepsilon\times\upsilon \text{ ἢ } E=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\times\upsilon.$$

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος (ὀρθοῦ) εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Π. χ. ἔστω τὸ πενταγωνικὸν πρίσμα (σχ. 163), κανονικὸν μὲ πλευρὰν τῆς βάσεως 1,08 καὶ ὕψος 3,20 μ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του θὰ εἶνε $1,08\times5\times3,20=17,28$ τ. μ.. Ἐὰν θέλωμεν *ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν* τοῦ πρίσματος, προσθέτομεν εἰς τὴν παράπλευρον καὶ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνε κανονικόν, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $2,3774\times1,08^2$ (ἐδ. 119), ἔνθα 2,3774 παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου πλευρᾶς 1 μ.

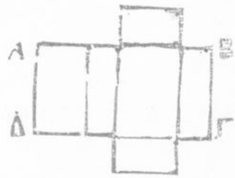
Ἐὰν ὀνομάσωμεν α, β, καὶ γ τὰ μήκη τῶν διαστάσεων ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$E=2\times(\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha).$$

132. Κατασκευὴ πρίσματος ἐκ χαρτονίου. α΄.) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου κύβον ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ἀκμὴν ἢ πλευρὰν ὡρισμένην, χαράσσομεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ σχ. 166,



Σχ. 166

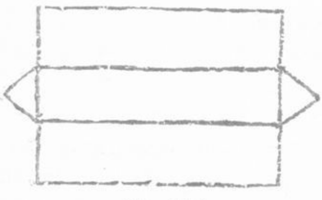


Σχ. 167

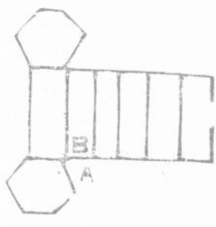
τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου μὲ ἀκμὴν ΑΕ (1).

β΄.) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον χαράσσομεν ἐπὶ χαρτονίου τὸ σχ. 167· τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ παριστάνει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, τὰ δὲ ἐξέχοντα μέρη τὰς δύο βάσεις (1).

γ΄) τὸ σχ. 168 παριστάνει τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἔχοντος βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν ΑΒ (1).



Σχ. 168



Σχ. 169

δ΄.) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τριγωνικὸν πρίσμα σχ. 3. χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ σχ. 169. Τὸ ὀρθογώνον ΑΒΓΔ παριστάνει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, τὰ δὲ ἐξέχοντα μέρη τὰ δύο τρίγωνα τῶν βάσεων(1).

Ἀσκήσεις

1) Κυτίον κυβικὸν ἄνευ καλύμματος ἔχει πλευρὸν 3 παλ. Πόσας τετ. παλ. χάρτου θὰ χρειασθῶμεν ἵνα ἐνδύσωμεν αὐτὸ ἔσωθεν καὶ ἔξωθεν;

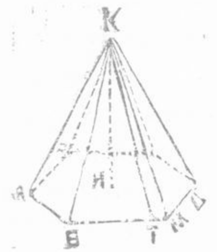
(1) Ἀπομένει ἡ κατάλληλος διπλωσις.

2) Κατασκεύασον ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν πρίσμα ὕψους 60 γρ. μὲ βάσιν ἑξάγωνον κανονικὸν πλευρᾶς 10 γρ. (Προηγουμένως θὰ σχεδιάσῃς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του).

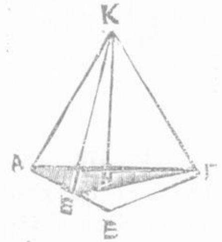
Πυραμὶς

133. Γνωρίσματα τῆς πυραμίδος ἢ ὁρισμὸς αὐτῆς. Ἡ πυραμὶς εἶνε πολύεδρον, ἐκ τῶν ἑδρῶν δὲ αὐτῆς ἡ μία, ἡ ὁποία εἶνε πολύγωνον οἱονδήποτε, π. χ. τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4) ἢ τετράπλευρον (σχ. 5) κ. τ. λ. λέγεται *βάσις* τῆς πυραμίδος. Αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πέριξ καὶ εἶνε τρίγωνα, ἀποτελοῦν τὴν *παράπλευρον ἐπιφάνειαν* τῆς πυραμίδος. Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινήν, ἡ ὁποία λέγεται *κορυφὴ* τῆς πυραμίδος.

Ὕψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, δηλ. ἡ κάθετος ΚΗ (σχ. 170—171).



Σχ. 170



Σχ. 171

Ἡ πυραμὶς λέγεται *τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ* κτλ. ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον, κτλ. Ἡ πυραμὶς λέγεται *κανονικὴ* ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε πολύγωνον κανονικόν, τὸ δὲ ὕψος συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον(1) αὐτῆς· τότε αἱ πέριξ ἀκμαὶ ΚΑ, ΚΒ, ... (σχ. 170) εἶνε ἴσαι (ἐδ. 125) καὶ τὰ πέριξ τρίγωνα εἶνε ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα (ἐδ. 30γ΄).

134. Μέτρησις τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος. *Παράπλευρος* ἐπιφάνεια πυραμίδος (κανονικῆς) εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν πέριξ τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ... (σχ. 170). Τὸ

(1) Κέντρον κανονικοῦ πολυγώνου εἶνε τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (ἐδ. 73).

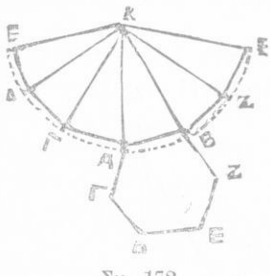
ἐμβαδὸν ἑκάστου εἶνε $\alpha \times \delta : 2$, ἔνθα α εἶνε μία πλευρὰ ΓΔ τῆς βάσεως καὶ δ τὸ ὕψος ΚΜ ἑνὸς τῶν τριγώνων· ἐπομένως

$$E = 6 \times \alpha \times \delta : 2$$

Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος κανονικῆς εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2.

Ἐὰν θέλωμεν ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος προσθέτομεν εἰς τὴν παράπλευρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

135. Κατασκευὴ πυραμίδος ἐκ χαρτονίου. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κανονικὴν ἑξαγωνικὴν πυραμίδα ἡ ὁποία ἀπεικονίζεται εἰς τὸ σχ. 170, χαράσσομεν πρῶτον τὸ ἑξάγωνον τῆς βάσεως (σχ. 172) καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΚΑΒ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΒΖ καὶ ΖΕ ἴσας μὲ τὴν ΑΒ. Ἄγομεν καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΕ, ΚΔ,.. καὶ οὕτω ἐξετελέσαμεν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. Διὰ καταλλήλου διπλώσεως τοῦ χαρτονίου σχηματίζομεν τὴν πυραμίδα.



Σχ. 172

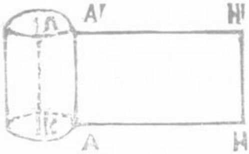
Ἄσκησις: Κατασκεύασον ἐκ χαρτονίου τριγωνικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἕδραι νὰ εἶνε τρίγωνα ἰσόπλευρα μὲ πλευρὰν 4 δακ. (Προηγουμένως θὰ σχεδιάσῃς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας).

Κύλινδρος

136. Γνωρίσματα τοῦ κυλίνδρου ἢ ὁρισμὸς αὐτοῦ. Ὁ κύλινδρος (σχ. 6) δὲν εἶνε πολύεδρον διότι ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας του δὲν εἶνε ἐπίπεδον (ἐδ. 15). Ἡ ὀρθογώνιος θύρα τοῦ σχ. 159 ἐὰν νοηθῇ στρεφομένη περὶ τὴν ΑΒ, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν της, παράγει ἕνα κύλινδρον.

Ἡ ΓΔ εἶνε *ἡ γενέτειρα* τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουν δύο ἴσους κύκλους, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται *βάσεις*· ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις (ἐδ. 124 α'.). λέγεται *ὕψος* ἢ *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου.

137. Ἀνάπτυξις τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ μέτρησις αὐτῆς. Ἂς περικαλύψωμεν διὰ λεπτοῦ χάρτου τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου σχ. 173. Ἐὰν σχίσωμεν τὸν κύλινδρον κατὰ μίαν γενέτειραν ΑΑ΄ καὶ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου, παρατηροῦμεν ὅτι λαμβάνομεν ἓν ὀρθογώνιον σχῆμα ΑΑ' ΗΗ΄, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος μὲν ΑΗ ἴσον πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, πλάτος δὲ ΑΑ' ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 173

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, τὸ ὁποῖον εἶνε ΑΗ×ΑΑ', ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἄρα ἔχομεν τὸν ἑξῆς **κανόνα**: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.* (ΑΑ΄=ΚΛ).

Ἔστω δ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως, α ἡ ἀκτὶς καὶ υ τὸ ὕψος τότε τὸ ἐμβαδὸν Ε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$Ε=π\times δ\times υ \quad ἢ \quad Ε=π\times 2\times α\times υ=2\times π\times α\times υ.$$

Ἐὰν θέλωμεν τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, προσθέτομεν εἰς τὴν κυρτὴν καὶ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ· ἤτοι

$$2\times π\times α\times υ+π\times α^2\times 2=2.π.α.(α+υ)$$

Ἐφαρμογή. Κυλινδρικοῦ κυτίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε 12 δάκ. καὶ τὸ ὕψος 18 δάκ.

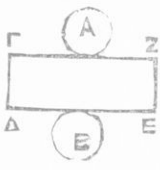
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶνε $π\times 12\times 18=π\times 216$· τῆς δὲ ὁλικῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶνε $π\times 216+π\times 36\times 2$ ἢ $π\times 288$.

Ὥστε ἐὰν τεχνίτης ἀνέλαβε τὴν κατασκευὴν 1000 τοιούτων κυτίων ἐκ λευκοσιδήρου θὰ χρειασθῇ ἐξ αὐτοῦ $π\times 288000$ τ. δ. Ἐὰν θέσωμεν π=3.14 εὑρίσκομεν (1)

$$Ε=904320 \text{ τ. δ ἢ } 90 \text{ τ. μ., } 4320$$

(1) Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς π ἀκριβέστερον εἶνε 3,1416 ἔχομεν κάμει λάθος μικρότερον τοῦ 300.000×0,0016 ἢ 500 τ. δ. ἢ 5 τ. π.

138. Κατασκευὴ κυλίνδρου. Χαράσσομεν ἐπὶ χαρτονίου τὸ (σχ. 174), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου ΓΔΕΖ καὶ ἐκ τῶν δύο ἴσων κύκλων Α καὶ Β. ἡ βάσις ΔΕ τοῦ ὀρθογωνίου πρέπει νὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν ἑκάστου κύκλου (ἐδ. 96).



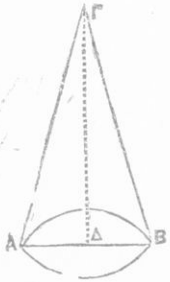
Σχ. 174

Ἀσκήσεις: 1) Διὰ τὴν κατασκευὴν καπνοδόχου κυλινδρικῆς ὕψους 2,80 μ. καὶ διαμέτρου 0,48 πόσα τ. μ. σιδηροῦ ἐλάσματος χρειάζονται;

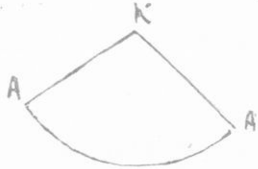
2) Ὀρθογώνιον μήκους 40 δακ. καὶ πλάτους 5 δακ. ἐὰν στραφῇ περὶ τὸ μῆκος, ἔπειτα δὲ περὶ τὸ πλάτος, παράγει δύο στερεὰ (ἐδ. 136) τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια.

Κῶνος

139. Γνωρίσματα τοῦ κώνου ἢ ὁρισμὸς αὐτοῦ. Καὶ ὁ κῶνος δὲν εἶνε πολύεδρον, διότι ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας του δὲν εἶνε ἐπίπεδον (ἐδ. 15). Ἐὰν ἕνα γνώμονα ΑΒΓ (σχ. 160) νοήσωμεν στρεφόμενον περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ μένῃ ἀκίνητος, πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του, παράγεται εἷς *κῶνος*. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ εἶνε ἡ *γενέτειρα* τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ δὲ ΒΓ γράφει τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶνε ἡ *βάσις* τοῦ κώνου. ***Κορυφὴ*** τοῦ κώνου λέγεται τὸ σημεῖον Α εἰς τὸ ὁποῖον ἀπολήγει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, ἡ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἢ ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ γνώμονος λέγεται *ὕψος* ἢ *ἄξων* τοῦ κώνου.



Σχ. 175



Σχ. 176

Συνήθως ὁ κῶνος ἀπαντᾷ ἡνωμένος μετὰ τοῦ κυλίνδρου π. χ. ἄνωθεν καπνοδόχης ἢ ἄνωθεν πύργων, ἀνεμομύλων, κ. λ.

140. Ἀνάπτυξις τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ μέτρησις αὐτῆς. Ἂς περικαλύψωμεν διὰ λεπτοῦ χάρτου τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου (σχ. 175). Ἐὰν σχίσωμεν τὸν κῶνον τοῦτον κατὰ μίαν γενέτειραν ΚΑ καὶ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου, παρατηροῦμεν ὅτι λαμβάνομεν ἕνα κυκλικὸν τομέα (ἐδ. 42) ΚΑΑ′ (σχ. 176) τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτὶς εἶνε ἴση μὲ τὴν γενέτειραν τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου, τὸ ὁποῖον εἶνε (τὸξ ΑΑ′)×ΚΑ:2 (ἐδ. 112) ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

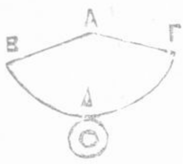
Ἄρα ἔχομεν τὸν ἑξῆς **κανόνα**: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν γενέτειραν ΚΑ=λ καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 2 ἤτοι***

$$Ε=π\times2\times α\times λ:2=π\times α\times λ$$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶνε $π\times α\times λ+π\times α^2$.

Π.χ. Ἐὰν χωνίου κωνικοῦ ἡ μὲν διάμετρος εἶνε 120 γραμ., ἡ δὲ γενέτειρα 200 γρ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶνε

$$Ε=π\times60\times200=12000\times π=\mathbf{3}.τ.π., 77.$$



Σχ. 177

141. *Κατασκευὴ κώνου* Χαράσσομεν ἐπὶ χαρτονίου τὸ σχ. 177, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς τομέως ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τοῦ κύκλου Ο· τὸ τόξον τοῦ τομέως πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν περφέρειαν τοῦ κύκλου.

Ἀσκήσεις

1) Στέγης κωνικῆς ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶνε 9μ. ἡ δὲ γενέτειρα 5μ. Πόσος ψευδάργυρος (τσίγκος) χρειάζεται πρὸς ἐπίστρωσιν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς;

2) Κατασκεύασον ἐκ χαρτονίου κῶνον ἔχοντα γενέτειραν 60γρ. καὶ ἀκτῖνα τῆς βάσεως 10γρ. (Προηγουμένως θὰ σχεδιάσῃς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του).

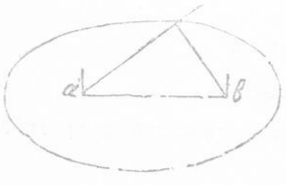
Σχ. 178

3) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον αβγ (σχ. 178) ἐὰν στραφῇ περὶ τὴν βγ=10 δάκ. παράγει στερεὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια. Ἐὰν τὸ αὐτὸ τρίγωνον στραφῇ περὶ τὴν αβ, ποία θὰ εἶνε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ νέου στερεοῦ; ἡ ὑποτείνουσα αγ εἶνε 15 δάκ.

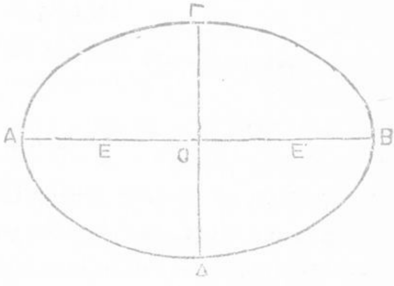
* Ἐλλείψεις.

142. Ἐκ τῶν καμπύλων γραμμῶν ἐμάθαμεν μόνον μίαν, τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ κέντρου· τώρα θὰ μάθωμεν μίαν νέαν καμπύλην χρήσιμον εἰς τὰς ἐφαρμογάς. Εἰς τὸν κῶνον καὶ τὸν κύλινδρον εἴδομεν ὅτι αἱ βάσεις εἶνε κύκλοι, κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας αὐτῶν· ἀλλὰ καὶ πᾶσα τομὴ τοῦ κώνου ἢ τοῦ κυλίνδρου γινομένη καθέτως πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῶν εἶνε ἐπίσης κύκλος. Ἐὰν ὅμως κατασκευάσωμεν ἐκ σώματος μαλακοῦ κῶνον καὶ κύλινδρον καὶ κόψωμεν αὐτοὺς δι' ὀργάνου ἐπιπέδου, ὡς ἡ μάχαιρα, ἀλλὰ πλαγίου πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῶν, θὰ προκύψῃ ὄχι πλέον κύκλος, ἀλλὰ νέον σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἔλλειψις*.

143. *Κατασκευὴ τῆς ἐλλείψεως διὰ νήματος.* Τὴν ἔλλειψιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν διὰ νήματος ὡς ἑξῆς: Στερεώνομεν εἰς δύο σημεῖα α καὶ β ἑνὸς ἐπιπέδου (π. χ. χαρτονίου ἢ πίνακος) δύο καρφίδας, εἰς τὰς ὁποίας δένομεν τὰ ἄκρα νήματος ἔχοντος μῆκος μεγαλείτερον τοῦ αβ. Ἔπειτα τείνομεν τὸ νῆμα διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος (ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 179) τὴν ὁποίαν μετακι-



Σχ. 179



Σχ. 180

νοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, οὕτως ὥστε τὸ νῆμα νὰ εἶνε πάντοτε τεντωμένον. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τὸ ἄκρον τῆς γραφίδος θὰ γράψῃ ἔλλειψιν. Τὸν τρόπον τοῦτον συχνὰ μεταχειρίζονται οἱ κηπουροὶ πρὸς χάραξιν ἀνθώνων.

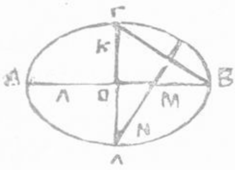
144. **Ὁρισμοί.** *Ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως λέγονται τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε', τὸ δὲ μέσον Ο τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως Ε Ε' λέγεται

(1) Οἱ πλανῆται κινούμενοι περὶ τὸν ἥλιον γράφουν ἐλλείψεις τῶν ὁποίων τὴν μίαν ἑστίαν κατέχει ὁ ἥλιος.

κέντρον τῆς ἐλλείψεως. *Διάμετρος* τῆς ἐλλείψεως καλεῖται, καθὼς καὶ εἰς τὸν κύκλον, πᾶσα εὐθεῖα ἡ ὁποία διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, περατοῦται εἰς τὴν καμπύλην. Ἐκ τῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως μία εἶνε μεγίστη, ἡ ΑΒ (σχ 180) καὶ διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν, λέγεται δὲ *μέγας ἄξων* τῆς ἐλλείψεως· καὶ μία ἄλλη εἶνε ἐλαχίστη, ἡ ΓΔ, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα, λέγεται δὲ *μικρὸς ἄξων* τῆς ἐλλείψεως.

Ἐκκεντρότης τῆς ἐλλείψεως λέγεται τὸ πηλίκον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν ΕΕ′ διὰ τοῦ μεγάλου ἄξονος ΑΒ. Π. χ. ἂν ΕΕ′ = 9 δακ. καὶ ΑΒ = 36 δακ., τότε ἡ ἐκκεντρότης εἶνε 9:36=1:4.

145. *Ἄλλος τρόπος κατασκευῆς ἐλλείψεως.* Πρακτικὴ καὶ πρόχειρος χάραξις ἐλλείψεως εἶνε καὶ ἡ ἑξῆς: Σχεδιάζομεν ἓν ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ διαστάσεις τὰ μήκη τῶν δύο ἀξόνων ἐκ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς διαγωνίους. αἱ κάθετοι αὗται συναντῶσι τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Κ,Λ,Μ καὶ Ν (σχ. 181). Ἔπειτα γράφομεν 4 τόξα κύκλων μὲ κέντρα τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ ἀκτῖνας ΚΔ, ΛΒ, ΜΑ καὶ ΝΓ· τὰ τόξα ταῦτα προσαρμόζοντες εὐκόλως διὰ τῆς χειρός, ἔχομεν περίπου μίαν ἔλλειψιν.



Σχ. 181

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ ἔλλειψις ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους μεταξύ των, εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτῆς σχεδιάζοντες τὸ τέταρτον αὐτῆς (ἐδ. 50,51).

146. *Ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως καὶ μῆκος τῆς περιφερείας της.* Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μεγάλου ἄξονος ἐπὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μικροῦ, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π. Ἐὰν π. χ. εἶνε ΑΒ=36 δακ. καὶ ΓΔ=17,4 δ. τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶνε $18 \times 8,7 \times \pi$ τετρ. δ. Τὴν περιφέρειαν τῆς ἐλλείψεως εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ἐὰν ἐκλάβωμεν ὡς κύκλου περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἀξόνων Π. χ. τῆς προηγουμένης ἐλλείψεως ὁ μέσος ὅρος τῶν δυο ἀξόνων εἶνε·(36+17,4):2=26,7 καὶ τὸ μῆκος τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶνε $26,7 \times \pi$ (Τὸ ἐξαγόμενον ὅμως τοῦτο εἶνε ὀλίγον μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ).

Περὶ σφαίρας.

147. Γνωρίσματα τῆς σφαίρας ἢ ὁρισμὸς αὐτῆς. Ἡ σφαῖρα περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς καὶ μόνης κυρτῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς τῆς σφαίρας εὑρισκόμενον· τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς ἓν σημεῖον ἐντὸς τῆς σφαίρας εὑρισκόμενον, τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας π. χ ἡ ΚΕ (σχ. 8).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κέντρου συμπεραίνομεν ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶνε ἴσαι (παράβ. ἐδ. 39). *Διάμετρος* τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἀπολήγουσα εἰς δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, π. χ. ἡ ΑΚΒ. Ὅλαι αἱ διάμετροι εἶνε ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων.

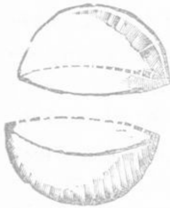
148. Γένεσις τῆς σφαίρας. Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΒΚΑ (σχ. 182) στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΒ, καθ' ὃν τρόπον καὶ ἡ θύρα (σχ. 159), θὰ ἔλθῃ διαδοχικῶς εἰς διαφόρους θέσεις, θὰ καταλάβῃ δὲ οὕτως ὡρισμένον χῶρον κατὰ τὴν διάβασίν του. Κατὰ τὴν περιστροφὴν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας διατηροῦν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, παράγεται δὲ ἐκ μὲν τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΒ ἡ *ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας*, ἐκ δὲ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΒΚΑ ὁ *ὄγκος αὐτῆς*· Πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας γράφει κατὰ τὴν περιστροφὴν περιφέρειαν ΜΝ, ἔχουσαν τὸ κέντρον της Λ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ΛΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Σχ. 182.

149. Τομαὶ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων. Ἐὰν σῶμα σφαιρικὸν (καθὼς εἶνε περίπου τὸ πορτοκάλλιον) κόψωμεν δι' ὀργάνου *ἐπιπέδου*, ὡς ἡ μάχαιρα, καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν, θὰ προκύψῃ πάντοτε κύκλος. Ὥστε *αἱ τομαὶ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων εἶνε κύκλοι.*

Ἐὰν τὰ τέμνοντα τὴν σφαῖραν ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα (ἐδ. 126 β) οἱ προκύπτοντες κύκλοι θὰ εἶνε παράλληλοι. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τότε ὁ παραγόμενος κύκλος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ λέγεται *μέγιστος κύκλος* τῆς σφαίρας διότι ἄλλος μεγαλείτερος ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ ἐπ' αὐτῆς, οἱ ἄλλοι λέγονται *μικροὶ κύκλοι* οἱ ὁποῖοι ἐφ' ὅσον το τέμνον ἐπίπεδον πλησιάζει πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, γίνονται ὁλονὲν μεγαλείτεροι. Εἰς τὸ σχ 8, ὁ μὲν ΑΜΒ παριστάνει μέγιστον κύκλον, ὁ δὲ ΓΔ μικρὸν κύκλον.

Καθὼς ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς δύο ἡμικύκλια διὰ μιᾶς διαμέτρου (ἐδ. 44γ'), οὕτω καὶ ἡ σφαῖρα διαιρεῖται εἰς δύο *ἡμισφαίρια* δι' ἑνὸς μεγίστου κύκλου, (σχ. 183)


Σχ. 183

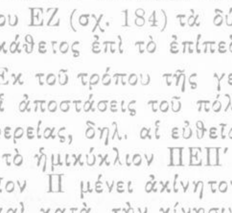
150. Ἐξέλεγξις σφαιρικῆς ἐπιφανείας. Κατασκευάζομεν ἐκ σύρματος κύκλους καὶ ἐφαρμόζομεν ἕκαστον ἐπὶ τῆς δοκιμαζομένης ἐπιφανείας εἰς διαφόρους θέσεις· ἐὰν εἴς τι μέρος δὲν ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς ὁ κύκλος, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶνε σφαιρική.

151. Πόλοι κύκλων σφαίρας. Λέγονται *πόλοι* ἑνὸς κύκλου ΕΖ (σχ. 184) τὰ δύο ἄκρα Π καὶ Π' τῆς διαμέτρου ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

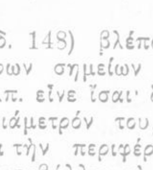
Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς γενέσεως τῆς σφαίρας (ἐδ. 148) βλέπομεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ πόλου Π ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς περιφερείας, δηλ. αἱ εὐθεῖαι ΠΕ, ΠΜ, ΠΝ, ΠΛ κλπ. εἶνε ἴσαι· διότι ὅταν τὸ ἡμικύκλιον ΠΕΠ' στρέφεται περὶ τὴν διάμετρόν του, τὸ σημεῖον Π μένει ἀκίνητον, τὸ σημεῖον Ε γράφει τὴν περιφέρειαν ΕΛ καὶ κατὰ τὴν κίνησιν ἡ χορδὴ ΠΕ δὲν μεταβάλλει τὸ μῆκος της.

Πάντες οἱ παράλληλοι κύκλοι ΕΛ, ΑΒ, ΓΔ, . . . ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πόλους Π καὶ Π'. Μεταξὺ τῶν κύκλων τούτων, εἷς εἶνε ὁ μέγιστος, ὁ ΑΒ. Τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν πόλων ΠΠ'. Οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται *παράλληλοι* τῆς σφαίρας.

Παρατ. Καθὼς ἐπὶ ἐπιπέδου γράφομεν περιφερείας κύκλων διὰ τοῦ διαβήτου, οὕτω καὶ ἐπὶ σφαίρας γράφομεν περιφερείας διὰ



Σχ. 184

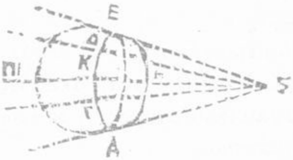

Σχ. 184'

τοῦ *σφαιρικοῦ διαβήτου* (σχ. 184') ὁ ὁποῖος ἔχει τὰ σκέλη καμπύλα. Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὸν διαβήτην τόσον ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων του νὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΠΕ (σχ. 184) καί, ἀφοῦ στηρίξωμεν τὸ ἓν σκέλος εἰς τὸν πόλον Π, περιστρέψωμεν τὸν διαβήτην, τὸ ἄκρον τοῦ ἑτέρου σκέλους θὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς σφαίρας τὸν κύκλον ΕΛ.

Πόση πρέπει νὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου, ἵνα δι᾽ αὐτοῦ γραφῇ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας;

152. Σφαιρικαὶ ζῶναι. Οἱ παράλληλοι τῆς σφαίρας διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς λωρίδας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ζῶναι. Ὥστε ***σφαιρικὴ ζώνη*** λέγεται τὸ μέρος ΑΒΓΔ (σχ. 185) τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων. Οἱ δύο οὗτοι κύκλοι εἶνε ***αἱ βάσεις*** τῆς ζώνης, ***ὕψος*** δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

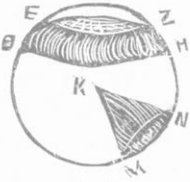
Σχ. 185



Σχ. 186

Ἐξ οἱουδήποτε σημείου Σ μακρὰν τῆς σφαίρας κειμένου ἐὰν παρατηρήσωμεν αὐτὴν θὰ ἴδωμεν μέρος μόνον αὐτῆς, μικρότερον ἡμισφαιρίου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται πάντοτε ὑπὸ περιφερείας. Τὸ μέρος τοῦτο ΑΠΒ (σχ. 186), ὁρατὸν ἐκ τοῦ σημείου Σ, εἶνε ζώνη ἔχουσα μίαν μόνον βάσιν. Αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες ΣΑ, ΣΕ, ΣΓ, ΣΔ, . . . ἀποτελοῦσιν ἐπιφάνειαν κώνου, ἐγγίζουσαν τὴν σφαῖραν κατὰ τὴν περιφέρειαν ΕΓ. Ὁ εἰς τὸ Σ παρατηρητὴς οὐδὲν σημεῖον τοῦ μέρους ΕΠ΄Α δύναται νὰ ἴδῃ. Ἡ σφαῖρα εἶνε τὸ μόνον σῶμα τὸ ὁποῖον ἐξ οἱουδήποτε σημείου καὶ ἂν παρατηρῆται, προσπίπτει πάντοτε εἰς τὸν ὀφθαλμὸν περιοριζόμενον ὑπὸ κυκλικοῦ γύρου. Πρέπει νὰ τεθῶμεν εἰς πολὺ μεγάλην ἀπόστασιν, διὰ νὰ ἴδωμεν τὸ ἥμισυ περίπου τῆς σφαίρας. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ ἄστρα, π. χ. εἰς τὸν ἥλιον, εἰς τὴν σελήνην κλπ. τὰ ὁποῖα εἶνε πολὺ μακρὰν καὶ περιορίζονται ὑπὸ περιφερείας μεγίστου κύκλου (περίπου).

153. Σφαιρικοὶ τομεῖς, τμῆμα, ὄνυξ καὶ ἄτρακτος. ***Σφαιρικὸς τομεὺς*** λέγεται τὸ μέρος ΚΜΝ (σχ. 187) τῆ σφαίρας, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶνε τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας, βάσις δὲ ἡ ζώνη αὐτῆς ΜΝ.



Σχ. 187

Σχ. 188

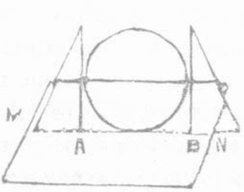
Σφαιρικὸν τμῆμα λέγεται τὸ μέρος ΕΖΗΘ (σχ. 187) τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων.

Σφαιρικὸς ἄτρακτος λέγεται τὸ μέρος ΑΕΓΔΑ (σχ. 188) τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων ἐχόντων κοινὴν διάμετρον.

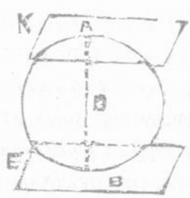
Σφαιρικὸς ὄνυξ λέγεται τὸ μέρος ΚΑΕΓΔ τῆς σφαίρας (σχ. 188) τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀτράκτου καὶ ὑπὸ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων. Π. χ. αἱ σκελίδες (φέται) πορτοκαλλίου παρέχουσιν ἰδέαν σφαιρικου ὄνυχος, ἡ δὲ ἔξωθεν ἐπιφάνεια αὐτῶν παρέχει ἰδέαν τοῦ ἀτράκτου.

Σημειωτέον ὅτι ἡ ζώνη καὶ ὁ ἄτρακτος εἶνε *ἐπιφάνειαι*, ἐνῷ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, ὁ τομεὺς καὶ ὁ ὄνυξ εἶνε *στερεά*.

154. Πρακτικὴ μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος σφαίρας. α΄) Ἐὰν ἡ σφαῖρα εἶνε μικρὰ (π. χ. βῶλος), γράφομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαν ΜΝ (σχ. 189), θέτομεν δ᾽ ἐπ᾽ αὐτῆς δύο γνώμονας, τὸν ἕνα ἀκίνητον, τὸν δὲ ἄλλον κινοῦμεν μέχρις ὅτου ἡ σφαῖρα ἐγγίσῃ ἀμφοτέρους. Τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς εὐθείας ΜΝ,



Σχ. 189



Σχ. 190

τὸ μεταξὺ τῶν δύο γνωμόνων περιεχόμενον, εἶνε ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας.

β΄) Ἐὰν ἡ σφαίρα εἶνε μεγάλη, θέτομεν αὐτὴν ἐπὶ ἐπιπέδου Ε, ἄνωθεν δ᾽ αὐτῆς κανόνα πλατὺν Κ (σχ. 190). διὰ δοκιμῶν κατορ θώνομεν ὥστε αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τοῦ κανόνος ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε νὰ εἶνε ἴσαι· τότε τὰ ἐπίπεδα Κ καὶ Ε εἶνε παράλληλα ἡ δὲ ἀπόστασις, αὐτῶν (ἐδ. 126 β') εἶνε ἡ ζητουμένη διάμετρος.

135. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. *Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν 4 μεγίστων κύκλων αὐτῆς.* Εὑρίσκομεν ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος α εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου (ἐδ. 111) καὶ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4
Ὁ τύπος εἶνε, $E=4\times\pi\times\alpha^2$, (1)

Ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας παρασταθῇ διὰ τοῦ δ, θὰ εἶνε $\delta=2\times\alpha$ καὶ $\delta^2=2^2\times\alpha^2$ ἢ $4\times\alpha^2$, ἕνεκα τούτου ὁ τύπος (1) γράφεται $E=\pi\times\delta^2$ ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.
Ἐπειδὴ ὅμως $4\times\alpha^2\times\pi=2\times2\times\alpha\times\alpha\times\pi$ ἰσοῦται μὲ 2. α (=διάμετρος) $\times$2. π. α (=περιφέρεια) ἕπεται ὅτι:
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶνε ἴσον καὶ μὲ τὴν διάμετρον ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίστου κύκλου.

Παραδείγματα. 1) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶνε 6 δάκ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της θὰ εἶνε $4\times3{,}14\times6^2=452{,}16$ τ. δ.

2) ἐὰν ἡ διάμετρος σφαίρας εἶνε 12 δ. τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶνε $\pi\times\delta^2=\pi\times12^2=\pi\times144=452{,}16$ τ. δ.

3) ἐὰν ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶνε 40 δ., ἡ διάμετρος εἶνε $\frac{40}{3{,}14}$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια θὰ εἶνε

$40\times\frac{40}{3{,}14}=\frac{1600}{3{,}14}$ τ. δ.

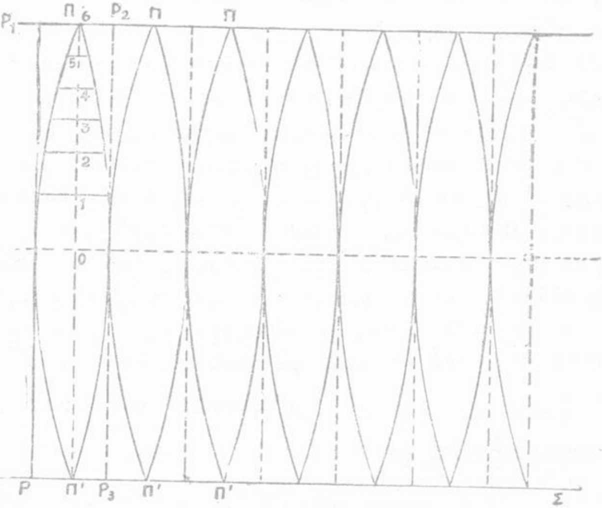
* Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου εἴδομεν ὅτι ἐκτυλίσσονται ἢ ἀναπτύσσονται ἐπὶ ἐπιπέδου (ἐδ. 137,140) εἶνε δηλ. ὅπως λέγουν *ἐπιφάνειαι ἀναπτυκταὶ* καθὼς εἶνε καὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ πρίσματος, ἐνῷ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δὲν εἶνε ἀναπτυκτή, διότι ἐὰν ἐπιχειρήσωμεν ν' ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐπὶ ἐπιπέδου θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἐὰν σχίσωμεν ἢ συμπτύξωμεν μέρος τι αὐτῆς.

Διὰ τοῦτο ἡ ἐξήγησις τοῦ κανόνος τῆς μετρήσεως τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας δὲν εἶνε τόσον εὔκολος, ὅσον διὰ τὸν κύλινδρον καὶ τὸν κῶνον.

138. Ἀνάπτυξις σφαιρικῆς ἐπιφανείας κατὰ προ-

σέγγισεν. Ἐπειδὴ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δὲν εἶνε ἀναπτυκτή, δίδομεν τὴν ἑξῆς πρακτικὴν μέθοδον πρὸς ἀνάπτυξιν αὐτῆς κατὰ προσέγγισιν:

Νοήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας διῃρημένην εἰς 12 ἴσους ἀτράκτους διὰ μεγίστων κύκλων (μεσημβρινῶν), ἔστω δὲ εἷς τούτων ὁ ΠΑΠ′ ΒΠ (σχ. 188). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΠΑΠ′ ἑνὸς μεγίστου κύκλου καὶ τὸ τόξον ΑΒ ἴσον πρὸς 1:12 περιφερείας μεγίστου κύκλου, ἔστω $PP_1P_2P_3$ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο (σχ. 192)· Α,Β,Π,Π′ εἶνε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν διὰ τῶν σημείων Π,Α,Π′ καὶ διὰ τῶν Π,Β,Π′ γραφῶσι δύο τόξα κύκλων (ἐδ. 71) τὸ προκύπτον σχῆμα ΠΑΠ′ΒΠ′

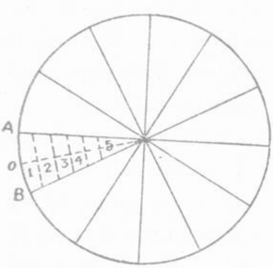


Σχ. 192

(ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων κυκλικῶν τμημάτων ἐχόντων κοινὴν χορδὴν τὴν ΠΠ′) εἶνε τὸ κατὰ προσέγγισιν ἀνάπτυγμα τοῦ θεωρουμένου ἀτράκτου. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις $P\Sigma = 2\pi\alpha$ καὶ $PP_1 = \pi\alpha$ (ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας) διαιρέσωμεν δὲ τοῦτο εἰς 12 ἴσα μέρη διὰ καθέτων ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΡΣ καὶ εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων ἐπαναλάβωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν τοῦ σχ. ΠΑΠ′Β, λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ συνόλου τῶν 12 ἀτράκτων· ἀρκεῖ μόνον νὰ ἀποκόψωμεν τὰ τρίγωνα ὡς τὸ ΠΒΠ΄ Ἡ κατασκευὴ τῶν ἐκ δέρματος σφαιρῶν τῆς ποδοσφαιρίσεως τῶν παίδων τελεῖται δι' ἀποκοπῆς τοιούτων ἀτράκτων τοὺς ὁποίους συρράπτουν κατὰ τὰ ἄκρα.

Σημ. α΄. Ὅσῳ μεγαλύτερος εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτράκτων εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τόσῳ ἀκριβέστερον τελεῖται ἡ ἀνάπτυξις.

Σημ. β΄. Ὅταν ἡ σφαῖρα εἶνε μεγάλης ἐπιφανείας, ἡ ἀνάπτυξις ἑνὸς ἀτράκτου τελεῖται ἀκριβέστερον ὡς ἑξῆς: Τὴν εὐθεῖαν ΠΠ΄ (σχ. 192) ἥτις παριστᾷ κατὰ προσέγγισιν τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεγίστου κύκλου, διαιροῦμεν εἰς 12 ἴσα μέρη, ἐκ δὲ τῶν σημείων διαιρέσεως ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΠΠ΄. Εἶτα ἐπὶ τῶν καθέτων τούτων καὶ ἑκατέρωθεν τῶν σημείων διαιρέσεως 1,2,3, . . . λαμβάνομεν ἀντίστοιχα μήκη ὑποδεικνυόμενα ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ σχ. 193. Συνδέοντες διὰ καμπύλης τὰ προκύπτοντα σημεῖα λαμβάνομεν τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἀτράκτου.



Σχ. 193

157. Κύκλοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς. Ὑδρόγειοι σφαῖραι. Ἡ γῆ ἔχει σχῆμα σφαίρας περίπου, στρέφεται δὲ περὶ μίαν τῶν διαμέτρων της εἰς 24 ὥρας. Ἡ νοητὴ αὕτη διάμετρος λέγεται *ἄξων τῆς γῆς*, τὰ δὲ ἄκρα αὐτῆς λέγονται *πόλοι* τῆς γῆς (βόρειος καὶ νότιος).

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς τεμνομένην ὑπὸ ἐπιπέδων, διὰ τοῦ ἄξονος Π Π΄(σχ. 184) διερχομένων, αἱ προκύπτουσαι γραμμαὶ καλοῦνται *μεσημβρινοί*· οἱ μεσημβρινοὶ εἶνε πάντες ἴσοι καὶ ἔχουσι τὸ σχῆμα περίπου περιφερείας τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶνε 40.000 χιλιόμετρα.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν κύκλους τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα· οὗτοι λέγονται παράλληλοι, εἶνε δὲ ἄνισοι· ὁ μέγιστος τούτων ΑΒ (σχ. 184) ὅστις ἀπέχει ἴσον ἐκ τῶν δύο πόλων, ὀνομάζεται *ἰσημερινός*· διαιρεῖ δὲ τὴν γῆν εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον καὶ εἰς τὸ νότιον.

Τόξον μιᾶς μοίρας (1^0) μικροῦ τινος κύκλου τῆς σφαίρας δὲν ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος μὲ τόξον 1ο μεγίστου κύκλου αὐτῆς. Οὕτω τόξον 1^0 τοῦ μεσημβρινοῦ=40.000.000 : 360=111111,11 μέτρ. ἀλλὰ τόξον

1^0 ἑνὸς παραλλήλου εἶνε μικρότερον. Ἡ ἀκριβεστέρα ἀπεικόνισις τῆς γῆς τελεῖται διὰ τῶν ὑδρογείων σφαιρῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων παριστῶμεν, πλὴν τῶν ἠπείρων, τῶν νήσων καὶ τῶν θαλασσῶν, καὶ τοὺς διαφόρους κύκλους (τὸν ἰσημερινόν, τοὺς παραλλήλους καὶ τοὺς μεσημβρινούς). Ἐκ τῶν πολλῶν μεσημβρινῶν λαμβάνουσιν ἕνα, τὸν ὁποῖον καλοῦσι *πρῶτον μεσημβρινόν*, (διαιρεῖ δὲ οὗτος τὴν γῆν εἰς τὸ *ἀνατολικὸν ἡμισφαίριον καὶ τὸ δυτικόν)*· ὡς τοιοῦτον λαμβάνουσιν ἤδη σχεδὸν ὅλα τὰ ἔθνη τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ Γρήνουϊτς (πλησίον τοῦ Λονδίνου).

158. Κατακόρυφος. Τὰ σώματα (π. χ. λίθος) ἐὰν τὰ ἀφήσωμεν ἐλεύθερα ἀπό τινος ὕψους, πίπτουν εἰς τὸ ἔδαφος ἐξ αἰτίας μιᾶς δυνάμεως ἡ ὁποία ὀνομάζεται *βαρύτης*. Ἡ διεύθυνσις τῆς βαρύτητος, δηλ. ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦν τὰ σώματα ὅταν πίπτουν, λέγεται *κατακόρυφος*.

Ἐπειδὴ εἶνε ὀλίγον δύσκολον νὰ μᾶς ἐντυπωθῇ κατὰ νοῦν ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ ὁ λίθος κατὰ τὴν πτῶσίν του, ὑποβοηθούμεθα διὰ τοῦ *νήματος τῆς στάθμης*, τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται καὶ οἱ κτίσται οἱ ὁποῖοι ἀνεγείρουν τοὺς τοίχους κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου (διότι ἄλλως θὰ ἐκρημνίζοντο).

Ἡ στάθμη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κῶνον ἢ κύλινδρον μετάλλινον δεμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον νήματος, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος κρατεῖται ἀκλονήτως· ἐὰν ἀφήσωμεν μικρὸν βῶλον ἐκ χάλυβος νὰ πέσῃ ἐλευθέρως, παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν πτῶσίν του ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ νήματος τῆς στάθμης, δηλ. ἡ διεύθυνσις τῆς πτώσεώς του εἶνε παράλληλος πρὸς αὐτό. Ὥστε κατακόρυφος λέγεται ὄχι μόνον ἡ διεύθυνσις τοῦ νήματος τῆς στάθμης, ἀλλὰ καὶ πᾶσα παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν ταύτην.

Ἡ κατακόρυφος εἶνε κάθετος (1) ***ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὑγροῦ.***

Ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια ὕδατος μικρᾶς ἐκτάσεως εἶνε ἐπίπεδος, λέγομεν ὅτι ἐπίπεδόν τι εἶνε *ὁριζόντιον* ὅταν εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυφον π. χ. ἐν τῷ σχ. 159 ἐὰν ἡ ΑΒ εἶνε κατακόρυφος, τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος εἶνε ὁριζόντιον(2). Πᾶσα εὐθεῖα Ε ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κειμένη ἢ παράλληλος τῆς Ε λέγεται *ὁριζον-*

(1) Ἂς μὴ συγχέωμεν τὴν κατακόρυφον μὲ τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ ἄλλην.
(2) Περιγραφὴ καὶ χρῆσις τοῦ ἀλφαδίου.

τία. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὴν γῆν τελείως σφαιρικὴν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ κατακόρυφος ἑνὸς τόπου εἶνε ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὸν τόπον τοῦτον μὲ τὸ κέντρον τῆς γῆς· ὥστε *ὅλαι αἱ κατακόρυφοι, νοερῶς ἐκτεινόμεναι συναντῶνται εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς*. Ἐὰν ἐξαρτήσωμεν ἔν τινι αἰθούσῃ νήματα τῆς στάθμης, μᾶς φαίνονται ὡς εὐθεῖαι παράλληλοι, διότι σχηματίζουν πολὺ μικρὰς γωνίας. Αἱ κατακόρυφοι δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἀπεχόντων 10χιλμ. ποιοῦσι γωνίαν 5′, 4 αἱ δὲ κατακόρυφοι δύο σημείων ἀπεχόντων ἓν ναυτικὸν μίλλιον ποιοῦσι γωνίαν 1′. Πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον διά τινος κατακορύφου εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον (ἐδ.126). καλεῖται δὲ κατακόρυφον ἐπίπεδον.

159. Γεωγραφικὸν πλάτος καὶ μῆκος. Δι' ἑκάστου σημείου τῆς ὑδρογείου σφαίρας δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν διερχομένους ἕνα παράλληλον κύκλον καὶ ἕνα μεσημβρινόν. Καλεῖται *πλάτος* ἑνὸς τόπου (βόρειον ἢ νότιον) ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς κατακορύφου τοῦ τόπου καὶ μιᾶς ἄλλης κατακορύφου τοῦ ἰσημερινοῦ· ἡ δευτέρα αὕτη κατακόρυφος, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, εἶνε ἡ προβολὴ τῆς πρώτης (ἐδ. 176). Μέτρον τῆς γωνίας ταύτης τοῦ πλάτους εἶνε τὸ τόξον τοῦ μεσημβρινοῦ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόπου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ.

Καλεῖται *μῆκος* ἑνὸς τόπου (ἀνατολικὸν ἢ δυτικὸν) ἡ δίεδρος γωνία (ἐδ. 126) ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου καὶ τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ· μέτρον τῆς γωνίας ταύτης εἶνε τὸ τόξον τοῦ ἰσημερινοῦ ἢ τοῦ παραλλήλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο τούτων μεσημβρινῶν. π. χ. αἱ Ἀθῆναι ἔχουν πλάτος 38° βόρειον καὶ μῆκος 21° 23′ ἀνατολικὸν (περίπου).

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ πλάτος καὶ τὸ μῆκος ἑνὸς τόπου τῆς γῆς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς σφαίρας. Ἐπίσης δεδομένου τόπου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ.

Εἰς τὴν ναυτικήν, μονὰς πρὸς καταμέτρησιν τῶν ἀποστάσεων εἶνε τὸ *ναυτικὸν* μίλλιον, ἰσοῦται δὲ πρὸς τὸ μῆκος τόξου 1′ τοῦ μεσημβρινοῦ, ἤτοι 1852, 2 μέτρα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. *Νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς* εἰς τετραγ. χιλιόμετρα.

Ἐπειδὴ ἡ μὲν περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς γῆς εἶνε

40.000 χιλιόμ., ἡ δὲ διάμετρος εἶνε 40.000 : π, ἕπεται (ἐδ. ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς γῆς εἶνε :

$$40.000 \times \frac{40.000}{\pi} = 1600000000 : \pi = 509.295.818 \text{ τ. χλμ.}$$

Ἀσκήσεις

1) Πόσα τετρ. μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται δι' ἓν ἀερόστατον σφαιρικὸν ἀκτῖνος 10 μέτρων;

2) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας τί γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ;

3) Ἐπὶ ὑδρογείου σφαίρας νὰ εὕρῃς τὸ πλάτος τῶν Ἀθηνῶν, τῆς Μασσαλίας, τῶν Παρισίων, τῆς Πετρουπόλεως, τοῦ Ἀκρωτηρίου τῆς Καλῆς Ἐλπίδος, τῆς πόλεως Κούϊτον τῆς Ν. Ἀμερικῆς.

4) Ἐπὶ ὑδρογείου σφαίρας νὰ εὕρῃς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 35^0Α καὶ πλάτος 50^0Β.

5) Δύο πόλεις κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ ἔχουσι πλάτος βόρειον, ἡ μὲν 40^o, ἡ δὲ 50^o. Τίς ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἰς χιλιόμετρα ;

6) Δύο πόλεις κείμεναι ἐπὶ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ, ἀπέχουσιν 643 χλμ. Τίς ἡ διαφορὰ τῶν πλατῶν αὐτῶν;

7) Αἱ κατακόρυφοι δύο τόπων τῆς γῆς σχηματίζουσι γωνίαν $5^0 10'$. Πόσα μίλλια ἀπέχουσιν οἱ τόποι ;

8) Ἐὰν τὰ μήκη δύο τόπων ἔχουσι διαφορὰν 15^0, τὰ ὡρολόγια αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ μίαν ὥραν. Μῆκος Παρισίων $= 2^o\ 20'\ 16''$ Μῆκος Ἀθηνῶν $= 23^o\ 49'\ 30''$. Μῆκος Ν. Ὑόρκης $= 73^0 54'\ 45''$ Δ. Ὅταν εἶνε μεσημβρία εἰς Γρήνουϊτς, ποία ὥρα θὰ εἶνε εἰς Παρισίους, εἰς Ἀθήνας, εἰς Νέαν Ὑόρκην ;

9) Ἡ διαφορὰ τῆς ὥρας μεταξὺ Κων)πόλεως—Ἀθηνῶν εἶνε 21 λεπτά. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς Κων)πόλεως ;

Καταμέτρησις τῶν κυριωτέρων στερεῶν σωμάτων.

160. Κυβικὸν μέτρον καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ. Εἴπομεν ἄλλοτε (ἐδ. 94) τί λέγεται μέτρησις ποσοῦ: Νὰ μετρήσωμεν στερεόν τι σημαίνει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς, καὶ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς τὸ δοθὲν στερεὸν περιέχει τὴν μονάδα καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δεικνύει τοῦτο λέγεται *ὄγκος* τοῦ στερεοῦ.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν στερεῶν μεταχειριζόμεθα τὸν κύβον τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶνε ἓν μέτρον καὶ ὁ ὁποῖος καλεῖται ***κυβικὸν μέτρον*** (συντόμως κ. μ.)

Ὑποδιαιρέσεις τούτου εἶνε ἄλλοι κύβοι ἔχοντες ἀκμὴν μιᾶς παλάμης, ἑνὸς δακτύλου, μιᾶς γραμμῆς, καὶ οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ***κυβικὴ παλάμη, κυβικὸς δάκτυλος, κυβικὴ γραμμή***, (συντόμως κ. π., κ. δ., κ. γρ.).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν τοῦ κ. μ. πρὸς τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Κατασκευάζομεν μίαν τετρ. παλ. τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν εἰς τοὺς 100 τετρ. δακτύλους της (ἐδ. 99). Εἰς τὸν καθένα ἐξ αὐτῶν θέτομεν ἕνα κυβικὸν δάκτυλον, οὕτω ἀποτελεῖται στρῶμα ἀπὸ 100 κ. δ., τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ἑνὸς δακ. (σχ. 134). Εἶνε φανερὸν ὅτι διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς ὕψος μιᾶς παλάμης πρέπει νὰ θέσωμεν 10 τοιαῦτα στρώματα τὸν ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ὁ οὕτω προκύψας κύβος εἶνε ἡ κυβικὴ παλάμη. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ νὰ ἀποτελέσωμεν τὴν κυβ. παλάμην ἐχρειάσθημεν 1000 κυβ. δακ. δηλ. ἡ κυβ. παλ. περιέχει 1000 κυβ. δακ.

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι τὸ κυβ. μέτρον περιέχει 1000 κ. π. καὶ ὁ κυβ. δάκ. 1000 κυβ. γρ.

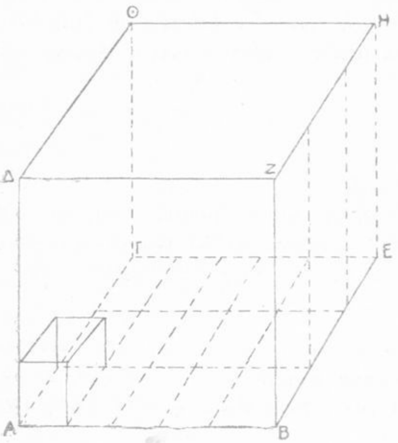
Ὅθεν, 1 κ. μ.=1000 κ. π.=1000000 κ. δ.=1000000000 κ.γρ.
Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κ. π. εἶνε τὸ 0,001 τοῦ κ. μ.
ὁ κ. δ. τὸ 0,000001 καὶ ἡ κ. γρ. τὸ 0,000000001.

Ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης εἶνε 92 κ. μ. 87 κ. π. 750 κ. δ. ὁ συμμιγὴς οὗτος ἀριθμὸς γράφεται ὡς δεκαδικὸς οὕτω:

92, 087750 κ. μ.

Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐκφράζοντα ὄγκον, ἀναγινώσκομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἀκέραιον μέρος, δηλ. κ. μ. χωρίζομεν δὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τμῆμα φανερώνει κ. π., τὸ δεύτερον κ. δ. καὶ τὸ τρίτον κ. γρ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα ἔχῃ ἓν ἢ δύο ψηφία συμπληροῦμεν τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν. Π. χ. 13,086005 9 ἀπαγγέλλεται 13 κ.μ. 86 κ.π. 5 κ. δ. 900 κ.γρ.

161. Μέτρησις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς κύβους ὅπως διηρέσαμεν ἀνωτέρω τὴν κ. π. εἰς κ. δ.



Σχ. 194

Εἴπομεν ἄλλοτε (ἐδ. 130) ὅτι *διαστάσεις* ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 194) λέγονται τὸ μῆκος αὐτοῦ ΑΒ, τὸ πλάτος ΑΓ ὕψος ΑΔ.

α΄) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ= 5μ., ΑΓ = 3μ. καὶ τὸ ΑΔ=4μ.

Εἶνε φανερὸν ὅτι ἐπὶ τῆς βάσεώς του ΑΒΕΓ δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἐν ὅλῳ 5×3 κ. μ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶνε 4μ., ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν 4 τοιαῦτα στρώματα κυβικῶν μέτρων, καὶ ὅτι τὸ ὅλον παραλληλεπίπεδον θὰ χωρέσῃ 5×3×4 κ. μ., ὅτι δηλ. ὁ ὄγκος εἶνε 5×3×4 ἤτοι 60 κ. μ.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 5. 3 καὶ 4 ἐφανέρωναν παλάμας ἢ δακτύλους ἢ ὑάρδας κτλ. τότε ὁ ὄγκος θὰ ἦτο 60 κ. π. ἢ κ. δ. ἢ κυβ. ὑάρδας, κτλ.

β΄) Ἔστωσαν αἱ διαστάσεις ἀριθμοὶ κλασματικοὶ π. χ.

ΑΒ = $\frac{13}{8}$, ΑΔ = $\frac{7}{12}$ καὶ ΑΕ = $\frac{5}{6}$ τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἐν ἐδ. 100 β, συνάγομεν ὅτι ὁ ὄγκος εἶνε $\frac{39\times14\times20}{24\times24\times24}$ ἢ $\frac{13}{8}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{6}$.

Γενικῶς, ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου παρασταθῇ διὰ Θ, αἱ δὲ διαστάσεις του διὰ α, β, γ, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ὁ τύπος Θ=α×β×γ, ὁ ὁποῖος μεταφράζεται διὰ τοῦ ἑξῆς κανόνος:

Κανών. *Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ ἐπὶ τὸ ὕψος.* ἢ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς βάσεως παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι: *Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

162. Ὄγκος κύβου. Ἐπειδὴ εἰς τὸν κύβον καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶνε ἴσαι, εὑρίσκεται ὁ ὄγκος του, ἐὰν μετρηθῇ ἡ μία ἀκμὴ α καὶ πολλαπλασιασθῇ αὕτη τρὶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της· ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται Θ=α×α×α ἢ α3. Ἡ τρίτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ π.χ. $7\times7\times7$ ἢ 7^3, λέγεται καὶ *κύβος* αὐτοῦ, διότι ἐκφράζει τὸν ὄγκον κύβου ἔχοντος πλευρὰν 7 μονάδας μήκους.

163. Παρατηρήσεις. α΄) Ὁ ἀνωτέρω κανὼν εἶνε ἀληθὴς καὶ ὅταν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε οἱονδήποτε (σχ. 165), τότε ὅμως ὕψος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν ἀκμῶν ΑΕ ἢ ΒΖ, ἀλλ' ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. ἐπίσης πλάτος τοῦ στερεοῦ δὲν εἶνε μία τῶν πλευρῶν ΑΔ ἢ ΒΓ, ἀλλ' ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ παραλληλογράμμου.

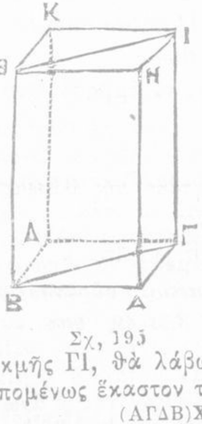
β΄) Παρομοίους κανόνας θὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τὰ λοιπὰ στερεά. Ἐκ τούτου ἐννοοῦμεν ὅτι *ἡ μέτρησις τῶν στερεῶν*, ὅπως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν, δὲν γίνεται *διὰ τῆς ἀμέσου ἐπιθέσεως* τῆς μονάδος, ἀλλὰ δι' *ὑπολογισμῶν*, ἀφοῦ προηγουμένως *μετρήσωμεν εὐθείας τινας, τὰς διαστάσεις αὐτῶν.*

Ἐφαρμογή. *Ῥάβδος σιδηρᾶ ἔχει μῆκος 3μ. ἡ δὲ τομὴ ἡ κάθετος πρὸς τὸ μῆκος εἶνε τετράγωνον πλευρᾶς 40 γρ. Πρόκειται νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτὴν ὥστε νὰ ἔχῃ τομὴν τετράγωνον πλευρᾶς 24γρ. Ποῖον μῆκος θὰ ἔχῃ τότε ἡ ῥάβδος; Τίς ὁ ὄγκος αὐτῆς;*

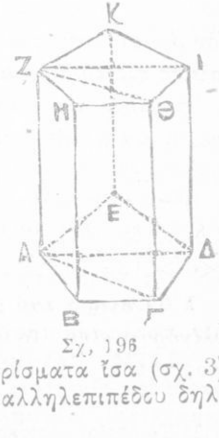
Ἐὰν ὡς μονάδα μήκους λάβωμεν τὸν δάκτυλον, ὁ ὄγκος τῆς ῥάβδου εἶνε $4\times4\times300=4800$ κ. δ. Ἐὰν τὸ νέον μῆκος κληθῇ x ὁ ὄγκος θὰ εἶνε $2,4\times2,4\times x$ ἢ $5,76\times x$, ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τῆς ῥάβδου ὁ ὄγκος δὲν μετεβλήθη θὰ ἔχωμεν $5,76\times x=4800$

ὅθεν $x=\frac{4.800}{5.76}=833$ δ. ἢ 8 μ, 33

164. Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος. α)` Ἐὰν τάμωμεν τὸ παραλληλεπίπεδον (σχ. 195) ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ΒΘ μέχρι τῆς



Σχ, 195



Σχ, 196

ἀκμῆς ΓΙ, θὰ λάβωμεν δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα (σχ. 3) ἑπομένως ἕκαστον τούτων εἶνε τὸ 1/2 τοῦ παραλληλεπιπέδου δηλ.

$$\frac{(\text{ΑΓΔΒ})\times\text{ΑΗ}}{2} \text{ ἤτοι } (\text{ΑΒΓ})\times(\text{ΑΗ})$$

Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως (τοῦ τριγώνου) ἐπὶ τὸ ὕψος.

β΄) Ἔστω τὸ ὀρθὸν πολυγωνικὸν πρίσμα (σχ. 196)· διαιροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ,ΑΔ· τὰ ἐπίπεδα ΖΑΓ καὶ ΖΑΔ διαιροῦσι τὸ πρῖσμα εἰς τρία τριγωνικὰ πρίσματα· τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πρισμάτων τούτων δίδει τὸν ζητούμενον ὄγκον, ἤτοι :

$$Θ=(ΑΒΓ)\times ΑΖ+(ΑΓΔ)\times ΑΖ+(ΑΔΕ)\times ΑΖ \text{ ἢ}$$
$$Θ=(ΑΒΓ+ΑΓΔ+ΑΔΕ)\times ΑΖ=(ΑΒΓΔΕ)\times ΑΖ$$

Κανών. *Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ βάσις του ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἐφαρμογή. Στύλος οἰκοδομικὸς χρησιμεύων ὡς ὑποστήριγμα δεξαμενῆς ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος ἑξαγωνικοῦ· ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (τοῦ ἑξαγώνου) εἶνε 2,50 τ. μ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ στύλου εἶνε 1,75μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶνε

$$Θ=2,5\times 1,75=4,375 \text{ κ. μ.}$$

165. Ὄγκος πλαγίου πρίσματος. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν εἶνε ἀληθὴς καὶ ὅταν τὸ πρῖσμα εἶνε πλάγιον (σχ.164). δηλ. ὁ ὄγκος του εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τὸ ὕψος (1) ΖΔ.

Γενικῶς ἄρα ἀληθεύει ὁ τύπος $Θ=Ε\times υ$, ἔνθα Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

166. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου. Ὁ κύλινδρος δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς πρῖσμα ὀρθὸν ἔχον βάσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ὅθεν ἕπεται ὁ *κανών*: *Τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν, καθὼς εἰς τὸ πρῖσμα, τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος.*

Ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλος, ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶνε $π\times α^2$, ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶνε:

$$Θ=π\times α^2\times υ.$$

Π. χ. κυλινδρικοῦ κυτίου ἐὰν εἶνε ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως 12 δ. τὸ δὲ ὕψος 18 δ. ἡ χωρητικότης του θὰ εἶνε

$π\times 6^2\times 18=648\times π=2031,72$ κ. δ. ἢ 2,035 κ. π. (περίπου).

Γενικὸς κανών: *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος καὶ παντὸς κυλίνδρου εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

---

(1) Τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διὰ τοῦ νήματος τῆς στάθμης ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ πρῖσμα εἶνε ὁ ρ ι ζ ό ν τ ι ο ν (ἐδ.158).

167 Ὄγκος τῆς πυραμίδος. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ σώματος μαλακοῦ (κηροῦ, στόκου,) ἕν τριγωνικὸν πρῖσμα, ὅπως τὸ σχ. 3, καὶ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν ἴσην ἢ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ΑΒΓ καὶ ὕψος τὸ αὐτό, κατόπιν δὲ ζυγίσωμεν τὰ δύο σώματα, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πυραμὶς ἔχει βάρος τὸ ἕν τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πρίσματος, τοῦτο σημαίνει ὅτι καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος θὰ εἶνε τὸ ἕν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος· Ἄρα,

Ὁ ὄγκος πυραμίδος εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ βάσις ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 3.

Ὁ τύπος εἶνε $\Theta = E \times \upsilon : 3$

Π. χ. Ἐὰν εἰς τὴν πυραμίδα ΚΑΒΓ (σχ. 171) εἶνε ΑΒ=1,2 δ. ΓΕ=2,4 δ. καὶ ΚΗ=3,5 δ. τότε τὸ μὲν ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ εἶνε $1,2 \times 2,4 : 2$ ἢ 1,44 τ. δ. ὁ δὲ ὄγκος θὰ εἶνε

$$\Theta = 1,44 \times 3,5 : 3 = 1,680 \text{ κ. δ.}$$

168. Ὄγκος τοῦ κώνου. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι καὶ ὁ κῶνος εἶνε τὸ ἕν τρίτον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἑπομένως, ὁ ***Ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ βάσις ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 3.***

Ἡ βάσις τοῦ κώνου εἶνε κύκλος· ὥστε ἔχομεν:

$$\Theta = \pi \times \alpha^2 \times \upsilon : 3$$

Ἐφαρμογή. Σωρὸς μεταλλεύματος ἔχει σχῆμα κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος εἶνε 1,20 μ. ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως 3 μ. Ὁ ὄγκος του θὰ εἶνε $\Theta = \pi \times 3^2 \times 1,2 : 3 = \pi \times 3 \times 1,2 = 11,31$ κ. μ.

Γενικὸς κανών. *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος καὶ παντὸς κώνου εἶνε ἴσος μὲ τὸ ἕν τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

169. Ὄγκος τῆς σφαίρας. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ πυραμίδας, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ συμπίπτουσιν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ αἱ βάσεις εἶνε μικρότατα τρίγωνα, ὡς τὸ ΑΒΓ (σχ. 197). Τὸ στερεὸν λοιπὸν ΚΑΒΓ εἶνε τριγωνικὴ πυραμὶς μὲ ὕψος τὴν ἀκτῖνα α τῆς σφαίρας ἄρα ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἰσοῦται μέ (ἐπιφ. ΑΒΓ) $\times \alpha : 3$.

Σχ. 197

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοιούτων τριγωνικῶν πυραμίδων, βλέπομεν ὅτι: *διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας πρέπει νὰ πολ-*

λαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς μὲ τήν ἀκτῖνα της καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ 3 : ἤτοι ἔχομεν τὸν τύπον

$$\Theta = 4 \times \pi \times \alpha^2 \times \alpha : 3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \alpha^3$$

Ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀκτῖνος εἰσέλθῃ ἡ διάμετρος δ προκύπτει ὁ τύπος

$$\Theta = \frac{\pi \times \delta^2 \times \delta}{3 \times 2} = \frac{1}{6} \pi \times \delta^3$$

Π. χ. ὁ ὄγκος τῆς γῆς εἰς κυβ. μυριάμετρα εἶνε

$$\frac{16000000}{\pi} \times \frac{2000}{\pi} : 3 \text{ ἢ } \frac{32000000000}{\pi^2 \times 3} = 1080754238 \text{ κυβ. μυριάμ.}$$

Ἀσκήσεις

1) Πόσους κυβ. δακτύλους περιέχει εἷς κύβος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶνε 12 δ. (νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ συλλογισμὸς τοῦ ἐδ 160). Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκμὴν αὐτοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ νέου κύβου ποίαν σχέσιν θὰ ἔχῃ πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ 1ου;

2) Ποῖον εἶνε τὸ βάρος 5 λιτρῶν ὕδατος; Γνωστὸν ὅτι ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβ. παλ. λέγεται *λίτρα*. *Χιλιόγραμμον* καλεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4°, ὅσον χωρεῖ εἰς μίαν λίτραν, *γραμμάριον* δὲ καλεῖται τὸ χιλιοστὸν αὐτοῦ, δηλ. τὸ βάρος ὕδατος ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κ. δ.

3) Δοχεῖον κυβικὸν πλευρᾶς 0,80 μ. περιέχει ἔλαιον μέχρι τοῦ μέσου. Πόσας φιάλας τῶν δύο λιτρῶν θὰ γεμίσωμεν ἐκ τοῦ ἐλαίου τούτου;

4) Αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει διαστάσεις 7 μ., 80. 6, 20 καὶ 4μ. Ἐὰν ἐν αὐτῇ φοιτῶσι 45 μαθηταί, πόσαι λίτραι ἀέρος ἀναλογοῦσιν εἰς τὸν καθένα;

5) Κρήνη παρέχει 175 λίτρας ὕδατος εἰς 2λ. 12 δ. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται ἵνα γεμίσῃ δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 7,25 μ.—4,80 μ—6 μ;

6) Λεωφόρος μήκους 4 χιλιομέτρων καὶ πλάτους 12 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ χαλίκων εἰς ὕψος 0,25μ. Πόσα κάρρα χαλίκων χρειάζονται ἐὰν τὸ καθὲν χωρῇ 1,5 κ. μ.;

7) Δεξαμενῆς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ μῆκος εἶνε 3 μ. καὶ τὸ πλάτος 0,50. Τὸ ὕδωρ φθάνει ἐν αὐτῇ μέχρι ὕψους 6 μ. Ἐὰν τὸ ὕδωρ τοῦτο μεταγγίσωμεν εἰς ἄλλην δεξαμενὴν τοῦ αὐτοῦ σχήματος, ἀλλὰ μήκους 4 μ. καὶ πλάτους 3 μ. μέχρι ποίου ὕψους θὰ φθάσῃ;

8) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα πρίσματος· ἡ βάσις του, ἥτις εἶν κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν 12 μ. τὸ ἐν αὐτῇ περιεχόμενον ὕδωρ φθάνει μέχρις ὕψους 1,20μ. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος.

9) Πυραμὶς κανονικὴ ἔχει βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 3 μ. Τὸ ὕψος της εἶνε 10 μ. Νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον.

10) Πόσας λίτρας σίτου χωρεῖ δοχεῖον κυλινδρικὸν διαμέτρου 25 δακ. καὶ βάθους 65 δακ.;

11) Ποῖον ὕψος ἔχει δοχεῖον κυλινδρικὸν χωροῦν 10 λίτρας ὕδατος, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶνε 0,15 μ ;

12) Δεξαμενῆς κυλινδρικῆς ἡ χωρητικότης εἶνε 150028 λιτρῶν, τὸ δὲ βάθος εἶνε 0,56 μ. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

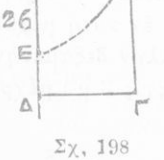
13) Κηπουρὸς θέλων νὰ διπλασιάσῃ τὴν εἰς τὸν κῆπον του εἰσερχομένην ποσότητα ὕδατος, ἀντικαθιστᾷ τὸν ἀγωγὸν σωλῆνα δι' ἑτέρου διπλασίας διαμέτρου νομίσας ὅτι θὰ ἐπλήρωνε τὸ διπλοῦν, ἀλλ' ὁ ὑδρονομεὺς ἐξαναγκάζει αὐτὸν νὰ πληρώνῃ τὸ τετραπλοῦν. Τίς ὁ λόγος ;

14) Ἐδανείσθη τις σάκκον σίτου ὕψους 4 ποδῶν καὶ περιφερείας 6 ποδῶν. Διὰ νὰ ἀπαλλαχθῇ τῆς ὑποχρεώσεως ἀποδίδει δύο σάκκους ὕψους 4 ποδῶν καὶ περιφερείας 3 ποδῶν. Ζητεῖται ἐὰν ἀπέδωκε τὴν δανεισθεῖσαν ποσότητα σίτου, (οἱ σάκκοι εἶνε κυλινδρικοί)

15) Λευκοσιδηρουργὸς θέλει νὰ κατασκευάσῃ χωνίον κωνικὸν διαμέτρου 20 δ. καὶ τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ 2 λίτρας. Ποῖον θὰ εἶνε τὸ ὕψος του ;

16) Ἀξιωματικὸς θέλει νὰ στήσῃ σκηνὴν κωνικὴν χωροῦσαν 20 κ. μ. ἀέρος. Ἐὰν τὸ ὕψος της εἶνε 2 μ., ποῖον θὰ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ;

* 17) Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α λευκοσιδήρου ὀρθογωνίου φύλλου ΑΒΓΔ (σχ. 198) καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν τόξον ΒΕ, διὰ τοῦ τομέως ΑΒΕ κατασκευάζομεν κῶνον τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὕψος καὶ ἡ χωρητικότης. Τὸ ὕψος θὰ εἶνε ἡ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν τριγώνου ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε 18 δ. καὶ ἡ ἑτέρα κάθετος 4,5 (ἐδ. 122II).



Σχ. 198

18) Εἰς δοχεῖον κυλινδρικὸν διαμέτρου 0,8 μ. περιέχον ὕδωρ ρίπτομεν λίθον ὅτε τοῦ ὕδατος τὸ ὕψος αὐξάνει κατὰ 0.483 μ. Τίς ὁ ὄγκος τοῦ λίθου ;

19) Εἰς δοχεῖον τοῦ σχ. 194 μήκους 0,63 μ. καὶ πλάτους 0,51 ἐτέθη ὕδωρ θαλάσσιον. (Εἰδ. βάρ. 1,025) ἐκ τοῦ ὁποίου δι' ἐξατμίσεως ἐξήχθησαν 4,600 χιλιγ. ἅλατος. Γνωρίζομεν ὅτι ἓν χιλιγρ. θαλασσίου ὕδατος περιέχει 50 γραμμάρια ἅλατος. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ ὕδατος καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

20) Πόσα κυβ. μέτρα φωταερίου χρειάζονται πρὸς πλήρωσιν σφαιρικοῦ ἀεροστάτου ἀκτῖνος 10 μέτρων ;

21) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τί γίνεται ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

22) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶνε 18 μέτρα· ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

23) Ἡ ἀκτὶς τῆς σελήνης ἰσοῦται πρὸς τὰ 3/11 τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς, τοῦ δὲ ἡλίου πρὸς 112 ἀκτῖνας τῆς γῆς. Νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς σελήνης καὶ τοῦ ἡλίου ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς.

24) Διὰ τὴν κατασκευὴν σφαιρικοῦ ἀεροστάτου ἐχρειάσθησαν 180 μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,80 μ. Κατὰ τὴν κοπὴν τοῦ ὑφάσματος εἰς ἀτράκτους (ἐδ. 156) ἐγένετο φθορὰ ἴση πρὸς τὸ 1/9 αὐτοῦ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου.

Καταμέτρησις καὶ ἄλλων στερεῶν

170. Κόλουρος κῶνος καὶ κόλουρος πυραμίς. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ ἄνω μέρος τῆς πυραμίδος (σχ. 199) δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν σχηματίζεται ἡ κόλουρος

Σχ. 199

Σχ. 200

πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖΗΘ. Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν μερικαὶ βάσεις ἀγαλμάτων, ὀβελίσκοι κλπ.

Ἐὰν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποκόψωμεν τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν μέρος τοῦ κώνου (σχ. 200) σχηματίζεται ὁ κόλουρος κῶνος ΑΒΔΕ. Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν αἱ γάστραι, αἱ λεκάναι, καλύμματά τινα λυχνιῶν διὰ νὰ πίπτῃ τὸ φῶς πρὸς τὰ κάτω (abat-jour).

Ἡ κόλουρος πυραμὶς ἔχει δύο παραλλήλους βάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶνε πολύγωνα ὅμοια μὲν ὄχι ὅμως καὶ ἴσα.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει ἐπίσης δύο παραλλήλους βάσεις αἱ ὁποῖαι εἶνε μὲν κύκλοι, ἀλλ' ὄχι καὶ ἴσοι.

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων εἶνε τὸ *ὕψος* τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ τοῦ κολούρου κώνου.

* **171. Ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ τοῦ κολούρου κώνου.** Τὴν κόλουρον πυραμίδα ἐξομοιώνομεν μὲ πρῖσμα τοῦ αὐτοῦ ὕψους υ καὶ μὲ βάσιν τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο βάσεων. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο βάσεων Β καὶ β ἐπὶ τὸ ὕψος υ, ἤτοι

$$\Theta=\frac{\mathrm{B}+\beta}{2}\times\upsilon$$

Τὸν κόλουρον κῶνον ἐξομοιώνομεν μὲ κύλινδρον, τοῦ αὐτοῦ ὕψους υ, ἔχοντα δὲ βάσιν μὲ ἀκτῖνα τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἀκτίνων Α καὶ α τῆς μεγάλης καὶ τῆς μικρᾶς βάσεως· Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου κατὰ προσέγγισιν εἶνε

$$\Theta=\pi\left(\frac{\mathrm{A}+\alpha}{2}\right)^2\times\upsilon \qquad (1)$$

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς (κορμὸς δένδρου) μετροῦσι διὰ ταινίας τὴν περιφέρειαν τοῦ μέσου, ἔστω δὲ Γ τὸ μῆκος αὐτῆς — τότε $\frac{\mathrm{A}+\alpha}{2}=\frac{\Gamma}{2\pi}$ καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\Theta=\Pi\times\frac{\Gamma^2}{4\times\pi^2}\times\upsilon=\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\times\frac{1}{\pi}\times\upsilon=\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\times\upsilon\times0{,}31831.$$

* **172. Ἄλλος τρόπος μετρήσεως τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς κολούρου πυραμίδος.** Ἀκριβέστερον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου, ἐὰν ἀπὸ τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀποκοπέντος ΓΔΕ (σχ. 200).

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ὅμως τοὺς ὄγκους τούτους πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ ὕψος Γκ=χ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΚΒ καὶ ΓκΕ εἶνε ὅμοια (ἐδ. 82) ἄρα ἔχομεν

$$\frac{ΓΚ}{Γκ}=\frac{ΚΒ}{κΕ} \text{ ἢ } \frac{Χ+υ}{Χ}=\frac{Α}{α} \text{ ἢ } 1+\frac{υ}{Χ}=\frac{Α}{α}$$

$$\frac{υ}{Χ}=\frac{Α}{α}-1,\ \frac{υ}{Χ}=\frac{Α-α}{α} \text{ ὅθεν } χ=\frac{υ\times α}{Α-α}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὁ ἑπόμενος γενικὸς **κανών**: *Τὸ ὕψος τοῦ ἀποκοπέντος μικροῦ κώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς α τῆς μικρᾶς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος υ τοῦ κολούρου κώνου καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων τῆς μεγάλης καὶ τῆς μικρᾶς βάσεως.*

Ὁμοίως εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος. Τὸ ἄγνωστον ὕψος ΚΛ (σχ. 199) τῆς μικρᾶς πυραμίδος εὑρίσκεται διὰ τύπου ἀναλόγου, ἀντὶ ὅμως τῶν δύο ἀκτίνων τίθενται δύο ὁμοίως κείμεναι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΕΖ.

* **173. Κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου.** Ἐὰν ἐξομοιώσωμεν τὸν κόλουρον κῶνον μὲ κύλινδρον, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εὑρίσκεται ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου ὅρου τῶν δύο ἀκτίνων σχηματισθῇ ἡ μέση περιφέρεια καὶ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ=λ ἤτοι

$$Ε=2\times π\times \frac{Α+α}{2}\times λ=π\times (Α+α)\times λ.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται ἐὰν εὑρεθῶσι καὶ προστεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ τῶν πέριξ τραπεζίων.

* **Ἐφαρμογὴ** I. *Δεξαμενῆς ὁ μὲν πυθμὴν εἶνε τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 199) πλευρᾶς 32 μ. τὸ δὲ στόμιον εἶνε ὡσαύτως τετράγωνον ΕΖΗΘ πλευρᾶς 30 μ. Τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς εἶνε 4 μ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτῆς.*

α΄) τρόπος. ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο βάσεων εἶνε

$$32\times 32+30\times 30:2=962 \text{ τ. μ.}$$

Ἑπομένως Θ=962×4=3848 κ. μ. (περίπου).

β΄) τρόπος. Τὸ ὕψος τῆς ἀποτετμημένης μικρᾶς πυραμίδος

εἶνε $χ=\frac{30\times 4}{32-30}=\frac{30\times 4}{2}=60$ μέτρα

Ὄγκος τῆς ὅλης πυραμίδος $ΚΑΒΓΔ=\frac{32^2\times 64}{3}=\frac{65536}{3}$.

Ὄγκος τῆς ἀποτετμημένης $ΚΕΖΗΘ=\frac{30^2\times 60}{3}=\frac{54000}{3}$

Ἄρα ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶνε $11536 : 3 = 3845 \frac{1}{3}$ κ. μ. (ἀκριβῶς).

II. Ξυλέμπορος ἠγόρασε 4 κορμοὺς δένδρων πρὸς 180 δρχ. τὸ κ. μ. Ἕκαστος τούτων ἔχει ὕψος 4 μ., διαμέτρους δὲ τῶν ἄκρων 0,34 καὶ 0,26 μ. Πόσον τιμᾶνται;

Κορμὸς δένδρου θεωρεῖται ἐν γένει ὡς κόλουρος κῶνος μὲ μικρὰν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων. Διὰ τοῦτο ἐξομοιώνομεν αὐτὸν πρὸς κύλινδρον ἔχοντα μέσην βάσιν μὲ ἀκτῖνα τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἀκτίνων· ἐν τῇ πράξει εὑρίσκομεν διὰ ταινίας τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς μέσης βάσεως καὶ ἐξ αὐτοῦ τὴν ἀκτῖνα της (ἐδ. 171).

Λύσις. Μέσος ὅρος τῶν ἀκτίνων εἶνε $(34+26) : 4 = 15$ δάκτ. ἑπομένως τοῦ ἑνὸς κορμοῦ ὁ ὄγκος εἶνε:

$\Theta = 3,14 \times 15^2 \times 400 = 282600$ κ. δ.

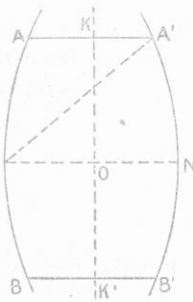
καὶ τῶν τεσσάρων θὰ εἶνε 1130400κ. δ. ἢ 1,1304 κ. μ. Πρὸς 180 δρχ. τὸ ἓν κ. μ. θὰ τιμῶνται $1,1304 \times 180 = 203,50$ δρχ

III. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κάδου κολουροκωνικοῦ ἐὰν ἡ πλευρά του (γενέτειρα) εἶνε 9,50 μ. αἱ δὲ εἰς τὰ ἄκρα περιφέρειαι ἔχωσι μήκη 1,50 καὶ 0,80 μ.

ὁ μέσος ὅρος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων εἶνε $(1,50+0,80) : 2 = 1.15$ Ἑπομένως (ἐδ. 173). $E = \pi \times 1,15 \times 9,50 = 34,30925$ τ. μ.

174. Ὑπολογισμὸς τῆς χωρητικότητος βυτίου. Τὰ βυτία (βαρέλια) δὲν ἔχουσιν ὡρισμένον γεωμετρικὸν σχῆμα διὰ τοῦτο πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς χωρητικότητος αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν ἐπροτάθησαν διάφοροι μέθοδοι.

α΄) ἐξομοιώνομεν τὸ βυτίον πρὸς κύλινδρον ἔχοντα ὕψος τὴν ἀπόστασιν ΚΚ΄ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ (σχ. 201) καὶ διάμετρον τὸν μέσον ὅρον τῆς διαμέτρου ΒΒ΄ τῆς βάσεως καὶ τῆς διαμέτρου ΜΝ τοῦ μέσου.



Σχ. 201

β΄) Θεωροῦμεν τὸ βυτίον ὡς ἄθροισμα δύο ἴσων κολούρων κώνων ΑΑ΄ ΜΝ καὶ ΒΒ΄ ΜΝ. Διὰ τοῦ τοιούτου ὅμως ὑπολογισμοῦ εὑρίσκομεν προφανῶς ὄγκον μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς διότι ἡ καμπύλη ΑΜ ἀντικαθίσταται ὑπὸ εὐθείας (τῆς χορδῆς ΑΜ).

γ΄) Ὅταν δὲν ζητεῖται μεγάλη ἀκρίβεια, ὡς εἰς τὰ τελωνεῖα, μεταχειρίζονται τύπους ἐμπειρικοὺς ὡς τὸν ἑπόμενον

$$\Theta = 0,605\ \gamma^3$$

ἔνθα γ παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου Α'Μ ἢ μᾶλλον τὸν μέσον ὅρον τῶν ΜΑ' καὶ ΜΒ'. Π. χ. ἂν ΜΑ'=1 μ ἢ 10 πκλ., τότε

$$\Theta = 0{,}605 \times 10^3 = 605 \text{ λίτραι.}$$

Κατασκευάζουσι πίνακα διαφόρων τιμῶν τοῦ ὄγκου ἀντιστοιχουσῶν εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς διαγωνίου Α'Μ. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων βαθμολογοῦσι μεταλλικὴν ῥάβδον ἣν εἰσάγοντες εἰς τὸ βυτίον, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΑ' ἀναγινώσκουσι τὴν χωρητικότητα.

173. Ὑπολογισμὸς τοῦ ὄγκου οἱουδήποτε σώματος. Ἐὰν σῶμα τι χωρίζηται εἰς μέρη, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος εὑρίσκεται διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων, τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν μερῶν τούτων ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος· ἐὰν ὅμως τὸ σῶμα δὲν χωρίζεται εἰς ἄλλα γεωμετρικά, εὑρίσκομεν εἰς τινας περιπτώσεις τὸν ὄγκον αὐτοῦ μὲ ἀρκοῦσαν προσέγγισιν διὰ τῶν ἑξῆς μεθόδων:

α') Πληροῦντες ὕδατος δοχεῖον θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σῶμα· (ἐὰν δὲν εἶνε διαλυτὸν) συλλέγομεν ἐπιμελῶς τὸ ἐκχυθὲν ὕδωρ καὶ μετροῦμεν τὸν ὄγκον του διὰ δοχείου βαθμολογημένου εἰς κ. δ. καὶ εἰς λίτρας.

β') Εἰσάγομεν τὸ σῶμα εἴς τι δοχεῖον γνωστῆς χωρητικότητος καὶ πληροῦμεν τὰ κενὰ δι' ἄμμου· Ἀποσύρομεν τὸ σῶμα φροντίζοντες νὰ τινάξωμεν τὴν ἄμμον ἥτις προσκολλᾶται ἐπ' αὐτοῦ, εἶτα μετροῦμεν διὰ τινος ἀγγείου βαθμολογημένου τὴν ἐν τῷ δοχείῳ ἄμμον καὶ ἀφαιροῦντες τὸν ὄγκον αὐτῆς ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

γ') Εἶνε γνωστὸν ὅτι εἷς κ. δ. ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° ἔχει βάρος 1 γραμμάριον καὶ μία κ. π. ἔχει βάρος 1 χιλιγρ. Ἐνῷ εἷς κ. δ. σιδήρου ἔχει βάρος 7, 2 γραμμάρια καὶ μία κ. π. σιδήρου ἔχει βάρος 7,2 χιλγρ. Ἐπίσης εἷς κ. δ. ἐλαίου ἔχει βάρος 0,912 γραμ. καὶ μία κυβ. πκλ. ἐλαίου (ἢ λίτρα) ἔχει βάρος 0,912 χιλιόγρ.

Ὁ ἀριθμὸς 7,2 καλεῖται *εἰδικὸν βάρος* τοῦ σιδήρου καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,912 καλεῖται εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου.

Ἐν γένει *εἰδικὸν βάρος* σώματος καλεῖται τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

Ἐὰν ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι τὸ κ. μ. ἢ ἡ κ. π. ἢ ὁ κ. δ., τὸ βάρος πρέπει νὰ ἐκφράζῃ τόννους ἢ χιλιόγρ. ἢ γραμμάρια.

Ἡ γνῶσις τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν κυριωτέρων σωμάτων εἶνε πολὺ χρήσιμος διότι ἂν γνωρίζωμεν καὶ τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του (οἱονδήποτε σχῆμα καὶ ἂν ἔχῃ) ὅταν δὲ γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον του, εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος του χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμεν.

Πράγματι ἐὰν παρασταθῇ διὰ Ε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον Θ καὶ βάρος Β θὰ ὑπάρχῃ ὁ τύπος

$$\mathrm{E}=\frac{\mathrm{B}}{\Theta}$$

(ἀφοῦ αἱ Θ μονάδες ὄγκου ἔχουσι βάρος Β, ἡ μία πόσον ;)

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου συνάγομεν δύο ἄλλους

$$\Theta=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{B}=\Theta\times\mathrm{E}$$

οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων :

1) Ὁ ὄγκος σώματος εὑρίσκεται ἂν διαιρεθῇ τὸ βάρος διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους, Π. χ. Σιδηροῦ κυλίνδρου ἔχοντος βάρος 576 χιλιόγρ. ὁ ὄγκος θὰ εἶνε 576 : 7,2=80 κ. π.

2) Τὸ βάρος σώματος εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ὄγκος του ἐπὶ τὸ εἰδ. βάρος. Π. χ. Τὸ βάρος ἀκρογωνιαίου λίθου ἔχοντος ὄγκον 2,7 κ. μ, καὶ εἰδ. βάρ. 2,3 εἶνε :
Β=27,×2,3=6,21 τόννους ἢ 6210 χιλιόγρ.

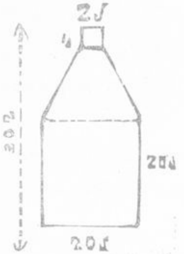
δ΄) Τέλος δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ὑδροστατιστικὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους· ἔστω 11,7 χιλιόγρ. βάρος τοῦ σώματος ἐν τῷ ἀέρι καὶ 10,2 χλγ. τὸ βάρος αὐτοῦ ἐν τῷ ὕδατι· ἡ διαφορὰ 11,7—10,2=1,5 χιλιόγρ. παριστᾷ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπισθέντος ὕδατος· ἀλλὰ 1,5 χιλιόγρ. ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον 1 5 κ. π. ἄρα τόσος θὰ εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

Τὸ βάρος τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος πολὺ ὀλίγον διαφέρει τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος· διὰ τοῦτο εὐκόλως αἰωρούμεθα ἐν τῇ θαλάσσῃ κολυμβῶντες ὕπτιοι (ἀνάσκελα). Ἄρα ἐὰν ὁ ἄνθρωπος ἔχει βάρος 70 χιλγρ. θὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον 70 κ. π. περίπου.

Ἀσκήσεις

* Κάδου κολουροκωνικοῦ ὁ μὲν πυθμὴν ἔχει διάμετρον 1,20μ. τὸ δὲ στόμιον 1,36μ. Τὸ βάθος τοῦ κάδου εἶνε 1,56μ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ.

2) Λευκοσιδηρουργὸς πρόκειται νὰ κατασκευάσῃ δοχεῖον δι' ἔλαιον σχ. 202 ἔχον τὰς σημειουμένας διαστάσεις. Πόσον λευκοσίδηρον θὰ χρειασθῇ καὶ τίς ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου;



Σχ. 202

3) Ἐν κιβωτίῳ σχ. 194 διαστάσεων 1,20μ. — 0,40 — 0,32 ἐτέθη ἄγαλμά τι· πρὸς συμπλήρωσιν τῶν κενῶν τοῦ κιβωτίου προσετέθησαν 75 λίτραι ἄμμου. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἀγάλματος.

4) Λίθος ἔχει βάρος 17008 χιλγρ., 65. Τίς ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος εἶνε 2,3; Ἐὰν ὁ λίθος ἔχῃ τὸ σχ. 194 καὶ ἡ βάσις εἶνε ἀκριβῶς 1 τ. μ. ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ;

5) Εὑρεῖν τὴν χωρητικότητα βυτίου (σχ.201) ἔχοντος τὰς ἑξῆς διαστάσεις: μῆκος ΚΚ′ = 1,36μ. μεγάλη διάμετρος ΜΝ = 1,40, μικρὰ ΑΑ′ = 1,21. Χρῆσις τῶν ἐν ἐδ. 174 μεθόδων καὶ σύγκρισις τῶν ἐξαγομένων. Ἐὰν τὸ βυτίον εἶνε πλῆρες οἰνοπνεύματος (εἰδ β. 0,92) εὑρεῖν τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς ὀκάδας.

6) Σφαῖρα ἐξ ὀρειχάλκου ἔχει διάμετρον 14 δ. Ζητεῖται α′) τὸ βάρος αὐτῆς εἰς ὀκάδας (εἰδ. β. 8,8) β′) ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς σφαίρας πρὸς τὸ βάρος κυλίνδρου ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου ἔχοντος βάσιν ἴσην πρὸς ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψο δὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς.

7) Κύβος ἐκ ξύλου πλευρᾶς 0,36μ. τορνευθεὶς μετετράπη εἰς σφαίραν διαμέτρου 0,36. Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρεθέντος ξύλου.

* 8) Λέβης ἀποτελεῖται ἐκ κυλίνδρου περατουμένου εἰς δύο ἡμισφαίρια ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἐξωτερικὴ περιφέρεια τῶν βάσεων εἶνε 3,142μ. Τὸ μῆκος (ὕψος) τοῦ κυλίνδρου εἶνε 3μ. τὸ δὲ πάχος τοῦ ἐλάσματος 0,0015 μ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης τοῦ λέβητος καὶ τὸ βάρος (εἰδ. β σιδήρου 7,8).

* Περὶ προβολῶν.

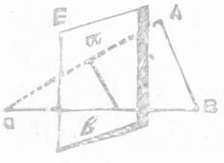
176. *Ὀρθὴ προβολὴ* σημείου Α ἐπὶ ἐπιπέδου Ε (σχ. 203) καλεῖται ὁ ποὺς α τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης καθέτου (ἐδ. 124) Τὸ σχῆμα σ, ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ συνόλου τῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων σχήματός τινος Σ καλεῖται *προβολὴ* τοῦ Σ.

Σχ. 203

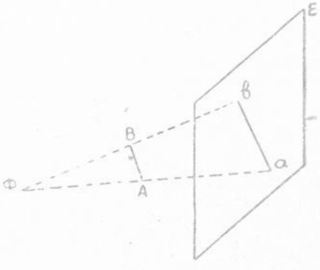
Ἡ προβολὴ εὐθείας εἶνε εὐθεῖα, αἱ δὲ προβολαὶ εὐθειῶν παραλλήλων εἶνε παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου (ἐδ.126β'). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶνε ἓν σημεῖον.

177. Προοπτικὴ ἢ κεντρικὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Ε (σχ.204) καλεῖται τὸ σημεῖον α καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα, ἡ ἐκ τινος σταθεροῦ κέντρου Ο, ἐκτὸς τοῦ Ε κειμένου, ἀγομένη πρὸς τὸ Α συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον.

Προοπτικὴ προβολὴ εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν π. χ. ἐκ τοῦ σημείου Ο διὰ μέσου τοῦ ὑελοπαραθύρου Ε (σχ. 201) βλέπωμεν ῥάβδον ΑΒ, τὸ σημεῖον Ο καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ προσδιορίζουσι τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ (ἐδ. 123) ὅπερ τέμνει τὸ τῆς ὑάλου Ε κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (ἐδ.15), ἥτις καλεῖται *προοπτικὴ προβολὴ τῆς ΑΒ*. Καθ' ὅμοιον τρόπον,



Σχ, 204



Σχ, 205

ἐὰν εὕρωμεν τὰς προβολὰς πασῶν τῶν γραμμῶν εἰς ἃς περατοῦται ἡ ἐπιφάνεια σώματος, λαμβάνομεν τὴν προοπτικὴν προβολὴν αὐτοῦ.

Σκιά. Ἐὰν μεταξὺ φωτεινοῦ τινος σημείου Ο καὶ ἐπιπέδου Ε (ἀδιαφανοῦς πετάσματος) παρεντεθῇ ῥάβδος ΑΒ (σχ. 205) τὸ σημεῖον Ο καὶ ἡ ΑΒ προσδιορίζουσι τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ, ὅπερ τέμνει τὸ Ε κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ.

Ἡ αβ δὲν θὰ φωτίζηται ἀμέσως ἐκ τοῦ Ο, θὰ φαίνηται σκοτεινὴ ἐπὶ τοῦ πετάσματος Ε, διότι ἡ ῥάβδος ΑΒ ἐμποδίζει τὰς φωτεινὰς ἀκτῖνας τὰς ἐκ τοῦ Ο ἐκπεμπομένας. Ἡ αβ εἶνε ἡ σκιὰ τῆς ΑΒ ἐπὶ τοῦ Ε. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν σκιὰν ἑνὸς σώματος.

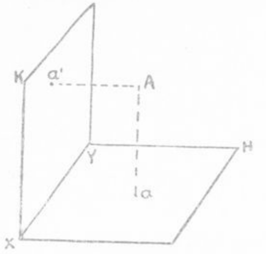
Σημ. α΄) Τὸ μέγα ἀστρονομικὸν φαινόμενον τῶν ἐκλείψεων ἐξηγεῖται διὰ τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας τῶν σκιῶν, ἐπίσης τὸ τῆς ἀνίσου διαρκείας τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν.

β΄) Ἐὰν θέλωμεν νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ τοίχου ἢ ὀθόνης τὸ σκιαγράφημα ἀντικειμένου, θέτομεν ἔμπροσθεν αὐτοῦ φλόγα κηρίου τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μέρος σκεπάζομεν διὰ μικροῦ διαφράγματος καὶ ἀκολουθοῦμεν διὰ γραφῖδος τὴν περίμετρον τῆς σκιᾶς.

178. Παράστασις στερεοῦ. Θέλοντες νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἰδιότητας ἐπιπέδου τινος σχήματος (σχ. 123) καὶ νὰ μετρήσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ χάρτου σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ ἐξεταζόμενον ἢ τοὐλάχιστον ὅμοιον (ἐδ 87,89). Εἶνε εὐνόητον ὅτι καὶ τὰ ἁπλούστερα τῶν στερεῶν (ἐδ. 1 ἕως 7) δὲν δύνανται νὰ ἀπεικονισθῶσιν ἀκριβῶς καθ' ὅλας αὐτῶν τὰς διαστάσεις δι' ἑνὸς μόνου σχήματος. Π. χ. αἱ ἴσαι ἀκτῖνες ΚΙ, ΚΘ, ΚΑ τῆς σφαίρας (σχ 184) παρίστανται ὑπὸ εὐθειῶν ἀνίσων, ἐπίσης τὸ σχ. 199 τῆς πυραμίδος μεταμορφώνει αὐτήν, διότι δὲν δίδει τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος τῆς βάσεως, τῶν γωνιῶν, κλπ.

Ὁ τεχνίτης προκειμένου νὰ κατασκευάσῃ ἀντικείμενόν τι (κλειδίον, λέβητα, καπνοδόχον...,) ἐκτελεῖ πρότερον τὸ σχέδιον δι' οὗ θὰ γνωρίσῃ ἀκριβῶς τὸ σχῆμα καὶ τὰς διαστάσεις πάντων τῶν στοιχείων τοῦ ἀντικειμένου. Ἡ κατασκευὴ τοῦ σχεδίου στηρίζεται ἐπὶ τῆς *παραστατικῆς Γεωμετρίας*, ἥτις ἐξετάζει πᾶν ἐν τῷ χώρῳ σχῆμα διὰ τῶν προβολῶν αὐτοῦ ἐφ' ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐπιπέδων τεμνομένων.

179. Μέθοδος τῶν προβολῶν, καθορισμὸς τῆς θέσεως σημείου. Λαμβάνομεν ἐπίπεδόν τι ὁριζόντιον Η καὶ ἕτερον κατακόρυφον Κ (ἐδ. 158) Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα εἶνε κάθετα μεταξύ των (ἐδ. 126) τέμνονται δὲ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ (σχ. 206) ἥτις καλεῖται ἄξων. Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὸ τετράδιον ἐπὶ τραπέζης καὶ ὑψώσωμεν ἓν φύλλον αὐτοῦ οὕτως ὥστε νὰ μὴ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὸ ἓν μέρος οὔτε πρὸς τὸ ἕτερον, τὸ μὲν ἐπὶ τῆς τραπέζης ἀνοικτὸν τετράδιον παρέχει ἡμῖν ἰδέαν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑψωθὲν φύλλον τοῦ κατακορύφου. Ἐπίσης ἐν τῇ αἰθούσῃ, τὸ μὲν κατακόρυφον ἐπίπεδον εἶνε ὁ ἔμπροσθεν ἡμῶν τοῖχος, τὸ δὲ ὁριζόντιον εἶνε τὸ πάτωμα (ἐδ. 126 σχ. 151).

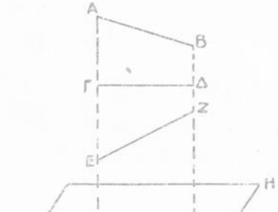


Σχ, 206

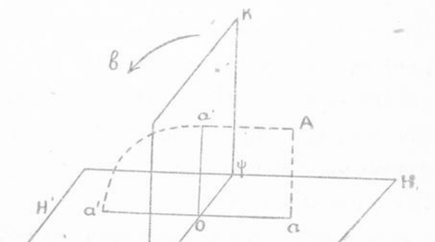
Ἡ μὲν ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον H, καλεῖται *ὁριζοντία προβολή*, ἡ δὲ ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον K καλεῖται *κατακόρυφος προβολή*, π. χ. (σχ. 206) τοῦ ἐν τῷ χώρῳ σημείου A, τὸ μὲν α εἶνε ἡ ὁριζοντία προβολὴ τὸ δὲ α΄ ἡ κατακόρυφος.

Δεδομένου τοῦ σημείου A εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν προβολὴν αὐτοῦ α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον H. Ἐκ τῆς προβολῆς ὅμως α δὲν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τοῦ σημείου, διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς κατακορύφου Aα ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου H.

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος Aα καὶ πρὸς ποῖον μέρος τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου κεῖται τὸ σημεῖον A, τότε εἶνε ὡρισμένη ἡ θέσις αὐτοῦ. Ἢ ἐὰν δοθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ α καὶ α΄ τοῦ σημείου A, δύναται ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον, πρὸς τοῦτο ἄγομεν



Σχ, 207



Σχ, 208

ἐκ τοῦ α κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον H, ἐκ δὲ τοῦ α΄ κάθετον ἐπὶ τὸ K. ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εὑρίσκηται ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων, θὰ εἶνε τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἐκ μιᾶς μόνον προβολῆς εὐθείας τινὸς δὲν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις αὐτῆς, διότι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ κείμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων Αα, Ββ, ἔχουσι προβολὴν τὴν αβ (σχ. 207). Καθὼς τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα ὁρίζονται τελείως ἐκ τῶν δύο προβολῶν αὐτῶν, οὕτω καὶ πᾶν σῶμα ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του

180. Κατάκλισις τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Κ στραφῇ περὶ τὴν ΧΨ (σχ. 208) κατὰ τὸ βέλος β ὑπὸ γωνίαν 90^0 θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς παρεκβολῆς Η′ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, παρασύρον μεθ᾽ ἑαυτοῦ τὸ σημεῖον α′, ὅπερ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς οα καθέτου ἐπὶ τὴν ΧΨ. Ὥστε μετὰ τὴν κατάκλισιν, *αἱ δύο προβολαὶ α καὶ α′ τοῦ σημείου Α εὑρίσκονται πάντοτε ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὴν ΧΨ.* **Εὐκόλως** βλέπομεν ὅτι *τὸ μῆκος Οα παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐν τῷ χώρῳ σημείου Α ἀπὸ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὸ δὲ μῆκος Οα′ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.*

Σχ. 209

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΗΗ′ στραφῇ κατὰ 90^0 οὕτως ὥστε νὰ λάβῃ τὴν ἐν τῷ σχήματι 209 θέσιν, τὸ μὲν ἄνωθεν τοῦ ἄξονος ΧΨ, μέρος παριστᾷ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον τὸ δὲ κάτωθεν τὸ ὁριζόντιον (μετὰ τὴν κατάκλισιν).

Ἀσκήσεις 1) Σχεδίασον διὰ τῶν δύο προβολῶν αὐτῶν τὰ ἑξῆς σημεῖα(1) μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ Κ

τὸ ἀπέχον 2 δ. ἀπὸ τοῦ Κ. καὶ 5 ἀπὸ τοῦ Η

» 3 » » » » » 3 — — Η

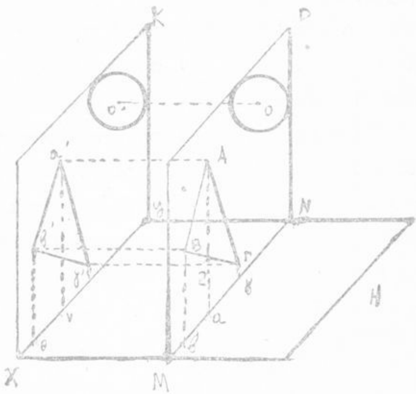
τὸ κείμενον ἐπὶ τοῦ Η καὶ ἀπέχον 3 δ. ἀπὸ τοῦ Κ (ἔμπροσθεν)

τὸ κείμενον ἐπὶ τοῦ Κ καὶ ἀπέχον 4 δ. ἀπὸ τοῦ Η (ἄνωθεν).

2) ὑπολόγισον τὴν ἀπόστασιν ἑκάστου τῶν προηγουμένων σημείων ἀπὸ τοῦ ἄξονος ΧΨ (ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγ.,).

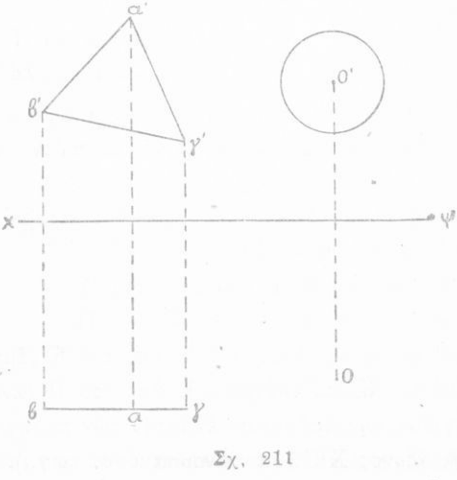
(1) κείμενα ἐν τῇ α′ διέδρῳ γωνίᾳ (σχ. 208)

181. Προβολαὶ ἐπιπέδων σχημάτων. Ὅταν σχῆμά τι, τρίγωνον ΑΒΓ, κύκλος Ο (σχ. 210) κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ πρὸς τὸ κατακόρυφον (ἢ πρὸς τὸ ὁριζόντιον) προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ σχῆμα ἴσον. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ κύκλος Ο ὡς κείμενα ἐν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ πρὸς τὸ Κ, προβάλλονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Η κατὰ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Η. Τὸ σχ. 211 παριστᾷ τὰ σχέδια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ κύκλου



Σχ. 210

Ο μετὰ τὴν κατάκλισιν. ὅταν τὸ σχῆμα δὲν κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ πρὸς τὸ Κ ἢ τὸ Η, τότε ἡ προβολή του διαφέρει αὐτοῦ κατὰ τὴν μορφὴν καὶ τὸ μέγεθος (εἶνε πάντοτε μικροτέρα)

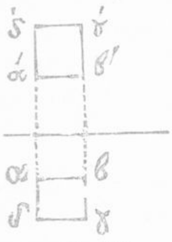


Σχ. 211

182 Ἐφαρμογαί. Τὰ πλεῖστα τῶν σωμάτων κατὰ τὴν σχεδίασιν αὐτῶν ὑποτίθενται στηριζόμενα ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Η ἢ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς αὐτὸ ἢ πρὸς τὸ Κ. Δυνάμεθα ἄρα, διὰ τῶν προηγουμένων γνώσεων νὰ παραστήσωμεν τ' ἁπλούστερα γεωμετρικὰ σώματα διὰ τῶν δύο προβολῶν αὐτῶν.

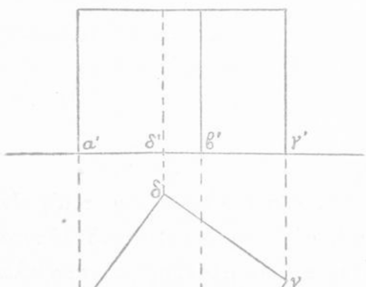
α΄) **Παράστασις κύβου.** Τὸ σχ. 212 παριστᾷ τὰς προβολὰς κύβου ἔχοντος μίαν ἕδραν παράλληλον τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ Η καὶ ἑτέραν παράλληλον τῷ Κ. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ δύο προβολαί του εἶνε τετράγωνα ἴσα πρὸς μίαν τῶν ἑδρῶν.

Τὸ σχ. 213 παριστᾷ τὰς προβολὰς κύβου ἔχοντος μίαν ἕδραν ἐπὶ τοῦ Η, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶνε πλάγιαι πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον Κ.

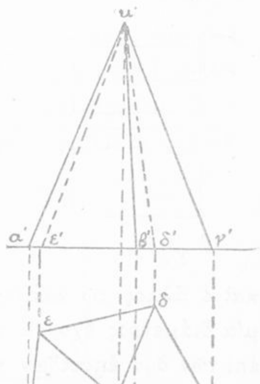


Σχ. 212

β΄) *Παράστασις πυραμίδος κανονικῆς πενταγωνικῆς ἐχούσης τὴν βάσιν ἐπὶ τοῦ Η* (σχ. 214). Κατασκευάζομεν κανονικὸν πεντάγωνον αβγδε (ὁριζ. προ.) τὸ κέντρον αὐτοῦ κ εἶνε ἡ προβολὴ τῆς



Σχ. 213



Σχ. 214

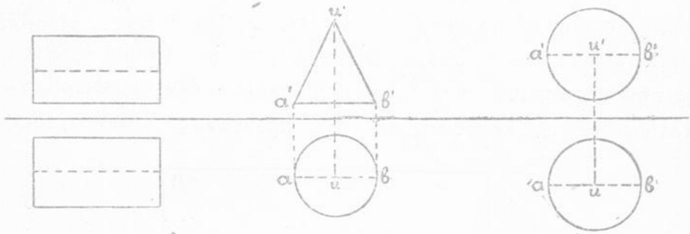
κορυφῆς τῆς πυραμίδος, ἄρα αἱ εὐθεῖαι κα, κβ, κγ, κδ, κε εἶνε αἱ ὁριζόντιαι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν. Τὸ σημεῖον κ΄ εἶνε γνωστὸν διότι θὰ δοθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. Αἱ κατακόρυφοι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν εἶνε ἡ κ΄α΄, κ΄β΄...

γ΄) *Παράστασις κυλίνδρου καὶ κώνου, ἐχόντων βάσιν παράλληλον τῷ Η.* Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κυλίνδρου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως, ἡ δὲ κατακόρυφος ὀρθογώνιον ἔχον διαστάσεις τὴν διάμετρον τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου (σχ. 215). Ἐὰν ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου εἶνε παράλληλος πρός τε τὸ ὁριζόντιον καὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, τότε ὁ κύλινδρος προβάλλεται κατὰ δύο ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα διαστάσεις τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως (σχ. 216).

Σχ. 215

Ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ κώνου εἶνε ὁ κύκλος τῆς βάσεως (σχ. 217) ἡ δὲ κατακόρυφος τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον βάσιν α΄ β΄ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου καὶ ὕψος τὸ τοῦ κώνου καὶ πλευρὰς κ΄ α΄, κ΄ β΄, ἴσας τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου.

δ΄) *Παράστασις σφαίρας.* Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ θέσις σφαίρας δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν δύο μεγίστους κύκλους καθέτους πρὸς ἀλλήλους, ὧν ὁ εἷς νὰ εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ

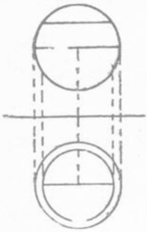


Σχ. 216 Σχ. 217 Σχ. 218

καὶ ὁ ἄλλος τῷ κατακορύφῳ. Οἱ δύο οὗτοι κύκλοι ὧν τομὴ εἶνε μία διάμετρος ἔχουσα προβολὰς αβ, α΄β΄ (σχ. 218) προβάλλονται ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος· αἱ προβολαὶ τούτων εἶνε προβολαὶ τῆς σφαίρας. Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶνε κύκλος (ἐδ. 149) ὅστις ἐὰν εἶνε παράλληλος τῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, προβάλλεται ἐν αὐτῷ μὲν κατὰ κύκλον ἴσον, ἐν δὲ τῷ κατακορύφῳ κατ᾽ εὐθεῖαν α΄β΄ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς.

Σημ. Ὡς ἐφαρμογὴν τῶν προβολῶν σφαίρας ἀναφέρομεν τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτας. Νοήσωμεν ὅτι οἱ δύο κάθετοι κύκλοι (σχ. 218) εἶνε ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς καὶ ὁ ἰσημερινὸς τῆς γῆς (ἐδ. 157).

Τὰ διάφορα σημεῖα τῆς γηΐνης ἐπιφανείας δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν προβολῶν των ἐπὶ τοῦ ἑτέρου



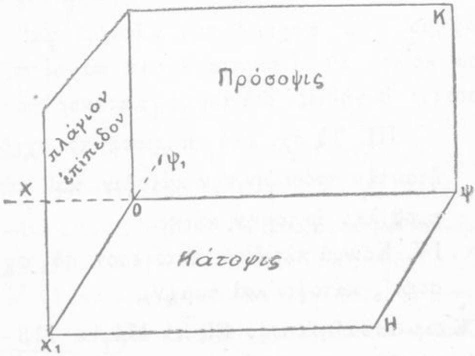
Σχ. 219

τῶν κύκλων τούτων, καὶ ἂν μὲν προβληθῶσιν ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ, ὁρίζουσι δύο σχήματα παριστῶντα τὸ Ἀνατολικὸν καὶ Δυτικὸν ἡμισφαίριον.

Σημειωτέον ὅτι ὁ γεωγραφικὸς χάρτης δὲν δίδει μετ' ἀκριβείας τὸ σχῆμα τῶν μερῶν τὰ ὁποῖα παριστᾷ, μήτε τὴν σχετικὴν θέσιν αὐτῶν, διότι ἡ γηΐνη ἐπιφάνεια, σφαιρικὴ σχεδὸν οὖσα δὲν ἀναπτύσσεται ἐπὶ ἐπιπέδου (ἐδ. 155).

183. Πλάγιαι προβολαί. Ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς (μηχανικῇ, λεπτουργικῇ, οἰκοδομικῇ κτλπ.) διὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ στερεοῦ ἐκτελοῦσι πρῶτον μὲν τὴν ὁριζοντίαν προβολὴν αὐτοῦ ἥτις λέγεται *κάτοψις* (plan) εἶτα δὲ τὴν κατακόρυφον προβολὴν ἥτις λέγεται *πρόσοψις* (élévaton).

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ μηχαναί, αἱ οἰκίαι, τὰ πλοῖα κτλ. δὲν εἶνε ἁπλᾶ γεωμετρικὰ σώματα ἀλλ' ἀποτελοῦνται μερῶν ἐχόντων ἐσωτερικὴν κατασκευὴν καὶ διάταξιν δύσκολον, δὲν προσδιορίζονται τελείως διὰ τῆς κατόψεως καὶ τῆς προσόψεως. Ὅθεν σχεδιά-



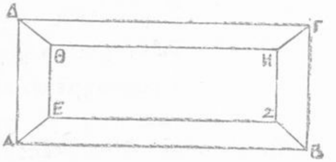
Σχ. 220

ζουσι καὶ τρίτην προβολὴν τοῦ στερεοῦ ἐπὶ ἑτέρου κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἐκ τούτων τὸ μᾶλλον ἐν χρήσει εἶνε τὸ λεγόμενον *πλάγιον* (plan de profil) ὅπερ ἄγεται κάθετον ἐπὶ τὸ Κ καὶ ἐπὶ τὸ Η ἄρα κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΨ (σχ 220). Ἡ τομὴ τοῦ πλαγίου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ Η δηλ. ὁ νέος ἄξων X_1 $Ψ_1$ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ.

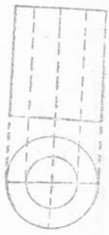
Αἱ ἐπὶ πλαγίου ἐπιπέδου προβολαὶ τῶν στερεῶν λέγονται καὶ αὐταὶ *πλάγιαι*.

Ἐν τινι αἰθούσῃ κάτοψις τοῦ στερεοῦ εἶνε ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ πατώματος, ἡ πρόσοψις εἶνε ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἔμπροσθεν ἡμῶν τοίχου, πλαγία δὲ προβολὴ ἡ γενομένη ἐφ' ἑνὸς τῶν πλαγίων τοίχων (δεξιὰ ἢ ἀριστερά).

184. *Παραδείγματα.* Τὸ σχῆμα 221 παριστᾷ τὴν κάτοψιν



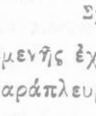
Σχ. 221



Σχ. 222

δεξαμενῆς ἐχούσης πυθμένα ΑΒΓΔ καὶ στόμιον ΕΖΗΘ ὀρθογώνιο· αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶνε τραπέζια ἰσοσκελῆ ἀνὰ δύο ἴσα.

II. Τὸ σχῆμα 222 παριστᾷ τὴν κάτοψιν καὶ τὴν πρόσοψιν κυλίνδρου κοίλου, οὗ αἱ παρειαὶ ἔχουσι πάχος τι. Ἡ πρόσοψις ἀντικαθίσταται συνήθως διὰ τομῆς κατακορύφου (σχ 223).



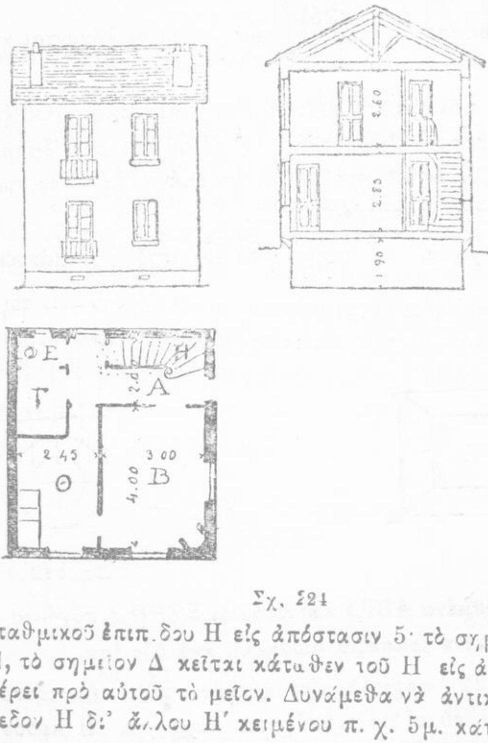
Σχ. 223

III. Τὸ σχ. 224 παριστᾷ τὸ σχέδιον οἰκίας, ἤτοι τὴν πρόσοψιν, τὴν κάτοψιν καὶ τὴν πλαγίαν προβολὴν ἢ τομὴν αὐτῆς.

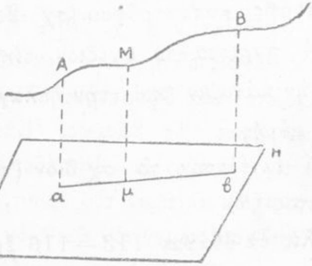
IV. Κοινοῦ κλειδοῦ ἐκτέλεσον τὸ σχέδιον (πρόσοψιν, κάτοψιν καὶ τομήν).

185. Χωροστάθμησις. Εἰς τὰ ἐδάφια 113—116 ἐμάθαμεν τὸν τρόπον τῆς καταμετρήσεως γηπέδου, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι τοῦτο κεῖται εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

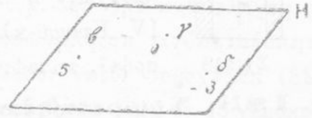
Ἐὰν τὸ γήπεδον δὲν εἶνε ὁριζόντιον, δύο σημεῖα αὐτοῦ Α καὶ Β (σχ. 225) δὲν ἀπέχουν ἴσον ἐν γένει ἀπό τινος ὁριζοντίου προβολικοῦ ἐπιπέδου Η. Ἐὰν εἶνε Αα = 28μ. καὶ Ββ = 40μ. οἱ ἀριθμοὶ 28 καὶ 40 λέγονται ὑψοδεῖκται τῶν σημείων Α καὶ Β. Διὰ τὴν πιστὴν ἀπεικόνισιν γηπέδου ὑπὸ κλίμακα πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τοὺς ὑψοδείκτας τῶν κυριωτέρων σημείων αὐτοῦ. π. χ. ἐκ τοῦ σχ. 226 βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον Β τοῦ ἐδάφους κεῖται ἄνωθεν τοῦ χωροσταθμικοῦ ἐπιπέδου Η εἰς ἀπόστασιν 5· τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τοῦ Η, τὸ σημεῖον Δ κεῖται κάτωθεν τοῦ Η εἰς ἀπόστασιν 3 διότι ὁ 3 φέρει πρὸ αὐτοῦ τὸ μεῖον. Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἐπίπεδον Η δι' ἄλλου Η' κειμένου π. χ. 5μ. κάτωθεν τοῦ Η, ἀρκεῖ ν'



Σχ. 224



Σχ. 225



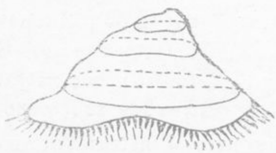
Σχ. 226

αὐξήσωμεν πάντας τοὺς ὑψοδείκτας κατὰ 5. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὑψοδείκτην χ τυχόντος σημείου Μ γνωρίζοντες τοὺς ὑψοδείκτας 28 καὶ 40 δύο σημείων Α καὶ Β πολὺ γειτονικῶν τοῦ Μ, ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{40-\chi}{\chi-28}=\frac{\mu\beta}{\mu\alpha}$ (σχ 225)

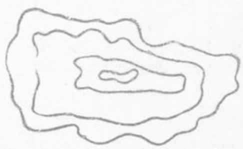
Ἡ κλίσις τοῦ γηπέδου μεταξὺ Α καὶ Β ὑποτίθεται ὁμαλή. Ἐὰν δὲ μβ=μα, τότε $\chi=(40+28):2=34$.

Ἡ διαφορὰ ὕψους δύο σημείων Α καὶ Β εὑρίσκεται διὰ τῆς χωροστάθμης τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις μανθάνεται ἐν τῇ πράξει.

186. Παράστασις ἐπὶ χάρτου τοῦ σχήματος λόφου, ὄρους. Ἐὰν εὕρωμεν πάντα τὰ σημεῖα τοῦ γηπέδου τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν ὑψοδείκτην, συνδέσωμεν δὲ αὐτὰ συνεχῶς θὰ λάβωμεν καμπύλην τινα, ἥτις λέγεται *ὑψομετρική*· χρῆσιν τῶν τοιούτων καμπύλων ποιοῦσι διὰ τὴν ἀπεικόνισιν λόφων ὀρέων,..... Νοήσωμεν ὁμοίωμα ὄρους ἐξ ἀργίλλου ἐν δοχείῳ πλήρει ὕδατος, διά τινος στρόφιγγος ἀφίνομεν νὰ ἐκρεύσῃ ὀλίγον ὕδωρ μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ Κ τοῦ ὄρους (σχ. 227) ἔλθῃ εἰς ὕψος τι ὑπὲρ τὴν ἐπιφά-



Σχ. 227



Σχ. 228

νειαν τοῦ ὕδατος π. χ. 5μ. Ἡ τομὴ τοῦ ὄρους ὑπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ ὕδατος εἶνε ὑψομετρικὴ καμπύλη, παριστῶσα τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἴσον ὑψοδείκτην π. χ. 20μ. Ἐπαναλαμβανομένης τῆς ῥοῆς τοῦ ὕδατος μέχρις οὗ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ κατέλθῃ κατ' ἴσον ὕψος 5μ. σχηματίζεται νέα ὑψομετρικὴ καμπύλη μεγαλειτέρα τῆς πρώτης, κ. ο. κ. μέχρι τῆς βάσεως. Ἐὰν αἱ καμπύλαι αὗται προβληθῶσιν ἐπί τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου (σχ. 228) παρέχουσιν ἰδέαν τοῦ σχήματος τῶν κλιτύων τοῦ ὄρους, εὑρίσκομεν δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν καμπύλων ἐπὶ 5. Ἐὰν τὸ ὄρος εἶνε κωνικὸν ἢ ἡμισφαιρικόν, αἱ καμπύλαι προβαλλόμεναι θὰ εἶνε περιφέρειαι ὁμόκεντροι.

ΤΕΛΟΣ

5-10X

ω1