Κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε΄ & ΣΤ΄ Τάξεως

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟΝ ΕΤΟΣ 1967–1968

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ
ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 14 - ΑΘΗΝΑΙ

30

ΚΩΝΣΤ. Σ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΑ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τοὺς μαθητὰς Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου

Ε Γ Κ Ε Κ Ρ Ι Μ Ε Ν Η
ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟΝ ΕΤΟΣ 1967—1968

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ
ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 14 - ΑΘΗΝΑΙ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Γεν. Δ/νσις Γεν. Ἐκπαιδεύσεως

Δ/νσις Διδακτικῶν Βιβλίων

Ἀριθ. πρωτ. 136.323

Ἐν Ἀθήναις τῇ 27/9/67

Πρός

Τοὺς κ. κ. Γενικοὺς Ἐπιθεωρητὰς καὶ Ἐπιθεωρητὰς τῶν δημοτικῶν σχολείων τοῦ Κράτους, Διευθυντὰς τῶν Προτύπων δημοτικῶν σχολείων τῶν Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν καὶ τῶν Πειραματικῶν σχολείων τῶν Πανεπιστημίων Ἀθηνῶν-Θεσσαλονίκης καὶ Διευθυντὰς τῶν δημοτικῶν σχολείων τοῦ Κράτους. (Διὰ τῶν οἰκείων Ἐπιθεωρητῶν τῶν δημοτικῶν σχολείων).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν 1) τὰς κειμένας διατάξεις, 2) τὰς εἰς διδακτικὰ βιβλία ἀνάγκας τῶν μαθητῶν τῆς Στοιχειώδους Ἐκπαιδεύσεως, 3) τὰς προτάσεις τῆς διὰ τῶν ὑπ' ἀριθ. 85475/20-6-67 ἀποφάσεως ἡμῶν συγκροτηθεισῶν Ἐπιτροπῶν, πρὸς ὑπόδειξιν τῶν καταλληλοτέρων βοηθητικῶν βιβλίων διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων τοῦ δημοτικοῦ σχολείου

Ἀποφασίζομεν

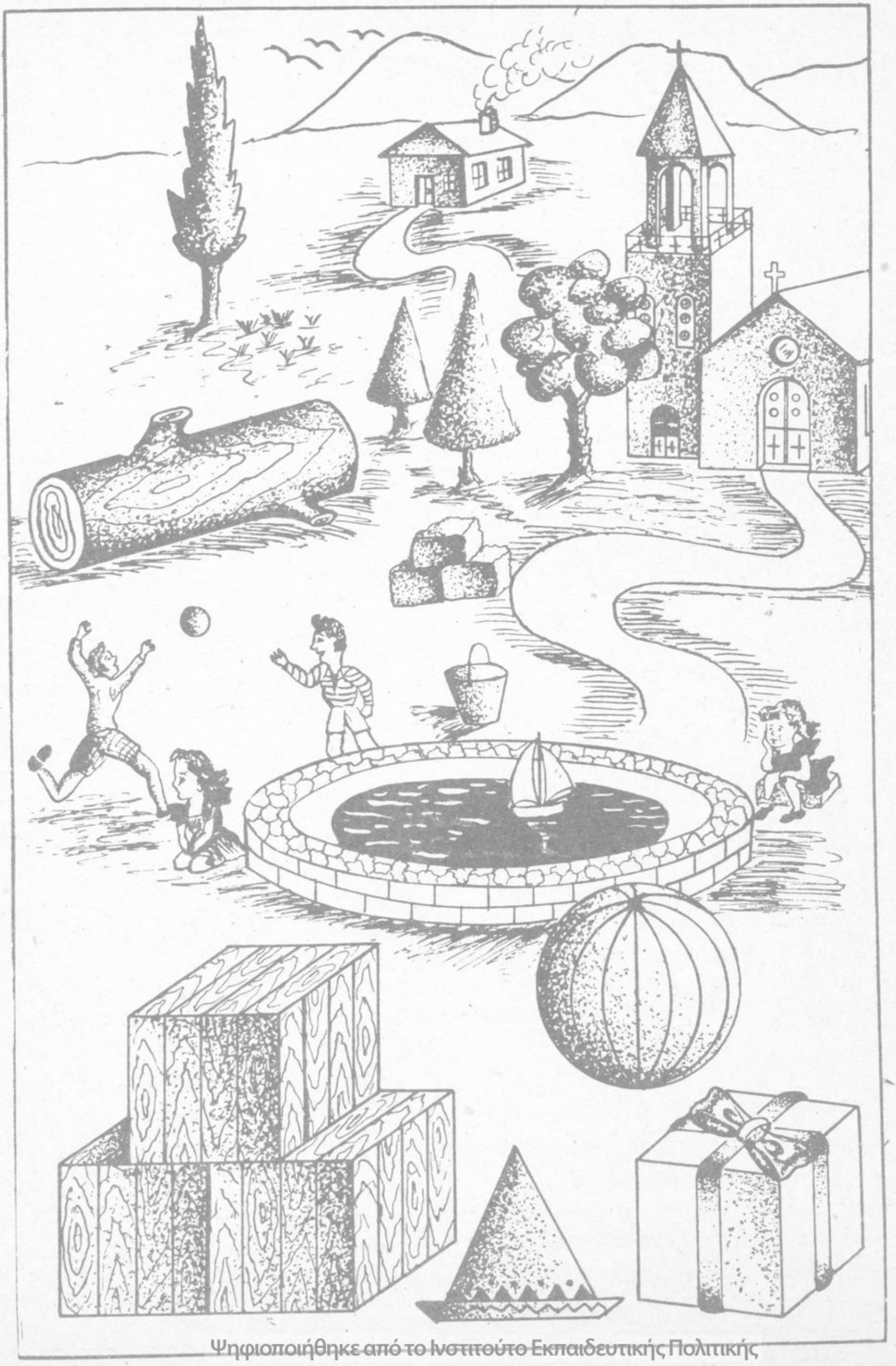
ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὴν ὑπ' ἀριθ. 103.901/21-7-67 ἡμετέραν ἀπόφασιν καὶ ἐπιτρέπομεν τὴν χρησιμοποίησιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων Στοιχειώδους Ἐκπαιδεύσεως, διὰ μόνον τὸ σχολικὸν ἔτος 1967 - 1968 καὶ τῶν κάτωθι βοηθητικῶν βιβλίων:

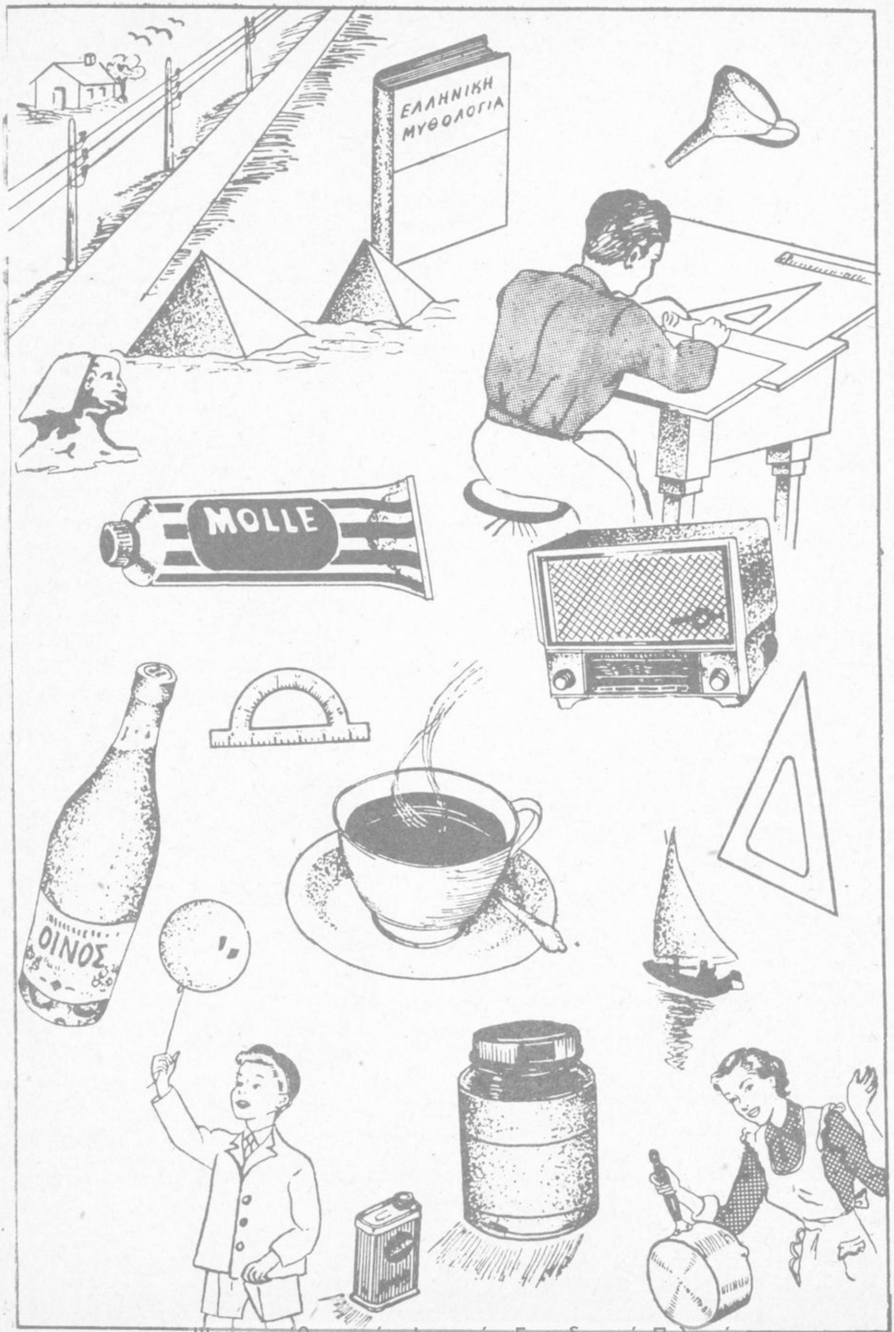
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ : *Κων/νου Σ. Κωνσταντᾶ*

Ὁ Ὑπουργὸς

Κ. ΚΑΛΑΜΠΟΚΙΑΣ

Ἁγίου Κωνσταντίνου 14 — Τ.Τ. 101 — Τηλ. 536.553 — ΑΘΗΝΑΙ




ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΥΘΟΛΟΓΙΑ
MOLLE
ΟΙΝΟΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

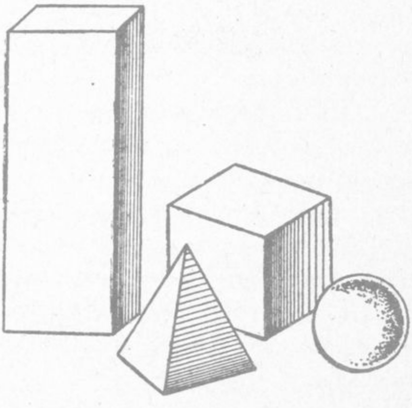
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σώματα.

(Πρὸ τῶν μαθητῶν ἔχομεν διάφορα στερεά: Κύβον, παραλληλεπίπεδον, πυραμίδα, κῶνον, κύλινδρον, σφαῖραν. Ἐξ αὐτῶν οἱ μαθηταὶ ὁδηγούμενοι καταλλήλως, κάμνουν τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:)

1.—Παρατηρήσατε τὰ πράγματα αὐτά: εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ διαστήματος τὸ ὁποῖον ἁπλώνεται γύρω μας. Καταλαμβάνουν ἕνα χῶρον αὐτοῦ, ἤτοι ἓν μέρος του.

Εἶναι λοιπὸν σώματα. Ὁ χῶρος δέ, τὸν ὁποῖον ἕκαστον σῶμα καταλαμβάνει ἐντὸς τοῦ διαστήματος, λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος.



Στερεὰ σώματα

Ὁ ὄγκος αὐτῶν παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ ἄνευ τινὸς ἐνεργείας· ἔχουν δηλαδὴ ὡρισμένον ὄγκον.

2.—Παρατηρήσατε τὴν ἐξωτερικήν των μορφήν. Ἔχουν διάφορον ἐξωτερικὴν μορφήν, ἡ ὁποία λέγεται σχῆμα αὐτῶν. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τῶν σωμάτων αὐτῶν δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ ἄνευ ἐνεργείας τινός. Ἔχουν λοιπὸν τὰ σώματα αὐτὰ καὶ σχῆμα ὡρισμένον.

3.—Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα. Εἶναι ἑπομένως ***σώματα στερεά***.

4.—Ἀπὸ τὸ καθένα φαίνονται μόνον τὰ ἐξωτερικά του ἄκρα (δηλαδὴ τὰ ἐξωτερικά του πέρατα), τὰ ὁποῖα ὅλα μαζὶ κάμνουν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων.

5.—Παρατηρήσατε τώρα τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ καθενὸς ἐξ αὐτῶν ἢ ἑνὸς μέρους αὐτῆς. Μᾶς δίδουν ταῦτα ἓν σχῆμα τὸ ὁποῖον λέγεται **γραμμή.**

6.—Τὸ ἄκρον μιᾶς γραμμῆς λέγεται **σημεῖον.** Τὰ σημεῖα τὰ σημειώνομεν μὲ μίαν στιγμὴν καὶ τὰ ὀνομάζομεν μὲ ἓν γράμμα (π.χ. τὸ σημεῖον Α΄ (·) τὸ σημεῖον Β΄ (·) κλπ.

7.—Καὶ ἡ γῆ εἶναι σῶμα στερεὸν πολὺ μεγάλο. Πῶς νὰ μετρῶμε τὰς γραμμάς της, τὴν ἐπιφάνειάν της, τὸν ὄγκον της μᾶς διδάσκει **ἡ γεωμετρία.**

᾿Αλλ᾿ ἡ γεωμετρία μᾶς μαθαίνει νὰ μετρῶμεν καὶ τὰς γραμμάς, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον καὶ ἄλλων στερεῶν σωμάτων ὅπως, αὐτὰ τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν.

῞Εν ἀπὸ τὰ σώματα αὐτὰ εἶναι καὶ ὁ κύβος (σχ. 10).

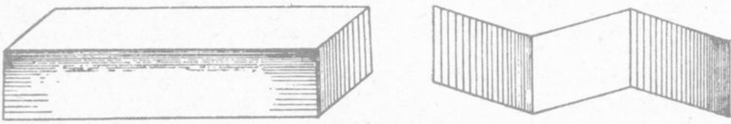
2. ᾿Επιφάνεια τῶν σωμάτων

1.—***᾿Επιφάνεια ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν του ἄκρων.***

2.—᾿Επιθέτομεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων, ποὺ παρατηροῦμεν, τὸν κανόνα. Βλέπομεν, ὅτι εἰς ἄλλα ἐφάπτονται εἰς τὴν ἐπιφάνειάν των ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κανόνος, ὅπως καὶ ἂν τὸν ἐπιθέσωμεν, εἰς ἄλλα δὲ ἓν μόνον σημεῖον αὐτοῦ.

῎Εχομεν λοιπὸν 4 εἴδη ἐπιφανειῶν : Τὴν ἐπίπεδον, τὴν τεθλασμένην, τὴν κυρτὴν καὶ τὴν μικτήν.

α) ***᾿Επίπεδος ἐπιφάνεια (ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον) λέγεται κάθε ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ κανὼν τιθέμενος ἐφάπτεται δι᾿ ὅλων τῶν σημείων του.*** (σχ. 1).



Σχ. 1

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὑαλοπινάκων, τῶν ὁμαλῶν τοίχων, τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος, κ. ἄ.

β) ***Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας ἐπιπέδους ἐπιφανείας, χωρὶς ν᾿ ἀποτελοῦν ὅμως αὗται μίαν ἐπίπεδον.*** (σχ. 1).

Τοιαύτην ἐπιφάνειαν ἔχουν οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου ἀνὰ 2 ἢ 3 ἢ καὶ ὅλοι μαζί. Ἐπίσης αἱ μαρμάριναι κλίμακες, τὰ κυτία κλπ.

γ) **Κυρτὴ ἢ καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν εἶναι** (σχ. 2)

Κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἔχουν ἡ σφαῖρα, τὸ τόπι, οἱ βόλοι, οἱ καρποί, τὰ αὐγὰ κλπ.

Σχ. 2

Σχ. 3

δ) ***Μικτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ κυρτήν.*** (σχ. 3).

Τοιαύτην ἔχουν διάφορα δοχεῖα, οἱ κύλινδροι, τὰ βαρέλια, τὰ κυτία τῶν κονσερβῶν κ. ἄ.

Ἀσκήσεις :

Δείξατε εἰς τὰ σώματα, ποὺ παρατηροῦμεν :

1) Μίαν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον.
2) » » τεθλασμένην·
3) » » κυρτήν.
4) » » μικτήν.
5) Ὀνομάσατε σώματα μὲ ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον.
6) » » » » τεθλασμένην.
7) » » » » κυρτήν.
8) » » » » μικτήν.

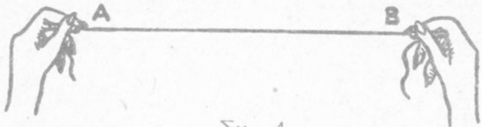
3. Γραμμαὶ

1.—***Γραμμὴ λέγεται τὸ σχῆμα***, τὸ ὁποῖον ***μᾶς δίνουν τὰ πέρατα μιᾶς ἐπιφανείας*** (ὅλα τὰ ἄκρα ἑνὸς φύλλου χάρτου).

2.—Τὰς γραμμὰς ὀνομάζομεν διὰ δύο ἢ καὶ περισσοτέρων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὰ ἄκρα των ἢ καὶ εἰς ἄλλα σημεῖα. (Ὅπως εἰς τὰ σχ. 4, 5, 6, 7).

3.—Παρατηροῦντες τὰς γραμμάς, ποὺ σχηματίζουν τὰ πέρατα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωμάτων, βλέπομεν ὅτι ἔχομεν 4 εἴδη γραμμῶν: *τὴν εὐθεῖαν, τὴν τεθλασμένην, τὴν καμπύλην* καὶ *τὴν μικτήν.*

α) ***Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει ἕνα νῆμα καλῶς τεντωμένον*** (ἡ ΑΒ σχ. 4).



Σχ. 4

Εὐθεῖαν γραμμὴν μᾶς δίνει καὶ τὸ νῆμα τῆς στάθμης (σχ. 15) δηλαδὴ τὸ ὄργανον μὲ τὸ ὁποῖον οἱ κτίσται σταθμίζουν τοὺς τοίχους.

Σχ. 5

β) ***Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἢ περισσοτέρας εὐθείας γραμμάς, χωρὶς αὗται ν' ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν·*** (ἡ ΔΕΖ σχ. 5).

γ) ***Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος, εἶναι εὐθεῖα·*** (ἡ ΑΒ Σχ. 6).

Σχ. 6

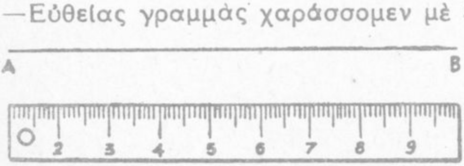
Σχ. 7

Καμπύλην γραμμὴν μᾶς δίνει καὶ ἓν νῆμα, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα του χαλαρωμένα.

δ) ***Μικτὴ γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖαν καὶ καμπύλην·*** ΑΒΓΔΕ (σχ. 7).

4. Χάραξις καὶ μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν

1.—Εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν μὲ ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται κανὼν ἢ χάρακας (σχ. 8).



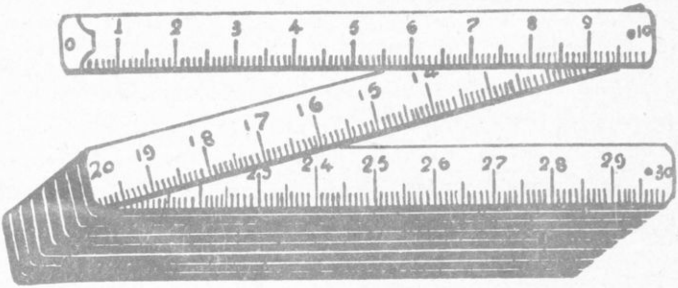
Σχ. 8

2.—Τὰς εὐθείας γραμμὰς μετροῦμεν:

α) Μὲ τὸ ***Μέτρον*** καὶ τὰ μέρη του· ἤτοι τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον καὶ τὴν γραμμὴν (σχ. 9).

Μὲ τὸ μέτρον μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι πολὺ μεγάλαι.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***παλάμαι***· λέγονται ὅμως καὶ δέκατα.



Τὸ Γαλλικὸν μέτρον

Σχ. 9

Ἡ παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***δάκτυλοι*** ἢ ***πόντοι***. Ἄρα αἱ 10 παλάμαι (δηλ. τὸ μέτρον) ἔχουν $10 \times 10 = 100$ δακτύλους ἢ πόντους, οἱ ὁποῖοι λέγονται καὶ ἑκατοστά.

Ὁ δάκτυλος πάλιν διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***γραμμαί***. Ὥστε οἱ 100 δάκτυλοι ἤτοι ὅλον τὸ μέτρον ἔχει $10 \times 100 = 1000$ γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ χιλιοστά.

Εἶναι λοιπόν :

α) 1 μ. = 10 παλ. ἢ 100 δάκτ. ἢ 1000 γραμμαί.
1 » = 10 » ἢ 100 »
1 » — 10 »

β) 1 παλ. = $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

1 δάκτ. = $\frac{1}{10}$ τῆς παλ. ἢ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου.

1 γραμ. = $\frac{1}{10}$ τοῦ δακ. ἢ $\frac{1}{100}$ τῆς παλ. ἢ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μ.

Μὲ τὰ μέρη τοῦ μέτρου ἤτοι μὲ τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον καὶ τὴν γραμμὴν μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι τοῦ μέτρου.

β) Μὲ τὸ *δεκάμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 μέτρα· δι' αὐτοῦ μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι 10—100 μέτρων ἢ καὶ μεγαλύτεραι.

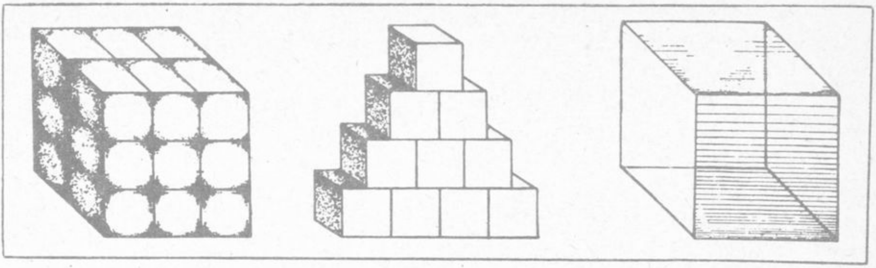
γ) Μὲ τὸ *ἑκατόμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 μέτρα· δι' αὐτοῦ μετροῦμεν εὐθείας γραμμὰς ἀπὸ 100—1000 μέτρων ἢ καὶ μεγαλυτέρας.

δ) Μὲ τὸ *χιλιόμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 μέτρα· δι' αὐτοῦ μετροῦμεν εὐθείας γραμμὰς ἀπὸ 1000 μέτρων καὶ ἄνω. (Π. χ. τὰς ἀποστάσεις).

Τὸ μέτρον μὲ τὰ μέρη του, τὸ δεκάμετρον, τὸ ἑκατόμετρον καὶ τὸ χιλιόμετρον, μὲ τὰ ὁποῖα μετροῦμεν τὸ μῆκος τῶν εὐθειῶν γραμμῶν, λέγονται μονάδες τοῦ μήκους.

Ἀσκήσεις:

1) Μετρήσατε τὰς πλευρὰς τοῦ πατώματος.
2) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν καὶ μετρήσατέ την.
3) Μετρήσατε μίαν πλευρὰν τῆς αὐλῆς μὲ τὸ μέτρον.
4) Ὑποθέσατε αὐτὸν τὸν σπάγγον ὡς ὕφασμα καὶ μετρήσατέ τον.
5) Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν 55 ἑκατοστῶν.
6) » » εὐθεῖαν 4 παλαμῶν.
7) » » εὐθεῖαν 750 γραμμῶν.
8) » » εὐθεῖαν γραμμήν, τεθλασμένην, καμπύλην καὶ μικτήν, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα. Ἔπειτα συγκρίνατε ἑκάστην τῶν ἄλλων γραμμῶν πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ εὕρετε: ποία εἶναι ἡ μικροτέρα μεταξὺ ὅλων τῶν εἰδῶν τῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα.
9) Κάμετε ἀπὸ τὴν λεπτὴν χαρτίνην ταινίαν ἓν μέτρον καὶ σημειώσατε τὰς ὑποδιαιρέσεις του.
10) Πόσας παλάμας ἔχει τὸ μέτρον; πόσους δακτύλους; καὶ πόσας γραμμάς;
11) Πόσους δακτύλους ἔχει ἡ παλάμη; Πόσας γραμμάς; εἰς



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΚΥΒΟΣ

1. Παρατηρήσεις

Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦντες κύβον κάμνουν τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις)

1. *Ὄγκος καὶ σχῆμα του*: Ἔχει ὄγκον καὶ σχῆμα ὡρισμένον. ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν.

2. ***Ἐπιφάνειά του.*** Ἔχει ἐπιφάνειαν τεθλασμένην· ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται ***ἕδραι*** τοῦ κύβου.

Εἶναι λοιπὸν ὁ κύβος σῶμα στερεόν, ἑξάεδρον.

3. ***Ἕδραι του.***

1) Ἡ κάτω ἕδρα του διὰ τῆς ὁποίας οὗτος στηρίζεται, λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως (ἡ ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

2) Αἱ δὲ 4 ἕδραι του, ποὺ ἑνώνονται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως καὶ τὴν ἀπέναντί της καὶ κάμνουν τὴν παράπλευρόν του ἐπιφάνειαν, λέγονται παράπλευροι ἕδραι. (Αἱ ἕδραι ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ, ΔΓΗΘΔ, ΓΒΖΗΓ σχ. 10)

3) Ἐάν, τοποθετοῦντες τὸν κύβον ἐπάνω εἰς χαρτόνιον ἰχνογραφήσωμεν ἀνὰ μίαν ὅλας τὰς ἕδρας του, τὰς κόψωμεν ἔπειτα καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ὅλαι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς· ὅλαι λοιπὸν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι **ἴσαι.**

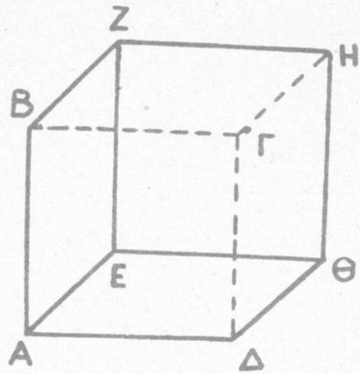
4) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν ὁσονδήποτε τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, καμμία δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της.

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, ποὺ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν, λέγονται παράλληλοι· (ἡ ΑΒΓΔΑ καὶ ΕΖΗΘΕ· ἡ ΑΒΖΕΑ καὶ ἡ ΔΓΗΘΔ· ἡ ΑΕΘΔΑ καὶ ἡ ΒΓΗΖΒ σχ. 10).

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει τὰς ἕδρας του (τὰ ἐπίπεδά του) παραλλήλους ἀνὰ δύο· δι' αὐτὸ λέγεται παραλληλεπίπεδον.

4. ***Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου.***

1) Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἑνώνονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν σχῆμα, ποὺ λέγεται γωνία ***δίεδρος***· ὅπως (ἡ ΓΒΖΕΑΔΓ σχ. 10) καὶ ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ (σχ. 11).



Σχ 10

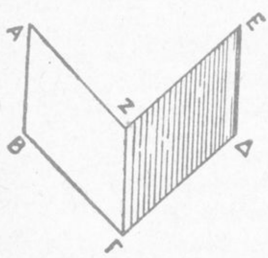
2). Ἑνώνονται ὅμως αἱ ἕδραι του καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ σχηματίζουν σχῆμα, ποὺ λέγεται γωνία ***τρίεδρος*** ἢ στερεὰ ὅπως ἡ Α ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς 3 ἕδρας ΑΒΓΔΑ, ΑΒΖΕΑ καὶ ΑΕΘΔΑ (σχ. 10).

3) Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἑνώνονται αἱ 3 ἕδραι κάθε τριέδρου γωνίας, λέγεται ***κορυφὴ*** αὐτῆς. (ὅπως τὸ Α σχ. 10).

4) Αἱ κορυφαὶ τῶν τριέδρων γωνιῶν λέγονται καὶ κορυφαὶ τοῦ κύβου. Εἶναι δὲ αὗται 8.

5. ***Ἀκμαὶ τοῦ κύβου.***

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἑνούμεναι ἀνὰ δύο, μᾶς δίδουν καὶ εὐθείας γραμμάς, ποὺ λέγονται ἀκμαὶ αὐτοῦ ὅπως ἡ ΑΒ, ἡ ΑΕ, ἡ ΑΔ κ.λ.π. (σχ. 10). Ἐὰν μετρήσωμεν αὐτὰς θὰ ἴδωμεν, ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 11

6. ***Σχῆμα τῶν ἑδρῶν.***

1) Ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου τελειώνει εἰς 4 εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραὶ τῆς ἕδρας· ὅπως ἡ ΑΒ, ἡ ΒΓ, ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ἕδρας τῆς βάσεως (σχ. 10). Εἶναι δὲ αὗται, ὅπως εἴπομεν, ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου ἐπίπεδον, εὐθύγραμμον, τετράπλευρον, ἰσόπλευρον.

2) Ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἕδρας τοῦ κύβου δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν

Εἶναι λοιπὸν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας παράλληλοι ἀνὰ δύο, ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της· ὡς ἡ ΑΒ καὶ ΔΓ, ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΑΔ (σχ. 10) Καὶ διὰ τοῦτο ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου λέγεται **παραλληλόγραμμον.**

3) Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον.

4) Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πλευρῶν τῆς ἕδρας τοῦ κύβου λέγεται περίμετρος αὐτῆς (δηλαδὴ τὸ ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ σχ. 10).

7. Ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου

1) Αἱ πλευραὶ κάθε ἕδρας τοῦ κύβου ἑνώνονται ἀνὰ 2 διὰ τῶν ἄκρων των καὶ κάνουν σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται *γωνία ἐπίπεδος*. (Ὅπως ἡ γωνία 7 τῆς ἕδρας ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

2) Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι κάθε ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι 4 (π. χ. αἱ Α, Β, Γ, Δ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

3) Πάσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδουν δύο εὐθεῖαί της, αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται χωρὶς ν' ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν, λέγεται *ἐπίπεδος γωνία* (ὡς αἱ γωνίαι: Α, Β, Γ, Δ, τῆς ἕδρας τῆς βάσεως (σχ. 10).

4) ***Πλευραὶ τῆς ἐπιπέδου γωνίας λέγονται αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, ὁποῖαι τὴν σχηματίζουν*** (π. χ. τῆς γωνίας Α (σχ. 12) πλευραὶ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ).

6) ***Κορυφὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἑνοῦνται αἱ δύο πλευραί της*** (ὡς π. χ. τῆς γωνίας Α (σχ. 12) κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α).

Σχ. 12

6) ***Καθορισμὸς ἐπιπέδου γωνίας***: Τὴν ἐπίπεδον γωνίαν καθορίζομεν: ἢ δι' ἑνὸς γράμματος, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν κορυφὴν ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, γράφοντες ἓν εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἀπὸ ἓν εἰς τὰ ἄλλα δύο ἄκρα τῶν πλευρῶν της. Διαβάζομεν δὲ ἢ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της ἢ καὶ τὰ τρία θέτοντες εἰς τὸ μέσον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς (ὅπως: π. χ. ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ σχ. 11).

Ἀσκήσεις:

1. Πόσα εἶναι τὰ ἐπίπεδα τοῦ κύβου;
2. Πόσαι εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου;
3. » » » τρίεδροι » » »
4. » » » κορυφαὶ » »
5. » » » ἀκμαὶ » »

6. Δείξατε εἰς τὸν κύβον παραλλήλους ἕδρας.

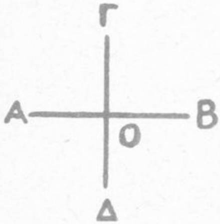
7. Δείξατε εἰς μίαν ἕδραν τοῦ κύβου παραλλήλους πλευράς.

8. Διαβάσατε τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς ἕδρας Α Β Γ Δ Α καὶ τῆς Α Β Ζ Ε Α.

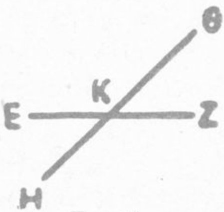
8. Θέσεις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας

1. ***Κάθετος εὐθεῖα: Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἄλλην, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται, εἶναι ἴσαι*** (π. χ. ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ (σχ. 13) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ· διότι εἶναι : ΑΟΓ = ΓΟΒ = ΒΟΔ = ΔΟΑ γωνίαι.

2. ***Πλάγιαι εὐθεῖαι: Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας αὗται σχηματίζουν, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι*** π. χ. ἡ ΘΗ καὶ ΕΖ (σχ. 14).

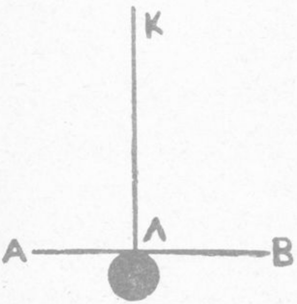


Σχ. 13

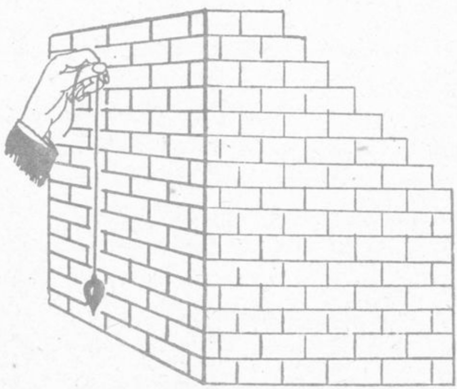


Σχ. 14

3. ***Κατακόρυφος εὐθεῖα, λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν χαράσσει ἓν σῶμα, τὸ ὁποῖον πίπτει*** ὡς ἡ ΚΛ (σχ. 15), τὴν ὁποίαν διέγραψε τὸ σφαιρίδιον πίπτον.



Σχ. 15


Σχ 16.

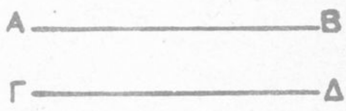
Κατακόρυφος εὐθεῖα εἶναι καὶ ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν χαράσσει τὸ νῆμα τῆς στάθμης (σχ. 16).

4. ***Στάθμη:*** Εἶναι ἓν σχοινίον μὲ ἓν βαρίδιον προσδεδεμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον του (σχ. 16). Ταύτην μεταχειρίζονται οἱ κτίσται διὰ

νά ἐλέγχουν, ἐάν εἷς τοῖχος εἶναι κατακόρυφος ἢ ὄχι. (Εἶναι τοῦτο σπουδαῖον ; καί διατί ;)

5. ***Ὁριζόντιος εὐθεῖα, λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν κατακόρυφον*** ὅπως ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν κατακόρυφον ΚΛ (σχ. 15).

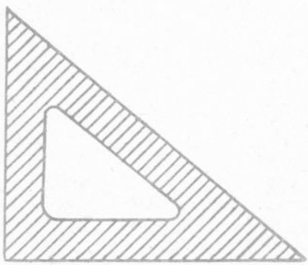
6. ***Παράλληλοι εὐθεῖαι : Δύο ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας λέγονται παράλληλοι, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθῶσι καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα των***, (ὅπως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 17).

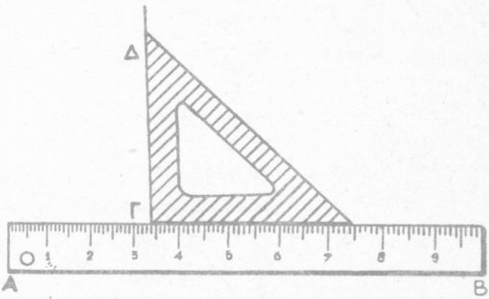


Σχ. 17

7. Χάραξις καθέτων εὐθειῶν

1. Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ μίαν ἄλλην χαράσσομεν μὲ τὸν γνώμονα (σχ. 18), ὅπως τὴν ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 19).


Σχ. 18



Σχ. 19

Ὁ γνώμων εἶναι σανὶς ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα εὐθύγραμμον μὲ 3 γωνίας· τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην. Εἶναι δὲ αὕτη ὀρθή (σχ. 18).

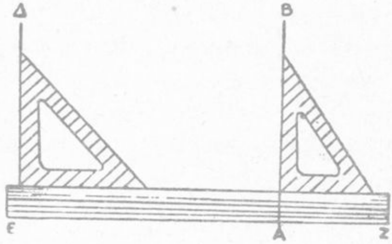
Διὰ νὰ χαράξωμεν λοιπὸν μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην διὰ τοῦ γνώμονος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Τοποθετοῦμεν ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν (π. χ. ΑΒ) τὸν γνώμονα, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόση εἰς αὐτὴν ἡ μία κάθετος πλευρά του. Μετὰ ταῦτα σύροντες κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς του τὴν γραφῖδα, γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

8. Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν

Παραλλήλους εὐθείας χαράσσομεν εἰς τὸν πίνακα:

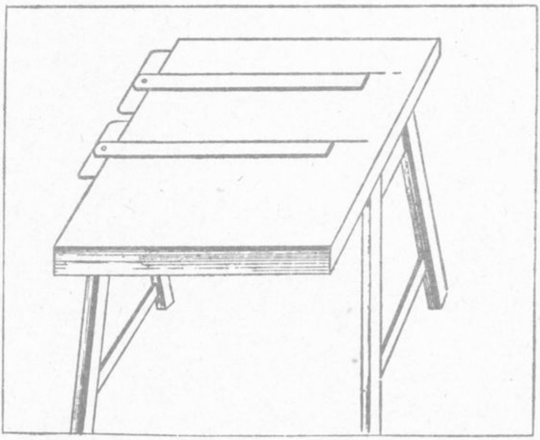
α) Μὲ τὸν *κανόνα*, κυλίοντες τοῦτον ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα καὶ σύροντες κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὴν κιμωλίαν.

β) Διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος, ὅπως μᾶς δείχνει τὸ σχ. 20· ὅπου χαράσσομεν ἐπὶ τὴν ΕΖ τὰς καθέτους ΑΒ καὶ ΕΔ.



Σχ. 20

γ) Μὲ τὸ ὄργανον ***Ταῦ***· ὡς μᾶς δείχνει τὸ σχ. 21, ὅπου ἐφαρμόζομεν τοῦτο εἰς τὴν εὐθεῖαν καὶ χαράσσομεν ὅσας παραλλήλους εὐθείας γραμμὰς θέλομεν.


Σχ. 21

9. Χάραξις ἐπιπέδου γωνίας

Διὰ νὰ χαράξωμεν ἁπλῶς μίαν ἐπίπεδον γωνίαν, χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον αὐτῆς τὸ Α, ἄλλην εὐθεῖαν ΑΒ. Τοιουτοτρόπως ἐχαράχθη ἡ ἐπίπεδος γωνία ΒΑΓ (σχ. 12).

᾿Ασκήσεις :

1. Δείξατε εἰς τὸν κύβον μίαν ἀκμὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

2. Γράψατε εἰς τὸν πίνακα ἕναν κύβον καὶ διαβάσατε τὰς ἀκμάς του, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι εἰς τὰς ἀκμὰς τῆς ἕδρας τῆς βάσεως του.

3. Χαράξατε εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ ἄλλην.

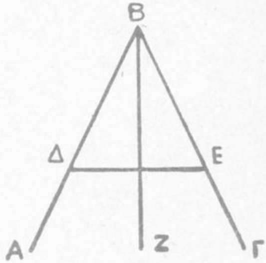
4. Χαράξατε εὐθεῖαν πλαγίαν ἐπὶ ἄλλην.

5. Δείξατε μὲ ράβδους κατακόρυφον εὐθεῖαν καὶ ὁριζόντιον εἰς τὸν πόδα αὐτῆς.

10. Διχοτόμησις ἐπιπέδου γωνίας

῎Εστω ὅτι ἔχομεν νὰ διχοτομήσωμεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΒΓ (σχ. 22).

Πρὸς τοῦτο : α) ἀπὸ τὴν κορυφήν της Β λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν της ἴσα τμήματα ΒΔ = ΒΕ. β) ᾿Απὸ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν διὰ τοῦ γνώμονος κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ. Αὐτὴ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ· ἤτοι εἶναι ΑΒΖ = ΖΒΓ.

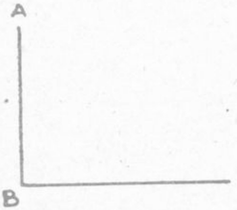


Σχ. 22

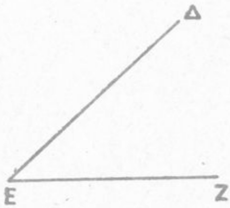
11. Εἴδη ἐπιπέδων γωνιῶν

1. Τὰ εἴδη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι τρία : ἡ ὀρθή, ἡ ὀξεῖα καὶ ἡ ἀμβλεῖα.

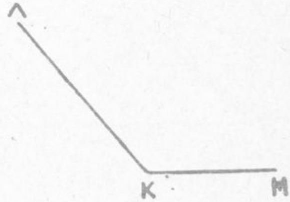
α) ***᾿Ορθὴ γωνία λέγεται ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην*** π. χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 23).



Σχ. 23



Σχ. 24



Σχ. 25

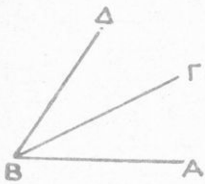
β) ***᾿Οξεῖα γωνία λέγεται μία ἐπίπεδος γωνία, ἐὰν εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς*** π. χ. ἡ γωνία ΔΕΖ (σχ. 24).

γ) ***᾿Αμβλεῖα γωνία λέγεται μία ἐπίπεδος γωνία, ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς*** · π. χ. ἡ γωνία ΛΚΜ (σχ. 25).

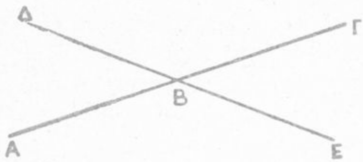
12. Ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν

1) *Ἐφεξῆς γωνίαι* : *Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς*· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ σχ. 26).

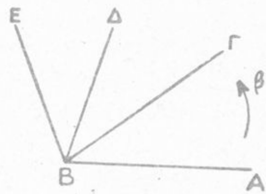
2) *Κατὰ κορυφὴν γωνίαι* : *Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κοινὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης*· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΕΒΓ (σχ. 27).



Σχ. 26



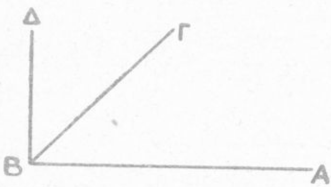
Σχ. 27



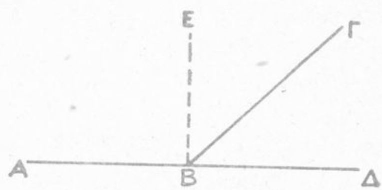
Σχ. 28

3) *Διαδοχικαὶ γωνίαι* : *Τρεῖς ἢ περισσότεραι γωνίαι λέγονται διαδοχικαί, ἐὰν ἑκάστη μετὰ τῆς ἑπομένης της εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι*· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ (σχ. 28).

4) *Ἄθροισμα ἐπιπέδων γωνιῶν. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι ἐπίπεδος γωνία ἴση πρὸς ὅλας αὐτὰς ὁμοῦ*· π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν : ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ εἶναι ΑΒΓ+ΓΒΔ +ΔΒΕ=ΑΒΕ γωνία (σχ. 28).



Σχ. 29



Σχ. 30

5. *Συμπληρωματικαὶ γωνίαι* : *Δύο γωνίαι ἐπίπεδοι λέγονται συμπληρωματικαί, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν*· π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 29).

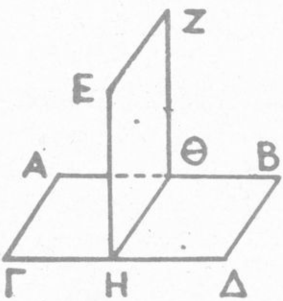
6. *Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας*, (ὅπως αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 30).

'Ασκήσεις :

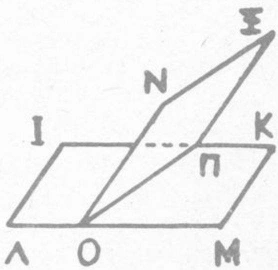
1) Χαράξατε ἐπίπεδον γωνίαν ὀρθὴν μὲ κορυφὴν τὸν σημεῖον Α.
2) » » » » » πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν Α——Β.
3) Χαράξατε μίαν ἐπίπεδον γωνίαν καὶ ἀναγνώσατε αὐτήν.
4) Πόσας ἐπιπέδους γωνίας ἔχει ὁ κύβος ;
5) Φέρατε μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ κεῖται πρὸς τὸ ἕν μέρος αὐτῆς· καὶ λέγετε :
α) Πόσας γωνίας σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ; ὀνομάσατέ τας.
β) Τίνος εἴδους ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι αὗται ;
6) Φέρατε μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ μίαν ἄλλην καὶ ἡ ὁποία νὰ κεῖται καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς (ἤτοι νὰ τὴν τέμνῃ) καὶ λέγετε :
α) Πόσας ἐπιπέδους γωνίας σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ;
β) Τίνος εἴδους εἶναι αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι ;
7) Χαράξατε δύο γωνίας συμπληρωματικάς.
8) » » » παραπληρωματικάς.

13. Θέσις τῶν ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα

1. ***Κάθετον ἐπίπεδον*** : ***Ἕν ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ ἄλλο, ὅταν, τέμνον τοῦτο, σχηματίζῃ μὲ αὐτὸ διέδρους γωνίας ἴσας*** (ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΕΖΘΗΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔΓΑ σχ. 31.



Σχ. 31



Σχ. 32

Ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην ἕδραν αὐτοῦ, μὲ τὴν ὁποίαν ἑνώνεται. Ἕκαστος τοῖχος τοῦ δωματίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πάτωμα, ἐπὶ τὸ ταβάνι καὶ τοὺς πλαγίους τοίχους, μὲ τοὺς ὁποίους ἑνώνεται.

2. ***Πλάγιον ἐπίπεδον*** : ***Ἕν ἐπίπεδον λέγεται πλάγιον ἢ κεκλιμένον ἐπὶ ἕν ἄλλο, ὅταν τέμνον τοῦτο σχηματίζῃ μὲ αὐτὸ διέδρους***

γωνίας ὀξείας καὶ ἀμβλείας (ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΟΝΞΠ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΙΚΜΛ σχ. 32).

3. ***Κατακόρυφον ἐπίπεδον*** : ***Ἕν ἐπίπεδον λέγεται κατακόρυφον, ὅταν τοῦτο διέρχεται ὁλόκληρον διὰ τοῦ νήματος τῆς στάθμης***. Τοιαῦτα ἐπίπεδα εἶναι οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων.

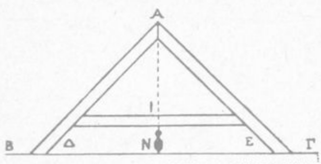
4. ***Ὁριζόντιον ἐπίπεδον*** : ***Ἕν ἐπίπεδον λέγεται ὁριζόντιον, ὅταν τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἄλλο κατακόρυφον***· (ὅπως τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον εἰς τὰ κατακόρυφα ἐπίπεδα τῶν τοίχων του).

Τὴν ὁριζοντιότητα ἑνὸς ἐπιπέδου ἐξακριβώνομεν μὲ τὰ ὄργανα: ***ἀλφάδιον*** (σχ. 33) καὶ ***ἀεροστάθμη*** (σχ. 34).

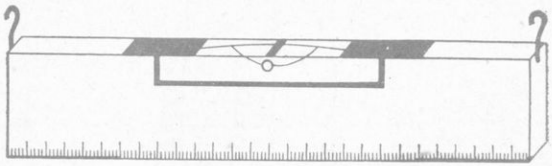
5. ***Τὸ ἀλφάδιον*** λοιπὸν εἶναι ὄργανον, μὲ τὸ ὁποῖον ἐλέγχομεν, ἂν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον ἢ κεκλιμένον.

Εἶναι κατασκευασμένον ἀπὸ 3 χονδρὰ ξύλα, ὥστε νὰ στέκεται ὄρθιον. Εἰς τὸ μεσαῖον ὁριζόντιον ξύλον ὑπάρχει ἓν κατακόρυφον αὐλάκιον, ἀπὸ δὲ τὴν κορυφὴν τοῦ ἀλφαδίου κρέμεται μία στάθμη.

Ὅταν τὸ ἀλφάδιον τοποθετῆται ἐπάνω εἰς ἓν ἐπίπεδον, ἂν τοῦτο εἶναι ὁριζόντιον, τὸ νῆμα τῆς στάθμης διέρχεται μέσα ἀπὸ τὸ αὐλάκιον καὶ μᾶς δείχνει, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον. Ἂν δὲ τὸ ἐπίπεδον εἶναι κεκλιμένον, τὸ νῆμα τῆς στάθμης κλίνει δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ καὶ μᾶς δείχνει ὅτι τοῦτο εἶναι κεκλιμένον.



Σχ. 33


Σχ. 34

6. ***Ἡ ἀεροστάθμη*** : Εἶναι ὑάλινος σωλήν, οὐχὶ καλὰ γεμισμένος μὲ νερό, μέσα δὲ εἰς αὐτὸν κινεῖται ἐλευθέρως μία φυσαλὶς ἀέρος.

Τοποθετοῦμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Τότε, ἂν αὐτὴ εἶναι ὁριζοντία, ἡ φυσαλὶς στέκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος.

7. ***Παράλληλα ἐπίπεδα*** : ***Δύο ἢ περισσότερα ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθῶσι πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις***. Τέτοια ἐπίπεδα εἶναι : τὸ πάτωμα καὶ τὸ ταβάνι· οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τοῦ δωματίου· αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου.

14. Εἴδη διέδρων γωνιῶν

1. Καὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τρία εἶναι τὰ εἴδη: ***Ὀρθὴ δίεδρος, ὀξεῖα δίεδρος*** καὶ ***ἀμβλεῖα δίεδρος.***

2. ***Ὀρθὴ δίεδρος γωνία λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην.*** Ὅλαι αἱ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαί.

3. ***Ὀξεῖα δίεδρος γωνία, λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς διέδρου.*** Αἱ δύο ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδα πλάγια τὸ ἓν ἐπὶ τὸ ἄλλο.

4. ***Ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας.***

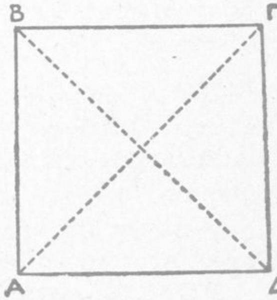
5. Εὐκολονόητον εἶναι ὅτι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου ἔχουν ἀντιστοίχους ἐπιπέδους ὀρθάς. Καὶ ἀντιστρόφως αἱ ὀρθαὶ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου ἔχουν ἀντιστοίχους διέδρους γωνίας ὀρθάς.

15. Ἄλλαι παρατηρήσεις εἰς τὸν κύβον

1. Ἐὰν ἐλέγξωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ κύβου διὰ τοῦ γνώμονος θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην. Ἑπομένως ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως ἴσαι.

Εἶναι λοιπὸν ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον καὶ ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας. Τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται *τετράγωνα*. Ὅθεν ***Τετράγωνον λέγεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ποὺ ἔχει τὰς 4 πλευράς του ἴσας.***

2. Τὸ τετράγωνον, διότι ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας, λέγεται καὶ σχῆμα ***εὐθύγραμμον κανονικὸν*** (σχ. 35).



Σχ. 35

3. Καὶ κάθε εὐθύγραμμον σχῆμα, ποὺ ἔχει ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας καὶ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας, λέγεται κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα.

4. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου (καθὼς καὶ παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος), λέγεται ***περίμετρος*** αὐτοῦ. Π. χ. τοῦ τετραγώνου (σχ. 35) ἡ περίμετρος εἶναι: τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ + + ΓΔ + ΔΑ.

5. Πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο γωνίας τοῦ τετραγώνου (καθὼς καὶ παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος) χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ αὐτοῦ, λέγεται ***διαγώνιος*** αὐτοῦ, (ὅπως ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 35).

6. Ἀφοῦ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι, αὗται εἶναι ὀρθαὶ (ὅπως εἴπομεν). Καὶ ἀφοῦ αὗται εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀντίστοιχοί των δίεδροι θὰ εἶναι ὀρθαί. Εἶναι λοιπὸν ὁ κύβος παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον. Ὅθεν:

Κύβος λέγεται τὸ ἑξάεδρον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ἴσα τετράγωνα (σχ. 10).

16. Διαστάσεις τοῦ κύβου

1. Ὁ κύβος, ὅπως βλέπεται, ἐπεκτείνεται πρὸς τὰ ἐμπρός, πρὸς τὰ πλάγια καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐπεκτάσεις τοῦ κύβου λέγονται ***διαστάσεις*** αὐτοῦ.

Τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ ἐμπρὸς τὴν λέγομεν ***μῆκος***· τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ πλάγια ***πλάτος*** καὶ τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ ἄνω, ***ὕψος***.

2. Αἱ τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι ξεκινοῦν ἀπὸ μίαν κορυφὴν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως, μᾶς δείχνουν τὰς 3 διαστάσεις τοῦ κύβου· ἐκείνη ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς τὰ ἐμπρός, μᾶς δείχνει τὸ μῆκος, ἐκείνη ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς τὰ πλάγια, τὸ πλάτος, καὶ ἐκείνη ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω, τὸ ὕψος του. Μᾶς εἶναι δὲ γνωστόν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς αὐταὶ διαστάσεις του εἶναι **ἴσαι.**

Ὅθεν: α) ***Μῆκος*** τοῦ κύβου εἶναι μία ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, (ἡ ΑΔ σχ. 10).

β) ***Πλάτος τοῦ κύβου*** εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους, (ἡ ΑΒ σχ. 10).

γ) ***Ὕψος τοῦ κύβου*** λέγεται ἡ παράπλευρος ἀκμή του, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος (ἡ ΑΕ σχ. 10).

3. Τὰς διαστάσεις τοῦ κύβου μετροῦμεν μὲ τὸ μέτρον καὶ μὲ τὰ μέρη αὐτοῦ ἤτοι τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστά.

4. Αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Διατί;

17. Ἰχνογράφησις τετραγώνου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ γράψωμεν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,20 τοῦ μέτρου.

Πρὸς τοῦτο:

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ΑΒ = 0,20 μ., ὅσον εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου (σχ. 35).

β) Στὰ ἄκρα τῆς ΑΒ φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα καθέτους ἴσας, μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἤτοι τὰς ΑΔ=0,20 μ. καὶ ΒΓ=0,20 μ.

γ) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα Δ καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ. Τοιουτοτρόπως ἐγράψαμεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔΑ (σχ. 35).

Τοιουτοτρόπως δὲ γράφομεν καὶ κάθε τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ἡ πλευρά.

18. Πῶς κατασκευάζομεν τετράγωνα ἀπὸ χαρτόνιον

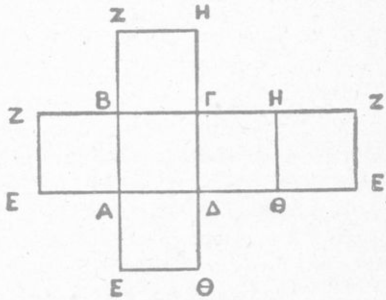
Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον εἰς τὸ χαρτόνιον τὸ τετράγωνον καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὴν περίμετρόν του.

19. Ἰχνογράφησις κύβου

Διὰ νὰ γράψωμεν κύβον:

α) Ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον ἓν τετράγωνον (ΑΒΓΔ) καὶ ἔπειτα ἓν ἄλλο ἴσον πρὸς αὐτὸ (τὸ ΕΖΗΘ), οὕτως ὥστε αἱ δύο πλευραί του ΒΓ καὶ ΕΖ νὰ τέμνωνται καθέτως (σχ. 10).

β) Σύρομεν κατόπιν τὰς ἀκμὰς ΒΖ καὶ ΓΗ, ΑΕ καὶ ΔΘ καὶ σχηματίζομεν τοιουτοτρόπως τὰς παραπλεύρους 4 ἕδρας: ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ΑΕΘΔ καὶ ΒΓΖΗ (σχ. 10).



Σχ. 36

20. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος κύβου

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κύβου:

α) Γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως μὲ πλευρὰν τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου· ἤτοι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔΑ (σχ. 36).

β) Γύρω ἀπὸ αὐτὴν καὶ μὲ βάσεις τὰς πλευράς της γράφομεν τὰς 4 παραπλεύρους ἕδρας τοῦ κύβου· ἤτοι τὰ τετράγωνα ΑΒΖΕΑ, ΒΓΗΖΒ, ΓΔΘΗΓ, ΑΔΘΕΑ.

γ) Μὲ βάσιν τὴν πλευρὰν ΗΘ τοῦ τετραγώνου ΔΓΗΘΔ γράφομεν τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ἕδραν τοῦ κύβου· ἤτοι τὸ τετράγωνον ΗΘΕΖΗ (σχ. 36).

Καὶ τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμε τό ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου.

21. Κατασκευὴ κύβου ἀπὸ χαρτόνι

Πρὸς τοῦτο: α) (Ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου εἰς τὸ χαρτόνιον.

β) Κόπτομεν ἔπειτα τὸ χαρτόνιον εἰς τὴν περίμετρόν του καὶ χαράσσομεν ἐλαφρῶς διὰ μαχαιριδίου τὰς ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐκόπησαν.

γ) Λυγίζομεν μετὰ ταῦτα τὰ τετράγωνα πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου.

δ) Καὶ τέλος κολλοῦμεν τὰς μὴ κολλημένας ἀκμὰς τῶν ἑδρῶν μὲ λωρίδας χαρτίνας καὶ γόμμα

Ἀσκήσεις :

1) Ἀναγνώσατε εἰς τὸν κύβον (σχ. 10) τὰς ἕδρας του.
2) Τὸ ἴδιον κάμετε εἰς τὸ ἀνάπτυγμά του (σχ. 36).
3) Ἀναγνώσατε εἰς τὸν κύβον (σχ. 10) τὰς ἀνὰ δύο παραλλήλους ἕδρας του.
4) Κάμετε τὸ ἴδιον εἰς τὸ ἀνάπτυγμά του (σχ. 36).
5) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τοῦ κύβου εἰς τὰ σχήματα 10 καὶ 36 ἀναγιγνώσκοντες τὴν αὐτὴν καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα.
6) Ἰχνογραφήσατε κύβον μὲ ἀκμὴν 0,05 τοῦ μέτρου.
7) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κύβου (σχ. 10).
8) Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον κύβον μὲ ἀκμὴν 0,10 τοῦ μέτρου.
9) Μετρήσατε καὶ εὕρετε :

α) Τὰς διέδρους γωνίας τοῦ κύβου.
β) » τριέδρους » » »
γ) » ἀκμὰς τοῦ κύβου.
δ) » κορυφὰς τοῦ κύβου.
ε) » ἐπιπέδους γωνίας τοῦ κύβου.

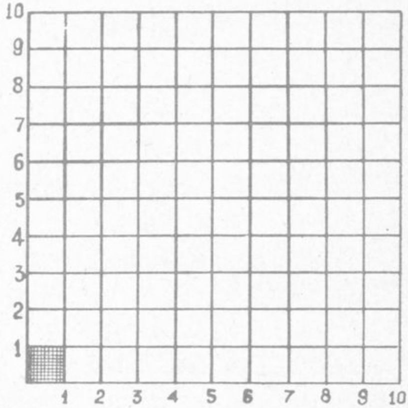
22. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

Τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου καθὼς καὶ πᾶσαν ἐπιφάνειαν μετροῦμεν μὲ τὰς μονάδας ἐπιφανείας.

Αὗται εἶναι τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ὡς πλευρὰν ἔχουν μίαν μονάδα τοῦ μήκους, ἤτοι τὸ μέτρον, τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον, τὴν γραμμήν, τὸ χιλιόμετρον κ.λ.π.

Αἱ μονάδες λοιπὸν τῆς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι :

1. *Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.* Τοῦτο εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 μέτρον. Ὡς τὸ τετράγωνον (σχ. 37).



Σχ. 37

Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετρ. μέτρου διαιρεῖται σὲ 10 παλάμας. Ἐὰν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς σύρωμεν εὐθείας γραμμάς, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας. Ἄρα 1 τ.μ. = 100 τ. π.

Ἑκάστη πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης διαιρεῖται εἰς 10 δακτύλους. Ἐὰν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς σύρωμεν, ὅπως εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, εὐθείας γραμμάς, ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους· ἄρα 1 τ.π. = 100 τ.δ.

Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετρ. δακτύλου διαιρεῖται εἰς 10 γραμμάς. Ἐὰν σύρωμεν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς εὐθείας, ὁ τ. δ. διαιρεῖται εἰς 100 γραμμάς. Ἄρα 1 τ. δ. = 100 τ.γρ. Ὅθεν :

α) *Τετραγωνικὴ παλάμη* εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 παλάμη.

β) *Τετραγωνικὸς δάκτυλος* εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 δάκτυλος.

γ) *Τετραγωνικὴ γραμμὴ* εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 γραμμή.

Εἶναι λοιπόν :

α) 1 τ.μ. = 100 τ.π.

1 » = 100 τ.δ.

1 » » = 100 τ.γ.

β) 1 τ.μ. = 100 τ.π., ἢ 10.000 τ.δ., ἢ 1.000.000 τ.γρ.

1 τ.π. = 100 τ.δ., ἢ 10.000 τ.γρ.

1 τ.δ. = 100 τ.γρ.

γ) 1 τ.π. $= \frac{1}{100}$ τ.μ.

1 τ.δ. $= \frac{1}{100}$ τ.π. $\frac{1}{10\,000}$ τ.μ.

1 τ.γ. $= \frac{1}{100}$ τ.δ., $\frac{1}{10.000}$ τ.π., $\frac{1}{1.000.000}$ τ.μ.

2 ***Τετραγωνικὸν χιλιόμετρον:*** Εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 χιλιόμετρον.

Ὅθεν: 1 τ.χ. = 1.000.000 τ.μ. (διότι 1000 × 1000 = 1.000.000).

Δι' αὐτοῦ μετροῦμεν τὰς πολὺ μεγάλας ἐπιφανείας (ὡς τὰς ἐπιφανείας τῶν χωρῶν, τῶν κρατῶν κλπ.).

3. ***Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τοῦ κύβου λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις μᾶς λέγει ἀπὸ πόσας μονάδας ἐπιφανείας ἢ μέρους αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.***

Νέον στρέμμα: Λέγεται ἐπιφάνεια ἀπὸ 1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

18. Ἀσκήσεις

α) Ἰχνογραφήσατε εἰς χαρτόνιον ἓν τετραγωνικὸν μέτρον καὶ διαιρέσατέ το εἰς τετραγωνικὰς παλάμας, μίαν τετρ. παλάμην εἰς τετρ. δακτύλους, ἕνα τετρ. δάκτυλον εἰς τετρ. γραμμάς.

β) Πόσα τετρ. χιλιόμετρα εἶναι 25.550.450 τετρ. μέτρα;

γ) 65 τετρ. χιλιόμετρα πόσα τετρ. μέτρα εἶναι;

23. Μέτρησις τοῦ ὄγκου κύβου

(Πρὸ τῶν μαθητῶν τίθενται: ἓν κυβικὸν μέτρον, μία κυβικὴ παλάμη, εἷς κυβικὸς δάκτυλος καὶ μία κυβικὴ γραμμή).

1. Τὸν ὄγκον τοῦ κύβου καθὼς καὶ παντὸς στερεοῦ σώματος μετροῦμεν μὲ τὰς μονάδας τοῦ ὄγκου.

Εἶναι δὲ αὗται κύβοι μὲ ἀκμὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους καὶ εἶναι αἱ ἑξῆς:

α) *Τὸ κυβικὸν μέτρον*. Τοῦτο εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα του εἶναι 1 τετραγωνικὸν μέτρον.

β) *Ἡ κυβικὴ παλάμη*. Αὕτη εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι 1 τετραγ. παλάμη.

γ) *Ὁ κυβικὸς δάκτυλος*. Οὗτος εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι 1 τετραγωγικὸς δάκτυλος.

δ) *Ἡ κυβικὴ γραμμή*. Εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι 1 τετραγωνικὴ γραμμή.

2. Ἀφοῦ ἡ ἕδρα τῆς βάσεως τοῦ κυβικοῦ μέμρου εἶναι 1 τετραγ. μέτρον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τετρ. παλάμες. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπάνω εἰς αὐτὴν νὰ τοποθετήσωμεν 100 κυβικὰς παλάμας. Ἀπὸ αὐτὰς βλέπομεν ὅτι ἔγινεν ἓν παρελληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις 1 μ. μῆκος, 1 μ. πλάτος, καὶ 1 παλάμη ὕψος. Τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει ὕψος 1 μέτρον ἤτοι 10 παλάμας. Ἐὰν λοιπὸν τοποθετήσωμεν δέκα τοιαῦτα παραλληλεπίπεδα τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο θὰ σχηματίσωμεν ἓν παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις ἓν μέτρον (μῆκος 1 μέτρον, πλάτος 1 μέτρον, ὕψος 1 μέτρον).

Φανερὸν ἤδη ὅτι τὸ κυβικὸν μέτρον ἀποτελεῖται ἀπὸ $100 \times 10 = 1000$ κ. παλ.

3. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὴν κυβ. παλάμην εὑρίσκομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβ. δακτ.

4. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὸν κυβ. δάκτυλον εὑρίσκομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβ. γραμμάς,

5) Ὅθεν εἶναι :

α) 1 κ. μ. = 1000 κ. π.

1 κ. π. = 1000 κ. δ.

1 κ. δ. = 1000 κ. γρ.

β) 1 κ. μ. = 1000 κ. π. ἢ 1.000.000 κ. δ. ἢ 1.000.000.000 κ. γρ.

1 κ. π. = 1000 κ. δ. ἢ 1.000.000 κ. γρ.

1 κ. δ. = 1000 κ. γρ.

γ) 1 κ. π. $= \frac{1}{1000}$ κ. μ.

1 κ. δ. $= \frac{1}{1000}$ κ. π, ἢ $\frac{1}{1.000.000}$ κ. μ.

1 κ. γ. $= \frac{1}{1000}$ κ. δ. ἢ $\frac{1}{1.000.000}$ κ. π., ἢ $\frac{1}{1.000.000.000}$ κ.μ.

24. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

1. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν ταύτης ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 τετραγώνων του καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο φανερὸν εἶναι ὅτι πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου.

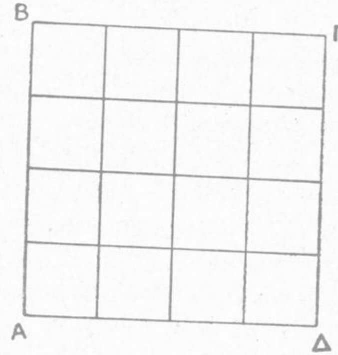
2. Ὅθεν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

25. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τετραγώνου

1. Βάσις τοῦ τετραγώνου λέγεται μία πλευρὰ του (ἡ ΑΔ σχ. 38).

2. Ὕψος τοῦ τετραγώνου λέγεται μία πλευρά του κάθετος εἰς τὴν βάσιν (ΑΒ σχ. 38).

3. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 38) καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΑΔ = 4 μ., ὁπότε καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ = 4 μ.



Σχ. 38

Χωρίζω τὸ μῆκος του ΑΔ καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ εἰς τὰ 4 μέτρα των καὶ ἀπὸ τὰς διαιρέσεις των φέρω καθέτους εὐθείας γραμμάς· τὸ τετράγωνον διαιρεῖται εἰς 16 τ. μ. ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 16 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἀλλὰ τοῦτο, παρατηροῦμεν εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι 4 × 4 = 16 τ. μ.

Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

26. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κύβου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς 6 ἕδρας της ἤτοι ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα. Ἐπομένως :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύβου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6.

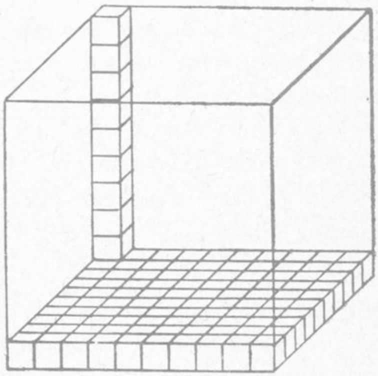
Ὅθεν: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου (σχ. 39) εἶναι:

$(4 \times 4) \times 6 = 16 \times 6 = 96$ τ. μέτρα

27. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κύβου

1. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου μετροῦμεν τοῦτον μὲ τὸ κυβικὸν μέτρον, τὴν κυβικὴν παλάμην, τὸν κυβικὸν δάκτυλον, τὴν κυβικὴν γραμμήν.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴν 4 μέτρα.



Σχ. 39

Σκέψις. Μᾶς εἶναι γνωστόν: α) τὸ μῆκος τοῦ κύβου (4 μ.), β) τὸ πλάτος του (4 μ.) καὶ γ) τὸ ὕψος του (4 μ.) ἤτοι αἱ τρεῖς διαστάσεις του.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως εἶναι $4 \times 4 = 16$ τετρ. μ. Χωρίζομεν λοιπὸν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως εἰς τὰ 16 τ.μ. καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὰ τοποθετοῦμεν 16 κ. μ. Θὰ σχηματισθῇ ἔτσι ἓν στερεὸν μὲ διαστάσεις: μῆκος 4 μέτρα, πλάτος 4 μέτρα καὶ ὕψος 1 μέτρον. Ὁ ὄγκος τούτου εἶναι γνωστὸς 16 κ.μ.

Ἐπὶ τοῦ στερεοῦ τούτου τοποθετοῦμεν ἄλλο ὅμοιον, ἐπὶ τούτων τρίτον καὶ ἐπὶ τούτων τέταρτον.

Τοιουτοτρόπως σχηματίζεται κύβος μὲ διαστάσεις 4 μ. μῆκος, 4 μ. πλάτος καὶ 4 μ. ὕψος, ἤτοι ὁ κύβος τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν ὄγκον. Φανερὸν τώρα εἶναι ὅτι ὁ ὄγκος τούτου εἶναι $16 \times 4 = 64$ κ.μ.

Ἀλλὰ ὁ ὄγκος οὗτος 64 κ. μ. βλέπομεν ὅτι εὑρέθη μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν $(4 \times 4) \times 4 = 16 \times 4 = 64$ κ. μ. ἤτοι μὲ πολλαπλασμὸν τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου.

*Ὅθεν: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου**,* ἤτοι:

Ὁ ὄγκος κύβου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων $(4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$ κ. μ.).

26. Προβλήματα κύβου

ΟΜΑΣ Α΄ (Προβλήματα τετραγώνου).

1. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 4 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

2. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 16 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;
("Ετερον μὲ περίμετρον 19,20 μ.).

3. Εἷς κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου καὶ ἡ πλευρά του εἶναι 40,60 μέτρα· πόσο συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ περιφραχθῇ διὰ 5 συρμάτων;

4. Εἷς ἀνθόκηπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 40 μέτρα· πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

5. Ἡ αὐλὴ σχολείου ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 161,60 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

6. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου, εἶναι 372 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

7. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 350 μέτρα· πόσα νέα στρέμματα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

8. "Εν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 55 μέτρα. Ἐὰν ἡ ἀξία τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου αὐτοῦ εἶναι 25 δραχ., ποία εἶναι ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου;

9. "Εν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 40 μέτρα. Τοῦτο ἠγοράσθη ἀντὶ 40.960 δραχμῶν, Ποία εἶναι ἡ ἀξία τοῦ τετρ. μέτρου;

10. Ἐκ δύο τετραγώνων τὸ μὲν ἔχει πλευρὰν 0,06 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ 0,24 τοῦ μέτρου. Ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μικροτέρου περιέχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μεγαλυτέρου;

11. Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ἑνὸς μαγειρείου σχήματος τετραγώνου εἶναι 4,50 μέτρα. Πόσας τετραγωνικὰς πλάκας θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ στρωθῇ, ἐὰν ἡ πλευρὰ τῶν πλακῶν εἶναι 0,18 τοῦ μέτρου;

12. Μία πλατεῖα σχήματος τετραγώνου ἔχει πλευρὰν 81 μέτρων καὶ πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκες σχήματος τετραγώνου, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 0,30 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

13. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον ἓν τετράγωνον καὶ εὕρετε: α) τὴν περίμετρόν του, β) τὸ ἐμβαδόν του.

ΟΜΑΣ Β' (ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου κύβου).

1. Ἕν δωμάτιον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5 μέτρων.

α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του; β) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος εὑρίσκονται εἰς αὐτό;

2. Εἷς σωρὸς λίθων ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 10 μέτρων. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

3. Ἑνὸς δοχείου κυβικοῦ, ἡ ἕδρα τῆς βάσεως ἔχει πλευρὰν 0,55 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

4. Ἕν κιβώτιον ἔχει σχῆμα κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,80 μ. Πόσαι πλάκες σάπωνος σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 0,08 μ. χωροῦν εἰς αὐτό;

5. Μία χορταποθήκη ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 24 μ. Πόσα δέματ α χόρτου σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 1,20 μ. χωρεῖ;

6. Ἕν δωμάτιον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5,60 μ. Τοῦτο συνεφωνήθη νὰ ἐλαιοχρωματισθῇ **ἐσωτερικῶς** πρὸς 35,5 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον, Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός του; (πάτωμα, ὀροφὴ ξύλινα).

7. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον ἕναν κύβον καὶ εὕρετε:

α) Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ ἀκμαί του.

β) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του.

γ) Ποῖος ὁ ὄγκος του.

8. Τοῦ κύβου (σχ. 39) εὕρετε: α) Τὸ ἐμβαδόν του, β) τὸν ὄγκον του.

9. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 24 τ.μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

10. Αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι 9,6 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

11. Ἕν δοχεῖον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 0,25 τοῦ μέτρου.

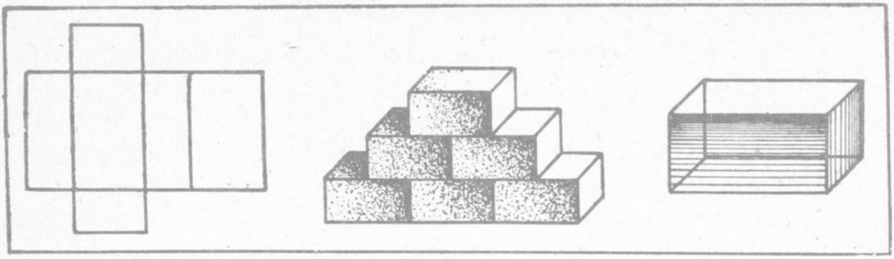
α) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, καὶ β) Πόσα κιλὰ ἐλαίου χωρεῖ τοῦτο; (τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι 0, 912) (1).

12. Μίαν κυβικὴν ἀποθήκην, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 12 μ. πρόκειται νὰ τὴν γεμίσωμεν μὲ κυβικὰ κιβώτια, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὕψος 2 μέτρων. Πόσα τέτοια κιβώτια θὰ χωρέσῃ ἡ ἀποθήκη;

---

(1) *Σημείωσις.*

Ὅπως μᾶς εἶναι γνωστὸν (ἐκ τῆς Φ. Πειραματικῆς Ε') διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἀπὸ τὸν ὄγκον του καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος του, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰδικὸν βάρος του ἐπὶ τὸν ὄγκον του. Τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τόννους. 1 τόννος = 1000 χιλιόγραμμα (κιλά).



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὸ πρὸ αὐτῶν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον).

1. Παρατηρήσεις

1. Ὄγκος καὶ σχῆμά του.

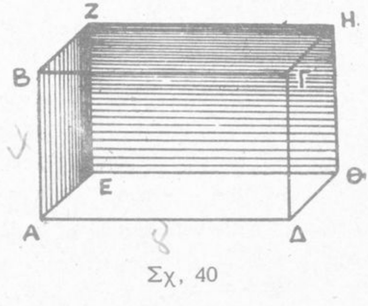
Ὅπως ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἔχει ὡρισμένον ὄγκον καὶ σχῆμα· ἤτοι εἶναι στερεόν.

2. Ἐπιφάνειά του.

1. Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας. Εἶναι ὅθεν πολύεδρον ἑξάεδρον.

2) Ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι ἐπιφάνειαι ἐπίπεδοι (ἐπίπεδα).

3) Στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας του, ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως· (ἡ ΑΒΓΔ σχ. 40).



Σχ. 40

4) Αἱ ἕδραι του αἱ ὁποῖαι ἑνώνονται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του καὶ μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του καὶ δι' αὐτὸ λέγονται παράπλευροι ἕδραι του (ἤτοι αἱ ΑΒΖΕΑ, ΔΓΗΘΔ, ΒΖΗΓΒ, ΑΕΘΔΑ).

5) Τοποθετοῦμεν τοῦτο εἰς χαρτόνιον καὶ ἰχνογραφοῦμεν ἀνὰ μίαν ὅλας τὰ ἕδρας· τὰς κόπτομεν ἔπειτα καὶ τὰς ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην ἀνὰ δύο. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουν

ἀκριβῶς μόνον ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της. Ἄρα εἶναι ἴσαι μόνον ἀνὰ δύο· ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της.

6) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της. Αἱ ἀπέναντι ὅθεν ἕδραι του εἶναι παράλληλοι, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον.

ι' αὐτὸ τὸ στερεὸν λέγεται παραλληλεπίπεδον.

3. *Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι του:*

1) Καὶ τούτου αἱ ἕδραι ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ κάμνουν διέδρους γωνίας (ὡς ἡ ΑΕΖΒΓΔΑ σχ. 40).

2) Ἑνοῦνται δὲ αὗται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ κάμνουν γωνίας τριέδρους ἢ στερεὰς (τάς : Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ).

Αἱ ἕδραι : ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ καὶ ΑΒΓΔΑ σχηματίζουν τὴν τρίεδρον γωνίαν Α. (σχ. 40).

3) Αἱ ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων γωνιῶν κάμνουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται ἀκμαί. (Ὡς : ἡ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ· ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ, ΔΘ).

4. *Σχῆμα τῶν ἑδρῶν του:*

1) Καὶ τούτου τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας μᾶς δίδουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραί των.

Εἶναι ὅθεν αἱ ἕδραι του εὐθύγραμμα σχήματα.

2) Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του ἐπεκταθοῦν καὶ πρὸς τὰ δύο ἄκρα των, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της· ὅθεν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο· ἤτοι ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της.

Ἄρα ἑκάστη ἕδρα του εἶναι ***παραλληλόγραμμον.***

3) Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς πλευρὰς ἑκάστης θὰ ἴδωμεν ὅτι ἑκάστη εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της.

4) Αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἑνώνονται ἀνὰ δύο διὰ τῶν ἄκρων των καὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους γωνίας (ὡς αἱ ΒΑΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΓΒΑ).

5) Ἐὰν ἐλέγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι· ἑπομένως ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθαί· ὡς ὀρθαὶ δὲ εἶναι ὅλαι ἴσαι.

Εἶναι λοιπὸν ἑκάστη ἕδρα του ***ἐπίπεδον ὀρθογώνιον.***

Ὅθεν ἑκάστη ἕδρα του εἶναι: ὀρθογώνιον, παραλληλόγραμμον, ὅπως καὶ τὸ τετράγωνον, ἀλλ' ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας μόνον ἀνὰ δύο, ἑκάστην μὲ τὴν ἀπέναντί της· (ἤτοι τὰς παραλλήλους).

Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς, τὰς δὲ πλευράς του ἴσας ἀνὰ δύο (ἑκάστην μὲ τὴν ἀπέναντί της) (σχ. 41).

5. ***Σχῆμά του.***

Αἱ δίεδροί του γωνίαι ὅλαι εἶναι ὀρθαί, ἀφοῦ καὶ αἱ ἀντίστοιχοί των ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί.

Συνεπῶς τὸ στερεὸν εἶναι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον.

Τὸ στερεὸν λοιπὸν εἶναι: ἑξάεδρον, παραλληλεπίπεδον, ὀρθογώνιον μὲ τὰς ἕδρας του ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ἴσα ἀνὰ δύο· (ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του).

Τὰ τοιαῦτα στερεὰ λέγονται παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια.

Ὅθεν: Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ἑξάεδρον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο, ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του (σχ. 40).

2. Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐπεκτείνεται ὅπως καὶ ὁ κύβος· πρὸς τὰ ἐμπρός, πρὸς τὰ πλάγια καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ἔχει λοιπὸν καὶ τοῦτο μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Ξεκινοῦν καὶ αἱ τρεῖς ἀπὸ μιὰ κορυφὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ διευθύνονται: μία πρὸς τὰ ἐμπρὸς (τὸ μῆκος ΑΔ), μία πρὸς τὰ πλάγια (τὸ πλάτος ΑΒ) καὶ μία πρὸς τὰ ἄνω (τὸ ὕψος ΑΕ σχ. 40).

Ὅθεν: α) Μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι μία ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του (ἡ ΑΔ. σχ. 40).

β) Πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους (ΑΒ).

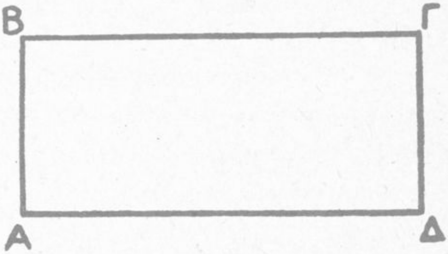
γ) Ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ παράπλευρός του ἀκμή, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὰς ἀκμὰς τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους αὐτοῦ (ΑΕ).

3. Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἰχνογραφήσωμεν ὀρθογ. παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν 0,25 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος 0,15 τοῦ μέτρου.

Πρὸς τοῦτο :

1) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ΑΔ = 0,055 μ.



Σχ. 43

Στὰ ἄκρα τῆς ΑΔ φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα καθέτους ἴσας μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθ. παραλληλογράμμου τὰς ΒΑ = 0,025 μ. καὶ ΓΔ = 0,025 μ.

3) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα Β καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΒΓ. Τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμεν τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μὲ βάσιν ΑΔ = 0,055 μ. καὶ ὕψος ΑΒ=0,025 μ.

Τοιουτοτρόπως δέ, ἰχνογραφοῦμεν καὶ κάθε ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος.

4. Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἐκ χαρτονίου

Κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ χαρτόνιον ἤτοι ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον εἰς τὸ χαρτόνιον τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον καὶ κόπτομεν ἔπειτα εἰς τὴν περίμετρόν του.

5. Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Κάμνομεν ὅτι ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν ἰχνογράφησιν κύβου (σελ. 23 § 19) μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἰχνογραφοῦμεν ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἀντὶ τετραγώνων.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λοιπὸν ἰχνογραφοῦμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 40).

να το κανεις με το χαρτονι

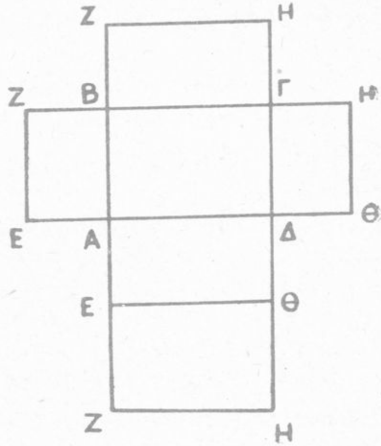
6. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Πρὸς τοῦτο:

1) Γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ. (σχ. 42).

2) Μὲ βάσεις τὰς πλευρὰς ταύτης γράφομεν γύρω ἀπ' αὐτὴν τὰς 4 παραπλεύρους ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου· τὰς ΑΔΘΕΑ, ΒΓΗΖΒ, ΑΒΖΕΑ, ΔΓΗΘΔ.

3) Μὲ βάσιν τὴν πλευρὰν (ΕΘ) γράφομεν τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ἕδραν ΕΘΗΖΕ.



Σχ. 42

7. Κατασκευὴ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἀπὸ χαρτόνιον

Κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὸν κύβον· ἤτοι:

1) Ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. 2) Κόπτομεν αὐτὸ εἰς τὴν περίμετρόν του. 3) Χαράσσομεν ἐλαφρὰ τὰς ἀκμάς, ποὺ δὲν ἐκόπησαν. 4) Λυγίζομεν τὰς ἕδρας καταλλήλως. ε) Κολλοῦμεν τέλος τὰς ἕδρας εἰς τὰς μὴ κεκολημένας ἀκμὰς μὲ χαρτίνας λωρίδας καὶ γόμμα.

Ἀσκήσεις

1. Ἀναγνώσατε καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα 41 καὶ 42 τὰς 6 ἕδρας ἑκάστου χωριστά.

2. Κάμετε τὸ ἴδιον, ἀλλ' ἀναγινώσκοντες τὴν αὐτὴν ἕδραν καὶ εἰς τὰ δύο.

3. Ἀναγνώσατε πρῶτα εἰς τὸ ἓν καὶ ἔπειτα εἰς τὸ ἄλλο τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἀνὰ δύο ἕδρας του.

4. Πόσας διέδρους γωνίας ἔχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; Πόσας τριέδρους; Πόσας ἐπιπέδους; Πόσας ἀκμάς; Πόσας κορυφάς;

5. Δείξατε τὰς διέδρους γωνίας τοῦ δωματίου.

6. » » τριέδρους » » »

7. Διαβάσατε μόνον τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ σχ. 41 καὶ 42.

8. Νὰ εὕρητε τὰςς ὁμοιότητας καὶ τὰς διαφορὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τετραγώνου.

9. Νὰ εὕρητε τὰς ὁμοιότητας καὶ διαφορὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ κύβου.

10. Ἰχνογραφήσατε ἓν ὀρθ. παραλληλόγραμμον μὲ τὰς διαγωνίους του.

8. Παράστασις τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν σωμάτων ἐπὶ χάρτου

(Κλίμαξ)

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ παράστασις μιᾶς μεγάλης εὐθείας ἢ καμπύλης ἢ τεθλασμένης ἢ καὶ μικτῆς γραμμῆς μὲ τὸ πραγματικόν της μῆκος ἐπάνω εἰς τὸ μικρὸν φύλλον τοῦ βιβλίου τῆς γεωμετρίας δὲν εἶναι δυνατή. Ἑπομένως καὶ ἡ παράστασις ἐπάνω εἰς τὸ ἴδιον φύλλον μιᾶς ἐπιφανείας μὲ πλευρὰς μεγάλας δὲν εἶναι εὔκολος νὰ γίνη μὲ τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν πλευρῶν της. Ἐπίσης δὲν εἶναι εὔκολον νὰ γίνη ἐπάνω εἰς τὰ μικρὰ φύλλα τοῦ βιβλίου καὶ ἡ παράστασις στερεῶν μεγάλων, μὲ τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν μεγάλων ἑδρῶν του.

Εὐκολονόητον λοιπὸν εἶναι πὼς ἐπάνω εἰς τὸ μικρὸ φύλλον τοῦ βιβλίου τῆς γεωμετρίας δὲν εἶναι εὔκολον ἡ παράστασις τῶν γραμμῶν μὲ τὰ πραγματικά των μήκη, καθὼς καὶ ἡ παράστασις ὅλων ἐν γένει τῶν μεγάλων γεωμετρικῶν σχημάτων. Δι' αὐτὸ αἱ ἄνθρωποι εὑρέθησαν εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ σμικρύνουν ταῦτα καὶ νὰ τὰ παριστάνουν ὑπὸ σμίκρυνσιν. Μία εὐθεῖα ὁδὸς π.χ. 1000 μέτρων παριστάνεται εἰς τὸ φύλλον ἐπάνω μὲ γραμμὴν $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ κ. λ. τοῦ μέτρου.

Εὐκολονόητον ἐπίσης εἶναι πὼς διὰ νὰ παρασταθῆ ὑπὸ σμίκρυνσιν μία τεθλασμένη γραμμή, πρέπει ἕκαστον τμῆμα αὐτῆς νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν ἰδίαν σμίκρυνσιν. Ἔτσι ἡ τεθλασμένη θὰ μᾶς παρουσιάζη ὑπὸ σμίκρυνσιν καὶ τὴν ὅλην της μορφὴν (τὴν ὅλην εἰκόνα της, τὸ σχῆμα της).

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον παριστάνεται ἐπάνω εἰς τὸ χαρτὶ καὶ κάθε μία ἐπιφάνεια. Ὅλαι αἱ πλευραί της δηλαδὴ παριστάνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν σμίκρυνσιν.

Καὶ εἰς τὴν παράστασιν ἑνὸς στερεοῦ σώματος τὸ ἴδιον πρέπει νὰ συμβαίνῃ. Αἱ πλευραὶ ἑκάστου μέρους του πρέπει νὰ γράφωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν σμίκρυνσιν. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν ἐνώπιόν μας ὑπὸ τὴν ἰδίαν σμίκρυνσιν καὶ τὴν ὅλην μορφὴν (ἤτοι τὴν εἰκόνα, τὸ σχῆμα) τοῦ στερεοῦ.

Ἔτσι λοιπὸν κατὰ τὴν παράστασιν μιᾶς ἐπιφανείας θὰ ὑπάρχῃ σταθερὰ ἀναλογία μεταξὺ τῶν μηκῶν τῶν γραμμῶν τοῦ σχήματος καὶ τῶν ἰδίων γραμμῶν τῆς πραγματικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ σταθερὰ αὐτὴ ἀναλογία, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μηκῶν ὅλων τῶν γραμμῶν τοῦ χάρτου μιᾶς ἐπιφανείας καὶ τῆς πραγματικῆς ἐπιφανείας λέγεται κλίμαξ.

Ἡ κλίμαξ ὑπὸ τὴν ὁποίαν κατασκευάζονται οἱ χάρται σημειώνεται ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην.

Οὕτως, ἐὰν σημειώνεται εἰς τὸν χάρτην κλίμαξ $\frac{1}{100}$ $(= 1 : 100)$ σημαίνει ὅτι μῆκος 100 μέτρων παριστάνεται εἰς τὸν χάρτην μὲ μῆκος 1 μέτρου. Καὶ ἀντιθέτως· ἐὰν μία γραμμὴ εἰς τὸν χάρτην εἶναι 1 μέτρον, θὰ εἰπῇ ὅτι αὕτη εἰς τὴν πραγμστικὴν ἐπιφάνειαν εἶναι 100 μέτρα.

Ἀσκήσεις

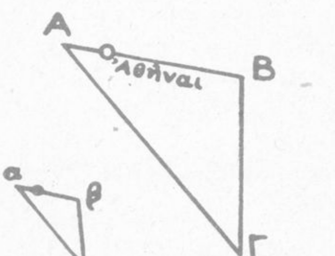
1. Ὁ χάρτης τῆς Χερσονήσου ΑΒΓ (σχ. 43) ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1.700.000}$. Νὰ βρῆτε τὸ πραγματικὸν μῆκος τῶν πλευρῶν της.

2. Ὁ χάρτης τῆς αβγ τῆς αὐτῆς χερσονήσου ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10\,000\,000}$ Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της.

5. Νὰ εὕρητε εἰς τὸν χάρτην σας τὴν ἀπόστασιν.

α) Πειραιῶς — Χανίων
β) Πειραιῶς — Ρόδου
γ) Ἀθηνῶν — Λαρίσης
δ) Ἀθηνῶν — Πατρῶν.

4. Νὰ κάμετε τὸν χάρτην τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{200}$.



Σχ. 43

5. Ἀναγνώσατε τὰς κατωτέρω κλίμακας καὶ ἐξηγήσατε αὐτάς :

α) $\frac{1}{100}$ (διὰ τὰ σχέδια οἰκοδομῶν) β) $\frac{1}{1000}$ (διὰ σχέδια κτημάτων)

γ) $\frac{1}{50.000}$ (διὰ χάρτας στρατιωτικοὺς)

δ) $\frac{1}{1.000.00}$ (διὰ γεωγραφικοὺς χάρτας διεθνεῖς)

ε) $\frac{1}{1.500.000}$ (διὰ γεωγραφικοὺς σχολικοὺς χάρτας)

στ) $\frac{1}{10.000.000}$ » » » »

9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

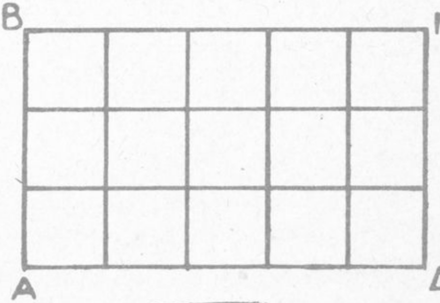
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

10. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Βάσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρά του: π.χ. ἡ ΑΔ (σχ. 44).

Ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρά του κάθετος εἰς τὴν βάσιν του· ἡ ΑΒ (σχ. 44). Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 44).



Σχ 44

Μετροῦμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΑΔ = 5 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ = 3 μ. Χωρίζομεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του εἰς μέτρα καὶ ἀπὸ τὰς διαιρέσεις των φέρομεν καθέτους εἰς τὴν βάσιν ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΒ. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς 15 τ.μ. ἤτοι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 15 τ.μ. Ἀλλὰ τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ βάσις του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι 5 × 3 = 15 τ. μ.

Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

11. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 40), τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔστωσαν: μῆκος ἡ ΑΔ = 8 μέτρα· πλάτος ἡ ΑΒ = 4 μέτρα καὶ ὕψος ἡ ΑΕ = 2 μέτρα:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ εἶναι

8 × 4 = 32 τετρ. μέτρα.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΔΘΕΑ εἶναι

8 × 2 = 16 τετρ. μέτρα

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΒΖΕΑ εἶναι 4 × 2 = 8 τετρ. μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν εἶναι

32 + 16 + 8 = 56 τετρ. μέτρα.

Ἀλλὰ ἡ ἕδρα ΕΖΗΘΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 32 τ. μ.

Ἡ ἕδρα ΒΓΗΖΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν ΑΔΘΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 16 τετρ. μέτρα.

Καὶ ἡ ἕδρα ΔΓΗΘΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΖΕΑ· ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν ταύτης εἶναι 8 τετρ. μέτρα.

Ἄρα καὶ τῶν ἄλλων τριῶν ἑδρῶν ΕΖΗΘΕ, ΒΓΗΖΒ καὶ ΔΓΗΘΔ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 32 + 16 + 8 = 56 τετρ. μέτρ.

Ὅθεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν πρώτων ἑδρῶν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 ἑδρῶν τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου· ἤτοι 56 × 2 = 112 τετρ. μέτρα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι: πρῶτον βρήκαμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔΑ, ΑΔΘΕΑ καὶ ΑΒΖΕΑ ἑκάστης χωριστά· ἤτοι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ τῶν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως σχηματίζοτν μίαν τρίεδρον γωνίαν. Δεύτερον προσθέσαμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 2.

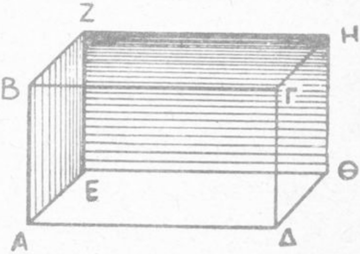
Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβαδὸν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν μετὰ τῶν ὁποίων αὕτη σχηματίζει μίαν τρίεδρον γωνίαν, καθεμιᾶς δὲ χωριστά. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰ τρία ἐμβαδὰ καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.

12. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου σχ. 45, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι:

ΑΔ = 8 μ. τὸ μῆκος· ΑΒ = 4 μ. τὸ πλάτος· καὶ ΑΕ = 2 μ. τὸ ὕψος.

Σκέψις: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ εἶναι 8 × 4 = 32 τ.μ.



Σχ. 45

Χωρίζομεν λοιπὸν τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του στὰ 32 τ.μ. καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὰ τοποθετοῦμεν 32 κ.μ. Θὰ σχηματισθῇ ἔτσι ἓν στερεὸν μὲ διαστάσεις μῆκος 8 μ. πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 1 μ. Ἐπὶ τοῦ στερεοῦ τούτου τοποθετοῦμεν ἄλλο ὅμοιον. Θὰ σχηματισθῇ τότε στερεὸν μὲ διαστάσεις: μῆκος 8 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 2 μέτρων· ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν ὄγκον. Φανερὸν ἤδη ὅτι ὁ ὄγκος τούτου εἶναι 32 × 2 = 64 κ. μ.

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος 8 ἐπὶ τὸ πλάτος 4 καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος 2· ἤτοι (8 × 4) × 2 = 32 × 2 = 64 κ. μ.

Ὅθεν: διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος του ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι:

«Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων».

13. Προβλήματα ὀρθογωνίου Παραλληλεπιπέδου

ΟΜΑΣ Α΄. (ὀρθογ. παραλληλογράμμου).

1. Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 75 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 40 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του !

2. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 360 μέτρα, τὸ δὲ μῆκος του 105 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν του ;

3. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 45 μέτρων καὶ ὕψος 25,50 μέτρων Πόσον συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν περίφραξίν της διὰ 7 συρμάτων ;

4. Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 56.60 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 38,75 μέτρα· Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

5. Εἷς κῆπος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ εἶναι 575 τετρ. μέτρων. Ἐὰν τὸ μῆκος του εἶναι 25 μέτρα, ποῖον εἶναι τὸ πλάτος του ;

6 Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἡ περίμετρός του εἶναι 150 μ.· τὸ δὲ μῆκος του 50 μ.· πόσο εἶναι τὸ πλάτος του ; Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

7. Εἷς ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει βάσιν μὲν 100 μέτρων, τὴν δὲ κάθετον εἰς ταύτην πλευρὰν 50,50 μέτρων. Πόσα νέα στρέμματα εἶναι οὗτος ;

8. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 50,60 μέτρα καὶ ὕψος 40 μέτρα. Τοῦτο ἐπωλήθη 404800 δραχμάς. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὸ τετραγ. μέτρον ;

9. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 50 μέτρων καὶ ὕψος 35 μέτρων. Ταῦτο πωλεῖται πρὸς 200 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ποία εἶναι ἡ ἀξία του ;

10. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος μὲν 5,40 μέτρων, πλάτος δὲ 4,50 μέτρων. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ στρωθῇ, ἐὰν τὸ μῆκος ἑκάστης σανίδος εἶναι 1,80 μέτρων, τὸ δὲ πλάτος 0,25 μέτρων ;

11. Τὸ πάτωμα ἑνὸς μαγειρείου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 6,40 μέτρων, πλάτος δὲ 4,80 μέτρων. Πόσα πλακάκια σχήματος τετραγώνου θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν πλακόστρωσίν του, ἐὰν ἡ περίμετρός των εἶναι 0,64 τοῦ μέτρου ;

12. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 32,40 τετραγωνικὰ μέτρα· τοῦτο ἐστρώθη μὲ τάπητα μήκους 27 μέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ τάπητος ;

13. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 10,5 μ. τὸ δὲ ὕψος 5,5. Ποία εἶναι ἡ περίμετρός του ; Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του ;

14. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 4 μ., ἡ δὲ περίμετρος 12 μ. ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

15. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ὀν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ εὕρετε : α) Τὴν βάσιν του. β) Τὸ ὕψος του. γ) Τὴ περίμετρόν του. δ) Τὸ ἐμβαδόν του.

ΟΜΑΣ Β΄. (Ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου).

1. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις : μῆκος 8 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 3 μέτρων· α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του ; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

2. Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 15 μέτρα, πλάτος 8.50 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ ;

3. Ἓν δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 5 μ., πλάτος 3,80 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ ;

4. Μία σανὶς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 4 μ., πλάτος 0,45 μ. καὶ πάχος ,040 μ. ;

α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της !

β) Ποῖος ὁ ὄγκος της ;

5. Εἰς μίαν τάφρον μήκους 35 μ. καὶ πλάτος 2,40 μ. ὑπάρχει νερὰ εἰς ὕψος 0,75 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος εὑρίσκονται εἰς αὐτήν ;

6. Μία πλατεῖα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 80,5 μ., τὸ δὲ πλάτος 70 μ. Τὴν ἐπιφάνειαν ταύτης πρόκειται ν' ἀναβιβάσωμεν κατὰ 0,40 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χώματος πρέπει νὰ προστεθοῦν ;

7. Ἓν κιβώτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 1,50 μ. πλάτος 0,80 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ. Πόσας πλάκας σάπωνος σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ δια-

στάσεις: μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,05 μ. καὶ ὕψος 0,04 μ. χωροῦν σ' αὐτό;

8. Μία χορταποθήκη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις: μῆκος 40 μ., πλάτος 30 μ. καὶ ὕψος 10 μ. Πόσα δεματα χόρτου ἰδίου σχήματος καὶ μὲ διαστάσεις: μῆκος 1,20 μ. πλάτος 1 μ. καὶ ὕψος 1 μ. χωρεῖ αὕτη;

9. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ον ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εὕρετε: α) Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ ἀκμαί του; β) τὸ ἐμβαδόν του; γ) τὸν ὄγκον του;

10. Ἕνα τεπόζιτο ἔχει διαστάσεις: 2 μ., 1 μ. καὶ 0,75 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος του καὶ πόσα κιλὰ χωρεῖ;

11. Τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου μας ἔχει ἐμβαδὸν 50,4 τετρ. μέτρα, τὸ ὕψος δὲ τούτου εἶναι 6 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὸ πρὸ αὐτῶν πλάγιον παραλληλεπίπεδον)

1. Παρατηρήσεις

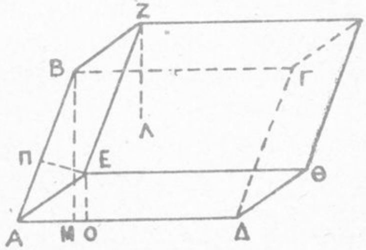
1. Ὄγκος καὶ σχῆμά του.

1. Ἔχει ὡρισμένον ὄγκον καὶ σχῆμα· ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν. (σχ. 46).

2. Ἐπιφάνειά του.

1) Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας. Εἶναι ὅθεν πολύεδρον ἑξάεδρον.

2) Αἱ 6 ἕδραι του εἶναι ὅλαι ἐπίπεδοι. (Πῶς ἐλέγχομεν τοῦτο);



Σχ. 46

3) Καὶ τοῦτο στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας του, ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως. (ΑΒΓΔ σχ. 46).

4) Αἱ ἕδραι του, ποὺ ἑνοῦνται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του καὶ μὲ τὴν ἀπέναντί της, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρόν του ἐπιφάνειαν καὶ

λέγονται γι' αὐτὸ παράπλευροι ἕδραι. (ΑΔΘΕΑ, ΔΓΗΘΔ, ΓΗΖΒΓ, ΖΒΑΕΖ).

5) Ἂν τοποθετήσωμεν τοῦτο ἐπὶ χαρτονίου καὶ ἰχνογραφήσωμεν ἀνὰ μίαν τὰς ἕδρας του καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς μόνον ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της. Ἄρα εἶναι ἴσαι μόνον ἀνὰ δύο· ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της.

6) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της· ἄρα αἱ ἕδραι του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο. Εἶναι λοιπὸν παραλληλεπίπεδον.

3. *Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι.*

1) Καὶ τούτου αἱ ἕδραι ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν διέδρους γωνίας ὡς τὴν ΑΕΖΒΓΔΑ.

2) Ἐπίσης ἑνοῦνται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ σχηματίζουν γωνίας τριέδρους ἢ στερεὰς (τὰς Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ). Αἱ ἕδραι ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ καὶ ΑΒΓΔΑ σχηματίζουν τὴν τρίεδρον γωνίαν Α (σχ. 46).

3) Αἱ ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων γωνιῶν κάμνουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ποὺ λέγονται ἀκμαί. (ὡς ἡ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· ΕΖ, ΗΖ ΗΘ, ΘΕ· ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ).

4. *Σχῆμα τῶν ἑδρῶν του.*

1) Καὶ τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας μᾶς δίδουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραί της. Ὅθεν αἱ ἕδραι του εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

2) Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἐπεκταθοῦν καὶ κατὰ τὰ δύο ἄκρα των δὲν συναντῶνται ἀνὰ δύο (ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της). Ἄρα αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο. Ὥστε αἱ ἕδραι καὶ τοῦ στερεοῦ τούτου εἶναι παραλληλόγραμμα. Γι' αὐτὸ θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἀπέναντί του πλευρὰς ἴσας.

3. Αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του ἑνοῦνται διὰ τῶν ἄκρων των καὶ κάμνουν ἐπιπέδους γωνίας· π.χ. τὴν ΒΑΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΓΒΑ.

4. Ἐὰν ἐλέγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων του γωνιῶν θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται δὲν εἶναι κάθετοι. Ἑπομένως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου δὲν εἶναι ὀρθαί, ἀλλ' εἶναι ἄλλαι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι. Εἶναι λοιπὸν ἑκάστη ἕδρα του παραλληλόγραμμον ἔχον τὰς γωνίας του ὀξείας καὶ ἀμβλείας. Τὰ σχήματα αὐτὰ λέγονται πλάγια παραλληλόγραμμα.

῞Οθεν: Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον ποὺ ἔχει τὰς γωνίας του ἄλλας ὀξείας καὶ ἄλλας ἀμβλείας, τὰς δὲ πλευρὰς ἴσας ἀνὰ δύο.

5. Σχῆμα τοῦ ἑξαέδρου στερεοῦ.

1. Αἱ δίεδροί του γωνίαι, ποὺ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀντιστοίχους των ἐπιπέδους γωνίας, εἶναι ἐπίσης ἄλλαι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι.

Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ἑξάεδρον, παραλληλεπίπεδον, ἔχει τὰς διέδρους του γωνίας ὀξείας ἢ ἀμβλείας, τὰς δὲ ἕδρας πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο (καθὲν μὲ τὸ ἀπέναντί του).

Τὰ τοιαῦτα στερεὰ λέγονται πλάγια παραλληλεπίπεδα.

῞Οθεν : Πλάγιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ἑξάεδρον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα δὲ καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο, ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του. (σχ. 46),

2. Διαστάσεις τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὰς αὐτὰς ἐπεκτάσεις μὲ τὰ προηγούμενα στερεά. Καὶ αὐτὸ λοιπὸν ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

᾿Αλλ᾿ αἱ ἐπεκτάσεις του δὲν εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ φέρομεν ἡμεῖς τοιαύτας εἰς τὸ μῆκος, γιὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος.

῞Οθεν : α) Μῆκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγεται μιὰ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του. (ΑΔ σχ. 46).

β) Πλάτος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, λέγεται ἡ κάθετος εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν φέρομεν εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους ἀπ᾿ τὴν ἀπέναντί της ἀκμὴν τῆς βάσεως (ἡ ΒΜ σχ. 46)

γ) ῞Υψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ, ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἀπέναντί της ἕδρας ΕΖΗΘΕ· (ἡ ΖΛ σχ. 46).

3. ᾿Ιχνογράφησις πλαγίου παραλληλογράμμου

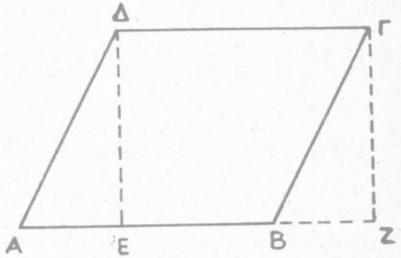
Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν πλάγιον παραλληλόγραμμον :

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν γωνίαν ὀξεῖαν τὴν Α (σχ. 47).

β) Φέρομεν μὲ τὸν κανόνα παράλληλον τῆς ΑΒ πλευρᾶς της τὴν ΔΓ.

γ) Φέρομεν ἐπίσης μὲ τὸν κανόνα παράλληλον τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ΑΔ τὴν ΒΓ.

δ) Ἐπεκτείνομεν τὰς παραλλήλους ταύτας μέχρι συναντήσεώς των καὶ ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔΑ (σχ. 47).



Σχ. 47

2. Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως ἓν ὡρισμένον πλάγιον παραλληλόγραμμον ;

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ἴσον μὲ μίαν πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου.

β) Γράφομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς τὰς δύο γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου (ὀξεῖαν καὶ ἀμβλεῖαν).

γ) Εἰς τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν τούτων λαμβάνομεν μέρη ἴσα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου.

Τέλος ἑνοῦμεν τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν των δι' εὐθείας.

4. Κατασκευὴ πλαγίου παραλληλογράμμου ἐκ χαρτονίου

Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον εἰς τὸ χαρτόνιον καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὸ χαρτόνιον εἰς τὰς χαραχθείσας πλευράς.

5. Ἰχνογράφησις πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Διὰ νὰ γράψωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον κάμνομεν ὅ,τι καὶ διὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ δύο ἴσων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἰχνογραφουμεν εἰς τὸ χαρτόνιον δύο πλάγια παραλληλόγραμμα ἴσα.

Ἀσκήσεις :

1) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 46).

2) Ἀναγνώσατε τὰς ἀνὰ 2 ἴσας καὶ παραλλήλους ἕδρας.

3) Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει : Πόσας διέδρους γωνίας ; Πόσας τριέδρους ; Πόσας ἐπιπέδους ;

4) Ποῖαι αἱ ὁμοιότητες τοῦ πλαγίου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

5) Ποῖαι αἱ διαφοραὶ αὐτῶν;

6) Ποῖα κοινὰ ἔχουν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ πλάγιον τοιοῦτον;

6. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου πρέπει νάγνωρίζωμενπῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλογράμμου.

7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλογράμμου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 47).

Μετροῦμεν τὴν βάσιν του ΑΒ καὶ τὸ ὕψος του ΔΕ καὶ ἔστω ΑΒ = 4 μ. καὶ ΔΕ = 3 μ.

Ἀποκόπτομεν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τοποθετοῦμεν τοιουτοτρόπως, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΔ νὰ πέσῃ εἰς τὴν ἴσην της ΒΓ. Σχηματίζεταιτότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΔΓΖΕΔ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΕΖ = ΑΒ = 4 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΔΕ = 3 μέτρα· τὸ δὲ ἐμβαδόν του 4 × 3 = 12 τ. μ.

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο παραλληλόγραμμον φανερὸν ὅτι εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι 12 τ. μ. τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ εἰς αὐτό, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι 4×3=12 τ μ.

***Ὅθεν** : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πλαγίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα μεταξύ των ἀνὰ δύο, καθένα μὲ τὸ ἀπέναντί του.

Ἐπομένως εὑρίσκοντες τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τούτου γνωρίζομεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπέναντί της.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 48), τοῦ ὁποίου ἔστω:

α) Τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ τὸ μῆκος ΑΔ = 40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΒΜ = 19 μέτρα.

β) Τῆς ἕδρας ΑΔΘΕΑ τὸ μῆκος ΑΔ = 40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΕΟ = 6 μέτρα.

γ) Τῆς ἕδρας ΑΒΖΕΑ τὸ μῆκος ΑΒ = 20 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΕΠ = 6 μέτρα.

δ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ εἶναι 40 × 19 = 760 τετρ. μέτρα.

ε) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΔΘΕΑ εἶναι 40 × 6 = 240 τετρ. μέτρα.

στ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΕΒΖΕΑ εἶναι 20 × 6 = 120 τετρ. μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν εἶναι 760 + 240 + + 120 = 1120 τετρ. μέτρα.

Ἀλλὰ ἡ ἕδρα ΕΖΗΘΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 760 τετρ. μέτρα.

Ἡ ἕδρα ΒΓΗΖΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν ΑΔΘΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 240 τετρ. μέτρα.

Καὶ ἡ ἕδρα ΔΓΗΘΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΖΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 120 τετρ. μέτρα

Ὥστε καὶ τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν ΕΖΗΘΕ, ΒΓΗΖΒ καὶ ΔΓΗΘΔ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 760 + 240 + 120 = 1120 τετρ. μέτρα. Ὅθεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν πρώτων ἑδρῶν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 ἑδρῶν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου· ἤτοι 1120 × 2 = 2240 τετρ. μέτρα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

Πρῶτον εὑρήκαμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔΑ, ΑΔΘΕΑ καὶ ΑΒΖΕΑ, ἑκάστης χωριστά. ἤτοι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ δύο παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι μὲ αὐτὴν σχηματίζουν μίαν τρίεδρον γωνίαν. Δεύτερον προσθέσαμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν αὐτῶν ἑδρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 2.

Ὅθεν:** **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβα-

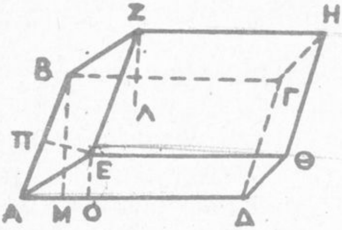
δὸν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν μετὰ τῶν ὁποίων αὕτη σχηματίζει μίαν τρίεδρον γωνίαν, καθεμιᾶς δὲ χωριστά. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰ τρία ἐμβαδὰ καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.

10. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου πλαγίου παραλληλεπιπέδου

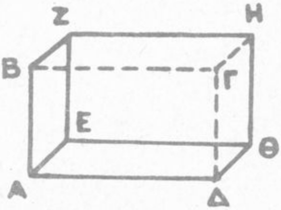
Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνιον ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις:

Μῆκος ΑΔ=0,30 μ. Πλάτος ΒΜ=0,15 μ. καὶ ὕψος ΖΛ=0,20 μ. (σχ. 48).

Κατασκευάζομεν μὲ χαρτόνιον ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις· ἤτοι: μῆκος ΑΔ = 0,30 μ., πλάτος ΑΒ = 0,15 μ. καὶ ὕψος ΑΕ = 0,20 μ. Γεμίζομεν τοῦτο μὲ ἄμμον καὶ



Σχ.48



Σχ. 49

τὸ ἀδειάζομεν εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον· βλέπομεν ὅτι καὶ τοῦτο γεμίζει ἀκριβῶς. Ἄρα τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

Εὑρίσκομεν τώρα τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου: ἤτοι 0,30 × 0,15 × 0,20 = 0,009 κ.μ.

Κάμνομεν τὸ ἴδιο καὶ εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον· ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος του ἐπὶ τὸ πλάτος του καὶ τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸ ὕψος του. ἤτοι: 0,30 × 0,15 × 0,20 = 0,009 κ.μ.

Βλέπομεν ὅτι εὑρήκαμεν τὸν ὄγκον του, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

***Ὅθεν**: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκός του ἐπὶ τὸ πλάτος του καὶ τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

ἤτοι: «*Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων*».

11. Προβλήματα πλαγίου παραλληλεπιπέδου

ΟΜΑΣ Α΄ (Πλαγίου παραλληλογράμμου)

1. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 56 μ , τὸ δὲ ὕψος 45 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

2. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 34,5 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν πλευράς του 20,60 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

3. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 90 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν πλευράς του 15 μέτρα καὶ ὕψος του 10 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

4. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, μὲ βάσιν 108 μέτρων καὶ ὕψος 50,50 μέτρων. Αὕτη ἐπωλήθη ἀντὶ 98.172 δραχμῶν. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

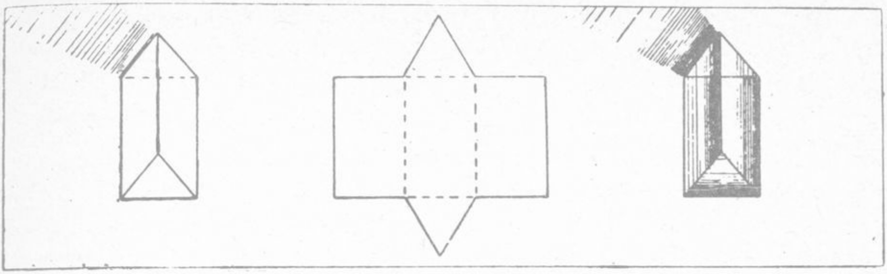
5. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 170 μέτρων, τὸ δὲ πλάτος 30 μέτρων. Τοῦτο ἐπωλήθη πρὸς 150 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου;

6. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι 2420 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 60,50 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

ΟΜΑΣ Β΄ (πλαγίου παραλληλεπιπέδου).

1. Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα (σχῆμα 48). Ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς του ἔχει βάσιν μὲν 20 μέτρων, ὕψος δὲ 9,50 μέτρων. Ἡ παράπλευρος ἕδρα του, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν κοινὴν μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἔχει ὕψος 3 μέτρων. Ἡ δὲ παράπλευρος ἕδρα του, ἥτις μὲ τὰς δύο προηγουμένας σχηματίζουν τρίεδρον γωνίαν, ἔχει βάσιν μὲν 10 μέτρων, ὕψος δὲ 3 μέτρων. Τὸ ὕψος τέλος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 2,50 μέτρων: α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του;

2. Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα. Ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς του ἔχει βάσιν μὲν 40 μέτρων, ὕψος δὲ 19 μέτρων. Ἡ παράπλευρος ἕδρα του, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν κοινὴν μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἔχει ὕψος 6 μέτρων· ἡ δὲ παράπλευρος ἕδρα του, ἥτις μὲ τὰς δύο προηγουμένας σχηματίζουν γωνίαν τρίεδρον. ἔχει βάσιν μὲν 20 μέτρων, ὕψος δὲ 6 μέτρων. Τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5 μέτρων. α) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του;.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὰ πρὸ αὐτῶν πρίσματα)

1. Παρατηρήσεις

1. Ἕκαστον ἔχει ὡρισμένον σχῆμα καὶ ὄγκον. ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν.

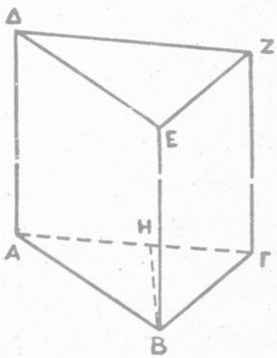
2. Ἕκαστον εἶναι πολύεδρον.

3. Αἱ ἕδραι ἑκάστου εἶναι ἐπίπεδοι.

4. Καὶ τοῦτο στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως· (ἡ ΑΒΓ σχ. 49). Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀπέναντί της ΔΞΖ λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως.

5. Αἱ ἕδραι του, ποὺ ἑνοῦνται μὲ τὰς ἕδρας τῶν βάσεών του, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρόν του, ἐπιφάνειαν καὶ λέγονται γι' αὐτὸ παράπλευροι ἕδραι· (αἱ ΑΔΖΓΑ, ΑΔΕΒΑ, ΒΕΖΓΒ).

6. Καὶ τούτων αἱ ἕδραι ἑνοῦνται καὶ σχηματίζουν διέδρους καὶ τριέδρους γωνίας καὶ ἀκμάς.



Σχ. 49

7. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις των θὰ ἴδωμεν ὅτι παράλληλοι εἶναι πάντοτε μόνον αἱ ἕδραι τῶν δύο βάσεών του, αἱ ὁποῖαι καὶ αἱ δύο ἔχουν τὸ αὐτὸ σχῆμα.

8. Ἐὰν ἰχνογραφήσωμεν ἐπὶ χαρτονίου τὰς ἕδρας τοῦ πρίσματος, τὰς κόψωμεν καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν ἀνὰ δύο τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν

ἄλλην, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι μόνον αἱ ἕδραι τῶν δύο βάσεών του, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι δὲν ἐφαρμόζουν πάντοτε, καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι πάντοτε ἴσαι (σχ. 34). Αὗται εἶναι ἴσαι μόνον, ὅταν αἱ ἕδραι τῶν βάσεών των ἔχουν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα (π. χ. σχ. 49).

9. Τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί. Ἄρα αἱ ἕδραι των εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

Αἱ εὐθεῖαι δὲ εἰς τὰς ὁποίας τελειώνουν ταῦτα λέγονται πλευραὶ αὐτῶν.

10. Αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἑνοῦνται διὰ τῶν ἄκρων των καὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους γωνίας.

11. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἑδρῶν του καὶ κατὰ τὰ δύο ἄκρα των θὰ ἴδωμεν ὅτι μόνον τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του αἱ πλευραὶ δὲν συναντῶνται ἀνὰ δύο, ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της.

Ὅθεν: Αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι πάντοτε παραλληλόγραμμα αἱ δὲ ἕδραι τῶν βάσεών του ἔχουν οἱονδήποτε σχῆμα.

12. Ἐὰν ἐλέγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων του γωνιῶν, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς ἄλλα αὗται εἶναι κάθετοι καὶ εἰς ἄλλα ὄχι. Ἑπομένως αἱ ἐπίπεδοι των γωνίαι εἰς ἄλλα εἶναι ὀρθαί, εἰς ἄλλα ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι καὶ εἰς ἄλλα μερικαὶ ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι καὶ μερικαὶ ὀρθαί.

13. Τὸ καθένα λοιπὸν εἶναι: σῶμα, στερεόν, πολύεδρον μὲ παραλλήλους καὶ ἴσας μόνον δύο ἕδρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν οἱονδήποτε σχῆμα, τὰς δὲ παραπλεύρους ἕδρας παραλληλόγραμμα. Ταῦτα λέγομεν πρίσματα.

***Ὅθεν*: Πρίσμα λέγεται τὸ πολύεδρον στερεόν, τοῦ ὁποίου μόνον δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔχουν δ' αὗται οἱονδήποτε σχῆμα, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι του, αἱ παράπλευροι, εἶναι παραλληλόγραμμα.**

Ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον λοιπὸν εἶναι πρίσματα.

14. Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται βάσεις αὐτοῦ.

Ἂν αἱ πλευραὶ τούτων εἶναι 3 τὸ σχῆμα των λέγεται τρίπλευρον ἢ τρίγωνον, (διότι αὗται σχηματίζουν 3 ἐπιπέδους γωνίας).

Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων εἶναι 4, τὸ σχῆμα των λέγεται τετράπλευρον, ἂν δὲ περισσότεραι, πολύπλευρον ἢ πολύγωνον.

2. Εἴδη πρισμάτων

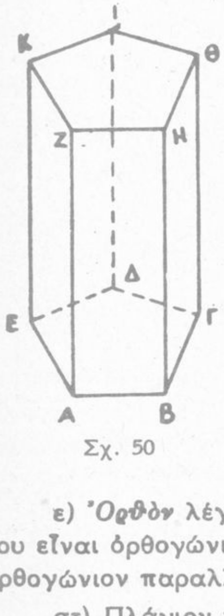
Ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῶν ἑδρῶν τῶν δύο βάσεων τὸ πρίσμα λέγεται:

α) ***Τριγωνικόν,*** ἂν αὗται εἶναι τρίγωνα (σχ. 49).

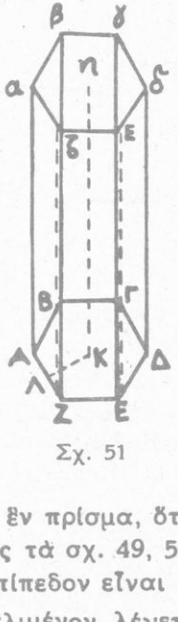
β) ***Πενταγωνικόν,*** ἂν αὗται εἶναι πεντάγωνα (σχ. 50).

γ) ***Ἑξαγωνικόν,*** ἂν αὗται εἶναι ἑξάγωνα, κ.λ.π. (σχ. 51).

δ) ***Κανονικὸν*** λέγεται τὸ πρίσμα, ὅταν αἱ ἕδραι τῶν βάσεών του εἶναι κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα (σχ. 51).



Σχ. 50



Σχ. 51

Σχ. 52

ε) ***Ὀρθὸν*** λέγεται ἓν πρίσμα, ὅταν ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια (ὡς τὰ σχ. 49, 50, 51). Ἐπίσης ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὰ πρίσματα.

στ) Πλάγιον ἢ κεκλιμένον λέγεται τὸ πρίσμα, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὀρθὸν (ὡς τὸ σχ. 52). Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι πρίσμα πλάγιον.

3. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων

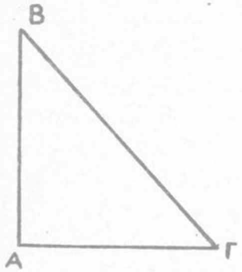
Αἱ ἕδραι λοιπὸν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα: Τρίγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ.λ. πολύγωνα.

4. Τρίγωνα

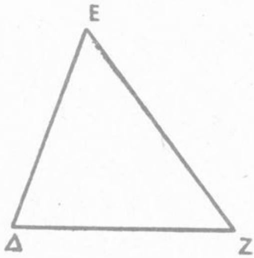
1. Τρίγωνον λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. (Σχ. 53, 54, 55),

2. Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ὀρθὴ (ΑΒΓ σχ. 53).

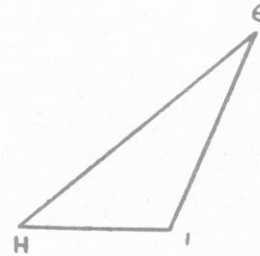
3. Ὀξυγώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι (ΔΕΖ σχ. 54).



Σχ. 53



Σχ. 54



Σχ. 55

4. Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα (ΗΙΘ σχ 55).

5. Ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας πρὸς ἀλλήλας. (ΑΒΓ σχ. 56).

6. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας μό-

Σχ. 56

Σχ. 57

Σχ. 58

νον δύο πλευρὰς (δύο σκέλη). (ΔΕΖ σχ. 57).

7. Σκαλινὸν τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς τρεῖς πλευράς του ἀνίσους. (ΚΛΜ σχ. 58).

8. Πλευραὶ τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας τοῦτο περατοῦται· (ἡ ΑΒ, ΒΓ. ΓΑ σχ. 53).

9) Γωνίαι τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, ποὺ σχηματίζουν αἱ πλευραὶ του ἑνούμεναι· (ἡ ΑΒΓ, ἡ ΒΓΑ καὶ ἡ ΓΑΒ σχ 53).

10. Κορυφαὶ τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του· (ἡ Α, ἡ Β, ἡ Γ. σχ. 53).

5. Ἰχνογράφησις τριγώνου

α) Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ἁπλῶς ἓν τρίγωνον γράφομεν μίαν γωνίαν καὶ ἑνώνομεν τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τῶν πλευρῶν της μὲ εὐθεῖαν.

β) Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως ἓν ὡρισμένον τρίγωνον γράφομεν διὰ τοῦ κανόνος μίαν πλευράν του καὶ εἰς τὰ ἄκρα της γράφομεν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ταύτην. Ἔπειτα ἐπεκτείνομεν τὰς ἄλλας δύο πλευράς του μέχρι συναντήσεώς των.

6. Κατασκευὴ τριγώνου ἐκ χαρτονίου

Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ χαρτόνιον καὶ ἔπειτα κόπτομεν τοῦτο εἰς τὰς χαραχθείσας πλευράς του.

7. Διαστάσεις τοῦ τριγώνου

1. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τῶν τριγώνων ἐπεκτείνονται μόνον πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ πλάγια, οὐχὶ δὲ καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ὅθεν αἱ διαστάσεις τῶν τριγώνων εἶναι δύο· μῆκος καὶ πλάτος. Εἰς τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας τὸ μὲν μῆκος λέγομεν καὶ βάσιν αὐτῆς, τὸ δὲ πλάτος καὶ ὕψος αὐτῆς.

2. Βάσις παντὸς τριγώνου εἶναι μία ἀπὸ τὰς πλευράς του. (ἡ ΑΒ σχ. 53), ἡ ΔΖ σχ. 54, ἡ ΚΜ σχ. 58).

3. Ὕψος παντὸς τριγώνου εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὴν βάσιν του εὐθεῖα ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφήν· (ἡ ΑΒ σχ. 53, ἡ ΕΗ σχ. 57, ἡ ΛΟ σχ. 58).

4. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 53), βάσις μὲν εἶναι μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας του (ἡ ΑΓ), ὕψος δὲ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν βάσιν ΑΓ.

Ἀσκήσεις :

1. Γράψατε ἓν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἓν ὀξυγώνιον, ἓν ἀμβλυγώνιον.
2. Γράψατε ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἓν ἰσοσκελές, ἓν σκαληνόν.

3. Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου τοιαῦτα τρίγωνα: (ὀρθογώνιον, ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον, ἰσόπλευρον, ἰσοσκελές, σκαλινόν).

4. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἓν πλάγιον τοιοῦτον· χαράξατε ἔπειτα εἰς αὐτὰ ἀνὰ μίαν διαγώνιον καὶ λυγίσατέ τα ἐπάνω εἰς αὐτάς.

Βλέπομεν τότε ὅτι : α) τὸ καθὲν διηρέθη εἰς 2 ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὰ παραλληλόγραμμα — β) ὅτι ἕκαστον τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

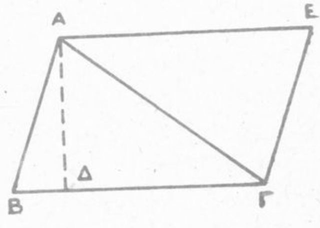
Συμπεράσματα :

1) Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

2) Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

8. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου

Ἔστω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 59)· μετροῦμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του· καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΒΓ = 20 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ = 8 μ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρω τὴν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἀπὸ δὲ τὸ σημεῖον Γ τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ· τοιουτοτρόπως ἔχομεν τὸ π λ ά γ ι ο ν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕΑ. Ἡ διαγώνιος τούτου ΑΓ τὸ διαιρεῖ στὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα. διότι πᾶσα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.



Σχ. 59

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΕΑ εἶναι $20 \times 8 = 160$ τ. μ.

Ἄρα τοῦ καθενὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{160}{2} = 80$ τ. μ.

Ἀλλὰ τὸ 160 εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ ΑΔ ($20 \times 8 = 160$).

Ὅθεν : Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου 80 τ. μ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του ($160 : 2 = 80$).

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

9. Προβλήματα

1. Γράψατε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἓν ὀξυγώνιον ἰσοσκελές, ἓν ἀμβλυγώνιον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου.

2. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων: α) ΑΒΓ σχ. 53, β) ΔΕΖ σχ. 57, γ) ΚΛΜ σχ. 58).

3. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 5 μέτρα, 7 μέτρα καὶ 10 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

4. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 2,06 μέτρα· ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

5. Ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 3,80 μέτρα, τὸ δὲ ἓν σκέλος αὐτοῦ 6,45 μέτρα· ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

6. Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 1,11 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη τῶν πλευρῶν;

7. Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 88 μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 18 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστου σκέλους του;

8. Ἡ βάσις μιᾶς τριγωνικῆς ἀμπέλου εἶναι 80 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος της 60 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

9. Αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μὲν μία 20 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 15 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

10. Ἡ βάσις ἑνὸς τριγωνικοῦ ἀγροῦ εἶναι 350 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 180 μέτρα· πόσα νέα στρέμματα εἶναι ὁ ἀγρὸς οὗτος;

11. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι 150 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 20 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

12. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι 150 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 15 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του;

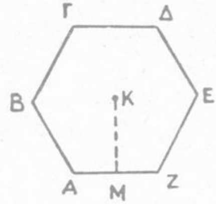
13. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 600 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας 40 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς του γωνίας;

14. Ἡ βάσις ἑνὸς ἀγροῦ τριγωνικοῦ εἶναι 54,60 μέτρων, τὸ δὲ ὕψος 28 μέτρων· τὸ μῆκος δὲ ἑνὸς ἄλλου ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ ἴσου πρὸς αὐτὸν εἶναι 40 μέτρων· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τούτου;

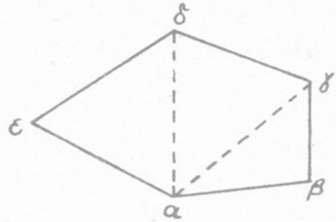
10. Πολύγωνα

1. Πολύγωνον λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει πολλὰς γωνίας (ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 60 καὶ αβγδεα 61).

Ἀναλόγως τῶν γωνιῶν του τὸ πολύγωνον λέγεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον κλπ.



Σχ. 60



Σχ. 61

2. Πλευραὶ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται (ὡς αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ).

3. Γωνίαι τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του ἑνούμεναι (ὡς ἡ ΖΑΒ, ἡ ΑΒΓ κ.λ.π.).

4. Κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. (Ὡς ἡ Α, ἡ Β, ἡ Γ, ἡ Δ, ἡ Ε, ἡ Ζ σχ. 60).

5. Κανονικὸν λέγεται τὸ πολύγωνον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. (Ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΑ σχ. 60).

6. Μὴ κανονικὸν λέγεται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. (Ὡς τὸ αβγδε σχ. 61).

11. Ἰχνογράφησις κανονικοῦ πολυγώνου

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν κανονικὸν πολύγωνον :

α) Χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν καὶ λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς αὐτὴν μέρος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

β) Εἰς τὰ ἄκρα της χαράσσομεν γωνίας ἴσας μὲ τὴν τοῦ πολυγώνου.

γ) Εἰς τὰς νέας πλευρὰς χαράσσομεν τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου συμπληρωθῇ τὸ πολύγωνον.

12. Κατασκευὴ κανονικοῦ πολυγώνου ἐκ χαρτονίου

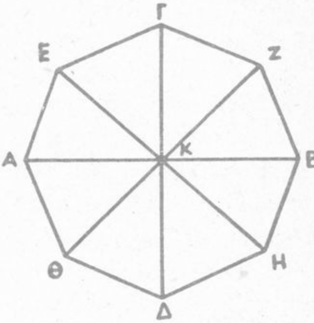
α) *Οἱουδήποτε κανονικοῦ πολυγώνου* :

Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἐπὶ χαρτονίου καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὸχαρτόνιονεἰς τὰς χαραχθείσας πλευράς του.

β) *Κανονικοῦ ὀκταγώνου* :

Κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐκ χαρτονίου κατασκευάζομεν ὡς ἑξῆς :

Διὰ τοῦ γνώμονος φέρομεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον τὴν ΓΔ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι εὐθεῖαι σχηματίζουν τὰς 4 ὀρθὰς γωνίας ΑΚΓ, ΓΚΒ, ΒΚΔ καὶ ΔΚΑ. Ταύτας διχοτομοῦμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (σελ. 17 § 10). Ἑκάστη διαιρεῖται εἰς 2 ὀξείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ καθεμιὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς. Ἄρα ὅλαι αἱ χαραχθεῖσαι 8 ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἤτοι εἶναι γωνίαι ΑΚΕ = ΕΚΓ = = ΓΚΖ = ΖΚΒ = ΒΚΗ = ΗΚΔ = = ΔΚΘ = ΘΚΑ.



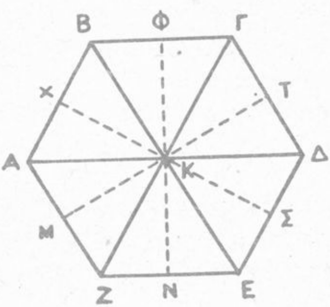
Σχ. 62

Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΕ, ΕΓ, ΓΖ, ΖΒ, ΒΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ τὰς μετροῦμεν. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἤτοι ΑΕ = ΕΓ = ΓΖ = ΖΒ = ΒΗ = ΗΔ = = ΔΘ = ΘΑ. Τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμεν εἰς χαρτόνι ὀν τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον σχ. 62.

Κόπτομεν τέλος τὸ χαρτόνιον εἰς τὴν περίμετρον τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου ΑΕΓΖΒΗΔΘΑ.

13. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγώνου

1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΑ (σχ. 63), τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ἡ περίμετρός του ΑΒΓΔΕΖΑ, ὕψος δὲ ἡ κάθετος ΚΝ ἡ ὁποία ἄγεται εἰς μίαν πλευράν του ἐκ τοῦ κέντρου του.



Σχ. 63

Ἑνώνομεν τὸ κέντρον του Κ μὲ τὰς κορυφάς του Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ, ΔΚ, ΕΚ, ΖΚ. Τοιτοτρόπως τὸ πολύγωνον διῃρέθη εἰς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ. ΓΚΔ, ΔΚΕ, ΕΚΖ, ΖΚΑ.

Τοῦ	ΑΚΒ	βάσις	εἶναι	ἡ	ΑΒ	καὶ	ὕψος	ἡ	ΚΧ
»	ΒΚΓ	»	»	»	ΒΓ	»	»	»	ΚΦ

Τοῦ	ΓΚΔ	βάσις	εἶναι	ἡ	ΓΔ	καὶ	ὕψος	ἡ	ΚΤ
»	ΔΚΕ	»	»	»	ΔΕ	»	»	»	ΚΣ
»	ΕΚΖ	»	»	»	ΕΖ	»	»	»	ΚΝ
»	ΖΚΑ	»	»	»	ΖΑ	»	»	»	ΚΜ

Αἱ βάσεις ὅλων εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ τὰ ὕψη· μετροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ καὶ τὸ ὕψος ΚΧ καὶ ἔστω ὅτι εὕρομεν ΑΒ = 20 μέτρα καὶ ΚΧ = 16 μέτρα. Θὰ ἔχουν λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα βάσιν 20 μέτρων καὶ ὕψος 16 μέτρων. Ὥστε θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου :

$$\text{α) ΑΚΒ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

$$\text{β) ΒΚΓ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

$$\text{γ) ΓΚΔ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

$$\text{δ) ΔΚΕ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

$$\text{ε) ΕΚΖ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

$$\text{στ) ΖΚΑ} = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160 \text{ τ. μ.}$$

ὅλων δὲ ὁμοῦ 960 τ. μ.

Ἀλλὰ φανερὸν εἶναι ὅτι τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἀλλὰ τοῦτο : εὑρίσκομεν καὶ πολλαπλασιάζοντες τὴν περίμετρόν του ΑΒΓΔΕΖΑ, ἡ ὁποία εἶναι $20 \times 6 = 120$ μέτρα, ἐπὶ τὸ ὕψος του ΚΧ = 16 καὶ διαιροῦντες διὰ 2 ἤτοι : $\frac{120 \times 16}{2} = \frac{1920}{2} = 960$ τ. μ.

Ὅθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του (περίμετρόν του) ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

14. Προβλήματα

1. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, (σχ. 41) μετροῦντες τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του.

2. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου σχ. 62.

3. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀκτάγωνον κανονικὸν πολύγωνον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

4. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 40 μέτρα· ποία εἶναι ἡ πλευρά του;

5. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 30 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 38 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

6. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 2280 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 120 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

7. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 512 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 12,8 μέτρα· ποία εἶναι ἡ πλευρά του;

8. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ἑξαγώνου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 108 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 93,53 μέτρα. Πόσον ἀξίζει τὸ οἰκόπεδον, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον αὐτοῦ τιμᾶται 10 0 δραχ.

15. Διαστάσεις τοῦ πρίσματος

Καὶ εἰς τὸ πρίσμα, ὅπως εἰς ὅλα τὰ στερεά, ἔχομεν 3 διαστάσεις· ἤτοι μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. α) Μῆκος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ βάσις (ἢ μῆκος) τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του· (ἡ ΑΓ σχ. 49, ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 51) β) Πλάτος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, (ἡ ΒΗ σχ. 49, ἡ ΚΛ σχ. 51) γ) Ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται εἰς μίαν βάσιν του ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης βάσεώς του, (ἡ Κη. σχ. 51).

16. Ἰχνογράφησις πρίσματος

Πρὸς τοῦτο: α) Γράφομεν τὰς δύο βάσεις του τὴν μίαν ἄνω καὶ τὴν ἄλλην κάτωθι αὐτῆς ἔτσι, ὥστε αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ των νὰ εἶναι παράλληλοι καὶ β) ἑνοῦμεν τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν δι' εὐθειῶν (σχ. 49, 50, 51)

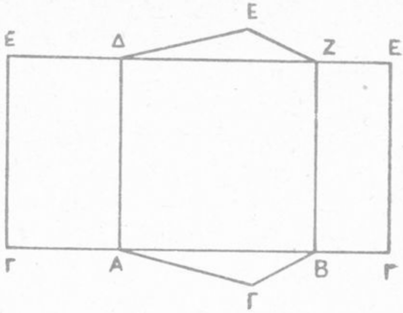
17. Πῶς ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα πρίσματος

Πρὸς τοῦτο: α) γράφομεν δύο ὁριζοντίους εὐθείας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι νὰ ἀπέχουν μεταξύ των, ὅσον τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, ἤτοι τοῦ πρίσματος.

β) Λαμβάνομεν εἰς αὐτὰς μέρη ἴσα μὲ τὰς ἀκμὰς τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος.

γ) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων μὲ εὐθείας. Τοιουτοτρόπως ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

δ) Γράφομεν τὰς ἕδρας τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος κατὰ τὰ γνωστά.



Σχ. 61

Ἔτσι ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος σχ. 49 εἰς τὸ σχ. 65.

18. Κατασκευὴ πρίσματος ἐκ χαρτονίου

Πρὸς τοῦτο : α) Ἰχνογραφοῦμεν εἰς τὸ χαρτόνιον τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ πρίσματος (σχ. 64). Κόπτομεν τὸ χαρτόνιον εἰς τὴν περίμετρον τοῦ ἀναπτύγματος. γ) Χαράσσομεν ἐλαφρὰ τὰς μὴ κοπείσας ἀκμάς, δ) Λυγίζομεν τὰς ἕδρας πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πρίσματος καὶ ε) Κολλῶμεν τὰς ἕδρας εἰς τὰς μὴ κολλημένας ἀκμάς των μὲ χαρτίνας ταινίας καὶ γόμμαν.

19. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πρίσματος

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων του ἑδρῶν· ἤτοι τῆς παραπλεύρου του ἐπιφανείας. Ἀλλ' ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῶν γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδόν των, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἔχουν εὐθύγραμμον σχῆμα.

Ἔσεω τὸ ὀρθὸν κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα (σχ. 51)· ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του ΑΖ=2 μ.· τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΚΛ=1,8 μέτρα· καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος Κκ=8 μ.

Αἱ ἕδραι τῶν βάσεών του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ὅθεν ἔχομεν:

α) Ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕΖ,

$$\frac{(2 \times 6) \times 1,8}{2} = \frac{12 \times 1,8}{2} = \frac{21,6}{2} = 10,8 \text{ τ. μ.}$$

τῶν δὲ δύο βάσεων 10,8×2=21,6 τ. μ.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι:

$(8 \times 2) \times 6 = 16 \times 6 = 96$ τ. μ. (1).

γ) Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρίσματος εἶναι $21,6 + 96 = 117,6$ τ. μ.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πρίσματος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν α) τῶν ἑδρῶν τῶν δύο βάσεών του. β) Τῆς παραπλεύρου του ἐπιφανείας· καὶ γ) προσθέτομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ταῦτα ἐμβαδά.

20. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου παντὸς πρίσματος

Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα (ὡς τοῦ σχ. 51) μὲ πλευρὰν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΖ = 0,10 μ., ὕψος ταύτης ΚΛ = 0,09 μ. καὶ ὕψος τοῦ πρίσματος Κκ = 0,50 μ.

Κατασκευάζομεν ἐπίσης ἀπὸ χαρτόνιον καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ βάσιν ἴσην μὲ τὴν τοῦ πρίσματος.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$\frac{(0,10 \times 6) \times 0,09}{2} = \frac{0,60 \times 0,09}{2} = \frac{0,054}{2} = 0,027 \text{ τ. μ.}$$

Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ καὶ ἡ ἕδρα τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἐμβαδὸν 0,027 τ. μ., (γιὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος), ἀφοῦ τὸ πλάτος θὰ εἶναι 0,09 μ., ὅσο καὶ τοῦ πρίσματος, πρέπει τὸ μῆκός του νὰ εἶναι $0,027 : 0,09 = 2,7 : 9 = 0,3$ μ.

Τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι: $0,3 \times 0,09 = 0,027$ τ. μ.

Σημείωσις (1)

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου του ἐπιφανείας εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Σκεπάζομεν ταύτην μὲ χαρτὶ καὶ ἀνοίγομεν ἔπειτα τοῦτο. Σχηματίζει τοῦτο ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν τὴν περίμετρον τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος. Τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι: $(2 \times 6) \times 8 = 12 \times 8 = 96$ τ. μ. Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς πρίσματος εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν ἀπὸ χαρτόνι καὶ ἓν ὀρθ. παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις : μῆκος ΑΔ = 0,3 μ., πλάτος ΑΒ = 0,09 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ.

Γεμίζομεν τοῦτο μὲ ἄμμον καὶ τὸ ἀδειάζομε εἰς τὸ πρῖσμα. Βλέπομεν τότε ὅτι τοῦτο γεμίζει ἀκριβῶς. Ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου· οὗτος εἶναι :

$$(0,3 \times 0,09) \times 0,50 = 0,027 \times 0,50 = 0,0135 \text{ κ. μ.}$$

Ἤτοι πολλαπλασιάσαμε πρῶτον τὸ μῆκος του 0,3 μ. ἐπὶ τὸ πλάτος 0,09 καὶ βρήκαμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του 0.027 τ. μ. Τοῦτο ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ τὸ ὕψος του 0.50 μ. Κάμνομεν τα ἴδια καὶ εἰς τὸ πρῖσμα διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του.

Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι :

$$\frac{(0,10 \times 6) \times 0,09}{2} = \frac{0,60 \times 0,09}{2} = \frac{0,054}{2} = 0,027 \text{ τ. μ.}$$

Πολλαπλασιάζομε τοῦτο ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος 0,50 μ. ἤτοι : 0,027 × 0,50 = 0,0135 κ. μ.

Ἤτοι εὑρήκαμεν ὄγκον τὸν ἴδιον μὲ τὸν τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, μὲ τὸ ὁποῖον εἴδομεν ὅτι ἔχουν τὸν αὐτόν,

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον παντὸς πρίσματος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς του βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

21. Προβλήματα πρίσματος

1. Ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ἡ πλευρὰ τῶν βάσεών του εἶναι 0,04 μ., τὸ δὲ ὕψος του 0,20 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδόν;

α) Ἑκάστης βάσεώς του ; β) Τῶν δύο βάσεών του ; γ) Τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ; δ) Τοῦ πρίσματος ;

ε) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

2. Ἓν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 2,5 μ. τὸ δὲ ὕψος των 2,165 μ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 2,5 μέτρα.

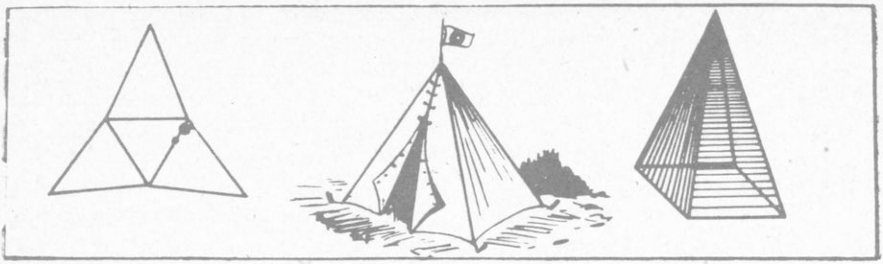
α) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; β) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

3. Ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος ἡ πλευρὰ τῶν βάσεών του εἶναι 0,25 μ., τὸ δὲ ὕψος των 0,216 μ.· τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 0,60 μ.· α) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

4. Ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος εἶναι 0.06672 τ. μ., ὁ δὲ ὄγκος του 0,040032 κ. μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του ;

5. Ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 10 μ. ἡ μία καὶ 8 μ. ἡ ἄλλη. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 12 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

6. Ὀρθὴ στήλη ἔχει ὕψος 2,6 μέτρα καὶ βάσεις τετράγωνα, πλευρᾶς 0,5 μέτρ. Τὴν παράπλευρον ἐπιφάλειαν αὐτῆς πρόκειται νὰ καλύψωμεν μὲ ὕφασμα πλάτους 0,65 μέτρ. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῶμεν ;



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΠΥΡΑΜΙΣ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὰ πρὸ αὐτῶν διάφορα εἴδη τῆς πυραμίδος)

---

1. Παρατηρήσεις

1. Ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα· ἤτοι εἶναι σώματα στερεά.

2. Εἶναι πολύεδρα.

3. Ὅλαι αἱ ἕδραι των εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι (ἐπίπεδα)· (ἐλέγξατε τοῦτο).

4. Καὶ αὐτὰ στηρίζονται διὰ μιᾶς ἕδρας των, ποὺ λέγεται ἕδρα τῆς βάσεώς των. (ἡ ΑΒΓ σχ. 65, ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 66).

5. Ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινήν, ἐνῶ ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς των δύναται νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε σχῆμα: τριγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου κ.λ.π.

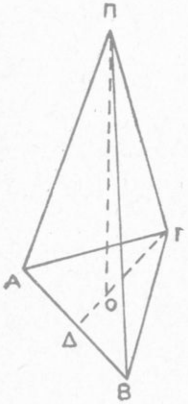
6. Ἡ κοινὴ κορυφὴ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν των λέγεται καὶ κορυφὴ τῆς πυραμίδος. (ἡ Π. σχ. 65).

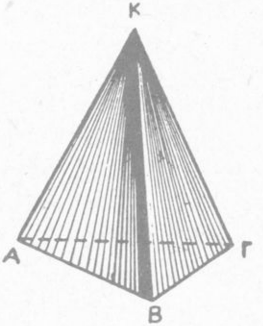
Ἀπέναντί της εὑρίσκεται πάντοτε ἡ ἕδρα τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

7. Αἱ ἕδραι των ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ κάμνουν διέδρους γωνίας καὶ ἀκμάς· ἑνοῦνται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ κάμνουν γωνίας τριέδρους ἢ στερεάς.

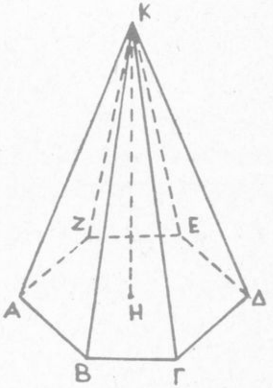
8. Τὰ ἄκρα τῶν ἑδρῶν των ἀποτελοῦν εὐθείας γραμμάς. Εἶναι λοιπὸν αἱ ἕδραι των εὐθύγραμμα σχήματα. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας ταῦτα περατοῦνται λέγονται πλευραὶ αὐτῶν.

9. Αἱ πλευραὶ τούτων ἑνούμεναι σχηματίζουν γωνίας ἐπιπέδους. Ἐὰν ἐλέγξωμεν τὰς πλευρὰς τούτων μὲ τὸν γνώμονα, θὰ εὕρωμεν ὅτι αὗται δὲν εἶναι κάθετοι. Ἑπομένως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς πυραμίδος δὲν εἶναι ὀρθαί, ἀλλ' ἄλλαι εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι.





Σχ. 65



Σχ. 66

10. Τὰ στερεὰ λοιπὸν σώματα, ποῦ παρατηροῦμεν, εἶναι πολύεδρα μὲ ἕδρας τριγωνικάς, ποὺ ἔχουν κοινὴν μίαν κορυφήν, ἐκτὸς μιᾶς ἕδρας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν ἄλλων καὶ ἔχει οἱονδήποτε σχῆμα.

Τοιοῦτον σχῆμα λαμβάνει ἡ φλόγα τοῦ πυρὸς καὶ γι' αὐτὸ τὰ στερεὰ αὐτὰ ὠνομάσθησαν πυραμίδες ὑπὸ τῶν ἀρχαίων. Πυραμίδες ἔκτιζαν στοὺς τάφους των οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι πρὸς τιμὴν τοῦ θεοῦ τοῦ *πυρός*.

Ὅθεν: Πυραμὶς λέγεται τὸ πολύεδρον στερεόν, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἔχοντα κοινὴν μίαν κορυφήν, ἐκτὸς μιᾶς ἕδρας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν ἄλλων καὶ ἡ ὁποία δύναται νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε σχῆμα.

2. Εἴδη πυραμίδων

Ἡ πυραμὶς ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς ἕδρας τῆς βάσεως λέγεται: α) Τριγωνική, ἂν ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς της εἶναι τρίγωνον· (ὡς ἡ τοῦ σχ. 65). β) Τετραγωνική, ἂν ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς της εἶναι τετράγωνον. γ) Πενταγωνική, ἑξαγωνική κλπ., ἂν ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς της εἶναι πεντάγωνον, ἑξάγωνον κλπ. (ὡς ἡ ΑΒΓΔΕΖΚ σχ. 66). δ) Κανονική, ἂν ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς της εἶναι κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα (ὡς ἡ ΑΒΓΗ σχ. 65).

Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι, τῆς δὲ μὴ κανονικῆς ἄνισοι

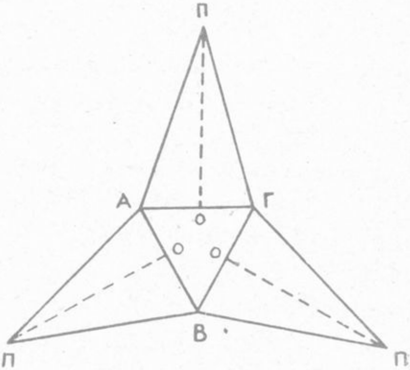
3. Ἰχνογράφησις πυραμίδος

Πρὸς τοῦτο: Ἰχνογραφοῦμεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς της, ὁρίζομεν τὴν κορυφήν της καὶ ἑνοῦμεν ταύτην μὲ τὰς κορυφὰς τῆς ἕδρας τῆς βάσεως δι' εὐθειῶν.

4. Ἰχνογράφησις ἀναπτύγματος κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος

Ἰχνογραφοῦμεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓ (σχ. 67) εἰς τὸ χαρτόνιον ἀπὸ τὸ μέσον τῶν πλευρῶν της φέρομεν τὰς καθέτους ΠΟ, ἴσας μὲ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ ἑνοῦμεν τὰς κορυφὰς Π μὲ τὰς Α, Β, Γ, κορυφάς.

Ἔτσι κάμνομεν καὶ διὰ κάθε μίαν κανονικὴν πυραμίδα.



Σχ. 64

5. Κατασκευὴ κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἐκ χαρτονίου

Ἰχνογραφοῦμεν εἰς τὸ χαρτόνιον τὸ ἀνάπτυγμά της, κόπτομεν τοῦτο ὅπου πρέπει, λυγίζομεν τὰς παραπλεύρους ἕδρας καὶ ράπτομεν ἢ κολλῶμεν μὲ χαρτίνας ταινίας καὶ γόμμαν.

Τὰ ἴδια κάμνομεν καὶ δι' ἕκαστον εἶδος πυραμίδος.

6. Διαστάσεις τῆς πυραμίδος

Καὶ ἡ πυραμὶς τρεῖς ἔχει διαστάσεις· μῆκος, πλάτος, ὕψος.

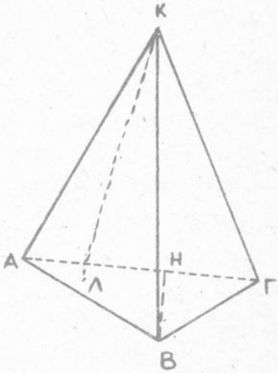
α) Μῆκος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ βάσις τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς της· (ἡ ΑΒ σχ. 65 ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 66).

β) Πλάτος τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς της· (ἡ ΓΔ σχ. 65).

γ) Ὕψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς της ἀπὸ τὴν κορυφήν της· (ἡ ΠΟ σχ. 65, ἡ ΚΗ σχ. 66).

7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς πυραμίδος

1. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ ἐμβαδὸν πάσης πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς της καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της.



Σχ. 68

Αἱ ἕδραι δὲ πάσης πυραμίδος ἔχουν σχήματα εὐθύγραμμα· ἤτοι εἶναι τρίγωνα, τετράγωνα, ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, πολύγωνα κλπ., τῶν ὁποίων γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδόν.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος ΑΒΓΚ (σχ. 68), τῆς ὁποίας ἡ ΑΓ = 20 μέτρα, ἡ κάθετος εἰς ταύτην ἀπὸ τὸ Β, ἡ ΒΗ=7 μέτρα, ἡ ΑΒ=15μ., ἡ ΒΓ = 10 μέτρα. Τὸ ὕψος καὶ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τὸ αὐτό, ἤτοι 28 μ.

Τῆς πυραμίδος ταύτης τὸ ἐμβαδὸν εἶναι:

α) τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΑ $\dfrac{20 \times 7}{2} = \dfrac{140}{2} =$ 70 τ. μ.

β) Τῆς παραπλ. ἕδρας τῆς ΑΒΚΑ $\dfrac{15 \times 28}{2} = \dfrac{420}{2} =$ 210 τ. μ.

γ) Τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΒΓΚΒ $\dfrac{10 \times 28}{2} = \dfrac{280}{2} =$ 140 τ. μ.

δ) Τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΓΚΑ $\dfrac{20 \times 28}{2} = \dfrac{560}{2} =$ 280 τ. μ.

ε) Ὅλης δὲ τῆς πυραμίδος 700 τ. μ.

"Οθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς πυραμίδος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας της χωριστὰ καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τούτων.

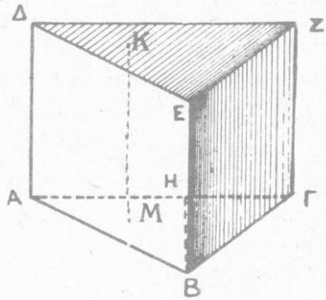
2. Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, ὁπότε αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσαι, τότε εὑρίσκομεν : α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως. β) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης παραπλεύρου ἐπιφανείας· καὶ γ) Προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

8. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου πυραμίδος

Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα (ὡς ἡ ΑΒΓΚ· σχ. 68) μὲ διαστάσεις :

Τὴν βάσιν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς της ΑΓ = 0,30 μ. Τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΒΗ = 0,12 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΚΜ = 0,36 μ.

Κατασκευάζομεν ὁμοίως ἀπὸ χαρτόνιον καὶ ἓν τριγωνικὸν πρίσμα (ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΖ σχ. 69) μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις : ἤτοι ΑΒ = 0,30 μ., ΒΗ = 0,12 μ. καὶ ΚΜ = 0,36 μ.



Σχ. 69

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων καὶ τῶν δύο πολυέδρων εἶναι :

$\frac{0{,}30 \times 0{,}12}{2} = \frac{0{,}036}{2} = 0{,}018$ τ. μ. "Οθεν τὰ δύο πολύεδρα ἔχουν τὴν ἴδιαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Γεμίζομεν τὴν πυραμίδα μὲ ἄμμον καὶ τὴν ἀδειάζομε στὸ πρίσμα· ἐπαναλαμβάνομε δὲ τοῦτο ἕως ὅτου γεμίσει τὸ πρίσμα ἐντελῶς. Τοῦτο δὲ θὰ συμβῆ, ἀφοῦ ἀδειάσωμε τὴν πυραμίδα 3 φορές. "Αρα ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ αὐτὴν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι :

$$\frac{0{,}30 \times 0{,}12}{2} \times 0{,}36 = \frac{0{,}036}{2} \times 0{,}36 = 0{,}018 \times 0{,}36 = 0{,}00648 \text{ κ. μ.}$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὸ ὕψος της· ἤτοι :

$$\frac{0{,}30 \times 0{,}12}{2} \times 0{,}36 = \frac{0{,}036}{2} \times 0{,}36 = 0{,}018 \times 0{,}36 \times = 0{,}00648.$$

Βλέπομεν ὅτι εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ αὐτὴν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ὄγκος ταύτης εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος διαιροῦντες τοῦτον διὰ 3 εὑρίσκομεν καὶ τὸν ὄγκον ταύτης· ἤτοι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι : 0,0648 : 3 = 0,00216 κ. μ.

Ὅθεν ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εὑρίσκεται :

$$\left[\frac{0{,}30 \times 0{,}12}{2} \times 0{,}36\right] : 3 = \left[\frac{0{,}036}{2} \times 0.36\right] : 3 =$$

$$= (0{,}018 \times 0{,}36) : 3 = 0{,}00648 : 3 = 0{,}00216 \text{ κ. μ.}$$

Ὅθεν : διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς πυραμίδος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

9. Προβλήματα πυραμίδος

1. Μιᾶς τριγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος ἡ ἕδρα τῆς βάσεως εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 20 μ τὸ δὲ ὕψος 17,3 μ. Ἡ ἀπόστασις τῶν πλευρῶν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος εἶναι 50,33 μ. καὶ τέλος τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος 50,25.

Νὰ εὑρεθῇ : α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος. β) Ὁ ὄγκος ταύτης.

2. Μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἡ ἕδρα τῆς βάσεως εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 5 μέτρα· ἡ ἀπόστασις τῶν πλευρῶν ταύτης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος 10 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 9,68 μ. Νὰ εὑρεθῇ : α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος, β) Ὁ ὄγκος ταύτης.

3) Ἡ βάσις μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος, εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 5 μέτρα καὶ 4 μέτρα· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 3,60 μέτρα· πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

4. Μιᾶς πολυγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος, ἡ ἕδρα τῆς βάσεως εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 6 μ., ἡ ἀπόστασις τῶν πλευρῶν του ἀπὸ μὲν τοῦ κέντρου τῆς ἕδρας τῆς βάσεως 5,2 μ., ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος 15,07 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 14,15. Νὰ εὑρεθῇ: α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος, β) ὁ ὄγκος αὐτῆς.

5. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 35 τ. μ. τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος 17,30 μ.: Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της;

6. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 12 μέτρων, ὕψος δὲ 5 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι 10 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος της;

7. Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι 424,5 κ. μ., ἡ δὲ βάσις της 90 τ. μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος της;

8. Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι 424,5 κ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος της 14,15 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

9. Μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἡ βάσις τῆς ἕδρας τῆς βάσεως εἶναι 12 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς 3 μέτρα· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι 21 μέτρα. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της;

10. Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον, πλευρᾶς 1,5 μέτρα καὶ ὄγκον 0,9 κυβ. μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος της;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὰ διάφορα εἴδη τῆς κολούρου πυραμίδος)

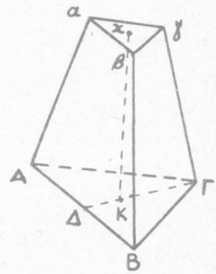
---

1. Παρατηρήσεις

1. Ἔχουν καὶ αὐτὰ ὡρισμένον σχῆμα· ἤτοι εἶναι σώματα στερεά.

2. Εἶναι στερεὰ πολύεδρα.

3. Αἱ ἕδραι των ὅλαι εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι. (Πῶς τὸ ἐλέγχομεν ;).



Σχ. 70

4. Δύο μόνον ἐκ τῶν ἑδρῶν των, ἡ κάτω καὶ ἡ ἀπέναντί της ἄνω, δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς ἐπεκτείνωμεν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις· ἤτοι εἶναι παράλληλοι

Αἱ ἄλλαι ἕδραι των αἱ παράπλευροι δὲν εἶναι παράλληλοι.

5. Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται βάσεις αὐτῆς· (αἱ ΑΒΓΑ καὶ αβγα σχ. 70). Ἐξ αὐτῶν ἡ κάτω εἶναι μεγαλυτέρα.

Δύνανται δὲ αὗται νὰ ἔχουν οἱονδήποτε σχῆμα, τὸ αὐτὸ ὅμως καὶ αἱ δύο εἰς τὴν αὐτὴν πυραμίδα.

6. Αἱ παράπλευροι ἕδραι των εἶναι τετράπλευροι μὲ παραλλήλους μόνον τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς των, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ἄνισοι. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται τραπέζιον.

7. Αἱ ἕδραι των ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ κάμουν διέδρους γωνίας. Ἑνοῦνται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ κάμουν τριέδρους γωνίας ἢ στερεάς.

8. Τὰ ἄκρα τῶν ἑδρῶν των ἀποτελοῦν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραὶ αὐτῶν.

Εἶναι λοιπὸν αἱ ἕδραι των εὐθύγραμμα σχήματα· καὶ αἱ μὲν παράπλευροι εἶναι εὐθύγραμμα τετράπλευρα, αἱ δὲ δύο βάσεις των εὐθύγραμμα τρίπλευρα, τετράπλευρα, πεντάπλευρα ἢ πεντάγωνα κλπ.

9. Αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν των ἑνοῦνται καὶ κάμουν ἐπιπέδους γωνίας. Ἐξ αὐτῶν ἄλλαι εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι.

10. Εἰς τὰ στερεὰ αὐτὰ φαίνεται ὡσὰν νὰ ἀπεκόπη ἀπὸ τὸ ἐπάνω μέρος των μία μικρὰ πυραμὶς καὶ τὴν ὁποίαν, ἂν προσθέσωμεν πάλιν, ἀποτελεῖται πλήρης πυραμίς. Δι' αὐτὸ τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται κόλουροι πυραμίδες.

11. *Ὅθεν : Κόλουρος πυραμὶς λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τραπέζια, δύο δὲ ἄλλαι αἱ βάσεις του εἶναι ἄνισοι καὶ παράλληλοι καὶ δύνανται νὰ ἔχουν οἱονδήποτε σχῆμα, ἀλλὰ τὸ αὐτὸ καὶ αἱ δύο εἰς τὴν αὐτὴν πυραμίδα.*

12. ***Εἴδη τῆς κολούρου πυραμίδος.***

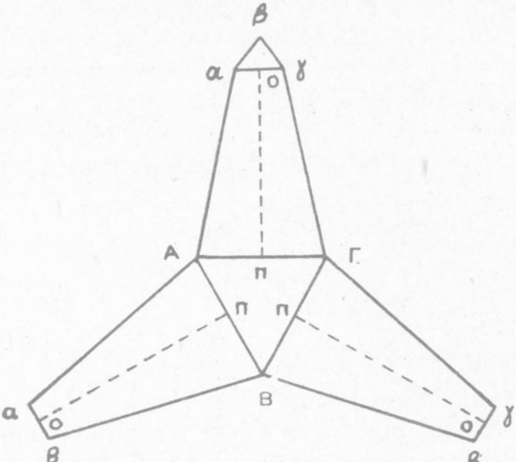
Ταῦτα εἶναι τὰ ἴδια μὲ τὰ εἴδη τῆς πυραμίδος· ἤτοι τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική, ἑξαγωνικὴ κ.λ.π.

2. Ἰχνογράφησις κολούρου πυραμίδος

Πρὸς τοῦτο : α) γράφομεν τὰς δύο βάσεις της· ἄνω τὴν μικροτέραν καὶ κάτω τὴν μεγαλυτέραν· β) ἑνώνομεν ἔπειτα τὰς ἀπέναντι κορυφάς των δι' εὐθειῶν (σχ. 70)..

3. Ἰχνογράφησις ἀναπτύγματος κολούρου πυραμίδος

Πρὸς τοῦτο : α) Γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως (ΑΒΓ σχ. 71). Ἀπὸ τὸ μέσον τῶν πλευρῶν ταύτης ὑψοῦμεν καθέτους (ΟΠ), ἴσας μὲ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος· γ) Ἐκ τοῦ ἄκρου τούτων Ο φέρομεν παραλλήλους εἰς τὰς πλευρὰς τῆς ἕδρας τῆς βάσεως, ἴσας δὲ πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς μικροτέρας ἕδρας τῆς βάσεως, τὰς : αβ, αγ, βγ. δ) Φέρομεν τὰς εὐθείας· Αα, Αα, Γγ, Γγ,



Σχ. 71

Ββ, Ββ, ε) Τέλος μὲ βάσιν τὴν εὐθεῖαν αγ γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς μικροτέρας βάσεως αβγ.

4. Κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος ἀπὸ χαρτόνι

Ἰχνογραφοῦμεν εἰς τὸ χαρτόνιον τὸ ἀνάπτυγμα, κόπτομεν ὅπου πρέπει τοῦτο, χαράσσομεν λίγο τὰς ἄλλας ἀκμάς, λυγίζομεν τάς ἕδρας καὶ ράπτομεν ἢ κολλῶμεν μὲ γόμμα. γνωρίζομεν ἐπροσθέσαμεν

5. Ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος

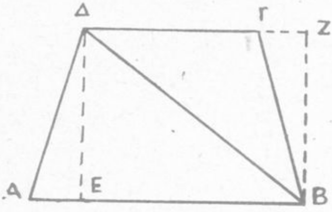
1. ***Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της.***

Εὐνόητον εἶναι ὅτι τὸ ἐμβαδὸν πάσης κολούρου πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών της καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων της ἑδρῶν. Αἱ δύο βάσεις της ἔχουν σχῆμα τριγώνου ἢ τετραγώνου ἢ παραλληλογράμμου ἢ πολυγώνου, τῶν ὁποίων ἠξεύρομεν πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

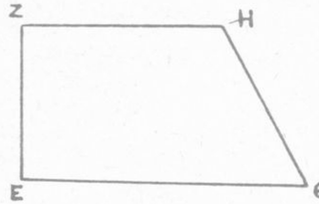
Αἱ παράπλευροι ὅμως ἕδραι της ἔχουν σχῆμα τραπεζίου· τούτου δὲν γνωρίζομεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδόν.

2. *Τραπέζιον.*

α) Τραπέζιον λέγεται ἓν σχῆμα εὐθύγραμμον τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου μόνον αἱ δύο πλευραί του εἶναι παράλληλοι· (τὸ ΑΒΓΔΑ σχ. 72). β) Αἱ ἐπίπεδοί του γωνίαι εἶναι δύο ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι. Εἶναι ὅμως καὶ δυνατὸν νὰ εἶναι αἱ δύο ὀρθαὶ (ἡ Ε καὶ ἡ Ζ σχ. 73),



Σχ. 72



Σχ. 73

ὁπότε ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο ἡ μία εἶναι ὀξεῖα (ἡ Θ) καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα (ἡ Η). γ) Βάσεις τοῦ τραπεζίου λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραί του (ἡ ΔΒ καὶ ΔΓ σχ. 72. δ) Ὕψος τοῦ τραπεζίου λέγεται ἡ κάθετος, ποὺ ἄγεται εἰς τὴν μίαν βάσιν του ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης βάσεώς του, (ἡ ΔΕ σχ. 72, ἡ ΕΖ σχ. 73). Αἱ δύο βάσεις του εἶναι πάντοτε ἄνισοι. Διατί ;

3. ***Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τραπεζίου.***

Ἔστω τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔΑ σχ. 72. Μετροῦμεν τὰς βάσεις καὶ τὸ ὕψος του· καὶ ἔστω : ἡ μία βάσις ΑΒ = 20 μ. ἡ ἄλλη ΔΓ = 10 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΔΕ = 9. Φέρομεν ἔπειτα τὴν διαγώνιον ΑΒ· μὲ αὐτὴν τὸ τραπέζιον χωρίσθηκεεἰςτὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι :

$$\frac{20 \times 9}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ τ. μ.},$$

τοῦ δὲ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι :

$$\frac{10 \times 9}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ τ. μ.}$$

καὶ τῶν δύο μαζὶ 90 + 45 = 135 τ. μ.

Ἀλλὰ φανερὸν εἶναι ὅτι τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου· ἤτοι 135 τ. μ.

Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζί ου ἐπολλαπλασιάσαμεν α) τὴν βάσιν του ΑΒ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΔΕ καὶ τὸ γινόμενον διῃρέσαμεν διὰ 2 ἤτοι :

$\frac{20 \times 9}{2} = \frac{180}{2} = 90$ τ. μ. β) Τὴν ἄλλην βάσιν του ΔΓ ἐπὶ τὴν ΖΒ ἤτοι ἐπὶ τὸ ΔΕ (διότι ΖΒ = ΔΕ) καὶ τὸ γινόμενον πάλιν διῃρέσαμεν διὰ 2· ἤτοι $\frac{10 \times 9}{2} = \frac{90}{2} = 45$ τ. μ

γ) Επροσθέσαμεντὰ δύο ἐμβαδά. ἤτοι: 90 + 45 = 135 τ. μ.

Ἀλλὰ εὐνόητον εἶναι ὅτι τὸ ἴδιον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος 9 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 2· ἤτοι:

$$\frac{(20 + 10) \times 9}{2} = \frac{30 \times 9}{2} = \frac{270}{2} = 135 \text{ τ. μ.}$$

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

4. **Προβλήματα** (τραπεζίου)

1. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις μὲν 40 μέτρων καὶ 25 μέτρων, ὕψος δὲ 20 μέτρων;

2. Πόσα νέα στρέμματα εἶναι μία ἄμπελος σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις μὲν 250 μέτρων καὶ 180 μέτρων, ὕψος δὲ 100 μέτρων;

3. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος τραπεζίου εἶναι 2065 μετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος τοῦ 35 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι αἱ δύο βάσεις του; καὶ ἂν ἡ μία ἀπ᾿ αὐτὰς εἶναι 40 μέτρα, πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἄλλη;

4. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος τραπεζίου εἶναι 2065 τετρ. μέτρα, αἱ δὲ δύο βάσεις του εἶναι 40 μέτρα ἡ μία καὶ 78 ἡ ἄλλη. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

5. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι 20,50 μέτρα ἡ μία καὶ 25 μέτρα ἡ ἄλλη, τὸ δὲ ὕψος 20 μέτρα. α) Πόσον τιμᾶται τοῦτο, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον αὐτοῦ τιμᾶται 220 δραχ.; β) Πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὸ τετρ. μέτρον αὐτοῦ, ἐὰν ἐπωλήθη τοῦτο 13750 δραχ.;

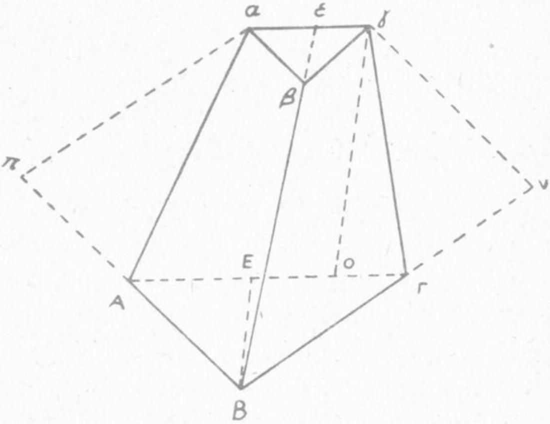
6. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον ἓν τραπέζιον καὶ εὕρετε:

α) τὰς βάσεις του (μετροῦντες αὐτάς), β) τὸ ὕψος του, γ) τὴν περίμετρόν του, δ) τὸ ἐμβαδόν του.

6. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κολούρου πυραμίδος

1. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ ἐμβαδὸν πάσης κολούρου πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων της ἑδρῶν. Αἱ ἕδραι τῶν βάσεών της ἔχουν σχῆμα τριγώνου, τετραγώνου, πολυγώνου κ. λ., αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι της ὅλαι σχῆμα τραπεζίου.

Τῶν σχημάτων τούτων τῶν ἑδρῶν της γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδόν. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, τὰ προσθέτομεν καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος.



Σχ. 74

2. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος (σχ. 74).

Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις τῶν ἑδρῶν της· καὶ ἔστω:

α) τῆς ἕδρας τῆς μεγαλυτέρας βάσεως ΑΒΓΑ ἡ βάσις ΑΓ = 8 μ. Τὸ ὕψος ΒΕ = 3.2 μ.

β) Τῆς ἕδρας τῆς μικροτέρας βάσεως αβγα ἡ βάσις αγ = 4 μ. τὸ ὕψος βε = 1,6 μ.

γ) Τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΒβαΑ αἱ βάσεις ΑΒ = 4 μ. καὶ αβ = 2 μ., τὸ δὲ ὕψος απ = 6,4 μ.

δ) Τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΒΓγβΒ αἱ βάσεις ΒΓ = 6 μ. καὶ βγ = 3 μ., τὸ δὲ ὕψος γν = 6,4 μ.

ε) Τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΓγαΑ αἱ βάσεις ΑΓ = 8 μ. καὶ αγ = 4 μ., τὸ δὲ ὕψος γο = 6,4 μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἑδρῶν της εἶναι:

α) Τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΑ : $\frac{8 \times 3,2}{2} = 4 \times 3,2 = 12,8$ τ.μ.

β) Τῆς ἕδρας τῆς βάσεως αβγα : $\frac{4 \times 1,6}{2} = 2 \times 1,6 = 3,2$ τ.μ.

γ) τῆς παραπλ. ἕδρας ΑΒβαΑ: $\frac{(4+2)\times 6{,}4}{2} = \frac{6\times 6{,}4}{2} =$

$= 3 \times 6{,}4 = 19{,}2$ τ.μ.

δ) Τῆς παραπλ. ἕδρας ΒΓγβΒ: $\frac{(6+3)\times 6{,}4}{2} = \frac{9\times 6{,}4}{2} =$

$= 9 \times 3{,}2 = 28{,}8$ τ.μ.

ε) Τῆς παραπλ. ἕδρας ΑΓγαΑ: $\frac{(8+4)\times 6{,}4}{2} = \frac{12\times 6{,}4}{2} =$

$= 6 \times 6{,}4 = 38{,}4$ τ. μ.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος εἶναι:

$$12{,}8 + 3{,}2 + 19{,}2 + 28{,}8 + 38{,}4 = 102{,}4 \text{ τ.μ.}$$

3. Ἐὰν ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι κανονική, αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι ἴσαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εὑρίσκεται ταχύτερον ὡς ἑξῆς: εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εὑρίσκεται καὶ ταχύτερον ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν: α) Τῆς ἕδρας τῆς μεγαλυτέρας βάσεως. β) Τῆς ἕδρας τῆς μικροτέρας βάσεως, γ) Τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εὑρίσκοντες τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν της, δ) Προσθέτομεν τὰ τρία ταῦτα ἐμβαδά.

7. Προβλήματα καὶ ἀσκήσεις κολούρου πυραμίδος

1. Μιᾶς κολούρου πυραμίδος αἱ ἕδραι τῶν βάσεων, εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα· καὶ τῆς μὲν ἕδρας τῆς μεγάλης βάσεώς της ἡ πλευρὰ εἶναι 10 μ. καὶ τὸ ὕψος 8,66 μ., τῆς δὲ ἕδρας τῆς μικρᾶς βάσεως ἡ πλευρὰ εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ὕψος 4,33 μ.· τὸ ὕψος δὲ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι 20 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πυραμίδος;

2. Αἱ ἕδραι τῶν βάσεων μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα· καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς ἡ πλευρὰ εἶναι 20 μ., τοῦ δὲ ἄλλου 8 μ. Τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἶναι 40,44 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

3. Αἱ ἕδραι τῶν βάσεων μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα· καὶ τὸ μὲν ἓν ἔχει πλευρὰν 6 μ. καὶ ὕψος 5,2 μ., τὸ δὲ

ἄλλο πλευρὰν 4 μ. καὶ ὕψος 3,47 μ. Τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι 10 μ.· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

4. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνιον κολούρους πυραμίδας μὲ ἕδρας τῶν βάσεών των: α) ἰσόπλευρα τρίγωνα, β) τετράγωνα καὶ γ) κανονικὰ ἑξάγωνα καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης.

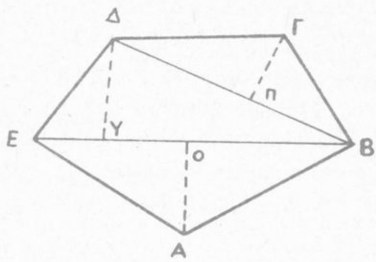
5. Διατὶ αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΑΛΛΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὴ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ σχ. 75.

Φέρω τὰς διαγωνίους ΒΔ καὶ ΒΕ καὶ διαιρῶ τὸ μὴ κανονικὸν πολύγωνον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΕΑ, ΒΕΔΒ καὶ ΒΓΔΒ. Φέρω ἐκ τῆς κορυφῆς Α τὴν ΑΟ κάθετον εἰς τὴν διαγώνιον ΒΕ· ἐκ τῆς κορυφῆς Δ τὴν Δγ κάθετον εἰς τὴν διαγώνιον ΒΕ· καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὴν ΓΠ κάθετον εἰς τὴν διαγώνιον ΒΔ.



Σχ. 75

Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις τῶν τριῶν τριγώνων καὶ ἔστω:

α) Τοῦ τριγώνου ΑΒΕ ἡ βάσις ΒΕ = 50 μ. τὸ δὲ ὕψος του ΑΟ = 25 μ.

β) Τοῦ τριγώνου ΒΔΕ ἡ βάσις ΒΕ = 50 μ., τὸ δὲ ὕψος του Δν = 20 μ.

γ) Τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἡ βάσις ΒΔ = 42 μ., τὸ δὲ ὕψος του Γπ = 9 μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων εἶναι:

α) Τοῦ τριγώνου ΑΒΕ: $\frac{50 \times 25}{2} = \frac{1250}{2} = 625$ τ. μ.

β) Τοῦ τριγώνου ΒΔΕ: $\frac{50 \times 20}{2} = \frac{1000}{2} = 500$ τ. μ.

γ) Τοῦ τριγώνου ΒΓΔ: $\frac{42 \times 9}{2} = \frac{378}{2} = 189$ τ. μ.

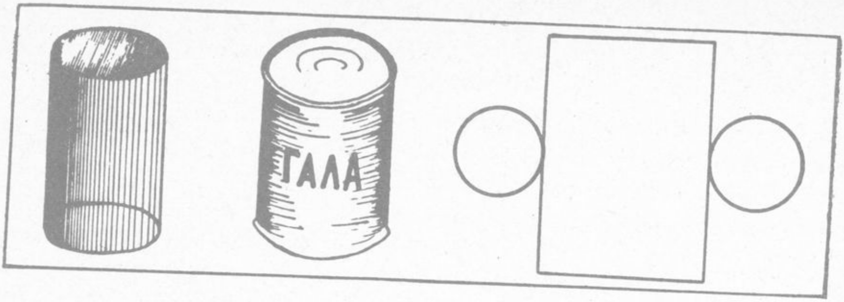
Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὴ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΑ εἶναι: $625 + 500 + 189 = 1314$ τ. μ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου ἢ τετραπλεύρου μὴ γεωμετρικοῦ. Ἡ διαίρεσίς των ὅμως εἰς διάφορα εὐθύγραμμα σχήματα δὲν γίνεται πάντοτε εἰς τρίγωνα. Δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς τετράγωνα, τραπέζια, ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, πλάγια παραλληλόγραμμα. Τοῦτο μᾶς κανονίζει ἡ διευκόλυνσις εἰς τὴν ἐργασίαν μας.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου ἢ πολυγώνου μὴ γεωμετρικοῦ, διαιροῦμεν τοῦτο εἰς τρίγωνα ἢ τραπέζια ἢ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα καὶ εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τούτων, τὰ ὁποῖα ἔπειτα προσθέτομεν.

Ἀσκήσεις

1. Γράψατε τετράπλευρον μὴ γεωμετρικὸν καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.
2. Γράψατε μὴ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΤΑΞΙΣ ΕΚΤΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν κύλινδρον πρὸ αὐτῶν)

1. Παρατηρήσεις

1. Εἶναι σῶμα στερεόν· (διατί ;)

2. Περατοῦται εἰς 3 ἐπιφανείας· ἐλέγχομεν αὐτὰς μὲ τὸν κανόνα καὶ βλέπομεν ὅτι αἱ μὲν δύο εἶναι ἐπίπεδοι, ἡ δὲ τρίτη κυρτή.

3 Αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι περατοῦνται εἰς καμπύλην γραμμήν. Μετροῦντες τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τὸ μέσον τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν εὑρίσκομεν ὅτι ὅλα ἀπέχουν ἴσον ἀπ' αὐτό. Τὰς τοιαύτας ἐπιπέδους ἐπιφανείας λέγομεν κύκλους.

4. Αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι εἶναι παράλληλοι, δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς ἐπεκτείνωμεν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις των. Εἶναι καὶ ἴσαι. Διότι, ἐὰν στηρίζοντες αὐτὰς ἐπάνω εἰς χαρτόνιον χαράξωμεν τοὺς δύο κύκλους, τοὺς κόψωμεν ἔπειτα καὶ τοὺς ἐπιθέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ εἷς ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

5. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια περατοῦται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κάτω εἰς τὰς καμπύλας γραμμὰς τῶν δύο κύκλων του.

6. Ἐὰν περιτυλίξωμεν μὲ χαρτόνιον τὴν κυρτήν του ἐπιφάνειαν καὶ ἔπειτα ἐκτυλίξωμεν τοῦτο, βλέπομεν ὅτι λαμβάνει σχῆμα ὀρθο-

γωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ἡ καμπύλη γραμμὴ τοῦ κύκλου.

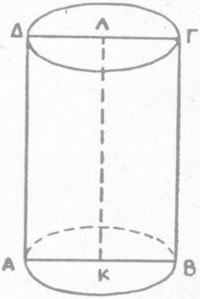
7. Τὸ σῶμα λοιπὸν εἶναι στερεόν, περατοῦται εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἰς δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους. Τὰ τοιαῦτα σώματα λέγομεν κυλίνδρους.

Ὅθεν: Κύλινδρος λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἰς δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους. (σχ. 76).

8. ***Βάσις τοῦ κυλίνδρου:*** λέγονται οἱ δύο κύκλοι αὐτοῦ (Κ καὶ Λ σχ. 76).

9. ***Ὕψος τοῦ κυλίνδρου:*** λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὴν μίαν βάσιν του ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης βάσεώς του, (ἡ ΚΛ σχ. 76).

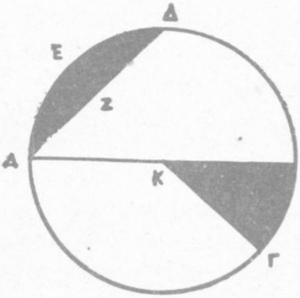
10. ***Ὕψος τῆς κυρτῆς*** ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ πλευρά της ΑΔ, ἡ ὁποία ὅμως εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ΚΛ (σχ. 76).



Σχ. 76

2. Κύκλος

1. ***Κύκλος λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης γραμμῆς εἰς τὴν ὁποίαν αὕτη περατοῦται*** (σχ. 77).



Σχ. 77

2. ***Περιφέρεια*** τοῦ κύκλου λέγεται ἡ καμπύλη γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται οὗτος· (ἡ ΑΕΔΒΓΑ σχ. 77).

3. ***Κέντρον*** τοῦ κύκλου λέγεται τὸ σημεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ. (Τὸ Κ σχ. 77).

4. ***Ἀκτὶς*** τοῦ κύκλου λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον αὐτοῦ μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας του. (Ἡ ΚΑ, ΚΓ, ΚΒ σχ. 77).

Ἐὰν σύρωμεν μερικὰς ἀκτῖνας εἰς ἕνα κύκλον καὶ τὰς μετρήσωμεν θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι. «Εἰς ἕκαστον κύκλον, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι μεταξύ των».

5. ***Διάμετρος*** τοῦ κύκλου λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του καὶ περατοῦται εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας του (ἡ ΑΒ).

Εὐνόητον εἶναι ὅτι ἑκάστη διάμετρος εἶναι ἴση μὲ δύο ἀκτῖνας τοῦ ἰδίου κύκλου. Καὶ ἐπειδὴ ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

6. Μὲ τὸν διαβήτην γράφομεν περιφέρειαν κύκλου καὶ σύρομεν μίαν διάμετρον. Αὕτη διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη. Λυγίζομεν ταῦτα κατὰ τὴν διάμετρον, ἕως ὅτου τὸ ἕνα πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Βλέπομεν τότε ὅτι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Ἄρα εἶναι ἴσα Ὅθεν: Πᾶσα διάμετρος κύκλου διαιρεῖ τοῦτον εἰς δύο ἴσα μέρη, εἰς δύο ἡμικύκλια.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι πᾶσα διάμετρος κύκλου διαιρεῖ καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη, εἰς δύο ἡμιπεριφερείας.

7. Ὅθεν: α) Ἡμικύκλιον λέγεται τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. (π. χ. τὸ ΑΚΒΓΑ, τὸ ΑΚΒΔΕΑ σχ. 77). β) Ἡμιπεριφέρεια κύκλου λέγεται τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας αὐτοῦ (π.χ. τὸ ΑΓΒ· τὸ ΑΕΔΒ σχ. 77).

8. Τόξον τοῦ κύκλου λέγεται ἓν μέρος τῆς περιφερείας του (π.χ. τὸ ΒΔ, τὸ ΑΔ, τὸ ΓΒ, τὸ ΑΓ σχ. 77).

9 Χορδὴ τοῦ κύκλου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα ἑνὸς τόξου αὐτοῦ (π.χ. ἡ ΒΔ σχ. 77).

10. Τομεὺς κύκλου λέγεται μέρος τοῦ κύκλου περικλειόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῶν δύο ἀκτίνων, ποὺ ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. (Π.χ. τὸ ΒΚΓΒ, τὸ ΓΚΑΓ (σχ. 77).

11. ***Χάραξις περιφερείας κύκλου.*** Περιφέρειαν κύκλου χαράσσομεν μὲ τὸν διαβήτην (πῶς ;). Περιγράψατε τὸν διαβήτην (σχ. 78).

Σχ. 78

12. ***Σχέσις περιφερείας καὶ ἀκτῖνος κύκλου.*** Χαράσσομεν μὲ τὸν διαβήτην περιφέρειαν κύκλου. Μὲ τὸ ἴδιον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τμήματα. Βλέπομεν ὅτι ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 6 μέρη ἴσα μὲ τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, ἤτοι ἴσα μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. ***Ὅθεν:*** ἡ περιφέρεια παντὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ 6 ἀκτῖνας αὐτοῦ.

13. ***Ἐπίκεντρος γωνία*** λέγεται πᾶσα ἐπίπεδος γωνία τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ κέντρου κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι ἀκτῖνες αὐτοῦ· (π.χ. ἡ ΑΚΓ, ἡ ΓΚΒ σχ. 77).

14. ***Ἐγγεγραμμένη*** εἰς κύκλον γωνία λέγεται πᾶσα ἐπίπεδος γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι χορδαὶ αὐτοῦ· π.χ. ἡ ΒΑΔ σχ. 77.

3. Μοῖραι καὶ μοιρογνωμόνιον

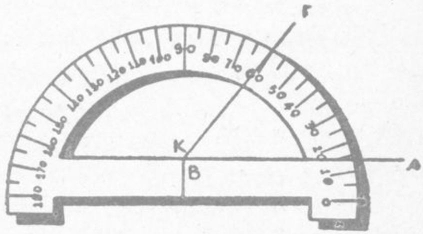
1. **Μοῖραι :** Ἑκάστη περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται μοῖραι.

Ἑκάστη μοῖρα αὐτῆς διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται πρῶτα λεπτά. Ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται δεύτερα λεπτά.

Τὰς μοίρας σημειοῦμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ποσοῦ αὐτῶν καὶ ἕνα μικρὸν μηδὲν ἄνω καὶ δεξιά του. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦμεν ὁμοίως, ἀλλ' ἀντὶ μηδενὸς γράφομεν μίαν ὀξεῖαν. Ἐπίσης καὶ τὰ δεύτερα λεπτὰ σημειοῦντες ὅμως δύο ὀξείας.

Οὕτω διὰ νὰ γράψωμεν 12 μοίρας, 30 πρῶτα λεπτὰ καὶ 25 δεύτερα λεπτά, γράφομεν : $12^{0}\ 30'\ 25''$.

2. ***Μοιρογνωμόνιον.*** Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι ὄργανον μεταλλικὸν ἢ ξύλινον σχήματος ἡμικυκλίου, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς 180^{0} (σχ. 79).



Σχ. 79

Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μετροῦμεν εἰς μοίρας τὸ μῆκος τῶν τόξων. Εὐνόητον δὲ εἶναι ὅτι μὲ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν καὶ τὰς ἐπικέντρους γωνίας καθὼς καὶ πᾶσαν ἐπίπεδον γωνίαν μετροῦντες δι' αὐτοῦ τὰ τόξα αὐτῶν.

4. Μέτρησις ἐπιπέδου γωνίας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου

1. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπίπεδον γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου (ἔστω τὴν ΑΒΓ σχ. 79) κάμνομεν ὡς ἑξῆς :

Θέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς γωνίας ΑΒΓ, οὕτως ὥστε τὸ κέντρον του Κ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς αὐτῆς Β. Ἔπειτα μετακινοῦμεν τὸ μοιρογνωμόνιον περὶ τὴν κορυφὴν Β, χωρὶς τὸ κέντρον Κ νὰ μετακινηθῇ ἀπὸ αὐτήν, μέχρις ὅτου ἡ ἀκτὶς ΚΟ τοῦ μοιρογνωμονίου πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΒΑ τῆς γωνίας.

Μετροῦμεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ μοιρογνωμονίου τὰς μοίρας, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ τῆς γωνίας. Ἔστωσαν δὲ αὗται 60°. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ = 60°.

5. Χάραξις ἐπιπέδου γωνίας ὡρισμένου μεγέθους

1. Διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν ἐπίπεδον γωνίαν ὡρισμένου μεγέθους, ἔστω 60°, κάμνομεν ὡς ἑξῆς:

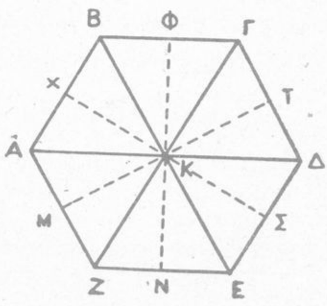
Χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὴν τὴν διάμετρον τοῦ μοιρογνωμονίου μὲ τὸ κέντρον του Κ εἰς τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας τὸ Β (σχ. 79).

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α μετροῦμεν ἔπειτα εἰς τὸ μοιρογνωμόνιον τόξον 60°, τὸ ΑΓ καὶ σείρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Τοιουτοτρόπως ἐχαράξαμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι 60° (σχ. 79).

6. Κατασκευὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀπὸ χαρτόνιον

1. Ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰςτὸ χαρτόνιον ὡς ἑξῆς:

Πέριξ τοῦ σημείου Κ χαράσσομεν ἐπάνω εἰςτὸ χαρτόνιον 6 ἐπιπέδους γωνίας 60° ἑκάστην· ἤτοι τὰς γωνίας: ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ, ΔΚΕ, ΕΚΖ, ΖΚΑ, (σχ. 80).



Σχ. 80

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν των λαμβάνομεν ἔπειτα ἴσα μέρη· ἤτοι: ΚΑ = = ΚΒ = ΚΓ = ΚΔ = ΚΕ = ΚΖ.

Τέλος δὲ φέρομεν τὰς εὐθείας: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, καὶ κόπτομεν τὸ ἰχνογραφηθὲν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὴν περίμετρον τοῦ ΑΒΓΔΕΖΑ.

Σημ. Διὰ τὴν ἰχνογράφησιν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου κάμνομεν ὅ,τι καὶ διὰ τὴν ἐγγραφήν του εἰς κύκλον (σελ. 89 ἐδ. 4), μετὰ ταῦτα δὲ κόπτομεν τὸχαρτόνιονεἰς τὴν περίμετρον τοῦ ἑξαγώνου.

7. Εὐθύγραμμον σχῆμα ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον

1. Ἓν σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ὅταν αἱ πλευραί του εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου (π. χ. τὸ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 81).

2. Ἐγγραφὴ τετραγώνου εἰς κύκλον.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον τετράγωνον, χαράσσομεν μίαν διάμετρον αὐτοῦ καὶ ἔπειτα μίαν ἄλλην κάθετον εἰς αὐτήν. Ἑνοῦμεν κατόπιν τὰ ἄκρα αὐτῶν μὲ εὐθείας.

3. Ἐγγραφὴ ὀκταγώνου κανονικοῦ εἰς κύκλον.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον, ἐγγράφομεν πρῶτον εἰς αὐτὸν τετράγωνον. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 4 ἴσα τόξα τῆς περιφερείας εἰς δύο ἴσα μέρη ἕκαστον καὶ φέρομεν τὰς χορδάς των. Αἱ χορδαί των θ' ἀποτελοῦν τὴν περίμετρόν κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

4. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς κύκλον.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον :

α) Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 6 ἴσα τόξα μὲ τὸν διαβήτηνδίδοντεςεἰςτὰ σκέλη του ἄνοιγμα ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

β) Φέρομεν ἔπειτα τὰςχορδὰςτῶν τόξων· αὗται ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

5. Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς κύκλον.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν δωδεκάγωνον :

α) Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.

β) Διαιροῦμεν ἔπειτα τὰ 6 ἴσα τόξα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ ἕκαστον.

γ) Φέρομεν εἰς τὰ ἄκρα τῶν 12 ἴσων τόξων τὰςχορδάς των.

Αὗται ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

7. Ἀσκήσεις

1. Γράψατε ἕνα κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,2 μ. καὶ ὀνομάσατε μὲ γράμματα: α) Μίαν ἀκτῖνά του· β) μίαν διάμετρόν του· γ) μίαν χορδήν του· δ) ἓν τόξον· ε) ἕνα τομέα του· στ) μίαν ἡμιπεριφέρειαν· ζ) ἓν ἡμικύκλιον.
2. Γράψατε κύκλον μὲ διάμετρον 0,030 τοῦ μέτρου.

3. Γράψατε δύο κύκλους μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ ἀκτῖνας 0,025 μ. καὶ 0,030 μ. (ὁμοκέντρους).

4. Ἐγγράψατε εἰς κύκλους: α) τετράγωνον, β) ὀκτάγωνον, γ) ἑξάγωνον, δ) δωδεκάγωνον.

5. Πῶς ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν κύκλον εἰς τὸν πίνακα, ἂν δὲν ἔχωμεν διαβήτην;

6. Πῶς ἠμποροῦμεν εἰς τὰς πλατείας εἰς τοὺς ἀνθοκήπους νὰ χαράσσωμεν κύκλους διὰ τὴν φύτευσιν εἰς αὐτοὺς ἀνθέων;

7. Ἑκάστη διάμετρος εἰς τί τμήματα διαιρεῖ τὸν κύκλον ὡς πρὸς τὸ μέγεθος: Πῶς λέγονται δὲ ταῦτα;

8. Ἑκάστη διάμετρος εἰς τί τμήματα διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν ὡς πρὸς τὸ μέγεθος: Καὶ πῶς λέγονται ταῦτα;

9. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη ἡμιπεριφέρεια κύκλου.

8. Μέτρησις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

1. Τὸ ὕψος τοῦ κύκλου ἤτοι τὴν ἀκτῖνά του πολὺ εὔκολα μετροῦμεν μὲ τὸ μέτρον καὶ τὰς ἄλλας μονάδας τοῦ μήκους.

2. Τὴν περιφέρειάν του ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν, ἐκτὸς ἂν ἐμπήξωμεν εἰς αὐτὴν πασσάλους κατακορύφως πολὺ πλησίον ὥστε νὰ ἐφάπτωνται κατὰ τὰ πλάγια, μεταχειρισθῶμεν δὲ μέτρον ἀπὸ κορδέλλαν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν εἰς τὰς ἐργασίας μας. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ σκεφθῶμεν καὶ νὰ εὕρωμεν εὔκολον τρόπον διὰ τὴν μέτρησιν τῆς περιφερείας κύκλου.

Μετροῦμεν τὰς περιφερείας διαφόρων κυλίνδρων (τενεκέδων κονσερβῶν, βυτίων, ποτηρίων κλπ.) καὶ τὰς διαμέτρους τούτων. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ μῆκος ἑκάστης περιφερείας διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου της. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι εἰς ὅλας τὰς διαιρέσεις εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ πηλίκον 3,14. Ἤτοι, ἡ διάμετρος χωρεῖ εἰς τὴν περιφέρειαν 3,14 φορές. Εἶναι λοιπὸν ἡ περιφέρεια ἴσον μὲ τὴν διάμετρον ἐπὶ 3,14· ἤτοι $\Pi = \Delta \times 3{,}14$ μ. Ἄρα ἡ περιφέρεια εἶναι γινόμενον τῆς διαμέτρου ἐπὶ 3,14. ($\Pi. = \Delta \times 3{,}14$).

Ὥστε πολλαπλασιάζοντες τὴν διάμετρον ἐπὶ 3,14 εὑρίσκομεν τὴν περιφέρειαν.

Ὅθεν: α) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου μετροῦμεν τὴν διάμετρόν του καὶ τὸ μῆκός της πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3,14.

β) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον ἑνὸς κύκλου γνωρίζοντες τὴν περιφέρειάν του διαιροῦμεν ταύτην διὰ 3,14.

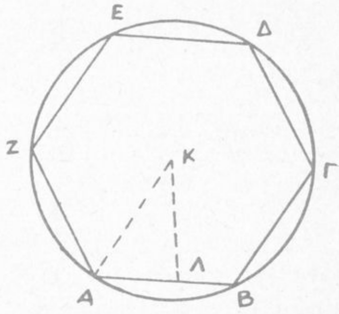
9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κύκλου

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ (σχ. 81) καὶ ὅτι ἡ βάσις του ΑΒΓΔΕΖΑ = 18,84 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του ΚΑ = 3 μέτρα.

Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον Κ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖΑ. Διαιρῶ τὰ τόξα τῶν πλευρῶν του εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ σύρω εἰς ταῦτα τὰς χορδάς των.

Σχηματίζεται τότε κανονικὸν δωδεκάγωνον πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος τείνει νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ὕψος του ΚΛ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ.

Κάμνω τὸ ἴδιον εἰς τὸ δωδεκάγωνον· ἤτοι διαιρῶ τὰ τόξα του εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ φέρω εἰς αὐτὰ τὰς χορδάς των. Σχηματίζεται τότε 24γωνον κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος τείνει περισσότερον νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ δὲ ὕψος του πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.



Σχ. 81

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν νὰ κάμωμεν τοῦτο, θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμὴν καθ' ἣν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. θὰ καταστοῦν ἰσοδύναμοι.
Ἐπίσης ἰσοδύναμα θὰ καταντήσουν καὶ τὰ ὕψη των ΚΛ καὶ ΚΑ. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὸν κύκλον ὡς κανονικὸν πολύγωνον μὲ περίμετρον τὴν περιφέρειάν του καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνά του· καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδόν του ὅπως τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ νὰ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ 2.

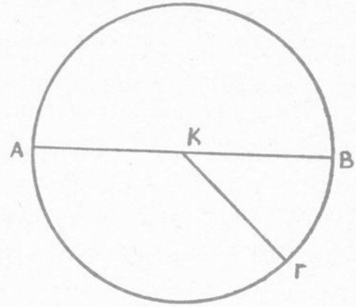
Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ κύκλου Κ (σχ. 81) εἶναι :

$$\frac{18,84 \times 3}{2} = \frac{56,52}{2} = 28,26 \text{ τ. μ.}$$

*Ὅθεν : **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του (τὴν περιφέρειάν του) ἐπὶ τὸ ὕψος του (τὴν ἀκτῖνα) καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.***

10. Εὕρεσις ἐμβαδοῦ τομέως κύκλου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ΒΚΓ (σχ. 82) καὶ ὅτι ἡ ἀκτὶς του ΚΓ = 6 μ. καὶ τὸ τόξον του ΒΓ = 60°.



Σχ. 82

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον πόσων μέτρων εἶναι τὸ τόξον ΒΓ σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς: Ἡ ὅλη περιφέρεια εἶναι 360°, εἰς μέτρα δὲ $(6 \times 2) \times 3,14 = 12 \times 3,14 =$
$= 37,68$ μ.

Ὥστε : $\dfrac{360°}{60°} \quad \dfrac{37,68 \text{ μ.}}{X}$

$$X = 37,68 \times \frac{60}{360} = 37,68 \times \frac{6}{36} =$$
$$= 37,68 \times \frac{1}{6} = \frac{37,68}{6} = \frac{12,56}{2} =$$
$$= 6,28 \text{ μ.}$$

Χαράσσομεν εἰς τὸ ἔδαφος ἓν τρίγωνον μὲ βάσιν ἴσην μὲ τὸ τόξον τοῦ τομέως, ἤτοι 6,28 μέτρα καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τομέως, ἤτοι 6 μέτρα. Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Τοῦτο εἶναι: $\dfrac{6,28 \times 6}{2} = \dfrac{37,68}{2} = 18,84$ τ. μ.

Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν καὶ τὴν βάσιν τοῦ τομέως ἐπὶ τὸ ὕψος του (τὴν ἀκτῖνα), καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των διὰ 2· ἤτοι·

$$\frac{6,28 \times 6}{2} = \frac{37,68}{2} = 18,84 \text{ τ. μ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν μὲ τὰς διαστάσεις τοῦ τομέως. Ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, καὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσα καὶ εὑρίσκονται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τομέως κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

(Ἤτοι κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου).

11. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου

1, Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν του, ἤτοι τῶν δύο βάσεών του καὶ τῆς παραπλεύρου του κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τούτων μᾶς εἶναι γνωστή· διότι αἱ μὲν βάσεις του εἶναι κύκλοι, ἡ δὲ κυρτή του ἐπιφάνεια ἐκτυλισσομένη λαμβάνει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ καὶ τούτου καὶ τῶν κύκλων μᾶς εἶναι γνωστὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ.

2. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλίνδρου σχ. 76 καὶ ὅτι ἡ ἀκτίς του ΚΒ = 5 μ. τὸ ὕψος του ΚΛ = 8 μ. ἑπομένως καὶ ἡ πλευρά του ΑΔ = 8 μ. Ἡ διάμετρός του θὰ εἶναι τότε $5 \times 2 = 10$ μ., ἡ δὲ περιφέρειά του $10 \times 3,14 = 31,4$. Θὰ εἶναι τότε τὸ ἐμβαδόν:

α) Τῆς βάσεως Κ $= \frac{31,4 \times 5}{2} = \frac{157}{2} = 78,5$ τ. μ.

β) » » Λ: τὸ αὐτό: $= 78.5$ τ. μ.

γ) » κυρτῆς ἐπιφανείας $31,4 \times 8 = 251,2$ τ. μ.

$408,2$ τ. μ.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν: α) τῶν δύο βάσεών του, β) τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας καὶ γ) προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα.

3. Παρατηρήσεις.

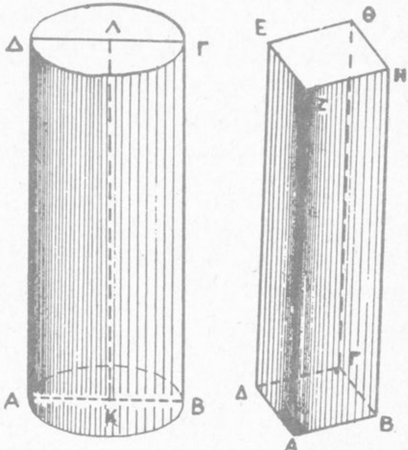
Ἐὰν ἐμβαθύνωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κυλίνδρου, παρατηροῦμεν: α) Ὅτι τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο βάσεών του εὑρίσκεται ὁμοῦ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα· ἤτοι: $31,4 \times 5 = 157$ τ. μ. β) Ὅτι, ἀφοῦ καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὸ ὕψος της, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁμοῦ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ κυλίνδρου πολλαπλασιάζοντες τὴν περιφέρειαν τῶν βάσεων του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑψῶν (ἤτοι τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ὕψους τοῦ κυλίδρου). ἤτοι:

$$31,4 \times (5 + 8) = 31,4 \times 13 = 408,2 \text{ τ. μ.}$$

12. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κυλίνδρου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου (σχ. 83). Ἔστω ἡ ἀκτὶς τούτου ΚΒ = 0,10 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΚΛ = 0,50 μ.

α) Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνιον κύλινδρον μὲ ἀκτῖνα 0,10 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ.



Σχ. 83

β) Κατασκευάζομεν ἐπίσης καὶ ἓν πρῖσμα μὲ ἕδραν βάσεως ΑΒΓΔΑ ἴσην μὲ τὴν βάσιν Κ τοῦ κυλίνδρου. Πρὸς τοῦτο ὁρίζομεν: τὸ μῆκος αὐτῆς ΑΒ = 0,20 μ. ἤτοι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου· καὶ τὸ πλάτος τῆς ΑΔ = 0,157 μ. Τοῦτο εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου διὰ τῆς ΑΒ, ἤτοι διὰ τοῦ 0,20 μ. (ἵνα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου). Καὶ πράγματι ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι εἶναι:

α) Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου:

$$\frac{[(0{,}10 \times 2) \times 3{,}14] \times 0{,}10}{2} = \frac{(0{,}20 \times 3{,}14) \times 0{,}10}{2} =$$

$$= \frac{0{,}628 \times 0{,}10}{2} = \frac{0{,}0628}{2} = 0{,}0314 \text{ τ. μ.}$$

β) Ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας βάσεως τοῦ πρίσματος: $0{,}20 \times 0{,}157 = 0{,}0314$ τ. μ

Οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν εἶναι ἴσοι διότι, ἐὰν γεμίσωμεν μὲ ἄμμον τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ τὸ κενώσωμεν εἰς τὸ ἄλλο, θὰ ἴδωμεν ὅτι καὶ τοῦτο γεμίζει ἀκριβῶς. Εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, ὡς γνωστόν· ἤτοι:

$$(0{,}20 \times 0{,}157) \times 0{,}50 = 0{,}0314 \times 0{,}50 = 0{,}0157 \text{ κ. μ.}$$

Εὑρίσκομεν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου κάμνοντες τὸ ἴδιον· ἤτοι :

$$\frac{(0,10 \times 2) \times 3,14) \times 0,10}{2} \times 0,50 = \frac{(0,20 \times 3,14) \times 0,10}{2} \times 0,50 =$$

$$= \frac{0,628 \times 0,10}{2} \times 0,50 = \frac{0,0628}{2} \times 0,50 = 0,0314 \times 0,50 =$$

$= 0,0157$ κ. μ.

Κάμνοντες λοιπὸν καὶ εἰς τὸν κύλινδρον ὅ,τι καὶ εἰς τὸ πρῖσμα εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον του, ὅστις, ὡς ἐδείξαμεν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν τοῦ πρίσματος.

Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

13. Προβλήματα κύκλου

ΟΜΑΣ Α'. (Ζητεῖται ἡ περιφέρεια)

1. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ;

2. Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 0,2 μ. Ποία εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

3. Ἡ διάμετρος ἑνὸς ἁλωνιοῦ εἶναι 12 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

4. Ἡ διάμετρος μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης εἶναι 2,4 μ. α) Ποία εἶναι ἡ περιφέρειά της ; β) Πόσα ἄτομα δύνανται νὰ καθήσουν πέριξ της, ἂν ἕκαστον ἄτομον καταλαμβάνῃ 0,628 μ. ;

5. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης εἶναι 0,8 μ. Γύρω της κάθηνται 9 ἄτομα. Πόσον μέρος τῆς περιφερείας καταλαμβάνει τὸ καθέν ;

6. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου ἔχουν ἀκτῖνα 0,40 μ. καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔκαμε 20.000 στροφάς. Πόσα μέτρα διέτρεξαν ;

7. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου ἔχουν διάμετρον 0,80 μ. Πόσας στροφὰς θὰ κάμουν διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ αὐτοκίνητον 50.240 μ. ;

8. Ἓν τραπεζομάνδηλον κυκλικὸν ἔχει διάμετρον 1,5 μ. Πόσα μέτρα κορδέλλας χρειάζεται ;

9. Οἱ μεγάλοι τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης ἔχουν ἀκτῖνα 0,80 μ. καὶ κάμνουν εἰς 1΄ λεπτὸν τῆς ὥρας 20 στροφάς. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 50.240 μέτρων ;

ΟΜΑΣ Β΄. (Ζητεῖται ἡ διάμετρος καὶ ἡ ἀκτὶς)

1. Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι 4,239 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ διάμετρός του;

2. Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι 22,608 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς του;

3. Ὁ κορμὸς ἑνὸς δένδρου ἔχει περιφέρειαν 7,536 μ. Ποία εἶναι ἡ διάμετρός του; Ποία ἡ ἀκτίς του;

4. Ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ ἑνὸς κάρρου εἶναι 4,082 μ. Ποία ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ;

5. Μία στροφὴ ἑνὸς τροχοῦ διατρέχει διάστημα 3,925 μ· α) Ποία ἡ διάμετρός του; β) Ποία ἡ ἀκτίς του;

6. Οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης μὲ 1000 στροφὰς διατρέχουν 3768 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς των;

7. Ἕκαστος μεσημβρινὸς τῆς γῆς ἔχει περιφέρειαν 40.000,000 μέτρων. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς των;

ΟΜΑΣ Γ΄ (Ζητεῖται τόξον κύκλου).

1. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 μ. Πόσων μέτρων εἶναι τόξον αὐτοῦ 72°;

2. Τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Ἀθηνῶν εἶναι 37° καὶ 57΄. Πόσα μέτρα ἀπέχουν αὗται ἀπὸ τὸν Ἰσημερινόν; (ὁ μεσημβρινὸς 40.000.000).

3. Δύο πόλεις εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν μεσημβρινόν. Ἡ μία ἔχει γεωγραφικὸν πλάτος βόρειον 36°, ἡ δὲ ἄλλη γεωγραφικὸν πλάτος βόρειον 54°. Πόσον ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην;

4. Δύο πόλεις εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ· ἡ μὲν μία ἔχει βόρειον γεωγραφικὸν πλάτος 36°, ἡ δὲ ἄλλη νότιον γεωγραφικὸν πλάτος 54°. Πόση εἶναι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις;

ΟΜΑΣ Δ΄. (Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου).

1. Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι 314 μ., ἡ δὲ ἀκτίς του 50 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 1,50 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3. Ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι 3,5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

4. Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι 128,112 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,12 μ., ἑνὸς δὲ ἄλλοῦ 0,04 μ. Πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροτέρου κύκλου χωρεῖ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγαλυτέρου;

6. Δύο κύκλοι ὁμόκεντροι ἔχουν ἀκτῖνα ὁ μὲν εἷς 7,5 μ., ὁ δὲ ἄλλος 5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν των ἐπιφανείας ;

7. Μία κυκλικὴ τράπεζα ἔχουσα περιφέρειαν 4,71 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ ὕφασμα πλάτους 0,75 μ. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ ;

ΟΜΑΣ Ε΄. (Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τομέως).

1. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,15 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τομέως του, ὅστις ἔχει τόξον 60^{0} ;

2. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 1,50 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τομέως αὐτοῦ, ὅστις ἔχει τόξον 90^{0} ;

3. Ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι 6 μέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τομέως αὐτοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι 150^{0} ;

14. Προβλήματα κυλίνδρου

ΟΜΑΣ Α΄. (Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν κυλίνδρου).

1. Ἑνὸς κυλίνδρου ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεώς του εἶναι 0.30 μ., τὸ δὲ ὕψος του 1,60. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2. Μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεώς της εἶναι 0,74 μ., τὸ δὲ ὕψος της 4 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

3. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 2,198 μ., τὸ δὲ ὕψος του 6,50 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

4. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς λέβητος κυλινδρικοῦ ἀπὸ χαλκὸν εἶναι 0,30 μ., τὸ δὲ ὕψος του 0,80 μ.· ὁ λέβης ἔχει καὶ κάλυμμα ἀπὸ χαλκόν. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ κασσιτέρωσίς του πρὸς 50 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον ;

5. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 10,048 τ. μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 0,4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του ;

6. Μία κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 6 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,4 μ. Ταύτης τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν πρόκειται νὰ καλύψωμεν μὲ ὕφασμα πλάτους 0,8 μ. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῶμεν ;

ΟΜΑΣ Β'. (Ζητεῖται ὁ ὄγκος κυλίνδρου).

1. Εἷς λέβης κυλινδρικὸς ἔχει ἀκτῖνα μὲν τῆς βάσεώς του 0,30 μ., ὕψος δὲ 0,80 μ. Ποῖος ὁ χῶρος του ;

2. Ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 2 μ., τὸ δὲ ὕψος του 8. Ποῖος εἶναι ὁ χῶρος του ;

3. Ὁ κορμὸς ἑνὸς δένδρου εἶναι κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἑκάστης βάσεως εἶναι 2,198 μ., τὸ δέ ὕψος 4 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι οὗτος ;

4. Μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης ναοῦ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς της εἶναι 0,50 μ., τὸ δὲ ὕψος 5,60 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

5. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 4, 396 κ. μ., τὸ δὲ ὕψος του 5,60 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του.

ΟΜΑΣ Γ'. (Διάφορα κυλίνδρου).

1. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 1 μ., τὸ δὲ ὕψος του 10 μ. : Ποῖον τὸ ἐμβαδόν :

α) τῆς μιᾶς βάσεώς του ; β) τῶν δύο βάσεών του ;

γ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας ;

δ) » » » τοῦ κυλίνδρου ;

ε) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

2. Μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης τὸ μὲν ὕψος εἶναι 6 μ., ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεώς της 0,65 μ. Πρόκειται νὰ καλύψωμεν τὴν κυρτήν της ἐπιφάνειαν μὲ ὕφασμα πλάτους 1,20 μ. Πόσον ὕφασμα πρέπει ν' ἀγοράσωμεν ;

3. Πρόκειται νὰ χρωματίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος μὲν 7 μ., ἀκτῖνα δὲ τῆς βάσεώς της 0,80 μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς πρὸς 35 δραχ. τὸ τετραγ. μέτρον ;

4. Πόσο νερὸ χωρεῖ μία κυλινδρικὴ δεξαμενή, ἥτις ἔχει διάμετρον μὲν βάσεως 10 μέτρων, ὕψος δὲ 5,50 μέτρων ; Καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ τὴν γεμίσουν δύο κρουνοὶ μὲ παροχὴν ὕδατος ἕκαστος $6 \frac{1}{4}$ κ. μ. τὴν ὥραν ;

5. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓν δοχεῖον κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα 0,5 τοῦ μέτρου καὶ νὰ χωρῇ 1,413 κυβικὰ μέτρα νεροῦ. Ποῖον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ;

6. Πόσον βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ. χωρεῖ κυλινδρικὸν δοχεῖον ὕψους 0,20 μετρ. καὶ ἀκτῖνος 0,10 μέτρου;

7. Ἕν κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει διάμετρον 1,50 μέτρων καὶ ὕψος 3 μέτρων. Πόσα κιλὰ νερὸ θὰ χωρέση;

8. Πόσον θὰ μᾶς κοστίση ν' ἀνοίξωμεν ἓν φρέαρ κυλινδρικὸν βάθους 10 μέτρων καὶ διαμέτρου 2,80 μέτρων πρὸς 2.500 δραχμὰς τὸ κυβικὸν μέτρον;

9. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ κτιρίου, (πύργου) εἶναι 5 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι κτισμένον;

10. Τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 6,50 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 0,90 μ.

α) Ποία εἶναι ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του;
β) » » ἡ περιφέρεια » » »;
γ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεώς του;
δ) » τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του;
ε) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας;
στ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλίνδρου;
ζ) Ποῖος ὁ ὄγκος του;

11. Ἐπὶ μιᾶς κυκλικῆς βάσεως ξυλίνης (φούντι), ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν 3,2 τετρ. μέτρα, πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κάδος κυλινδρικός, ὅστις νὰ χωρῇ 6,3 κυβ. μέτρα. Ποῖον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κάδος;

12. Χαράξατε κύλινδρον μὲ διάμετρον 0,20 μ. καὶ ὕψος 0,70 μ. καὶ εὕρετε;

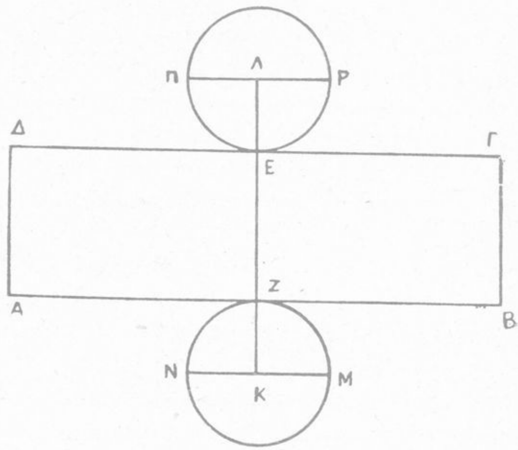
α) Τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του.
β) Τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του.
γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεώς του.
δ) » » τῶν δύο βάσεών του.
ε) » » τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας.
στ) » » τοῦ κυλίνδρου.
ζ) Τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου.

15. Ἰχνογράφησις κυλίνδρου

Διὰ νὰ Ἰχνογραφήσωμεν κύλινδρον: α) χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΛ ἴσην μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. β) Μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνα, τὴν ἀκτῖνα τῶν κύκλων τοῦ κυλίνδρου, γράφομεν μὲ τὸν διαβήτην τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ. γ) Γράφομεν τὰς διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους εἰς τὴν ΚΛ. δ) Γράφομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ. (σχ. 76).

16. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος κυλίνδρου

α) Γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν περιφέρειαν. β) Φέρομεν εἰς αὐτὴν καθέτους τὴν ΑΔ καὶ ΓΒ ἴσας μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. γ) Φέρομεν τὴν ΔΓ. (ΑΒΓΔ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου). δ) Ἑνοῦμεν τὰ Ε καὶ Ζ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΔΓ διὰ τῆς ΕΖ. ε) ἐπεκτείνομεν αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν τὴν ΕΛ καὶ ΚΖ ἴσας μὲ τὴν ἀκτῖνα. στ) Μὲ κέντρα τὸ Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνας τὴν ΚΖ καὶ τὴν ΛΕ γράφομεν μὲ τὸν διαβήτην τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ (Σχ. 84). Οὗτοι εἶναι αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἀνάπτυγμα ἤδη ἔχει γραφῆ.



Σχ. 84

17. Κατασκευὴ κυλίνδρου ἀπὸ χαρτόνιον

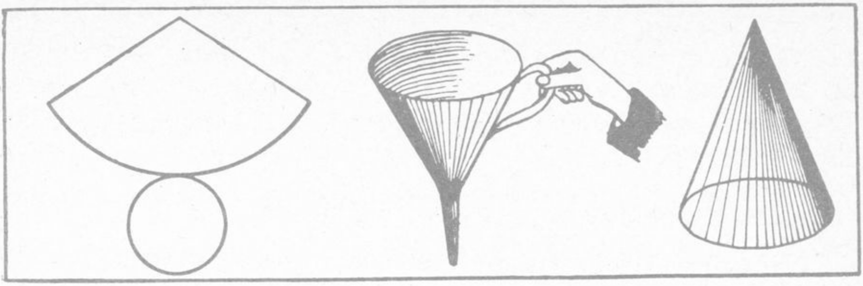
Ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα, κόπτομεν αὐτὸ ὅπου πρέπει, λυγίζομεν τὰς βάσεις, κυκλοῦμεν τὴν κυρτήν του ἐπιφάνειαν καὶ ράπτομεν ἢ κολλῶμεν μὲ χαρτίνας ταινίας καὶ γόμμαν

18. Ἀσκήσεις

1) Γράψατε κύλινδρον μὲ ὕψος 0,035 μ. καὶ ἀκτῖνα τῶν βάσεών του 0,005 μ. καὶ ὀνομάσατε μὲ γράμματα:

α) Τὸ ὕψος του, β) Τὴν κυρτήν του ἐπιφάνειαν, γ) Τὰς βάσεις του, δ) Τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του.

2) Κατασκευάσατε κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνι μὲ ἀκτῖνα βάσεών του 0.10 μ. καὶ ὕψος 0,30 μ.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΚΩΝΟΣ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν κῶνον πρὸ αὐτῶν)

1. Παρατηρήσεις

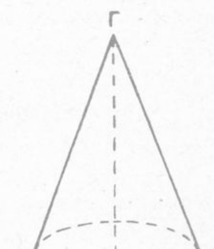
1) Εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο ἐπιφανείας· ἐλέγχομεν ταύτας μὲ τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν τὴν μὲν μίαν, εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται, ἐπίπεδον, τὴν δὲ ἄλλην, τὴν παράπλευρόν του, κυρτήν.

2) Ἡ ἐπίπεδός του ἐπιφάνεια περατοῦται εἰς καμπύλην γραμμήν· μετροῦντες δέ, εὑρίσκομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα ταύτης ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας· ἄρα αὕτη εἶναι κύκλος.

3) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια πρὸς τὰ ἄνω μὲν τελειώνει εἰς ἓν σημεῖον, πρὸς τὰ κάτω δὲ εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

4. Ἐὰν περιτυλίξωμεν μὲ χαρτὶ τὴν κυρτήν του ἐπιφάνειαν καὶ ἔπειτα ἐκτυλίξωμεν αὐτό, λαμβάνει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως.

5. Τὸ στερεὸν τοῦτο λέγεται κῶνος (σχ. 85).



Σχ. 85

Ὅθεν : Κῶνος λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς ἕνα κύκλον καὶ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀπολήγει εἰς ἓν σημεῖον καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

6. Βάσις τοῦ κώνου λέγεται ὁ κύκλος αὐτοῦ, (κύκλος Α σχ. 85).

7. Κορυφὴ τοῦ κώνου λέγεται τὸ σημεῖον εἰς τὸν ὁποῖον ἀπολήγει ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια (Γ σχ. 85).

8. Ὕψος τοῦ κώνου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς του εἰς τὴν βάσιν του (ΓΑ σχ. 85).

9. Πλευρὰ τοῦ κώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὴν κορυφήν του μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερίας τῆς βάσεώς του (ΒΓ).

2. Ἰχνογράφησις κώνου

Γράφομεν α) τὴν βάσιν του (Α σχ. 85), β) τὴν διάμετρον ΒΔ, γ) ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἴσην μὲ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, δ) φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΔΓ (σχ. 85).

3. Κατασκευὴ κώνου ἀπὸ πηλὸν

Εἰς μίαν λεκάνην ἔχομεν πηλὸν μαλακόν. Βυθίζομεν εἰς αὐτὸν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπὸ σύρμα δυνατὸν οὕτως, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του νὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ὁριζοντίαν βάσιν τῆς λεκάνης. Περιστρέφομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον περὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν του μέχρις ὅτου ἡ τρίτη πλευρά του (ἡ ὑποτείνουσα) γράψῃ ὁλόκληρον περιστροφὴν καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἤρχισε τὴν περιστροφήν.

Μὲ τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ μὲν κάθετος πλευρά, ποὺ στηρίζεται εἰς τὴν βάσιν τῆς λεκάνης, θὰ γράψῃ τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τούτου. Ὁ ἐντὸς τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν πηλὸς ἀποτελεῖ κῶνον.

Σημ. Ἡ κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ περιστροφή, πρέπει ν' ἀπολήγῃ εἰς αἰχμήν, ἡ δὲ λεκάνη νὰ εἶναι ξυλίνη δι' εὐνοήτους λόγους.

4. Ἀσκήσεις

1. Γράψατε ἕνα κῶνον μὲ ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του 0,02 μ. καὶ ὕψος 0,08 μ. καὶ ὀνομάσατε μὲ γράμματα : α) Τὴν βάσιν του· β) Τὴν κορυφήν του· γ) Τὸ ὕψος του· δ) Τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του· ε) Μίαν πλευράν του.

2 Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν κῶνον καὶ δείξατε τ' ἀνωτέρω.

5. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κώνου

1. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κώνου φανερὸν εἶναι ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῶν δύο τούτων μᾶς εἶναι γνωστή. Διότι ἡ μὲν βάσις του εἶναι κύκλος, ἡ δὲ κυρτή του ἐπιφάνεια τομεὺς κύκλου, τοῦ ὁποίου τόξον εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς βάσεώς του.

2. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κώνου σχ. 85· καὶ ἔστω ἡ πλευρά του ΒΓ = 3 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του ΑΔ = 0,40 μ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι :

$$\frac{(0{,}40 \times 2) \times 3{,}14 \times 0{,}40}{2} = \frac{(0{,}80 \times 3{,}14) \times 0{,}40}{2} =$$

$$= \frac{2{,}512 \times 0{,}40}{2} = \frac{1{,}0048}{2} = 0{,}5024 \text{ τ. μ.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι :

$$\frac{(0{,}40 \times 2) \times 3{,}14 \times 3}{2} = \frac{(0{,}80 \times 3{,}14) \times 3}{2} = \frac{2{,}512 \times 3}{2} =$$

$$= \frac{7{,}536}{2} = 3{,}768 \text{ τ. μ.}$$

Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κώνου εἶναι :

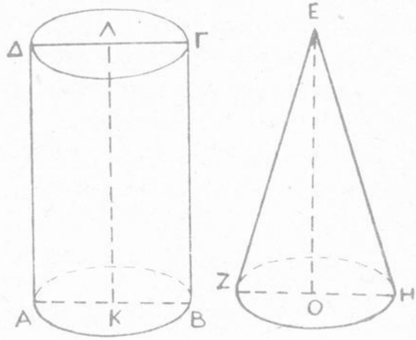
$$0{,}5024 + 3{,}768 = 4{,}2704 \text{ τ. μ.}$$

Ὅθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κώνου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ ἔπειτα τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐμβαδά.

6. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κώνου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου (σχ. 86), ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεώς του ΟΗ = 0,10 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος ΟΕ = 0,45 τοῦ μέτρου.

Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνιον ἕνα κῶνον καὶ ἕνα κύλινδρον μὲ ἀκτῖνα τῆς βάσεώς των 0,10 μ. καὶ ὕψος 0,45 μ. Γεμίζομεν τὸν κῶνον μὲ ἄμμον καὶ τὸν ἀδειάζομεν εἰς τὸν κύλινδρον· ἐπαναλαμβάνομεν δὲ τοῦτο μέχρις ὅτου γεμίσει ὁ κύλινδρος. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο θὰ συμβῇ, ἀφοῦ γεμίση καὶ ἀδειάση ὁ κῶνος 3 φοράς. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου· ἤτοι $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ.



Σχ. 86

Εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς εἶναι :

$$\frac{(0,10 \times 2) \times 3,14}{2} \times 0,10 =$$

$$= \frac{0,20 \times 3,14}{2} \times 0,10 =$$

$$= \frac{0,628}{2} \times 0,10 = 0,314 \times 0,10 =$$

$= 0,0314$ τ. μ.

Καὶ ὁ ὄγκος του : $0,0314 \times 0,45 = 0,01413$ κ. μ.

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ κώνου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ· ἤτοι

$\frac{0,01413}{3} = 0,00471$ κ. μ.

Δυνάμεθα λοιπόν, ἀφοῦ ὁ κῶνός μας ἔχει τὰς αὐτὰς διαστάσεις μὲ τὸν κύλινδρον, νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας τὸν ὄγκον του, ὅπως εἰς τὸν κύλινδρον καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 3· ἤτοι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι :

$$\frac{[(0,10 \times 2) \times 3,14] \times 0,10}{2} = \frac{(0,20 \times 3,14) \times 0,10}{2} =$$

$= \frac{0,628 \times 0,10}{2} = 0,314 \times 0,10 = 0,0314$ τ. μ.

καὶ ὁ ὄγκος του :

$$\frac{0,0314 \times 0,45}{3} = \frac{0,01413}{3} = 0,00471 \text{ κ. μ.}$$

Ὅθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

7. Προβλήματα κώνου

ΟΜΑΣ Α΄. (Ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν).

1. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 0,08 μ., ἡ δὲ πλευρά του 0,15 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κωνικοῦ δοχείου εἶναι 0,25 μ., ἡ δὲ πλευρά του 0,40 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 9,42 μέτρα, ἡ δὲ πλευρά του 10 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

4. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως μιᾶς σκηνῆς εἶναι 15,70 μ. Πόσην ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους σκεπάζει αὕτη ;

5. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 12,56 μ., ἡ δὲ πλευρά του 3,20 μέτρα :

α) Ποία εἶναι ἡ κυκλική του ἐπιφάνεια ;

β) » » » κυρτή του ἐπιφάνεια ;

γ) » » » ὁλική του ἐπιφάνεια ;

6. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως μιᾶς σκηνῆς εἶναι 12 μ., ἡ δὲ πλευρὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της 3,80 μ. Πόσα μέτρα καραβοπάνου θὰ χρειασθῶμεν διὰ μίαν τοιαύτην σκηνήν, ἂν τὸ πλάτος τοῦ καραβοπάνου εἶναι 0,75 μ. ;

7. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα μὲν τῆς βάσεώς του 0,40 μ., πλευρὰν δὲ 3 μέτρων ;

ΟΜΑΣ Β΄. (Ζητεῖται ὁ ὄγκος)

1. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 31,80 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 5 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

2. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα μὲν τῆς βάσεώς του 0,15 μ., ὕψος δὲ 0,60 μ. ;

3. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ὅστις ἔχει διάμετρον μὲν 1,50 μ. ὕψος δὲ 6 μ. ;

4. Μία κωνικὴ σκηνὴ ἔχει ὕψος 2,40 μ., περιφέρειαν δὲ τῆς βάσεώς της 9,42 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ ;

5. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 0,16 μ., ἡ πλευρά του 0,30 μ. καὶ τὸ ὕψος του 0,25 μ.

α) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας ;

β) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

6. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 1,57 μ., τὸ δὲ ὕψος του 0,8 μ. ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

7. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος σιδηροῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 0,40 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,30 μέτρου; (τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,78).

8. Γράψατε κῶνον μὲ διάμετρον τῆς βάσεώς του 0,05 μ. καὶ ὕψος 0,08 μ. καὶ εὕρετε: α) τὴν πλευρὰν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας μετροῦντες αὐτήν. β) Τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του. γ) Τὸ ἐμβαδόν του. δ) Τὸν ὄγκον του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

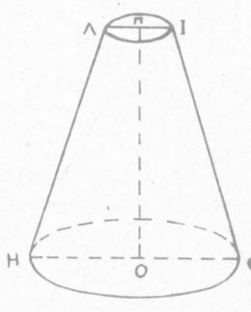
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν κόλουρον κῶνον)

1. Παρατηρήσεις

1. Εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς 3 ἐπιφανείας. Ἐλέγχοντες δὲ αὐτὰς μὲ τὸν κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι αἱ μὲν δύο, ποὺ εὑρίσκονται ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης, εἶναι ἐπίπεδοι, ἡ δὲ ἄλλη κυρτὴ (σχ. 87).

2. Αἱ δύο ἐπίπεδοί του ἐπιφάνειαι περατοῦνται ἑκάστη εἰς καμπύλην γραμμήν· μετροῦντες δὲ εὑρίσκομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα ταύτης ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ μέσον τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν. Ἄρα αἱ ἐπίπεδοι αὗται ἐπιφάνειαί του εἶναι κύκλοι.



Σχ. 87

3. Αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαί του δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἐὰν ἐπεκταθοῦν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις· εἶναι παράλληλοι.

4. Ἰχνογραφοῦμεν τὰς δύο του αὐτὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας εἰς χαρτόνιον τὰς κόπτομεν καὶ τὰς θέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην. Βλέπομεν ὅτι δὲν ἐφαρμόζουν ἡ μία εἰς τὴν ἄλλην· ἄρα εἶναι ἄνισοι.

5. Ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια περατοῦται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κάτω εἰς τὰς περιφερείας τῶν δύο κύκλων.

6. Ἐὰν περιτυλίξωμεν μὲ χαρτὶ τὴν κυρτήν του ἐπιφάνειαν καὶ ἔπειτα ἐκτυλίξωμεν τοῦτο, λαμβάνει σχῆμα ὅμοιον πρὸς τραπέζιον μὲ βάσεις τόξα.

7. Ἐὰν ἐπεκταθῇ ἡ κυρτή των ἐπιφάνεια πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ μικροῦ κύκλου, προστίθεται ἐπάνω στὸ στερεὸν μικρὸς κῶνος καὶ ἀποτελοῦν μαζὶ πλήρη κῶνον. Ὥστε τὸ στερεὸν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μεταβάλλεται εἰς κῶνον. Δι' αὐτὸ ἐπῆρε καὶ τὸ ὄνομα κόλουρος κῶνος.

8. ***Ὅθεν κόλουρος κῶνος λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο ἀνίσους καὶ παραλλήλους κύκλους καὶ εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς τὰς περιφερείας αὐτῶν*** (σχ. 87).

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν αἱ γλάστραι, πολλοὶ κάδοι, μερικὰ ποτήρια, ἀνθοδοχεῖα κ.ἄ.

9. ***Βάσεις*** τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι αὐτοῦ (Ο καὶ Π. σχ. 87).

10. ***Ὕψος*** τοῦ κολούρου κώνου λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται εἰς τὴν μίαν βάσιν του ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ἄλλης βάσεώς του (ἡ ΟΠ).

11. ***Πλευρὰ*** τοῦ κολούρου κώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ποὺ εἶναι καὶ πλευρὰ τοῦ πλήρους κώνου (ἡ ΗΛ, ΘΙ).

2. Ἰχνογράφησις κολούρου κώνου

Διὰ νὰ Ἰχνογραφήσωμεν κόλουρον κῶνον :

α) Χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ὁριζόντιον ΗΘ (σχ. 87).

β) Ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτῆς Ο ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΘ, τὴν ΟΠ.

γ) Φέρομεν παράλληλον τῆς ΗΘ, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Π τῆς ΟΠ, τὴν ΛΙ, ποὺ εἶναι μικροτέρα τῆς ΗΘ.

δ) Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Ο καὶ Π καὶ ἀκτῖνας τὰς εὐθείας ΟΘ καὶ ΠΙ γράφομεν περιφερείας κύκλου.

ε) Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Η καὶ Λ, Θ καὶ Ι δι' εὐθειῶν. Καὶ ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει γραφῆ.

3. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κολούρου κώνου

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν βάσεών του εἶναι γνωστή, καθ' ὅσον ἔχουν σχῆμα κύκλου. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας εὐκολονόητον ὅτι εὑρίσκεται ὅπως τοῦ τραπεζίου.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου (σχ. 87) καὶ ὅτι ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς μεγαλυτέρας του βάσεως ΟΘ = 0,4 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς μικροτέρας βάσεώς του ΠΙ = 0,2 μ. καὶ ἡ πλευρά του ΙΘ = 1,2 μ. :

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγαλυτέρας του βάσεως εἶναι :

$$\frac{(0{,}4 \times 2) \times 3{,}14 \times 0{,}4}{2} = \frac{0{,}8 \times 3{,}14 \times 0{,}4}{2} = \frac{2{,}512 \times 0{,}4}{2} =$$

$$= \frac{1{,}0048}{2} = 0{,}5024 \text{ τ. μ.}$$

β) Ἐμβαδὸν τῆς μικροτέρας βάσεώς εἶναι :

$$\frac{(0{,}2 \times 2) \times 3{,}14 \times 0{,}2}{2} = \frac{0{,}4 \times 3{,}14 \times 0{,}2}{2} = \frac{1{,}256 \times 0{,}2}{2} =$$

$$= \frac{0{,}2512}{2} = 0{,}1256 \text{ τ. μ.}$$

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας : Ἡ μεγάλη βάσις αὐτῆς, ἤτοι ἡ περιφέρεια τοῦ μεγάλου κύκλου, εἶναι :
$(0{,}4 \times 2) \times 3{,}14 = 0{,}8 \times 3{,}14 = 2{,}512$ μ. Ἡ μικροτέρα δὲ βάσις της, ἤτοι ἡ περιφέρεια τοῦ μικροτέρου κύκλου εἶναι :

$$(0{,}2 \times 2) \times 3{,}14 = 0{,}4 \times 3.14 = 1{,}256 \text{ μ.}$$

Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας εἶναι :

$$\frac{(2{,}512 + 1{,}256) \times 1{,}2}{2} = \frac{3{,}768 \times 1{,}2}{2} = \frac{4{,}5216}{2} = 2{,}2608 \text{ τ. μ.}$$

δ) Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου εἶναι :

$$0{,}5024 + 0{,}1256 + 2{,}2608 = 2{,}8888 \text{ τ. μ.}$$

Ὅθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κολούρου κώνου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν τριῶν του ἐπιφανειῶν χωριστὰ καὶ προσθέτομεν ταῦτα.

4. Προβλήματα κολούρου κώνου

1. Ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλυτέρας βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 0,8 μ., τῆς δὲ μικροτέρας 0,2 μ.· ἡ πλευρά του 1,34 μ. νὰ εὑρεθῇ :

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγαλυτέρας βάσεώς του.

β) » » » μικροτέρας βάσεώς του.

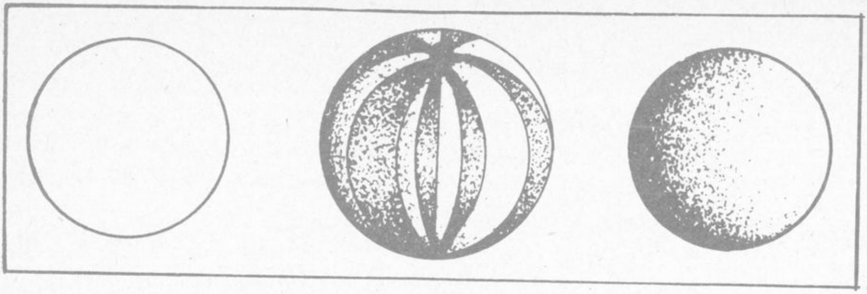
γ) » » » κυρτῆς του ἐπιφανείας.

δ) » » » ὁλικῆς ἐπιφανείας.

2. Ἡ διάμετρος τῆς μεγαλυτέρας βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 1,2 μ., τῆς δὲ μικροτέρας 0,8 μ. καὶ ἡ πλευρά του 2,40 μ. ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3. Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 1,60 μ. καὶ 1,20 μ., ἡ δὲ πλευρὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας 6 μ.· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

4. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶναι 4 μέτρα ἡ μία καὶ 3 ἡ ἄλλη, ἡ δὲ πλευρά του 5 μ;



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΣΦΑΙΡΑ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν σφαῖραν πρὸ αὐτῶν)

1. Παρατηρήσεις

1) Εἶναι σῶμα στερεὸν· τὸ λέγομεν σφαῖραν.

2) Ὁ κανὼν μόνον εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας του ἐφάπτεται, ὅταν τὸν ἐπιθέτωμεν· ἤτοι κανὲν μέρος αὐτοῦ, ὁσονδήποτε μικρόν, δὲν ἀποτελεῖ ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Ἔχει λοιπὸν ἡ σφαῖρα κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

3) Ἂν κόψωμεν τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμισφαίρια) καὶ μετρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις πολλῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας της ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς, βλέπομεν ὅτι αὗται εἶναι ὅλαι ἴσαι ἄρα ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ μέσον της.

4) Κόπτομεν τὴν σφαῖραν οὕτως, ὥστε ἡ κοπὴ νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τοῦ κέντρου της· ἑκάστη κοπὴ εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περατοῦται εἰς καμπύλην γραμμήν· μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τῶν καμπυλῶν τούτων ἀπὸ τὸ μέσον των καὶ βλέπομεν ὅτι ἀπέχουν ἀπ' αὐτὸ ἴσον. Ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι ὅλων τῶν κοπῶν εἶναι κύκλοι.

5) Ἐπιθέτομεν τὰ τεμάχια ταῦτα τῆς σφαίρας τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο καὶ βλέπομεν ὅτι οἱ κύκλοι των ἐφαρμόζουν· ἄρα ὅλοι εἶναι ἴσοι.

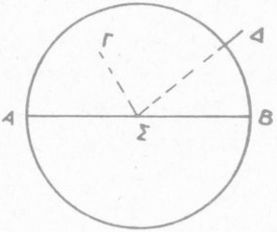
Παρατηροῦμεν δὲ συγχρόνως ὅτι καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ταυτίζονται μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἄρα αἱ ἀκτῖνες των εἶναι καὶ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας καὶ αἱ διάμετροί των εἶναι ἐπίσης διάμετροι τῆς σφαίρας.

6) Κόπτομεν τὴν σφαῖραν οὕτως, ὥστε αἱ κοπαὶ νὰ μὴ διέρχωνται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ κάμνομεν ὅ,τι καὶ ἀνωτέρω· βλέπομεν τότε ὅτι καὶ αἱ κοπαὶ αὗται εἶναι κύκλοι, ἀλλὰ μικρότεροι ἀπὸ τοὺς προηγουμένους καὶ ὅσον οὗτοι πλησιάζουν πρὸς τὸ μέσον τῆς σφαίρας, τόσον μεγαλύτεροι γίνονται.

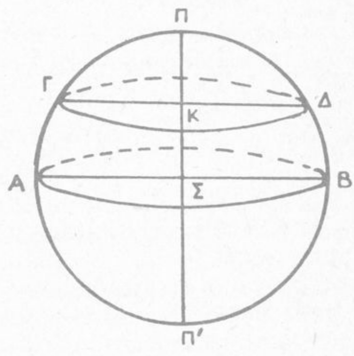
Τὰ σώματα εἰς τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν ὅλα αὐτά, εἴπομεν, ὅτι λέγονται σφαῖραι

7) ***Ὅθεν : σφαῖρα λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας*** (σχ. 88, 89).

Σχῆμα σφαίρας ἔχει τὸ τόπι, τὸ ποδόσφαιρον, τὸ πορτοκάλιον, οἱ βόλοι κ. ἄ.



Σχ. 88



Σχ. 89

8) ***Κέντρον τῆς σφαίρας*** λέγεται τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της (σχ. 88).

9) ***Ἀκτὶς*** τῆς σφαίρας λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον αὐτῆς μὲ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της· (ἡ ΑΣ, ἡ ΒΣ).

10) ***Διάμετρος*** τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ περατοῦται εἰς τὴν ἐπιφάνειάν της καὶ κατὰ τὰ δύο ἄκρα της (ἡ ΑΒ).

11) ***Μέγιστος κύκλος*** τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς· (ὁ κύκλος Σ).

12) Κέντρον παντὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι τὸ κέντρον αὐτῆς.

13) Ἀκτῖνες τῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας εἶναι αἱ ἀκτῖνες αὐτῆς.

14) Διάμετροι τῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας εἶναι αἱ διάμετροι αὐτῆς.

15) Μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς· (ὁ κύκλος Κ σχ. 89).

16) Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι αὐτῆς, οἱ ὁποῖοι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις· (οἱ Σ καὶ Κ σχ. 89).

17) Ἡμισφαίριον λέγεται τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη τῆς σφαίρας, εἰς τὰ ὁποῖα τὴν διαιρεῖ πᾶς μέγιστος κύκλος αὐτῆς. (ΑΣΒΔΠΓΑ καὶ ΑΣΒΠ'Α).

18) Βάσις τῆς σφαίρας λέγεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

19) Ὕψος τῆς σφαίρας λέγεται ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

2. Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν σφαίρας καὶ εἰς μίαν χρωματίσατε μὲ χρωματιστὸν μολύβιον τὰς περιφερείας δύο μεγίστων κύκλων της καθέτων πρὸς ἀλλήλους.

2) Εἰς ἄλλην τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μικροῦ κύκλου αὐτῆς.

3) Εἰς ἄλλην τὰς περιφερείας κύκλων παραλλήλων.

4) Εἰς ἄλλην τὸ ἓν ἡμισφαίριον.

3. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας

Ἔχομεν σφαῖραν ἀπὸ 2 ἡμισφαίρια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ διαχωρίζωνται καὶ πάλιν νὰ συναρμολογοῦνται καὶ νὰ ἀποτελοῦν τὴν σφαῖραν.

Κατασκευάζομεν ἀπὸ λεπτὸ χαρτὶ 4 μεγάλους κύκλους τῆς σφαίρας καὶ σκεπάζομεν μὲ αὐτοὺς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἀφοῦ τοὺς τεμαχίσωμεν καταλλήλως. Βλέπομεν τότε ὅτι σκεπάζεται μὲ αὐτοὺς ἀκριβῶς ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

***Ὅθεν**: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν 4 μεγίστων κύκλων αὐτῆς.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου αὐτῆς καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4.

Ἔστω ἡ σφαῖρα Σ (σχ. 88) καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. ΑΣ = 8 μ.

Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς εἶναι: $(8 \times 2) \times 3{,}14 = 16 \times 3{,}14 = 50{,}24$ μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\frac{50{,}24 \times 8}{2} = \frac{401{,}92}{2} = 200{,}96 \text{ τ. μ.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας εἶναι: $200{,}96 \times 4 = 803{,}84$ τ.μ.

4. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου σφαίρας

1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,05 τοῦ μέτρου.

Κατασκευάζομεν μίαν σφαῖραν ἀπὸ δέρμα μὲ ἀκτῖνα 0,05 τοῦ μέτρου καὶ ἕνα κῶνον ἀπὸ χαρτόνιον τοῦ ὁποίου ὁ κύκλος τῆς βάσεώς του νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα 0,10 τοῦ μέτρου, ὕψος δὲ 0,05 τοῦ μέτρου (ἵνα αἱ βάσεις σφαίρας καὶ κώνου εἶναι ἴσαι).

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\frac{(0{,}05 \times 2) \times 3{,}14 \times 0{,}05}{2} \times 4 = \frac{0{,}1 \times 3{,}14 \times 0{,}05}{2} \times 4 =$$

$$= \frac{0{,}314 \times 0{,}5}{2} \times 4 = \frac{0{,}0157}{2} \times 4 = \frac{0{,}0628}{2} = 0{,}0314 \text{ τ. μ.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ κώνου (τῆς βάσεώς του) εἶναι:

$$\frac{(0{,}10 \times 2) \times 3{,}14 \times 0{,}10}{2} = \frac{0{,}20 \times 3{,}14 \times 0{,}10}{2} =$$

$$= \frac{0{,}628 \times 0{,}10}{2} = \frac{0{,}0628}{2} = 0{,}0314 \text{ τ. μ.}$$

Ὅθεν: ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου τοῦ κώνου εἶναι ἴσαι· ἤτοι αἱ βάσεις των εἶναι ἴσαι. Ἔχουν δὲ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος 0,05 τοῦ μέτρου.

Γεμίζομεν τὸν κῶνον μὲ ἄμμον, ταύτην δὲ χύνομεν κατόπιν εἰς τὴν σφαῖραν. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη γεμίζει ἀκριβῶς. Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου.

Εὑρίσκομεν τώρα τὸν ὄγκον τοῦ κώνου: οὗτος εἶναι:

$$\frac{0{,}0314 \times 0{,}05}{3} = \frac{0{,}0157}{3} = 0{,}00052\,\frac{1}{3} \text{ κ. μ.}$$

Διὰ νὰ τὸν εὕρωμεν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διηρέσαμεν διὰ 3.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα καὶ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας κάμνομεν, ὅ,τι καὶ εἰς τὸν κῶνον· ἤτοι:

$$\frac{0{,}0314 \times 0{,}05}{3} = \frac{0{,}00157}{3} = 0{,}00052\frac{1}{3} \text{ κ. μ.}$$

Βλέπομεν ὅτι εὕρομεν ὡς ὄγκον της τὸν ὄγκον τοῦ κώνου· ἀπεδείξαμεν δὲ καὶ μὲ τὴν ἄμμον ὅτι πράγματι ἔχουν τὸν ἴδιον ὄγκον. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὸν κῶνον.

***Ὅθεν**: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της (ἤτοι τῆς ἐπιφανείας της) ἐπὶ τὸ ὕψος της (ἤτοι τὴν ἀκτῖνά της) καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.*

5. Προβλήματα σφαίρας

1. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,6 μ. Νὰ εὕρητε:
α) Ποία εἶναι ἡ διάμετρός της.
β) Ποία εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.
γ) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.
δ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας.
ε) Ποῖος ὁ ὄγκος αὐτῆς.

2. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,8 μ.
α) Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς της;
β) Ποία ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου της;
δ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας;
ε) Ποῖος ὁ ὄγκος της;

3. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς τοπίου εἶναι 0,628 μ.
α) Ποία ἡ διάμετρός του;
β) Ποία ἡ ἀκτίς του;
γ) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου του;
δ) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του;
ε) Ποῖος ὁ ὄγκος του;

4. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 1,20 μ. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

5. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 1,40 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της;

6. Ἡ περιφέρεια μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,942 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της;

7. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 0,15 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος της;

8. Ἡ διάμετρος ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 0,5 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος της ;

9. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 1,256 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος της ;

10. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτὶς βάσεως τούτου εἶναι 0,2 μ. Ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἄλλου ;

11. Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν μίαν σφαῖραν καὶ εὕρετε : α) τὴν διάμετρόν της, β) τὴν ἀκτῖνα της, γ) τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της, ε) τὸ ἐμβαδόν της, στ) τὸν ὄγκο της.

12. Ἑνὸς τοπίου εὕρετε : α) τὸ ἐμβαδόν του, β) τὸν ὄγκον του.

13. Ἡ περιφέρεια μιᾶς μεταλλικῆς σφαίρας εἶναι 0,2512 μ. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ταύτης πρόκειται νὰ χρυσωθῇ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ χρύσωσις, ἐὰν ἡ χρύσωσις ἑκάστου τετραγ. μέτρου στοιχίζῃ 2.500. δραχ. ;

14. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι 4,5216 τ.μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ;

15 Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει περιφέρειαν 1,1304 μέτρα Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ

Τῶν τοιούτων σωμάτων δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰς διαστάσεις· ἑπομένως οὔτε τὸν ὄγκον νὰ εὕρωμεν. Τοῦτον εὑρίσκομεν κατὰ διαφόρους τρόπους ;

α) Τοποθετοῦμεν ἐντὸς λεκάνης ἓν δοχεῖον κανονικοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος (ἰδίως κυβικοῦ) κοῖλον καὶ τὸ γεμίζομεν νερό. Μέσα εἰς αὐτὸ βάζομεν ἔπειτα τὸ ἀκανόνιστον σῶμα, ὁπότε τοῦτο ἐκτοπίζει νερό, τὸ ὁποῖον χύνεται εἰς τὴν λεκάνην. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἀπὸ τὸ δοχεῖον τὸ ἀκανόνιστον σῶμα καὶ μετροῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἀδιασθέντος χώρου τοῦ δοχείου· φανερὸν εἶναι ὅτι οὗτος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μὴ γεωμετρικοῦ σώματος.

β) Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῶν μὴ γεωμετρικῶν στερεῶν σωμάτων γεμίζοντες τὸ κανονικὸν γεωμετρικὸν δοχεῖον καὶ μὲ ἄμμον.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΤΑΞΙΣ ΠΕΜΠΤΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

		Σελὶς
1,	Σώματα	5
2.	Ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων	6
3.	Γραμμαὶ	7
4.	Χάραξις καὶ μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν	8
	ΚΥΒΟΣ	11
	Παρατηρήσεις	11
1.	Ὄγκος καὶ σχῆμα του	11
2.	Ἐπιφάνειά του	11
3.	Ἕδραι του	11
4.	Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου	12
5.	Ἀκμαὶ τοῦ κύβου	12
6.	Σχῆμα ἑδρῶν	12
7.	Ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου	13
8.	Θέσεις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας	14
9.	Χάραξις ἐπιπέδου γωνίας	16
10.	Διχοτόμησις ἐπιπέδου γωνίας	17
11.	Εἴδη ἐπιπέδων γωνιῶν	17
12.	Ἐπίπεδοι γωνίαι, αἵτινες ἔχουν κοινὴν κορυφὴν	18
13.	Θέσις τῶν ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα	19
14.	Εἴδη διέδρων γωνιῶν	21
15.	Ἄλλαι παρατηρήσεις εἰς τὸν κύβον	21
16.	Διαστάσεις τοῦ κύβου	22
17.	Ἰχνογράφησις τετραγώνου	22
18.	Πῶς κατασκευάζομεν τετράγωνα ἀπὸ χαρτόνιον	23
19.	Ἰχνογράφησις κύβου	23
20.	Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος κύβου	23
21.	Κατασκευὴ κύβου ἀπὸ χαρτόνιον	24

Σελίς

22. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου 25
23. Μέτρησις τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου 26
24. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου 28
25. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τετραγώνου . . . 28
26. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κύβου 28
27. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κύβου 29
28. Προβλήματα κύβου 30

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ 32

1. Παρατηρήσεις 32
2. Ἐπιφάνειά του 32
3. Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι του 33
4. Σχῆμα ἑδρῶν του 33
5. Σχῆμα του 34
6. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου . 36
7. Κατασκευὴ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἀπὸ χαρτόνιον . . . 36
8. Παράστασις τῶν εὐθειῶν, ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν σωμάτων ἐπὶ χάρτον (κλῖμαξ) 37
9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 39
10. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου 39
11. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 40
12. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου . . . 41
13. Προβλήματα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 42

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ 44

1. Παρατηρήσεις 44
2. Ἐπιφάνειά του 44
3. Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι 45
4. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν του 46
5. Σχῆμα τοῦ ἑξαέδρου στερεοῦ 46
6. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου . 48
7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλογράμμου 48
8. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου . 48
9. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου πλαγίου παραλληλεπιπέδου 50
10. Προβλήματα πλαγίου παραλληλεπιπέδου 51

ΠΡΙΣΜΑΤΑ 53

1. Παρατηρήσεις 53
2. Εἴδη πρισμάτων 55
3. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων 55

Σελὶς

4. Τρίγωνα 56
5. Ἰχνογράφησις τριγώνου 57
6. Κατασκευὴ τριγώνου ἀπὸ χαρτόνιον 57
7. Διαστάσεις τοῦ τριγώνου 57
8. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου 58
9. Προβλήματα 59
10. Πολύγωνα 60
11. Ἰχνογράφησις κανονικοῦ πολυγώνου 60
12. Κατασκευὴ κανονικοῦ πολυγώνου ἀπὸ χαρτόνιον . . . 60
13. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγώνου 61
14. Προβλήματα 62
15. Διαστάσεις τοῦ πρίσματος 63
16. Ἰχνογράφησις πρίσματος 63
17. Πῶς ἰχνογραφοῦμε τὸ ἀνάπτυγμα πρίσματος . . . 63
18. Κατασκευὴ πρίσματος ἀπὸ χαρτόνιον 64
19. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πρίσματος 64
20. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου παντὸς πρίσματος. 65
21. Προβλήματα πρίσματος 66

ΠΥΡΑΜΙΣ 68

1. Παρατηρήσεις 68
2. Εἴδη πυραμίδων 69
3. Ἰχνογράφησις πυραμίδος 70
4. Ἰχνογράφησις ἀναπτύγματος κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος . 70
5. Κατασκευὴ κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἀπὸ χαρτόνιον . . 70
6. Διαστάσεις τῆς πυραμίδος 71
7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς πυραμίδος 71
8. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου πυραμίδος 72
9. Προβλήματα πυραμίδος 73

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ 75

1. Παρατηρήσεις 75
2. Ἰχνογράφησις κολούρου πυραμίδος 76
3. Ἰχνογράφησις ἀναπτύγματος κολούρου πυραμίδος . . . 76
4. Κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος ἀπὸ χαρτόνιον 77
5. Ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος 77
6. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κολούρου πυραμίδος 80
7. Προβλήματα καὶ ἀσκήσεις κολούρου πυραμίδος 81

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΑΛΛΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ . . . 82

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΤΑΞΙΣ ΕΚΤΗ

Σελίς

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ 84
1. Παρατηρήσεις 85
2. Κύκλος 85
3. Μοῖραι καὶ μοιρογνωμόνιον 87
4. Μέτρησις ἐπιπέδου γωνίας διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου . . . 87
5. Χάραξις ἐπιπέδου γωνίας ὡρισμένου μεγέθους 88
6. Κατασκευὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀπὸ **χαρτόνιον** 88
7. Εὐθύγραμμον σχῆμα ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον 89
8. Μέτρησις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου 90
9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κύκλου 91
10. Εὕρεσις ἐμβαδοῦ τομέως κύκλου 92
11. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου 93
12. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κυλίνδρου 94
13. Προβλήματα κύκλου 95
14. Προβλήματα κυλίνδρου 97
15. Ἰχνογράφησις κυλίνδρου 99
16. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος κυλίνδρου 100
17. Κατασκευὴ κυλίνδρου ἀπὸ **χαρτόνιον** 100
18. Ἀσκήσεις 100
ΚΩΝΟΣ 101
1. Παρατηρήσεις 101
2. Ἰχνογράφησις κώνου 102
3. Κατασκευὴ κώνου ἀπὸ πηλὸν 102
4. Ἀσκήσεις 102
5. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κώνου 103
6. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κώνου 103
7. Προβλήματα κώνου 105
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ 106
1. Παρατηρήσεις 106
2. Ἰχνογράφησις κολούρου κώνου 107
3. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κολούρου κώνου 108
4. Προβλήματα κολούρου κώνου 109

ΣΦΑΙΡΑ

1. Παρατηρήσεις 110
2. Ἀσκήσεις 112
3. Εὕρεσις ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας 112
4. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου σφαίρας 113
5. Προβλήματα σφαίρας 114
ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ . 115

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΑΙΔΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Διεύθυνση : ΘΕΜΟΥ ΡΟΔΑΝΘΗ

1.	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΥΘΟΛΟΓΙΑ	Θέμου Ροδάνθη
2.	ΙΛΙΑΔΑ	Γιώργου Γεραλῆ
3.	ΟΔΥΣΣΕΙΑ	Γιώργου Γεραλῆ
4.	Ο ΞΕΡΟΒΡΑΧΟΣ ΔΕΝ ΠΡΟΣΚΥΝΑΕΙ	Γιάννη Μπενέκου
5.	ΤΑ ΠΟΙΗΜΑΤΑ ΜΟΥ (παιδ. ἀνθολ.)	Μιχ. Περάνθη
6.	ΠΑΙΔΙΑ ΜΕ ΨΥΧΗ	Κ.Α. Σφαέλλου-Βενιζέλου
7.	ΤΟ ΚΑΣΤΡΟ ΤΗΣ ΚΥΡΑΣ	Ἄλκη Τροπαιάτη
8.	ΜΙΑ ΦΟΡΑ ΚΙ ΕΝΑΝ ΚΑΙΡΟ	Θέμου Ροδάνθη
9.	ΤΟ ΑΗΤΟΠΟΥΛΟ ΤΗΣ ΥΔΡΑΣ	Ἄλκη Τροπαιάτη
10.	Ο ΜΕΓΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ	Γιώργου Γεραλῆ
11.	ΤΟ ΠΑΡΑΜΥΘΙ ΤΟΥ ΑΙΣΩΠΟΥ	Θέμου Ροδάνθη
12.	ΜΥΘΟΙ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΑ ΖΩΑ	Χάρη Σακελλαρίου
13.	ΚΟΚΚΙΝΗ ΚΛΩΣΤΗ ΔΕΜΕΝΗ	Π. Στάϊκου
14.	ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΡΑΙΣΚΑΚΗΣ	Θέμου Ροδάνθη
15.	ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΘΡΥΛΟΙ ΓΙΑ Τ' ΑΓΡΙΜΙΑ	Χάρη Σακελλαρίου
16.	ΠΑΡΑΜΥΘΕΝΙΟΣ ΚΟΣΜΟΣ	Γιώργου Γεραλῆ
17.	ΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΤΗΣ ΧΙΟΝΑΤΗΣ	Σπύρου Ζήση
18.	ΤΑ ΧΡΟΝΙΑ ΤΗΣ ΔΟΞΑΣ	Ἄλκη Τροπαιάτη
19.	ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΑΠ' ΤΟΝ ΠΛΟΥΤΑΡΧΟ	Γιώργου Γεραλῆ
20.	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΣ	Ἄλκη Τροπαιάτη
21.	Ο ΜΙΚΡΟΣ ΘΑΛΑΣΣΟΛΥΚΟΣ	Π. Στάϊκου

Τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν βιβλίων τῆς «ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ» εἶναι ἡ **ποιότητα** καὶ ἡ **Ἑλληνικότητα**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ

ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 14 — ΑΘΗΝΑΙ — Τ. 101

ΤΗΛ. 536-553